ე. გურსა

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტომი პირველი

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible] ტექნიკა და შრომა
ტფილისი [illegible]

Э. ГУРСА

КУРС
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФЕРЕНЦИАЛЫ.
ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ.
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR
EDOUARD GOURSAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

CINQUIÈME ÉDITION

TOME I

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES
INTÉGRALES DÉFINIES
DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

ТЕХИЗДАТЕЛЬСТВО „ТЕХНИКА ДА ШРОМА“
ТБИЛИСИ 1935

ე. გურსა

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტომი პირველი

წარმოებულები და დიფერენციალები — განსაზღვრული ინტეგრალები — წკრივად დაშლა — გეომეტრიული გამოყენებანი

თარგმნილი რუსულით
[illegible]

ა. რუხაძის რედაქციით

სახელმწიფო გამომცემლობა „ტექნიკ[illegible]
თბილისი

რედაქტორის შენიშვნა I და II ტომის მეორე რუსული გამოცემისათვის

ე. გურსას „მათემატიკური ანალიზის კურსმა“ რუს მკითხველებში უკვე მოიპოვა დამსახურებული სახელი და აღიარება. მოცულობით ეს სახელმძღვანელო თანამედროვე მსოფლიო მათემატიკურ ლიტერატურაში წარმოადგენს ყველაზე უფრო სრულ სახელმძღვანელოს, ამავე დროს მოყვანილი ფაქტები შერჩეულია არა ენციკლოპედიური პრინციპით; შერჩევას საფუძვლად უდევს ერთი ხელმძღვანელი აზრი—წარმოადგინოს აუცილებელი მასალა, რომელსაც ემყარება თანამედროვე მეცნიერების ყველაზე უფრო მნიშვნელოვან პრობლემების დამუშავება.

წიგნმა, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელომ უკვე დიდი სარგებლობა მოუტანა ჩვენი უნივერსიტეტების მოსწავლე ახალგაზრდობას ანალიზის ჩვეულებრივი კურსის გაღრმავებისა და თვითგანვითარებისათვის; თამამად შეიძლება ითქვას, რომ მან დიდად შეუწყო ხელი ჩვენი მათემატიკური კულტურის დონის ამაღლებას. პირველი თარგმანები შესრულებულია—ტომი I ფრანგული პირველი და მეორე გამოცემიდან, ტომი II—მეორე გამოცემიდან. მას შემდეგ ავტორმა თავისი კურსის პირველი ტომი საგრძნობლად გადაამუშავა, მეორე ტომში კი მრავალი დამატება შეიტანა. ავტორის მთავარი მიზანი იყო დაეყენებია ახალი გამოცემები მათემატიკური აზრის განვითარების თანამედროვე დონეზე; საკმარისია აღვნიშნოთ, რომ უკანასკნელი ათი წლის განმავლობაში ნამდვილი ცვლადის ფუნქციების თეორის ძირითადი ცნებები აუცილებელ საშუალებად გადაიქცა ანალიზის დასაბუთებისათვის; დამატებანი ეხება მთელ რიგ საკითხებისას, რომლებიც უკანასკნელი ათი წლის განმავლობაში იქნა დამუშავებული და რომლებიც იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ მათ სახელმძღვანელოში თავისი ადგილი უნდა დაეთმოს; ამასთან ერთად დიფერენციალურ გეომეტრიის დალაგებაში სისტემატურად არის შეტანილი გაუსის კოორდინატები. ბუნებრივია, რედაქტორის მიზანი იყო მოეცა ეს ახალი ფაქტები და იდეები თარგმანში. მეორე მხრით ახალ გამოცემებში გურსამ გამორიცხა რიგი იმ „ელემენტურ“ საკითხებისა, როგორც მაგალითად, განსაზღვრულ ინტეგრალების სისტემატური თეორია, რომლებიც საფრანგეთში საშუალო შკოლის კურსშია შეტანილი. ჩვენს გამოცემაში კი შეტანილია ძველ გამოცემათა მასალის უმთავრესი ნაწილი.

აღნიშნულ გამოცემას საფუძვლად უდევს ა. ი. ნეკრასოვის მიერ შესანიშნავად შესრულებული თარგმანი და განსვენებულ ბ. ა. მლოძევსკის მიერ ზედმიწევნით რედაქტირებული ტექსტი პირველ რუსულ გამოცემებისა. დამატებათა თარგმანი პირველი ტომისათვის შესრულებულია ი. ფ. მოროშკინის (ანალიზური თავები) და ნ. ვ. ეფიმოვის მიერ.

ვ. სტეპანოვი

თავი I

შესავალი

თანდათანობითი განზოგადოებით არითმეტიკაში ჩვენ გადავდივართ ნატურალურ რიცხვებიდან წილად რიცხვებზე, ნულზე და ფარდობით რიცხვებზე (დადებითსა და უარყოფითზე). მაგრამ უკვე ფესვის ამოღების ოპერაციას მივყავართ ახალი გვარის რიცხვების, *ირაციონალურ რიცხვების* შემოღებაზე. ამ ახალ რიცხვებს ჩვენ მაშინაც მივიღებთ, როცა რიცხვებს კონკრეტულ სიდიდეთა გაზომვისათვის გამოვიყენებთ. თუ გვაქვს, მაგალითად, ორი თანაზომადი მონაკვეთი A და B, მაშინ B-ს ზომას A-ს მიმართ, ან B-ს ფარდობას A-სთან, უწოდებენ ისეთ $\frac{m}{n}$ რიცხვს, რომელიც წარმოადგენს განაყოფს m და n რიცხვებისას, სადაც m და n გვიჩვენებს B და A-ში შემავალ საერთო ზომის რაოდენობას. თუ A და B უთანაზომოა, მაშინ მათი ფარდობა არ შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს მთელი ან წილადი რიცხვით და წარმოადგენს სხვაგვარ რიცხვს — *ირაციონალურს*. თუმცა უთანაზომო ფარდობა $\frac{B}{A}$ არ ეტოლება არავითარ რაციონალურ რიცხვს, მაგრამ არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალურ რიცხვებისა, რომლებიც რაგინდ ახლოს არიან $\frac{B}{A}$-სთან; რომ ასეთი რიცხვი მივიღოთ, საკმარისია B შევცვალოთ რომელიმე C მონაკვეთით, რომელიც B-საგან რაგინდ მცირე δ მონაკვეთზე ნაკლები სიდიდით განსხვავდება, მაგრამ თანაზომია A-სთან. ამაზეა დამყარებული ირაციონალურ რიცხვების, როგორც უთანაზომო სიდიდეთა ფარდობების მიახლოებითი გამოანგარიშების ხერხი, რომლებიც გადმოცემულია ელემენტარულ გეომეტრიაში.

ირაციონალური რიცხვები შეიძლება აგრეთვე განვსაზღვროთ წმინდა არითმეტიკულადაც, კონკრეტულ სიდიდეთა შორის ფარდობების განხილვის გარეშე. აქ ჩვენ მოვიყვანთ დედეკინდის (Dedekind) მეთოდს.

ვთქვათ რაიმე წესით ყველა რაციონალურ რიცხვის სიმრავლე დავყავით ორ A და B კლასად, რომლებსაც აქვს ის თვისება, რომ A კლასის ყოველი a რიცხვი ნაკლებია B კლასის ყოველ b რიცხვზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ ამით რაციონალურ რიცხვთა არეში დავამყარეთ რაიმე *განკვეთა*.

შესაძლოა წარმოგვიდგეს სამი შემთხვევა:

1. A კლასის რიცხვთა შორის არსებობს რომელიმე L რიცხვი, მეტი ამავე კლასის ყველა დანარჩენ რიცხვზე.

2. B კლასის რიცხვთა შორის არსებობს რომელიმე L რიცხვი, ნაკლები ამავე კლასის ყველა დანარჩენ რიცხვზე.

3. A კლასში არ არის არც ერთი რიცხვი, მეტი ამავე კლასის ყველა დანარჩენ რიცხვზე და, B კლასში არ არის არც ერთი რიცხვი, ნაკლები ამავე კლასის ყველა დანარჩენ რიცხვზე.

პირველ ორ შემთხვევაში ცხადია, რომ ჩვენი დაყოფა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისა ორ კლასად სავსებით განსაზღვრავს L რიცხვს, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ L-ზე ნაკლები ყოველი რიცხვი ეკუთვნის A კლასს, ხოლო L-ზე მეტი ყოველი რიცხვი, ეკუთვნის B კლასს. ასეთ რიცხვს ზოგჯერ გამკვეთი რიცხვი ეწოდება და აღინიშნება (A, B) სიმბოლოთი. მესამე შემთხვევაში, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომელსაც აქვს წინა თვისებები, მაგრამ ამ შემთხვევაშიაც ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ჩვენი დაყოფა განსაზღვრავს რომელიმე ირაციონალურ L რიცხვს, რომელიც მეტია A კლასის ყოველ რიცხვზე და ნაკლები B კლასის ყოველ რიცხვზე. ამგვარად ეს L რიცხვი განისაზღვრება არითმეტიკულად როგორც რაიმე განკვეთა.

დავამტკიცოთ, რომ ყოველ რიცხვს, მოცემულს როგორც ორი სიდიდის ფარდობა, ეთანადება გარკვეული განკვეთა. ამისათვის გამოვსახოთ ანალიზური გეომეტრიის წესების მიხედვით ყოველი x რიცხვი რაიმე წრფის x' წერტილით ისე, რომ ფარდობა $\frac{Ox'}{OK}$, სადაც OK—ზომის ერთეულია, ეტოლებოდეს x-ს. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვი L. მაშინ წრფეზე შესაბამი L' წერტილი გაყოფს რაციონალურ წერტილთა სიმრავლეს ორ A' და B' კლასად; A'-ს ჩვენ მივაკუთვნებთ ყველა რაციონალურ a' წერტილს, მდებარეს L'-ის მარცხნით, ხოლო B' კლასს — ყველა b' წერტილს, მდებარეს L'-ის მარჯვნით; თუ თვით L' წერტილი რაციონალურია, მაშინ მას მივაკუთვნებთ განურჩევლად ან A' კლასს ან B' კლასს. ცხადია, რომ ამასთანავე ყოველი a' წერტილის კოორდინატი ნაკლებია ყოველ b' წერტილის კოორდინატზე, და ჩვენ მივიღებთ განკვეთას, რომელიც განსაზღვრავს მოცემ L ფარდობას.

დავამტკიცოთ შებრუნებით, რომ ყოველ მოცემულ (A, B) განკვეთას ეთანადება რომელიმე ორი მონაკვეთის ფარდობა. ვთქვათ მოცემული გვაქვს განკვეთა (A, B). განვიხილოთ A კლასის ყველა რაციონალური a რიცხვი, და B კლასის ყველა რაციონალური b რიცხვი. აღვნიშნოთ წრფეზე ყველა a', b' წერტილი, რომელთა კოორდინატები არიან რაციონალური a, b რიცხვები. ვინაიდან თვით განკვეთის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი a რიცხვი ნაკლებია ყოველ b რიცხვზე, ამიტომ ყველა a' წერტილი მოთავსებული იქნება ერთდაიმავე მხარეზე ყველა b' წერტილის მიმართ; მაგალითად, ჩვეულებრივი წესით გამოსახვის დროს ყველა a' წერტილი მოთავსებული იქნება უფრო მარცხნით ვიდრე ყველა b' წერტილი. გავყოთ ახლა წრფის ყველა წერტილი ორ A' და B' კლასად შემდეგნაირად: A' კლასს მივაკუთვნოთ ყველა a' წერტილი და ყველა წერტილი მოთავსებული a' წერტილებს შორის,

ხოლო B' კლასს — წრფის დანარჩენი წერტილები. შემდგომი დამტკიცების დროს ჩვენ ვისარგებლებთ იმ თვისებით, რომ წრფის წერტილები ჰქმნიან მასზედ უწყვეტ წკრივს. ეს თვისება სხვადასხვაგვარად გამოითქმება. ჩვენ მას შემდეგნაირად გამოვთქვამთ:

თუ წრფის ყველა წერტილი დანაწილებულია ორ კლასად იმგვარად, რომ ერთი და იმავე კლასის ყოველ ორ წერტილს შორის იმყოფება მხოლოდ ამავე კლასის წერტილები, მაშინ მუდამ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი საზღვრითი წერტილი ე. ი. ისეთი წერტილი, რომ ყოველი ორი წერტილი, რომელთა შორის ის ძევს, ეკუთვნის სხვადასხვა კლასს.

ცხადია, რომ წრფის წერტილთა წინანდელ განაწილებას A' და B' კლასებად აქვს ამ აქსიომით მოთხოვნილი თვისება. ამიტომ აქ არსებობს ასეთი საზღვრითი L' წერტილი; ვთქვათ მას ეთანადება რიცხვი L. თუ ეს რიცხვი რაციონალურია, მაშინ ის ეკუთვნის ან A კლასს, ან B კლასს, და ჩვენ გვაქვს $a \leqslant L < b$, ან $a < L \leqslant b$; თუ კი რიცხვი L — ირაციონალურია, მაშინ ჩვენ გვაქვს $a < L < b$. ამნაირად რიცხვი L, რომელიც განსაზღვრულია როგორც ფარდობა $\frac{OL'}{OK}$, შეიძლება აგრეთვე განსაზღვრულ იქნეს როგორც (A, B) განკვეთა. აქედან გამომდინარეობს, რომ განკვეთანი განსაზღვრავენ ნამდვილ რიცხვთა მთელ უწყვეტ სიმრავლეს.

I. ზღვრები. სიმრავლეები

1. ზღვრები. ამბობენ, რომ x ცვლადს *ზღვრად* მუდმივი a რიცხვი აქვს, ანუ *მიისწრაფის* a-საკენ, როცა $x - a$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე დაწყებული რომელიმე მომენტიდან, *ხდება და რჩება* ნაკლები ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით რიცხვზე. როცა $a = 0$, x ცვლადს *უსასრულოდ მცირე* ეწოდება. გამოთქმები: „x-ს *ზღვრად* a რიცხვი *აქვს*" და „სხვაობა $x - a$ უსასრულოდ მცირეა", ცხადია, ერთმანეთის ტოლფასია. რომ უჩვენოთ, რომ x ცვლადი მიისწრაფის a ზღვარისაკენ, სხვაობას $x - a$ ხშირად ჰყოფენ რამდენიმე ნაწილად, მაგალითად — სამად, და ამტკიცებენ, რომ თითოეული ამ ნაწილის აბსოლუტური სიდიდე რომელიმე მომენტიდან მოყოლებული რჩება ნაკლები, ვიდრე $\frac{\varepsilon}{3}$, სადაც ε — ნებითი დადებითი რიცხვია.

დამტკიცების ამ ხერხს, რომელსაც ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ, ზოგჯერ უწოდებენ *დამტკიცების მეთოდს ε-ის საშუალებით* (ეფსილონ — დამტკიცება).

ვისარგებლებთ რა არა სწორი, მაგრამ გამოთქმისათვის ხელსაყრელი წესით, ვიტყვით აგრეთვე ზოგჯერ, რომ x ცვლადს აქვს ზღვრად $+\infty$ ან $-\infty$, ანუ მიისწრაფის $\pm\infty$-საკენ. მაგალითად, გამოთქმა: „x-ს ზღვრად აქვს $+\infty$", ნიშნავს, რომ x ცვლადი დაწყებული რომელიმე მომენტიდან ხდება და რჩება

მეტი ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით A რიცხვზე, და არა იმას, რომ $(+\infty-x)$ სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ, რასაც არ ექნებოდა არავითარი აზრი.

მზგავსადვე ამბობენ ხშირად, რომ ფორმით ან მდებარეობით ცვლად რომელიმე გეომეტრიულ ნაკვთს აქვს ზღვრად მოცემული უცვლელი ნაკვთი. თუ ყოველ კერძო შემთხვევაში სურთ უფრო დააზუსტონ ეს გამოთქმა, უნდა გაიზომოს ერთი ან რამდენიმე ცვლადი პარამეტრის საშუალებით განსხვავება უცვლელ და მოძრავ ნაკვთებს შორის, და ზემოთ გამოთქმული ზუსტად ნიშნავს, რომ ეს ცვლადები გარკვეულ პირობებში მიისწრაფიან ნულისაკენ. მაგალითად, ავიღოთ C მრუდზე ორი მეზობელი M და M' წერტილი. ამბობენ, რომ MM' მკვეთის ზღვრული მდებარეობა არის MT მხები M წერტილში, როცა M' წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება M წერტილს ისე, რომ იგი მუდამ რჩება C მრუდზე. ვინაიდან ორივე MM' და MT წრფე გადიკვეთება უძრავ M წერტილში, ბუნებრივია, მათ განსხვავების ზომად მივიღოთ მახვილი α კუთხე, შედგენილი ორივე წრფით, და აღნიშნული წინადადება ანალიზის ენაზე ნიშნავს, რომ კუთხე α გახდება ნაკლები მოცემულ ნებისმიერად შერჩეულ ε კუთხეზე, იმ დაშვებით, თუ თვით MM' მანძილი ნაკლები იქნება მეორე შესაფერისად განსაზღვრულ ρ სიგრძეზე.

2. ნამდვილ რიცხვთა არეში განკვეთა. დავუშვათ ახლა, რომ ყველა რიცხვის სიმრავლე, როგორც რაციონალური, ისე ირაციონალური, დაყოფილია ორ A და B კლასად, რომლებსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ყოველი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვი ეკუთვნის ერთ-ერთს ორი კლასიდან.

2) A კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B კლასის ყოველ რიცხვზე.

ცხადია, რომ ორივე კლასი შეიცავს უსასრულო სიმრავლეს როგორც რაციონალურ, ისე ირაციონალურ რიცხვებისას. დავამტკიცოთ, რომ მუდამ არსებობს ისეთი L რიცხვი, რომელსაც აქვს შემდეგი ორი თვისება:

1) L-ზე ნაკლები ყოველი რიცხვი ეკუთვნის A კლასს.

2) L-ზე მეტი ყოველი რიცხვი ეკუთვნის B კლასს.

ამ L რიცხვს, ამ შემთხვევაშიაც, განკვეთა ეწოდება და როგორც ჩვენ ვნახავთ, იგი იქნება ან რაციონალური, ან ირაციონალური. L რიცხვის არსებობა არის შედეგი თვით ირაციონალური რიცხვის ცნებისა იმ სახით, როგორც ჩვენ ის ზემოთ შემოვიყვანეთ. მართლაც, განვიხილოთ ორივე A და B კლასში მხოლოდ რაციონალური რიცხვები. მიშინ ყველა რაციონალურ რიცხვის სიმრავლე დაიყოფა ორ (α) და (β) კლასად, რომლებსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ყოველი რაციონალური რიცხვი ეკუთვნის ერთ-ერთს ორი კლასიდან;

2) (α) კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია (β) კლასის ყოველ რიცხვზე.

აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს სამი შემთხვევა:

1) (α) კლასში არსებობს რაციონალური რიცხვი $\frac{p}{q}$, მეტი ამავე კლასის ყველა რაციონალურ რიცხვზე. მაშინ ეს $\frac{p}{q}$ რიცხვი

იქნება სწორედ L რიცხვი. მართლაც, $\frac{p}{q}$-ზე ნაკლები ყოველი a რიცხვი ეკუთვნის A კლასს. $\frac{p}{q}$-ზე მეტი ყოველი b რიცხვი ეკუთვნის B კლასს. ეს ცხადია, თუ b რაციონალურია; თუ კი b ირაციონალურია, მაშინ ჩვენ ავიღებთ რაციონალურ r რიცხვს, მოთავსებულს $\frac{p}{q}$ და b-ს შორის. ეს რაციონალური r რიცხვი ეკუთვნის B კლასს; მაშასადამე, B კლასს ეკუთვნის b რიცხვიც.

2) (β) კლასში არსებობს რაციონალური რიცხვი $\frac{p'}{q'}$, ნაკლები ამავე კლასის ყველა რაციონალურ რიცხვზე. როგორც პირველ შემთხვევაში, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ რიცხვი $\frac{p'}{q'}$ იქნება L რიცხვი.

3) დაბოლოს, შესაძლებელია, რომ (α) კლასში არ იყოს არცერთი რაციონალური რიცხვი, მეტი იმავე კლასის ყველა დანარჩენ რაციონალურ რიცხვზე და, (β) კლასში არ იყოს არცერთი რაციონალური რიცხვი, ნაკლები ამავე კლასის ყველა დანარჩენ რაციონალურ რიცხვზე. მაშინ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ (α) და (β) კლასად განსაზღვრავს, წინანდელის მსგავსად, რომელიმე ირაციონალურ m რიცხვს, რომელიც მეტია (α) კლასის ყველა რაციონალურ რიცხვზე და ნაკლები (β) კლასის ყველა რაციონალურ რიცხვზე. ამ შემთხვევაში L რიცხვი იქნება სწორედ რიცხვი m. მართლაც, m-ზე ნაკლები ყოველი რაციონალური რიცხვი მიეკუთვნება A კლასს, და m-ზე მეტი ყოველი რაციონალური რიცხვი მაეკუთვნება B კლასს. ავიღოთ ახლა რომელიმე ირაციონალური რიცხვი $m'<m$, და ვთქვათ K რაციონალური რიცხვია, მოთავსებული m' და m-ს შორის; ვინაიდან K ეკუთვნის A კლასს, ამიტომ A კლასს მიეკუთვნება m' რიცხვიც. სრულიად ასევე შეიძლება დამტკიცება იმისა, რომ m-ზე მეტი ყოველი ირაციონალური რიცხვი ეკუთვნის B კლასს.

თვით L განმკვეთი რიცხვი შეიძლება ეკუთვნოდეს როგორც A კლასს, ისე B კლასსაც. ასე, მაგალითად, პირველ შემთხვევაში ის ეკუთვნის A კლასს, მეორეში—B კლასს, ხოლო მესამეში ის შეიძლება ეკუთვნოდეს ან A კლასს, ან B კლასს. ჩვენ აქ ვხედავთ, რომ განკვეთა, წარმოებული ყველა რაციონალურ ისე ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, არ იძლევა არავითარ ახალ რიცხვს.

განკვეთის ასეთი ცნება ხშირად გვხვდება ელემენტარულ საკითხების განხილვის დროს. განვიხილოთ, მაგალითად, მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრი არის $n^{-\mu}$; თუ A კლასს მივაკუთვნებთ ყველა μ რიცხვს, რომლებისთვისაც ეს მწკრივი განშლადია, ხოლო B კლასს ყველა μ რიცხვს, რომლებისთვისაც მწკრივი კრებადია, მაშინ მივიღებთ ყველა რიცხვის სიმრავლის დაყოფას ორ კლასად, რომლებიც, ცხადია, აკმაყოფილებენ ყველა აღნიშნულ პირობას. აქ ჩვენ გვაქვს $L=1$, და ეს რიცხვი L ეკუთვნის A კლასს.

3. შემოსაზღვრული სიმრავლეები. ჩვენ უკვე რამოდენიმეჯერ ვიხმარეთ სიტყვა სიმრავლე. როგორც ჩანს სიმრავლის ცნება ეკუთვნის იმათ ჯგუფს, რომლებიც უსარგებლოა განისაზღვროს მაგალითების გარეშე. იმ საგანთა ყოველი ერთობლიობა, რომელთა რიცხვი სასრულო ან უსასრულოა, შეადგენს სიმ-

რავლეს. ასეთია მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, სიბრტყეზე მდებარე წრფეთა სიმრავლე და ა. შ. ჩვენ აქ განვიხილავთ მხოლოდ რიცხვთა სიმრავლეებს. ამბობენ, რომ რიცხვთა სიმრავლე E *ზევიდან შემოსაზღვრულია*, თუ არსებობს a რიცხვი, რომელიც მეტია ამ სიმრავლის ყველა რიცხვზე; ცხადია, რომ, თუ არსებობს ერთი ასეთი რიცხვი, მაშინ მოიძებნება ასეთი რიცხვთა უსასრულო სიმრავლე, და ყოველ რიცხვს, რომელსაც აღნიშნული თვისება აქვს, ეწოდება E სიმრავლის *ზედა საზღვარი*. ამნაირადვე E სიმრავლეს ეწოდება *ქვევიდან შემოსაზღვრული*, თუ არსებობს E სიმრავლის ყველა რიცხვზე ნაკლები b რიცხვი; ყოველი ამ თვისების რიცხვი არის ამ სიმრავლის *ქვედა საზღვარი*. ზევიდან და ქვევიდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს ეწოდება *შემოსაზღვრული* სიმრავლე. ყველა დადებით რიცხვის სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვევიდან; სიმრავლე ყველა უარყოფით რიცხვებისა, რომლებიც მოთავსებულია 0 და -1 შორის შემოსაზღვრულია როგორც ზევიდან, ისე ქვევიდან. ყველა დადებით და უარყოფით რიცხვის სიმრავლე არ არის შემოსაზღვრული არც ზევიდან და არც ქვევიდან.

ვთქვათ E—ზევიდან შემოსაზღვრული რიცხვთა სიმრავლეა. E სიმრავლის მიმართ ყველა რიცხვი, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი, შეიძლება დავყოთ ორ კლასად: A და B. ჩვენ ვიტყვით, რომ რიცხვი x ეკუთვნის A კლასს, თუ არსებობს E სიმრავლის ერთი ან რამდენიმე რიცხვი, მეტი ვიდრე x, და რომ ის ეკუთვნის B კლასს, თუ არ არის E სიმრავლის არც ერთი რიცხვი, რომელიც აღემატება x-ს. ცხადია, რადგან E სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზევიდან, ამიტომ არსებობს ორივე კლასის რიცხვები, და A კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B კლასის ყოველ რიცხვზე. ვთქვათ, M—ამ ორი კლასის განმკვეთი რიცხვია. ამ M რიცხვს აქვს შემდეგი ორი თვისება:

1) *არ არის E სიმრავლის არც ერთი რიცხვი, რომელიც აღემატებოდეს M-ს.*

2) *როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი, მუდამ მოიძებნება E სიმრავლის რიცხვი, მეტი, ვიდრე $M-\varepsilon$.*

მართლაც, დავუშვათ, რომ E-ში არსებობს M-ზე მეტი რიცხვი

$$M+h \qquad (h>0).$$

რიცხვი $M+\dfrac{h}{2}$, რომელიც აგრეთვე აღემატება M-ს, იქნებოდა A კლასის რიცხვი; მაგრამ ეს შეუძლებელია. მეორე მხრით, თუ ε რომელიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ რიცხვი $M-\varepsilon$ ეკუთვნის A კლასს და, მაშასადამე, E სიმრავლეში არსებობს ერთი რიცხვი მაინც, რომელიც აღემატება $M-\varepsilon$-ს.

M რიცხვს, განსაზღვრულს ნაჩვენები წესით, ეწოდება *ნამდვილი ზედა საზღვარი* ან უბრალოდ E სიმრავლის *ზედა საზღვარი*. ეს M რიცხვი შეიძლება ეკუთვნოდეს E-ს; ეს ყოველთვის ასე იქნება, თუ სიმრავლე შედგენილია n რიცხვისაგან (სადაც n სასრულოა). მაგრამ თუ E წარმოადგენს რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეს, მაშინ ზედა საზღვარი შეიძლება არ შედიოდეს სიმრავლის შემადგენლობაში. განვიხილოთ, მაგალითად, სიმრავლე *რაციონალური*

რიცხვებისა, რომელთა კვადრატი არ აღემატება 2-ს; აქ ზედა საზღვარი არის ირაციონალური რიცხვი $\sqrt{2}$, რომელიც არ ეკუთვნის სიმრავლეს. პირიქით, სიმრავლეს როგორც *რაციონალურ*, ისე *ირაციონალურ* რიცხვებისას, რომელთა კვადრატი არ აღემატება 2-ს, აგრეთვე აქვს ზედა საზღვარი $\sqrt{2}$, მაგრამ ეს რიცხვი უკვე შედის სიმრავლის შემადგენლობაში. შევნიშნავთ კიდევ, რომ, თუ M არ ეკუთვნის E სიმრავლეს, მუდამ მოიძებნება E-ს უსასრულოდ ბევრი რიცხვი, რომლებიც აღემატება $M-\varepsilon$-ს, რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს ε. მართლაც, რომ არსებობდეს მათი სასრულო რიცხვი, მაშინ უდიდესი მათ შორის იქნებოდა E-ს ზედა საზღვარი.

ამგვარადვე ამტკიცებენ, რომ თუ E სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვევიდან, მაშინ არსებობს რიცხვი m, რომელსაც აქვს შემდეგი ორი თვისება:

1) *E სიმრავლის არცერთი რიცხვი არ არის m-ზე ნაკლები.*

2) *თუ მოცემულია დადებითი ε რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება E სიმრავლის რიცხვი, ნაკლები, ვიდრე $m+\varepsilon$.*

ამ m რიცხვს ეწოდება სიმრავლის ნამდვილი *ქვედა საზღვარი*.

აშკარაა, რომ არ შეიძლება არსებობდეს ერთზე მეტი რიცხვი, რომელსაც ჰქონდეს m რიცხვის დამახასიათებელი ორი თვისება; იგივე სამართლიანია M-ის მიმართაც.

4. ზღვართა შორის უდიდესი. ვთქვათ E რომელიმე შემოსაზღვრული სიმრავლეა, რომელიც შეიცავს რიცხვთა უსასრულო რაოდენობას. ამ სიმრავლის მიმართ ჩვენ შეგვიძლია დავყოთ ყველა რიცხვი, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი, ორ A' და B' კლასად შემდეგნაირად: ჩვენ ვიტყვით, რომ რიცხვი x ეკუთვნის A' კლასს, თუ *არსებობს E სიმრავლეში უსასრულო სიმრავლე რიცხვებისა მეტი x—რიცხვზე*. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ x რიცხვი ეკუთვნის B' კლასს. ვინაიდან E სიმრავლე შემოსაზღვრულია და შედგება უამრავ რიცხვისაგან, ამიტომ, ცხადია, რომ არსებობს ორივე კლასის რიცხვები და A' კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B' კლასის ყოველ რიცხვზე. ვთქვათ Δ არის რიცხვი, რომელიც განაცალკევებს ორივე A' და B' კლასს; კოშის მიხედვით, ამ რიცხვს უწოდებენ E სიმრავლის *ზღვართა შორის უდიდესს*. ვთქვათ ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია; Δ რიცხვის თვით განსაზღვრიდან ცხადია, რომ $\Delta+\varepsilon$ რიცხვი ეკუთვნის B' კლასს, და $\Delta-\varepsilon$ რიცხვი A' კლასს. მაშასადამე, მუდამ არსებობს E სიმრავლის უამრავი რიცხვი $\Delta-\varepsilon$ და $\Delta+\varepsilon$-ს შორის მოთავსებული, იმ დროს როცა $\Delta+\varepsilon$-ზე მეტი რიცხვები არის მხოლოდ სასრულო რაოდენობის (ან არც ერთი).

ეს Δ რიცხვი დაკავშირებულია ერთ მნიშვნელოვან საკითხთან. გადმოცემის სიმარტივისათვის ყოველი a რიცხვი გამოვსახოთ $x'x$ წრფეზე ისეთი წერტილით, რომლის აბსცისი არის a და აღვნიშნოთ ერთიდაიმავე ასოთი როგორც ღერძის წერტილი, ისე მისი აბსცისი. ამნაირად რიცხვთა ყოველ E სიმრავლეს ეთანადება წრფეზე წერტილთა სიმრავლე, ანუ *წრფივი სიმრავლე*. შემოსაზღვრული სიმრავლის წერტილები დალაგებულია ღერძის სასრული სიგრძის მონაკვეთზე. ვთქვათ, მოცემულია წრფივი E სიმრავლე; თუ ამ სიმრავლის რომელიმე l წერტილის მახლობლობაში იმყოფება E სიმრავლის უსასრუ-

ლო რიცხვი წერტილებისა, ანუ, უფრო სწორად, თუ არსებობს უსასრულო სიმრავლე წერტილებისა, მოთავსებული $l-\varepsilon$ და $l+\varepsilon$-ს შორის, სადაც ε—ნებსითი დადებითი რიცხვია, მაშინ l წერტილს *ზღვარითი წერტილი* ან *შეკუმშვის წერტილი* ეწოდება.

ყოველ შემოსაზღვრულ წრფივ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს უსასრულო სიმრავლეს წერტილებისას, აქვს ერთი ზღვარითი წერტილი მაინც.

წერტილი Δ აბსცისით, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვსაზღვრეთ, ცხადია, არის E სიმრავლის ზღვარითი წერტილი, და ჩვენ ვხედავთ, რომ *ყოველ შემოსაზღვრულ წრფივ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს უსასრულო სიმრავლეს წერტილებისას, აქვს ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი.*

ეს არის კერძო შემთხვევა უფრო ზოგადი დებულებისა, რომელსაც ბოლცანოს (Bolzano) პრინციპი ეწოდება; ეს პრინციპი მდგომარეობს შემდეგში: *ყოველ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს უსასრულო სიმრავლეს წერტილებისას ნებისმიერი განზომილების სივრცეში, აქვს ერთი ზღვარითი წერტილი მაინც, ე. ი. ისეთი წერტილი, რომ მუდამ არსებობს E სიმრავლის უსასრულო სიმრავლე წერტილებისა, რომლებიც დაშორებული არიან მისგან ε რიცხვზე ნაკლები მანძილით, რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს ეს უკანასკნელი.* წრფივი სიმრავლისათვის მოყვანილი დამტკიცება შეიძლება გავრცელდეს ზოგად შემთხვევაზედაც. მას ჩვენ გავავრცელებთ ბრტყელ სიმრავლისათვის.

ვთქვათ E არის რომელიმე უსასრულო სიმრავლე სიბრტყის წერტილებისა, რომელთა კოორდინატები მოთავსებულია A და B რიცხვებს შორის. თუ (x, y) ამ სიმრავლის წერტილის კოორდინატებია, მაშინ რიცხვები x და y შეადგენენ ორ შემოსაზღვრულ წრფივი E_x და E_y სიმრავლეს. თუ ერთი ამ სიმრავლეთაგანი, მაგალითად E_x, შედგება სასრულო რიცხვი სხვადასხვა მნიშვნელობისაგან, მაშინ E სიმრავლეში მოიძებნება უსასრულო სიმრავლე წერტილებისა ერთი და იმავე აბსცისით; მაშასადამე, ეს წერტილები შეადგენენ წრფივ სიმრავლეს, რომელსაც აქვს ზღვარითი წერტილი. თუ E_x და E_y შეიცავენ უსასრულო სიმრავლეს წერტილებისას, მაშინ ვთქვათ, რომ X არის უდიდესი E_x-ის ზღვართა შორის; თვით ამ რიცხვის განსაზღვრის თანახმად, მოიძებნება E-ს უსასრულო სიმრავლე წერტილებისა, რომელთა აბსცისები მოთავსებულია $X-\varepsilon$ და $X+\varepsilon$-ს შორის, რა გინდ მცირეც არ უნდა იყოს ε. $x=X$ წრფის წერტილები აგრეთვე შეიძლება დაყოფილ იქნეს ორ კლასად; ჩვენ ვიტყვით, რომ ამ წრფის წერტილი y ორდინატით ეკუთვნის პირველ კლასს, თუ მოიძებნება E-ს უსასრულო სიმრავლე წერტილებისა, რომელთა ორდინატები არ აღემატებიან y-ს, ხოლო აბსცისები მოთავსებულია $X-\varepsilon$ და $X+\varepsilon$-ს შორის, რა გინდ მცირეც არ უნდა იყოს ε, და რომ ის ეკუთვნის მეორე კლასს, თუ საკმაოდ მცირე ε-სათვის არსებობს E სიმრავლის სასრულო რიცხვი წერტილებისა, რომელთა ორდინატები აღემატებიან y-ს, ხოლო აბსცისები მოთავსებულია $X-\varepsilon$ და $X+\varepsilon$-ს შორის. ვთქვათ, Y—რიცხვი,

ამ ორი კლასის განმაცალკევებელი რიცხვია; თუ η რომელიმე დადებითი რიცხვია, ხოლო ε არის საკმაოდ მცირე მეორე დადებითი რიცხვი, მაშინ ყოველთვის ვიპოვით E-ს უსასრულო სიმრავლეს წერტილებისას, რომელთა ორდინატები მოთავსებულია $Y-\eta$ და $Y+\eta$-ს შორის, ხოლო აბსცისები—$X-\varepsilon$ და $X+\varepsilon$-ს შორის. ცხადია, რომ ეს იქნება სწორი, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი ε, η რიცხვები და, მაშასადამე, (X, Y) არის E სიმრავლის ზღვარითი წერტილი.

სიმრავლეს, რომელიც შედგენილია რომელიმე E სიმრავლის ზღვარითი წერტილებისაგან, ეწოდება *წარმოებული სიმრავლე* და აღინიშნება E'-ით.

5. კრებადი მიმდევრობანი. განვიხილოთ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots, \tag{1}$$

რომლებიდან თითოეულს უჭირავს *გარკვეული* ადგილი; ამ მიმდევრობას ეწოდება *კრებადი*, თუ s_n მიისწრაფის რომელიმე S ზღვარისაკენ n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს. ყოველ მიმდევრობას, რომელიც არ არის კრებადი, ეწოდება *განშლადი*; ეს შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა $|s_n|$, დაწყებული რომელიმე მომენტიდან, რჩება მეტი ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით რიცხვზე, ან როცა s_n არავითარ ზღვარისაკენ არ მიისწრაფის, თუ გინდ მისი აბსოლუტური სიდიდე არ იზრდებოდეს უსასრულოდ.

მიმდევრობას ეწოდება *ზრდადი*, თუ $s_{n+1}-s_n \geqslant 0$, როგორიც არ უნდა იყოს n. მას ეწოდება *კლებადი*, თუ, n-ის ნებითი მნიშვნელობისათვის, $s_{n+1}-s_n \leqslant 0$.

ყოველი ზრდადი მიმდევრობა, შემოსაზღვრული ზოგადი წევრით, არის კრებადი.

მართლაც, (1) მიმდევრობის რიცხვები შეადგენს ამ შემთხვევაში შემოსაზღვრულ E სიმრავლეს. ვთქვათ, M ამ სიმრავლის ზედა საზღვარია; თუ ε ნებისმიერად მოცემული დადებითი რიცხვია, მაშინ მოიძებნება (1) მიმდევრობის s_m რიცხვი, რომელიც მეტია ვიდრე $M-\varepsilon$. n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აღემატება m-ს, გვექნება $s_n \geqslant s_m$, და, მაშასადამე, $M-\varepsilon < s_n \leqslant M$. ამგვარად სხვაობა $M-s_n$ ნაკლები იქნება ε-ზე, თუ $n \geqslant m$; სხვანაირად, s_n-ს აქვს ზღვრად M, როცა n უსასრულოდ იზრდება. ამნაირადვე ამტკიცებენ, რომ *ყოველი კლებადი მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრი რჩება მეტი რაიმე მუდმივ რიცხვზე, კრებადია* [1]).

მიმდევრობის კრებადობის ზოგადი კრიტერიუმი ადვილად გამოიყვანება ზღვართა შორის უდიდესის განხილვიდან.

მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველ დადებით ε რიცხვისათვის არსებობდეს

---

[1]) იგივე მსჯელობა გვაძლევს საშუალებას ვუჩვენოთ, რომ უფრო ზოგად შემთხვევაში x ცვლადი, რომელიც არადროს არ კლებულობს და რჩება ნაკლები მუდმივ რიცხვზე, მიისწრაფის ზღვარისაკენ; და, რომ ზღვარი აქვს x ცვლადს, რომელიც არადროს არ იზრდება და რჩება მეტი მუდმივ რიცხვზე.

ისეთი სათანადო n რიცხვი, რომ $s_{n+p}-s_n$ სხვაობა აბსოლუ-ტური სიდიდით ნაკლები იყოს ε-ზე, როგორიც არ უნდა იყოს მთელი დადებითი რიცხვი p.

ეს პირობა აუცილებელია. მართლაც, თუ s_n-ს აქვს ზღვრად S, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ საკმაოდ დიდი n რიცხვი, ისე რომ ყველა სხვაობა: $S-s_n$, $S-s_{n+1}, \ldots$, $S-s_{n+p}, \ldots$ აბსოლუტური სი-დიდით ნაკლები იყოს, ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}$. მაშასადამე, როგორიც არ უნდა იყოს p, აბსო-ლუტური სიდიდე $s_{n+p}-s_n$ ნაკლები იქნება, ვიდრე $2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

ეს პირობა არის საკმარისიც. მართლაც, ვთქვათ ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. დაშვების თანახმად, არსებობს ისეთი მთელი n რიცხვი, რომ $s_{n+p}-s_n$ აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია ε-ზე, როგორიც არ უნდა იყოს p. მაშინ (1) მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული s_n-დან, იქნება მოთავსებული $s_n-\varepsilon$ და $s_n+\varepsilon$-ს შორის; მაშასადამე, მოიძებნება, მხოლოდ სასრული რიცხვი ამ მიმდევრობის წევრთა, რომლებიც არ იქნება მოთავსებული $(s_n-\varepsilon, s_n+\varepsilon)$ შუალედში; აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ სიმრავლის ზღვართა შორის უდი-დესი S არ შეიძლება იყოს არც ნაკლები, ვიდრე $s_n-\varepsilon$, და არც მეტი, ვიდრე $s_n+\varepsilon$. მაშინ $|s_n-S|\leqslant\varepsilon$, და შემდეგი იგივეობიდან:

$$s_{n+p}-S=(s_{n+p}-s_n)+(s_n-S)$$

დავასკვნით, რომ $s_{n+p}-S$ აბსოლუტური სიდიდით რჩება ნაკლები 2ε-ზე, როგო-რიც არ უნდა იყოს p. ამასთან ε—ნებითი დადებითი რიცხვია, მაშასადამე, s_n-ს ზღვრად აქვს S.

თუ (1) მიმდევრობა შეიცავს მხოლოდ k სხვადასხვა რიცხვს, მაშინ, ცხადია, ამ მიმდევრობის კრებადობისათვის, აუცილებელია, რომ რომელიმე ნომრიდან დაწყებული, ყველა წევრი იყოს ერთმანეთის ტოლი. ეს განსაკუთრებული შემ-თხვევა შედის, მაშასადამე, საერთო წესში.

ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე უსასრულო მიმდევრობა, რომლის ზოგა-დი წევრი არის u_n; ამბობენ, რომ წკრივი

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

კრებადია, თუ მიმდევრობა, შედგენილი ამ წკრივის წევრთა ჯამებისაგან:

$$s_0=u_0,\ s_1=u_0+u_1, \cdots, s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n, \cdots$$

კრებადია. ვთქვათ S ამ მიმდევრობის ზღვარია, ე. ი. ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფის ჯამი s_n, როცა n უსაზღვროდ იზრდება; S-ს ეწოდება აღნიშნული წკრივის ჯამი, და ამ დამოკიდებულებას გამოსახავენ ტოლობით:

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{\nu=0}^{+\infty} u_\nu.$$

წკრივს, რომელიც არ არის კრებადი, ეწოდება *განშლადი*.

რომელიმე წკრივის კრებადობის ან განშლადობის საკითხის გამოკვლევა, როგორც ჩანს დაიყვანება, ჯამებისაგან შედგენილი მიმდევრობის: $s_0, s_1, s_2, \ldots$, კრებადობის ან განშლადობის გამოკვლევაზე. პირიქით, რომ გავიგოთ კრებადია თუ არა რომელიმე უსასრულო მიმდევრობა:

$$s_0, s_1, s_2, \ldots,$$

საკმარისია გამოვიკვლიოთ წკრივი:

$$s_0+(s_1-s_0)+(s_2-s_1)+\cdots+(s_n-s_{n-1})+\cdots,$$

ვინაიდან ამ წკრივის პირველ $(n+1)$ წევრთა ჯამი, ცხადია, ეტოლება წინა მიმდევრობის ზოგად წევრს. ამ შენიშვნას ხშირად აქვს გამოყენება.

უსასრულო მიმდევრობის კრებადობის კრიტერიუმი, გამოყენებული წკრივზე, იძლევა კოშის (Cauchy) კრებადობის ზოგად პირობას:

წკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველ დადებით ε რიცხვს შეესაბამებოდეს ისეთი მთელი დადებითი n რიცხვი, რომ ჯამი წევრთა ნებითი რიცხვისა, დაწყებული u_{n+1}-დან, იყოს აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები ε-ზე.

მართლაც, $s_{n+p}-s_n$ სხვაობა ტოლია მე-(2) წკრივის იმ p მიმდევნო წევრთა ჯამის, რომლებიც დაწყებულია u_{n+1}-დან. ამნაირადვე, თეორემას ზრდადი მიმდევრობის შესახებ, გამოყენებულს წკრივებზე, მივყევართ შემდეგ დებულებამდე, რომელიც მეტად სასარგებლოა წკრივთა თეორიაში:

დადებით წევრებიანი წკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა s_n ჯამი იყოს ნაკლები რაიმე მუდმივ რიცხვზე.

შენიშვნა. განვიხილოთ (1) მიმდევრობა, კრებადი ან განშლადი, რომლის წევრები შეადგენენ შემოსაზღვრულ E სიმრავლეს. *ყოველთვის შეიძლება*, და ამასთანავე *უსასრულოდ მრავალი წესით, გამოვყოთ ამ მიმდევრობიდან კრებადი ქვემიმდევრობა.* მართლაც, ვთქვათ S'—რომელიმე ზღვარითი წერტილია წრფივი E სიმრავლისა. განვიხილოთ დადებით რიცხვთა კლებადი მიმდევრობა $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \ldots$, სადაც ε_n მიისწრაფის ნულისაკენ $\frac{1}{n}$-თან ერთად. ამ მიმდევრობის ყოველ ε_n რიცხვს შეესაბამება წინათ განხილული მიმდევრობის ისეთი s'_n რიცხვი, რომ $|S'-s'_n|$ ნაკლები იქნება ვიდრე ε_n და ვიდრე $|S'-s'_{n-1}|$. ჩვენ ვღებულობთ, ამგვარად, რაღაც ახალ მიმდევრობას:

$$s'_0, s'_1, \ldots, s'_n, \ldots,$$

რომელიც შედის პირველში და იკრიბება S' ზღვარისაკენ.

თუ წკრივი (2) კრებადია, მაშინ ცხადია, რომ (1) მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა აგრეთვე კრებადია და იგივე ზღვარი აქვს.

აშკარაა აგრეთვე, რომ მსჯელობა გამოიყენება არა მარტო წრფივი სიმრავლის წერტილებზე, არამედ შეიძლება გავრცელებულ იქნეს ნებისმიერ შემოსაზღვრულ წერტილოვან სიმრავლეზე. ვთქვათ, მაგალითად, E არის სიბრტყის

წერტილთა რომელიმე შემოსაზღვრული სიმრავლე, ხოლო M—ამ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი. შესაძლოა უამრავი ხერხით გამოვყოთ E-დან წერტილთა მიმდევრობა $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ ისე, რომ მანძილი MA_n მიისწრაფოდეს ნულისაკენ $\frac{1}{n}$-თან ერთად.

სახელწოდება „ზღვართა შორის უდიდესი“ Δ (§ 4) რიცხვისათვის ადვილად მართლდება; წრფივ შემოსაზღვრულ სიმრავლეში არ შეიძლება ვიპოვოთ რიცხვთა კრებადი მიმდევრობა, რომელსაც ზღვრად $\Delta+h$ $(h>0)$ ჰქონდეს, ვინაიდან ამ სიმრავლეში მოიძებნება მხოლოდ სასრული რიცხვი რიცხვებისა, რომლებიც აღემატებიან $\Delta+\frac{h}{2}$-ს.

II. ფუნქციები. ზოგადი ცნებანი

6. განსაზღვრანი. სიტყვა *ფუნქციის* თანამედროვე განსაზღვრა კოშის და რიმანს (Riemann) ეკუთვნის. y *ცვლადს* x*-ის ფუნქცია ეწოდება*, $y=f(x)$, *თუ* x*-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება* y*-ის გარკვეული მნიშვნელობა*. ვთქვათ a და b მუდმივი სიდიდეებია $(a<b)$; თუ a და b-ს შორის მოთავსებულ ყოველ x რიცხვს ეთანადება რომელიმე y რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია $f(x)$ *გარკვეულია* (a, b) *შუალედში*. $b-a$ სხვაობას შუალედის *ამპლიტუდი* ეწოდება, a და b რიცხვებს კი ზღვრები ან *საზღვრები*. a და b რიცხვების მიმართ შეიძლება მოვახდინოთ რამდენიმე დაშვება, ჩვენ შეგვიძლია ეს რიცხვები განვიხილოთ როგორც (a, b) შუალედის რიცხვები, შუალედს ამ შემთხვევაში *დახურული* ეწოდება. შეიძლება აგრეთვე მივიღოთ, რომ ერთი ამ რიცხვებიდან ან ორივე, არ ეკუთვნის ამ (a, b) შუალედს, მაშინ (a, b) შუალედს *ღია* ეწოდება [1]). მაგალითად, x-ის მნიშვნელობათა ერთობლიობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $0 \leqslant x \leqslant 1$, შეადგენენ დახურულ შუალედს; პირიქით, თუ ავიღებთ x-ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $0<x<1$ ან $0<x \leqslant 1$, ჩვენ მივიღებთ ღია შუალედს.

ვთქვათ, E არის $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ერთობლიობა, განსაზღვრული (a, b) შუალედში; თუ ეს E სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *შემოსაზღვრული* (a, b) *შუალედში* (ან მონაკვეთზე). E სიმრავლის ზედა და ქვედა M და m საზღვრებს ეწოდება აგრეთვე $f(x)$ *ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები*; სხვაობას $\Delta=M-m$ ეწოდება *ფუნქციის რყევა* (a, b) *შუალედში* (მონაკვეთზე).

---

[1]) ლიტერატურაში ხშირად დახურულ შუალედს, ე. ი. x-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $a \leqslant x \leqslant b$, ეწოდება *მონაკვეთი* ან *სეგმენტი*; ღია შუალედს, ე. ი. x-ის მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს: $a<x<b$, ეწოდება *შუალედი* ანუ *ინტერვალი*. გურსას იმ შემთხვევებში, სადაც ამ განსხვავებას არ აქვს მნიშვნელობა, აღნიშნული ტერმინოლოგია ყველგან არა აქვს მკაცრად დაცული. (რედ. რუს. თარგმ.)

ამ განსაზღვრათა შესახებ შეიძლება გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა. იმისათვის, რომ ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული (a, b) მონაკვეთზე არ არის საკმარისი, რომ მან მიიღოს სასრული მნიშვნელობა x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. ასე, მაგალითად, $f(x)$ ფუნქციას, 0 და 1-ს შორის შემდეგი სახით განსაზღვრულს (იხ. § 30):

$$f(0)=0, \quad f(x)=\frac{1}{x} \text{ როცა } x>0,$$

აქვს სასრული მნიშვნელობა x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, და, მაინც, ის არ წარმოადგენს შემოსაზღვრულს იმ გაგებით, რომელსაც ჩვენ ამ სიტყვას მივაწერთ, ვინაიდან $f(x)>A$, თუ ავიღებთ $0<x<\frac{1}{A}$. უკანასკნელად, ფუნქციას, შემოსაზღვრულს (a, b) სეგმენტზე, შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობანი, რაგინდ მცირეთი განსხვავებული M ზედა საზღვარისაგან ან m ქვედა საზღვარისაგან, მაგრამ მან უსათუოდ არ უნდა მიაღწიოს აღნიშნულ მნიშვნელობებს. მაგალითად, $f(x)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $(0, 1)$ სეგმენტზე პირობებით:

$$f(0)=0, \quad f(x)=1-x \text{ როცა } 0<x\leqslant 1,$$

აქვს ზედა საზღვრად $M=1$, მაგრამ არასდროს არ მიაღწევს ამ მნიშვნელობას.

7. უწყვეტობა. უწყვეტობის თანამედროვე განსაზღვრა აგრეთვე ეკუთვნის კოშის [1]).

ვთქვათ $y=f(x)$ არის (a, b) შუალედში განსაზღვრული ფუნქცია; ავიღოთ ამ ინტერვალში x_0 მნიშვნელობა და მისი მეზობელი x_0+h მნიშვნელობა, მოთავსებული იმავე ინტერვალში. თუ $f(x_0+h)-f(x_0)$ სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა h-ის აბსოლუტური სიდიდე მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი* x_0 *მნიშვნელობისათვის*. ზღვარის განსაზღვრის საფუძველზე შეიძლება აგრეთვე ვთქვათ, რომ *ფუნქცია* $f(x)$ *უწყვეტია* $x=x_0$ *მნიშვნელობისათვის, თუ ნებისმიერ დადებით* ε *რიცხვს, რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს იგი, შეიძლება შევუსაბამოთ ისეთი დადებითი* η *რიცხვი, რომ*

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

h-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია η-ზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) დახურულ შუალედში, თუ იგი უწყვეტია ამ შუალედის ყოველი x მნიშვნელობისათვის და თუ სხვაობებს $f(a+h)-f(a)$ და $f(b-h)-f(b)$ ზღვრად ნული აქვს, როცა h, რჩება რა დადებითი, მიისწრაფის ნულისაკენ.

---

[1]) ნიუტონისა და ლაიბნიცის დროის მათემატიკოსებისათვის ფუნქცია იყო უწყვეტი, თუ შესაძლებელი იქნებოდა მისი გამოსახვა იმ ოპერაციათა სამბოლოების საშუალებით, რომლებიც ჩვეულებრივად განიხილებოდა, როგორიც არის ოპერაციები არითმეტიკული, ლოგარითმული და ტრიგონომეტრიული. უწყვეტობის ეს სახე, საკმაოდ ცუდად განსაზღვრული, ცნობილია *ეილერის უწყვეტობის* სახელწოდებით.

უმაღლესი მათემატიკის ელემენტარულ კურსებში მტკიცდება, რომ მრავალწევრები, რაციონალური ფუნქციები, მაჩვენებლიანი ფუნქციები, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული და უკუწრიული ფუნქციები არიან უწყვეტი ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა ზოგიერთი განსაკუთრებულისა, სადაც ეს ფუნქციები კარგავენ უწყვეტობას. უწყვეტი ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ უწყვეტ ფუნქციათა ნებისმიერი რიცხვის ჯამი ან ნამრავლი არის აგრეთვე უწყვეტი ფუნქცია. იგივე ითქმის ორ უწყვეტ ფუნქციის ფარდობაზე, ცვლადის იმ მნიშვნელობათა გამოკლებით, რომლებიც მნიშვნელს ნულად აქცევს. უნდა შევნიშნოთ, რომ ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობა შეიძლება იყოს წყვეტილი ფუნქცია მნიშვნელის რომელიმე ფესვისათვის, მაგრამ იგი რჩებოდეს შემოსაზღვრული. მაგალითად, ფარდობა $\frac{|\sin x|}{x}$ მიისწრაფის ± 1-საკენ, იმის მახედვით, x მიისწაფის ნულისაკენ დადებითი თუ უარყოფითი მნიშვნელობით.

ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია კოორდინატული Ox და Oy ღერძები და უწყვეტი C წირი, რომლის სისქეს უყურადღებოდ ვტოვებთ; თუ Oy-ის პარალელი წრფე ამ წირს ხვდება არა უმეტეს ვიდრე ერთ წერტილში, მაშინ C წირის M წერტილის y ორდინატი უწყვეტი ფუნქციაა იმავე M წერტილის აბსცისისა. ვთქვათ $y=f(x)$ არის ეს უწყვეტი ფუნქცია; მაშინ ამბობენ, რომ C მრუდი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციას. მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არ წარმოიდგინება გრაფიკულად. მართლაც, დამტკიცებულია, რომ არსებობს უწყვეტი ფუნქციები, რომლებსაც აქვს უსასრულო რიცხვი მაქსიმუმი და მინიმუმებისა ყოველ ინტერვალში. მაგრამ, ცხადია, რომ ჩვენ არ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ უწყვეტი წირი, რომელსაც ჰქონდეს რყევათა უსასრულო სიმრავლე ყოველ ორ რაგინდ მახლობელ ორდინატს შორის.

ეს იმის მაჩვენებელია, რომ გრაფიკულ წარმოდგენას, რომელიც არის საუკეთესო საშუალება უწყვეტ ფუნქციათა თვისებების შესასწავლად, არ შეუძლია, გვემსახუროს ამ თვისებათა მკაცრი დამტკიცებისათვის.

8. უწყვეტ ფუნქციათა თვისებები. მხოლოდ უწყვეტობის განსაზღვრაზე დაყრდნობით, დავამტკიცოთ უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ რამოდენიმე თეორემა, რომლებზედაც შემდეგში მოგვიხდება მითითება.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) მონაკვეთზე; თუ x ნებსითი უცვლელი რიცხვია ამ მონაკვეთში, მაშინ უწყვეტობის განსაზღვრის საფუძველზე, ყოველ დადებითი ε რიცხვს მოეძებნება მეორე დადებითი θ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon, \text{ როცა } |h|<\Theta,$$

იმ დაშვებით, რომ რიცხვი $x+h$ ეკუთვნის (a, b) მონაკვეთს.

ცხადია, რომ არსებობს უსასრულო სიმრავლე დადებითი რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ პირობას; აღვნიშნოთ $\Theta(x, \varepsilon)$-ით Θ რიცხვების ნამდვილი ზედა საზღვარი.

ამრიგად (a, b) შუალედის ყოველ x მნიშვნელობას შეესაბამება დადებითი $\theta(x, \varepsilon)$ რიცხვი ε-ის გარკვეული მნიშვნელობისათვის.

თეორემა A. *$\theta(x, \varepsilon)$ რიცხვთა ქვედა საზღვარი არის დადებითი რიცხვი.*

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ეს ქვედა საზღვარი არ შეიძლება იყოს ნული. მართლაც, დავუშვათ, რომ ეს ქვედა საზღვარი ნულია; ვინაიდან ეს ქვედა საზღვარი არ მიიღწევა x-ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ (a, b) შუალედში მოიპოვება უსასრულო სიმრავლე სხვადასხვა წერტილებისა $x_1', x_2', \ldots, x'_n, \ldots$ ისეთების, რომ $\theta(x'_n, \varepsilon)$ მიისწრაფის ნულისაკენ $\frac{1}{n}$-თან ერთად. ამ x'_n წერტილთა E სიმრავლეს, როცა ის შემოსაზღვრულია, აქვს ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი λ, რომელიც აგრეთვე (a, b) მონაკვეთს ეკუთვნის. ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=\lambda$ მნიშვნელობისათვის, ამიტომ მოიპოვება ისეთი დადებითი k რიცხვი, რომ

$$|f(\lambda+h)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როცა } |h|<k.$$

ვთქვათ x' ნებსითი რიცხვია შუალედში

$$\left(\lambda-\frac{k}{2}, \lambda+\frac{k}{2}\right),$$

რომელიც ეკუთვნის (a, b) შუალედს. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ $\theta(x', \varepsilon)$ რიცხვი უკიდურეს შემთხვევაში ეტოლება $\frac{k}{2}$-ს. მართლაც, თუ დადებითი რიცხვი h ნაკლებია, ვიდრე $\frac{k}{2}$, მაშინ

$$|x'+h-\lambda|<k, \quad |x'-\lambda|<k,$$

$$|f(x'+h)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x')-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

და, მაშასადამე, $|f(x'+h)-f(x')|<\varepsilon$. ამრიგად $\left(\lambda-\frac{k}{2}, \lambda+\frac{k}{2}\right)$ შუალედში მოიპოვება E სიმრავლის წერტილთა მხოლოდ სასრული რიცხვი, და იმ წინასწარ დაშვებამ, რომ $\theta(x, \varepsilon)$ რიცხვთა ქვედა საზღვარი ტოლია ნულის, მიგვიყვანა ჩვენ წინააღმდეგობამდე. მაშასადამე, ეს ქვედა საზღვარი არის *დადებითი η რიცხვი*. თეორემა შეიძლება კიდევ შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ:

თუ x' და x'' ორი ნებსითი რიცხვია (a, b) შუალედისა, მაშინ ყოველ დადებით ε რიცხვს შეესაბამება მეორე დადებითი η რიცხვი, ისეთი, რომ $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ ყოველთვის, როცა $|(x'-x''|<\eta$.

როცა ფუნქციას აქვს ეს თვისება, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია *თანაბრად უწყვეტია* (a, b) დახურულ შუალედში.

შედეგი. ვთქვათ η რიცხვი განსაზღვრულია ისე, როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი; თუ $|x'-x''|$ სხვაობა ნაკლებია, ვიდრე $p\eta$, მაშინ ცხადია, რომ შესრულებული იქნება აგრეთვე $|f(x')-f(x'')|<p\varepsilon$ უტოლობაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ *დახურულ (a, b) შუალედში ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია*.

თეორემა B. *ფუნქცია $f(x)$, უწყვეტი (a, b) დახურულ შუალედში ერთხელ მაინც ღებულობს $f(a)$ და $f(b)$-ს შორის მოთავსებულ ნებსით მნიშვნელობას a და b-ს შორის მოთავსებულ x-ის რაიმე მნიშვნელობისათვის.*

ავიღოთ ჯერ კერძო შემთხვევა. დავუშვათ, რომ $f(a)$ და $f(b)$-ს აქვს მოპირდაპირე ნიშნები, მაგალითად $f(a)<0$, ხოლო $f(b)>0$. დავამტკიცოთ, რომ a და b-ს შორის მოიპოვება x-ის ერთი მნიშვნელობა მაინც, რომლისთვისაც $f(x)=0$. მართლაც, $f(x)$ უარყოფითია a-ს მახლობლად და დადებითი b-ს მახლობლად; განვიხილოთ x-ის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლებისთვისაც $f(x)$ ფუნქცია დადებითია; ვთქვათ, λ ამ სიმრავლის ქვედა საზღვარია $(a<\lambda<b)$. ქვედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად $f(\lambda-h)$ უარყოფითია ან ტოლია ნულის h-ის ყოველი დადებითი მნიშვნელობისათვის; მაშასადამე, $f(\lambda)$, რომელიც წარმოადგენს $f(\lambda-h)$-ის ზღვარს, აგრეთვე უარყოფითია ან ნული. მეორე მხრივ, არ შეიძლება ადგილი ექნეს $f(\lambda)<0$. მართლაც, დავუშვათ, რომ $f(\lambda)=-m$, სადაც m დადებითი რიცხვია. ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია როცა $x=\lambda$, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი η რიცხვი, რომ $|f(x)-f(\lambda)|<m$, როცა $|x-\lambda|<\eta$; მაგრამ, მაშინ λ და $\lambda+\eta$-ს შორის მოთავსებულ x-ის მნიშვნელობათათვის $f(x)$ ფუნქცია იქნებოდა უარყოფითი და λ არ იქნებოდა ქვედა საზღვარი x-ის იმ მნიშვნელობათათვის, რომლებისთვისაც ფუნქცია დადებითია. მაშასადამე, $f(\lambda)=0$.

ვთქვათ, ახლა N არის რიცხვი, მოთავსებული $f(a)$ და $f(b)$-ს შორის. უწყვეტ $\varphi(x)=f(x)-N$ ფუნქციას $x=a$ და $x=b$ მნიშვნელობისათვის აქვს მოპირდაპირე ნიშნები. მაშასადამე, ზემოთ განხილულ კერძო შემთხვევის თანახმად, ის გახდება ნული (a, b) ინტერვალში მოთავსებულ x-ის ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც.

თეორემა C. *დახურულ (a, b) შუალედში ყოველი უწყვეტი ფუნქცია ერთხელ მაინც მიაღწევს როგორც თავის ზედა, ისე ქვედა საზღვრებს.*

ყოველ უწყვეტ სასრულო ფუნქციას, როგორც უკვე იყო ნაჩვენები, აქვს ზედა M და ქვედა m საზღვრები. დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ $f(x)=M$ x-ის ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც დახურულ (a, b) შუალედში.

მართლაც, რომ $f(x)$ ფუნქცია არ ღებულობდეს M მნიშვნელობას არცერთი x-ის მნიშვნელობისათვის, რომელიც დახურულ (a, b) შუალედს ეკუთვნის, მაშინ მას ექნებოდა $M-\varepsilon$-ზე მეტი უსასრულო სიმრავლე სხვადასხვა მნიშვნელობისა; რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს ε (§ 3). მაშინ დახურულ (a, b) შუალედში აღმოჩნდებოდა ისეთი ერთმანეთისაგან განსხვავებული წერტილთა მიმდევრობა $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, რომ $f(x_n)$ მიისწრაფის M-საკენ, როცა n უსასრუ-

ლოდ იზრდება. ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$, რომელსაც ზღვრად λ აქვს, როცა n უსასრულოდ იზრდება. ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია $x=\lambda$ მნიშვნელობისათვის, ამიტომ ჩვენ გვექნებოდა, მაშასადამე: $f(\lambda)=\lim f(x_n')=M$.

ამ თეორემას თუ წინა თეორემასთან შევადარებთ ჩვენ დავასკვნით, რომ (a, b) დახურულ შუალედში უწყვეტი ფუნქცია ერთხელ მაინც ღებულობს მის ზედა და ქვედა საზღვრებს შორის მოთავსებულ ნებსით მნიშვნელობას. A თეორემა შეიძლება აგრეთვე ჩამოვაყალიბოთ ასე: თუ მოცემულია დახურულ (a, b) შუალედში უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი საკმაოდ მცირე η რიცხვი, რომ ფუნქციის რყევა ნებსით ნაწილობრივ ინტერვალში, რომლის სიგრძე ნაკლებია η-ზე, ნაკლები იყოს ყოველ წინასწარ აღებულ დადებით რიცხვზე.

მართლაც, უწყვეტი ფუნქციის რყევა ტოლია $f(x)$-ის მნიშვნელობათა სხვაობისა ცვლადის ორ კერძო მნიშვნელობისათვის.

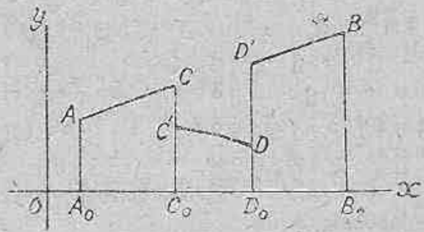
შენიშვნა. მთელ ჩვენ მსჯელობებში ლაპარაკია (a, b) დახურულ შუალედზე. ეს პირობა არსებითია. მაგალითად, ფუნქცია $f(x)=1-x$, განსაზღვრული ღია $(0<x\leqslant 1)$ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს საზღვარს $x=0$, უწყვეტია x-ის ყოველ მნიშვნელობისათვის ამ შუალედში. ზედა საზღვარი იქნება $M=1$, და $f(x)$ ვერ აღწევს ამ მნიშვნელობას.

9. წყვეტილი ფუნქციები. ვთქვათ (a, b) შუალედში განსაზღვრულია $y=f(x)$ ფუნქცია. თუ ეს ფუნქცია არ არის უწყვეტი a და b-ს შორის მოთავსებულ x_0 მნიშვნელობისათვის, მაშინ x_0 წერტილს წყვეტის წერტილი ეწოდება. ერთი მაინც ორი რიცხვიდან $f(x_0+\varepsilon)$ და $f(x_0-\varepsilon)$ (ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\varepsilon>0$) არ მიისწრაფის $f(x_0)$-საკენ, როცა ε მიისწრაფის ნულისაკენ. ამბობენ, რომ x_0 არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, თუ როგორც $f(x_0+\varepsilon)$-ს, ისე $f(x_0-\varepsilon)$-საც აქვს ზღვარი, როცა ε მიისწრაფის ნულისაკენ; ეს ზღვრები აღინიშნებიან შესაბამისად $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$-ით. თუ ორივე ეს ზღვარი $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$ ურთიერთ თანატოლია, მაშინ x_0 წერტილი შეიძლება იყოს წყვეტის წერტილი მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ზღვრული მნიშვნელობა განსხვავდება $f(x_0)$-საგან; ამ შემთხვევაში საკმაო იქნებოდა შეგვეცვალა ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილში, რომ წყვეტა თავიდან აცილებული იქნეს. მაგრამ თუ ორივე რიცხვი $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $f(x_0)$, წერტილი x_0 უეჭველად იქნება წყვეტის წერტილი. პირველი გვარის წყვიტის წერტილს ეწოდება წესიერი, თუ

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \tag{3}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია ყოველი წერტილისათვის, სადაც ფუნქცია უწყვეტია. შემდეგში (§ 30) მოყვანილი იქნება ფუნქციათა მაგალითები, წარმოდგენილი წკრივების საშუალებით, რომლებსაც ამგვარი წყვეტის წერტილები აქვს.

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქციას (a, b) ინტერვალში აქვს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილები, რომელთა რიცხვი სასრულოა, და მაქსიმუმებისა და მინიმუმების მხოლოდ სასრულო რიცხვი. მრუდი, წარმოდგენილი $y=f(x)$ განტოლებით, შედგება რამდენიმე უწყვეტი წირისაგან, რომლებიც არ არიან ერთმანეთთან შეერთებული, როგორიცაა AC, $C'D$, $D'B$ (ნახ. 1); წყვეტის წერტილების c და d აბსცისების შესაბამისი y-ის მნიშვნელობანი შეიძლება აღებულ იქნეს ნებისმიერად. თუ ეს წყვეტის წერტილები წესიერია, მაშინ CC' და DD' მონაკვეთების შუა წერტილები უნდა განვიხილოთ როგორც წერტილები, რომლებიც მოყვანილ მრუდს ეკუთვნიან. ზემოთ მოყვანილი ფუნქცია $y=\frac{|\sin x|}{x}$ შეიძლება წარმოდგენილი ყოფილიყო ორი უწყვეტი წირით, რომლებიც შეწყდებიან შესაბამად Oy ღერძის ორ წერტილში, რომელთა ორდინატებია $+1$ და -1.



ნახ. 1.

თუ x_0 არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, მაშინ ერთი მაინც $f(x_0+\varepsilon)$, $f(x_0-\varepsilon)$ რიცხვებიდან არავითარ ზღვრისაკენ არ მიისწრაფის, როცა დადებითი რიცხვი ε ნულისაკენ მიისწრაფის. თუ, მაგალითად, $f(x_0+\varepsilon)$-ს არ აქვს ზღვარი, მაშინ აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შესაძლო შემთხვევა: როცა $f(x_0+\varepsilon)$ უსასრულოდ იზრდება აბსოლუტური სიდიდით ან როცა ამას არ აქვს ადგილი.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)$, ანალიზურად განსაზღვრული, მაგალითად ელემენტარულ სიმბოლოების სასრულო რიცხვთა საშუალებით; ეს ფუნქცია საზოგადოდ უწყვეტი ფუნქციაა, მაგრამ შესაძლოა მოხდეს, რომ ცვლადის რომელიმე მნიშვნელობისათვის ის არ იქნეს გარკვეული. ავიღოთ, მაგალითად, ფუნქცია $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, რომელიც უწყვეტია $x \neq 0$ ყოველი მნიშვნელობისათვის; ამ სიმბოლოს არ აქვს არავითარი აზრი, როცა $x=0$. მაგრამ, როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ, $f(x)$-ს ზღვრად ერთი აქვს, და ბუნებრივია მივიღოთ $f(0)=1$.

პირიქით, ავიღოთ ფუნქცია $f(x)=\frac{1}{x-a}$, უწყვეტი x ცვლადის ყოველი x_0 მნიშვნელობისათვის, რომელიც განსხვავდება a-საგან. ოპერაცია, რომელიც უნდა მოვახდინოთ x-ის მნიშვნელობის შესაბამი y-ის მნიშვნელობის მისაღებად, ჰკარგავს ყოველგვარ აზრს, როცა ცვლადს აძლევენ a მნიშვნელობას; მაგრამ ჩვენ ვამჩნევთ, რომ, როცა x-ს აქვს a-ს საკმაოდ მახლობელი მნიშვნელობა, y აბსოლუტური სიდიდით ფრიად დიდია, დადებითი, თუ $x>a$, და უარყოფითი, თუ $x<a$. როცა სხვაობა $x-a$ უსაზღვროდ კლებულობს, y-ის აბსოლუტური სიდიდე უსასრულოდ იზრდება, და ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე მეტი ხდება. ამ ფაქტს გამოსთქვამენ მოკლედ, რომ $\frac{1}{x-a}$ ფუნქცია უსასრულოა $x=a$ მნიშვნელობისათვის. ცხადია, რომ უწყვეტობის აღდგენა, როცა $x=a$, არაა შესაძლებელი, როგორი მნიშვნელობაც არ უნდა მივიღოთ $f(a)$-სათვის.

ავიღოთ კიდევ ფუნქცია $y=\sin\frac{1}{x}$. როცა x ნულისაკენ მიისწრაფის, $\frac{1}{x}$ უსასრულოდ იზრდება, და y არავითარ ზღვრისაკენ არ მიისწრაფის, რჩება რა მუდამ -1 და $+1$-ს შორის მოთავსებული; განტოლებას $\sin\frac{1}{x}=A$, რომელშიც იგულისხმება, რომ $|A|<1$, მუდამ აქვს 0 და ε-ს შორის მოთავსებული უსასრულო სიმრავლე ფესვებისა, რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს ε. როგორი მნიშვნელობაც არ უნდა მივიღოთ y-სათვის როცა $x=0$, y ფუნქცია წყვეტილია $x=0$ წერტილში და ამ წერტილში ჩვენ გვაქვს არსებითი წყვეტა.

მოყვანილ მაგალითებიდან უშუალოდ ჩანს, თუ როგორ იცვლება ფუნქცია წყვეტის წერტილის მახლობლობაში. მაგრამ ეს მუდამ როდია ასე. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია თავისი ანალიზური გამოსახვით რომელიმე მუდმივ a რიცხვზე მეტ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, და, ვთქვათ, გამოსარკვევია მიისწრაფის თუ არა $F(x)$ ზღვრისაკენ, როცა x მიისწრაფის $+\infty$-საკენ. თუ $F(x)$-ის ანალიზური გამოსახვა არ გვაძლევს საშუალებას გავიგოთ ეს უშუალოდ, მაშინ უმრავლეს შემთხვევაში შეიძლება გადავწყვიტოთ საკითხი, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი დებულებით:

იმისათვის, რომ $F(x)$ ფუნქცია მიისწრაფოდეს რომელიმე ზღვრისაკენ, როცა x მიისწრაფის $+\infty$-კენ, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $F(p)-F(q)$ სხვაობა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როცა ორივე p და q რიცხვი ერთმანეთზე დამოუკიდებლად უსასრულოდ იზრდება.

უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქციის ზღვარის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველ დადებით ε რიცხვს ეთანადებოდეს ისეთი რიცხვი A, რომ $F(p)-F(q)$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე იყოს ნაკლები ε-ზე, როცა ორივე p და q რიცხვი მეტია ან ტოლი A-სი.

ეს პირობა აუცილებელია. თუ $F(x)$ მიისწრაფის L ზღვრისაკენ, მაშინ არსებობს ისეთი A რიცხვი, რომ ყოველი $x\geqslant A$ მნიშვნელობისათვის $F(x)-L$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე. მაშასადამე, თუ p და q ნებსითი რიცხვებია, რომლებიც აღემატებიან A-ს, აბსოლუტური სიდიდე $F(p)-F(q)$ სხვაობისა ნაკლები იქნება ε-ზე.

ეს პირობა საკმარისიცაა. მართლაც, განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$F(a),\ F(a+1),\cdots,\ F(a+n)\cdots,$$

სადაც n—მთელი დადებითი რიცხვია. ეს მიმდევრობა კრებადია, ვინაიდან, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი k რიცხვი, $F(a+n+k)-F(a+n)$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება ε-ზე, თუ $a+n$ მეტია A-ზე (§ 5). მაშასადამე, $F(a+n)$-ს აქვს ზღვარი L, როცა მთელი რიცხვი n უსასრულოდ იზრდება. განვიხილოთ ახლა რომელიმე x რიცხვი და ვთქვათ n ისეთი მთელი დადებითი რიცხვია, რომ $x\geqslant a+n>x-1$; ჩვენ გვაქვს:

$$F(x)-L=F(x)-F(a+n)+[F(a+n)-L];$$

x-ის უსასრულოდ ზრდის დროს $a+n$ აგრეთვე უსასრულოდ იზრდება, და წინა ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი ორივე სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ; მაშასადამე, $F(x)$ აქვს ზღვრად L.

სრულიად ასევე შეიძლებოდა დამტკიცება შემდეგის: იმისათვის, რომ $F(x)$ ფუნქცია მიისწრაფოდეს ზღვრისაკენ, როცა x მიისწრაფის a-საკენ ისე, რომ იგი რჩება მუდამ a-ზე მეტი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $F(p)-F(q)$ სხვაობას ჰქონდეს ზღვრად ნული, როცა ორივე p და q რიცხვი რჩება რა a-ზე მეტი, ერთმანეთზე დამოუკიდებლად მიისწრაფის a-საკენ.

10. მონოტონური ფუნქციები. $f(x)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს (a, b) შუალედში, ეწოდება მონოტონური ამ შუალედში, თუ ნამრავლი

$$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$$

ინარჩუნებს მუდამ ერთდაიმავე ნიშანს ყოველი ორი x_1 და x_2 რიცხვისათვის, რომლებიც განსახილავ შუალედს ეკუთვნიან. ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, თუ x_1 და x_2-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ეს ნამრავლი დადებითია ან ტოლია ნულის; თუ კი x_1 და x_2-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ეს ნამრავლი უარყოფითია ან ტოლი ნულის, მაშინ ფუნქციას კლებადი ეწოდება.

თუ $x_2>x_1$, მაშინ ზრდადი ფუნქციისათვის სხვაობა $f(x_2)-f(x_1)$ დადებითია ან ტოლია ნულისა, ხოლო კლებადი ფუნქციისათვის—უარყოფითი ან ტოლი ნულისა. თუ მონოტონურ ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა, როგორც $x=x_1$-სათვის, ისე $x=x_2$ მნიშვნელობისთვისაც, მაშინ იგი ინარჩუნებს იმავე მნიშვნელობას მთელ (x_1, x_2) შუალედში. მონოტონურ ფუნქციას შეუძლია ჰქონდეს (a, b) შუალედში ნებისმიერი რიცხვი წყვეტის წერტილებისა, მაგრამ ყველა ეს წყვეტის წერტილი იქნება პირველი გვარის. განვიხილოთ, მაგალითად, ზრდადი ფუნქცია, და ვთქვათ x_0 წყვეტის წერტილია. როცა ε, რჩება რა დადებითი, მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ $f(x_0-\varepsilon)$-ს არ შეუძლია კლებულობდეს. გარდა ამისა, მუდამ $f(x_0-\varepsilon)\leqslant f(b)$. მაშასადამე, $f(x_0-\varepsilon)$-ს აქვს ზღვარი $f(x_0-0)$ (§ 1). სრულიად ასევე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $f(x_0+\varepsilon)$-ს აქვს ზღვარი $f(x_0+0)$. ვინაიდან, ამას გარდა, მუდამ გვაქვს $f(x_0-\varepsilon)\leqslant f(x_0+\varepsilon)$, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x_0-0)\leqslant f(x_0+0)$. თუ $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, მაშინ $f(x_0)=f(x_0-0)$, და x_0 წერტილზე ფუნქცია იქნება უწყვეტი. მაგრამ თუ $f(x_0-0)$ ნაკლებია $f(x_0+0)$-ზე, მაშინ $f(x_0)$ შეიძლება გაუტოლდეს ყოველ რიცხვს, მოთავსებულს $f(x_0-0)$ და $f(x_0+0)$-ს შორის.

შენიშვნა. ზოგჯერ სასარგებლოა გავარჩიოთ ზრდადი ფუნქცია მუდამ ზრდადი ფუნქციისაგან. ჩვენ ვუწოდებთ $f(x)$ ფუნქციას მუდამ ზრდადს თუ, როცა $x_2>x_1$, გვაქვს აგრეთვე $f(x_2)>f(x_1)$, მასთან ტოლობის $(=)$ ნიშანი გამორიცხულია. ასევე განისაზღვრება მუდამ კლებადი ფუნქცია.

11. ფუნქციები შემოსაზღვრული ცვლილებით. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია (a, b) დახურულ შუალედში, სადაც $a<b$. დავყოთ ეს მონაკვეთი ნაწილობრივ შუალედებად ზრდადი რიცხვებით: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

და ალვნიშნოთ:

$$v=|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\ldots+|f(b)-f(x_{n-1})|.$$

ამნაირად განსახილავი შუალედის ყოველ დაყოფას შეესაბამება ამგვარი რიცხვი $v\geqslant 0$. v რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ცვლილება (a,b) შუალედისათვის. თუ სიმრავლეც რიცხვებისა, რომლებიც ეთანადებიან (a,b) შუალედის ყველა შესაძლო დაყოფას, შემოსაზღვრული სიმრავლეა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით (a,b) შუალედში. v რიცხვთა ზედა V საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის სრული ცვლილება ამ შუალედში. ფუნქციათა ამ მნიშვნელოვანი კლასის შემოღება ეკუთვნის ჟორდანს (Jordan).

ცხადია, რომ ყოველი მონოტონური ფუნქცია არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით, ვინაიდან აქ ყველა $f(x_i)-f(x_{i-1})$ სხვაობას ერთნაირი ნიშანი აქვს. შემოსაზღვრული ცვლილებით ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ორი შემოსაზღვრული ცვლილებით ფუნქციის ჯამი არის აგრეთვე ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით. თუ $f(x)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით (a,b) შუალედში, მაშინ ის იქნება ასეთივე ამავე შუალედში მოთავსებულ ყოველ (a_1,b_1) შუალედში, და, კერძოთ, (a,x) შუალედში, სადაც x არის a და b-ს შორის მოთავსებული ნებსითი რიცხვი.

ვთქვათ, p არის იმ $f(x_i)-f(x_{i-1})$ სხვაობათა ჯამი, რომლებიც დადებითია, ხოლო $(-n)$—უარყოფით სხვაობათა ჯამი; მაშინ ცხადია,

$$v=p+n,\ f(b)-f(a)=p-n,$$

და მაშასადამე,

$$v=2p+f(a)-f(b),\ v=2n+f(b)-f(a).$$

თუ $f(x)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით (a,b) შუალედში, მაშინ p და n რიცხვები, შესაბამი ამ შუალედის ყოველი შესაძლო დაყოფისა, შეადგენენ აგრეთვე ორ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს. ვთქვათ, P და N ამ სიმრავლეთა ზედა საზღვრებია; P და N რიცხვებს ეწოდება ფუნქციის სრული დადებითი და სრული უარყოფითი ცვლილება (a,b) მონაკვეთზე. ზემოთ თქმულის მიხედვით V, P და N რიცხვებს შორის არსებობს თანაფარდობა:

$$V=2P+f(a)-f(b),\ V=2N+f(b)-f(a).$$

აღვნიშნოთ $V(x)$, $P(x)$ და $N(x)$-ით ზემოთნაჩვენები სრული ცვლილებები $f(x)$ ფუნქციისა (a,x) შუალედში, სადაც x მოთავსებულია a და b-ს შორის. $V(x)$, $N(x)$, და $P(x)$ თვით მათი განსაზღვრიდან,—უეჭველად ზრდადი ფუნქციებია; მართლაც, ცხადია, რომ x-ის ზრდის დროს $P(x)$ და $N(x)$ ფუნქციებს არ შეუძლია კლება. $f(x)$, $V(x)$, $P(x)$ და $N(x)$ ფუნქციებს შორის x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის მუდამ არსებობს შემდეგი ორი დამოკიდებულება:

$$V(x)=2P(x)+f(a)-f(x),\ V(x)=2N(x)+f(x)-f(a),$$

საიდანაც

$$f(x)=f(a)+P(x)-N(x).$$

ვინაიდან ორივე $f(a)+P(x)$ და $N(x)$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით, არის ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობა. ეს თვისება შეიძლებოდა მიგვეღო განმარტებად ფუნქციისა შემოსაზღვრული ცვლილებით: მართლაც, ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობა ტოლია ზრდადი და კლებადი ფუნქციის ჯამისა, ე. ი. არის ჯამი ორი ფუნქციისა შემოსაზღვრული ცვლილებით. მაშასადამე, ეს ჯამი წარმოადგენს ფუნქციას შემოსაზღვრული ცვლილებით.

თუ ორივე $P(x)$ და $N(x)$ ზრდად ფუნქციას მივუმატებთ რომელიმე ზრდად $\varphi(x)$ ფუნქციას, მივიღებთ ახალ $P_1(x)$ და $N_1(x)$ ფუნქციებს, რომლებიც აგრეთვე ზრდადია, და მათი სხვაობა ტოლი იქნება პირვანდელ $P(x)$ და $N(x)$ ფუნქციათა სხვაობისა. ამნაირად ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით უამრავი გზით შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც სხვაობა ორი ზრდადი ფუნქციისა. ვინაიდან ყოველ მონოტონურ ფუნქციას აქვს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილები, ამიტომ იმავეს აქვს ადგილი ორი მონოტო-

ნური ფუნქციის ჯამის მიმართაც; ამრიგად, *ყოველ $f(x)$ ფუნქციას შემოსაზღვრული ცვლილებით აქვს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილები.*

როგორც მაგალითი ფუნქციისა შემოუსაზღვრელი ცვლილებით განვიხილოთ ფუნქცია.

$$f(x)=\sin\frac{1}{x},$$

და მივიღოთ $f(0)=0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ფუნქციის სრული ცვლილება, $\frac{\pi}{2}$ და $n\pi+\frac{\pi}{2}$ რიცხვთა შექცეულ მნიშვნელობათა შორის მოთავსებულ შუალედში, ტოლია $2n$-ის. მაშასადამე, $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ შუალედში ეს ფუნქცია არის შემოუსაზღვრელი ცვლილებით, რაც გამომდინარეობს აგრეთვე იქიდანაც, რომ ამ ფუნქციისათვის $x=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

განვიხილოთ ახლა, კერძოთ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით (a, b) შუალედში და უწყვეტი ამავე შუალედში [1]. დავყოთ (a, b) შუალედი ნაწილებად შემდეგი წერტილებით: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, და ვთქვათ v არის ფუნქციის ცვლილება განსახილავ შუალედში, რომელიც ეთანადება ასეთ დაყოფას.

თუ n რიცხვი უსასრულოდ იზრდება იმნაირად, რომ x_i-x_{i-1} სხვაობათა უდიდესი λ მნიშვნელობა მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ v რიცხვს აქვს ზღვრად V სრული ცვლილება.

ამ თეორემის დამტკიცება ემყარება შემდეგ შენიშვნაზე: დავუშვათ, რომ ყოველი შუალედი, $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots$ შუალედებიდან დაყოფილია დაყოფის ახალი წერტილებით უფრო მცირე შუალედებად, და ვთქვათ

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \ldots, b$$

მიღებული ახალი მიმდევრობაა. აღვნიშნოთ v'-ით v-ს ანალოგიური რიცხვი ამ ახალი დაყოფისათვის. ჩვენ, ცხადია, გვაქვს.

$$|f(x_1)-f(a)| \leqslant |f(x_1)-f(y_{k-1})|+\ldots+|f(y_1)-f(a)|,$$

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant |f(x_2)-f(y_{l-1})|+\ldots+|f(y_{k+1})-f(x_1)|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

და, მაშასადამე, $v \leqslant v'$.

ვთქვათ, V არის v რიცხვთა ზედა საზღვარი და ε—რომელიმე დადებითი რიცხვია. V რიცხვის თვით განსაზღვრის თანახმად, არსებობს ისეთი მიმდევრობა ზრდადი რიცხვებისა

$$a < a_1 < a_2 < \ldots a_{p-1} < b,$$

რომ v რიცხვი, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$v_0=|f(a_1)-f(a)|+|f(a_2)-f(a_1)|+\ldots+|f(b)-f(a_{p-1})|,$$

მეტი იქნება $V-\frac{\varepsilon}{2}$-ზე. ვთქვათ λ დადებითი რიცხვია, ნაკლები სხვაობებზე: a_1-a, $a_2-a_1, \ldots, b-a_{p-1}$. განვიხილოთ (a, b) შუალედის რომელიმე დაყოფა λ-ზე ნაკლებ ნაწილობრივ შუალედებად, ზრდადი რიცხვებით $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$, და ვთქვათ v არის ფუნქციის შესაბამი ცვლილება. ახლა დავალაგოთ ყველა x_i და a_i რიცხვი ზრდადი რიგით; მივიღებთ ახალ დაყოფას (a, b) შუალედისას, ორი პირველის მიმდევნოს, და წინა შენიშვნის საფუძველზე, ამ ახალ დაყოფის შესაბამი ფუნქციის v' ცვლილება არ იქნება ნაკლები v_0 და v-ზე.

---

[1]) ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არ არის უეჭველად ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით. მაგალითად, ვეიერშტრასის უწყვეტი ფუნქცია, მოყვანილი მე-31 პარაგრაფში, არის ფუნქცია შემოუსაზღვრელი ცვლილებით ყოველ შუალედში. ფუნქცია: $x\sin\frac{1}{x}$ — კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

ვიპოვოთ $v'-v$ სხვაობის ზედა საზღვარი. ჩვენ შეგვიძლია გადავიდეთ იმ დაყოფიდან, რომელიც v-ს იძლევა, დაყოფაზე, რომელსაც შეესაბამება v' რიცხვი, თუ დავყოფთ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}$ წერტილებით იმ (x_{i-1}, x_i) შუალედებს, რომელთა შიგნით იმყოფება რომელიმე ამ a_k წერტილებიდანვე; ამასთანავე, ცხადია, რომ, ყოველ (x_{i-1}, x_i) შუალედში შეიძლება მოთავსდეს არა უმეტესი ერთი a_k წერტილებიდან. ყველა იმ (x_{i-1}, x_i) შუალედის რიცხვი, რომლებიც ამნაირად მიიღება, არ აღემატება $p-1$-ს. გვაქვს:

$$v'-v=\sum\left[\,|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|\,\right]$$

მასთან ჯამის ნიშანი ვრცელდება ყველა იმ (x_{i-1}, x_i) შუალედზე, რომელთა შიგნით იმყოფება ერთი a_k წერტილებიდან. ვთქვათ ω არის უდიდესი მნიშვნელობა $f(x)$ ფუნქციის რყევისა ყოველ ნაწილობრივ $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots$ შუალედებიდან. ცხადია, რომ სხვაობა:

$$|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

არ აღემატება 2ω, და მაშასადამე, სხვაობა $v'-v$ არ შეიძლება იყოს მეტი, ვიდრე $2(p-1)\,\omega$. ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ყოველ ნაწილობრივ შუალედში η-ზე ნაკლები ამპლიტუდით, $f(x)$ ფუნქციის რყევა იყოს ნაკლები ვიდრე $\dfrac{\varepsilon}{4(p-1)}$; მაშასადამე, თუ $x_1-a_1, x_2-x_1 \ldots, b-x_{n-1}$ სხვაობათა უდიდესი მნიშვნელობა ნაკლები იქნება η-ზე, მაშინ გვექნება $v'-v<\dfrac{\varepsilon}{2}$. გარდა ამისა, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $V-v$ სხვაობა ასეთი სახით:

$$V-v=V-v_0+(v'-v)-(v'-v_0),$$

და, მაშასადამე, მივიღებთ $V-v<\varepsilon$. ვინაიდან v არ შეიძლება იყოს V-ზე მეტი, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ v-ს ზღვარად V აქვს.

თუ ამ თეორემით ვისარგებლებთ, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $V(x)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის სრულ ცვლილებას (a, x) შუალედში, x-ის უწყვეტი ფუნქციაა.

ვთქვათ, x_0 არის a და b-ს შორის მოთავსებული x ცვლადის მნიშვნელობა, და $a, y_1, y_2, \ldots, y_n, x_0$ — ზრდადი რიცხვების რომელიმე მიმდევრობა. $V(x_0)$ არის ზღვარი ცვლილებისა:

$$v=|f(y_1)-f(a)|+|f(y_2)-f(y_1)|+\ldots+|f(y_n)-f(y_{n-1})|+|f(x_0)-f(y_n)|.$$

ჯამი ყველა წევრისა, გარდა უკანასკნელისა, არ შეიძლება იყოს მეტი $V(y_n)$-ზე; მაშასადამე, იგი არ აღემატება $V(x_0-0)$-ს, რადგან $V(x)$ ზრდადი ფუნქციაა.
ამგვარად გვაქვს:

$$v \leqslant V(x_0-0)+|f(x_0)-f(y_n)|.$$

ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ $f(x_0)-f(y_n)$ სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ $|x_0-y_n|$-თან ერთად; მაშასადამე, v ცვლილების $V(x_0)$ ზღვარი არ შეიძლება იყოს მეტი $V(x_0-0)$-ზე, და ვინაიდან $V(x)$ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ აუცილებლად

$$V(x_0)=V(x_0-0).$$

იმის დასამტკიცებლად, რომ გვაქვს აგრეთვე $V(x_0)=V(x+0)$, დავუშვათ

$$b-x=y,\ V_1(y)=V(b)-V(x);$$

$V_1(y)$ წარმოადგენს $f(b-y)$ ფუნქციის სრულ ცვლილებას $(0, y)$ შუალედში. ზემოთქმულის საფუძველზე გვაქვს:

$$V_1(y_0) = V_1(y_0 - 0),$$

და ამრიგად, $V(x_0) = V(x_0 + 0)$.

რადგანაც $V(x)$ და $f(x)$ ფუნქციები უწყვეტია, ამიტომ უწყვეტი იქნება აგრეთვე ფუნქციებიც

$$P(x) = \frac{V(x) + f(x) - f(a)}{2}, \quad N(x) = \frac{V(x) - f(x) + f(a)}{2}.$$

მაშასადამე, ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით არის ორი ზრდადი უწყვეტი ფუნქციის სხვაობა.

მაგალითი. თუ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას რომელიმე (a, b) შუალედში აქვს მაქსიმუმებისა და მინიმუმების მხოლოდ სასრული რიცხვი, მაშინ, ცხადია, რომ ის ამ შუალედში იქნება ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით. განვიხილოთ, მაგალითად, $f(x)$ ფუნქცია, ზრდადი a-დან a_1-მდე, შემდეგ კლებადი a_1-დან a_2-მდე, და ხელახლად ზრდადი a_2-დან b-მდე.. ავიღოთ ორი $f_1(x)$, $f_2(x)$ ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

1) (a, a_1) შუალედში: $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = 0$;
2) (a_1, a_2) შუალედში: $f_1(x) = f(a_1)$, $f_2(x) = f(a_1) - f(x)$;
3) (a_2, b) შუალედში: $\begin{cases} f_1(x) = f(x) - f(a_2) + f(a_1), \\ f_2(x) = f(a_1) - f(a_2). \end{cases}$

აშკარაა, რომ ორივე $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქცაა უწყვეტია და ზრდადი მთელ (a, b) შუალედში, და მათი სხვაობა ტოლია $f(x)$-ის. სრულიად ასევე შეიძლება მოვიქცეთ იმ $f(x)$ ფუნქციის დასაშლელად ორ უწყვეტ ზრდად ფუნქციის სხვაობად, რომელსაც აქვს (a, b) შუალედში სასრული რიცხვი მაქსიმუმებისა და მინიმუმების.

საზოგადოდ, ვთქვათ, $f(x)$ ისეთი ფუნქცია, რომ შეგვიძლია (a, b) შუალედი დავყოთ p ნაწილობრივ შუალედებად, რომელთაგანაც თითოეულში ფუნქცია იქნება მონოტონური; ამის გარდა, დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციას წყვეტის წერტილთა მხოლოდ სასრული რიცხვი აქვს, და მასთან წესიერი. წინა წესით ეს $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც სხვაობა ორი ზრდადი ფუნქციისა, რომლებსაც აქვს წყვეტის მხოლოდ წესიერი წერტილები.

12. მრავალ ცვლადის ფუნქციები. ამბობენ რომ ω არის ფუნქცია $x, y, z, \ldots, t$ ცვლადებისა თუ $x, y, z, \ldots, t$-ის მნიშვნელობათა ყოველ სისტემას ეთანადება ω-ს მნიშვნელობა. წარმოვიდგინოთ გარკვეულობისათვის, რომ ω არის ორი x და y დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია, და x და y განვიხილოთ სიბრტყეზე როგორც წერტილის კოორდინატები. x და y-ის მნიშვნელობათა ყოველ სისტემას შეესაბამება წერტილი M, და, პირიქით. თუ ყოველ M წერტილს, აღებულს სიბრტყის რომელიმე ნაწილში, ეთანადება ω-ს მნიშვნელობა, მაშინ ამბობენ, რომ $\omega = f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ამ ნაწილში, რომელსაც საზოგადოდ არეს უწოდებენ.

არე A შეიძლება შედგენილ იყოს შეკრული C კონტურის შიგნით მოთავსებული სიბრტყის ნაწილით, მაგრამ ის შეიძლება შემოსაზღვრული იყოს რამოდენიმე შეკრული კონტურითაც,—გარეგანი C და ერთი ან რამოდენიმე შინაგანი $C', C'', \ldots$ კონტურით. C, C', C'' ჰქმნიან ამ არეს საზღვარს; საზოგადოთ, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ საზღვრები შეადგენენ არეს ნაწილს, ე. ი. C კონტურის ყოველ წერტილზე, ω ფუნქციას აქვს გარკვეული მნიშვნელობა. ამ შემთხვევაში არეს შეკრული ეწოდება. არეს ეწოდება ბმული, თუ მისი ორი ნებისმიერი წერტილი შეიძლება შეერთებული იქნეს ტეხილი წირით, რომელიც მთლიანად ამ არეში მდებარეობს.

ფუნქცია $\omega = f(x, y)$ შემოსაზღვრულია A არეში, თუ ამ არეს ყველა წერტილისათვის ω-ს მნიშვნელობათა სიმრავლე არის შემოსაზღვრული სამრავლე. ზედა M და ქვედა m საზღვრები და ფუნქციის რყევა განისაზღვრებიან სავსებით ისე, როგორც ეს (§ 6)-ში იყო აღნიშნული.

ვთქვათ, (x_0, y_0) არის სიბრტყის ამ ნაწილში აღებული M_0 წერტილის კოორდინატები. ამბობენ, რომ ფუნქცია $f(x, y)$ უწყვეტია x_0, y_0 მნიშვნელობათა სისტემისათვის, თუ ყოველ დადებით ε რიცხვს ეთანადება მეორე დადებითი η რიცხვი, ისეთი, რომ

$$|f(x_0+h, \ y_0+k) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

როცა $|h| < \eta$ და $|k| < \eta$.

უწყვეტობის განსაზღვრა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად. წარმოვიდგინოთ, რომ x, y სიბრტყეზე აგებულია კვადრატი ცენტრით M_0-ში და 2η-ის ტოლი გვერდით, მასთან მისი გვერდები პარალელურია კოორდინატთა ღერძების; M' წერტილი კოორდინატებით $(x_0+h, \ y_0+k)$ იმყოფება ამ კვადრატის შიგნით, როცა დაცულია პირობა: $|h| < \eta$, $|k| < \eta$. გამოთქმა: ფუნქცია უწყვეტია $x = x_0$, $y = y_0$ მნიშვნელობებისათვის, ნიშნავს იმას, რომ შეიძლება ავიღოთ ამ კვადრატის გვერდი საკმაოდ მცირე, რომ ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობა M_0 წერტილში და ამ კვადრატის რაიმე სხვა წერტილში იყოს აბსოლუტური სიდიდით ε-ზე ნაკლები. ცხადია, რომ ეს კვადრატი შეიძლებოდა შეგვეცვალა წრით ცენტრით (x_0, y_0) წერტილში, ვინაიდან, თუ წინა პირობა შესრულებულია კვადრატის შიგნით დალაგებული ყველა წერტილისათვის, ის დაკმაყოფილებული იქნება აგრეთვე ჩახაზული წრის შიგა ყველა წერტილისათვისაც. უკუღმა, თუ ამ პირობას ადგილი აქვს წრის შიგნით მდებარე ყველა წერტილისათვის, მაშინ მას ადგილი ექნება ამ წრეში ჩახაზული კვადრატის ყველა შიგა წერტილისათვისაც. მაშასადამე, შეგვიძლია აგრეთვე განვმარტოთ უწყვეტობა შემდეგნაირად: ფუნქცია $f(x, y)$ უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილზე, თუ ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით ε რიცხვს შეესაბამება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ უტოლობას $\sqrt{h^2 + k^2} < \eta$ მოჰყვება უტოლობა:

$$|f(x_0+h, \ y_0+k) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

სავსებით ასევე ამბობენ, რომ ფუნქცია $f(x, y)$ უწყვეტია საზღვრის m წერტილზე, თუ ω-ს მნიშვნელობა A არეს მეზობელ m' წერტილში მიისწრაფის ω-ს მნიშვნელობისაკენ m-ში, როცა მანძილი mm' მიისწრაფის ნულისაკენ.

$f(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია A არეს ყოველ შიგა წერტილზე და მისი საზღვრის ყოველ წერტილზე ეწოდება უწყვეტი A-ში. C შეკრული კონტურით შემოსაზღვრულ A არეში უწყვეტი ფუნქციებისათვის შეიძლება გამოვთქვათ ზემოთ (§ 8)-ში დამტკიცებული თეორემების სრულიად ანალოგიური თეორემები.

ვთქვათ, ε — გარკვეული დადებითი რიცხვია; A არესი ყოველ (x, y) წერტილს შეესაბამება დადებითი $\theta(x, y, \varepsilon)$ რიცხვი, რომელიც შეიძლება განსაზღვროთ როგორც ზედა საზღვარი ისეთ θ რიცხვებისა, რომ

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

მუდამ, როცა მანძილი ორ (x,y) და (x',y') წერტილს შორის ნაკლებია θ-ზე. მე-§ 8 ში მოყვანილი დამტკიცების გამოყენებით დავრწმუნდებით იმაში, რომ როცა (x, y) წერტილი მოხაზავს შეკრულ არეს, $\theta(x, y, \varepsilon)$ რიცხვთა ქვედა საზღვარი განსხვავებულია ნულისაგან.

ეს ქვედა საზღვარი არის, ამგვარად, დადებითი η რიცხვი, და, მაშასადამე, ყოველ დადებით ε რიცხვს შეიძლება ეთანადებოდეს ისეთი მეორე დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon,$$

თუ კი A-ში ან C კონტურზე აღებული (x, y) და (x', y') წერტილებს შორის მანძილი იქნება ნაკლები η-ზე. სხვანაირად, ორი ცვლადის ფუნქცია, უწყვეტი სასრულო არეში და მის კონტურზე, არის თანაბრად უწყვეტი.

წინა დებულებიდან გამოვიყვანთ როგორც ზემოთ § 8-ში, რომ A არეში ყოველი უწყვეტი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია ამ არეში. § 8-ში მოყვანილი მსჯელობის საშუალებით შეიძლება იმნაირადვე დავამტკიცოთ, რომ $f(x, y)$ ღებულობს ერთხელ მაინც თითოეულს M და m მნიშვნელობათაგან არეს შიგნით ან კონტურზე. ვთქვათ, a და b წერტილებია, რომელთათვისაც $\omega = m$, და $\omega = M$ შესაბამად. შევაერთოთ a და b ტეხილი წირით, რომელიც მთლიანად C-ს შიგნით ძევს. როცა (x, y) წერტილი მოხაზავს ამ წირს, მაშინ ω არის ტეხილის სიგრძის უწყვეტი ფუნქცია, სადაც ეს სიგრძე ათვლილია a წერტილიდან (x, y) წერტილამდე; მაშასადამე, ის ერთხელ მაინც მიიღებს m და M შორის მოთავსებულ ყოველ μ მნიშვნელობას (§ 8). ვინაიდან a და b წერტილებს შორის შეიძლება გავლებულ იქნეს ტეხილ წირთა უსასრულო სიმრავლე, ამიტომ ჩვენ ვხედავთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია ღებულობს μ მნიშვნელობას, მოთავსებულს m და M-ს შორის C კონტურის შიგნით წერტილთა უსასრულო სიმრავლეზე.

აშკარაა, რომ ორი x და y ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია უწყვეტია ამ ცვლადების მიმართ ცალ-ცალკე, მაგრამ შებრუნებული დასკვნა ყოველთვის როდია სამართლიანი.

ავიღოთ, მაგალითად, $f(x, y)$ ფუნქცია, ტოლი $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, როცა x, y მნიშვნელობათაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, და მივიღოთ $f(0,0) = 0$. ასეთ სახით მოცემული ფუნქცია არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია, როცა y რჩება მუდმივი, და უკუღმა. ის არ წარმოადგენს ორი x და y ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას $x = y = 0$ მნიშვნელობათა სისტემისათვის, ვინაიდან, თუ (x, y) წერტილი მიისწრაფის კოორდინატთა სათავისაკენ ისე, რომ რჩება $y = mx$ წრფეზე, $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს ზღვრად $\frac{2m}{1+m^2}$, და ეს ზღვარი იცვლება m-თან ერთად. ამ მაგალითში, ცხადია, შეუძლებელი იქნებოდა ისე შეგვეცვალა $f(0,0)$ მნიშვნელობა, რომ ფუნქცია გამხდარიყო უწყვეტი კოორდინატთა სათავეში.

საქმე სულ სხვანაირადაა $f(x, y)$ ფუნქციისათვის, რომელიც ტოლია $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$-ის, როცა x^2+y^2 განსხვავდება ნულისაგან; თუ დავუშვებთ, გარდა ამისა, $f(0,0)=0$, მაშინ ასე განსაზღვრული ფუნქცია უწყვეტი იქნება როცა $x=y=0$, რადგან $f(x, y)$-ის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $|x|$-ზე.

ყველა ეს მოსაზრება დაუბრკოლებლივ ვრცელდება ნებისმიერი რიცხვის დამოუკიდებელ ცვლადთა ფუნქციაზე.

13. უწყვეტი წირები. წინა მსჯელობებში დავუშვით, რომ შეკრული C წირი ჰყოფს სიბრტყეს ორ არედ — შიგა D_i და გარე D_e არეებად, ისე რომ შეუძლებელია შევაერთოთ რომელიმე წერტილი D_i-დან D_e-ს რომელიმე წერტილთან ტეხილი წირით, რომელსაც არ ჰქონდეს საერთო წერტილები C-სთან. ეს თვისება სავსებით ეთანადება მრუდზე ინტუიციურ წარმოდგენას, როგორც გეომეტრიაშია მოცემული, და ის ადვილად შეიძლება დავამყაროთ გეომეტრიული თვისებებით გარკვეული მრუდებისათვის, მაგალითად ელიფსისათვის.

მაგრამ რომ შესაძლებლობა გვექნეს ზუსტად ვიმსჯელოთ, აუცილებელია შევცვალოთ, ეს რამოდენიმედ განუსაზღვრელი გეომეტრიული წარმოდგენა, წმინდა ანალიზური განსაზღვრით.

ვთქვათ, $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია t ცვლადისა; წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t),$$

შეადგენს უწყვეტ Γ მრუდს. დავუშვათ, რომ უწყვეტი $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებს აქვთ ω პერიოდი, ე. ი. რომ t-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$f(t+\omega)=f(t),\ \varphi(t+\omega)=\varphi(t),\ \psi(t+\omega)=\psi(t);$$

ამ შემთხვევაში საკმარისია t შევცვალოთ რომელიმე $(a, a+\omega)$ შუალედში ω ამპლიტუდით, რომ მივიღოთ Γ მრუდის ყველა წერტილი; ასეთ Γ მრუდს შეკრული მრუდი ეწოდება. ცხადია, რომ შეგვიძლია ω ვიგულისხმოთ დადებითად; გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ ω არის უმცირესი დადებითი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს სამ წინა ტოლობას. თუ ორ სხვადასხვა t', t'' მნიშვნელობათათვის გვაქვს ერთდროულად

$$f(t')=f(t''),\quad \varphi(t')=\varphi(t''),\quad \psi(t')=\psi(t''),$$

და ამასთანავე $t'-t''$ სხვაობა არ არის ჯერადი ω რიცხვის, მაშინ Γ მრუდის შესაბამ წერტილს მისი ორჯერადი წერტილი ეწოდება. თუ არ შეიძლება ვიპოვოთ არავითარი ორი ისეთი t', t'' მნიშვნელობა, რომლებიც დააკმაყოფილებს წინა დამოკიდებულებებს, ისე რომ $t'-t''$ არ იქნეს ω რიცხვის ჯერადი, მაშინ Γ მრუდს არ აქვს ორჯერადი წერტილი. ამნაირადვე განისაზღვრება უმაღლესი ჯერადობის ჯერადი წერტილებიც. მრუდეებს, რომლებსაც არა აქვთ ჯერადი წერტილები მარტივი მრუდეები ან ჟორდანის

მ რ უ დ ე ბ ი ეწოდება. რომ ეს განსაზღვრანი გამოვიყენოთ ბრტყელ მრუდებზე, საკმარისია დავუშვათ $\psi(t)=0$.

ჟორდანმა პირველმა დაამტკიცა (იხ. მისი „Cours d'Analyse"), რომ შეკრული მარტივი ბრტყელი C მრუდი ჰყოფს სიბრტყეს ორ გარე და შიგა არედ, ამასთან ყოველი ორი წერტილი ერთიდაიმავე არესი შეიძლება შეერთდეს ტეხილი წირით, რომელიც არ ჰკვეთს C მრუდს, იმ დროს, როცა ყოველი უწყვეტი წირი, რომელიც შიგა არეს წერტილს აერთებს გარე არეს წერტილთან, უეჭველად გადაჰკვეთს C მრუდს.

აქ მსჯელობა ადასტურებს გეომეტრიულ ინტუიციას, მაგრამ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ეს მუდამ ასე ხდება. პეანომ (Peano) გვიჩვენა ეს, მოგვცა რა მეტის-მეტად საინტერესო მაგალითი ბრტყელი მრუდისა, რომელსაც ახასიათებს შემდეგი შესანიშნავი თვისებები: t პარამეტრის ცვლილების დროს წერტილი, რომლის კოორდინატებია $x=f(t)$ და $y=\varphi(t)$, მიმდევრობით ემთხვევა რ ო მ ე ლ ი მ ე კ ვ ა დ რ ა ტ ი ს ყ ვ ე ლ ა შ ი გ ა წ ე რ ტ ი ლ ს [1]).

ეს შედეგი მოვიყვანეთ მხოლოდ იმისათვის, რომ გვეჩვენებინა, თუ მრუდის ანალიზური განსაზღვრა რამდენად რთულია ჩვეულებრივ განსაზღვრაზე. შემდეგში ჩვენ უმთავრესად განვიხილავთ მარტო იმ მრუდეებს, რომლებიც აკმაყოფილებს ჩვეულებრივად განსახილველი კონტურებისათვის სამართლიან პირობებს. ვთქვათ, $x=f(t)$ და $y=\varphi(t)$ არის განტოლებები, რომლებიც განსაზღვრავენ C მრუდს, და, ვთქვათ, (a, b) — შუალედი, რომელშიაც უნდა იცვლებოდეს t, რომ მივიღოთ ამ მრუდის ყველა წერტილი. ჩვენ მივიღებთ, რომ შეიძლება (a, b) დავყოთ სასრულო რიცხვი ნაწილობრივ შუალედებად, თვითეულ ამ შუალედში თითოეული f და φ ფუნქციებიდან იზრდება, ან კლებულობს, ან რჩება მუდმივი. თუ, მაგალითად, $x=f(t)$ ფუნქცია იზრდება (α, β) შუალედში, მაშინ შექცეული ფუნქციის ცნების საფუძველზე, შეიძლება აქედან გამოვსახოთ t როგორც x-ის უწყვეტი ფუნქცია, და შესაბამი რკალი წარმოიდგინება განტოლებით: $y=G(x)$. სრულიად ასევე თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია იზრდება ან კლებულობს კერძო შუალედში, მაშინ შესაბამი რკალი წარმოიდგინება განტოლებით: $x=H(y)$.

ყველა მრუდი, რომლებზედაც ლაპარაკი გვექნება შემდეგში, შედგენილია რამდენიმე ამგვარ რკალისაგან, რომლებიც შეერთებულია თავიანთი ბოლოებით. განვიხილოთ, კერძოთ, შეკრული C კონტური, რომელსაც არ აქვს ორჯერადი წერტილები, და ავიღოთ C მრუდის წერტილები, სადაც x-ს აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი (Oy-ის პარალელურ წრფეთა მონაკვეთების წერტილების ჩათვლით, თუ C კონტური ასეთებს შეიცავს).

ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — ამ წერტილთა აბსცისებია, დალაგებული ზრდადი რიგით. Oy ღერძის ყოველ $x=\alpha$ პარალელი, სადაც α მოთავსებულია ერთ-ერთში (x_{i-1}, x_i) ინტერვალებიდან, ხვდება C-ს ლუწი რიცხვი წერტილებში, ორდინატებით $(y_1, y_2, \ldots, y_{2p})$; y_h არის უწყვეტი $\varphi_h(x)$ ფუნქცია (x_{i-1}, x_i) ინტერვალში. ჩვენ ვიგულისხმოთ, რომ

$$\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\cdots<\varphi_{2p-1}<\varphi_{2p}.$$

---

[1]) Peano, Sur une courbe qui remplit une aire plane (Math. Annalen, ტ. XXXVI). იხ. აგრეთვე Hilbert (Ibid, ტ. XXXVIII).

$x = x_{i-1}$, $x = x_i$ წრფეებით შემოსაზღვრული ზოლის ყოველი წერტილი, მოთავსებული $y_1 = \varphi_1$ და $y_2 = \varphi_2$ მრუდებს შორის, არის შინაგანი C კონტურის მიმართ; უკუღმა, ამ ზოლის ყოველი წერტილი, მოთავსებული $y_2 = \varphi_2$ და $y_3 = \varphi_3$ მრუდებს შორის, არის გარეგანი C კონტურის მიმართ, და ა. შ.

თუ ამ მსჯელობას გავაგრძელებთ, დავრწმუნდებით იმაში, რომ C კონტურის მიმართ შიგა არე შეიძლება დაიყოს სასრულო რიცხვი ნაწილობრივ არეებად, სადაც თვითოეული ამ არეთაგან შემოსაზღვრულია Oy ღერძის ორი $x = a$, $x = b$ პარალელით და ორი $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ მრუდით, სადაც φ_1 და φ_2 (a, b) იტერვალში უწყვტი ფუნქციებია.

სავარჯიშოები

1. ნამრავლი ორი ფუნქციისა შემოსაზღვრული ცვლილებით არის აგრეთვე ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით.

2. თუ $f(x)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით მაშინ ამას ექნება ადგილი აგრეთვე $|f(x)|$-თვისაც.

3. რომ ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული ცვლილებით, აუცილებელია და საკმარისი, რომ რყევათა ჯამი ყოველ ნაწილობრივ ინტერვალში რჩებოდეს სასრულო.

4. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია რომელიმე არეში ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ, მაშინ იგი უწყვეტია ორივე ცვლადის მიმართ ერთად ამ არეში.

თ ა ვ ი II

წარმოებულები და დიფერენციალები

I. განსაზღვრანი. ზოგადი თვისებები

14. წარმოებულები. ვთქვათ $f(x)$ არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია; განვიხილოთ ფარდობა:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

ვთქვათ x რჩება უცვლელი და h-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა უსაზღვროთ მცირდება; ამ ფარდობის მრიცხველი და მნიშვნელი მიისწრაფის ნულისაკენ და თუ ამ პირობებში თვით ფარდობა მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი. წარმოებული ჩვეულებრივ აღინიშნება y'-ით, ან ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს (Lagrange) აღნიშვნით $f'(x)$-ით.

წარმოებულის ანალიზურ განსაზღვრასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული მისი გეომეტრიული აზრი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი (a, b) შუალედში. განვიხილოთ სიბრტყეზე წერტილი (x, y) კოორდინატებით. როცა x იცვლება a-დან — b-მდე, ეს წერტილი აღწერს AMB მრუდის რკალს, რომელიც წარმოადგენს გრაფიკულად (a, b) შუალედში $f(x)$ ფუნქციის მსვლელობას. ავიღოთ ამ რკალზე ორი მეზობელი M და M' წერტილი x და $x+h$ აბსცისებით. MM' წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უდრის:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

როცა h ნულისაკენ მიისწრაფის, M' წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება M წერტილს, და თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ MM' წრფის საკუთხო კოეფიციენტი y' ზღვარისაკენ მიისწრაფის. ამნაირად MM' წრფე მიისწრაფის რაიმე ზღვრულ MT მდებარეობისაკენ, რომელსაც მ რ უ დ ი ს მ ხ ე ბ ი ეწოდება; ზემოთნათქვამის საფუძველზე, მხების განტოლება იქნება:

$$Y-y=y'(X-x),$$

სადაც X და Y — მიმდინარე კოორდინატებია.

გავავრცელოთ ეს მსჯელობა ორმაგი სიმრუდის მრუდეებზე. ვთქვათ:

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t) \tag{1}$$

არის t პარამეტრის ფუნქციებით გამოსახული ორმაგი სიმრუდის მრუდის რაიმე წერტილის კოორდინატები. ავიღოთ ამ მრუდზე ორ M და M' წერტილი, რომლებიც შეესაბამებიან პარამეტრის t და $t+h$ მნიშვნელობებს. MM' ქორდის განტოლება იქნება:

$$\frac{X-f(t)}{f(t+h)-f(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi(t+h)-\psi(t)}.$$

თუ ამ ფარდობათა მნიშვნელებს გავყოფთ h-ზე და შემდეგ h-ს უსაზღვროდ მივუახლოვებთ ნულს, ჩვენ ვნახავთ, რომ MM' ქორდა მიისწრაფის ზღვრულ მდებარეობისაკენ, რომელიც წარმოგვიდგება განტოლებით:

$$\frac{X-f(t)}{f'(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi'(t)},$$

აქ ცხადია, იგულისხმება, რომ $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებს აქვს წარმოებულები. ამნაირად მრუდის მხების განსაზღვრა ანალიზურად დაიყვანება წარმოებულთა გამოთვლაზე.

ყოველი ფუნქცია, რომელსაც აქვს წარმოებული აუცილებლად უწყვეტია, მაგრამ შებრუნებული დებულება ყოველთვის როდია სამართლიანი. ადვილად შეიძლება დავასახელოთ ისეთი უწყვეტი ფუნქციები, რომელთაც არ აქვთ წარმოებული ცვლადის ზოგიერთ კერძო მნიშვნელობისათვის. ასეთია ფუნქცია: $y=x\sin\frac{1}{x}$, როცა $x=0$. თუ x ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ y-იც მიისწრაფის ნულისაკენ და ფუნქცია უწყვეტია, მაგრამ ფარდობა $\frac{y}{x}=\sin\frac{1}{x}$, როგორც უკვე ვნახეთ, არ მიისწრაფის არავითარ ზღვარისაკენ.

ავიღოთ აგრეთვე $y=x^{\frac{2}{3}}$. ეს ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის და უდრის ნულს, როცა $x=0$. მაგრამ თუ x ნულისაკენ მიისწრაფის ფარდობა $\frac{y}{x}=x^{-\frac{1}{3}}$ უსაზღვროდ იზრდება. სიმარტივისათვის ვიტყვით აქ, რომ, როცა $x=0$, წარმოებული უსასრულოა. მრუდი, რომელიც გამოხატავს ფუნქციის მსვლელობას, y ღერძს კოორდინატთა სათავეში ეხება.

ფუნქცია $y=x\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ნულს უდრის, როცა $x=0$; მაგრამ ფარდობა $\frac{y}{x}$ მიისწრაფის ორ სხვადასხვა ზღვარისაკენ, იმისდა მიხედვით, x უახლოვდება ნულს ისე რომ რჩება დადებითი თუ უარყოფითი. თუ x დადებითია და ძალიან მცირე, მაშინ $e^{\frac{1}{x}}$ დადებითია და ძალიან დიდი; $\frac{y}{x}$ ფარდობა მიისწრაფის 1-ისაკენ.

წინააღმდეგ, თუ x უარყოფითია და აბსოლუტური სიდიდით ძალიან მცირე, მაშინ $e^{\frac{1}{x}}$ ძალიან ახლოა ნულთან და $\frac{y}{x}$ ფარდობას ზღვარად აქვს ნული. ამგვარად წარმოებულს აქვს ორი სხვადასხვა მნიშვნელობა იმისდა მიხედვით, თუ როგორ უახლოვდება x ნულს. ფუნქციის მსვლელობის გამომსახველი მრუდს კოორდინატთა სათავეში აქვს კ უ თ ხ ო თ ი წ ე რ ტ ი ლ ი.

ამ მაგალითებიდან ჩანს, რომ ადვილად შეიძლება შევადგინოთ ისეთი ფუნქციები, რომელთაც არ აქვთ წარმოებული ცვლადის ზოგიერთ კერძო მნიშვნელობისათვის. სხვათაშორის უსასრულო მცირეთა აღრიცხვის გამომგონებლებს და მათ მიმდევრებს არასოდეს არ ეპარებოდათ ეჭვი იმაში, რომ უწყვეტ ფუნქციებს, საერთოდ, აქვს წარმოებული. იყო კიდეც რამოდენიმე ცდა დამტკიცების, რა თქმა უნდა არა საკმარისი, სანამ ვეიერშტრასმა (Weierstrass) არ გადასწყვიტა საკითხი, მოგვცა რა მაგალითები უწყვეტი ფუნქციათა, რომელთაც არ აქვთ წარმოებული (ცვლადის არც ერთი მნიშვნელობისათვის [1]). რადგან ამ ფუნქციებმა აქამდე ვერავითარი გამოყენება ვერ ჰპოვეს, ამიტომ ჩვენ მათ არც განვიხილავთ. შემდეგში, როცა ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული (a, b) შუალედში, თუ არ იქნება განსაკუთრებული მითითება, ეს ნიშნავს, რომ ამ ფუნქციას აქვს ერთადერთი და სასრული წარმოებული ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში.

15. უმაღლესი რიგის წარმოებულები. $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული საზოგადოდ, თვით არის x-ის რაღაც ფუნქცია, $f'(x)$; თუ თავის მხრივ $f'(x)$-ს აქვს წარმოებული, მაშინ ამ ახალ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f''(x)$-ით ან y''-ით. მესამე წარმოებული y''' ან $f'''(x)$ განისაზღვრება ანალოგიურად, როგორც მეორე წარმოებულის წარმოებული და ასე შემდეგ და, საზოგადოდ, n-ური წარმოებული $y^{(n)}$ ანუ $f^{(n)}(x)$ არის $(n-1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებული.

უმაღლესი რიგის წარმოებულთა მოძებნის დროს, შეიძლება მოხდეს ისეთი შემთხვევა, რომ ვერასოდეს ვერ მივიდეთ იმ ფუნქციამდე, რომელსაც არ აქვს წარმოებული. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ ზემო მოქმედებათა მიმდევრობა გრძელდება უსასრულოდ და ვღებულობთ $f(x)$ ფუნქციის მიმდევნო წარმოებულთა უსასრულო წკრივს. ასეთი წარმოებულთა უსასრულო მიმდევრობა აქვს ყველა იმ ფუნქციას, რომელთაც აქვთ რაიმე პრაქტიკული გამოყენება. წარმოებულის ზემოთმოყვანილი აღნიშვნა ეკუთვნის ლაგრანჟს. ზოგჯერ n-ური რიგის წარმოებულის აღსანიშნავად ხმარობენ კოშის (Cauchy) სიმბოლოს: $D^n y$ ან $D^n f(x)$. ქვევით ჩვენ გავეცნობით ლეიბნიცის (Leibniz) აღნიშვნას.

---

[1]) მოხსენება, რომელიც წაკითხული იყო ბერლინის სამეცნიერო აკადემიაში 1872 წლის 18 ივლისს. სხვა მაგალითები შეიძლება იპოვოთ დარბუს (Darbous) მემუარში, წყვეტილ ფუნქციათა შესახებ (Annales de l'École Normale Supérieure, ტომი IV, სერია მე-2-რე), ვეიერშტრასის მაგალითი მოყვანილია ქვემოთ (IX თავი).

16. როლის თეორემა. განტოლებათა შესწავლის დროს, წარმოებულების გამოყენება ემყარება შემდეგი დებულებას, რომელიც ცნობილია როლის (Rolle) თეორემის სახელწოდებით.

ვთქვათ a და b არის $f(x)=0$ განტოლების ფესვები. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, და აქვს წარმოებული (a, b) შუალედში, მაშინ $f'(x)=0$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ისეთი ფესვი, რომელიც მოთავსებულია a და b-ს შორის.

მართლაც, როგორც ნაგულისხმევია, $x=a$ და $x=b$ მნიშვნელობებისათვის $f(x)$ ფუნქცია ხდება ნული. თუ ეს ფუნქცია (a, b) შუალედში მუდამ ნულის ტოლია, მაშინ მისი წარმოებულიც აგრეთვე მუდამ ნული იქნება და თეორემა თავისთავად ცხადია; და თუ $f(x)$ მუდამ ნულს არ უდრის, მაშინ მას ექნება დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობანი. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს დადებითი მნიშვნელობები; მაშინ მას უსათუოდ აქვს უდიდესი A მნიშვნელობა x-ის რომელიმე $x=x_1$ მნიშვნელობისათვის, რომელიც (a, b) შუალედში იმყოფება (§ 3, თეორემა II). ფარდობა:

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h},$$

სადაც $h>0$, იქნება აუცილებლად უარყოფითი ან ნული; ამიტომაც ზღვარი ამ ფარდობის, ე. ი. $f'(x_1)$, არ შეიძლება იყოს დადებითი რიცხვი, მაშასადამე $f'(x_1)\leqslant 0$. სრულიად ანალოგიურად, თუ განვიხილავთ $f'(x_1)$-ს როგორც ზღვარს ფარდობისას:

$$\frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h},$$

სადაც $h>0$, ვნახავთ, რომ $f'(x_1)\geqslant 0$. ამ ორი შედეგის შედარება გვარწმუნებს, რომ აუცილებლად $f'(x_1)=0$.

17. სასრული ნაზრდის ფორმულა. როლის თეორემიდან ადვილად შეიძლება გამოყვანილი იქნეს ფრიად საგულისხმო სასრული ნაზრდის ფორმულა.

ვთქვათ $f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც (a, b) შუალედში აქვს წარმოებული, მაშინ:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \qquad (1')$$

სადაც c რიცხვია, რომელიც იმყოფება a და b-ს შორის.

რომ გამოვიყვანოთ ეს ფორმულა, განვიხილოთ მეორე $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელსაც იგივე თვისებები აქვს რაც პირველს, ე. ი. უწყვეტია და აქვს (a, b) შუალედში წარმოებული.

შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია:

$$\psi(x)=Af(x)+B\varphi(x)+C,$$

სადაც A, B, C მუდმივებია, და განვსაზღვროთ ეს მუდმივები ისეთნაირად,

რომ $\psi(x)$ ფუნქცია გახდეს ნული $x=a$ და $x=b$ მნიშვნელობებისათვის. ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება:

$$Af(a)+B\varphi(a)+C=0,\ Af(b)+B\varphi(b)+C=0;$$

ჩვენ დავაკმაყოფილებთ ამ პირობებს, თუ მივიღებთ:

$$A=\varphi(a)-\varphi(b),\ B=f(b)-f(a),\ C=f(a)\varphi(b)-f(b)\varphi(a).$$

ასეთნაირად განსაზღვრული $\psi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და (a, b) შუალედში აქვს წარმოებული. რადგან $x=a$ და $x=b$ მნიშვნელობებისათვის ეს $\psi(x)$ ფუნქცია ნულად იქცევა, ამიტომ მისი წარმოებულიც: $\psi'(x)=Af'(x)+B\varphi'(x)$ ნული უნდა გახდეს x-ის რომელიმე c მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში, აქედან, თუ შევცვლით A და B-ს მათი მნიშვნელობებით, მივიღებთ შემდეგი სახის დამოკიდებულებას:

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]f'(c)=[f(b)-f(a)]\varphi'(c);$$

თუ გავყოფთ $\varphi'(c)[\varphi(b)-\varphi(a)]$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2}$$

თუ ვიგულისხმებთ ამ თანაფარდობაში, რომ $\varphi(x)=x$ მივიღებთ (1') ტოლობას. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ აქ დამტკიცების დროს ჩვენ არ ვგულისხმობდით, რომ $f'(x)$ უწყვეტია და, რომ ის არსებობს $x=a$ და $x=b$ ბოლოებზე.

სასრულო ნაზრდის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ (a, b) შუალედში $f'(x)$ წარმოებული უდრის ნულს, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას ამ შუალედში; მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ამ ფორმულას x-ის ორი x_1 და x_2 მნიშვნელობისათვის, რომლებიც იმყოფება (a, b) შუალედში, მივიღებთ დამოკიდებულებას: $f(x_1)=f(x_2)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ სხვაობა ორი ფუნქციისა, რომელთაც აქვთ ერთი და იგივე წარმოებული, მუდმივია; ცხადია, სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ ცნობილია $F(x)$ ფუნქცია, რომელსაც წარმოებულად აქვს მოცემული $f(x)$ ფუნქცია, შეგვიძლია მივიღოთ ყველა სხვა ფუნქცია, რომელთაც იგივე წარმოებული აქვთ, თუ $F(x)$ ფუნქციას მივუმატებთ ნებისმიერ მუდმივს.[1]

[1]) არ შეიძლება ამ თეორემის გამოყენება, თუ ყურადღება არ იქნება მიქცეული ყველა მასში შემავალ პირობაზე. ვთქვათ, მაგ. $f(x)$ და $\varphi(x)$—ორი უწყვეტი ფუნქციაა, რომელთაც (a, b) შუალედში აქვთ $f'(x)$ და $\varphi'(x)$ წარმოებულები. თუ ამ ორ ფუნქციას შორის არსებობს დამოკიდებულება: $f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)=0$, მაშინ ჩვენ სასრულო ნაზრდის ფორმულიდან გამოვიყვანთ, რომ წარმოებული $\frac{f}{\varphi}$ ფუნქციიდან, ე. ი. $\frac{f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2}$, ნულს უდრის და, მაშასადამე, $\frac{f}{\varphi}$ ფარდობა (a, b) შუალედში მუდმივია, მაგრამ ეს დასკვნა სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ (a, b) შუალედში $\varphi(x)$ არ იქცევა ნულად. მართლაც,

(1') ფორმულას შეიძლება მიეცეს უბრალო გეომეტრიული ახსნა-განმარტება. მართლაც, განვიხილოთ მრუდი AMB, რომელიც (a, b) შუალედში გამოსახავს $f(x)$ ფუნქციის მსვლელობას. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ არის AB ქორდის საკუთხო კოეფიციენტი, მხოლოდ $f'(c)$ არის C წერტილზე გამავალი მხების საკუთხო კოეფიციენტი, სადაც c არის C წერტილის აბსცისი. (1') ფორმულა გვიჩვენებს, რომ AMB რკალზე იმყოფება ისეთი წერტილი C, რომ მხები გავლებული ამ წერტილში პარალელურია AB ქორდის.

დავუშვათ, რომ $f'(x)$ წარმოებული უწყვეტია; თუ ჩვენ a და b-ს რაიმე კანონით მივუახლოებთ მათ საერთო x_0 ზღვარს, მაშინ რიცხვი c-ც, რომელიც იმყოფება a და b შორის აგრეთვე მიისწრაფის x_0-კენ. (1') ფორმულა გვიჩვენებს რომ ფარდობას:

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ზღვარად აქვს $f'(x_0)$. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს შემდეგს: $y=f(x)$ მრუდზე განვიხილოთ M წერტილი x_0 აბსცისით და A და B წერტილები a და b აბსცისებით. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ფარდობა უდრის AB ქორდის საკუთხო კოეფიციენტს, მაშინ როცა $f'(x_0)$ წარმოადგენს M წერტილზე გამავალ მხების საკუთხო კოეფიციენტს. წინა ნათქვამიდან ჩანს, რომ როცა A და B წერტილები რაიმე კანონით უახლოვდება M წერტილს, მაშინ AB—გამკვეთს ზღვარად აქვს M წერტილზე გავლებული მხები.

ეს, საზოგადოდ არ იქნება, როცა $f'(x)$ წარმოებული წყვეტილია. მაგ., თუ ავიღებთ $y=x^{\frac{2}{3}}$ მრუდზე ორ წერტილს, რომლებიც მდებარეობენ კოორდინატთა სათავის უსასრულოდ ახლოს y—ღერძის სხვადასხვა მხარეზე, მაშინ ნახაზზე ცხადად ჩანს, რომ იმ წრფის მიმართულება, რომელიც ამ ორ წერტილს აერთებს, რჩება სრულიად განუსაზღვრელი, როცა ორივე წერტილი უახლოვდება კოორდინატთა სათავეს.

კიდევ ერთი შედეგი (1') ფორმულიდან, რომელიც ჩვენ ხშირად დაგვჭირდება შემდეგში.

ვთქვათ, (a, b) შუალედში $f'(x)$ წარმოებული შემოსაზღვრულია ისე, რომ x-ს ყოველ მნიშვნელობისათვის a და b-ს შორის გვაქვს $|f'(x)|<K$, სადაც დადებითი K რიცხვი x-ზე არ არის დამოკიდებული. აქედან გამოდის, რომ

ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ და მისი $\varphi'(x)$ წარმოებული ნულად იქცევა, $x=c$ მნიშვნელობისათვის, სადაც c იმყოფება a და b-ს შორის. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უდრის $C_1\varphi(x)$-ს (a, c) შუალედში და $C_2\varphi(x)$-ს (c, b) შუალედში, სადაც C_1 და C_2 ორი სხვადასხვა მუდმივი სიდიდეა. ცხადია, რომ $f(x)$ უწყვეტია და აქვს წარმოებული (a, b) შუალედში და გარდა ამისა $f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)=0$ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამ შუალედში. ამავე დროს ფუნქცია $\dfrac{f}{\varphi}$ უდრის C_1-ს (a, c) შუალედში და C_2-ს (c, b) შუალედში. არ არის ძნელი ამ მაგალითს მივცეთ გეომეტრიული ახსნა-განმარტება.

x-ის ორი ნებისმიერი x_1 და x_2 მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში ყოველთვის აქვს ადგილი უტოლობას:

$$|f(x_2)-f(x_1)|<K|x_2-x_1|.$$

ამ უტოლობით გამოხატულ პირობას, ჩვენ მოკლეთ ვუწოდებთ ლიპშიცის (Lipschitz) პირობას; აქ K აღნიშნავს გარკვეულ რიცხვს, x_1 და x_2-კი შუალედის ნებისმიერი რიცხვებია.

(2) ფორმულა ზოგჯერ იწოდება სასრულო ნაზრდის განზოგადოებული ფორმულად. მისგან ადვილად გამოიყვანება ლოპიტალის (L'Hopital) თეორემა, რომლითაც მოიძებნება განუზღვრელი გამოსახულებათა ზღვრები. დავუშვათ, რომ $x=a$ მნიშვნელობისათვის $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$. თუ (1') ფორმულაში b-ს შევცვლით x-ით, მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

სადაც x_1 იმყოფება a და x-ს შორის. ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ თუ $x=a$ მნიშვნელობისათვის ჩვენ გვაქვს $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ და თუ $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ფარდობა მიისწრაფის რომელიმე ზღვარისაკენ, როცა x მიისწრაფის a-კენ, მაშინ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ფარდობაც მიისწრაფის იმავე ზღვარისაკენ.

18. ტეილორის ფორმულა. ალგებრიდან ცნობილია, რომ, თუ $f(x)$ არის n-ური ხარისხის მრავალწევრი, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს a და h რიცხვები, ჩვენ ყოველთვის გვაქვს:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}f^{(n)}(a). \tag{3}$$

დაშლა (3) სასრულოა, რადგან ყველა წარმოებული $(n+1)$-დან დაწყებული ნულს უდრის. რომ მოვისურვოთ ამ ფორმულის გამოყენება არა მრავალწევრზე, არამედ რაიმე $f(x)$ ფუნქციაზე, მაშინ მეორე ნაწილში მივიღებთ წევრთა უსასრულო რიცხვს; რომ გავიგოთ, თუ რა მნიშვნელობა უნდა მივაწეროთ ასეთნაირად მიღებულ დაშლას, ვიპოვოთ წინასწარ შემდეგი სხვაობის გამოსახულება:

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)-\cdots-\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}f^{(n)}(a),$$

აქ ნავულისხმევია მხოლოდ, რომ $f(x)$ და მისი პირველი n წარმოებულები: $f'(x)$, $f''(x)\cdots f^{(n)}(x)$ არიან უწყვეტი, როცა x იცვლება a-დან $a+h$-მდე, და რომ $f^{(n)}(x)$ აქვს $f^{(n+1)}(x)$ წარმოებული ამავე შუალედში. მივიღოთ, რომ

a და h რიცხვებს აქვთ გარკვეული მნიშვნელობები, დავუშვათ:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^p}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^p}{1.2\ldots n.p}P, \tag{4}$$

სადაც p არის რომელიმე მთელი დადებითი რიცხვი. უკანასკნელი ტოლობის დახმარებით განვსაზღვროთ P. რიცხვი და განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია:

$$\varphi(x)=f(a+h)-f(x)-\frac{a+h-x}{1}f'(x)-\frac{(a+h-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)-\cdots$$

$$\cdots-\frac{(a+h-x)^n}{1\,.\,2\ldots n}f^{(n)}(x)-\frac{(a+h-x)^p}{1\cdot 2\cdots n\cdot p}P.$$

ადვილად ვნახავთ, რომ

$$\varphi(a)=0 \text{ და } \varphi(a+h)=0,$$

პირველი ტოლობა გამომდინარეობს (4) ფორმულიდან, რომელიც განსაზღვრავს P რიცხვს. $f(x)$-ის შესახებ მიღებულ ყველა დაშვებისაგან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს $(a, a+h)$ შუალედში წარმოებული. მაშასადამე, *როლის* თეორემის თანახმად, $\varphi'(x)=0$ განტოლებას უნდა ჰქონდეს $a+\theta h$ ფესვი, რომელიც იმყოფება იმავე შუალედში, სადაც θ არის დადებითი რიცხვი 0 და 1-ს შორის. გამოვთვლით რა $\varphi'(x)$-ს, გამარტივების შემდეგ, მივიღებთ:

$$\varphi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}\left[P-(a+h-x)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x)\right]$$

პირველი $(a+h-x)^{p-1}$ მამრავლი არ შეიძლება ნული გახდეს x-ის მნიშვნელობისათვის, რომელიც განსხვავდება $a+h$-საგან, ამიტომ აუცილებელია, რომ

$$P=h^{n-p+1}(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

თუ (4) ფორმულაში P-ს შევცვლით მიღებული მნიშვნელობით, გვექნება:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n}f^{(n)}(a)+R_n, \tag{5}$$

სადაც

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1\cdot 2\cdots n\cdot p}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

უწოდოთ ამ (5) ფორმულას *ტეილორის* (Taylor) *ზოგადი ფორმულა*; უკანასკნელ R_n წევრს კი *დამატებითი წევრი* ეწოდება. ეს დამატებითი წევრი დამოკიდებულია მთელ და დადებით p რიცხვზე, რომელიც ჩვენ დავტოვეთ განუსაზღვრელი. ჩვეულებრივ ამ p რიცხვისათვის ღებულობენ

ორ მნიშვნელობას: $p=n+1$ ან $p=1$. თუ დავუშვებთ $p=n+1$, მივიღებთ დამატებითი წევრის გამოსახულებას, რომელიც მოცემული იყო ლაგრანჟის (Lagrange) მიერ:

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n\,(n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h);$$

თუ დავუშვებთ $p=1$, მივიღებთ:

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n}f^{(n+1)}(a+\theta h); \qquad (6)$$

დამატებითი წევრის ეს სახე ეკუთვნის კოშის. ცხადია, რომ θ რიცხვს, საზოგადოდ, არ აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა დამატებითი წევრის ორივე ფორმულაში. თუ დავუშვებთ, რომ $f^{(n+1)}(x)$ უწყვეტია $x=a$ მნიშვნელობისათვის, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot(n+1)}\left[f^{(n+1)}(a)+\varepsilon\right], \qquad (7)$$

სადაც ε არის უსასრულო მცირე h-თან ერთად.

განვიხილოთ დამატებითი წევრი ლაგრანჟის სახით. თუ (5) ზოგად ფორმულაში მიმდევრობით დავუშვებთ, რომ $n=2$, $n=3$, $n=4\cdots$ მივიღებთ სხვადასხვა ფორმულას, რომლებიც h-ის უსასრულო მცირე მნიშვნელობისათვის, ღებულობენ ისეთ მნიშვნელობებს, რომლებიც სულ უფრო და უფრო ახლოსაა $f(a+h)$-თან. ასე, როცა $n=2$, ჩვენ გვაქვს:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a+\theta h);$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სხვაობა:

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)$$

არის მეორე რიგის უსასრულო მცირე. შემდეგი სხვაობა:

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)$$

არის მესამე რიგის უსასრულო მცირე, და საზოგადოდ:

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

არის $(n+1)$ რიგის უსასრულო მცირე h-ის მიმართ. მაგრამ, რომ გვქონდეს ზუსტი წარმოდგენა იმ მიახლოებაზე, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ, თუ R_n ნაშთს უყურადღებოდ დავტოვებთ, აუცილებელია ვიცოდეთ ამ ნაშთის ზედა საზღვარი. თუ აღვნიშნავთ M-ით $f^{(n+1)}(x)$-ის აბსოლუტურ სიდიდის ზედა საზღვარს $x=a$ მნიშვნელობის მახლობლობაში, მაგ: $a-\eta$ და $a+\eta$ შორის, მაშინ, როცა $|h|<\eta$, ცხადია, გვექნება:

$$|R_n|<\frac{|h|^{n+1}}{1.2\,.\,.\,.\,(n+1)}M.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვიყენოთ (7) ფორმულა $f(x)=\ln(1+x)$ ფუნქციისათვის, სადაც ln ნიშანი აღნიშნავს ნეპერის ლოგარითმს. თუ დავუშვებთ $a=0$, $n=1$, $x>-1$; მივიღებთ:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2};$$

თუ ამ ფორმულაში x-ს შევცვლით n-ის შებრუნებული სიდიდით, მივიღებთ:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

სადაც θ_n დადებითი მამრავლია, ერთზე ნაკლები.

აქედან დავასკვნით, რომ წკრივი, რომლის ზოგადი წევრია:

$$\frac{1}{p}-\ln\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

კრებადია, რადგან ეს ზოგადი წევრი ნაკლებია ვიდრე $\frac{1}{2p^2}$. ამ წკრივის პირველი n წევრის ჯამი უდრის

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=\Sigma_n-\ln n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

მაშასადამე, სხვაობა $\Sigma_n-\ln n$ მიისწრაფის სასრული ზღვარისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება. ეს ზღვარი არის ე ი ლ ე რ ი ს C მუდმივი, რომლის მნიშვნელობა, გამოთვლილი 20 ათწილად ნიშნამდე არის $C=0{,}57721566490153286060$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. (1) ფორმულებით გამოსახული მრუდის მხების განტოლება იგივეობად გარდაიქცევა, როცა ყველა წარმოებული $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ნულად იქცევა $t=t_0$-თვის. რომ ავიცილოთ ეს სიძნელე, მოვიგონოთ ის მსჯელობა, რომელიც გამოვიყენეთ, რომ გვეპოვა მხების განტოლება. ვთქვათ, M' არის M-ის მეზობელი წერტილი C მრუდზე და t_0+h—მისი შესაბამი პარამეტრის მნიშვნელობა; MM' ქორდის განტოლება იქნება:

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

უფრო მეტი ზოგადობისათვის, მივიღოთ, რომ ყველა p-ზე $(p>1)$ ნაკლები რიგის წარმოებული $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ფუნქციებისა ნულად იქცევა $t=t_0$ მნიშვნელობისათვის, მაგრამ p რიგის წარმოებულთა შორის ერთი მაინც მაგ. $f^{(p)}(t_0)$ ნულისაგან განსხვავდება. თუ ზემო გამოსახულების ყველა მნიშვნელს h^p-ზე გავყოფთ და გამოვიყენებთ (7) ფორმულას, შეგვიძლია ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\varepsilon}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)+\varepsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\varepsilon''},$$

სადაც ε, ε', ε''—უსასრულო მცირეებია. ახლა თუ კი h-ს მივუახლოებთ ნულს, მაშინ ეს განტოლება ზღვარზე მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)}$$

და უკვე აღარ წარმოადგენს არავითარ განუზღვრელობას.

C მრუდის ის წერტილები, სადაც ამ გარემოებას აქვს ადგილი, საერთოდ, განკუთრი წერტილებია და მრუდს ამ წერტილებში განსაკუთრებული სახე აქვს. ასე, მაგალითად ბრტყელი მრუდი, რომელიც მოცემულია განტოლებებით: $x=t^2$, $y=t^3$, გადის კოორდინატთა სათავეზე და ამ წერტილში გვაქვს $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$. მრუდს კოორდინატთა სათავეში აქვს პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი მხებით, რომელიც ემთხვევა x ღერძს.

19. კერძო წარმოებულები. მივცეთ უწყვეტ $f(x, y)$ ფუნქციაში რომელიმე ერთერთ ცვლადს მაგალითად y-ს, რაიმე მუდმივი მნიშვნელობა. მივიღებთ მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი x ცვლადის ფუნქციას; ავღნიშნოთ ამ ფუნქციიდან წარმოებული, თუ იგი არსებობს, $f'_x(x, y)$ ან ω_x'. ანალოგიურად ავღნიშნოთ ω_y'-ით ან $f'_y(x, y)$-ით წარმოებული $f(x, y)$ ფუნქციიდან, როცა x განიხილება როგორც მუდმივი და y კი როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი; $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$-ს ეწოდება კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი $f(x,y)$ ფუნქციიდან. საზოგადოდ ეს კერძო წარმოებულებიც, თავის მხრივ, წარმოადგენენ აგრეთვე x და y ცვლადების ფუნქციებს; თუ მათგან ისევ ავიღებთ წარმოებულებს, მივიღებთ მეორე რიგის ოთხ კერძო წარმოებულს: f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}. ამგვარადვე განისაზღვრება მესამე, მეოთხე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები. საერთოდ, თუ მოცემული გვაქვს რამოდენიმე ცვლადის $\omega=f(x,y, z,\cdots, t)$ ფუნქცია, ჩვენ მივიღებთ ამ ფუნქციის n-რი რიგის კერძო წარმოებულს, თუ ავიღებთ მისგან წარმოებულს n-ჯერ მიმდევრობით შიგ შემავალი ნებისმიერი $x, y, z,\cdots t$ ცვლადების მიმართ. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ საბოლოო შედეგი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მიმდევრობით არის აღებული ეს წარმოებულები.

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ვ თ ქ ვ ა თ, $\omega=f(x,y)$ ა რ ი ს ო რ ი დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი x დ ა y ც ვ ლ ა დ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა; გ ვ ე ქ ნ ე ბ ა $f''_{xy}=f''_{yx}$, თ უ კ ი მ ხ ო ლ ო დ ე ს კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი ა რ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი.

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$U=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)+f(x,\ y),$$

სადაც x, y, Δx, Δy აქვთ გარკვეული მნიშვნელობები. U-ს გამოსახულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ორი სხვადასხვა სახით. აღვნიშნოთ v-თი დამხმარე ცვლადი და დავუშვათ რომ:

$$\varphi(v)=f(x+\Delta x,\ v)-f(x,\ v),$$

მაშინ

$$U=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y).$$

თუ გამოვიყენებთ $\varphi(v)$ ფუნქციაზე სასრული ნაზრდის ფორმულას, მივიღებთ:

$$U=\Delta y\,\varphi'_y(y+\theta\Delta y),\ 0<\theta<1,$$

შევცვალოთ φ'_y მისი მნიშვნელობით:

$$U=\Delta y\left[f'_y(x+\Delta x,\ y+\theta\Delta y)-f'_y(x,\ y+\theta\Delta y)\right].$$

გამოვიყენოთ ახლა სასრული ნაზრდის ფორმულა $f'_y(u,\ y+\theta\Delta y)$ ფუნქციაზე, რომელშიაც u მიღებულია დამოუკიდებელ ცვლადად. გვექნება U-თვის ახალი გამოსახვა:

$$U=\Delta x\,\Delta y\,f''_{yx}(x+\theta'\Delta x, y+\theta\Delta y),\ 0<\theta'<1.$$

ეს U-ს გამოსახულება სიმეტრიულია x, y, Δx, Δy-ების მიმართ, ამიტომ თუ შევუცვლით როლებს x და y ცვლადებს, მივიღებთ:

$$U=\Delta y\Delta x f''_{xy}(x+\theta'_1\Delta x, y+\theta_1\Delta y),$$

სადაც θ_1 და θ'_1 დადებითი და ერთზე ნაკლები სიდიდეებია. გავუტოლოთ ერთი მეორეს U-ს ეს ორი მნიშვნელობა, მხოლოდ წინასწარ ისინი გავყოთ $\Delta x\Delta y$-ზე, გვექნება:

$$f''_{xy}(x+\theta'_1\Delta x, y+\theta_1\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta'\Delta x, y+\theta\Delta y).$$

დაშვების თანახმად, f''_{xy} და f''_{yx} წარმოებულები არიან უწყვეტი; ამიტომ Δx და Δy-ის ნულთან მისწრაფების დროს ზემო ტოლობის ორივე ნაწილი მიისწრაფის შესაბამად f''_{xy} და f''_{yx}-საკენ, და მივიღებთ იმ ტოლობას, რომლის დამტკიცებაც გვინდოდა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზემო დამტკიცებაში არაფერი არ არის ნაგულისხმევი მეორე რიგის სხვა f''_{x^2} და f''_{y^2} წარმოებულთა შესახებ; ის რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაშიაც, როცა $f(x, y)$ დამოკიდებულია კიდევ სხვა დამოუკიდებელ ცვლადებზე. რიცხვი ამ დამოუკიდებელი ცვლადებისა შეიძლება იყოს ნებისმიერი, რადგან f''_{xy} და f''_{yx} კერძო წარმოებულთა აღების დროს, ჩვენ მათ ვთვლით როგორც მუდმივებს.

ვთქვათ, ახლა, $\omega=f(x, y, z, \cdots t)$ არის ფუნქცია, რომელშიაც დამოუკიდებელ ცვლადთა რიცხვი ნებისმიერია და ვთქვათ, რომ Ω არის მისი n-ური რიგის კერძო წარმოებული. ეს წარმოებული მიღებულია ω ფუნქციის n მიმდევრო გაწარმოებით გარკვეული ცვლადების მიმართ. იმავე ცვლადების მიმართ მოვახდინოთ ახლა ისევ n-ჯერ გაწარმოება, მხოლოდ სხვა მიმდევრობით. ყოველი ასეთი გაწარმოების მიმდევრობის გადანაცვლება, რომელიც Ω-ზე დაიყვანება, შეიძლება მიღწეული იქნას რამოდენიმე ორ მიმდევნო გაწარმოების გადანაცვლებით, მაგრამ ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ, რომ ასეთი გარდანაცვლებანი არ ახდენენ გავლენას საბოლოო შედეგზე, მაშასადამე, შედეგზე არ მოახდენს გავლენას, აგრეთვე ზემო განხილულ გაწარმოების მიმდევრობების ცვლილებებიც.[1] აქედან გამომდინარეობს, რომ კერძო წარმოებული n-რი რიგის, სრულიად გარკვეული იქნება, თუ ნაჩვენებია განწარმოების რიცხვი თითოეულ დამოუკიდებელ ცვლადის შესახებ. ამნაირად $\omega=f(x, y, z)$ სამი ცვლადის ფუნქციიდან n-ური რიგის კერძო წარმოებული შეიძლება გამოსახული იქნეს შემდეგნაირად:

$$f^{n}_{x^p y^q z^r}(x, y, z) \quad \text{ან} \quad D^{n}_{x^p y^q z^r} f(x, y, z),$$

[1]) მაგალითად, რომ დავამტკიცოთ ტოლობა $f(x, y, z)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულთა:

$$f'''_{xyz}=f'''_{zyx}$$

შევადგენთ ტოლობათა წკრივს:

$$f'''_{xyz}=f'''_{xzy}=f'''_{zxy}=f'''_{zyx}.$$

სადაც $p+q+r=n$. როგორც ერთი, ისე მეორე აღნიშვნა წარმოადგენს შედეგს, რომელიც მიიღება, თუ ჩვენ ავიღებთ კერძო წარმოებულს x-ის შესახებ მიმდევრობით p-ჯერ, y-ის შესახებ q-ჯერ და z-ის შესახებ r-ჯერ, სადაც შეგვიძლია ყველა ეს ოპერაცია შევასრულოთ ნებისმიერი მიმდევრობით. $f(x, y, z)$ ფუნქციას სულ აქვს სამი სხვადასხვა პირველი რიგის კერძო წარმოებული: f'_x, f'_y, f'_z, ექვსი სხვადასხვა მეორე რიგის წარმოებული: $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{xz}$ და ასე შემდეგ. საზოგადოთ p დამოუკიდებელ ცვლადის ფუნქციას აქვს n-ური რიგის იმდენი კერძო წარმოებული, რამდენიც სხვადასხვა წევრი არის n-ური რიგის ერთგვაროვან მრავალწევრში p ცვლდით, ე. ი. შეერთებათა თეორიის საფუძველზე

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots(p-2)(p-1)}.$$

მრავალცვლადის ფუნქციისათვისაც შეიძლება გამოყვანილი იქნეს სასრულო ნაზრდის ფორმულის ანალოგიური ფორმულები. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი დამოუკიდებელი x და y-ის ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქცია და ავიღოთ სხვაობა: $f(x+h, y+k)-f(x, y)$; შეგვიძლია ეს სხვაობა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=[f(x+h, y+k)-f(x, y+k)]+[f(x, y+k)-f(x, y)].$$

მარჯვენა მხარის თითოეულ სხვაობაზე თუ გამოვიყენებთ სასრულო ნაზრდის ფორმულას, მივიღებთ:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf'_x(x+\theta h, y+k)+kf'_y(x, y+\theta' k), \tag{8}$$

სადაც θ და θ' იმყოფება 0 და 1 შორის.

ეს ფორმულა რჩება სამართლიანი, მიუხედავათ იმისა f'_x და f'_y წარმოებულები არიან უწყვეტი თუ არა. თუ კი f'_x და f'_y წარმოებულები არიან უწყვეტი, მაშინ შეიძლება გამოვიყვანოთ წინა ფორმულის მსგავსი ფორმულა, რომელიც შეიცავს უკვე ერთ განუსაზღვრელ θ რიცხვს. რომ მივიღოთ ეს ახალი ფორმულა, განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია: $\varphi(t)=f(x+ht, y+kt)$, სადაც x, y, h და k-ს აქვს გარკვეული მნიშვნელობანი და t არის დამხმარე ცვლადი. თუ გამოვიყენებთ ამ ფუნქციაზე სასრულო ნაზრდის ფორმულას, გვექნება:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta),\ 0<\theta<1.$$

მაგრამ $\varphi(t)$ არის t-ს რთული ფუნქცია და მისი წარმოებული $\varphi'(t)$ უდრის $hf'_x(x+ht, y+kt)+kf'_y(x+ht, y+kt)$; მაშასადამე წინა ფორმულა შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ასეთი სახით:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf'_x(x+\theta h, y+\theta k)+kf'_y(x+\theta h, y+\theta k), \tag{9}$$

ანდა

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=h[f'_x(x, y)+\varepsilon]+k[f'_y(x, y)+\varepsilon'], \tag{10}$$

სადაც ε და ε' მიისწრაფიან ნულისაკენ h და k-თან ერთად. $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ სხვაობის ეს გამოსახულება ზოგჯერ ძალიან სასარგებლოა; მისგან მიიღება რთული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის წესი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. რომ წარმოვადგინოთ f-ის ნაზრდი (10) სახით, არ არის საკმარისი $f(x, y)$ ფუნქციიდან კერძო წარმოებულების არსებობა. განვიხილოთ, მაგალითად, ფუნქცია:

$$f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

როცა x და y ერთდროულად არ უდრის ნულს, და $f(x, y)=0$, როცა $x=y=0$. ეს ფუნქცია არის უწყვეტი კოორდინატთა სათავეშიაც კი და მის f'_x და f'_y კერძო წარმოებულებს აქვს სასრული მნიშვნელობა x და y-ის მნიშვნელობათა ყოველი სისტემისათვის. კერძოდ,

$$f'_x(x, 0)=0, \quad f'_y(0, y)=0,$$

რადგან ფუნქცია $f(x, y)$ ნულის ტოლია თითოეულ კოორდინატის ღერძზე. (10) ფორმულის გამოყენება ამ ფუნქციაზე არ შეიძლება $x=y=0$ მნიშვნელობებისათვის, რადგან მაშინ ის მოგვცემდა

$$f(h, k)=h\varepsilon+k\varepsilon', \tag{11}$$

სადაც ε და ε'—უსასრულო მცირეა h და k-თან ერთად. მაგრამ, თუ დავუშვებთ, რომ $h=k$, მივიღებთ: $f(h, h)=\frac{h}{\sqrt{2}}$, და არა $h\eta$, სადაც η უსასრულო მცირეა.

20. ფართეულის მხები სიბრტყე. ჩვენ ვნახეთ, რომ პირველი წარმოებული ერთი ცვლადის ფუნქციიდან იძლევა მრუდის მხებს; სრულიად ასევე ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები შედიან ფართეულის მხები სიბრტყის განტოლებაში. ვთქვათ

$$z=F(x, y) \tag{12}$$

S ფართეულის განტოლებაა. დავუშვებთ, რომ F ფუნქცია უწყვეტია და xy სიბრტყის (x_0, y_0) წერტილზე აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები; ვთქვათ ამ წერტილს შეესაბამება z-ის z_0 მნიშვნელობა და, მაშასადამე, S ფართეულის $M(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი. განვიხილოთ რაიმე C მრუდი, რომელიც მდებარეობს S ფართეულზე და გადის M_0 წერტილზე. ვთქვათ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \tag{13}$$

არის ამ მრუდის წერტილთა კოორდინატები, რომლებიც გამოხატულია t პარამეტრის ფუნქციებით; $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ არის t პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციები და t_0 პარამეტრის მნიშვნელობისათვის ღებულობენ x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობებს. C—მრუდის მხები M_0 წერტილზე განისაზღვრება განტოლებით (§ 14):

$$\frac{X-x_0}{f'(t)}=\frac{Y-y_0}{\varphi'(t)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(t)}, \tag{14}$$

რადგანაც C მრუდი მდებარეობს S ფართეულზე ამიტომ ჩვენ გვაქვს თანაფარდობა:

$$\psi(t)=F[f(t), \varphi(t)],$$

რომელიც უნდა დაკმაყოფილდეს t პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. ამ ტოლობის ორივე მხარე იგივური უნდა იყოს ურთიერთ შორის.

გამოვთვალოთ მეორე ნაწილის, როგორც რთული ფუნქციის, წარმოებული და დავუშვათ რომ $t = t_0$. ვნახავთ:

$$\psi'(t_0) = f'(t_0) F'_{x_0} + \varphi'(t_0) F'_{y_0}. \tag{15}$$

თუ (14) და (15) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ და $\psi'(t_0)$-ს, მივიღებთ

$$Z - z_0 = (X - x_0) F'_{x0} + (Y - y_0) F'_{y0} \tag{16}$$

ეს სიბრტყე წარმოადგენს გეომეტრიულ ადგილს ყველა იმ მრუდის მხებებისა, რომლებიც მდებარეობენ S ფართეულზე და გადიან M_0 წერტილზე. ამ სიბრტყეს ეწოდება ფართეულის მხები სიბრტყე.

21. სხვაობებიდან წარმოებულებზე გადასვლა. უმაღლესი რიგის წარმოებულებს ჩვენ განვსაზღვრავდით მიმდევრობით, n-ური რიგის წარმოებული გამოგვყავდა $(n-1)$ რიგის წარმოებულიდან. ბუნებრივად ისმება საკითხი, შეიძლება თუ არა უშუალოდ განვსაზღვროთ n-ური რიგის წარმოებული, როგორც ზღვარი რაიმე ფარდობის, ისე რომ არ მოგვიხდეს თანდათანობით გადასვლა დაბალი რიგის წარმოებულიდან უფრო მაღალი რიგის წარმოებულზე. ჩვენ ეს უკვე გადავწყვიტეთ f''_{xy}-თვის (§ 19), რადგან იქ მოყვანილი მსჯელობა ამტკიცებს. რომ f''_{xy} არის ზღვარი ნაწევრის:

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \, \Delta y},$$

როცა Δx და Δy მიისწრაფიან ნულისაკენ. ანალოგიურად შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ f''_{x^2} არის ზღვარი ფარდობის:

$$\frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1) - f(x+h_2) + f(x)}{h_1 h_2},$$

როცა h_1 და h_2 მიისწრაფიან ნულისაკენ.

მართლაც დავუშვათ, რომ

$$f_1(x) = f(x+h_1) - f(x),$$

წინა ფარდობა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{f_1(x+h_2) - f_1(x)}{h_1 h_2} = \frac{f_1'(x+\theta h_2)}{h_1}, \quad 0 < \theta < 1$$

ან და სხვანაირად:

$$\frac{f'(x+h_1+\theta h_2) - f'(x+\theta h_2)}{h_1} = f''(x+\theta' h_1+\theta h_2), \quad 0 < \theta' < 1$$

აქედან ჩანს, რომ ზღვარი ამ ფარდობის არის მეორე რიგის f''_{x^2} წარმოებული, მხოლოდ, თუ კი ეს წარმოებული არის უწყვეტი.

გადავიდეთ ახლა ზოგად შემთხვევაზე. სიმარტივისათვის ვთქვათ, რომ

$$\omega = f(x, y, z)$$

არის სამი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია. დავუშვათ, რომ

$$\Delta_x^h \omega = f(x+h, y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_y^k \omega = f(x, y+k, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_z^l \omega = f(x, y, z+l) - f(x, y, z);$$

$\Delta_x^h \omega$, $\Delta_y^k \omega$, $\Delta_z^l \omega$ არიან ω-ს პირველი სხვაობები. თუ h, k და l-ს განვიხილავთ როგორც მუდმივ სიდიდეებს, მაშინ ეს პირველი სამი სხვაობა იქნება x, y და z ცვლადების ფუნქციები, რომლებიდანაც, თავის მხრივ კიდევ შეიძლება სხვაობათა აღება, ცვლადთა h_1, k_1, l_1 ნაზრდების შესაბამი. ამგვარად ვღებულობთ მეორე სხვაობებს $\Delta_x^{h_1} \Delta_x^h \omega$, $\Delta_x^{h_1} \Delta_y^k \omega, \ldots$ ამ პროცესის გაგრძელება შეიძლება უსასრულოდ. ყოველი n-ური რიგის სხვაობა განისაზღვრება როგორც პირველი სხვაობა რაიმე $(n-1)$ რიგის სხვაობიდან. რადგან ყოველი ორი წინა ოპერაციის რიგი შეიძლება შეცვლილი იქნეს, ამიტომ საკმარისია ნაჩვენები იყოს მიმდევრობით ის ნაზრდები, რომლებიც ეძლევა თითოეულ ცვლადს. n-ური რიგის სხვაობა წარმოგვიდგება შემდეგი სახის სიმბოლოთი:

$$\Delta^{(n)} \omega = \Delta_x^{h_1} \Delta_x^{h_2} \ldots \Delta_x^{h_p} \Delta_y^{k_1} \ldots \Delta_y^{k_q} \Delta_z^{l_1} \ldots \Delta_z^{l_r} f(x, y, z),$$

სადაც $p+q+r=n$, ხოლო h_i, k_i, l_i ნაზრდები შეიძლება იყვნენ როგორც თანატოლნი, ისე არათანატოლნიც. ეს სხვაობა შეიძლება გამოსახული იქნეს n-რი რიგის კერძო წარმოებულის საშუალებით; იგი ტოლია ნამრავლის:

$$h_1 h_2 \ldots h_p k_1 \ldots k_q l_1 \ldots l_r \times$$
$$\times f^{(n)}_{x^p y^q z^r}(x+\theta_1 h_1 + \ldots + \theta_p h_p,\ y+\theta'_1 k_1 + \ldots + \theta'_q k_q,\ z+\theta''_1 l_1 + \ldots + \theta''_r l_r),$$

სადაც ყველა θ_i მოთავსებულია 0 და 1 შორის. ეს ფორმულა ჩვენ უკვე გამოყვანილი გვაქვს პირველი და მეორე სხვაობებისთვის. რომ დავამტკიცოთ, ფორმულის სამართლიანობაყო ველი n-ისათვის, ამისათვის დავუშვათ, რომ ის სამართლიანია $(n-1)$ რიგის სხვაობისათვის და ვთქვათ

$$\varphi(x, y, z) = \Delta_x^{h_2} \ldots \Delta_x^{h_p} \Delta_y^{k_1} \ldots \Delta_y^{k_q} \Delta_z^{l_1} \ldots \Delta_z^{l_r} f;$$

დაშვების თანახმად გვაქვს:

$$\varphi(x, y, z) = h_2 \ldots h_p k_1 \ldots k_q l_1 \ldots l_r f^{(n-1)}_{x^{p-1} y^q z^r}(x+\theta_2 h_2 + \ldots + \theta_p h_p,\ y+\ldots).$$

მაგრამ განსახილავი n-ური რიგის სხვაობა უდრის $\varphi(x+h_1, y, z) - \varphi(x, y, z)$, და საკმარისია ამ სხვაობაზე ერთხელ კიდევ გამოვიყენოთ სასრული ნაზრდის ფორმულა, რომ მივიღოთ ის ფორმულა, რომლის დამტკიცება გვინდოდა.

პირიქით, $f^{(n)}_{x^p y^q z^r}$ კერძო წარმოებული არის ზღვარი ფარდობის:

$$\frac{\Delta_x^{h_1} \Delta_x^{h_2} \ldots \Delta_x^{h_p} \Delta_y^{k_1} \ldots \Delta_y^{k_q} \Delta_z^{l_1} \ldots \Delta_z^{l_r} f}{h_1 h_2 \ldots h_p \cdot k_1 k_2 \ldots k_q \cdot l_1 \ldots l_r},$$

როცა ყველა h, k, l ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფის.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ უმაღლესი რიგის წარმოებულთა ასეთი განსაზღვრა ზოგჯერ ჩვეულებრივ განსაზღვრაზე უფრო ფართოა. განვიხილოთ, მაგალითად; ფუნქცია:

$$\omega = f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

სადაც $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციებს არ აქვთ წარმოებულები. ω ფუნქციასაც არა აქვს პირველი რიგის კერძო წარმოებულები; მით უმეტეს ზედმეტია ლაპარაკი მისი მეორე რიგის კერძო წარმოებულთა

შესახებ. მაგრამ თუ ჩვენ მივიღებთ კერძო წარმოებულთა ახალ განსაზღვრას, მაშინ f''_{xy}-ის მოძებნა მიგვიყვანდა შემდეგი ფარდობის ზღვარის მოძებნამდე:

$$\frac{f(x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)-f(x,\ y+k)+f(x,\ y)}{hk},$$

რომელიც ტოლია

$$\frac{\varphi(x+h)+\psi(y+k)-\varphi(x+h)-\psi(y)-\varphi(x)-\psi(y+k)+\varphi(x)+\psi(y)}{hk}.$$

ამ ფარდობის მრიცხველი ყოველთვის ნულის ტოლია, ამიტომ მისი ზღვარიც ნულია და ჩვენ ვღებულობთ: $f''_{xy}=0$ [1].

II. დიფერენციალური აღნიშვნა

პირველი დიფერენციალური აღნიშვნა ყველა იმ აღნიშვნას შორის, რომლებიც იხმარება ანალიზში, ეკუთვნის ლ ე ი ბ ნ ი ც ს.

ასეთი აღნიშვნა არ არის აუცილებელი მაგრამ მას უპირატესობა აქვს მით, რომ იგი უფრო ზოგადია და სიმეტრიული. ეს უპირატესობანი მნიშვნელოვანია განსაკუთრებით მრავალ ცვლადის ფუნქციათა შესწავლის დროს.

ამ აღნიშვნის მთავარი იდეა გამომდინარეობს უსასრულო მცირეთა განხილვიდან.

22. დიფერენციალები. ვთქვათ $y=f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც აქვს $f'(x)$ წარმოებული; მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx და აღვნიშნოთ Δy-ით y-ის შესაბამი ნაზრდი. წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად გვექნება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

სადაც ε მიისწრაფის ნულისაკენ Δx-თან ერთად; თუ ჩვენ Δx-ს მივიღებთ მთავარ უსასრულო მცირედ, მაშინ Δy-იც იქნება უსასრულო მცირე, რომლის

[1] ანალოგიური შენიშვნების გაკეთება შეიძლება ერთი ცვლადის ფუნქციისათვისაც. მაგალითად,

$$f(x)=x^3\cos\frac{1}{x}$$

ფუნქციას აქვს წარმოებული:

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x};$$

მაგრამ $f'(x)$-ს არ აქვს წარმოებული $x=0$ მნიშვნელობისათვის. მაგრამ ფარდობას:

$$\frac{f(2\alpha)-2f(\alpha)-f(0)}{\alpha^2}$$

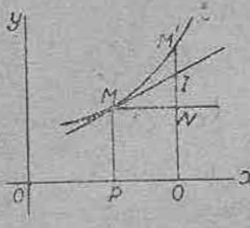
ანუ

$$8\alpha\cos\frac{1}{2\alpha}-2\alpha\cos\frac{1}{\alpha}$$

აქვს ზღვარად ნული, როცა α მიისწრაფის ნულისაკენ.

მთავარი ნაწილი $f'(x)\Delta x$ უდრის. ამ მთავარ ნაწილს უწოდებენ y-ის დიფერენციალს და აღნიშნავენ dy სიმბოლოთი:

$$dy=f'(x)\Delta x.$$



ნახ. 2.

თუ $f(x)$ უდრის x-ს, მაშინ წინა ფორმულა მიიღებს სახეს: $dx=\Delta x$; ამიტომ მეტი სიმეტრიულობისათვის სწერენ:

$$dy=f'(x)\,dx$$

იმ პირობით, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდი dx განიხილება, როგორც მუდმივი სიდიდე, მასთან სრულიად ნებისმიერი.

განვიხილოთ C მრუდზე (ნახ. 2), რომელიც გამოსახულია განტოლებით $y=f(x)$, ორი წერტილი x და $x+dx$ აბსცისებით. MTN სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$NT=MN\operatorname{tg}\widehat{TMN}=dx\,f'(x):$$

NT წარმოადგენს dy დიფერენციალს, მაშინ როცა Δy უდრის NM'. ნახაზიდან ჩანს, რომ როცა M' წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება M წერტილს, $M'T$ ნაწილი ხდება უსასრულო მცირე NT-თან შედარებით.

უმაღლესი რიგის დიფერენციალებიც განისაზღვრება თანდათანობით ისე, როგორც უმაღლესი რიგის წარმოებულები. ამნაირად, დიფერენციალი პირველი რიგის დიფერენციალიდან არის მეორე რიგის დიფერენციალი, მასთან dx ყოველთვის განიხილება როგორც მუდმივი სიდიდე; მეორე რიგის დიფერენციალი აღინიშნება d^2y-ით:

$$d^2y=d(dy)=[f''(x)dx]\,dx=f''(x)dx^2.$$

სრულიად ასევე მესამე რიგის დიფერენციალისათვის გვექნება:

$$d^3y=d(d^2y)=[f'''(x)dx^2]\,dx=f'''(x)dx^3$$

და ასე შემდეგ. n-რი რიგის დიფერენციალი განისაზღვრება როგორც დიფერენციალი $(n-1)$ რიგის დიფერენციალიდან და არის:

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

პირიქით, შეიძლება წარმოებულების: $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$, გამოსახვა დიფერენციალების საშუალებით. ამრიგად ვღებულობთ წარმოებულთა ახალ აღნიშვნებს:

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n},\cdots$$

ყოველ ფორმულას, რომლითაც გამოითვლება წარმოებული, შეესაბამება ფორმულა, რომლის საშუალებით გამოითვლება დიფერენციალი. შევჩერდეთ ამ

შემთხვევაზე, როცა გვაქვს მოცემული ფუნქცია ფუნქციისაგან. ვთქვათ გვაქვს $y=f(u)$, სადაც u არის დამოუკიდებელ x ცვლადის ფუნქცია; გვექნება:

$$y'_x=f'(u)\,u'_x;$$

გავამრავლოთ ორივე მხარე dx, მივიღებთ:

$$y'_x dx=f'(u)u'_x dx$$

ანუ

$$dy=f'(u)\,du.$$

ამრიგად dy-ის ფორმულას აქვს ისეთი სახე, თითქოს u იყოს არა x-ის ფუნქცია, არამედ დამოუკიდებელი ცვლადი. ეს არის დიფერენციალური აღნიშვნის ერთერთი უპირატესობათაგანი. როცა y-ის წარმოებულს x-ით გამოვსახავდით, ჩვენ გვქონდა ორი სხვადასხვა ფორმულა:

$$y'_x=f'(x),\ y'_x=f'(u)u'_x,$$

იმისდა მიხედვით არის y ფუნქცია x-ის უშუალოდ, თუ y არის ფუნქცია x-ის-რომელიმე u ფუნქციის საშუალებით.

წინააღმდეგ, დიფერენციალური აღნიშვნის მიხედვით ამ ორი შემთხვევისათვის ერთი და იგივე ფორმულა არის გამოსადეგი.

თუ $y=f(u,v,w)$ არის რთული ფუნქცია, გვექნება:

$$y'_x=u'_x f'_u+v'_x f'_v+w'_x f'_w,$$

ანდა, თუ გავამრავლებთ dx-ზე

$$dy=f_u' du+f_v' dv+f'_w dw.$$

ანალოგიურად

$$d(uv)=u\,dv+v\,du,\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

იგივე წესები საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ უმაღლესი რიგის წარმოებულები. ვთქვათ, მაგალითად: უნდა მოვძებნოთ უმაღლესი რიგის დიფერენციალი ფუნქციის ფუნქციისაგან $y=f(u)$; ჩვენ უკვე გვქონდა

$$dy=f'(u)\,du.$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ d^2y-ის გამოთვლის დროს du არ უნდა იქნეს მიღებული როგორც მუდმივი, რადგან ის არ არის დამოუკიდებელი ცვლადი. ამრიგად უნდა გამოვთვალოთ დიფერენციალი რთული $f'(u)\,du$ ფუნქციიდან, სადაც u და du დამაკავშირებელი ფუნქციებია, ეს გვაძლევს:

$$d^2y=f''(u)\,du^2+f'(u)\,d^2u.$$

რომ გამოვთვალოთ d^3y, უნდა d^3y განვიხილოთ, როგორც რთული ფუნქცია სამი დამაკავშირებელი ფუნქციით u, du, d^2u; ვნახავთ:

$$d^3y=f'''(u)\,du^3+3f''(u)du\,d^2u+f'(u)d^3u$$

და ასე შემდეგ. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ფორმულებს, რომლებიც იძლევიან d^2y, $d^3y\cdots$ დიფერენციალებს, d^2u, d^3u წევრების გამო, არ ექნებათ ისეთივე სახე, როგორიც მათ ექნებოდათ, რომ u ყოფილიყო დამოუკიდებელი ცვლადი.

კერძო წარმოებულები მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციიდანაც ამგვარადვე აღინიშნება. ასე, მაგალითად $f(x, y\ z)$-ის n-ური რიგის კერძო წარმოებული ლ ე გ რ ა ნ ჟ ი ს მიხედვით, აღინიშნება $f^{(n)}x^py^qz^r$-ით, ლ ა ი ბ ნ ი - ც ი ს მიხედვით კი $\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$-ით. მრავალი ცვლადის ფუნქციისათვის ეს აღნიშვნა—წმინდა სიმბოლურია და არ წარმოადგენს წილადს, როგორც ამას აქვს ადგილი ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის. ასო ∂ მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულის აღსანიშნავად შემოღებულია ი ა კ ო ბ ი ს (Iacobi) მიერ. მანამდე ხმარობდნენ ასო d-ს.

23. სრული დიფერენციალები. ვთქვათ $\omega=f(x, y, z)$ არის სამი x, y, z დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია; ს რ უ ლ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი $d\omega$ ეწოდება შემდეგი სახის გამოთქმას:

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

სადაც dx, dy, dz სამი დამოუკიდებელი x, y, z ცვლადის ნებისმიერი მუდმივი ნაზრდია. სამი ნამრავლი $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ იწოდება ფუნქციის კ ე რ - ძ ო დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ე ბ ა დ.

მეორე რიგის სრული დიფერენციალი არის სრული დიფერენციალი პირველი რიგის სრული დიფერენციალიდან, სადაც dx, dy, dz ნაზრდები რჩება მუდმივი და ყოველთვის ერთი და იგივე, როცა ჩვენ გადავდივართ ერთი დიფერენციალიდან შემდეგზე. ამრიგად:

$$d^2\omega=d(d\omega)=\frac{\partial d\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial d\omega}{\partial y}dy+\frac{\partial d\omega}{\partial z}dz$$

ან და გაშლილად, გვექნება:

$$d^2\omega=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dz\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dz\right)dy+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dx\,dz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dydz.$$

თუ მარჯვენა ნაწილში $\partial^2 f$-ს შევცვლით ∂f^2-ით, გვექნება

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

გამოსახვის კვადრატი, გაშლილი სახით; ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავსწეროთ სიმბოლური ტოლობა:

$$d^2\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

სადაც კვადრატში აყვანის შემდეგ ყველგან ∂f^2 მაგიერ უნდა ჩაისვას $\partial^2 f$. ეს წესი ზოგადია; თუ ჩვენ n-ური რიგის სრულ დიფერენციალს ვუწოდებთ სრულ დიფერენციალს $(n-1)$ რიგის დიფერენციალიდან, მაშინ ყოველი n-სათვის ჩვენ გვექნება სიმბოლური ტოლობა:

$$d^n\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)},$$

სადაც ხარისხში აყვანის შემდეგ ყველგან ∂f^n უნდა შეიცვალოს $\partial^n f$-ით. ჩვენ ვნახეთ, რომ ეს წესი სამართლიანია, როცა $n=1$, $n=2$, და ამიტომ საკმარისია უჩვენოთ, რომ თუ ის სამართლიანია $d^n\omega$-თვის, მაშინ სამართლიანი იქნება აგრეთვე $d^{n+1}\omega$-თვისაც.

მივიღოთ ეს კანონი $d^n\omega$-თვის, გვექნება:

$$d^n\omega=\sum A_{pqr}\frac{\partial^n f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}\partial x^p\,dy^q\,dz^r,$$

სადაც $p+q+r=n$. კოეფიციენტი A_{pqr} არის კოეფიციენტი $dx^p dy^q dz^r$-თან n-ური ხარისხის სამწევრში:

$$(dx+dy+dz)^n,$$

ე. ი.

$$A_{pqr}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r},$$

წინა ფორმულიდან გამოვიყვანთ:

$$d^{n+1}\omega=\sum A_{pqr}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{p+1}\,\partial y^q\,\partial z^r}dx^{p+1}\,dx^q\,dz^r+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\,\partial y^{q+1}\,\partial z^r}dx^p\,dy^{q+1}\,dz^r+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r+1}}dx^p\,dy^q\,dz^{r+1}\right].$$

თუ ახლა $\partial^{n+1}f$-ს შევცვლით ∂f^{n+1}-ით, ჩვენ შეგვიძლია სიმბოლურად მარჯვენა ნაწილი დავსწეროთ ასეთი სახით:

$$\sum A_{pqr}\frac{\partial f^n}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}dx^p\,dy^q\,dz^r\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$

ან

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right).$$

ამგვარად, თუ წინა პირობებს შევინარჩუნებთ, გვექნება შემდეგი სიმბოლური ტოლობა:

$$d^{n+1}\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n+1)}.$$

შენიშვნა. წარმოვიდგინოთ, რომ რაიმე საშუალებით ჩვენ მივიღეთ $d\omega$ სრული დიფერენციალის გამოსახვა:

$$d\omega=P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{17}$$

სადაც P, Q, R არის x, y, z-ის ფუნქციები. რადგან განსაზღვრის თანახმად,

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\omega}{\partial z}dz,$$

ამიტომ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\right)dx+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}-Q\right)dy+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}-R\right)dz=0;$$

მაგრამ dx, dy, dz, პირობის თანახმად, რაიმე მუდმივებია. ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონეს ტოლობებს:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial\omega}{\partial z}=R. \tag{18}$$

ამრიგად (17) განტოლება ტოლფასია სამი (18) განტოლების და გვაძლევს ყველა სამი პირველი რიგის კერძო წარმოებულს. საერთოდ, თუ რაიმე საშუალებით ვიპოვით n-ური რიგის სრულ დიფერენციალს

$$d^n\omega=\sum C_{pqr}\,dx^p\,dy^q\,dz^r,$$

მაშინ C_{pqr} კოეფიციენტები უდრის ω ფუნქციის n-ური რიგის კერძო წარმოებულს, გამრავლებულს რაიმე გარკვეულ რიცხვითი მამრავლზე. ამნაირად ერთბაშად მივიღებთ ერთიდაიმავე რიგის ყველა კერძო წარმოებულს. ქვევით შევხვდებით ამ შენიშვნის გამოყენებას.

24. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის დიფერენციალები. ვთქვათ

$$\omega=F(u,\ v,\ w)$$

არის რთული ფუნქცია, სადაც u, v, w არიან დამოუკიდებელი x, y, z, t ცვლადების ფუნქციები; დავწეროთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულთა გამოსახვა:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

თუ ამ ოთხ განტოლებას გავამრავლებთ შესაბამად dx, dy, dz, dt-ზე და შევკრებთ, მარცხენა მხარეში მივიღებთ:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\omega}{\partial z}dz+\frac{\partial\omega}{\partial t}dt,$$

ე. ი. $d\omega$-ს, იმ დროს, როცა $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial w}$-სთან კოეფიციენტები შესაბამად ტოლი იქნება du, dv, dw-ს; აქედან

$$d\omega=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw. \tag{19}$$

ამგვარად რთული ფუნქციის პირველი რიგის სრულ დიფერენციალს აქვს ისეთი სახე, თითქო დამაკავშირებელი ფუნქციები იყოს დამოუკიდებელი ცვლადები. ამაში მდგომარეობს დიფერენციალური აღნიშვნის ერთ-ერთი მთავარი უპირატესობა: (19) თანაფარდობა არ არის დამოკიდებული ცვლადების არც რიცხვზე და არც არჩევაზე, ის ტოლფასია იმდენი სხვადასხვა თანაფარდობის, რამდენიც მასში შედის დამოუკიდებელი ცვლადი.

რომ გამოვთვალოთ $d^2\omega$, ამისათვის გამოვიყენოთ ის წესი, რომელიც შემოღებული გვაქვს $d\omega$-ს მოსაძებნად, მასთან უნდა შევნიშნოთ, რომ (19) ფორმულის მარჯვენა ნაწილი შეიცავს ექვს დამაკავშირებელ ფუნქციას u, v, w, du, dv, dw.

ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{aligned} d^2\omega = & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial w} du\,dw + \frac{\partial F}{\partial u} d^2u + \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial w} dv\,dw + \frac{\partial F}{\partial v} d^2v + \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial w} du\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial w} dv\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w} d^2w, \end{aligned}$$

ანუ, თუ მოვახდენთ მსგავს წევრთა შეკრებას და ვისარგებლებთ წინა სიმბოლური აღნიშვნებით, მივიღებთ:

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u} d^2u + \frac{\partial F}{\partial v} d^2v + \frac{\partial F}{\partial w} d^2w.$$

ეს ფორმულა უფრო რთულია, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როცა u, v, w იყვნენ დამოუკიდებელი ცვლადები, რადგან მასში შედის წევრები d^2u, d^2v, d^2w, რომლებიც ისპობიან, როცა u, v და w იქცევა დამოუკიდებელ ცვლადებად. რომ მივიღოთ $d^3\omega$, საჭიროა გამოვიყენოთ იგივე წესი $d^2\omega$-ზე, შევნიშნავთ რა, რომ $d^2\omega$ დამოკიდებულია ცხრა დამაკავშირებელ u, v, w, du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w ფუნქციაზე და ასე შემდეგ. ამ დიფერენციალების ზოგადი გამოსახვა ხდება უფრო და უფრო რთული: $d^n\omega$ არის მთელი ფუნქცია du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w, ..., d^nu, d^nv, d^nw-ის მიმართ და წევრები, რომლებიც შეიცავს d^nu, d^nv, d^nw, უდრის:

$$\frac{\partial F}{\partial u} d^nu + \frac{\partial F}{\partial v} d^nv + \frac{\partial F}{\partial w} d^nw.$$

თუ $d^n\omega$-ში შევცვლით u, v, w, du, dv, dw,... მათი გამოსახულებებით დამოუკიდებელ ცვლადებში, მაშინ ის გარდაიქცევა dx, dy, dz, ...-ის მიმართ მთელ მრავალწევრად, რომლის კოეფიციენტები (იხილე § 23-ის შენიშვნა) უდრის ω-ს n-ური რიგის კერძო წარმოებულებს, გამრავლებულს რაიმე რიცხვით მამრავლზე. ამრიგად ერთბაშად მივიღებთ n-ური რიგის ყველა წარმოებულს.

დავუშვათ მაგალითად, რომ ჩვენ გვინდა გამოვთვალოთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებული რთული $\omega = f(u)$ ფუნქციიდან, სადაც u არის ორი და-

მოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია: $u=\varphi\,(x, y)$. თუ ამ წარმოებულებს ცალ-ცალკე გამოვთვლით, ჯერ მივიღებთ ორ პირველ რიგის კერძო წარმოებულს:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{20}$$

თუ ამ განტოლებებიდან ავიღებთ წარმოებულებს x-ით და y-ით, მივიღებთ სამ სხვადასხვა დამოკიდებულებას, რომლებიც მოგვცემენ მეორე რიგის წარმოებულებს:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(21)-ის მეორე ტოლობა მიიღება (20) განტოლებებიდან, თუ პირველს გავაწარმოებთ y-ით ანდა მეორეს x-ით. სრული დიფერენციალების საშუალებით ეს ხუთი (20) და (21) ტოლობა შეიძლება შეცვლილი იქნეს შემდეგი ორით:

$$\left.\begin{aligned}d\omega&=\frac{\partial \omega}{\partial u}\,du,\\ d^2\omega&=\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\,du^2+\frac{\partial \omega}{\partial u}\,d^2u;\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

თუ ამ ორ ფორმულაში du-ს შევცვლით $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$-ით, ხოლო d^2u-ს $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}dy$-ით, მაშინ პირველ ფორმულაში dx და dy ის კოეფიციენტები მოგვცემენ ω-ს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებს; მეორე ფორმულაში dx^2, $2dx\,dy$, dy^2-ის კოეფიციენტები მოგვცემენ ω-ს მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს.

25. ნამრავლის დიფერენციალი. ფორმულა, რომელიც იძლევა რთული ფუნქციის n-ური რიგის დიფერენციალს, საგრძნობლად მარტივდება ზოგიერთ შემთხვევაში, რომელიც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში. ვთქვათ, მაგ., უნდა მოვძებნოთ n-ური რიგის სრული დიფერენციალი ორი ფუნქციის ნამრავლის:

$$\omega=u\cdot v$$

გვაქვს:

$$d\omega=vdu+udv,\quad d^2\omega=vd^2u+2dv\,du+ud^2v,\ldots;$$

თვით ამ დიფერენციალთა აგებულებიდან ჩანს, რომ ჩვენ საზოგადოდ გვექნება:

$$d^n\omega=vd^nu+C_1dv\,d^{n-1}u+C_2d^2v\,d^{n-2}u+\cdots+ud^nv,$$

სადაც $C_1, C_2\cdots$—მთელი დადებითი რიცხვებია. შეიძლებოდა გვეჩვენებია მიმდევრობით, რომ ეს კოეფიციენტები $(a+b)^n$-ის დაშლის კოეფიციენტების იგივურია; ეს შეიძლება გავაკეთოთ უფრო მოხერხებულად, თუ ვისარგებ-

ლებთ შემდეგი საშუალებით, რომელიც გამოიყენება მრავალი მზგავსი საკითხისათვის. შევნიშნავთ, რომ $C_1, C_2 \cdots C_p, \cdots$ არ არიან დამოკიდებული u და v ფუნქციების თვისებებზე; ამიტომ საკმარისია განვსაზღვროთ ისინი ამ ფუნქციების ერთი რომელიმე კერძო სახისათვის. ამისათვის ავიღოთ $u=e^x$, $v=e^y$, სადაც x და y—დამოუკიდებელი ცვლადებია; გვექნება.

$$\omega=e^{x+y},\ d\omega=e^{x+y}(dx+dy),\cdots,\ d^n\omega=e^{x+y}(dx+dy)^n,$$
$$du=e^x\,dx,\qquad d^2u=e^x\,dx^2,\cdots$$
$$dv=e^y\,dy,\qquad d^2v=e^y\,dy^2,\cdots$$

ზოგადი ფორმულა e^{x+y}-ზე გაყოფის შემდეგ მიიღებს სახეს

$$(dx+dy)^n=dx^n+C_1dy\ dx^{n-1}+C_2dy^2dx^{n-2}+\cdots+dy^n.$$

რადგან dx და dy ნებისმიერია, ამიტომ უნდა გვექნეს:

$$C_1=\frac{n}{1},\quad C_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\cdots,$$

$$C_p=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p},\cdots,$$

და, მაშასადამე, ზოგად ფორმულას აქვს სახე:

$$d^n(uv)=vd^nu+\frac{n}{1}dv\,d^{n-1}u+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2v\,d^{n-2}u+\ldots+ud^nv. \tag{23}$$

ეს ფორმულა გამოსადეგია, როგორიც არ უნდა იყოს დამოუკიდებელი ცვლათა რიცხვი; კერძოდ თუ u და v არიან მხოლოდ ერთი x ცვლადის ფუნქციები, მაშინ თუ (23) გავყოფთ dx^n-ზე, მივიღებთ ნამრავლის n-ური რიგის წარმოებულის გამოსახვას.

არსებობენ (23)-ის ანალოგიური ფორმულები ნებისმიერ რიცხვის თანამამრავლთა შემთხვევისათვის.

მათი გამოყვანა ასეთივე ხერხით შეიძლება.

ფორმულა $d^n\omega$-თვის მართლდება აგრეთვე იმ შემთხვევაშიაც, როცა დამაკავშირებელი ფუნქციები u, v, ω არიან წრფივი ფუნქციები x, y, z დამოუკიდებელი ცვლადების:

$$u=ax+by+cz+f,$$
$$v=a'x+b'y+c'z+f',$$
$$w=a''x+b''y+c''z+f'',$$

სადაც a, a', a'', b, b'... მუდმივი კოეფიციენტებია. გვაქვს:

$$du=a\,dx+b\,dy+c\,dz,$$
$$dv=a'\,dx+b'\,dx+c'\,dz,$$
$$dw=a''dx+b''dy+c''dz,$$

და ყველა d^nu, d^nv, d^nw დიფერენციალი, როცა $n>1$, ნულის ტოლია. ამ შემ-

თხევევაში $d^n\omega$-ს ფორმულა იქნება ისეთი, როგორიც მაშინ, რომ u, v, w ყოფილიყო დამოუკიდებელი ცვლადები:

$$d^n\omega=\left(\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}pw\right)^{(n)}.$$

26. ერთგვაროვანი ფუნქციები. $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციას ეწოდება m-ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, თუ ადგილი აქვს იგივეობას:

$$\varphi(tx, ty, tz)=t^m\varphi(x, y, z).$$

დროებით მივიღოთ, რომ x, y, z აქვთ გარკვეული მნიშვნელობანი და t განვიხილოთ როგორც ერთადერთი დამოუკიდებელი ცვლადი; მივიღოთ:

$$u=tx,\ v=ty,\ w=tz,$$

ჩვენ შეგვიძლია წინა ფორმულა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi(u, v, w)=t^m\varphi(x, y, z).$$

გავუტოლოთ ერთი მეორეს ამ ტოლობის ორივე მხარის n-ური რიგის დიფერენციალები. შევნიშნავთ რა, რომ u, v, w არიან t-ს წრფივი ფუნქციები და

$$du=x\,dt;\ dv=y\,dt,\ dw=z\,dt,$$

§ 25-ის შენიშვნის საფუძველზე და dt^n მამრავლზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial u}+y\frac{\partial\varphi}{\partial v}+z\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)\,t^{m-n}\varphi(x, y, z),$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ $t=1$, მაშინ u, v, w გარდაიქცევიან x, y, z-ად და უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარის დაშლის ნებისმიერი წევრი:

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial w^r}\,x^py^qz^r$$

გადაიქცევა

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}\,x^py^qz^r\text{-ად}.$$

ამნაირად, ჩვენ მივალთ სიმბოლურ ტოლობამდე:

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)\,\varphi(x, y, z),$$

რომელიც $n=1$ მნიშვნელობისათვის გადაიქცევა ცნობილ ფორმულად:

$$m\varphi(x, y, z)=x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

სხვადასხვა აღნიშვნა. ჩვენ გვქონდა მრავალცვლადის ფუნქციის სხვადასხვა რიგის კერძო წარმოებულისათვის სამი სხვადასხვაგვარი აღნიშვნა

ლაიბნიცის, ლაგრანჟის და კოშის. ამ აღნიშვნათა საერთო ნაკლი არის მათი სირთულე, რომელიც განსაკუთრებით შესამჩნევია საგრძნობი გამოთვლების დროს. ერთერთი აღნიშვნათაგანი, რომელიც უფრო მეტად იხმარება ორი ცვლადის ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულთა აღსანიშნავად, ეკუთვნის მონჟს (Monge). თუ z არის ორი x და y ცვლადის ფუნქცია, მაშინ აღნიშნავენ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

ამ შემთხვევაში სრული დიფერენციალები dz და d^2z გამოიხატება შემდეგნაირად:

$$dz=p\,dx+q\,dy,\quad d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2.$$

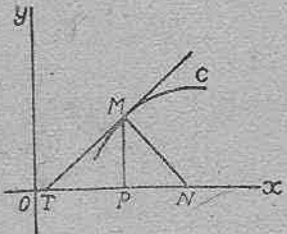
ახლა ხმარებაში შემოდის აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნა. თუ z არის რაიმე დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ცვლადების ფუნქცია, მაშინ აღნიშნავენ:

$$p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

სადაც ზოგიერთი მაჩვენებელი $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ შეიძლება ნულიც იყოს.

გამოყენება. ვთქვათ $y=f(x)$ არის ბრტყელი C მრუდის განტოლება კოორდინატთა მართკუთხოვან ღერძების მიმართ (ნახ. 2 a). $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლება ამ მრუდისადმი იქნება:

$$Y-y=y'(X-x).$$



ნახ. 2a.

ნორმალს, ე. ი. შეხების წერტილზე მხებისადმი მართობულად გავლებულ წრფეს, საკუთხო კოეფიციენტათ ექნება $-\frac{1}{y'}$; მაშასადამე, ნორმალის განტოლება იქნება:

$$(Y-y)\,y'+(X-x)=0$$

P იყოს ორდინატის ფუძე, T და N მხებისა და ნორმალის x ღერძთან გადაკვეთის წერტილები: PN სიგრძეს ეწოდება ნორმალქვეშა, PT—მხებქვეშა, MN—ნორმალი და MT—მხები.

ნორმალის განტოლებიდან N წერტილის აბსცისისათვის ვღებულობთ $x+yy'$ მნიშვნელობას, რაც იმას გვიჩვენებს, რომ ნორმალქვეშა უდრის $\pm yy'$. თუ შევთანხმდებით, რომ ნორმალქვეშად მივიღოთ სიგრძე PN აღებული თავის ნიშნით, ე. ი. ავიღოთ ნიშანი + ან —, იმისდამიხედვით, მიმართულება P-დან N-კენ ემთხვევა x ღერძის დადებით თუ უარყოფით მიმართულებას, მაშინ ნორმალქვეშა უდრის yy'-ს, როგორც არ უნდა მდებარეობდეს C მრუდი კოორდინატთა ღერძების მიმართ. სრულიად ასევე მხებქვეშა PT უდრის $-\frac{y}{y'}$..

რაც შეეხება MN და MT სიგრძეებს, სწორკუთხოვან MPN და MPT სამკუთხედებიდან გვაქვს:

$$MN=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PN}^2}=y\sqrt{1+y'^2},\qquad MT=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PT}^2}=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}.$$

ჩვენ შეგვიძლია ვეძებოთ ისეთი მრუდეები, რომელთათვის ამ ოთხ სიგრძეს შორის ადგილი ჰქონდეს მოცემულ თანაფარდობას.

მოვძებნოთ, მაგალითად, ყველა მრუდი, რომელთა ნორმალქვეშა მუდმივია და უდრის მოცემულ a სიგრძეს; ე. ი. უნდა მოვძებნოთ ყველა $y=f(x)$ ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $yy'=a$. ამ ტოლობის პირველი ნაწილი არის წარმოებული $\frac{y^2}{2}$-დან, მეორე კი ax-დან; ამიტომ ეს ორი ფუნქცია შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ მუდმივით, და ვღებულობთ:

$$y^2=2ax+C$$

პარაბოლის ისეთ განტოლებას, რომელსაც Ox ღერძი აქვს მთავარ ღერძად. სრულიად ასევე, თუ მოვძებნით მრუდეებს, რომელთა მხებქვეშა მუდმივია, მივალთ განტოლებამდე:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{a},$$

აქედან

$$\ln y=\frac{x}{a}+\ln C, \text{ ანუ } y=Ce^{\frac{x}{a}}.$$

რომელიც არის განტოლება ტრანსცენდენტული მრუდისა, რომელსაც ასიმპტოტად აქვს x-თა ღერძი.

რომ ვიპოვოთ მრუდეები მუდმივი ნორმალით, უნდა განვიხილოთ განტოლება $y\sqrt{1+y'^2}=a$; იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}=1.$$

მარცხენა მხარე არის $-\sqrt{a^2-y^2}$-ს წარმოებული, ამიტომ ვღებულობთ:

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x+C,$$

ანუ

$$(x+C)^2+y^2=a^2,$$

რომელიც არის განტოლება წრე-წირისა, რომლის რადიუსი უდრის a-ს და ცენტრი მდებარეობს Ox-თა ღერძზე.

მრუდეები მუდმივი მხებით ტრანსცენდენტული მრუდეებია, და მათ ქვემოთ შევისწავლით. ვთქვათ, ახლა მოცემული გვაქვს: $y=f(x)$ და $Y=F(x)$ ორი მრუდის განტოლება, ხოლო M და M' — ორი ისეთი წერტილი შესაბამათ ამ მრუდებზე, რომელთაც ერთი და იგივე აბსცისი აქვთ. იმისათვის, რომ ორივე მრუდის ნორმალქვეშას ამ წერტილებში ექნეს ერთი და იგივე სიგრძე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$YY'=\pm yy',$$

საიდანაც $Y^2=\pm y^2+C$; ორნაირი ნიშანი წარმოიშვა იქიდან, რომ შეიძლება ნორმალქვეშებს ჰქონდეთ ერთი და იგივე ან მოწინააღმდეგე მიმართულება. წინა განტოლებები შეიძლება დაკმაყოფილებული იქნეს თუ დავუშვებთ:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\quad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2},$$

ანდა

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2},$$

საიდანაც მიიღება მარტივი ხერხი ელიფსისა და ჰიპერბოლის ნორმალების ასაგებად.

27. ტეილორის ფორმულა მრავალცვლადის ფუნქციისათვის. ვთქვათ, გვაქვს სამი ცვლადის ფუნქცია $\omega=f(x, y, z)$; ვეძებოთ $f(x+h, y+k, z+l)$

დაშლა h, k, l-ის ხარისხების მიხედვით, რომელშიაც ერთი და იმავე ხარისხის წევრები ერთად იქნება დაჯგუფებული. ეს ამოცანა კოშიმ მიიყვანა ზემოთგანხილულ ამოცანამდე შემდეგი ხელოვნური ხერხით. მივცეთ x, y, z, h, k, l-ს მუდმივი მნიშვნელობები და დავუშვათ, რომ

$$\varphi(t)=f(x+ht,\ y+kt,\ z+lt),$$

სადაც t დამხმარე ცვლადია.

$\varphi(t)$ ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ დამოუკიდებელ t ცვლადზე; თუ მასზე გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას დამატებითი წევრით მივიღებთ:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1}\varphi'(0)+\frac{t^2}{1\,.\,2}\varphi''(0)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\theta t), \tag{24}$$

სადაც $\varphi(0)$, $\varphi'(0), \ldots \varphi^{(n)}(0)$ წარმოადგენენ $\varphi(t)$ ფუნქციის და მისი წარმოებულების მნიშვნელობებს $t=0$-სათვის, მხოლოდ $\varphi^{(n+1)}(\theta t)$ არის $(n+1)$ რიგის წარმოებულის მნიშვნელობა θt-სათვის, სადაც θ იმყოფება ნულსა და ერთს შორის. მაგრამ, ჩვენ შეგვიძლია $\varphi(t)$ განვიხილოთ როგორც რთული ფუნქცია t-სი, $\varphi(t)=f(u, v, w)$, სადაც დამაკავშირებელი ფუნქციები

$$u=x+ht,\quad v=y+kt,\quad w=z+lt$$

არიან t-ს წრფივი ფუნქციები. § 25 მიხედვით m-ური რიგის $d^m\varphi$ სრული დიფერენციალის გამოსახვა იქნება ისეთი, თითქოს u, v, w იყოს დამოუკიდებელი ცვლადები; ამრიგად ვღებულობთ სიმბოლურ ტოლობას:

$$d^m\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^{(m)}=dt^m\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)},$$

ან თუ გავყოფთ dt^m-ზე:

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)}.$$

როცა $t=0$, u, v და w გარდაიქცევიან შესაბამად x, y და z-ად; თუ ვისარგებლებთ წინა სიმბოლური აღნიშვნით, შეგვიძლია ზემო ტოლობა, როცა $t=0$, წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(m)}.$$

სრულიად ასევე გვექნება:

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

მასთან უკანასკნელ ფორმულაში დაშლის შემდეგ x, y და z უნდა შევცვალოთ შესაბამად:

$$x+\theta ht,\ y+\theta kt;\ z+\theta lt\text{-თი}.$$

ახლა თუ დავუშვებთ (24) ფორმულაში $t=1$, მივიღებთ:

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,y,z)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{1.2\dots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)}+R_n. \qquad (25)$$

დამატებით R_n წევრს აქვს სახე:

$$R_n=\frac{1}{1.2\dots(n+1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

მასთან სიმბოლოთა გახსნის შემდეგ x, y და z უნდა შეიცვალოს

$$x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l\text{-ით}.$$

(25) ფორმულა სრულიად ანალოგიურია (5) ფორმულისა. თუ x, y, z, h, k, l მოცემულ მნიშვნელობებისათვის დამატებითი წევრი ნულისაკენ მიისწრაფის n-ის უსაზღვროდ ზრდასთან ერთად, მაშინ გვექნება $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$ ფუნქციის წკრივად დაშლა, სადაც ყველა ამ წკრივის წევრი არის ერთგვაროვანი მრავალწევრი h, k და l-ის შესახებ. მაგრამ, საზოგადოდ, R_n-ის გამოსახვის მიხედვით ძნელია განსაზღვრა, თუ როდის მიისწრაფის ეს დამატებითი წევრი ნულისაკენ.

(25) ფორმულიდან შეიძლება ისეთივე შედეგების გამოყვანა, როგორიც გამოვიყვანეთ ერთი ცვლადის შემთხვევაში (5) ფორმულიდან. მაგალითად, ვთქვათ, $z=f(x,y)$ არის S ფართეულის განტოლება. თუ (x_0, y_0) წერტილის მახლობლობაში $f(x,y)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები რომელიმე რიგამდე უწყვეტია, მაშინ (18) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h+\frac{\partial f}{\partial y_0}k\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h+\frac{\partial f}{\partial y_0}k\right)^{(2)}+\dots+R_n.$$

თუ დავკმაყოფილდებით მარჯვენა ნაწილში ჯერ პირველი ორი წევრით, შემდეგ სამით და ასე შემდეგ, მივიღებთ ჯერ სიბრტყის განტოლებას, შემდეგ პარაბოლოიდის და ასე შემდეგ; $(x_0, y_0,)$ წერტილის მახლობლობაში ყველა ეს ფართეული ძალიან მცირეთი იქნება განსხვავებული S ფართეულისაგან. ეს სიბრტყე იქნება მხებ-სიბრტყე; სრულიად ასევე ყველა პარაბოლოიდიდან, რომლებიც წარმოგვიდგება განტოლებით

$$z=Ax^2+2\,Bxy+Cy^2+2\,Dx+2\,Ey+F,$$

ეს პარაბოლოიდი (x_0, y_0) წერტილის მახლობლობაში, ყველაზე მეტად უახლოვდება S ფართეულს.

(25) ფორმულით სარგებლობენ აგრეთვე იმ ფუნქციების ზღვრულ მნიშვნელობათა მოძებნის დროს, რომელთაც განუზღვრელი სახე აქვთ. ვთქვათ $f(x, y)$ და $\varphi(x, y)$ არის ორი ფუნქცია, რომლებიც $x=a$, $y=b$ მნიშვნელობებისათვის ერთდროულად ნული ხდება, მხოლოდ რჩებიან უწყვეტი თავის კერძო წარმოებულებთან ერთად რომელიმე რიგამდე ამ $x=a$, $y=b$ წერტილის მახლობლობაში. ვიპოვოთ ზღვარი, რომლისაკენაც მიისწრაფის ფარდობა:

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

როცა x და y მიისწრაფიან შესაბამად a და b-კენ. ჯერ დავუშვათ, რომ პირველი რიგის ოთხი წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ ერთდროულად ნულს არ უდრის. ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{f(a+h,\ y+k)}{\varphi(a+h,\ y+k)}=\frac{h\left(\frac{\partial f}{\partial a}+\varepsilon\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial b}+\varepsilon'\right)}{h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\varepsilon_1\right)+k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}+\varepsilon'_1\right)},$$

სადაც $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon'_1$ ნულისაკენ მიისწრაფიან h და k-თან ერთად. თუ წერტილი (x, y) მიისწრაფის (a, b)-კენ, მაშინ h და k-ც მიისწრაფის ნულისაკენ. დავუშვათ, რომ $\frac{k}{h}$ ფარდობა მიისწრაფის α ზღვარისაკენ, ე. ი. (x, y) წერტილი აღწერს მრუდს, რომელსაც (a, b) წერტილში აქვს გარკვეული მხები. წინა ფარდობის ორივე წევრი გავყოთ h-ზე, მივიღებთ, რომ $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$ ფარდობას ზღვარად აქვს

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a}+\alpha\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ ფარდობის ზღვარი, საერთოდ დამოკიდებულია α-ზე, ე. ი. იმაზე, თუ x და y ცვლადები როგორ მიისწრაფიან თავის a და b ზღვრებისაკენ. ეს ზღვარი არ იქნება დამოკიდებული α-ზე მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0,$$

რაც საერთოდ არ იქნება შესრულებული.

თუ $x=a$, $y=b$ მნიშვნელობებისათვის ყველა $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ წარმოებული ნულს უდრის, მაშინ, თუ (18) ფორმულიდან ავიღებთ მეორე რიგის წევრებს, მივიღებთ:

$$\frac{f(a+h,\ b+k)}{\varphi(a+h,\ b+k)}=\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+\varepsilon\right)h^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}+\varepsilon'\right)hk+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}+\varepsilon''\right)k^2}{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+\varepsilon_1\right)h^2+2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}+\varepsilon'_1\right)hk+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}+\varepsilon''_1\right)k^2},$$

სადაც $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_1, \varepsilon'_1\ \varepsilon''_1, \cdots$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

თუ აღვნიშნავთ, როგორც წინათ $\frac{k}{h}$ ფარდობის ზღვარს α-თი, ვნახავთ რომ განსახილავ ფარდობის ზღვარი იქნება:

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\alpha^2}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}\alpha+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}\alpha^2};$$

ეს ზღვარი, საერთოდ, α-ზე არის დამოკიდებული.

III. ფუნქციები, განსაზღვრული როგორც ზღვრები.

28. ახალ ფუნქციათა განსაზღვრის წესი. ფუნქციები, რომელთაც შეისწავლის ელემენტარული ანალიზი არიან რაციონალური და ირაციონალური ფუნქციები, მაჩვენებლიანი ფუნქცია და ლოგარითმული, წრიული ფუნქციები და მათი შექცეულნი და ისეთები, რომლებიც მიიღება მათი კომბინაციით. ყველა ამ ფუნქციას აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებულები, რომლებიც გამოითვლებიან ცნობილი წესების გამოყენებით. ზღვარზე გადასვლის საშუალებით შეიძლება უსაზღვროდ მრავალი ახალი ფუნქცია განვსაზღვროთ.

ვთქვათ, $f_n(x)$ არის x ცვლადის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია (a, b) შუალედში და გარდა ამისა დამოკიდებულია მთელ და დადებით n რიცხვზე. მივცეთ x-ს განსაზღვრული, მაგრამ ნებისმიერი მნიშვნელობა (a, b) შუალედში; თუ $f_n(x)$-ის შესაბამი მნიშვნელობა მიისწრაფის ზღვარისაკენ, როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ ეს ზღვრული მნიშვნელობა, რომელიც, საერთოდ იცვლება x-სთან ერთად, თვით არის ფუნქცია x-სა, რომელსაც ჩვენ ავღნიშნავთ $F(x)$-ით და დავწერთ:

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{26}$$

ან და უფრო მარტივად:

$$F(x)=\lim f_n(x).$$

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ $f_n(x)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს x-ის უწყვეტი ფუნქცია, რანაირიც არ უნდა იყოს n, მხოლოდ მის $F(x)$ ზღვარს არ ექნეს ეს თვისება. ავიღოთ მაგალითად $f_n(x)=x^n$, სადაც, $0\leqslant x\leqslant 1$. ეს ფუნქცია $(0,1)$ შუალედში უწყვეტია როგორიც არ უნდა იყოს n; თუ n უსასრულოდ იზრდება, მაშინ ჩვენ გვაქვს $\lim x^n=0$, როცა $x<1$ და $\lim x^n=1$, როცა $x=1$. ამრიგად ზღვრული $F(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $x=1$ მნიშვნელობისათვის. ავიღოთ კიდევ

$$f_n(x)=\frac{1-x^n}{1+x^n};\ x\geqslant 0;$$

$F(x)$ ზღვარი უდრის $+1$, როცა $x<1$ და ის უდრის -1 როცა $x>1$, ხოლო

უდრის 0, როცა $x=1$. სრულიად ასევე $(1+x^2)^{-n}$-ის ზღვარი უდრის ნულს, როცა x განსხვავდება ნულისაგან და უდრის ერთს, როცა $x=0$.

ვთქვათ, $f_n(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც ზღვრად აქვს $F(x)$ ფუნქცია. თუ $f_n(x)$-ს აქვს $f_n'(x)$ წარმოებული, მაშინ ტოლობიდან:

$$\lim f_n(x)=F(x).$$

კიდევ არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ადგილი აქვს აგრეთვე ტოლობას:

$$\lim f'_n(x)=F'(x).$$

ვთქვათ, მაგალითად, $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, მისი ზღვარი $F(x)$ უდრის $|x|$. $f'_n(x)$ წარმოებული ნულს უდრის, როგორიც არ უნდა იყოს n, როცა $x=0$, იმ დროს როცა $F(x)$-ს არ აქვს წარმოებული x-ის ამ მნიშვნელობისათვის. სრულიად ასევე $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ ფუნქციას ზღვრად აქვს $F(x)=0$; წარმოებული $F(x)$ აგრეთვე ნულს უდრის, მაგრამ $f_n'(x)=\cos nx$-ს არ აქვს ზღვარი, როცა n უსასრულოდ იზრდება. თუ ვისარგებლებთ გეომეტრიული წარმოდგენით, მაშინ სრულიად ცხადი გახდება ორივე მაგალითში მოყვანილი ზღვრული ფუნქციის ეს თვისებები[1].

29. თანაბრად კრებადობა. ვთქვათ, $f_n(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც მიისწრაფის $F(x)$ ზღვარისაკენ (a, b) შუალედში, როცა n უსაზღვროდ იზრდება. $\delta_n(x)=F(x)-f_n(x)$ სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფის $\frac{1}{n}$-თან ერთად; ჩვენ ვიტყვით, რომ $f_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფის ანუ თანაბრად იკრიბება $F(x)$-კენ, თუ ყოველ ნებისმიერ დადებით ε რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ ისეთი მთელი N რიცხვი, რომ n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც ტოლია ან მეტია N-ზე შესრულდეს უტოლობა:

$$|\delta_n(x)|<\varepsilon,$$

სადაც ამ უტოლობას უნდა ჰქონდეს ადგილი x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში.

პირობა, რომ N რიცხვი არ არის დამოკიდებული x-ზე, არამედ დამოკიდებულია მხოლოდ ε-ზე, არსებითია ამ განსაზღვრაში. x-ის თითოეული მნიშ-

[1] ვთქვათ $f_n(x)=[\cos(m!\,\pi x)]^{2n}$, სადაც m არის გარკვეული მთელი დადებითი რიცხვი. გვაქვს $\varphi_m(x)=\lim f_n(x)=1$, როცა $m!\,x$ ნამრავლი არის მთელი N რიცხვი, და $\varphi_m(x)=0$, თუ ეს ნამრავლი არ წარმოადგენს მთელ რიცხვს. ყველა $x=\frac{N}{m!}$ წერტილი არის $\varphi_m(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი. $\varphi_m(x)$ ზღვარი არის დ ი რ ი ხ ლ ე ს (Dirichlet) ფუნქცია:

$$\psi(x)=\lim_{m=\infty}\left\{\lim_{n=\infty}[\cos(m!\,\pi x)]^{2n}\right\}$$

რომელიც უდრის ერთს x-ის რაციონალურ მნიშვნელობისათვის და ნულს x-ის ირაციონალურ მნიშვნელობისათვის.

ვნელობისათვის (a, b) შუალედში აუცილებლად მოიძებნება ისეთი N_x მთელი რიცხვი, რომ $|\delta_n(x)|$ ნაკლები იქნება ε-ზე, თუ $n \geqslant N_x$; მაგრამ a priori არაფერი არ გვარწმუნებს იმაში, რომ ასეთი N რიცხვი, რაგინდ დიდი არ უნდა ვიგულისხმოთ იგი, აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობას x-ის განსახილავ მნიშვნელობისათვის. რომ დავრწმუნდეთ, რომ ეს ყოველთვის ასე არ არის, საკმარისია ავიღოთ რომელიმე ზემოთმოყვანილი ფუნქციიდან, მაგალითად, x^n. თუ მივიღებთ, რომ $0 \leqslant x < 1$, მაშინ $\delta_n(x)$ სხვაობა აბსოლუტური სიდიდით უდრის x^n. იმისათვის, რომ $\delta_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, აუცილებელია არსებობდეს ისეთი N მთელი რიცხვი, რომ როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი, უტოლობა $x^n < \varepsilon$ უნდა შესრულებული იყოს x და n ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელნიც აკმაყოფილებენ პირობებს $0 < x < 1$, $n \geqslant N$. კერძოდ, უნდა გვქონდეს $x^{N} < \varepsilon$ და, მაშასადამე, $x < \varepsilon^{\frac{1}{N}}$ x-ის ყველა დადებით და ერთზე ნაკლებ მნიშვნელობისათვის; მაგრამ რაგინდ დიდი არ უნდა იყოს N, თუ ჩვენ დავუშვებთ $\varepsilon < 1$, მოიძებნება რიცხვები, რომლებიც იმყოფება $\varepsilon^{\frac{1}{N}}$ და ერთს შორის. სრულიად ასევე $\frac{1-x^n}{1+x^n}$ ფუნქცია არ მიისწრაფის თანაბრად ერთისაკენ, როცა x იმყოფება ნულსა და ერთს შორის, რადგან მაშინ $\delta_n(x)$ სხვაობა მეტია ვიდრე x^n.

განვიხილოთ კიდევ გამოთქმა:

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2},$$

რომლის ზღვარი, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, არის $F(x)=0$. ეს გამოთქმა არ მიისწრაფის თანაბრად ნულისაკენ არც ერთ შუალედში, რომელიც შეიცავს 0 მნიშვნელობას, მაგალითად $(0,1)$ შუალედში. მართლაც ის უდრის $\frac{\sqrt{n}}{e}$, როცა $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$; მაშასადამე, ყოველ შუალედში $(0, h)$, რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს დადებითი რიცხვი h, მას შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობანი, რომელნიც უსაზღვროდ იზრდებიან n-თან ერთად.

შემდეგი დებულებანი ააშკარავებენ თანაბრად-კრებადობის ცნების მნიშვნელობას.

A. თუ რომელიმე შუალედში $f_n(x)$ უწყვეტი ფუნქცია მიისწრაფის თანაბრად $F(x)$ ზღვარისაკენ, მაშინ ზღვრული $F(x)$ ფუნქციაც არის აგრეთვე უწყვეტი ამავე შუალედში.

ვთქვათ, x და $x+h$ არის ცვლადის ორი მნიშვნელობა (a, b) შუალედში; ტოლობებიდან:

$$F(x) = f_n(x) + \delta_n(x), \quad F(x+h) = f_n(x+h) + \delta_n(x+h)$$

გამოკლების საშუალებით მივიღებთ:

$$F(x+h) - F(x) = [f_n(x+h) - f_n(x)] + \delta_n(x+h) - \delta_n(x).$$

რადგან $f_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფის $F(x)$-კენ, ამიტომ n შეიძლება ავიღოთ იმდენად დიდი, რომ $\delta_n(x)$ სიდიდის აბსოლუტური მნიშვნელობა იყოს წინასწარ მოცემულ დადებით ε რიცხვზე ნაკლები, როგორიც არ უნდა იყოს x-ის მნიშვნელობა (a, b) შუალედში. ავირჩევთ რა ნაჩვენები წესით n რიცხვს, რადგან $f_n(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ მეორე დადებითი η რიცხვი ისეთი, რომ უტოლობას $|h|<\eta$ თან მიყვეს უტოლობა:

$$|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

სადაც x და $x+h$ მნიშვნელობანი არიან (a, b) შუალედში. სხვაობა $F(x+h)-$ $-F(x)$ არის სამი წევრის ჯამი, აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები ε-ზე. ამიტომ გვაქვს:

$$|F(x+h)-F(x)|<3\varepsilon$$

იმ პირობით, რომ $|h|<\eta$; რადგან ε — ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ (a, b) შუალედში $F(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია.

B. თუ $f_n(x)$ უწყვეტ ფუნქციას ზღვრად აქვს $F(x)$ და თუ $f'_n(x)$ წარმოებული თანაბრად მიისწრაფის რომელიმე $\Phi(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ $\Phi(x)$ ფუნქცია არის $F(x)$ ფუნქციის წარმოებული.

დავუშვათ სიმარტივისათვის, რომ $f_{n+p}(x)-f_n(x)=\Delta(x)$, სადაც n და p ორი მთელი დადებითი რიცხვია. პირველად ვუჩვენებთ, რომ შეიძლება n ავირჩიოთ იმდენად დიდი, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს p, $\Delta'(x)$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა იყოს ნაკლები მოცემულ დადებით ε რიცხვზე x ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$\Delta'(x)=f_{n+p}(x)-f'_n(x)=[\Phi(x)-f'_n(x)]-[\Phi(x)-f'_{n+p}(x)];$$

რადგან $f'_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფის $\Phi(x)$-კენ, მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი N რიცხვი, რომ $n\geqslant N$-თვის $\Phi(x)-f'_n(x)$ აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე მთელ შუალედში. იგივე შეიძლება ითქვას $\Phi(x)-f'_{n+p}(x)$ სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობის შესახებ, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი რიცხვი p, და, მაშასადამე, $\Delta'(x)$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობაც იქნება ნაკლები ε-ზე მთელ (a, b) შუალედში.

შევარჩიოთ მთელი დადებითი n რიცხვი ისე, რომ წინა პირობები იქნეს დაკმაყოფილებული, და შემდეგ თუ ავღნიშნავთ x და $x+h$-ით ორ ნებისმიერ მნიშვნელობას (a, b) შუალედში, შეგვიძლია დავსწეროთ:

$$f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)=f_n(x+h)-f_n(x)+\Delta(x+h)-\Delta(x),$$

ანდა თუ $\Delta(x+h)-\Delta(x)$ სხვაობაზე გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, გვექნება:

$$f_{n+p}(x+h)-f_{n+p}(x)=f_n(x+h)-f_n(x)+h\Delta'(x+\theta h)\ (0<\theta<1).$$

დავუშვათ, რომ ამ თანაფარდობაში n რიცხვი რჩება მუდმივი, ხოლო p რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება; მაშინ მარცხენა მხარეს ზღვრად აქვს $F(x+h)-F(x)$. რაც შეეხება $\Delta'(x+\theta h)$ წევრს, მისი ზღვარის აბსოლუტური მნიშვნელობა ε-ს ვერ გადააჭარბებს, ვინაიდან n რიცხვი ჩვენ მიერ სათანადოდ არის აღებული. მაშასადამე, თუ გავყოფთ h-ზე ჩვენ მივიღებთ:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}+\lambda(x,h),$$

სადაც $\lambda(x,h)$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა ε-ს არ აღემატება; აქედან

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)=\left[\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right]+$$

$$+[f'_n(x)-\Phi(x)]+\lambda(x,h).$$

$f'_n(x)-\Phi(x)$ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე და, მაშასადამე, ε-ზედაც. მეორეს მხრივ, ვინაიდან $f'_n(x)$ არის $f_n(x)$-ის წარმოებული, შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'_n(x)\right|<\varepsilon,$$

როცა $|h|<\eta$, სადაც x აქვს გარკვეული მნიშვნელობა (a, b) შუალედში. ამრიგად h-ის ყველა ამ მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\Phi(x)\right|<3\varepsilon,$$

და, მაშასადამე, $\Phi(x)$ ფუნქცია არის $F(x)$-ის წარმოებული.

30. თანაბრად კრებადი წკრივები. ზემოდ (§ 5)-ში მოყვანილ შენიშვნის საფუძველზე, კრებად მიმდევრობის ზღვარი შეიძლება განსაზღვრული იქნეს როგორც ჯამი რომელიმე კრებად წკრივისა და შებრუნებით. მაშასადამე, განსაზღვრა $F(x)$ ფუნქციის, როგორც $f_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარისა, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, ტოლფასია მისი განსაზღვრისა, როგორც კრებად წკრივის ჯამის. მართლაც $F(x)=\lim f_n(x)$ თანაფარდობა ტოლფასია ტოლობის:

$$F(x)=f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots+[f_n(x)-f_{n-1}(x)]+\ldots, \tag{27}$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ მარჯვენა მხარეზე მდგომი წკრივი კრებადია და ჯამათ აქვს $F(x)$. შებრუნებით, თუ მოცემულია კრებადი წკრივი:

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)\ldots, \tag{28}$$

მაშინ ამ წკრივის ჯამი $F(x)$ არის ზღვარი ჯამისა

$$S_n(x)=u_0+u_1+\ldots+u_n,$$

როცა n უსაზღვროდ იზრდება. მაშასადამე, ზემომოყვანილ $f_n(x)$ ფუნქციათა საშუალებით შეიძლება ავაგოთ წკრივები უწყვეტი წევრებით, რომელთა ჯამები იქნება წყვეტილი ფუნქციები. მაგალითად წკრივი:

$$x+x(x-1)+\ldots+x^n(x-1)+\ldots, \tag{29}$$

კრებადი (0,1) შუალედში, წარმოადგენს წყვეტილ ფუნქციას $x=1$ მნიშვნელობისათვის. სრულიად ასევე წკრივს:

$$F(x)=\frac{1-x}{1+x}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)+\ldots+\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right)+\ldots \tag{30}$$

აქვს წესიერი წყვეტა $x=1$ მნიშვნელობისათვის. მართლაც

$$F(1+0)=-1,\ F(1-0)=1,\ F(1)=0.$$

ჯამი წკრივისა:

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots, \tag{31}$$

რომლის ზოგადი წევრი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ასე:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{(1+x^2)^n},$$

განიცდის მეორე გვარ წყვეტას, რადგან ეს ჯამი ნულს უდრის $x=0$ მნიშვნელობისათვის და უდრის ერთს x-ის ყველა სხვა მნიშვნელობისათვის. წკრივი:

$$x+x(1-x^2)+\cdots+x(1-x^2)^n+\cdots$$

არის კრებადი $(-1, +1)$ შუალედში. მისი ჯამი ნულს უდრის x-ის ნულ მნიშვნელობისათვის და უდრის $\frac{1}{x}$-ს ნულისაგან განსხვავებულ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

კრებადი (28) წკრივის $F(x)$ ჯამისა და იმავე წკრივის პირველ $n+1$ წევრის $S_n(x)$ ჯამის შორის სხვაობა უდრის შემდეგი წკრივის $R_n(x)$ ჯამს:

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots \tag{32}$$

წკრივს ეწოდება **თ ა ნ ა ბ რ ა დ - კ რ ე ბ ა დ ი** (a, b) შუალედში, თუ $S_n(x)$ ჯამი თანაბრად მიისწრაფის $F(x)$-კენ ამ შუალედში, ე. ი. თუ ყოველ დადებით ε რიცხვს შეიძლება შეუსაბამოთ ისეთი მთელი N რიცხვი, რომ ყოველი $n \geqq N$ მნიშვნელობისათვის, $R_n(x)$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა რჩება ε-ზე ნაკლები მთელ (a, b) შუალედში. ამ შემთხვევაში A თეორემას მივყავართ შემდეგ დებულებამდე:

ჯ ა მ ი წ კ რ ი ვ ი ს ა, რ ო მ ე ლ ი ც თ ა ნ ა ბ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი ა (a, b) **შ უ ა ლ ე დ შ ი დ ა რ ო მ ლ ი ს წ ე ვ რ ე ბ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ა ა მ ა - ვ ე შ უ ა ლ ე დ შ ი, თ ვ ი თ ა რ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა**[1].

[1] აქ გამოთქმული პირობა არის მხოლოდ საკმარისი. Arzela-მ მოგვცა აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ წკრივი. უწყვეტი წევრებით წარმოადგენდეს უწყვეტ ფუნქციას: (იხ. E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réeles გვ. 42).

მართლაც, ამ წკრივის ნებისმიერი n წევრის $S_n(x)$ ჯამი არის უწყვეტი ფუნქცია, თუ ყველა ეს წევრი არის უწყვეტი.

B თეორემის გამოყენება წკრივებზე გვაძლევს კიდევ ერთ ახალ დებულებას:

თუ უწყვეტ წევრებიანი წკრივი (a, b) შუალედში არის კრებადი და თუ წკრივი, შედგენილი პირველი წკრივის წევრების წარმოებულებისაგან ამ შუალედში არის თანაბრად კრებადი, მაშინ მეორე წკრივის ჯამი წარმოადგენს პირველი წკრივის ჯამის წარმოებულს.

მართლაც, ვთქვათ $F(x)$ და $\Phi(x)$ არის ორი წკრივის ჯამები:

$$F(x)=u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

$$\Phi(x)=u'_0(x)+u'_1(x)+\ldots+u'_n(x)+\ldots.$$

მეორე წკრივის პირველ $n+1$ წევრის ჯამი არის პირველი წკრივის პირველ $n+1$ წევრის $S_n(x)$ ჯამის წარმოებული. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს:

$$F(x)=\lim S_n(x),\quad \Phi(x)=\lim S'_n(x);$$

მაგრამ, როგორც ნაგულისხმევი გვაქვს, $S'_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფის $\Phi(x)$-კენ, რადგანაც მეორე წკრივი თანაბრად კრებადია. მაშასადამე, B თეორემის ძალით გვაქვს:

$$\Phi(x)=F'(x).$$

ამ დებულებებიდან ჩანს თანაბრად კრებად წკრივების საგულისხმო მნიშვნელობა. შემდეგი წესი, რომლითაც ხშირად სარგებლობენ, საშუალებას გვაძლევს ბევრ შემთხვევაში გავიგოთ, აქვს თუ არა წკრივს ეს თვისება. ვთქვათ გვაქვს

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{33}$$

წკრივი ცვლადი წევრებით; ვთქვათ, მეორე მხრით

$$v_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots \tag{34}$$

არის კრებადი წკრივი, რომლის წევრები მუდმივი დადებითი რიცხვებია. თუ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში ადგილი აქვს უტოლობას: $|u_n|\leqslant v_n$, როგორიც არ უნდა იყოს n, მაშინ პირველი (33) წკრივი თანაბრად კრებადია ამ შუალედში. მართლაც, ცხადია, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ შუალედში:

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots|<v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots,$$

ე. ი.

$$|R_n(x)|<R'_n,$$

სადაც R'_n აღნიშნავს იმ წკრივის ჯამს, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ თუ (34) წკრივს ჩამოვაშორებთ პირველ $n+1$ წევრს. რადგან ეს (34) წკრივი კრებადია,

ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ საკმარისად დიდი N რიცხვი, ისე რომ R'_n ნაკლები იყოს ε-ზე, როცა $n \geqslant N$. მაშასადამე, ჩვენ გვექნება n-ის ამ მნიშვნელობისათვის, აგრეთვე $|R_n(x)| < \varepsilon$ მთელ განსახილავ შუალედში.

მაგალითად, თუ v_1, $v_2, \ldots, v_n, \ldots$ ინარჩუნებენ წინა შინაარს, მაშინ წკრივი:

$$v_0 + v_1 \sin x + \ldots + v_n \sin nx + \ldots$$

თანაბრად კრებადია მთელ შუალედში.

შენიშვნა. ზოგჯერ წკრივის თანაბრად-კრებადობას განსაზღვრავენ ცოტა სხვანაირად. წკრივს უწოდებენ თანაბრად-კრებადს (a, b) შუალედში, თუ ყოველ დადებით ε რიცხვს შეესაბამება ისეთი დადებითი მთელი n რიცხვი, რომ ნებისმიერ რიცხვის წევრთა ჯამი, დაწყებული $u_{n+1}(x)$-ან:

$$u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x),$$

აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია ε-ზე, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი p რიცხვი და x-ის მნიშვნელობა (a, b) შუალედში. ადვილია ამ ორი განსაზღვრის ტოლფასობის ჩვენება. მივიღოთ ჯერ, რომ წკრივი თანაბრად კრებადია ზემოთ მოცემულ განსაზღვრის მიხედვით, და ვთქვათ, n არის ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ ყველა $R_n(x), R_{n+1}(x), \ldots, R_{n+p}(x)$ ნაშთის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}$ მთელ (a, b) შუალედში. ცხადია, რომ აბსოლუტური სიდიდე ჯამისა:

$$u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = R_{n+p}(x) - R_n(x)$$

იქნება ნაკლები ε-ზე მთელ შუალედში. შებრუნებით, წარმოვიდგინოთ, რომ

$$u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)$$

ჯამის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე მთელ შუალედში, როგორიც არ უნდა იყოს p; აბსოლუტური მნიშვნელობა ჯამისა

$$u_{p+1}(x) + \ldots + u_{p+q}(x)$$

ნაკლები იქნება ε-ზე, როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი q რიცხვი, თუ $p \geqslant n$. აქედან, თუ ვიგულისხმებთ, რომ q უსაზღვროდ იზრდება, მხოლოდ p რჩება მუდმივი, ჩვენ დავასკვნით, რომ (a, b) შუალედში $R_p(x)$-ის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ε-ზე, თუ მხოლოდ $p \geqslant n$: მაშასადამე, წკრივი თანაბრად კრებადია ამ სიტყვის პირველი მნიშვნელობით.

31. უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არ აქვს წარმოებული. ამ თავის დასასრულს ჩვენ მოვიყვანოთ ვაიერშტრასის მიერ მოცემული მაგალითი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც ცვლადის არც ერთი მნიშვნელობისათვის არ აქვს წარმოებული. ვთქვათ b არის ერთზე ნაკლები მუდმივი რიცხვი, ხოლო a—მთელი კენტი რიცხვი. განვიხილოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს კრებად უსასრულო წკრივის ჯამს:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x). \tag{35}$$

რადგან ეს წკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ შუალედში, ამიტომ $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. თუ ab ნამრავლი ნაკლებია ოთხზე, მაშინ ყველაფერი რაც არის თქმული (35) წკრივზე შეიძლება გავავრცე-

ლოთ იმ წკრივზედაც, რომელიც შედგენილია პირველი წკრივის წევრების წარმოებულებიდან; მაშასადამე, $F(x)$ ფუნქციასაც აქვს წარმოებული, რომელიც არის უწყვეტი ფუნქცია. შებრუნებით, ჩვენ შეგვიძლია უჩვენოთ, რომ თუ ab ნამრავლი მეტია გარკვეულ ზღვარზე, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას არ ექნება წარმოებული.

ალვნიშნოთ m-ით რაიმე მთელი რიცხვი და მივიღოთ, რომ

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n \{\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos(a^n\pi x)\},$$

$$R_m = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n \{\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos(a^n\pi x)\}.$$

მაშინ

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = S_m + R_m. \tag{36}$$

გამოვიყენებთ რა $\cos(a^n\pi x)$ ფუნქციაზე სასრული ნაზრდის ფორმულას, ვნახავთ, რომ აბსოლუტური სიდიდე სხვაობისა

$$\cos[a^n\pi(x+h)] - \cos(a^n\pi x)$$

ნაკლებია $\pi a^n h$-ზე. მაშასადამე S_m-ის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება ვიდრე:

$$\pi\sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \pi\frac{a^m b^m - 1}{ab-1}$$

და, მით უმეტეს ნაკლები $\pi\frac{(ab)^m}{ab-1}$-ზე, თუ $ab>1$. ვეძებოთ ახლა R_m-ის აბსოლუტური სიდიდის ზღვარი. მივცეთ h ნაზრდს რაიმე კერძო მნიშვნელობა. ჩვენ შეგვიძლია $a^m x$ წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

სადაც α_m—რაღაც მთელი რიცხვია და ξ_m იმყოფება

$$-\frac{1}{2} \text{ და } +\frac{1}{2} \text{ შორის.}$$

დავუშვათ

$$h = \frac{e_m - \xi_m}{a^m},$$

სადაც $e_m = \pm 1$. რადგანაც $|\xi_m| < \frac{1}{2}$, ამიტომ ცხადია, რომ h-ს იგივე ნიშანი აქვს რაც e_m-ს, და აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია $\frac{3}{2a^m}$. h-ის ასეთნაირად არჩევით, როცა $n \geqq m$, გვექნება:

$$a^n\pi(x+h) = a^{n-m}a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + e_m).$$

რადგანაც a კენტი რიცხვია და $e_m=\pm 1$, ამიტომ ნამრავლი:

$$a^{n-m}(\alpha_m+e_m),$$

სადაც $n>m$, ისეთი სახის რიცხვია, როგორიც α_m+1, და მაშასადამე,

$$\cos[a^n\pi(x+h)]=(-1)^{\alpha_m+1}.$$

სრულიად ამგვარად გვაქვს:

$$\cos(a^n\pi x)=\cos(a^{n-m}a^m\pi x)=\cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)]=\cos(a^{n-m}\alpha_m\pi)\cos(a^{n-m}\xi_m\pi).$$

რადგან $a^{n-m}\alpha_m$ ისეთივე სახისაა რაც α_m [1], ამიტომ

$$\cos(a^n\pi x)=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\xi_m\pi).$$

მაშასადამე, ვღებულობთ:

$$R_m=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{m=n}^{\infty}b^n[1+\cos(a^{n-m}\xi_m\pi)];$$

რადგანაც ამ წკრივის წევრები ყველა დადებითია, ამიტომ მისი ჯამი მეტია პირველ წევრზე და მაშასადამე, მეტია b^m-ზე, რადგანაც ξ_m იმყოფება $-\frac{1}{2}$ და $+\frac{1}{2}$ შორის. ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

$$|R_m|>\frac{b^m}{|h|},$$

ან და თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $h<\frac{3}{2a^m}$, მაშინ $|R_m|>\frac{2}{3}(ab)^m$.

წარმოვიდგინოთ, რომ

$$\frac{2}{3}(ab)^m>\frac{\pi(ab)^m}{ab-1},$$

რისთვისაც a და b რიცხვები უნდა აკმაყოფილებდნენ უტოლობას:

$$ab>1+\frac{3\pi}{2}. \qquad (37)$$

მაშინ (36) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|>|R_m|-|S_m|>\frac{2}{3}(ab)^m\,\frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{ab-1}.$$

მივცეთ ახლა მთელ m რიცხვს უფრო და უფრო დიდი მნიშვნელობები. m-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა ნაწილიც უსაზღვროდ იზრდება და მასთან ერთად h ნულისაკენ მიისწრაფის. მაშასადამე, რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს ε რიცხვი ყოველთვის შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი ნაზრდი

[1] ე. ი. ორივე ერთდროულად ან ლუწია ან კენტი (რ ე დ.).

h, აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები ε-ზე, რომ $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$-ის აბსოლუტური სიდიდე იქნეს მეტი ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე. ამრიგად, თუ (37) უტოლობა დაკმაყოფილებულია, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას არ აქვს წარმოებული x ცვლადის არც ერთი მნიშვნელობისათვის.

სავარჯიშო მაგალითები

1. ვთქვათ $\rho=f(\omega)$ არის ბრტყელი მრუდის განტოლება პოლარ კოორდინატებში. გავავლოთ O პოლუსზე წრფე, რომელიც მართობია OM რადიუს-ვექტორის და ჰკვეთს MT მხებს და MN ნორმალს. მოთხოვნილია, რომ სხვადასხვა OT, ON, MN და MT მონაკვეთები გამოსახული იქნეს $f(\omega)$ და $f'(\omega)$—ფუნქციებით.

როგორი იქნება ის მრუდები, რომელთათვის ერთი ამ მონაკვეთთაგანი მუდმივია?

2. ვთქვათ $y=f(x), z=\varphi(x)$ არის ორმაგი სიმრუდის მქონე Γ მრუდის განტოლება. N იყოს წერტილი, რომელშიაც M წერტილზე გავლებული ნორმალ-სიბრტყე, ე. ი. სიბრტყე მართობი ამ წერტილზე გავლებული მხები წრფისა, ჰკვეთს z ღერძს და P კი M წერტილიდან Oz ღერძზე დაშვებული მართობის ფუძე. როგორია ის მრუდები, რომელთათვის ერთ-ერთი PN და MN მონაკვეთებიდან არის მუდმივი?

პასუხი. ეს მრუდები დალაგებულია ბრუნვითი პარაბოლოიდებზე ან სფეროებზე.

3. განსაზღვრეთ $f(x)$ მრავალწევრი მეშვიდე ხარისხის x-ის შესახებ, თუ ვიცით, რომ $f(x)+1$ იყოფა $(x-1)^4$-ზე, მხოლოდ $f(x)-1$ კი $(x+1)^4$-ზე. განაზოგადოვეთ საკითხი.

4. ვთქვათ P და Q ორი მრავალწევრია x-ის შესახებ, რომელთათვის

$$\sqrt{1-P^2}=Q\sqrt{1-x^2}.$$

მაშინ, თუ n-ით აღვნიშნავთ მთელ რიცხვს, გვექნება:

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

პასუხი. გავაწარმოვოთ ტოლობა:

$$1-P^2=Q^2(1-x^2) \qquad (a)$$

მივიღებთ:

$$-2PP'=Q[2Q'(1-x^2)-2Qx]; \qquad (b)$$

(a) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ Q თანამარტივია P-ან, ხოლო (b)—რომ P' იყოფა Q-ზე.

5. ვთქვათ $R(x)$ არის მეოთხე ხარისხის მრავალწევრი, რომელსაც მარტივი ფესვები აქვს, ხოლო $x=\frac{U}{V}$—რაციონალური ფუნქცია t-სი, რომელიც აკმაყოფილებს დამოკიდებულებას

$$\sqrt{R(x)}=\frac{P(t)}{Q(t)}\sqrt{R_1(t)},$$

სადაც $R_1(t)$ არის მეოთხე ხარისხის მრავალწევრი და $\frac{P}{Q}$—რაციონალური ფუნქცია. უჩვენეთ რომ $\frac{U}{V}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{k\,dt}{\sqrt{R_1(t)}},$$

სადაც k მუდმივი სიდიდეა. [იაკობი]

პ ა ს უ ხ ი. საჭიროა ყურადღების მიქცევა იმაზე, რომ $R\left(\frac{U}{V}\right)=0$ განტოლების ყველა ფესვი, რომლებიც არ აქცევენ ნულად $R_1(t)$-ს უნდა ნულად აქცევდნენ $UV'-VU'$ გამოსახულებას, და მაშასადამე, $\frac{dx}{dt}$-საც.

6. n-რი რიგის წარმოებული რთული $y=\varphi(u)$ ფუნქციისა სადაც u არის დამოუკიდებელ x ცვლადის ფუნქცია, გამოისახება ასეთი სახით:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=A_1\varphi'(u)+\frac{A_2}{1.2}\varphi''(u)+\ldots+\frac{A_n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(u), \tag{a}$$

სადაც

$$A_k=\frac{d^n u^k}{dx^n}-\frac{k}{1}u\frac{d^n u^{k-1}}{dx^n}+\frac{k(k-1)}{1.2}u^2\frac{d^n u^{k-2}}{dx^n}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-1}ku^{k-1}\frac{d^n u}{dx^n}\quad(k=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{b}$$

პირველად შევნიშნოთ, რომ n-ური რიგის წარმოებულის გამოსახვა იქნება (a) სახის, სადაც A_1, $A_2\ldots,A_n$ კოეფიციენტები არ არიან დამოკიდებული $\varphi(u)$ ფუნქციის სახეზე. რომ მივიღოთ ეს კოეფიციენტები, საკმარისია მიმდევრობით დავუშვათ

$$\varphi(u)=u,\ \varphi(u)=u^2,\ldots,\ \varphi(u)=u^n$$

და მიღებული განტოლებანი ამოვხსნათ A_1, $A_2\ldots$, A_n კოეფიციენტების მიმართ; აქედან მიიღება (b) მნიშვნელობანი.

7. n-რი რიგის წარმოებულს $\varphi(x^2)$-ან აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n}=(2x)^n\varphi^{(n)}(x^2)+n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x^2)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{n-2p}\varphi^{(n-p)}(x^2)+\ldots,$$

სადაც p იცვლება 0-ან უდიდეს მთელ რიცხვამდე, რომელსაც შეიცავს $\frac{n}{2}$, ხოლო $\varphi^{(i)}(x^2)$ წარმოადგენს i-ური რიგის წარმოებულს x^2-ის მიმართ

გამოყენება e^{-x^2}, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ ფუნქციებზე.

8. თუ დავუშვებთ, რომ $x=\cos u$, მივიღებთ:

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\sin mu$$

[ო ლ ი ნ დ რ ო დ რ ი გ ი (Olinde Rodrigues)].

9. ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს (L e g e n d r e) პ ო ლ ი ნ ო მ ი:

$$X_n=\frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n(n+1)X_n=0;$$

გამოიყვანეთ აქედან ამ პოლინომის კოეფიციენტები.

10. ოთხი ფუნქცია:

$$y_1=\sin(n\arcsin x),\quad y_3=\sin(n\arccos x),$$
$$y_2=\cos(n\arcsin x),\quad y_4=\cos(n\arccos x).$$

აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$(1-x^2)\, y''-xy'+n^2y=0.$$

გამოიყვანეთ აქედან ამ ფუნქციების დაშლა იმ შემთხვევაში, როცა ისინი დაიყვანება მრავალწევრებამდე.

11. დაამტკიცეთ ფორმულა:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) =(-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

[ა ლ ფ ა ნ ი (Halphen)].

12. ყოველი [$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ ფუნქცია, როგორიც არ უნდა იყოს φ და ψ, აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$rx^2+2s\,xy+ty^2=0.$$

13. $z=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$, როგორიც არ უნდა იყოს φ და ψ, აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$r-2s+t=0.$$

14. $z=f[x+\varphi(y)]$ ფუნქცია, როგორიც არ უნდა იყოს f და φ, აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$ps=qr.$$

15. $z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ ფუნქცია, როგორიც არ უნდა იყოს φ და ψ, აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$rx^2+2s\,xy+ty^2+px+qy=n^2z.$$

16. ფუნქციას $y=|x-a_1|\,\varphi_1(x)+|x-a_2|\,\varphi_2(x)+\ldots+|x-a_n|\,\varphi_n(x)$,

სადაც $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ და აგრეთვე მათი $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)\ldots, \varphi_n'(x)$ წარმოებულები არიან უწყვეტი ფუნქციები, აქვს წყვეტილი წარმოებული x-ის a_1, $a_2\ldots, a_n$ მნიშვნელობისათვის.

17. იპოვეთ დამოკიდებულება $z=f(x_1, u)$, ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულთა შორის x_1, x_2, x_3-ის შესახებ, თუ $u=\varphi(x_2, x_3)$ და x_1, x_2, x_3 დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო $f(x_1\, u)$ და $\varphi\ (x_2\, x_3)$—ნებისმიერი ფუნქციები.

18. ვთქვათ $f(x)$ არის x-ის რაიმე ფუნქცია და $f'(x)$ მისი წარმოებული. თუ აღვნიშნავთ $u=[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, $v=f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, გვექნება:

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

19. n-ური რიგის წარმოებულს $u=\varphi(y)$ ფუნქციიდან, სადაც $y=\Psi(x)$, აქვს შემდეგი სახე:

$$D^n_x\varphi=\sum\frac{n!}{i!\,j!\ldots k!}\,D^p_y\varphi\,\left(\frac{\Psi'}{1}\right)^i\left(\frac{\Psi''}{1.2}\right)^j\left(\frac{\Psi'''}{1.2.3}\right)^h\cdots\left(\frac{\Psi^{(l)}}{1.2\ldots l}\right)^k,$$

მასთან Σ უნდა გავრცელდეს $i+2j+3h+\ldots+lk=n$ განტოლების ყველა დადებით მთელ ფესვებზე, ხოლო p უდრის:

$$i+j+\ldots+k.$$

[ფ ა - დ ე - ბ რ უ ნ ო (Faa de Bruno) Quarterly Journal of Matematics, ტ. I. გვ. 359.].

თ ა ვ ი III

უცხადი ფუნქციები. მაქსიმუმი და მინიმუმი. ცვლათა გარდაქმნა

I. უცხადი ფუნქციები.

32. კერძო შემთხვევის განხილვა. ხშირად გვიხდება ისეთ ფუნქციათა განხილვა, რომლებიც მოცემული არ არიან ცხადი სახით, არამედ განსაზღვრული არიან ამოუხსნელი განტოლებებით. ჩვენ დავიწყებთ შესწავლას ერთი ფუნქციიდან, რომელიც განსაზღვრულია ერთი განტოლებით და სიმარტივისათვის დავუშვებთ, რომ მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ცვლადი.

ვთქვათ $F(x, y, z)$ არის x, y, z ცვლადების ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: 1) იგი უწყვეტია და აქვს უწყვეტი F'_z კერძო წარმოებული ცვლადთა x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობების მახლობლობაში; 2) $F(x_0, y_0, z_0)$ უდრის ნულს, ხოლო $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ ნულისაგან განსხვავდება. ამ პირობებში განტოლებას:

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი, რომელიც მიისწრაფის z_0-საკენ, როცა x და y შესაბამად მიისწრაფიან x_0 და y_0-საკენ.

რადგან F და F'_z ფუნქციები უწყვეტია x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობათა მახლობლობაში, ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ საკმარისად მცირე სამი a, b, c დადებითი რიცხვი, რომ ეს ფუნქციები იყვნენ უწყვეტი D არეში, რომელიც განსაზღვრულია უტოლობებით:

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b, \quad |z-z_0|\leqslant c,$$

და F'_z ამ არეში ინარჩუნებდეს ერთი და იგივე ნიშანს, მაგალითად რჩებოდეს დადებითი. მაშინ z ცვლადის ფუნქცია, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ, თუ x და y ცვლადებს მივცემთ მნიშვნელობებს, რომლებიც მოქცეულია ნაჩვენებ საზღვრებში, იზრდება z-ის z_0-c-ან, z_0+c-მდე ზრდასთან ერთად. კერძოდ $F(x_0, y_0, z)$ ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა ამ შუალედში; რადგან ის ნულს უდრის $z=z_0$ მნიშვნელობისათვის, ის იქნება დადებითი z_0 და z_0+c შუალედში და უარყოფითი z_0-c და z_0 შუალედში, ასე რომ, თუ h — ნებისმიერი, c-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, გვაქვს:

$$F(x_0, y_0, z_0+h)>0,$$
$$F(x_0, y_0, z_0-h)<0.$$

მაგრამ x და y ცვლადების $F(x, y, z_0+h)$ და $F(x, y, z_0-h)$ ფუნქციები უწყვეტია $x=x_0$, $y=y_0$ მნიშვნელობისათვის და არ იქცევა ნულად x და y-ის ამ მნიშვნელობათა სისტემისათვის. მაშასადამე, შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომელიც არ სჭარბობს a და b-ს შორის უმცირესს, რომ

$$F(x, y, z_0+h) \text{ და } F(x, y, z_0-h)$$

ფუნქციები ინარჩუნებდეს თავის ნიშნებს, როცა $x-x_0$, $y-y_0$ სხვაობები აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია η-ზე. მაშასადამე, x და y მნიშვნელობათა ყოველი სისტემისათვის, თუ ისინი აკმაყოფილებენ პირობებს

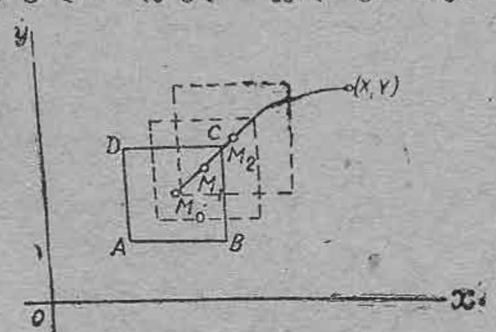
$$|x-x_0|<\eta, \ |y-y_0|<\eta,$$

ჩვენ გვექნება:

$$F(x, y, z_0+h)>0, \ F(x, y, z_0-h)<0.$$

(1) განტოლებას, რომელშიაც x და y-ს ეძლევა მნიშვნელობანი, რომლებიც მოქცეულია ზემონაჩვენებ საზღვრებს შორის და რომელშიაც z არის უცნობი, აქვს, მაშასადამე, *ერთი ფესვი მაინც*, რომელიც იმყოფება z_0-h და z_0+h-ის შორის. მას არ შეუძლია ექნეს რამდენიმე ფესვი, რადგან $F(x, y, z)$ ფუნქცია არის z ცვლადის ზრდადი ფუნქცია ამ ინტერვალში. რადგან h რიცხვი შეიძლება აღებული იქნეს ნებისმიერად მცირე, ამიტომ ზემოთ გამოთქმული თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ h და η არის სისტემა ორი დადებით რიცხვისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ ზემოთ განსაზღვრულ პირობებს. (1) განტოლების ფესვი, რომლის არსებობა ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, განსაზღვრულია R კვადრატის შიგნით, რომლის ცენტრია M_0 წერტილი კოორდინატებით (x_0, y_0), გვერდები კი პარალელური კოორდინატთა ღერძების (ნაგულისხმევია მართკუთხოვანი კოორდინატთა სისტემა) სიგრძით 2η. ვთქვათ x_1, y_1 არის კოორდინატები მეორე M_1 წერტილისა აღებული ამ კვადრატის შიგნით. ზემომოყვანილ დამტკიცებიდან გამოდის, რომ $F(x_1, y_1, z_1)=0$ განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი z_1, რომელიც იმყოფება z_0-h და z_0+h შორის, რადგანაც $F'_z(x_1, y_1, z_1)$ დადებითია. ამნაირად წინა მსჯელობის გამოყენება შეიძლება აგრეთვე x_1, y_1 წერტილზე; როცა x და y მიისწრაფიან შესაბამად x_1 და y_1-კენ, (1) განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი, რომელიც მიისწრაფის z_1-კენ. ეს ფესვი აუცილებლად იმყოფება z_0-h და z_1+h შორის და, მაშასადამე, ემთხვევა პირველს. ამრიგად განხილული ფესვი უწყვეტია ყოველ წერტილზე R კვადრატის შიგნით.



ნახ. 3

რადგანაც ჩვენ მიერ განსახილავი ფესვი განსაზღვრულია მხოლოდ R არეში, ამიტომ ჩვენ გვაქვს უცხადო ფუნქციის მხოლოთ ერთი ელემენტი. რომ განვსაზღვროთ ეს ფუნქცია R არეს გარეთ, თანდათანობით შემდეგნაირად მოვიქცეთ. ვთქვათ (ნახ. 3) L არის უწყვეტი გზა, რომელიც გამოდის M (x_0, y_0) წერტილიდან და თავდება (X, Y) წერტილში, რომელიც მდებარეობს R არეს გარეთ. დავუშვათ, რომ x და y ცვლადები ერთდროულად იცვლებიან ისე, რომ წერტილი (x, y) კოორდინატებით აღწერს L გზას. თუ გამოვალთ (x_0, y_0) წერტილიდან z უცნობის z_0 მნიშვნელობით, მაშინ გვექნება სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა ამ ფესვისათვის მანამდე, სანამ არ გამოვალთ R არედან. ვთქვათ $M_1(x_1, y_1)$ არის ამ გზის წერტილი, რომელიც R არეს შიგნით იმყოფება და ვთქვათ z_1 არის z-ის შესაბამი მნიშვნელობა; ძირითადი თეორემის პირობები კმაყოფილდება $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ მნიშვნელობებისათვის და, მაშასადამე, არსებობს მეორე R_1 არე M_1 ცენტრით, რომლის შიგნით სრულიად განსაზღვრული იქნება ფესვი, რომელიც იქცევა z_1-ად, როცა $x=x_1$ და $y=y_1$. ამ ახალ R_1 არეს საერთოდ ექნება ისეთი წერტილები, რომლებიც მდებარეობენ R არის გარეთ; თუ ავიღებთ ისევ L გზაზე მეორე M_2 წერტილს, რომელიც მდებარეობს R არეს გარეთ და R_1 არეს შიგნით, ჩვენ შეგვიძლია ხელახლა განვიმეოროთ იგივე აგება და მივიღებთ ახალ R_2 არეს, რომლის შიგნით (1) განტოლების ფესვი იქნება სრულიად განსაზღვრული და ასე შემდეგ. ეს პროცესი შეგვიძლია განვაგრძოთ მანამდე, სანამ x, y, z მნიშვნელობათა იმ სისტემამდე არ მივალთ, რომლისათვის $F'_z=0$. დავკმაყოფილდეთ აქ მხოლოდ ამ ზოგადი მითითებებით; შემდეგ თავებში ჩვენ უფრო დაწვრილებით შევეხებით ამგვარ საკითხებს.

33. ფესვთა გამოთვლა მიმდევრობითი მიახლოვებით[1]. ვთქვათ $f(x, y, z)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც აქვს უწყვეტი $f'_z(x, y, z)$ წარმოებული ცვლადების (x_0, y_0, z_0) მნიშვნელობათა სისტემის მახლობლობაში. თუ ეს $f(x, y, z)$ ფუნქცია და მისი f'_z წარმოებული მნიშვნელობათა ამ სისტემისათვის უდრის ნულს, მაშინ განტოლებას:

$$z=z_0+f(x, y, z) \tag{1'}$$

აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი $z=\varphi(x, y)$, რომელიც მიისწრაფის z_0-კენ, როცა x და y შესაბამად მიისწრაფიან x_0 და y_0-კენ, და ამ სისტემის მახლობლობაში x და y ცვლადების $\varphi(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია.

რადგან $f(x, y, z)$ და $f'_z(x, y, z)$ უდრის ნულს $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ მნიშვნელობებისათვის და უწყვეტია ამ მნიშვნელობათა სისტემის მახლობლობაში, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ამოვირჩიოთ სამი ისეთი დადებითი a, b და c რიცხვი, რომ $f(x, y, z)$ და $F'_z(x, y, z)$ ფუნქციები იყვნენ უწყვეტი D არეში, რომელიც განსაზღვრულია პირობებით:

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\quad y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b,\quad z_0-c\leqslant z\leqslant z_0+c$$

და გარდა ამისა D არეში ადგილი ჰქონდეს:

$$|f'_z(x, y, z)|<K, \tag{2}$$

[1] G o u r s a t, Sur la théorie des fonctions implicites (*Bulletin de la Société mathématique*, ტ. XXXI. 1903).

სადაც K რაიმე ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. (2) პირობა ყოველთვის შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ a, b, c რიცხვების შესაბამად არჩევით, რადგან უწყვეტი f_z ფუნქცია ნულს უდრის, როცა $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

(1′) განტოლების გადასაწყვეტად გამოვიყენოთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი. დავუშვათ მიმდევრობით:

$$z_1=z_0+f(x,\ y,\ z_0),\ z_2=z_0+f(x,\ y,\ z_1)\dots,$$

და საზოგადოდ

$$z_n=z_0+f(x,\ y,\ z_{n-1})\ (n=1,\ 2,\dots,\infty). \tag{3}$$

დავამტკიცოთ, რომ თუ $x-x_0$, $y-y_0$ სხვაობები არიან საკმარისად მცირე, მაშინ ყველა z_n-z_0 სხვაობა აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები იქნება c-ზე, და, მაშასადამე, წინა მიმდევრობითი ოპერაცია შეიძლება განვაგრძოთ უსაზღვროდ. ვთქვათ z არის რაიმე რიცხვი, რომელიც იმყოფება z_0-c და z_0+c-ს შორის; შეგვიძლია დავწეროთ:

$$f(x,\ y,\ z)=f(x,\ y,\ z_0)+f(x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z_0),$$

და, მაშასადამე, თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას და მხედველობაში მივიღებთ (2) პირობას, მივიღებთ:

$$|f(x,\ y,\ z)|<|f(x,\ y,\ z_0)|+K|z-z_0|. \tag{4}$$

ავიღოთ ახლა ისეთი დადებითი h რიცხვი, არა უმეტესი a და b შორის უმცირესზე, რომ $f(x,\ y,\ z_0)$ ფუნქცია იყოს ნაკლები $(1-K)c$-ზე, როცა $(x,\ y)$ წერტილი რჩება D' არეში, რომელიც განსაზღვრულია პირობებით:

$$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h,\ y_0-h\leqslant y\leqslant y_0+h.$$

(4) უტოლობიდან გამოდის, რომ აგრეთვე

$$|f(x,\ y,\ z)|<(1-K)\,c+K\,c=c.$$

ამნაირად, მიმდევრობით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $(x,\ y)$ წერტილი რჩება D' არეში და აბსოლუტური სიდიდე სხვაობების:

$$z_1-z_0,\ z_2-z_0,\dots,\ z_n-z_0,\dots$$

ნაკლები იქნება c-ზე. მაშასადამე, ჩვენ ვღებულობთ ისეთ ფუნქციათა განუსაზღვრელ მიმდევრობას:

$$z_1(x,\ y),\ z_2(x,\ y),\dots,\ z_n(x,\ y),$$

რომლებიც განსაზღვრულია (3) რეკურენტული კანონით, ყველა უწყვეტი D' არეში და მოქცეულნი z_0-c და z_0+c შორის. დავამტკიცოთ, რომ n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს $z_n(x,y)$ ფუნქცია მიისწრაფის რაიმე ზღვარისაკენ. მართლაც, შემდეგი თანაფარდობებიდან:

$$z_n=z_0+f(x,\ y,\ z_{n-1}),\ z_{n-1}=z_0+f(x,\ y,\ z_{n-2}),$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (2) პირობას, გვექნება:

$$|z_n-z_{n-1}|<K|z_{n-1}-z_{n-2}|$$

და მაშასადამე,

$$|z_n-z_{n-1}|<K^{n-1}|z_1-z_0|<K^{n-1}(1-K)\,c.$$

ამგვარად წკრივი:

$$z_0+(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\dots(z_n-z_{n-1})+\dots \tag{5}$$

—თანაბრად კრებადია D' არეში და აქვს ჯამად რომელიმე $Z(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია ამ არეში. ეს Z ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, ვინაიდან n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს (3) განტოლება ზღვარში გადაიქცევა განტოლებად:

$$Z=z_0+f(x, y, Z). \tag{6}$$

ამას გარდა, როცა $x=x_0$, $y=y_0$ ყველა $z_1, z_2, \ldots$ ფუნქცია გადაიქცევა z_0-ად, და მაშასადამე, გვექნება $Z(x_0, y_0)=z_0$; ამგვარად $Z(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ყველა მოთხოვნილ პირობას.

$Z(x, y)$ არის ერთად-ერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობებს. უფრო ზუსტად, როცა (x, y) წერტილი იმყოფება D' არეში, (1') განტოლებას არ აქვს არავითარი სხვა ამონახსნი გარდა Z-ისა, რომელიც მოთავსებულია $z_0-\varepsilon$ და $z_0+\varepsilon$-ს შორის. მართლაც, ვთქვათ Z_1 არის ასეთი ამონახსნი; ტოლობიდან:

$$Z_1=z_0+f(x, y, Z_1),\quad z_n=z_0+f(x, y, z_{n-1})$$

ვღებულობთ:

$$Z_1-z_n=f(x, y, Z_1)-f(x, y, z_{n-1}),$$

და მაშასადამე,

$$|Z_1-z_n|<K|Z_1-z_{n-1}|.$$

აქედან გვექნება:

$$|Z_1-z_n|<K^{n-1}|Z_1-z_1|.$$

მაშასადამე, n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს Z_1-z_n სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფის; ამგვარად Z_1 იგივურია Z-ის. აქ მოყვანილი დამტკიცება არამც თუ ნებას გვაძლევს დავრწმუნდეთ $Z(x, y)$ ამოხსნის არსებობაში, არამედ იძლევა მისი გამოთვლის ხერხსაც. ვინაიდან აბსოლუტური სიდიდე z_1-z_0 სხვაობისა ნაკლებია ვიდრე $(1-K)\varepsilon$, ამიტომ აბსოლუტური სიდიდე z_n-z_{n-1} სხვაობისა იქნება ნაკლები $(1-K)\varepsilon K^{n-1}$-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ მე-(5) წკრივში შევჩერდებით (z_n-z_{n-1}) წევრზე, ჩვენ დავუშვებთ ცთომილებას, რომლის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ვიდრე εK^n.

ამ კერძო შემთხვევიდან ადვილად გადავალთ ზოგად თეორემაზე (§ 32).

ავღნიშნოთ $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ წარმოებელი m-ით; წინასწარი დაშვების თანახმად m ნულისაგან განსხვავდება, და (1') განტოლება ტოლფასია განტოლების:

$$z=z_0+\left[z-z_0-\frac{1}{m}F(x, y, z)\right];$$

მაგრამ ამ განტოლებას აქვს სახე (1') განტოლებისა, რომელშიაც

$$f(x, y, z)=z-z_0-\frac{1}{m}F(x, y, z).$$

ამგვარად თეორემა დამტკიცებულია, და ცხადია, რომ მსჯელობა დამოკიდებული არ არის დამოუკიდებელ ცვლადთა რიცხვზე.

ახლა გადავიდეთ თავსებადი განტოლებებით განსაზღვრულ უცხადო ფუნქციათა სისტემის შესწავლაზე.

ვთქვათ

$$f_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

არის $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p$ ცვლადების ფუნქციები, რომლებიც უწყვეტია და აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ შემდეგი მნიშვნელობათა სისტემის მახლობლობაში: $x_i=x_i^0$, $y_k=\overset{0}{y}_k$. თუ, გარდა ამისა, f_i ფუნქციები და $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ კერძო წარმოებულები ნულის ტო-

ლია მნიშვნელობათა ამ სისტემისათვის, მაშინ p განტოლებას:

$$y_1=y_1^0+f_1, \quad y_2=y_2^0+f_2, \ldots, \quad y_p=y_p^0+f_p$$

აქვს ამოხსნათა ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა:

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{A}$$

რომლებიც მიისწრაფის $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$ — მნიშვნელობისაკენ, როცა x_1, $x_2, \ldots, x_n$ მიისწრაფიან შესაბამად $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$-საკენ და ეს ამონახსნები უწყვეტი ფუნქციებია $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ მნიშვნელობათა ამ სისტემის მახლობლობაში.

განვიხილოთ გარკვეულობისათვის ორი განტოლება ორი დამოუკიდებელი x, y ცვლადით და ორი u, v ფუნქციით და დავუშვათ $x_0=y_0=u_0=v_0=0$. უკანასკნელი პირობა მუდამ შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ თუ x, y, u, v-ს შევცვლით შესაბამად x_0+x, y_0+y, u_0+u, v_0+v-ით. მაშინ მე-(10) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$u=f(x, y; u, v), \quad v=\varphi(x, y; u, v), \tag{B}$$

მასთან, როცა $x=y=u=v=0$ ფუნქციები: f, φ, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ნულის ტოლი არიან და უწყვეტი მნიშვნელობათა ამ სისტემის მახლობლობაში. ვთქვათ a, b, c ისეთი დადებითი რიცხვებია, რომ წინა ექვსი ფუნქცია არის უწყვეტი D არეში, რომელიც განსაზღვრული პირობებით:

$$|x| \leqslant a, \ |y| \leqslant b, \ |u| \leqslant c, \ |v| \leqslant c,$$

და, რომ გარდა ამისა, ამ არეში ადგილი ექნეს უტოლობებს:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| < K, \ \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| < K, \ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| < K, \ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right| < K, \tag{C}$$

სადაც K არის რომელიმე დადებითი რიცხვი, ნაკლები $\frac{1}{2}$-ზე. ისე როგორც ზემოთ, შევადგინოთ ფუნქციათა ორი მიმდევრობა:

$$\begin{aligned} &u_1=f(x, y; 0, 0), \quad &&v_1=\varphi(x, y; 0, 0), \\ &u_2=f(x, y; u_1, v_1), \quad &&v_2=(x, y; u_1, v_1), \\ &\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

და საზოგადოდ,

$$u_n=f(x, y; u_{n-1}, v_{n-1}), \quad v_n=\varphi(x, y; u_{n-1}, v_{n-1}). \tag{D}$$

თუ u_{n-1}, v_{n-1}, სიდიდეთა აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია c-ზე, მაშინ, გამოვიყენებთ რა საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას u_n-u_1, v_n-v_1 სხვაობებზე და მივიღებთ მხედველობაში (C) პირობებს, გვექნება:

$$|u_n| < |f(x, y; 0, 0)| + 2Kc, \quad |v_n| < |\varphi(x, y; 0, 0)| + 2Kc.$$

შევარჩიოთ ახლა ისეთი დადებითი h რიცხვი, რომელიც არ აღემატება უმცირესს ორი a და b რიცხვს შორის და ისე, რომ $f(x, y; 0, 0)$ და $\varphi(x, y; 0, 0)$ ფუნქციათა აბსოლუტური სიდიდეები იყოს ნაკლები ვიდრე $(1-2K)c$, როცა x და y ცვლადთა აბსოლუტური სიდიდეები არ აღემატებიან h-ს. თუ (x, y) წერტილი რჩება ამგვარად გარკვეულ D' არეში, მაშინ მიმდევრობით

შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ყველა u_i, v_i ფუნქცია იქნება უწყვეტი და აბსოლუტური სიდიდითაც დარჩება ნაკლები ვიდრე c.

დავამტკიცოთ, რომ n რიცხვის უსასრულოდ ზრდის დროს u_n და v_n ფუნქციები მიისწრაფიან რაიმე $U(x, y)$ და $V(x, y)$ ზღვრებისაკენ. მართლაც, განვიხილოთ ორი წკრივი:

$$\left.\begin{aligned} & u_1+(u_2-u_1)+\ldots+(u_n-u_{n-1})+\ldots, \\ & v_1+(v_2-v_1)+\ldots+(v_n-v_{n-1})+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{E}$$

(D) ფორმულებიდან ვღებულობთ:

$$u_n-u_{n-1}=f(x, y; u_{n-1}, v_{n-1})-f(x, y; u_{n-2}, v_{n-2}),$$

და, მაშასადამე, (C) პირობათა საფუძველზე,

$$|u_n-u_{n-1}|<K|u_{n-1}-u_{n-2}|+K|v_{n-1}-v_{n-2}|.$$

ცხადია, რომ ასეთივე უტოლობა არსებობს $|v_n-v_{n-1}|$-სათვის. თუ აღვნიშნავთ H_n-ით უდიდესს $|u_n-u_{n-1}|$ და $|v_n-v_{n-1}|$ რიცხვებიდან, გვექნება:

$$H_n<2KH_{n-1}$$

და, მაშასადამე,

$$H_n<(2K)^{n-1}H_1<(2K)^{n-1}(1-2K)c.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ორივე (E) წკრივი თანაბრად კრებადია D' არეში და წარმოადგენენ ორ $U(x, y)$ და $V(x, y)$ უწყვეტ ფუნქციას ამ არეში. ეს U და V ფუნქციები აკმაყოფილებენ (B) განტოლებებს, ვინაიდან n რიცხვის უსასრულოდ ზრდის დროს (D) თანაფარდობები ზღვარში გადაიქცევიან

$$U=f(x, y; U, V), \quad V=\varphi(x, y; U, V).$$

როგორც ზემოთ, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ U და V არის (B) განტოლებათა ერთადერთი ამონახსნები, რომლებიც მოთხოვნილ პირობებს აკმაყოფილებენ.

დასასრულს განვიხილოთ ყველაზე ზოგადი სახის სისტემა:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0, \; F_2=0, \ldots, F_p=0. \tag{F}$$

დავუშვათ, რომ $F_1, \ldots F_p$ ფუნქციები უწყვეტია და აქვთ უწყვეტი კერძო $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_k}$ წარმოებულები $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $y_1^0, \ldots, y_p^0$ მნიშვნელობათა სისტემის მახლობლობაში, რომლის დროსაც $F_1=0$, $F_2=0, \ldots, F_p=0$, და რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი:

$$\Delta=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

x_i^0, y_k^0 მნიშვნელობებისათვის ნულს არ უდრის. ამ პირობებში (F) განტოლებებს აქვს ამოხსნათა ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა:

$$y_1=\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_p=\varphi_p(x_1, \ldots, x_n),$$

სადაც $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ არის $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადების უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც მიისწრაფიან შესაბამად $y_1^0, \ldots, y_p^0$-საკენ, როცა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადები მიისწრაფიან x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$-საკენ.

დალაგების სიმარტივისათვის x_i შევცვალოთ $x_i^0+x_i$-ით, ხოლო y_k კი $y_k^0+y_k$-ით, ისე რომ ყველა საწყისი x_i^0, y_k^0 მნიშვნელობა იყოს ნულის ტოლი. აღვნიშნოთ a_{jk}-თი $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ წარმოებულის მნიშვნელობა ამ საწყის მნიშვნელობათათვის. დაშვების თანახმად, დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1p} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p1}\, a_{p2} \dots a_{pp} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავდება. ცხადია, რომ (F) განტოლებათა სისტემა ტოლფასია შემდეგი სისტემის:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1p}y_p=a_{11}y_1+\dots+a_{1p}y_p-F_1=\psi_1, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2p}y_p=a_{21}y_1+\dots+a_{2p}y_p-F_2=\psi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}y_1+a_{p2}y_2+\dots+a_{pp}y_p=a_{p1}y_1+\dots+a_{pp}y_p-F_p=\psi_p, \end{array}\right\} \qquad (G)$$

სადაც $x_i=0$, $y_k=0$ მნიშვნელობისათვის ψ_j ფუნქციები და მათი კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია. თუ (G) სისტემას ამოვხსნით $y_1, y_2, \dots, y_p$-ს მიმართ, რაც შესაძლებელია, ვინაიდან Δ ნულს არ ეტოლება, ჩვენ მივალთ (A) სახის სისტემაზე.

34. უცხადო ფუნქციების წარმოებულები. დავუბრუნდეთ R არეს და (1) განტოლების $z=\varphi(x, y)$ ამონახსნს, რომელიც ამ არეში იქნება ორი x და y ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ $F(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს აგრეთვე უწყვეტი კერძო წარმოებულები: F'_x და F'_y. მაშინ $\varphi(x, y)$ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. მართლაც, დავტოვოთ y მუდმივად და x-ს მივცეთ ნაზრდი Δx, რის შედეგადაც z-სათვის მივიღებთ Δz ნაზრდს, ისე როგორც ზემოთ გვაქვს:

$$F(x+\Delta x, y, z+\Delta z)-F(x, y, z)=$$
$$=\Delta x F'_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)+\Delta z F'_z(x, y, z+\theta'\Delta z)=0$$

აქედან

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)}{F'_z(x, y, z+\theta'\Delta z)};$$

როცა Δx ნულისაკენ მიისწრაფის, აგრეთვე Δz-ც ნულისაკენ მიისწრაფის, ვინაიდან z არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია. ამგვარად უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ზღვარისაკენ მიისწრაფის, და z აქვს კერძო წარმოებული x-ით:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}. \qquad (7)$$

სრულიად ასევე გვექნება:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}. \qquad (8)$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $F=0$ განტოლების ხარისხი z-ის მიმართ ტოლია m-ის, მაშინ ეს განტოლება განსაზღვრავს x და y ცვლადების m ფუნქციას. კერძო წარმოებულებს $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ [illegible]ბით ასევე ექნებათ m მნიშვნელობა x და y ცვლადთა მნიშვნელობის თითოეული სის-

ტემისათვის; მით უმეტეს, წინა ფორმულები იძლევა ამ კერძო წარმოებულებისათვის სრულიად გარკვეულ გამოსახვებს, თუ მარჯვენა ნაწილებში z-ის მნიშვნელობას შევცვლით იმ ფუნქციით, რომლისაგანაც ჩვენ ვეძებთ წარმოებულს.

მაგალითად, განტოლება

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

განსაზღვრავს ორ ფუნქციას:

$$+\sqrt{1-x^2-y^2} \text{ და } -\sqrt{1-x^2-y^2},$$

რომლებიც უწყვეტია, თუ $x^2+y^2<1$. კერძო წარმოებულები პირველი ფუნქციიდან იქნება:

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

მეორის კერძო წარმოებულებს ექნება შებრუნებული ნიშანი. იგივე მნიშვნელობები გვექნება თუ მხედველობაში მივიღებთ ფორმულებს:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

და მათში z-ს მისი ორი მნიშვნელობით შევცვლით.

35. გამოყენებები ფართეულებზე. თუ განვიხილავთ x, y, z-ს როგორც წერტილს დეკარტის კოორდინიტების სივრცეში, მაშინ ყოველი განტოლება

$$F(x, y, z)=0 \tag{9}$$

წარმოადგენს S ფართეულს. ვთქვათ (x_0, y_0, z_0) ამ ფართეულის A წერტილის კოორდინატებია; თუ F ფუნქცია უწყვეტია თავისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებით x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობათა მახლობლობაში და თუ ეს კერძო წარმოებულები ერთდროულად ნულად არ გადაიქცევიან A წერტილისათვის, მაშინ S ფართეულს A წერტილში გარკვეული მხები სიბრტყე აქვს. დავუშვათ, მაგალითად, რომ კერძო წარმოებული F'_z არ იქნება ნულის ტოლი $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ მნიშვნელობებისათვის. თუ ვიგულისხმებთ ფართეულის განტოლებას ამოხსნილად z-ის მიმართ, შეგვიძლია, ზოგადი თეორემის თანახმად, წარმოვიდგინოთ ის A წერტილის მახლობლად ასეთი სახით:

$$z=\varphi(x, y),$$

სადაც $\varphi(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია. მხები სიბრტყის განტოლება A წერტილში იქნება:

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (X-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (Y-y_0).$$

შევცვალოთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ მათი მნიშვნელობით წინა ფორმულებიდან: მაშინ მხები სიბრტყის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (X-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (Y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (Z-z_0)=0. \tag{10}$$

რომ ყოფილიყო $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$, ხოლო $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq 0$, მაშინ მივიღებდით y და z-ს დამოუკიდებელ ცვლადებად, ხოლო x-ს მათ ფუნქციად; ამ შემთხვევაში ჩვენ მივიდოდით იმავე (10) განტოლებაზე, რაც შეიძლება წინასწარ გვეგულისხმა მარცხენა ნაწილის სიმეტრიულობის თანახმად. სავსებით ასევე შეიძლება დავწეროთ $F(x, y)=0$ განტოლებით წარმოდგენილი წირის მხების განტოლება (x_0, y_0) წერტილში:

$$(X-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+(Y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0.$$

თუ გვაქვს ერთდროულად

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0,$$

მაშინ A წერტილი S ფართეულის განკუთრი წერტილია; მხებები სხვადასხვა წირებისა, რომლებიც დალაგებულია ფართეულზე და გაივლიან A წერტილში, შეადგენენ საზოგადოდ აქ არა სიბრტყეს, არამედ კონუსს. ამ შემთხვევას ჩვენ განვიხილავთ შემდგომ (თავი III).

უცხადო ფუნქციებზე ძირითადი თეორემის დამტკიცების დროს ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ წარმოებული F'_z ნულს არ ეტოლება. გეომეტრიულად ნათლად ჩანს, თუ რატომაა ეს პირობა აუცილებელი. მართლაც, თუ გვაქვს $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$ და $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq 0$, მაშინ S ფართეულის მხები სიბრტყე პარალელურია z ღერძის, და წრფე, z ღერძის პარალელური და გამავალი $x=x_0$, $y=y_0$ წრფის მახლობლად, ხვდება ფართეულს, საზოგადოდ, შეხების წერტილის მახლობლად მდებარე ორ წერტილში. ამგვარად (9) განტოლებას აქ ორი ამონახსნი აქვს, სადაც ორივე z_0-საკენ მიისწრაფის, როცა x და y მიისწრაფის შესაბამად x_0 და y_0-საკენ.

მაგალითიად, თუ გადავკვეთთ $x^2+y^2+z^2-1=0$ სფეროს $y=0$, $x=1+\varepsilon$ წრფით, მაშინ z-სათვის გვექნება ორი მნიშვნელობა, რომელნიც ნულისაკენ მიისწრაფის ε-თან ერთად,—ნამდვილი, როცა ε უარყოფითია, და წარმოსახვითი, როცა ε დადებითია.

36. უმაღლესი რიგის წარმოებულები. პირველი რიგის წარმოებულების ფორმულებში

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

მარჯვენა ნაწილები შეიძლება განვიხილოთ როგორც რთული ფუნქციები, რომლებშიც z დამხმარე ფუნქციის როლს ასრულებს. ამგვარად შეიძლება გამოვითვალოთ უმაღლესი წარმოებულები თანდათანობით რთულ ფუნქციათა გაწარმოების წესის გამოყენებით. ამასთანავე ამ უმაღლეს წარმოებულთა არსებობა დამოკიდებულია $F(x, y, z)$ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის კერძო წარმოებულთა არსებობაზე.

ეს წარმოებულები შეიძლება მივიღოთ უფრო მარტივი ხერხით, თუ გამოვიყენებთ შემდეგ დებულებას:

თუ დამოუკიდებელი ცვლადის რამოდენიმე ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას $F=0$, მაშინ მათი წარმოებულები დააკმაყოფილებენ განტოლებას, რომელიც მიიღება, თუ ნულს გაუტოლებთ F-ის წარმოებულს, აღებულს რთული ფუნქციიდან. მართლაც, თუ ფუნქცია F გახდება იგივურად ნული, როცა მასში შევცვლით ცვლადებს, რომლებზედაც ის დამოკიდებულია, დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებით, მაშინ იგივურად ნულის ტოლი იქნება F ფუნქციის წარმოებულიც. ეს თეორემა სამართლიანი იქნება იმ შემთხვევაშიც, როცა $F=0$ განტოლებით შებმული ფუნქციები დამოკიდებული არიან მრავალ დამოუკიდებელ ცვლადზე.

დავუშვათ ახლა, რომ ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ იმ უცხადო ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები, რომელიც განსაზღვრულია განტოლებით:

$$F(x, y)=0.$$

ვპოულობთ მიმდევრობით:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\,y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\,y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}\,y''=0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\,\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}\,y'+3\,\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}\,y'^2+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\,y''+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\,y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,y'y''+\frac{\partial F}{\partial y}\,y'''=0.$$

. . . .

აქედან შეიძლება მიმდევრობით განვსაზღვროთ $y', y'', y''', \ldots$

მაგალითი. თუ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია, მაშინ შეიძლება, უკუღმა, განვიხილოთ y როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო x როგორც y-ის უცხადო ფუნქცია, განსაზღვრული $y=f(x)$ განტოლებით. თუ x_0 მნიშვნელობისთვის, რომლისთვისაც $y_0=f(x_0)$, $f'(x)$ წარმოებული ნულს არ ეტოლება, მაშინ ძირითადი თეორემის თანახმად, არსებობს y-ის ერთად-ერთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $y=f(x)$ განტოლებას და $y=y_0$ მნიშვნელობისთვის ღებულობს x_0 მნიშვნელობას; ეს ფუნქცია ატარებს *შექცეული ფუნქციის* სახელწოდებას $f(x)$-ის მიმართ. რომ გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულები: $x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}\ldots$ საკმარისია ის რამოდენიმეჯერ გავაწარმოოთ y-ის როგორც დამოუკიდებელი ცვლადის მიხედვით. ეს იძლევა:

$$1=f'(x)\,x'_y,$$

$$0=f''(x)\,(x'_y)^2+f'(x)\,x''_{y^2},$$

$$0=f'''(x)\,(x'_y)^3+3f''(x)\,x'_y\,x''_{y^2}+f'(x)\,x'''_{y^3},$$

საიდანაც

$$x'_y=\frac{1}{f'(x)},\quad x''_{y^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2},\quad x'''_{y^3}=\frac{3\,[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5},\ldots$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ფორმულათა ეს სისტემა არ იცვლება, როცა გადასვამენ x'_y და $f'(x)$, x''_{y^2} და $f''(x)$, x'''_{y^3} და $f'''(x)$, ... ვინაიდან კავშირი ორ $y=f(x)$ და $x=\varphi(y)$ ფუნქციათა შორის, ცხადია, არის ურთიერთი.

ამ ფორმულების გამოყენებისათვის, ვიპოვოთ ყველა $y=f(x)$ ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$y'y'''-3y''^2=0.$$

თუ y-ს მივიღებთ როგორც დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო x-ს ფუნქციად, წინა განტოლებას მივცემთ ასეთ სახეს:

$$x'''_{y^3}=0.$$

მაგრამ ფუნქციები, რომლებისთვისაც მესამე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, არიან მხოლოდ მრავალწევრები არა უმაღლესი მეორე ხარისხისა. ამიტომ x-სათვის შემდეგი სახის გამოსახვა გვაქვს:

$$x=C_1y^2+C_2y+C_3,$$

სადაც C_1, C_2, C_3—სამი ნებისმიერი მუდმივია. ამ განტოლებას y-ის მიმართ თუ ამოვხსნით ვნახავთ, რომ ყველა ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ პირობას, მოთავსდებიან ფორმულაში:

$$y=a\pm\sqrt{bx+c},$$

სადაც a, b, c—სამი ნებისმიერი მუდმივია. ეს განტოლება წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის მთავარი ღერძი პარალელურია x ღერძის.

37. კერძო წარმოებულები. განვიხილოთ ახლა ორი ცვლადის უცხადო ფუნქცია, განსაზღვრული განტოლებით:

$$F(x,\ y,\ z)=0 \tag{11}$$

როგორც უკვე ვიცით, პირველი რიგის კერძო წარმოებულები განისაზღვრებიან ტოლობებიდან:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{12}$$

რომ მივიღოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, საკმარისია კვლავ გავაწარმოვოთ (12) ორივე განტოლება x და y-ის მიმართ; ეს მოგვცემს მხოლოდ სამ სხვადასხვა დამოკიდებულებას, ვინაიდან წარმოებული პირველი განტოლებიდან y-ის მიმართ იგივურია წარმოებულისა მეორედან x-ის მიმართ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ამგვარად შევვიძლია ვიპოვოთ მესამე და უმაღლესი რიგების წარმოებულები.

სრული დიფერენციალების გამოყენება საშუალებას იძლევა აქაც განვსაზღვროთ ერთდროულად ერთდაიმავე რიგის ყველა კერძო წარმოებული. ამისათვის საკმარისია ვისარგებლოთ შემდეგი თეორემით:

თუ რამდენიმე დამოუკიდებელი $x, y, z, \ldots$ ცვლადების $u, v, w, \ldots$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებას $F=0$, მაშინ მათი სრული დიფერენციალები დააკმაყოფილებენ განტოლებას $dF=0$, რომელიც მიიღება, თუ ავიღებთ სრულ დიფერენციალს F-დან, მივიღებთ რა ყველა ცვლადს, რომლებზედაც F დამოკიდებულია, დამოუკიდებელ ცვლადებად. რომ დავამტკიცოთ ეს თეორემა, დავუშვათ, რომ გვაქვს განტოლება $F(u, v, w)=0$, სადაც u, v, w არიან x, y, z, t დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციები. კერძო წარმოებულები u, v, w-დან აკმაყოფილებენ ოთხ განტოლებას:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=0;$$

თუ მათ გავამრავლებთ შესაბამად dx, dy, dz, dt-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=dF=0.$$

აქ კიდევ ერთხელ ჩანს დიფერენციალური აღნიშვნის უპირატესობა, ვინაიდან წინა თანაფარდობა არ არის დამოკიდებული არც შერჩევაზე და არც დამოუკიდებელ ცვლადთა რიცხვზე. რომ გვექნეს დამოკიდებულება მეორე რიგის დიფერენციალებს შორის, საკმარისა გამოვიყენოთ ძირითადი თეორემა $dF=0$ განტოლებაზე, რომელიც უნდა განვიხილოთ როგორც განტოლება u, v, w, du, dv, dw-ს შორის და ა. შ. ამასთან საჭიროა მხოლოდ შევცვალოთ ნულებით ყველა პირველი რიგზე მაღალი დიფერენციალი იმ ცვლადთა, რომლებიც მიღებულია როგორც დამოუკიდებელი.

გამოვიყენოთ ეს ხერხი უცხადო ფუნქციის სხვადასხვა რიგის სრული დიფერენციალების გამოსათვლელად, სადაც ფუნქცია განსაზღვრულია მე-(11) განტოლებით, ხოლო x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია. გვაქვს:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ორ პირველ განტოლებას შეუძლია შეცვალოს ხუთი მე-(12) და მე-(13) განტოლება. dz-ის გამოსახვიდან მიიღება პირველი რიგის ორი წარმოებული, d^2z-ის გამოსახვიდან—სამი წარმოებული მეორე რიგის და ა. შ. განვიხილოთ მაგალითად, განტოლება:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1;$$

მისი ორჯერ გაწარმოებით, ვპოულობთ:

$$Axdx+A'ydy+A''zdz=0,$$

$$A\,dx^2+A'dy^2+A''dz^2+A''zd^2z=0;$$

პირველი განტოლებიდან გვაქვს:

$$dz=-\frac{Ax\,dx+A'y\,dy}{A''z},$$

და dz-ის ამ მნიშვნელობას თუ შევიტანთ მეორეში, მივიღებთ:

$$d^2z=-\frac{A(Ax^2+A''z^2)\,dx^2+2AA'\,xy\,dx\,dy+A'\,(A'y^2+A''z^2)\,dy^2}{A''^2z^3}.$$

ამგვარად, თუ ვისარგებლებთ მონჟის აღნიშვნებით, გვექნება:

$$p=-\frac{Ax}{A''z},\qquad q=-\frac{A'y}{A''z},$$

$$r=-\frac{A\,(Ax^2+A''z^2)}{A''^2z^3},\quad s=-\frac{AA'\,xy}{A''^2z^3},\quad t=-\frac{A'\,(A'y^2+A''z^2)}{A''^2z^3}$$

მოყვანილი მეთოდი, ცხადია, სავსებით ზოგადია; ის გამოიყენება როგორიც არ უნდა იყოს დამოუკიდებელ ცვლადთა რიცხვი ან საძიებელ კერძო წარმოებულთა რიგი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ $z=f(x, y)$ არის ორი x და y ცვლადის ფუნქცია. უკანასკნელ განტოლებაში y და z მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადებად, ხოლო x ამ ორი ცვლადის უცხად ფუნქციად და ვიპოვოთ პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალები: dx და d^2x. გვაქვს:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

ვინაიდან y და z მივიღეთ დამოუკიდებელ ცვლადებად, ამიტომ უნდა დავუშვათ

$$d^2y=d^2z=0;$$

ამის გამო, უკანასკნელი განტოლების კვლავ გადიფერენციალებით, ვპოულობთ:

$$0=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x.$$

თუ ვისარგებლებთ მონჟის აღნიშვნებით პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულთათვის $f(x, y)$ ფუნქციიდან, შეგვიძლია წინა განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

$$0=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2+p\,d^2x;$$

პირველიდან გამოგვყავს:

$$dx=\frac{dz-q\,dy}{p};$$

dx-ის ამ გამოსახვას თუ ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$d^2x = -\frac{r\,dz^2 + 2\,(ps - qr)\,dy\,dz + (q^2r - 2p\,qs + p^2t)\,dy^2}{p^3}.$$

x-ის პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს, რომლებიც განიხილებიან როგორც z და y ცვლადთა ფუნქციები, ექნებათ შემდეგი გამოსახვა:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{q}{p},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{r}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} = \frac{qr - ps}{p^3}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2p\,qs - p^2t - q^2r}{p^3}.$$

როგორც ამ ფორმულების გამოყენება, ვიპოვოთ ყველა $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს $q^2r + p^2t = 2p\,qs$ განტოლებას. თუ $z = (x, y)$ განტოლებაში x-ს მივიღებთ ფუნქციად ხოლო y და z დამოუკიდებელ ცვლადებად, მაშინ წინა განტოლება გადაიქცევა $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$ განტოლებად. ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ $\frac{\partial x}{\partial y}$ არ არის დამოკიდებული y-ზე; მაშასადამე,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \varphi(z),$$

სადაც $\varphi(z)$ არის z-ის ნებითი ფუნქცია. ეს ახალი განტოლება შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial}{\partial y}\,[x - y\,\varphi(z)] = 0,$$

ის გამოსახავს, რომ $x - y\varphi(z)$ არ არის დამოკიდებული y-ზე. ამიტომ

$$x = y\varphi(z) + \psi(z),$$

სადაც $\psi(z)$ არის z-ის სხვა ნებისმიერი ფუნქცია. ჩვენ მივიღებთ ყველა საძიებელ ფუნქციას $z = f(x, y)$, თუ წინა განტოლებას ამოვხსნით z-ის მიმართ. ეს განტოლება წარმოადგენს ფართეულს, წარმოქმნილს წრფის ძრაობით, რომელიც რჩება xy სიბრტყის პარალელური.

38. განტოლებათა სისტემა. ჯერ შემოვიღოთ დეტერმინანტი, რომელიც შემდეგში მნიშვნელოვან როლს ითამაშებს. ვთქვათ $F_1, F_2, \ldots, F_n$ არის ცვლადების $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n ფუნქცია, რომლებიც შეიძლება დამოკიდებული იყვნენ, გარდა ამისა, სხვა ცვლადებზედაც. დეტერმინანტს, შედგენილს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებისაგან

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{14}$$

ეწოდება იაკობიანი ან ფუნქციონალური დეტერმინანტი $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ფუნქციების $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადების მიმართ. მას ამგვარად აღნიშნავენ:

$$\frac{D\,(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

მაშინ უცხადო ფუნქციის არსებობის ზოგადი თეორემა ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

ვთქვათ (E) არის $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_n$ ცვლადებზე დამოკიდებული ისეთ განტოლებათა სისტემა,

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1,2, \ldots, n), \tag{E}$$

რომელთა მარცხენა ნაწილი ნულად გადაიქცევა შემდეგ მნიშვნელობათა სისტემისათვის:

$$x_1=\overset{0}{x}_1, \ldots, x_p=\overset{0}{x}_p, \quad y_1=\overset{0}{y}_1, \ldots, y_n=\overset{0}{y}_n.$$

თუ F_i ფუნქციები არიან უწყვეტი და აქვთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები y_k ცვლადის მიმართ, რომლებიც უწყვეტია მნიშვნელობათა ამ სისტემის მახლობლობაში, და თუ $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ იაკობიანი ნულს არ ეტოლება, როცა $x_1=\overset{0}{x}_1, \ldots, y_n=\overset{0}{y}_n$, მაშინ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა ფუნქციათა

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, y_n=\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ (E) განტოლებებს, ღებულობენ შესაბამად $\overset{0}{y}_1, \ldots, \overset{0}{y}_n$ მნიშვნელობებს, როცა $x_1=\overset{0}{x}_1, \ldots, x_p=\overset{0}{x}_p$, და არიან უწყვეტი მნიშვნელობათა ამ სისტემის მახლობლობაში.

ვინაიდან თეორემა უკვე დამტკიცებულია $n=1$ მნიშვნელობისათვის, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ თუ ის სამართლიანია $n-1$ უცნობი ფუნქციით შედგენილ $n-1$ განტოლებათა სისტემისათვის, მაშინ ის ვრცელდება n უცნობი ფუნქციის n განტოლებათა სისტემაზედაც. დაშვების თანახმად, ზემოთ დაწერილი Δ დეტერმინანტი, განსხვავდება ნულისაგან $\overset{0}{x}_i$, $\overset{0}{y}_i$ მნიშვნელობათათვის; მაშასადამე, არ შეიძლება მისი ყველა ელემენტი იყოს ნული. ამრიგად ჩვენ შეგვიძლია, დავუშვათ, შევცვლით რა, თუ ეს საჭირო იქნება, ინდექსების რიგს, რომ წარმოებული $\left(\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\right)_0$ ნულს არ ეტოლება. მაშინ, § 32-ში დამტკიცებული თეორემის თანახმად, განტოლება:

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \tag{15}$$

განსაზღვრავს $x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ცვლადების ფუნქციას:

$$y_n=f(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}), \tag{16}$$

რომელიც ეტოლება $\overset{0}{y}_n$-ს როცა $x_1=\overset{0}{x}_1, \ldots, y_{n-1}=\overset{0}{y}_{n-1}$ და რომელიც არის უწყვეტი ამ მნიშვნელობათა მახლობლობაში. თუ y_n-ს შევცვლით ამ f ფუნქციით

(E) სისტემის პირველ $n-1$ განტოლებაში, მივიღებთ ახალ სისტემას $n-1$ განტოლებისას $n-1$ უცნობით $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$:

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})=0, \ldots, \Phi_{n-1}=0, \tag{17}$$

სადაც ნაგულისხმევია

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{n-1}) = F_i(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{n-1}, f);$$

სისტემა, შედგენილი მე-(16) და მე-(17) განტოლებებით, ცხადია, ტოლფასია (E) სისტემის. დავამტკიცოთ, რომ Φ_i ფუნქციათა იაკობიანი:

$$\delta = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}$$

ნულისაგან განსხვავდება როცა $x_1 = \overset{0}{x}_1, \ldots, y_{n-1} = \overset{0}{y}_{n-1}$. მართლაც, ეს დეტერმინანტი.

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix}$$

არის ჯამი 2^{n-1} დეტერმინანტის; თუ მოვაშორებთ ყველა ნულის ტოლ დეტერმინანტს, მაშინ მივიღებთ:

$$\delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \ldots, y_{n-1})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{n-2}, y_n)}.$$

მეორეს მხრით, $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ წარმოებულები მიიღებიან (§ 37)-ის ტოლობებით:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (i=1,2,\cdots, n-1) \tag{18}$$

ჩვენ შეგვიძლია, მაშასადამე, გადავწეროთ წინა განტოლება, მისი ორივე ნაწილის $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$-ზე გამრავლებით შემდეგნაირად:

$$\delta\frac{\partial F_n}{\partial y_n} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}\frac{\partial F_n}{\partial y_n} - \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \ldots, y_{n-1})}\frac{\partial F_n}{\partial y_1} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_n)}\frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}; \tag{19}$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს Δ-ს უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებად გაშლას. ამგვარად ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \tag{20}$$

და, მაშასადამე, ĩ იაკობიანი ნულისაგან განსხვავდება, როცა

$$x_1=\overset{0}{x_1}, \ldots, y_{n-1}=\overset{0}{y}_{n-1}.$$

ვინაიდან გამოთქმული დებულება სამართლიანია $n-1$ განტოლებისათვის, ამიტომ მე-(17) განტოლებანი განსაზღვრავენ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ცვლადების $y_1=\varphi_1, \ldots, y_{n-1}=\varphi_{n-1}$ ფუნქციათა სისტემას, თუ მათ ჩავსვამთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{n-1})$ ფუნქციაში, ჩვენ მივიღებთ y_n-ის მნიშვნელობას.

39. წარმოებულთა გამოთვლა. როცა F_j ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, მაშინ უცხადო ფუნქციებს, განსაზღვრულს (E) განტოლებებით, აგრეთვე აქვთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები x_i ცვლადთა მიხედვით. ავიღოთ, მაგალითად, ორი განტოლების სისტემა:

$$F_1(x, y, z, u, v)=0, \quad F_2(x, y, z, u, v)=0. \tag{21}$$

დავტოვოთ y და z მუდმივებად, და x-ს მივცეთ ნაზრდი Δx, და ვთქვათ Δu და Δv არის u და v ფუნქციების სათანადო ნაზრდები. (21) განტოლება შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=0,$$

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}=\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=0,$$

მასთან $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$ ნულისაკენ მიისწრაფიან, როცა Δx, Δu, Δv-იც ნულისაკენ მიისწრაფიან. აქედან ჩვენ ვპოულობთ:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta'\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)};$$

როცა Δx ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ Δu, Δv, და მაშასადამე $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$-იც აგრეთვე ნულისაკენ მიისწრაფიან. ამრიგად, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ფარდობას აქვს ზღვარი, სხვანაირად, u-ს აქვს კერძო წარმოებული x ცვლადის მიხედვით:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

ამგვარადვე შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ ფარდობა მიისწრაფის სასრული $\frac{\partial v}{\partial x}$ ზღვარისაკენ, რომელიც მოცემულია ანალოგიური ფორმულით. პრაქტიკულად ეს წარმოებულები მოიძებნება განტოლებებიდან:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

და ამნაირადვე ვპპოვით კერძო წარმოებულებს y და z ცვლადების მიხედვით.

შემდეგი წარმოებულები გამოიანგარიშება მიმდაგვარადვე, როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში. კიდევ უნდა შევნიშნოთ, რომ როცა რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადი გვაქვს, მოსახერხებელია გამოვიანგარიშოთ სრული დიფერენციალები, რომ აქედან გამოვიყვანოთ ერთიდაიმავე რიგის ყველა კერძო წარმოებული. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ ჩვენ გვაქვს სამი x, y, z ცვლადის ორი, u და v ფუნქცია, რომლებიც განსაზღვრულია (21) ტოლობებით; პირველი რიგის სრული დიფერენციალები du და dv მიიღება განტოლებებით:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz+\frac{\partial F_1}{\partial u}du+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz+\frac{\partial F_2}{\partial u}du+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv=0.$$

შემდეგ, d^2u და d^2v-ს ჩვენ მივიღებთ განტოლებიდან:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_1}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_1}{\partial v}d^2v=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial v}dv\right)^{(2)}+\frac{\partial F_2}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_2}{\partial v}d^2v=0.$$

და ა. შ. განტოლებებში, რომლებიც განსაზღვრავენ d^nu და d^nv-ს, დეტერმინანტი, შედგენილი ამ დიფერენციალების კოეფიციენტებისაგან, როგორიც არ უნდა იყოს n, ეტოლება $\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}$ იაკობიანს, რომელიც, დაშვების თანახმად ნულისაგან განსხვავდება.

40. ფუნქციის გარდაქმნა. ვთქვათ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ არის n დამოუკიდებელი $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ ცვლადის n ფუნქცია; დავუშვათ, რომ იაკობიანი:

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

ნულს არ ეტოლება იგივურად. მაშინ n განტოლება

$$u_1=\varphi_1(x_1, \ldots, x_n),\ u_2=\varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n=\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \qquad (22)$$

განსაზღვრავს უკუღმა $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ს როგორც $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების ფუნქციებს. მართლაც, საკმარისია განვიხილოთ სისტემა მნიშვნელობათა $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n$,

რომლისთვისაც იაკობის დეტერმინანტი ნულს არ ეტოლება; თუ $\overset{0}{u}_1, \overset{0}{u}_2, \ldots, \overset{0}{u}_n$-ით აღნიშნავენ $u_1, u_2, \ldots, u_n$-ის სათანადო მნიშვნელობებს, მაშინ ძირითადი თეორემის თანახმად არსებობს ფუნქციათა სისტემა:

$$x_1=\psi_1(u_1, \ldots, u_n),\ x_2=\psi_2(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n=\psi_n(u_1, \ldots, u_n),$$

რომლებიც აკმაყოფილებს (22) განტოლებებს და ღებულობს $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n$, მნიშვნელობებს როცა $u_1=\overset{0}{u}_1, u_2=\overset{0}{u}_2, \ldots, u_n=\overset{0}{n}_n$. ψ ფუნქციას ეწოდება შ ე ქ ც ე უ ლ ი φ ფუნქციის მიმართ. ამ ფუნქციათა პოვნას, გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა ან ი ნ ვ ე რ ს ი ა ეწოდება.

შექცეული ფუნქციის წარმოებულების გამოსაანგარიშებლად საკმარისია გამოვიყენოთ ძირითადი წესები. ასე, მაგალითად, ორი ფუნქციის შემთხვევაში

$$u=f(x, y),\ v=\varphi(x, y),$$

თუ განვიხილავთ შექცევით u და v-ს როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს, ხოლო x და y-ს როგორც მათ ფუნქციებს, ორ ტოლობიდან

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,\ dv=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

მივიღებთ:

$$dx=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}du-\frac{\partial f}{\partial y}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},\quad dy=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}du+\frac{\partial f}{\partial x}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

აქედან გვაქვს ფორმულები:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

41. სივრცის მრუდის მხები. განვიხილოთ C მრუდი შემდეგი ორი განტოლების სისტემით წარმოდგენილი:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z)=0,\\ F_2(x, y, z)=0.\end{aligned}\right\}\qquad (23)$$

ვთქვათ x_0, y_0, z_0 ამ მრუდის M_0 წერტილის კოორდინატებია; დავუშვათ, რომ ერთი მაინც იაკობის სამი დეტერმინანტიდან

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y},\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z},\quad \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

განსხვავდება ნულისაგან, თუ მასში x, y, z-ს შევცვლით x_0, y_0, z_0-ით. გარკვევისათვის დავუშვათ, რომ $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}$ იაკობიანი M_0 წერტილის კოორდინატებისათვის ნულს არ ეტოლება; მაშინ (23) განტოლებიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ:

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x),$$

სადაც φ და ψ არის უწყვეტი x-ის ფუნქციები, რომლებიც შესაბამად y_0 და z_0-ად გადაიქცევიან, როცა $x=x_0$. ამ შემთხვევაში C მრუდის მხები M_0 წერტილში წარმოიდგინება ორი განტოლებით:

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(x_0)},$$

სადაც $\varphi'(x)$ და $\psi'(x)$ წარმოებულები განისაზღვრებიან ტოლობებით:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x)=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x)=0.$$

ამ განტოლებებში დავუშვათ, რომ $x=x_0$, $y=y_0$; $z=z_0$ და $\varphi'(x_0)$ და $\psi'(x_0)$ შევცვალოთ შესაბამად $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$ და $\frac{Z-z_0}{X-x_0}$-ით. მაშინ მხების განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0,\\&\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ანუ

$$\frac{X-x_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}\right]_0}=\frac{Y-y_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}\right]_0}=\frac{Z-z_0}{\left[\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}\right]_0}.$$

მიღებულ შედეგს ადვილად მივცემთ გეომეტრიულ განმარტებას. (23) განტოლებები წარმოადგენენ ორ S_1 და S_2 ფართეულს, რომელთა გადაკვეთის წირი არის C მრუდი; (24) განტოლებანი წარმოადგენენ ორ მხებ სიბრტყეს ამ ორი ფართეულისა M_0 წერტილში; ასე რომ C მრუდის მხები არის ამ ორი მხები სიბრტყის გადაკვეთის წრფე.

ფორმულები კარგავს აზრს, როცა სამი ზემოთ დაწერილი იაკობის დეტერმინანტი ისპობა ერთდროულად x_0, y_0, z_0 კოორდინატებისათვის. თუ ამას აქვს ადგილი, მაშინ (24) ორი განტოლება დაიყვანება ერთზე, და S_1 და S_2 ფართეულები ეხებიან ერთმანეთს M_0 წერტილში. როგორც ჩვენ ქვემოთ ვნახავთ, ამ შემთხვევაში ამ ორი ფართეულის გადაკვეთის წირი შედგება, საზოგადოდ, M_0 წერტილში გამავალ რამდენიმე სხვადასხვა შტოსაგან.

II. განკუთრი წერტილები. მაქსიმუმი და მინიმუმი

42. განკუთრი წერტილები. თუ ერთდროულად $\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=0$, მაშინ (x_0, y_0) წერტილი არის $F(x, y)=0$ განტოლებით წარმოდგენილი მრუდის **განკუთრი წერტილი**. დავუშვათ, რომ F—ფუნქციის მეორე რიგის სამი კერძო წარმოებული ნულს არ ეტოლება, როცა $x=x_0$, $y=y_0$, და რომ ეს წარმოებულები მესამე რიგის წარმოებულებთან ერთად უწყვეტნია (x_0, y_0) წერტილის მახლობლობაში. ამ შემთხვევაში C მრუდის განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$0=F(x, y)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0),\\ y_0+\theta(y-y_0)}} \tag{25}$$

მასთან მესამე რიგის წარმოებულებში x და y უნდა შეიცვალოს შესაბამად $x_0+\theta(x-x_0)$ და $y_0+\theta(y-y_0)$-ით. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}$ წარმოებული ნულს არ ეტოლება, ვინაიდან საკმარისია შევცვალოთ კოორდინატთა ღერძების მიმართულება, რომ მივიდეთ ამ შემთხვევამდე. (25) განტოლებაში თუ დაუშვებთ $y-y_0=t(x-x_0)$ და შემდეგ გავყოფთ $(x-x_0)^2$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}+t^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}+(x-x_0)P(x-x_0, t)=0, \tag{26}$$

სადაც $P(x-x_0, t)$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც რჩება მუდმივად, როცა x მიისწრაფის x_0-საკენ. ვთქვათ t_1 და t_2 ორი ამონახსნია განტოლების:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}=0.$$

თუ ეს ამონახსნები ნამდვილია, ე. ი. თუ

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2>\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2},$$

მაშინ (26) განტოლება შეიძლება აგრეთვე შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(t-t_1)(t-t_2)+(x-x_0)P=0.$$

$x=x_0$ მნიშვნელობისათვის ამ განტოლებას აქვს ორი სხვადასხვა ამონახსნი: $t=t_1$, $t=t_2$. თუ x მიისწრაფის x_0-საკენ მაშინ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი, რომლებიც მიისწრაფიან შესაბამად t_1 და t_2-საკენ; ეს შეიძლება დავამტკიცოთ

იმავე მსჯელობათა განმეორებით, რომლებითაც ჩვენ ვსარგებლობდით უცხადო ფუნქციათა არსებობის დასამტკიცებლად. თუ დავუშვებთ, მაგალითად, $t=t_1+u$, მივიღებთ განტოლებას x და u-ს შორის:

$$u(t_1-t_2+u)+(x-x_0)Q(x,\ u)=0, \tag{27}$$

მასთან $Q(x, u)$ რჩება სასრული, როცა x მიისწრაფის x_0-საკენ, ხოლო u — ნულისაკენ. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $t_1-t_2>0$, და აღვნიშნოთ M-ით $Q(x, u)$-ს აბსოლუტური სიდიდის ზედა საზღვარი და m-ით t_1-t_2+u სიდიდის ქვედა საზღვარი, როცა x იცვლება x_0-h-დან x_0+h-მდე და u იცვლება $-h$-დან $+h$-მდე, სადაც h დადებითი რიცხვია, ნაკლები ვიდრე t_1-t_2. ვთქვათ ε დადებითი რიცხვია, ნაკლები h-ზე, და η — მეორე დადებითი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$\eta<h, \quad \eta<\frac{m}{M}\varepsilon.$$

თუ (27) განტოლებაში x-ს მივცემთ ისეთ მნიშვნელობას, რომ $|x-x_0|$ იყოს ნაკლები η-ზე, მაშინ u-ს მაგიერ $-\varepsilon$ და $+\varepsilon$-ს ჩასმის შედეგები მიიღება სხვადასხვა ნიშნებით; მაშასადამე, ამ განტოლებას აქვს ამონახსნი, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფის, როცა x მიისწრაფის x_0-საკენ, და ამრიგად, (25) განტოლებას აქვს შემდეგი სახის ამონახსნი:

$$y=y_0+(x-x_0)(t_1+\alpha),$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა $x-x_0$-თან ერთად. ეს გვიჩვენებს, რომ (x_0, y_0) წერტილში გაივლის C მრუდის შტო, რომელიც ეხება წრფეს:

$$y-y_0=t_1(x-x_0).$$

ამგვარადვე ჩვენ შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ (x_0, y_0) წერტილში გადის მრუდის მეორე შტო, რომელიც ეხება $y-y_0=t_2(x-x_0)$ წრფეს. M_0 წერტილი ო რ ჯ ე რ ა დ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ა ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა მ ხ ე ბ ი თ,[1] და ჩვენ მივიღებთ ორი მხების განტოლებას ამ ორჯერად წერტილში, თუ $(x-y_0)$, $(y-y_0)$-ის მიმართ მეორე ხარისხის წევრთა ერთობლიობას (25) განტოლებაში გავუტოლებთ ნულს.

თუ $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\, \partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}<0$, მაშინ წერტილი (x_0, y_0) ო რ ჯ ე რ ა დ ი გ ა ნ-

---

[1]) არ შეიძლება არსებობდეს ორჯერად წერტილში გამავალი მრუდის ორზე მეტი შტო. მართლაც, დავუშვათ, რომ მრუდის განტოლებას აქვს (25) სახე და კოეფიციენტი $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}$ ნულს არ ეტოლება; ეს პირობა მუდამ შეიძლება ჩაითვალოს შესრულებულად კოორდინატთა ღერძების სათანადოდ შერჩევის გზით. რომ ამ განტოლებას ჰქონოდა სამი ფესვი y_1, y_2, y_3, რომლებიც ნულისაკენ მიისწრაფის x-თან ერთად, მაშინ $F'_y(x, y)=0$ განტოლებას, როლის თეორემის ძალით, ექნებოდა ორი ფესვი მაინც, აგრეთვე ნულისაკენ მიმსწრაფი. მაგრამ ამ განტოლებას აქვს ასეთი სახე: $2bx+2cy+\varphi(x, y)=0$, მასთან $\varphi(x, y)$ და $\varphi'_y(x, y)$ ნულად იქცევა როცა $x=y=0$. მაშასადამე, ამ განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფის x-თან ერთად (§ 32).

მხოლოებული წერტილია. საკმაოდ მცირე რადიუსიან წრის შიგნით, რომლის ცენტრი M_0 წერტილშია, $F(x, y)=0$ განტოლების მარცხენა ნაწილი ნულად იქცევა მხოლოდ M_0 წერტილზე. მართლაც, თუ მივიღებთ M_0-ის მახლობლად მყოფ რომელიმე (x, y) წერტილის კოორდინატებად, გამოსახვებს:

$$x=x_0+\rho\cos\varphi,\ y=y_0+\rho\sin\varphi,$$

მივიღებთ:

$$F(x,y)=\frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\partial^2F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2F}{\partial x_0\partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi+\rho L\right],$$

სადაც L-ს აქვს სასრული მნიშვნელობა, როცა ρ მიისწრაფის ნულისაკენ. ვთქვათ H არის L-ის აბსოლუტური სიდიდის ზედა საზღვარი, როცა ρ რჩება ნაკლები რომელიმე დადებით r რიცხვზე. φ-ს ცვლილების დროს 0-დან 2π-მდე სამწევრი:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2F}{\partial x_0\partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi$$

ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, ვინაიდან მას აქვს წარმოსახვითი ფესვები; ვთქვათ m არის მისი აბსოლუტური სიდიდის ქვედა საზღვარი. ცხადია, რომ არცერთი წერტილისათვის, რომელიც აღებულია $\rho<\frac{m}{H}$ რადიუსიან წრის შიგნით, კოეფიციენტი ρ^2-თან არ შეიძლება გახდეს ნული; ამგვარად ამ წრის შიგნით $F(x,y)=0$ განტოლებას არ აქვს არავითარი ამოხსნა, გარდა $\rho=0$, ე. ი. $x=x_0$, $y=y_0$.

თუ $\left(\frac{\partial^2F}{\partial x_0\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2F}{\partial y_0^2}=0$, მაშინ ორივე მხები ორჯერად წერტილში არიან თანამთხვეული, და ზოგად შემთხვევაში არსებობს მრუდის ორი შტო, რომლებიც ეხებიან ერთდაიმავე წრფეს და ჰქმნიან უკუქცევის წერტილს. ამ შემთხვევის სრული გარჩევა მოითხოვს მეტად ზუსტ გამოკვლევას, რომელსაც ჩვენ ქვემოთ შევასრულებთ. შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ მრუდის სახის შესაძლო შემთხვევათა სხვადასხვაობა აქ გაცილებით ფართეა, ვიდრე წინად გამოკვლეულ ორ შემთხვევაში, როგორც ეს შემდეგი მაგალითებიდან ჩანს.

მრუდს $y^2=x^3$ კოორდინატთა სათავეში აქვს პირველი სახის უკუქცევის წერტილი, ორი შტოთი, რომლებიც ეხება x ღერძს და დალაგებული არიან Oy-ის მარჯვნით მხების ორივე მხარეზე. მრუდს: $y^2-2x^2y+x^4-x^5=0$ კოორდინატთა სათავეზე აქვს მეორე სახის უკუქცევის წერტილი; მრუდის ორი შტო, რომლებიც ეხება x ღერძს, დალაგებული არიან აქ მხების ერთ მხარეზე. მართლაც, მრუდის განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$$

და x-ის მეტად მცირე მნიშვნელობისათვის y-ის ორივე მნიშვნელობას ერთი და იგივე ნიშანი აქვს, მაგრამ ისინი ნამდვილია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა x არის დადებითი. მრუდი:

$$x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$$

შედგება ორი შტოსაგან, რომლებსაც არ აქვთ არავითარი განსაკუთრებულებანი; ორივე შტო კოორდინატთა სათავეზე ეხება x ღერძს. მართლაც, ამ განტოლებიდან მივიღებთ:

$$y=\frac{3x^2\pm x^3\sqrt{8-x^2}}{1+x^2};$$

მრუდის შტოები ეთანადებიან ორ ნიშანს ფესვის წინ: მათ კოორდინატთა სათავეზე არ აქვთ არავითარი განსაკუთრებულებანი.

შესაძლოა აგრეთვე მოხდეს, რომ მრუდი შედგენილია ორი თანამთხვეული შტოსაგან, როგორც, მაგალითად, მრუდი წარმოდგენილი განტოლებით:

$$F(x,\ y)=y^2-2x^2y+x^4=0;$$

$(x,\ y)$ წერტილის სიბრტყეზე გადანაცვლებისას განტოლების მარცხენა ნაწილი ნულად იქცევა, ნიშნის შეუცვლელად.

დასასრულ, წერტილი $(x_0,\ y_0)$ შეიძლება იყოს ორჯერადი განმხოლოებული წერტილი; ასე მაგალითად $y^2+x^4+y^4=0$ მრუდისათვის, კოორდინატთა სათავე ორჯერადი განმხოლოებული წერტილია.

43. ფართეულის კონუსური წერტილები. სრულიად ასევე $F(x,\ y,\ z)=0$ განტოლებით წარმოდგენილ S ფართეულის M_0 წერტილს ეწოდება ამ ფართეულის განკუთრი წერტილი თუ ამ წერტილის x_0, y_0, z_0 კოორდინატები ნულად აქცევენ პირველი რიგის სამ წარმოებულს:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=0,\ \ \frac{\partial F}{\partial y_0}=0,\ \ \frac{\partial F}{\partial z_0}=0.$$

ამ შემთხვევაში ზემოთ გამოყვანილი (§ 35) მხები სიბრტყის განტოლება იქცევა იგივეობად. თუ M_0 წერტილში მეორე რიგის ყველა ექვსი კერძო წარმოებული ერთდროულად ნულს არ გაუტოლდებიან, მაშინ S ფართეულზე მდებარე და M_0 წერტილში გამავალ ყველა მრუდის მხებთა ადგილი იქნება მეორე რიგის კონუსი. მართლაც, ვთქვათ

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t)$$

არის S ფართეულზე მდებარე C მრუდის განტოლება. ვინაიდან ფუნქციები: $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ აკმაყოფილებენ $F(x,\ y,\ z)=0$ განტოლებას, ამიტომ პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალებს შორის არსებობს დამოკიდებულება:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0.$$

როცა $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ პირველი ტოლობა იქცევა იგივეობად, ხოლო მეორე ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x_0^2}dx^2+\frac{\partial^2F}{\partial y_0^2}dy^2+\frac{\partial^2F}{\partial z_0^2}dz^2+$$

$$+2\frac{\partial^2F}{\partial x_0\,\partial y_0}dx\,dy+2\frac{\partial^2F}{\partial y_0\,\partial z_0}dy\,dz+2\frac{\partial^2F}{\partial x_0\,\partial z_0}dx\,dz=0.$$

ჩვენ მივიღებთ მხებთა ადგილს, თუ გამოვრიცხავთ dx, dy, dz-ს ამ განტოლებიდან და მხების შემდეგი განტოლებიდან:

$$\frac{X-x_0}{dx}=\frac{Y-y_0}{dy}=\frac{Z-z_0}{dz};$$

ეს იძლევა მეორე რიგის (T) კონუსის განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(X-x_0)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(Y-y_0)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2}(Z-z_0)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}(X-x_0)(Y-y_0)+$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial z_0}(Y-y_0)(Z-z_0)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}(X-x_0)(Z-z_0)=0. \qquad (28)$$

თუ $F(x, y, z)$-ზე გამოვიყენებთ ტეილორის ზოგად თეორემას და გავაგრძელებთ გაშლას მესამე რიგის წევრებამდე, შეგვიძლია S ფართეულის განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$0=F(x, y, z)=\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0)\\ y_0+\theta(y-y_0)\\ z_0+\theta(z-z_0)}}, \qquad (29)$$

მასთან მესამე რიგის წარმოებულებში x_0, y_0, z_0 უნდა შეიცვალოს $x_0+\theta(x-x_0)$, $y_0+\theta(y-y_0)$, $z_0+\theta(z-z_0)$-ით. ჩვენ მივიღებთ (T) კონუსის განტოლებას, თუ (29) განტოლებაში ავიღებთ მხოლოდ მეორე ხარისხის წევრებს $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$-ის მიმართ.

დავუშვათ ჯერ, რომ (28) განტოლება წარმოადგენს ნამდვილ კონუსს. გადავკვეთოთ S ფართეული და (T) კონუსი P სიბრტყით, რომელიც გაივლის ამ კონუსის ორ სხვადასხვა G, G' შემქმნელზე. რომ მივიღოთ S ფართეულის ამ P სიბრტყესთან გადაკვეთის წირის განტოლება, ავიღოთ კოორდინატთა ღერძები ისე, რომ P სიბრტყე გახდეს xy სიბრტყის პარალელური: მაშინ გადაკვეთის წირის განტოლების მისაღებად საკმარისია დავუშვათ (29) განტოლებაში $z=z_0$. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ მრუდისთვის M_0 წერტილი არის ორჯერადი წერტილი ნამდვილი მხებებით, და გადაკვეთის წირი შედგება მრუდის ორი შტოსგან, რომლებიც ეხებიან შესაბამად ორ G, G' შემქმნელს. M_0 წერტილის მახლობლობაში ფართეულის ფორმა ანალოგიურია იმ ფორმისა, რომელიც აქვს წვეროს მახლობლობაში მეორე რიგის კონუსის ორ კალთას; აქედან წარმოიშვა კ ო ნ უ ს უ რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს სახელწოდება, რომელსაც ანიჭებენ M_0 წერტილს.

თუ (28) განტოლება წარმოსახვით კონუსს წარმოადგენს, მაშინ M_0 წერტილი არის S ფართეულის განკუთრი განმხოლოებული წერტილი. თუ ამ წერტილს ცენტრად მივიღებთ, შეიძლება მისგან შემოვწეროთ სფერო

იმდენად მცირე რადიუსით, რომ ამ სფეროს შიგნით $F(x, y, z)=0$ განტოლებას არ ექნეს არავითარი სხვა ამოხსნა, გარდა $x=x_0, y=y_0, z=z_0$. მართლაც, ვთქვათ M წერტილი არის M_0-ის მახლობლობაში მდებარე წერტილი, ρ— მანძილი MM_0, ხოლო α, β, γ — MM_0 წრფის მიმმართველი კოსინუსები. თუ ჩვენ დავუშვებთ:

$$x=x_0+\rho\alpha,\ y=y_0+\rho\beta,\ z=z_0+\rho\gamma,$$

მაშინ $F(x, y, z)$ გადაიქცევა

$$F(x, y, z)=\frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\beta^2+\cdots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}\alpha\gamma+\rho L\right],$$

სადაც L მამრავლი ინარჩუნებს სასრულო მნიშვნელობას, როცა ρ ნულისაკენ მიისწრაფის. ვინაიდან (28) განტოლება წარმოადგენს წარმოსახვით კონუსს, ამიტომ მრავალწევრი:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\cdots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}\alpha\gamma$$

არ შეიძლება ნულად გადაიქცეს, როცა α, β, γ წერტილი შემოწერს სფეროს:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

აღვნიშნოთ m-ით ამ მრავალწევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ქვედა საზღვარი. ვთქვათ, მეორე მხრით, H არის L ფუნქციის აბსოლუტური მნიშვნელობის ზედა საზღვარი M_0 წერტილის მახლობლობაში. თუ M_0 წერტილიდან ჩვენ შემოვწერთ სფეროს $\frac{m}{H}$-ზე ნაკლები რადიუსით, მაშინ აშკარაა, რომ ამ სფეროს შიგნით ρ^2-ის კოეფიციენტი $F(x, y, z)$ გამოსახვაში არ შეიძლება ნულად გადაიქცეს. ამგვარად განტოლებას:

$$F(x, y, z)=0$$

არ აქვს სხვა ამოხსნა, გარდა $\rho=0$.

თუ (28) განტოლება წარმოადგენს ორ ნამდვილ და სხვადასხვა სიბრტყის ერთობლიობას, მაშინ M_0 წერტილში გადის ფართეულის ორი კალთა, რომელთაგანაც თითოეული ეხება ერთს ამ სიბრტყეთაგანს. ზოგიერთ ფართეულს აქვს წირები, შედგენილი ორჯერადი წერტილებისაგან, სადაც თითოეულ მათგანში მხებთა კონუსი იშლება ორ სიბრტყედ. ასეთი წირი არის ფართეულის ორმაგი წირი, რომელზედაც გადიკვეთება ფართეულის ორი სხვადასხვა კალთა. მაგალითად, წრეწირი, წარმოდგენილი ორი განტოლებით: $z=0$, $x^2+y^2=1$, არის შემდეგი ფართეულის ორმაგი წირი:

$$z^4+2z^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2-1)^2=0.$$

თუ (28) განტოლება წარმოადგენს ორ წარმოსახვით შეუღლებულ სიბრტყეთა ერთობლიობას ან ორმაგ ნამდვილ სიბრტყეს, მაშინ ყოველ კერძო შემთხვევაში საჭიროა განსაკუთრებული გამოკვლევა ფართეულის სახის შესასწავლად M_0 წერტილის მახლობლობაში. მსგავსი გამოკვლევანი გვხვდებიან ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობათა შესწავლის დროს.

44. ერთ ცვლადი ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.—ვთქვათ $f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია (a, b) შუალედში და c—წერტილი ამ შუალედში. $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი $x=c$ მნიშვნელობისათვის, თუ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი საკმაოდ მცირე დადებითი η რიცხვი, რომ h-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $-\eta$ და $+\eta$-ს შორის, $f(c+h)-f(c)$ სხვაობას ჰქონდეს ერთი და იგივე ნიშანი და იქცეს ნულად, როცა $h=0$. თუ ეს სხვაობა დადებითია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=c$-ზე იქნება ნაკლები, ვიდრე მისი მნიშვნელობა ყოველი x-სათვის, რომელიც ახლოა c-თან, მაშასადამე $f(x)$ ფუნქციას $x=c$-ზე აქვს მინიმუმი. პირიქით, თუ $f(c+h)-f(c)$ სხვაობა უარყოფითია, მაშინ $x=c$-ზე ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული $x=c$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ ეს წარმოებული უნდა იყოს ნული. მართლაც, შემდეგი ორი ფარდობას:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h},$$

რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე $f'(c)$ ზღვარი, როდესაც h მიისწრაფის ნულისაკენ ექნება სხვადასხვა ნიშანი; ამიტომ მათი საერთო $f'(c)$ ზღვარი აუცილებლად უნდა იყოს ნულის ტოლი.

პირიქით, ვთქვათ c არის $f'(c)=0$ განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია a და b-ს შორის. ზოგადობისათვის მივიღოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის პირველი წარმოებული, რომელიც $x=c$ მნიშვნელობისათვის არ უდრის ნულს, არის n-ური რიგის წარმოებელი და ვიგულისხმოთ, რომ ეს წარმოებელი უწყვეტია c-ს მახლობლობაში. თუ შევჩერდებით n-ური ხარისხის წევრზე, ამ შემთხვევაში ჩვენ ტეილორის ზოგადი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(c+\theta h),$$

ან

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}[f^{(n)}(c)+\varepsilon],$$

სადაც ε უსასრულოდ მცირეა h-თან ერთად. η იყოს ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ როდესაც x იცვლება $c-\eta$-დან და $c+\eta$-მდე, ε-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იყოს $|f^{(n)}(c)|$-ზე; x-ის ასეთ მნიშვნელობისათვის $f^{(n)}(c)+\varepsilon$-ს ექნება იგივე ნიშანი რაც $f^{(n)}(c)$-ს და მაშასადამე, $f(c+h)-f(c)$ სხვაობას ექნება $f^{(n)}(c)$-ს ნიშანი.

თუ n-კენტი რიცხვია, მაშინ ჩვენ ვხედავთ, რომ ზემოთ აღნიშნული სხვაობა იცვლის ნიშანს h-თან ერთად; და $x=c$-ზე არა გვაქვს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი.

თუ n—ლუწია, მაშინ $f(c+h)-f(c)$ სხვაობას, როგორც დადებითი აგრეთვე უარყოფითი h-სათვის, აქვს $f^{(n)}(c)$-ს ნიშანი; და ფუნქციას აქვს მინიმუმი, როცა $f^{(n)}(c)$ დადებითია, ხოლო მაქსიმუმი, როცა $f^{(n)}(c)$ არის უარყოფითი. ამრიგად, იმისათვის რომ ფუნქციას $x=c$-სათვის ჰქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f'(c)$ იყოს ნული, ხოლო ფუნქციის პირველი წარმოებელი, რომელიც $x=c$-ზე განსხვავდება ნულისაგან, იყოს ლ უ წ ი რ ი გ ი ს.

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ მრუდის მხები წრფე A წერტილზე $x=c$ აბსცისით, იყოს პარალელური Ox ღერძის და ამას გარდა ეს A წერტილი არ უნდა იყოს მრუდის გადაღუნის წერტილი.

45. ორი ცვლადის ფუნქციები. ვთქვათ $z=f(x, y)$ არის ორი x, y ცვლადის ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია, როცა M წერტილი (x, y) კოორდინატებით რჩება C კონტურით შემოსაზღვრული Ω ფართობის შიგნით. ამ $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი Ω ფართობის (x_0, y_0) წერტილზე, თუ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი საკმაოდ მცირე დადებითი η რიცხვი, რომ სხვაობა

$$\Delta=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0 y_0),$$

რომელიც ნულად იქცევა $h=k=0$ მნიშვნელობისათვის, ინარჩუნებდეს მუდმივ ნიშანს h და k-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელთა აბსოლუტური სიდიდე η-ზე ნაკლებია. თუ ჩვენ y ცვლადს დროებით მივცემთ მუდმივ y_0 მნიშვნელობას, მაშინ z გახდება ერთი x ცვლადის ფუნქციად, და, ისე როგორც ზემოთ (§ 44), სხვაობას

$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)$$

შეუძლია შეინარჩუნოს მუდმივი ნიშანი h-ის მცირე მნიშვნელობისათვის მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ნულის ტოლია, როცა $x=x_0$, $y=y_0$; ამგვარადვე დავამტკიცებთ, რომ ამ მნიშვნელობებმა აგრეთვე ნულად უნდა აქციონ $\frac{\partial f}{\partial y}$. ამნაირად x, y-ის მნიშვნელობათა ის სისტემები, რომლებიც $f(x, y)$ ფუნქციას ანიჭებს მაქსიმუმს ან მინიმუმს, წარმოადგენს შემდეგი განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

ვთქვათ $x=x_0$, $y=y_0$ ამ ორი განტოლების ერთი ამოხსნათაგანია. დავუშვათ, რომ $f(x, y)$-ის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები უწყვეტია x_0, y_0 მნიშვნელობის მახლობლობაში და ნულს არ ეტოლება როცა $x=x_0$, $y=y_0$, და რომ არსებობენ მესამე რიგის წარმოებულები. ტეილორის ფორმულა იძლევა:

$$\left.\begin{aligned}\Delta=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)= \\ =\frac{1}{1\cdot 2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right)+ \\ +\frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{(3)}_{\substack{x_0+\theta h\\ y_0+\theta k}}.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

h და k-ს ნულთან მახლობელ მნიშვნელობებისათვის, მარჯვენა ნაწილის ნიშანი, ცხადია, დამოკიდებულია შემდეგ სამწევრის ნიშანზე:

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

და მოსალოდნელია რომ ამ სამწევრის ნიშნის გამოკვლევა აქ ითამაშებს მთავარ როლს.

იმისათვის, რომ $x=x_0$ $y=y_0$ მნიშვნელობებისათვის $f(x, y)$ ფუნქციას ექნეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ Δ სხვაობა ინარჩუნებდეს მუდმივ ნიშანს, როცა (x_0+h, y_0+k) წერტილი რჩება საკმაოდ მცირე კვადრატის შიგნით ცენტრით (x_0, y_0) წერტილში. აშკარაა, რომ Δ სხვაობა აგრეთვე შეინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, თუ (x_0+h, y_0+k) წერტილი დარჩება საკმაოდ მცირე რადიუსიან წრის შიგნით ცენტრით (x_0, y_0)-ში, ვინაიდანა კვადრატი შეიძლება შეიცვალოს ჩახაზული წრით, და უკუღმა. ვთქვათ C არის წრე r რადიუსით და ცენტრით (x_0, y_0) წერტილში; ჩვენ მივიღებთ ამ წრის ყველა წერტილს, თუ დავუშვებთ:

$$h=\rho\cos\varphi,\ k=\rho\sin\varphi$$

და φ-ს ვცვლით 0-დან 2π-მდე, ხოლო ρ-ს $-r$-დან $+r$-მდე. შეიძლებოდა გვეკმარისა ρ-სათვის დადებითი მნიშვნელობებით, მაგრამ შემდეგისათვის ხელსაყრელია არ შემოვიყვანოთ ეს შეზღუდვა. თუ მოვახდენთ Δ გამოსახვაში ამ ჩასმას, მივიღებთ:

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}(A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi)+\frac{\rho^3}{6}L,$$

სადაც

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2},\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0},\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

და L არის ფუნქცია, რომელიც რჩება სასრული (x_0, y_0) წერტილის მახლობლობაში, რომელსაც ჩვენ არ დავწერთ გაშლილი სახით. აქ უნდა გავარჩიოთ B^2-AC გამოსახვის ნიშნის მიხედვით რამდენიმე შემთხვევა.

პ ი რ ვ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ $B^2-AC>0$. განტოლებას:

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi=0$$

აქვს $\operatorname{tg}\varphi$-სათვის ორი ნამდვილი ამონახსნი, და მისი მარცხენა ნაწილი არის ორი კვადრატის სხვაობა, ასე რომ შეიძლება დაიწეროს:

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left[\alpha(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2-\beta(a'\cos\varphi+b'\sin\varphi)^2\right]+\frac{\rho^3}{6}L,$$

სადაც

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ ab'-ba'\neq 0.$$

თუ ჩვენ φ კუთხეს მივცემთ ისეთ მნიშვნელობას, რომ ადგილი ექნეს ტოლობას:

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=0,$$

მაშინ, ρ-ს უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობებისათვის, Δ იქნება უარყოფითი; პირიქით, თუ φ-სათვის ავიღებთ ისეთ კუთხეს, რომ ადგილი ექნეს $a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=0$ ტოლობას, მაშინ, ρ-ს უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობებისათვის, Δ იქნება დადებითი. ამგვარად არ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი r რიცხვი, რომ Δ სხვაობამ შეინარჩუნოს მუდმივი ნიშანი ყოველი φ კუთხისათვის, თუ ρ-ს აბსოლუტური მნიშვნელობა იქნება r-ზე ნაკლები. $f(x,y)$ ფუნქციას $x=x_0$, $y=y_0$ მნიშვნელობებისათვის არ აქვს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი.

მ ე ო რ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ $B^2-AC<0$. სამწევრი:

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi$$

არ იქცევა ნულად, როდესაც φ იცვლება 0-დან 2π-მდე. ვთქვათ m არის მისი აბსოლუტური სიდიდის ქვედა საზღვარი; ვთქვათ აგრეთვე H არის L ფუნქციის ზედა საზღვარი რომელიმე წრეში R რადიუსით და (x_0,y_0) ცენტრით. აღვნიშნოთ r-ით დადებითი რიცხვი, ნაკლები ვიდრე R და $\frac{3m}{H}$; r რადიუსიან წრის შიგნით Δ სხვაობას ექნება ρ^2-ის კოეფიციენტის ნიშანი, ე. ი. A და C-ს ნიშანი. მაშასადამე, $x=x_0$, $y=y_0$ მნიშვნელობებისათვის $f(x,y)$ ფუნქციას ექნება მაქსიმუმი ან მინიმუმი.

ამგვარად, თუ x_0, y_0 წერტილზე ჩვენ გვაქვს:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0,$$

მაშინ არ არსებობს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი. თუ

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}<0,$$

მაშინ $f(x, y)$-ს ექნება მაქსიმუმი ან მინიმუმი $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ წარმოებულთა ნიშნის მიხედვით. თუ ეს წარმოებულები უარყოფითია, მაშინ იქნება მაქსიმუმი; ხოლო თუ ისინი დადებითია,— მაშინ მინიმუმი.

46. საეჭვო შემთხვევის გამოკვლევა. წინა გამოკვლევა არ შეიცავს იმ შემთხვევას, როცა $B^2-AC=0$. გეომეტრიულად ნათელია, თუ რაში მდგომარეობს ამოცანის სიძნელე ამ განსაკუთრებულ შემთხვევაში. ვთქვათ S არის $z=f(x, y)$ განტოლებით წარმოდგენილი ფართეული. თუ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი (x_0, y_0) წერტილზე, რომლის მახლობლობაში ფუნქცია და მისი წარმოებულები უწყვეტია, მაშინ უნდა გვექნეს:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y_0}=0;$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ S ფართეულის მხები სიბრტყე M_0 წერტილში (x_0, y_0, z_0) კოორდინატებით უნდა იყოს პარალელური xy სიბრტყისა. იმისათვის, რომ ეს წერტილი ეთანადებოდეს მაქსიმუმს ან მინიმუმს, აუცილებელია, გარდა ამისა, რომ M_0 წერტილის მახლობლობაში S ფართეული იყოს მოთავსებული მხები სიბრტყის ერთ მხარეზე; ამგვარად საკითხი დაიყვანება ფართეულის მდებარეობის გამოკვლევაზე მისი მხები სიბრტყის მიმართ შეხების წერტილის მახლობლობაში.

დავუშვათ, რომ კოორდინატთა სათავე ჩვენ გადავიტანეთ შეხების წერტილში, და რომ მხები სიბრტყე ავარჩიეთ xy სიბრტყედ, მაშინ ფართეულის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$z=ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x^3+3\beta x^2y+3\gamma xy^2+\delta y^3, \tag{31}$$

სადაც a,b,c მუდმივებია, ხოლო $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ არის x და y-ის ფუნქციები, რომლებიც რჩებიან სასრული, როცა x და y ნულისაკენ მიისწრაფის. ეს განტოლება, არსებითად, იგივურია (25) განტოლებისა, რომელშიაც x_0 და y_0 ნულებითაა შეცვლილი, ხოლო h და k შესაბამად x და y ცვლადებით.

რომ გავიგოთ, დალაგებულია თუ არა S ფართეული კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში მთლიანად xy სიბრტყის ერთ მხარეზე, აუცილებელია გამოვიკვლიოთ ამ ფართეულის გადაკვეთის წირი xy სიბრტყესთან. მაგრამ გადაკვეთის ეს წირი წარმოდგენილია განტოლებით:

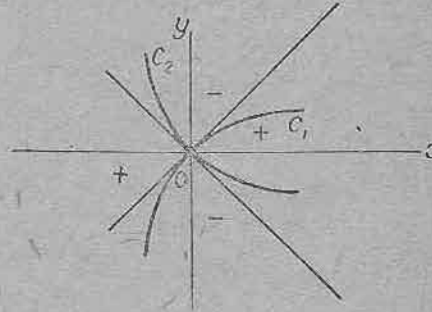
$$ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x^3+\ldots=0 \tag{32}$$

და აქვს კოორდინატთა სათავეში ორჯერადი წერტილი. თუ b^2-ac უარყოფითია, მაშინ სათავე არის ორჯერადი განმხოლოებული წერტილი (§ 42); ამ შემთხვევაში (25) განტოლებას სხვა ამოხსნა არ აქვს, გარდა $x=y=0$, სანამ (x, y) წერტილი რჩება საკმაოდ მცირე r რადიუსის მქონე C წრის შიგნით, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი (x, y) წერტილის გადაადგილების დროს ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს ამ წრის შიგნით. ამგვარად S ფართეულის ყველა წერტილი, რომელიც C წრის შიგნით დაგეგმილდება სათავის გამოკლებით, დალაგებულია xy სიბრტყის ერთ მხარეზე. ამ შემთხვევაში $f(x, y)$-ს აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი. S ფართეულის ნაწილი კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში ანალოგიურია სფეროს ან ელიფსოიდის ნაწილისა.

თუ $b^2-ac>0$, მაშინ S ფართეულის მხებ-სიბრტყესთან გადაკვეთის წირი შედგება მრუდის ორი სხვადასხვა C_1 და C_2 შტოსაგან, რომლებიც გაივლიან სათავეზე; ამ ორ შტოსადმი მხებები კოორდინატთა სათავეში წარმოიდგინება განტოლებით:

$$ax^2+2bxy+cy^2=0.$$

განვიხილოთ მოძრავი (x, y) წერტილი კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში. როცა ეს წერტილი ჰკვეთს მრუდის ერთ-ერთ C_1, C_2 შტოთაგანს, მაშინ (25) განტოლების მარცხენა მხარე იცვლის ნიშანს, ნულზე გადასვლით. ამრიგად, თუ სიბრტყის თითოეულ არეს სათავის მახლობლობაში მივუწერთ (25) განტოლების მარცხენა ნაწილის ნიშანს, მაშინ



ნახ. 4.

გვექნება ნიშანთა განრიგება, მსგავსი იმისა, რომელიც მე-4 ნახაზზე, გამოსახული. ფართეულის წერტილთა შორის, რომლებიც გეგმილდებიან xy სიბრტყეზე წრის შიგნით, ცენტრით სათავეში, რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს ამ წრის რადიუსი, უეჭველად წერტილთა ერთი ნაწილი მოთავსებული იქნება xy სიბრტყეზე, ხოლო მეორე — სიბრტყის ქვეშ. ფართეული თავისი მხები სიბრტყის მიმართ

დალაგებულია ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ან ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის მსგავსად. $f(x, y)$ ფუნქციას არ აქვს კოორდინატთა სათავეში არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი.

$b^2-ac=0$ ტოლობის შემთხვევაში ფართეულის მხებ სიბრტყესთან გადაკვეთის წირს კოორდინატთა სითავეში აქვს უკუქცევის წერტილი; ეს ის შემთხვევაა, რომელიც ჩვენ ზემოთ განუხილველი დავტოვეთ. თუ ამ შემთხვევაში გადაკვეთის წირი შედგება კოორდინატთა სათავეზე გამავალ ორ სხვადასხვა შტოსაგან, მაშინ არ არსებობს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი, ვინაიდან ფართეული კვლავ გადაკვეთს თავის მხებ სიბრტყეს. მაგრამ, თუ კოორდინატთა სათავე არის ორჯერადი განმხოლოებული წერტილი, ან გადაკვეთის წირი შედგება ორი თანამთხვეული შტოსაგან, მაშინ $f(x, y)$-ს აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი.

რომ გავიგოთ, ორი შემთხვევიდან თუ რომელს აქვს ადგილი, აუცილებელია მივიღოთ მხედველობაში მესამე და მეოთხე რიგის წარმოებულთა მნიშვნელობანი, ხოლო ზოგჯერ უმაღლესი რიგის წარმოებულთა მნიშვნელობანიც. შემდეგი გამოკვლევა, რომელიც უმთავრესად საკმარისია გამოყენებისათვის, შეეხება მხოლოდ ყველაზე ზოგად შემთხვევას. თუ $b^2-ac=0$, მაშინ, გავაგრძელებთ რა ტეილორის გაშლას მეოთხე რიგის წევრამდე, შეგვიძლია ფართეულის განტოლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$z=f(x, y)=A(x\sin\omega-y\cos\omega)^2+\varphi_3(x, y)+\frac{1}{24}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(4)}_{\substack{\theta x\\ \theta y}}. \qquad (33)$$

ვიგულისხმოთ გარკვეულობისათვის, რომ $A>0$. იმისათვის, რომ S ფართეული კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში იყოს მთლიანად მოთავსებული xy სიბრტყის ერთ მხარეზე, აუცილებელია, რომ ამ ფართეულის Oz-ზე გამავალ სიბრტყეებთან გადაკვეთის ყველა წირი, იყოს დალაგებული სათავის მახლობლად xOy სიბრტყის ერთიდაიმავე მხრით. მაგრამ თუ ჩვენ ფართეულს გადავკვეთთ სიბრტყით

$$y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

მაშინ, მივიღებთ გადაკვეთის მრუდის განტოლებას, თუ (33) განტოლებაში დავუშვებთ:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

(ღერძებად გვემსახურება Oz და მკვეთის კვალი xOy სიბრტყეზე); ეს იძლევა:

$$z=A\rho^2(\cos\varphi\sin\omega-\cos\omega\sin\varphi)^2+K\rho^3+L\rho^4,$$

სადაც K აღნიშნავს კოეფიციენტს, რომელიც დამოკიდებული არ არის ρ-ზე. თუ $\mathrm{tg}\,\omega\neq\mathrm{tg}\,\varphi$, მაშინ, ρ-ს უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობისათვის, z იქნება დადებითი; მაშასადამე, კოორდინატთა სათავის მახლობლად ყველა ეს მკვეთი იქნება მოთავსებული xy სიბრტყის ზემოთ. ახლა გადავკვეთოთ ფართეული სიბრტყით

$$y=x\,\mathrm{tg}\,\omega;$$

თუ K-ს სათანადო მნიშვნელობა ნულს არ ეტოლება, მაშინ z-ის გაშლას ექნება შემდეგი სახე:

$$z=\rho^3(K+\varepsilon)$$

და იგი იცვლის ნიშანს ρ-სთან ერთად. აქედან გამომდინარეობს, რომ გადაკვეთის წირს ფართეულისა ნახსენებ სიბრტყესთან აქვს კოორდინატთა სათავეში გადაღუნვის წერტილი და გადაჰკვეთს xy სიბრტყეს; ამრიგად, $f(x, y)$ ფუნქციას კოორდინატთა სათავეზე არ აქვს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი. ეს იქნება იმ შემთხვევაში, თუ გადაკვეთის მრუდი ფართეულისა მის

მხებ სიბრტყესთან წარმოადგენს პირველი სახის უკუქცევის წერტილს, როგორც, მაგალითად, ფართეულის:

$$z=y^2-x^4.$$

თუ განსახილავი კვეთისათვის $K=0$, მაშინ ჩვენ გავაგრძელებთ დაშლას მეოთხე რიგის წევრამდე და z-სათვის მივიღებთ გამოსახვას:

$$z=\rho^4(K_1+\varepsilon'),$$

სადაც K_1 მუდმივია, რომლის გამოსახვაც მეოთხე **რიგის** წარმოებულების საშუალებით ადვილად მიიღება. ვიგულისხმებთ, რომ K_1 ნულს არ ეტოლება, ρ-ს უსასრულოდ მცირე მნიშვნელობისათვის z-ს აქვს K_1-ის ნიშანი. თუ K_1 უარყოფითია, მაშინ კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში გადაკვეთის წირი მოთავსებულია xy სიბრტყის ქვეშ, z-სათვის კიდევ არ არის არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი. მაგალითად, ამას აქვს ადგილი $z=y^2-x^4$ ფართეულისათვის, რომლის გადაკვეთის წირი xy სიბრტყესთან შედგება ორი პარაბოლისაგან $y=\pm x^2$. ამგვარად ვხედავთ, რომ, თუ ადგილი არ ექნება ერთდროულად: $K=0$, $K_1>0$, მაშინ გამოანგარიშების გაგრძელება უშედეგოა; შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში ფართეული ჰკვეთს თავის მხებ სიბრტყეს.

თუ ერთდროულად $K=0$, $K_1>0$, მაშინ ფართეულის Oz-ზე გამავალ სიბრტყესთან კვეთის ყველა მრუდი იქნება კოორდინატთა სათავის მახლობლად xy სიბრტყის ზემოთ დალაგებული. მაგრამ ეს კიდევ არაა საკმაო, რომ შეიძლებოდეს დასკვნა იმისა, რომ ფართეული არ ჰკვეთს თავის მხებ სიბრტყეს, როგორც ამას გვაჩვენებს შემდეგი ფართეული:

$$z=(y-x^2)(y-2x^2),$$

რომელიც ჰკვეთს თავის მხებ სიბრტყეს ორი პარაბოლით, რომელთაგან ერთი ძევს მეორის შიგნით. იმისათვის, რომ ფართეული არ გადაიკვეთოს თავისი მხები სიბრტყით, აუცილებელია კიდევ შემდეგი პირობა: თუ ჩვენ გადავკვეთთ ამ ფართეულს Oz-ზე გამავალი ნებისმიერი ცილინდრით, რომლის შემქმნელები პარალელურია Oz-ის, მაშინ გადაკვეთის მრუდი უნდა იყოს დალაგებული xy სიბრტყის ზემოთ. ვთქვათ $y=\varphi(x)$ არის ამ ცილინდრის xy სიბრტყეზე კვალის განტოლება, მასთან როცა $x=0$ ფუნქცია $\varphi(x)$ ნულის ტოლია. $F(x)=f[x,\varphi(x)]$ ფუნქციას უნდა ექნეს მინიმუმი, როცა $x=0$, როგორიც არ უნდა იყოს $\varphi(x)$ ფუნქციის სახე. გამოთვლების გასამარტივებლად დავუშვებთ, რომ კოორდინატთა ღერძები შერჩეულია იმნაირად, რომ ფართეულის განტოლებას აქვს სახე:

$$z=Ay^2+\varphi_3(x,y)+\dots,$$

სადაც A დადებითია. ღერძთა ამ სისტემისათვის კოორდინატთა სათავეზე ჩვენ გვექნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0,$$

$F(x)$-ის წარმოებულებს ექნება შემდეგი გამოსახვა:

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x),$$

$$F''(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi''(x),$$

$$F'''(x)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\varphi'(x)+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^3(x)+$$

$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi''(x)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'\,\varphi''+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'''(x),$$

$$F^{\mathrm{IV}}(x)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\varphi'(x)+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\varphi'^2+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\varphi'^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\varphi'^4+$$
$$+6\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\varphi''+12\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\varphi'\varphi''+6\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^2\varphi''+4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\varphi'''+$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(4\varphi'\varphi'''+3\varphi''^2\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi^{\mathrm{IV}}(x).$$

როცა $x=y=0$ ეს ფორმულები იძლევა:

$$F'(0)=0,\quad F''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi'(0)]^2.$$

თუ $\varphi'(0)$ ნულს არ უდრის, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას, როცა $x=0$, აქვს მინიმუმი, რაც შეიძლებოდა შეგვენიშნა წინა გამოკვლევის თანახმად. თუ კი $\varphi'(0)=0$, მაშინ

$$F'(0)=0,\ F''(0)=0\quad F'''(0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3},$$

$$F^{\mathrm{IV}}(0)=\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\partial y_0}\varphi''(0)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2.$$

რომ $F(x)$ ფუნქციას ექნეს მინიმუმი, საჭიროა $\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}$ იყოს ნული და, გარდა ამისა, $\varphi''(0)$-ის მიმართ მეორე ხარისხის სამწევრი:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\partial y_0}\varphi''(0)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2$$

იყოს დადებითი $\varphi''(0)$-ის ყოველგვარი მნიშვნელობისათვის. ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ეს პირობები არ კმაყოფილდება ზემოთ განხილული $z=y^2-3x^2y+2x^4$ ფუნქციისათვის, მაშინ როცა ისინი კმაყოფილდება $z=y^2+x^4$ ფუნქციისათვის. და მართლაც, ეს უკანასკნელი ფართეული მთლიანად დალაგებულია xy სიბრტყის ზემოთ.

ჩვენ არ გავაგრძელებთ ამ გამოკვლევას, რომელიც სრული სიმკაცრისათვის ძლიერ ზუსტ მოსაზრებებს მოითხოვს; ამის გამო მკითხველს, რომელსაც სურს უფრო დაწვრილებით გაეცნოს ამ საკითხს, ვურჩევთ მიმართოს ლ ი უ დ ვ ი გ შ ე ფ ე რ ი ს ძირითად მემუარს (Ludwig Scheffer, Mathematische Annalen, ტ. XXXV).

47. სამი ცვლადის ფუნქციები. დავუშვათ $u=f(x, y, z)$ სამი x, y, z ცვლადის უწყვეტი ფუნქციაა. ამ $f(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობათა სისტემისათვის, თუ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი საკმაოდ მცირე დადებითი η რიცხვი, რომ სხვაობა:

$$\Delta=f(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l)-f(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

რომელიც ნულად იქცევა, როცა $h=k=l=0$, ინარჩუნებდეს მუდმივ ნიშანს h, k, l-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელთა აბსოლუტური სიდიდე η-ზე ნაკლებია. თუ დავუშვებთ, რომ სამი x, y, z ცვლადიდან მხოლოდ ერთმა მიიღო ნაზრდი, ხოლო ორ დანარჩენ ცვლადს დროებით განვიხილავთ როგორც

მუდმივებს, მაშინ ისე როგორც ზემოთ, ვიპოვით, რომ u-ს არ ექნება არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი, თუ ერთდროულად ადგილი არ ექნება ტოლობებს:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_0}=0,$$

მასთან, იგულისხმება, რომ ეს წარმოებულები აუცილებლად არიან უწყვეტი x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობათა მახლობლობაში. დავუშვათ, რომ ვიპოვეთ ამ სამი განტოლების ამოხსნათა x_0, y_0, z_0 სისტემა. ვთქვათ M_0 არის სივრცის წერტილი (x_0, y_0, z_0) კოორდინატებით. f ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, თუ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი სფერო ცენტრით M_0-ში, რომ სხვაობამ $f(x, y, z)-f(x_0, y_0, z_0)$ შეინარჩუნოს მუდმივი ნიშანი x, y, z ყოველი წერტილისათვის ამ სფეროს შიგნით, გარდა M_0 წერტილისა. წარმოვადგინოთ M_0-ის მახლობელი რომელიმე წერტილის კოორდინატები ასე:

$$x=x_0+\rho\alpha, \quad y=y_0+\rho\beta, \quad z=z_0+\rho\gamma,$$

სადაც α,β,γ ურთიერთ შებმულია ტოლობით: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$; და თუ $f(x,y,z)$-ის ტეილორის ფორმულით გაშლაში $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ სხვაობებს შევცვლით $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$-თი, მივიღებთ:

$$\Delta=\rho^2[\varphi(\alpha, \beta, \gamma)+\rho L],$$

სადაც $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ აღნიშნავს კვადრატულ ფორმას α,β,γ-ს მიმართ, რომლის კოეფიტები $f(x, y, z)$-ის მეორე რიგის წარმოებულებია, ხოლო L—ფუნქციას, რომელიც რჩება სასრულო M_0 წერტილის მახლობლობაში. თუ უკუვაგდებთ იმ კერძო შემთხვევას, როცა $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ნულის ტოლია, ჩვენ ეს ფორმა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ α, β, γ-ს მიმართ სამი სხვადასხვა წრფივი ფუნქციის კვადრატების ჯამის სახით, გამრავლებული მუდმივი მამრავლებზე. ამრიგად გვაქვს:

$$\varphi(\alpha\ \beta, \gamma)=aP^2+a'P'^2+a''P''^2.$$

თუ a, a', a'' კოეფიციენტებს ერთნაირი ნიშანი აქვს, მაშინ კვადრატული ფორმა რჩება აბსოლუტური სიდიდით მეტი რომელიმე მინიმუმისა, როცა წერტილი α, β, γ მოხაზავს სფეროს:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

და, მაშასადამე, Δ ინარჩუნებს a, a', a'' კოეფიციენტების ნიშანს, თუ ρ ნაკლებია რომელიმე ზღვარზე. ამგვარად $f(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი.

თუ a, a', a'' კოეფიციენტებს არ აქვთ ერთნაირი ნიშანი, მაშინ არ არსებობს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი. დავუშვათ, მაგალითად, $a>0$, $a'<0$, α, β, γ-სათვის ავიღოთ მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობებს: $P'=0$, $P''=0$. ეს მნიშვნელობანი P-ს ნულად არ აქცევენ, და ρ-ს საკმაოდ მცირე მნიშვნელობისათვის, Δ იქნება დადებითი. პირიქით, თუ ავი-

ლებთ α, β, γ-სათვის მნიშვნელობებს, რომლებიც დააკმაყოფილებენ ტოლობებს $P=0$, $P''=0$, მაშინ, ρ-ს მცირე მნიშვნელობისათვის, Δ იქნება უარყოფითი.

ზემოთ განხილული მეთოდი რჩება ერთი და იგივე დამოუკიდებელ ცვლადთა ყოველი რიცხვისათვის, და მასში მუდამ მთავარ როლს რომელიმე კვადრატული ფორმის შესწავლა თამაშობს. შეიძლება შევნიშნოთ, რომ სამი დამოუკიდებელი ცვლადის $u=f(x, y, z)$ ფუნქციის შემთხვევაში, ამოცანა დაიყვანება ფართეულის ხასიათის შესწავლაზე მისი განკუთრი წერტილის მახლობლად. მართლაც, განვიხილოთ Σ ფართეული, წარმოდგენილი განტოლებით:

$$F(x, y, z)=f(x, y, z)-f(x_0, y_0, z_0)=0.$$

ეს ფართეული, ცხადია, გადის M_0 (x_0, y_0, z_0) წერტილზე და თუ $f(x, y, z)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, მაშინ M_0 წერტილი არის Σ ფართეულის განკუთრი წერტილი. თუ მხებთა კონუსი M_0-ში არის წარმოსახვითი, მაშინ, როგორც ვნახეთ, $F(x, y, z)$ მუდმივ ნიშანს ინარჩუნებს M_0 ცენტრით საკმაოდ მცირე რადიუსიან სფეროს შიგნით; მაშასადამე, $f(x, y, z)$-ს ნამდვილად აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი. მაგრამ, თუ მხებთა კონუსი არის ნამდვილი ან იშლება ორ ნამდვილ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ სიბრტყედ, მაშინ არსებობს ფართეულის რამდენიმე კალთა, რომლებიც გაივლიან M_0 წერტილზე, და $F(x, y, z)$ იცვლის ნიშანს, როცა წერტილი (x, y, z) თავის ძრაობის დროს გადაკვეთს ერთ-ერთ ამ კალთათაგანს.

48. მანძილი წერტილიდან ფართეულამდე. ვთქვათ საჭიროა ვიპოვოთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მანძილისა, მოცემული (a, b, c) წერტილიდან S ფართეულამდე, რომელიც წარმოდგენილია $F(x, y, z)=0$ განტოლებით. ამ მანძილის კვადრატი

$$u=d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

არის მხოლოდ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია, მაგალითად x და y-ის, ვინაიდან z ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x და y-ის ფუნქცია, განსაზღვრული $F=0$ განტოლებით. თუ u-ს აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი ზედაპირის (x, y, z) წერტილისათვის, მაშინ ამ წერტილის კოორდინატებისათვის ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობებს:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=(x-a)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=(y-b)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

მეორეს მხრივ, $F=0$ განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

და წინა ტოლობები მიიღებს სახეს:

$$\frac{x-a}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{y-b}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{z-c}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}.$$

ეს განტოლებანი გვიჩვენებს, რომ S ფართეულის ნორმალი (x, y, z) წერტილში გადის (a, b, c) წერტილზე. თუ უკუვაგდებთ S ფართეულის განკუთრ წერტილებს, ვხედავთ, ამგვარად, რომ საძიებელი წერტილები იმ ნორმალთა ფუძეებია, რომლებიც დაშვებულია (a, b, c) წერტილიდან S ფართეულზე. რომ ამოვხსნათ, ნამდვილად ეთანადება თუ არა ერთი ამ წერტილთაგანი მაქსიმუმს ან მინიმუმს, მივიღოთ ეს წერტილი კოორდინატთა სათავედ, ხოლო მხები სიბრტყე ამ წერტილში—xy სიბრტყედ, ასე, რომ მოცემული (a, b, c) მოთავსებული იქნება Oz ღერძზე. მაშინ ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$u=x^2+y^2+(z-c)^2,$$

სადაც x და y-ის z ფუნქცია ნულის ტოლია თავისი პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად, როცა $x=y=0$. აღვნიშნოთ r, s, t-თი z-ის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, კოორდინატთა სათავისათვის, გვექნება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2(1-cr), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-2cs, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2(1-ct),$$

და ამოცანა დაიყვანება შემდეგი მრავალწევრის ნიშნის გამოკვლევაზე

$$\Delta(c)=c^2s^2-(1-cr)(1-ct)=c^2(s^2-rt)+(r+t)\,c-1.$$

$(r+t)^2+4(s^2-rt)=4s^2+(r-t)^2$ იგივეობის გამო $\Delta(c)=0$ განტოლების ფესვები მუდამ არიან ნამდვილი. s^2-rt-ის ნიშნის მიხედვით ჩვენ აქ უნდა გავარჩიოთ რამდენიმე შემთხვევა.

პირველი შემთხვევა. ვთქვათ $s^2-rt<0$. $\Delta(c)=0$ განტოლებას აქვს ორი ფესვი c_1 და c_2 ერთნაირი ნიშნებით, და შეგვიძლია დავწეროთ $\Delta(c)=(s^2-rt)(c-c_1)(c-c_2)$. აღვნიშნოთ z ღერძზე ორი A_1 და A_2 წერტილი, კოორდინატებით c_1 და c_2; ეს ორი წერტილი დალაგებულია სათავიდან ერთ მხარეზე, და თუ ვიგულისხმებთ r და t-ს დადებითად, რაც მუდამ არის შესაძლებელი, ჩვენ ვიპოვით, რომ ორივე წერტილი ძევს Oz ღერძის დადებით ნაწილზე. თუ მოცემული $A(O, O, c)$ წერტილი მდებარეობს A_1A_2 მონაკვეთს გარედ, მაშინ $\Delta(c)$ უარყოფითია, და OA მანძილი იქნება მაქსიმუმი ან მინიმუმი. რომ გავიგოთ, ამ ორ შემთხვევიდან რომელს აქვს ადგილი, აუცილებელია მივმართოთ $1-cr$-ის ნიშანს. ეს კოეფიციენტი ნულად იქცევა მხოლოდ $c=\frac{1}{r}$ მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებული იქნება c_1 და c_2-ს შორის, ვინაიდან $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{s^2}{r^2}$. მაგრამ, როცა $c=0$, $1-cr$ დადებითია; მაშასადამე, $1-cr$ დადებითია, როცა A წერტილი იმყოფება სათავესთან ერთ მხარეზე A_1A_2 მონაკვეთის მიმართ, და მანძილი OA იქნება მინიმუმი. პირიქით, OA იქნება მაქსიმუმი, თუ A წერტილი მოთავსებულია მეორე მხარეზე, ვიდრე სათავე, A_1A_2 მონაკვეთის მიმართ. თუ A წერტილი მოთავსებულია A_1 და A_2 წერტილებს შორის, მაშინ მანძილი არ იქნება არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი. შემთხვევა, როცა A წერტილი ემთხვევა A_1-ს ან A_2-ს —საეჭვოა და მოითხოვს განსაკუთრებულ გამოკვლევას.

მეორე შემთხვევა. დავუშვათ $s^2-rt>0$. $\Delta(c)=0$ განტოლების c_1 და c_2 ფესვებიდან ერთი იქნება დადებითი, მეორე—უარყოფითი, და A_1, და A_2 წერტილები იქნება დალაგებული Oz ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან სხვადასხვა მხარეზე. თუ წერტილი A არ ძევს A_1 და A_2-ს შორის, მაშინ $\Delta(c)$ დადებითია, და არ არსებობს არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი. თუ A წერტილი ძევს A_1 და A_2-ს შორის, მაშინ $\Delta(c)$ უარყოფითია, $1-cr$ დადებითი, და მაშასადამე, მანძილი OA იქნება მინიმუმი.

მესამე შემთხვევა. ვთქვათ $s^2-rt=0$. მაშინ $\Delta(c)=(r+t)(c-c_1)$. ისე, როგორც ზემოთ ვიპოვით, რომ OA მანძილი იქნება მინიმუმი, თუ A წერტილი დალაგებულია სათავესთან ერთად ერთ მხარეზე A_1 წერტილის მიმართ, რომლის კოორდინატებია $(0, 0, c_1)$, და არ იქნება არც მაქსიმუმი და არც მინიმუმი, თუ A_1 წერტილი იმყოფება A წერტილსა და კოორდინატთა სათავეს შორის.

A_1 და A_2 წერტილებს აქვს ძირითადი მნიშვნელობა სიმრუდის შესწავლაში; ესენი არიან S ფართეულის — სიმრუდის მთავარი ცენტრები Q წერტილში.

49. უცხადო ფუნქციების მაქსიმუმი და მინიმუმი. მრავალ ცვლადის ფუნქციათა მაქსიმუმების ან მინიმუმების მოძებნის დროს ხშირად ხდება, რომ ეს ცვლადები შებმულია ერთი ან მრავალი დამოკიდებულებით. ვთქვათ, მაგალითად $\omega=f(x, y, z, u)$ არის ოთხი x, y, z, u ცვლადის ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ დამოკიდებულებას:

$$f_1(x, y, z, u)=0, \quad f_2(x, y, z, u)=0.$$

გარკვეულობისათვის x და y-ს ჩვენ განვიხილავთ როგორც ორ დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო z და u-ს როგორც x და y-ის ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია წინა ტოლობებით. აუცილებელი პირობები იმისა, რომ u-ს ქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, იქნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

სადაც კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ განისაზღვრებიან შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

თუ ამ ექვსი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$-ს, ჩვენ მივალთ შემდეგ ორ დამოკიდებულებამდე:

$$\frac{D(f, f_1, f_2)}{D(x, z, u)}=0, \quad \frac{D(f, f_1, f_2)}{D(y, z, u)}=0. \tag{34}$$

ეს განტოლებები, $f_1=0, f_2=0$ განტოლებებთან ერთად, განსაზღვრავენ ω ფუნქციის მაქსიმუმის ან მინიმუმის შესაბამ x, y, z, u მნიშვნელობებს. მაგრამ (34) განტოლება გვიჩვენებს, რომ შეიძლება მოვძებნოთ λ და μ-სათვის ისეთი მნიშვნელობანი, რომ ადგილი ექნეს ტოლობებს:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial y}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial u}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial u}=0.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

მაშასადამე, (34) პირობები შეიძლება შეიცვალოს (35) ოთხი განტოლებით, თუ λ და μ-ს განვიხილავთ როგორც ორ დამხმარე უცნობს.

ზოგადი თეორემის დამტკიცება ცხადია, და ჩვენ შეგვიძლია გამოვთქვათ შემდეგი წესი:

თ უ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა n ც ვ ლ ა დ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

და ეს $x_1, x_2, \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_n$ ცვლადები არიან შებმული h სხვადასხვა დამოკიდებულებით:

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0, \ldots, \varphi_h=0,$$

მაშინ, რომ მოვძებნოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მნიშვნელობები, რომლებიც ამ ფუნქციას ანიჭებენ მაქსიმუმს ან მინიმუმს, საჭიროა ნულს გავუტოლოთ კერძო წარმოებულები დამხმარე ფუნქციისა

$$f+\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_h\varphi_h,$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$-ს განვიხილავთ როგორც მუდმივებს.

50. ზოგადი შენიშვნები აბსოლუტური მაქსიმუმისა და მინიმუმის შესახებ. რომ განვსაზღვროთ აბსოლუტური მაქსიმუმი და მინიმუმი უწყვეტი ფუნქციისა გარკვეულ არეში, მისი საზღვრების ჩათვლით, საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ ზოგიერთი შენიშვნა, რომელთა მნიშვნელოვნებაში ადვილად დავრწმუნდებით. მაგალითად, ავიღოთ ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქცია, განსაზღვრული (a, b) შუალედში; მას შეუძლია მიაღწიოს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას ამ შუალედის შიგა C წერტილში და ამავე დროს წარმოებულის ნულად გადაქცევის პირობა არ იყოს შესრულებული. თუ წარმოებული $f'(x)$ წყვეტილია $x=c$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ საკმარისია, ის იცვლიდეს ნიშანს, რომ ფუნქციას ექნეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი; მაგალითად, ფუნქციას $y=x^{\frac{2}{3}}$ აქვს მინიმუმი, როცა $x=0$, იმ დროს, როცა წარმოებული $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ იქცევა უსასრულოდ x-ის ამ მნიშვნელობისათვის. ეს შენიშვნა ვრცელდება, ცხაცია, ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვის ფუნქციაზე. გარკვეულობისათვის, ვთქვათ, $\omega=f(x, y)$ არის ორი x და y ცვლადის ფუნქცია, უწყვეტი D არეში. წინად მოცემული წესები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს გავიგოთ, შეესაბამება თუ არა ამ არეს შიგა (x_0, y_0) წერტილი მაქსიმუმს ან მინიმუმს, არსებითად ჰგულისხმობს, რომ f-ის წარმოებულები მესამე რიგამდე ინარჩუნებენ სასრულო მნიშვნელობებს ამ წერტილის მახლობლობაში. მაგრამ შესაძლოა მოხდეს, რომ ω ფუნქციამ მიაღწიოს მაქსიმუმს ან მინიმუმს D არეს შიგა (x_0, y_0) წერტილში და ეს პირობები უკვე არ იქნეს შესრულებული, მაგალითად წერტილში, რომელშიც f'_x, f'_y წარმოებულები განიცდიან წყვეტას[1].

[1] ვთქვათ, მაგალითად, $f=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi(x, y)$, სადაც φ ფუნქცია უწყვეტია თავისი კერძო წარმოებულებით მეორე რიგამდე კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში ვინაიდან კერძო წარმოებულები f'_x, f'_y წყვეტილია, როცა $x=y=0$, ამიტომ ჩვენ არ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზოგადი წესი, რომ გავიგოთ, აქვს თუ არა f-ს მაქსიმუმი ან მინიმუმი კოორდინატთა სათავეზე. დავუშვათ, რომ ამ წერტილის მახლობლობაში

$$\varphi=ax+by+\cdots,$$

მასთან წევრები, რომლებიც დაუწერელია, არიან უკიდურეს შემთხვევაში მეორე ხარისხის. თუ ჩვენ დავუშვებთ როგორც § 45-ში, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, მაშინ მივიღებთ:

$$f=\rho(1+a\cos\omega+b\sin\omega)+\rho^2P(\rho, \omega),$$

აგრეთვე შეიძლება მოხდეს, რომ განსახილავი ფუნქცია აღწევს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას იმ წერტილზე, რომელიც არეს საზღვარს ეკუთვნის; ამ შემთხვევისათვის ზოგადი წესები, ცხადია, არ შეიძლება გამოყენებული იქნეს. მაგალითად, დავუშვათ, რომ საჭიროა ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი მოცემული P წერტილისა $(a, 0)$ კოორდინატებით R რადიუსიან C წრეწირიდან, რომელსაც ცენტრი კოორდინატთა სათავეში აქვს. თუ ავიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადათ C წრეწირის M წერტილის x აბსცისას, გვექნება:

$$d^2=\overline{PM}^2=R^2+a^2-2ax.$$

ზოგადი წესის გამოყენება მიგვიყვანდა $2a=0$ განტოლების ფესვების მოძებნამდე, რაც წარმოადგენს უაზრობას. ჩვენ ადვილად შეგვიძლია ავხსნათ ეს შედეგი, თუ შევნიშნავთ, რომ საკითხის თვით ბუნების მიხედვით x ცვლადი შეიძლება იცვლებოდეს მხოლოდ $-R$-დან $+R$-მდე. თუ a დადებითია, მაშინ d^2-ს აქვს მინიმუმი, როცა $x=R$, ხოლო მაქსიმუმი, როცა $x=-R$.

ამგვარად ყოველ კერძო შემთხვევაში აუცილებლობას წარმოადგენს სპეციალური გამოკვლევა, რომელიც შეეხება არეს საზღვარს. მაგრამ გამოკვლევა ხდება უსარგებლო ყველა იმ შემთხვევაში, როცა განსახილავი არეს არ აქვს საზღვრები. ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველი შეკრული ზედაპირი წარმოადგენს ორ განზომილებიან არეს, რომელსაც არ აქვს საზღვრები. გარკვეულობისათვის ავიღოთ R რადიუსიანი სფერო და დავუშვათ, რომ ამ სფეროს წერტილის სწორკუთხოვანი კოორდინატები გამოსახული არიან გეოგრაფიული კოორდინატებით:

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\quad y=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=R\cos\theta.$$

ყოველ ფუნქციას, რომელსაც ერთადერთი მნიშვნელობა აქვს სფეროს ყოველ წერტილში, ეთანადება ორი θ და φ ცვლადის $\omega=f(\theta, \varphi)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს პერიოდი 2π თითოეულ ამ ცვლადების მიმართ.

თუ ეს ფუნქცია უწყვეტია და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები θ და φ-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, მაშინ ცხადია, რომ θ და φ-ის მნიშვნელობათა წყვილები, რომლებისთვისაც ამ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი ეკუთვნიან $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=0$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნათა რიცხვს.

სადაც P ფუნქცია რჩება სასრული კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში.

ისე როგორც 45 პარაგრაფში, ჩვენ ვხედავთ, რომ, თუ $a^2+b^2<1$, მაშინ კოეფიციენტი ρ-სთან რჩება მეტი რომელიმე დადებითი მინიმუმზე, და f-ს აქვს მინიმუმი კოორდინატთა სათავეში. თუ $a^2+b^2>1$, მაშინ ρ-ს კოეფიციენტი იცვლის ნიშანს, და ფუნქციას კოორდინატთა სათავეში არ აქვს არც მაქსიმუმი, არც მინიმუმი. შემთხვევა, როცა $a^2+b^2=1$, გამოურკვეველია. საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს ამოცანა სიბრტყის ისეთი M წერტილის მოძებნისა, რომლის მანძილთა ჯამი: $MA+MB+MC$ სიბრტყის სამი წერტილიდან იყოს უმცირესი. თუ ABC სამკუთხედის ყველა კუთხე ნაკლებია $120°$-ზე მაშინ M არის ისეთი წერტილი, რომლიდანაც ყველა სამი გვერდი AB, BC, CA მოჩანს $120°$-ის ტოლი კუთხით; თუ ერთ-ერთი კუთხეებიდან, მაგალითად A, მეტია $120°$-ზე, მაშინ M წერტილი ემთხვევა A წერტილს, და ამ წერტილში ფუნქციის კერძო წარმოებულები წყვეტილია. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ წინა წესი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს, თუ A წერტილს კოორდინატთა სათავედ ავიღებთ.

51. ერთი დეტერმინანტის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ვთქვათ, რომ საჭიროა ვიპოვოთ მაქსიმუმი შემდეგი დეტერმინანტის აბსოლუტური სიდიდისა:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n \end{vmatrix}, \tag{36}$$

სადაც ცნობილია ყოველი სტრიქონის ელემენტთა კვადრატების ჯამი. ამოცანა დაიყვანება მაქსიმუმის ან მინიმუმის მოძებნაზე Δ ფუნქციისა, რომელიც დამოკიდებულია n^2 ცვლადზე: $a_i, b_i, c_i, \cdots$, მასთან ეს უკანასკნელნი შებმულია n პირობით:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + \ldots + l_i^2 = H_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{37}$$

სადაც H_i — მოცემული დადებითი მუდმივებია. არეს, განსაზღვრულს აღნიშნული პირობებით, არ აქვს საზღვრები, ვინაიდან $a_i, b_i, c_i \cdots l_i$ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $\sqrt{H_i}$ რადიუსიან ჰი ერსფეროს წერტილის კოორდინატები n განზომილებიან სივრცეში.

დავუშვათ, რომ Δ გაშლილია i-ური სტრიქონის ელემენტებად:

$$\Delta = A_i a_i + B_i b_i + \cdots + L_i l_i; \tag{38}$$

ჩვენ უნდა ვეძებოთ მაქსიმუმი ან მინიმუმი Δ ფუნქციისა n ცვლადით $a_i, b_i, c_i \cdots, l_i$, რომლებიც შებმულია (37) პირობებით. მამრავლთა ხერხის (§ 49) გამოყენება მიგვიყვანს პირობებამდე:

$$\frac{a_i}{A_i} = \frac{b_i}{B_i} = \cdots = \frac{l_i}{L_i}. \tag{39}$$

ვთქვათ $a_k, b_k, c_k, \cdots, l_k$ არის Δ-ს სხვა სტრიქონის ელემენტები. ჩვენ გვაქვს:

$$A_i a_k + B_i b_k + \cdots + L_k l_k = 0,$$

და მაშასადამე, (39) პირობების თანახმად

$$a_i a_k + b_i b_k + \cdots + l_i l_k = 0, \tag{40}$$

როცა $i \neq k$. აქედან ჩვენ დავასკვნით, რომ Δ *დეტერმინანტს შეუძლია ქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა იგი ორტოგონალური დეტერმინანტია.*

თუ (40) პირობები დაკმაყოფილებულია, მაშინ Δ-ს კვადრატი არის დეტერმინანტი, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მთავარი დიაგონალის ელემენტების გამოკლებით, რომლებიც შესაბამად ტოლია $H_1, H_2, \cdots, H_n$-ის. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს:

$$\Delta^2 = H_1 H_2 \cdots H_n,$$

და ამრიგად, დეტერმინანტის აბსოლუტური სიდიდის მაქსიმუმი არის:

$$\sqrt{H_1 H_2 \cdots H_n}.$$

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, როცა $n=3$, Δ წარმოადგენს იმ პარალელოპიპედის მოცულობას რომელიც აგებულია მონაკვეთებზე OA_1, OA_2 და OA_3, სადაც მონაკვეთები აერთებენ კოორდინატთა სათავეს $A_1(a_1, b_1, c_1)$, $A_2(a_2, b_2, c_2)$ და $A_3(a_3, b_3\ c_3)$ წერტილებთან. მიღებული შედეგი წარმოადგენს, მაშასადამე, განზოგადებას შემდეგი გეომეტრიული თეორემისა: *მოცემულ სამ მონაკვეთზე აგებულ ყველა პარალელოპიპედიდან, ის, რომელსაც უდიდესი მოცულობა აქვს, არის სწორკუთხოვანი.*

ვინაიდან ჩვენ შეგვიძლია ამ პარალელოპიპედს მივცეთ ურიცხვი მდებარეობა სივრცეში, მისი O წვეროს შეუცვლელად, ამიტომ ჩვენ ვხედავთ, რომ მაქსიმუმი, მიღებული Δ^2-სათვის, არის მაქსიმუმი ფართო გაგებით.

ვთქვათ Δ არის n-ური რიგის რომელიმე დეტერმინანტი; თუ აღვნიშნავთ $a_i, b_i, \ldots l_i$-ით) i-ური სტრიქონის ელემენტებს, ზემოდ აღნიშნულის ძალით, გვექნება უტოლობა:

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2+\ldots+l_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+\ldots+l_2^2}\cdots\sqrt{a_n^2+b_n^2+\ldots+l_n^2}\,. \tag{41}$$

თუ Δ-ს ყველა ელემენტის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება რომელიმე დადებით M რიცხვს, მაშინ ჩვენ გვაქვს, მით იფრო[1]

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{n^n M^n}\,. \tag{42}$$

III. ფუნქციონალური დეტერმინანტები.

52. ძირითადი თვისება. როგორც ჩვენ ვნახეთ, ფუნქციონალური დეტერმინანტი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს უცხადო ფუნქციის თეორიაში. ყოველი დამტკიცების დროს ჩვენ გამოვდიოდით წინასწარ დაშვებიდან, რომ რომელიმე იაკობის დეტერმინანტი ნულს არ უდრის. თუ მოცემულია n ფუნქცია, დამოკიდებული n დამოუკიდებელ ცვლადზე, უწყვეტი და რომლებსაც აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ ამ ფუნქციათა იაკობიანს აქვს თვისებები, წარმოებულის თვისებების ანალოგიური. მაგალითად, ერთი x ცვლადის ფუნქცია რომ გადაიქცეს მუდმივად, აუცილებელია და საკმარისი, მისი წარმოებული იყოს იგივურად ნულის ტოლი. იაკობიანისთვის შესაბამი თეორემა არის შემდეგი:

ვთქვათ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ არის n ფუნქცია n დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის, ამ n ფუნქციას შორის რომ არსებობდეს $\pi(u_1, u_2, \ldots u_n)=0$ დამოკიდებულება, რომელიც არ შეიცავს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებს, აუცილებელია და საკმარისი, ფუნქციონალური დეტერმინანტი $\frac{D(u_1, u_2, \ldots u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}$ იგივურად ნულის ტოლი იყოს.

1) პირობა აუცილებელია: განვიხილოთ გარკვეულობისათვის სამი ცვლადის სამი ფუნქცია:

$$X=f_1(x, y, z), \quad Y=f_2(x, y, z), \quad Z=f_3(x, y, z), \tag{43}$$

უწყვეტი, რომელთაც აქვთ უწყვეტი წარმოებულები და დავუშვათ, რომ იაკობიანი:

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \tag{44}$$

იგივურად არ უდრის ნულს. ვთქვათ, კერძოთ, (x_0, y_0, z_0) არის სისტემა x, y, z-ის მნიშვნელობათა, რომლისთვისაც ეს დეტერმინანტი ნულისაგან გან-

[1] ეს თეორემა ეკუთვნის ადამარს (Hadamard, Bulletin des Sciences mathématiques, მე-2 სერია, ტ. XVII 1893). ტექსტში მოყვანილი დამტკიცება ეკუთვნის ვირტინგერს (Wirtinger) (Ibid., 1908).

სხვაობა. ვთქვათ X_0, Y_0, Z_0 არის X, Y და Z-ის შესაბამი მნიშვნელობები. ზოგადი თეორემის (§ 38) თანახმად, შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი დადებითი h რიცხვი რომ X, Y, Z-ის მნიშვნელობათა ყოველ სისტემას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$X_0-h\leqslant X\leqslant X_0+h,\quad Y_0-h\leqslant Y\leqslant Y_0+h,\quad Z_0-h\leqslant Z\leqslant Z_0+h, \tag{45}$$

ეთანადება x, y, z-ის მნიშვნელობათა სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს (43) განტოლებებს. ვინაიდან ნაჩვენებ არეში f_1, f_2, f_3 ფუნქციათა მნიშვნელობები შეიძლება შერჩეულ იქნეს ნებისმიერად, ამიტომ ამ ფუნქციათა შორის არ შეიძლება არსებობდეს არავითარი $F(X, Y, Z)=0$ დამოკიდებულობა.

შენიშვნა. იგივე მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ არ შეიძლება არსებობდეს დამოკიდებულება ორ X და Y ფუნქციას შორის, თუ სამი იაკობიანი: $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$, $\frac{D(X, Y)}{D(y, z)}$, $\frac{D(X, Y)}{D(z, x)}$ არ ეტოლება იგივურად ნულს. საზოგადოთ, იმისათვის რომ n $u_1, u_3, \ldots, u_n$, ფუნქცია $n+p$ დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}$ ცვლადის იყვნენ შებმული ერთი დამოკიდებულებით, აუცილებელია, რომ ყველა ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots x_{a_n})}$$

იყოს იგივურად ნულის ტოლი; აქ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ მაჩვენებლები წარმოადგენენ ნებითი n რიცხვს $n+p$ დაწყებითი მთელი რიცხვებიდან.

2) პირობა საკმარისია. განვიხილოთ ოთხი დამოუკიდებელი ცვლადის ოთხი ფუნქციის სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l} X=f_1(x, y, z, t), \\ Y=f_2(x, y, z, t), \\ Z=f_3(x, y, z, t), \\ T=f_4(x, y, z, t), \end{array}\right\} \tag{46}$$

ისეთი, რომ დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial t} \end{vmatrix}$$

იგივურად იყოს ნული. ვიგულისხმოთ ჯერ, რომ პირველი რიგის ერთი მინორთაგანი, მაგალითად $\delta=\frac{D(f_1, f_3, f_3)}{D(x, y, z)}$, იგივურად არ არის ნული. ამ შემთხვევაში (46) პირველი სამი განტოლებიდან შეიძლება ვიპოვოთ, თუ მათ ამოვხსნით x, y, z-ის მიმართ:

$$x=\varphi_1(X, Y, Z, t),\quad y=\varphi_2(X, Y, Z, t),\quad z=\varphi_3(X, Y, Z, t), \tag{47}$$

საიდანაც

$$T=f_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t)=F(x, y, z, t). \tag{48}$$

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს F ფუნქცია არ შეიცავს t ცვლადს, ე. ი. რომ გვაქვს იგივურად $\frac{\partial F}{\partial t}=0$. მართლაც,

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial t}; \tag{49}$$

მაგრამ უცხადო $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ფუნქციების კერძო წარმოებულები $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$ მოცემულია შემდეგი სამი განტოლების საშუალებით:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial f_3}{\partial t}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

(49) და (50) განტოლებები წარმოადგენენ ოთხ განტოლების სისტემას $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$-ის მიმართ. მათგან ადვილად ვიპოვით $\frac{\partial F}{\partial t}$-ს მნიშვნელობას; მართლაც, თუ Δ დეტერმინანტის უკანასკნელი სვეტის ელემენტებს მივუმატებთ პირველი სვეტის ელემენტებს, გამრავლებულს $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$-ზე, მეორეს ელემენტებს, გამრავლებელს $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$-ზე, და მესამეს ელემენტებს, გამრავლებულს $\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$-ზე, ჩვენ მივიღებთ, (50) ტოლობის ძალით, $\Delta=\delta\cdot\frac{\partial F}{\partial t}$. ვინაიდან δ ნულს არ ეტოლება, აუცილებელია, რომ F არ შეიცავდეს t ცვლადს; მაშასადამე, ოთხ X, Y, Z, T ფუნქციას შორის არსებობს შემდეგი სახის დამოკიდებულება:

$$T=F(X, Y, Z).$$

შეიძლება შევნიშნოთ, რომ ამ ოთხ ფუნქციას შორის არ არსებობს სხვა თანაფარდობა, რომელიც არ არის დამოკიდებული x, y, z, t-საგან. წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლებოდა გამოგვეყვანა დამოკიდებულება X, Y, Z შორის და, მაშასადამე, მინორი δ იქნებოდა ნულის ტოლი.

გადავიდეთ ახლა იმ შემთხვევაზე, როცა Δ დეტერმინანტის პირველი რიგის ყველა მინორი იგივურად ტოლია ნულის, მაგრამ ერთი მაინც მეორე რიგის მინორიდან, მაგალითად $\delta'=\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$, არ ეტოლება იგივურად ნულს.

(46) ორი პირველი განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$x=\varphi_1(X, Y, z, t),\ y=\varphi_2(X, Y, z, t),$$

მაშასადამე:

$$Z=f_3(\varphi_1, \varphi_2, z, t)=F_1(X, Y, z, t),\ T=F_2(X, Y, z, t).$$

დავამტკიცოთ, რომ, მაგალითად, $\frac{\partial F_1}{\partial t}=0$. სამი ტოლობიდან:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}=\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t},$$

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

$$0=\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t},$$

იმავე გზით, როგორც ზემოთ, ვღებულობთ დამოკიდებულებას:

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, t)}=\delta'\frac{\partial F_1}{\partial t};$$

ამრიგად,

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}=0.$$

სრულიად ასევე ვიპოვით:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t}=0.$$

ამგვარად ამ შემთხვევაში ოთხ X, Y, Z, T ფუნქციას შორის არსებობს ორი სხვადასხვა დამოკიდებულება:

$$Z=F_1(X, Y),$$

$$T=F_2(X, Y).$$

X, Y, Z და T-ს შორის არ შეიძლება არსებობდეს არავითარი მესამე ამ ორისაგან განსხვავებული დამოკიდებულბა, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ გამოვიყვანდით X და Y-ს შორის დამოკიდებულებას და გვექნებოდა: $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}=0$, რაც ეწინააღმდეგება დებულებას.

დაბოლოს, იაკობიანის:

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, t)}$$

მეორე რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლი რომ ყოფილიყო, ხოლო ოთხი X, Y, Z, T ფუნქცია არ ყოფილიყო მუდმივი, მაშინ ჩვენ მსგავსადვე ვნახავდით, რომ ამ ფუნქციებიდან სამი არის ფუნქცია მეოთხის. მოყვანილ მსჯელობას, ცხადია, აქვს სრულიად ზოგადი ხასიათი. თუ n დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ფუნქციებისათვის იაკობის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ისე როგორც ყველა მისი მინორი $n-r+1$ სტრიქონში, მაგრამ ერთი მაინც მინორებიდან $n-r$ სტრიქონში ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ არსებობს r სხვადასხვა დამოკიდებულება n ფუნქციათა შორის, და r ფუნქცია ამ ფუნქციებიდან შეიძლება გამოსახულ იქნეს დანარჩენი $n-r$-ის საშუალებით, მასთან ამ უკანასკნელთა შორის არ არსებობს არავითარი დამოკიდებულება, რომელიც არ შეიცავს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებს.

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს შემდეგი დებულება, რომელიც შეიძლება ანალოგიურად მივიღოთ.

იმისათვის, რომ $n+p$ დამოუკიდებელი ცვლადის n ფუნქცია იყოს შებმული დამოკიდებულებით, რომელიც არ შეიცავს ამ ცვლადებს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იაკობის ყველა დეტერმინანტი ამ n ფუნქციიდან n ნებითი დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ იყოს იგივურად ნულის ტოლი. კერძოდ, იმისათვის, რომ ორი $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქცია იყოს ფუნქცია ერთი-მეორის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესაბამი $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ და $\frac{\partial F_2}{\partial x_i}$ კერძო წარმოებულები იყვნენ პროპორციული.

შენიშვნა. ძირითად თეორემაში შემავალი $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ფუნქციები შესაძლოა დამოკიდებული იყვნენ, გარდა ამისა, კიდევ რამდენიმე $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადზე, რომლებიც განსხვავებულია $x_1, x_2, \ldots, x_n$-საგან. თუ იაკობის $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ დეტერმინანტი იგივურად ტოლია ნულის, მაშინ $F_1, F_3, \ldots, F_n$ ფუნქციები არიან შებმული ერთი ან რამდენიმე დამოკიდებულებით, რომლებიც არ შეიცავს $x_1, x_3, \ldots, x_n$ ცვლადებს: მაგრამ დანარჩენი $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ცვლადები, საზოგადოდ, შევლენ ამ დამოკიდებულებებში.

გამოყენება. წინა თეორემა მეტად მნიშვნელოვანია ანალიზისათვის. ის საშუალებას გვაძლევს, მაგალითად, დავამტკიცოთ ძირითადი თვისება ლოგარითმისა, მისი არითმეტიკული განსაზღვრით სარგებლობის გარეშე. მართლაც, ინტეგრალური აღრიცხვის დასაწყისში იქნება დამტკიცებული, რომ არსებობს ფუნქცია, სავსებით განსაზღვრული ცვლადის ყველა დადებითი მნიშვნელობისათვის, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობას ნულს როცა $x=1$ და რომლის წარმოებული ეტოლება $\frac{1}{x}$-ს. ვთქვათ $f(x)$ არის ეს ფუნქცია; დავუშვათ

$$u=f(x)+f(y), \quad v=xy.$$

ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix}=0.$$

მაშასადამე არსებობს შემდეგი სახის დამოკიდებულება:

$$f(x)+f(y)=\varphi(xy);$$

რომ განვსაზღვროთ φ ფუნქცია, საკმარისია დავუშვათ $y=1$; ეს იძლევა $f(x)=\varphi(x)$, და ვინაიდან x ნებისმიერია, ამიტომ ჩვენ გვაქვს:

$$f(x)+f(y)=f(xy).$$

ჩვენ ვხედავთ, თუ როგორ შეეძლო ლოგარითმის წინა განსაზღვრას მივეყვანეთ ლოგარითმის ძირითად თვისებებზე, რომ ამ უკანასკნელთა აღმოჩენა წინ არ უსწრებდეს ინტეგრალური აღრიცხვის გაცოგონება.

რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა შეიძლება გავრცელებულ იქნეს იაკობის დეტერმინანტზე. ვთქვათ $F_1, F_2, \ldots, F_n$ არის $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების n ფუნქციის სისტემა; დავუშვათ, რომ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ თვითონ არიან ფუნქციები n დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის: ჩვენ გვაქვს შემდეგი ფორმულა:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{51}$$

რომლის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს დეტერმინანტთა გამრავლების წესიდან და რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულიდან. დავწეროთ (51) ტოლობის მეორე ნაწილში მდგომი ორივე დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

სადაც მეორეში გადასმულია სტრიქონები და სვეტები. ნამრავლის პირველი ელემენტი ტოლია:

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

ე. ი. ტოლია $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$-ის, და იმავეს მივიღებთ დანარჩენებისათვის.

ფორმულა, რომელიც იძლევა რთული ფუნქციის წარმოებულს, შეიძლება გავრცელებული იქნეს ფუნქციონალურ დეტერმინანტებზე.

ვთქვათ, მაგალითად, X და Y არის ორი ფუნქცია სამი x, y, z ცვლადის, რომლებიც თავის მხრივ, წარმოადგენენ ორი u და v დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებს. ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}=\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}+\frac{D(X, Y)}{D(y, z)}\frac{D(y, z)}{D(u, v)}+\frac{D(X, Y)}{(D z, x)}\frac{D(z, x)}{D(u, v)};$$

ადვილად დავამტკიცებთ და განვაზოგადებთ ამ ფორმულას.

ჰ ე ს ი ს   დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი. ვთქვათ $f(x, y, z)$ არის სამი x, y, z ცვლადის ფუნქცია; ფუნქციონალურ დეტერმინანტს სამი $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ კერძო წარმოებულიდან ეწოდება ჰესის (Hesse) დეტერმინანტი:

$$h=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

მსგავსადვე შეიძლება შედგენილ იქნეს ჰესის დეტერმინანტი n ცვლადის ფუნქციისათვის; მისი როლი ერთი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის როლის ანალოგიურია. ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ, რომ ამ დეტერმინანტს ახასიათებს ინვარიანტობის შესანიშნავი თვისება. დავუშვათ, რომ x, y, z ცვლადებზე შესრულებულია წრფივი გარდაქმნა:

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha X+\beta Y+\gamma Z, \\ y&=\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z, \\ z&=\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z, \end{aligned}\right\} \qquad (51a)$$

სადაც X, Y, Z — ახალი ცვლადებია, ხოლო $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ — ისეთი მუდმივები, რომ გარდაქმნის დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავდება. ამ ჩასმის შემდეგ $f(x, y, z)$ ფუნქცია გადაიქცევა სამი X, Y, Z ცვლადისა ახალ $F(X, Y, Z)$ ფუნქციად. ვთქვათ $H(X, Y, Z)$ ჰესის დეტერმინანტია ამ ახალი ფუნქციისათვის; ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ თუ $h(x, y, z)$-ში x, y და z-ს შევცვლით მათი (51a) გამოსახვებით, მაშინ იგივურად გვექნება:

$$H(X, Y, Z) = \Delta^2 h(x, y, z).$$

მართლაც,

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X, Y, Z)} = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

თუ დროებით მივიღებთ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ და $\frac{\partial f}{\partial z}$-ს დამხმარე ცვლადებად, ჩვენ შეგვიძლია კიდევ დავწეროთ:

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

მაგრამ $F(X, Y, Z) = f(x, y, z)$ ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha'' \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial F}{\partial Z} &= \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}$$

და მაშასადამე,

$$\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \Delta;$$

ამგვარად

$$H = \Delta h \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} = \Delta^2 h.$$

ცხადია, რომ ამ თეორემას აქვს სავსებით ზოგადი ხასიათი.

გამოვიყენოთ ეს თვისება ჰესის დეტერმინანტზე. განვიხილოთ შემდეგი კუბიური ფორმა:

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

სადაც a, b, c, d კოეფიციენტები მუდმივი სიდიდეებია. თუ უკუვაგდებთ რიცხვითი მამრავლს $3 \cdot 2 = 6$, გვექნება:

$$h = \begin{vmatrix} ax+by, & bx+cy \\ bx+cy, & cx+dy \end{vmatrix} = (ac - b)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2;$$

ამგვარად ჰესის დეტერმინანტი არის ორმაგი კვადრატული ფორმა. უკუვაგდოთ ჯერ ის კერძო შემთხვევა, როცა ჰესის დეტერმინანტი არის ზუსტი კვადრატი; ზოგად შემთხვევაში ეს დეტერმინანტი შეიძლება დაიშალოს ორ სხვადასხვა წირფივი მამრავლთა ნამრავლად:

$$h=(mx+ny)\,(px+qy).$$

თუ ჩვენ მოვახდენთ წრფივი ჩასმას:

$$mx+ny=X,\ px+qy=Y,$$

მაშინ $f(x,\ y)$ ფორმა გადაიქცევა ახალ ფორმად:

$$F(X,\ Y)=AX^3+3BX^2Y+3CXY^2+DY^3;$$

მისთვის ჰესის დეტერმინანტი არის:

$$H(X,\ Y)=(AC-B^2)\,X^2+(AD-BC)\,XY+(BD-C^2)\,Y^2,$$

ზემოთ დამტკიცებული ინვარიანტობის თვისების თანახმად მან უნდა მიიღოს სახე: KXY. ამიტომ $A, B,\ C,\ D$ კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს ორ ტოლობას:

$$B^2-AC=0,\ BD-C^2=0.$$

აქედან ჩანს, რომ თუ ორი კოეფიციენტიდან ერთი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ განსხვავებული იქნება მეორეც; ამრიგად ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს:

$$A=\frac{B^2}{C},\quad D=\frac{C^2}{B},$$

$$F(X,\ Y)=\frac{1}{BC}\,(B^3X^3+3B^2CX^2Y+3BC^2XY^2+C^3Y^3)=\frac{(BX+CY)^3}{BC}$$

ასე, რომ $F(X,\ Y)$, და მაშასადამე, $f(x,\ y)$-იც ზუსტი კუბი იქნება. თუ უკუვაგდებთ ამ განსაკუთრებულ შემთხვევას, ჩვენ ვნახავთ, რომ $B=C=0$, და $F(X,\ Y)$ მრავალწევრი დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.

$$AX^3+DY^3.$$

ამგვარად $f(x,\ y)$ ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანა მოითხოვს მხოლოდ ამოხსნას მეორე ხარისხის განტოლებისა, რომელსაც მივიღებთ, ჰესის დეტერმინანტის ნულთან გატოლებით. ორი მამრავლი, რომლებადაც დაიშლება ჰესის დეტერმინანტი, იქნება კანონიკური ცვლადები X და Y.

თუ ჰესის დეტერმინანტი არის ზუსტი კვადრატი, მაშინ მსგავსადვე ჩვენ ვიპოვით, რომ $f(x,\ y)$ ფორმა დაიყვანება AX^3+BX^2Y სახეზე; თუ ჰესის დეტერმინანტი ნულის ტოლია იგივურად, მაშინ $f(x,\ y)$ არის ზუსტი კუბი:

$$f(x,\ y)=(\alpha x+\beta y)^3.$$

IV. ცვლადთა გარდაქმნა

59. ზოგადი შენიშვნები. ანალიზის ბევრ საკითხში ხშირად აუცილებელია მოვახდინოთ დამოუკიდებელ ცვლადთა შეცვლა. მსგავს შემთხვევებში ჩვენ უნდა შევძლოთ გამოვსახოთ წარმოებულები, აღებული ძველი ცვლადების მიმართ, ახალი ცვლადების მიმართ აღებულ წარმოებულებით. ჩვენ უკვე შევხვდით ამგვარ ამოცანას ინვერსიის შესახებ საკითხის განხილვის დროს. ზოგადი პრობლემის ამოსახსნელად არ არის საჭირო ახალი პრინციპების შემოღება. საკმა-

რისია გამოვიყენოთ რთული და უცხადო ფუნქციების წარმოებულთა მოძებნის წესები. იმ შემთხვევებში როცა რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადი გვაქვს, შეიძლება შესამჩნევად გავამარტივოდ გამოანგარიშებანი სრული დიფერენციალების გამოყენებით, დავეყრდნობით რა შემდეგ შენიშვნებზე, რომლებსაც ჩვენ გამოვთქვამთ, თუ ვიგულისხმებთ გარკვეულობისათვის, რომ გვაქვს სამი დამოუკიდებელი ცვლადი: x, y, z.

1. ვთქვათ u, v, w არის x, y, z ცვლადების სამი დიმოუკიდებელი (ე. ი. არ არიან შებმული არავითარი დამოკიდებულებით) ფუნქცია; მათ du, dv, dw სრულ დიფერენციალებს შორის არ შეიძლება არსებობდეს არავითარი დამოკიდებულება ასეთი სახის

$$\lambda\, du+\mu\, dv+\nu\, dw=0, \tag{52}$$

თუ კი λ, μ, ν კოეფიციენტები ერთდროულად ნული არ არის. მართლაც, თუ გაუტოლებთ ნულს dx, dy, dz-ის კოეფიციენტებს უკანასკნელ განტოლებაში, ჩვენ გვექნება λ, μ, ν-ს განსაზღვრისათვის სამი ერთგვაროვანი წრფივი განტოლება, და დეტერმინანტი, შედგენილა λ, μ, ν-ის კოეფიციენტებისაგან არის $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ იაკობიანი.

2. ვთქვათ ω, u, v, w არის სამი x, y, z დამოუკიდებელი ცვლადის ოთხი ფუნქცია, მასთან $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ ნულს არ უდრის. ჩვენ შეგვიძლია, პირიქით, x, y, z გამოვსახოთ u, v, w ფუნქციებში; თუ ჩავსვამთ ამ x, y, z მნიშვნელობებს ω გამოსახვაში, მივიღებთ სამი u, v, w ცვლადის ფუნქციას:

$$\omega=\Phi(u, v, w)$$

თუ რომელიმე ხერხით $d\omega$, du, dv, dw სრულ დიფერენციალებს შორის, რომლებიც აღებულია x, y, z დამოუკიდებელი ცვლადების მიმართ, დამყარებულია შემდეგი სახის დამოკიდებულება:

$$d\omega=P\, du+Q\, dv+R\, dw,$$

მაშინ P, Q, R კოეფიციენტები სათანადოთ ეტოლება $\Phi(u, v, w)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს:

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \quad R=\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ რთული ფუნქციის სრული დიფერენციალის მოძებნის წესის თანახმად (§ 24):

$$d\omega=\frac{\partial\Phi}{\partial u}du+\frac{\partial\Phi}{\partial v}dv+\frac{\partial\Phi}{\partial w}dw,$$

მეორე წრფივი დამოკიდებულების არსებობა $d\omega$, du, dv და dw-ს შორის შეუძლებელია, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებდით du, dv, dw-ს შორის (52) სახის დამოკიდებულებას, რომელშიც λ, μ, ν არ იქნებოდენ ერთდროულად ნულის ტოლი, რაც შეუძლებელია პირველი შენიშვნის თანახმად.

ჩვენ გამოვიყენებთ ამ ზოგად პრინციპებს იმ ამოცანების განხილვის დროს, რომლებიც უფრო ხშირად გვხვდებიან და რომლის განხილვაზედაც გადავდივართ.

54. ამოცანა 1. ვთქვათ y არის დამოუკიდებელი x ცვლადის ფუნქცია. ავიღოთ ახალი დამოუკიდებელი t ცვლადი, რომელიც შეპმულია x-თან ტოლობით $x=\varphi(t)$; საჭიროა გამოვხატოთ წარმოებულები y-ის x-ით t-სა და y-ის t-თი წარმოებულების საშუალებით.

ვთქვათ $y=f(x)$ განსახილავი ფუნქციაა, და ვთქვათ x-ის $\varphi(t)$-ით შეცვლის შემდეგ ეს ფუნქცია გადაიქცევა $F(t)=f[\varphi(t)]$. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად ვღებულობთ:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\varphi'(t),$$

საიდანაც

$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{\varphi'(t)}.$$

მიღებული შედეგი შეიძლება გამოვთქვათ შემდეგნაირად: რომ მივიღოთ წარმოებული y-ის x-ით, უნდა ავიღოთ წარმოებული ამ ფუნქციის t-თი და გავყოთ ის x-ის წარმოებულზე t-თი. წინა წესის გამოყენება ზემოთ მიღებული პირველი რიგის წარმოებულის გამოსახვაზე, გვაძლევს მეორე რიგის წარმოებულს:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\varphi'(t)}=\frac{y''_{t^2}\varphi'(t)-y'_t\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

კვლავ იმავე წესის გამოყენებით, მივიღებთ მესამე რიგის წარმოებულს:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}(y''_{x^2})}{\varphi'(t)},$$

ანუ გამოთვლის შესრულების შემდეგ,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{y'''_{t^3}[\varphi'(t)]^2-3y''_{t^2}\varphi'(t)\varphi''(t)+3y'_t[\varphi''(t)]^2-y'_t\varphi'(t)\varphi'''(t)}{[\varphi'(t)]^5}$$

ასეთივე ხერხით ჩვენ შეგვიძლია მიმდევრობით მივიღოთ უმაღლესი რიგის ყველა დანარჩენი წარმოებული. საზოგადოდ, n-ური რიგინ წარმოებული y-ის x-ით გამოითქმება $\varphi'(t)$, $\varphi''(t),\cdots,$ $\varphi^{(n)}(t)$-ს საშუალებით და უმაღლეს რიგის წარმოებულთა საშუალებით y-დან t-თი n რიგამდე ჩათვლით. წინა ფორმულები შეიძლება უფრო სიმეტრიულ სახეზე დავიყვანოთ. აღვნიშნოთ dx, dy, d^2x, $d^2y,\cdots,$ d^nx, d^ny-ით x და y-ის დიფერენციალები აღებული t ცვლადის მიმართ, და y', $y'',\cdots,y^{(n)}$-ით წარმოებულები y-დან x-ით; წინა ფორმულებს მაშინ შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}, \\ y'' &= \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}, \\ y''' &= \frac{d^3y dx^2 - 3d^2y\, dx\, d^2x + 3dy(d^2x)^2 - dy d^3x\, dx}{dx^5}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

დამოუკიდებელი t ცვლადი, რომლითაც აღებულია წინა ფორმულების მარჯვენა ნაწილებში ყველა დიფერენციალი, იგი შეიძლება შერჩეულ იქნეს სრულიად ნებისმიერად; ჩვენ გადავდივართ ნებითი წარმოებულიდან მიმდევნო წარმოებულზე შემდეგი ფორმულით გამოხატული კანონით:

$$y^{(n)} = \frac{d[y^{(n-1)}]}{dx},$$

სადაც მეორე ნაწილი არის ორი დიფერენციალის ფარდობა.

55. გამოყენებები. წინა პარაგრაფში მოცემული ფორმულებით სარგებლობენ ბრტყელი წირის შესწავლის დროს, როცა ამ წირის წერტილთა კოორდინატები გამოსახულია დამხმარე t ცვლადით:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t).$$

ამ მრუდის შესასწავლად მისი ერთი რომელიმე წერტილის მახლობლობაში აუცილებელია შევძლოთ გამოანგარიშება y-ის x-ით $y', y'', y''', \ldots$ წარმოებულები განსახილავი წერტილისთვის. მაგრამ წინა ფორმულები გვაძლევს ჩვენ ამ წარმოებულებს, რომლებიც გამოსახულია $f(t)$ და $\varphi(t)$ ფუნქციების წარმოებულებით, ისე რომ არ არის აუცილებელი ვიპოვოთ ცხადი გამოსახვა y-ისა x-ის საშუალებით, რაც ზოგჯერ პრაქტიკულად შეუძლებელია. პირველი ფორმულა:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

იძლევა წირის მხების საკუთხო კოეფიციენტს; y''-ის მნიშვნელობა შედის მნიშვნელოვან გეომეტრიულ ელემენტში, სიმრუდის რადიუსში, რომელიც გამოისახება, როგორც ჩვენ ამას შემდგომ ვნახავთ, ასე:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

იმისათვის, რომ გვქნეს R-ის მნიშვნელობა, როცა x და y კოორდინატები მოცემულია t პარამეტრის ფუნქციებში, საჭიროა მხოლოდ y' და y'' შევცვალოთ ზემოდ გამოყვანილი გამოსახვებით: ასე ადვილად ჩვენ მივიღებთ:

$$R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dx\, d^2y - dy\, d^2x|}.$$

აქ მარჯვენა მხარე შეიცავს x და y-ის მხოლოდ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს t-თი.

ამ საკითხთან დაკავშირებით მოგვყავს აქ შემდეგი საინტერესო შენიშვნა, რომელიც ამოღებულია ჩვენს მიერ ბ ე რ ტ რ ა ნ ი ს (Bertrand) Traité de Calcul différentiel et intégral-დან. (ტ. 1, გვ. 170).

დავუშვათ, რომ გვაქვს ბრტყელი წირი, რომლის წერტილთა x, y კოორდინატები ვგულისხმობთ არიან t პარამეტრის საშუალებით გამოხატული, და ვთქვათ მისი გეომეტრიული ელემენტის გამოანგარიშებისას ჩვენ მივიღეთ გამოსახვა:

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \cdot \cdot \cdot, d^nx, d^ny),$$

სადაც ყველა დიფერენციალი აღებულია t-ს მიმართ.

ვინაიდან, დაშვების თანახმად, ამ ელემენტს აქვს გეომეტრიული აზრი, ამიტომ მისი მნიშვნელობა არ უნდა იყოს დამოკიდებული დამოუკიდებელი t ცვლადის შერჩევაზე. თუ ჩვენ მივიღებთ $t=x$, მაშინ საჭიროა დავუშვათ $dx=dt$, $d^2x=d^3x=\cdot \cdot \cdot =d^nx=0$, და წინა გამოსახვა გადაიქცევა შემდეგ გამოსახვად:

$$f(x, y, y', y'', \cdot \cdot \cdot, y^{(n)}).$$

ეს ის შედეგია, რომელსაც ჩვენ მივიღებდით, თუ თავიდანვე დავუშვებდით, რომ განსახილავი მრუდის განტოლებას აქვს სახე: $y=\Phi(x)$, ე. ი. რომ ის ამოხსნილია y-ის მიმართ. რომ ამ კერძო შემთხვევიდან კვლავ გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე, საკმარისია $y', y'', y''' \cdot \cdot \cdot$ შევცვალოთ (53) ფორმულებიდან გამოყვანილი მათი მნიშვნელობებით. როცა ამ ჩასმას შევასრულებთ გამოსახვაში:

$$f(x, y, y', y'', \cdot \cdot \cdot y^{(n)}),$$

ჩვენ ისევ უნდა მივიღოთ $F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \cdot \cdot \cdot)$ გამოსახვა, რომლისგანაც გამოვდიოდით. თუ ეს არ იქნება, მაშინ შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ მიღებული შედეგი არ არის სამართლიანი[1]. მაგალითად, $\frac{dx\, d^2y + dy\, d^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$ გამოსახვას არ შეუძლია ჰქონდეს ბრტყელი წირისათვის არავითარი გეომეტრიული მნიშვნელობა, ცვლადის შერჩევაზე დამოუკიდებელი; მართლაც, როცა $x=t$ ეს განტოლება გადაიქცევა $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$-ად, და, მასში თუ y', y''-ს შევცვლით (53) ფორმულებიდან გამოყვანილი მათი მნიშვნელობებით, ჩვენ ვერ მივიღებთ ხელახლად წინა დიფერენციალურ გამოსახვას.

დიფერენციალურ განტოლებათა შესწავლის დროს აგრეთვე ხშირად სარგებლობენ (53) ფორმულებით. ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ ერთი დამოუკიდებელი x ცვლადის ყველა y ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0, \tag{54}$$

---

[1] ე. ი. რომ $F(x, y, y', y'' \cdot \cdot \cdot)$ არ გამოსახავს მრუდის გეომეტრიულ ელემენტს. (რედ.).

სადაც n მუდმივია. ავიღოთ ახალი დამოუკიდებელი t ცვლადი, დავუშვებთ რაა $x=\cos t$; ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin t},$$

$$d^2y=\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t},$$

და (54) განტოლება ჩასმის შემდეგ გადაიქცევა შემდეგ განტოლებად:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0. \tag{55}$$

ადვილად ვიპოვით ყველა ფუნქციას, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას; მართლაც, თუ მას გავამრავლებთ $2\frac{dy}{dt}$-ზე, მივიღებთ:

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2n^2y\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2\right]=0;$$

მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2=n^2a^2,$$

სადაც a აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს.

ამგვარად

$$\frac{dy}{dt}=n\sqrt{a^2-y^2},$$

ან

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{a^2-y^2}}-n=0.$$

პირველი ნაწილი არის $\arcsin\frac{y}{a}-nt$-ის წარმოებული; ამიტომ ეს სხვაობა უნდა ეტოლებოდეს ახალ b მუდმივს, და ჩვენ გვაქვს:

$$y=a\sin(nt+b);$$

ეს შეიძლება კიდევ წარმოდგენილი იქნას შემდეგი სახით:

$$y=A\sin nt+B\cos nt.$$

თუ დაუბრუნდებით ძველ x ცვლადს, დავასკვნით, რომ x-ის ყველა ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ (54) განტოლებას, მოთავსებული იქნება ფორმულაში:

$$y=A\sin(n\arccos x)+B\cos(n\arccos x),$$

სადაც A და B აღნიშნავენ ორ ნებისმიერ მუდმივს.

56. ამოცანა II. *x და y-ს შორის ყოველგვარი დამოკიდებულებისათვის გარდაქმნა $x=f(t, u)$, $y=\varphi(t, u)$ იძლევა შესაბამ დამოკიდებულებას t და u-ს შორის. მოთხოვნილია y-ის წარმოებული x-ით გამოვსახოთ t და u-ს საშუალებით და u-ს წარმოებულით t-თი.*

ეს ამოცანა უშუალოდ დაიყვანება წინა შემთხვევაზე. მართლაც, დავუშვათ, რომ ფორმულებში:

$$x=f(t, u), \quad y=\varphi(t, u)$$

ჩვენ შევცვალეთ u მისი მნიშვნელობით t-ს ფუნქციაში; მაშინ ეს ფორმულები მოგვცემს ჩვენ პირველყოფულ x და y ცვლადებს t ცვლადის ფუნქციაში. ამიტომ საკმარისია აქ გამოვიყენოთ ზოგადი ხერხი, მივიღებთ რა, x და y-ს რთულ ფუნქციად t-სი, მასთან u ცვლადმა უნდა შეასრულოს დამხმარე ფუნქციის როლი. ამგვარად ჩვენ მივიღებთ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}};$$

შემდეგ, ვიპოვით:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{dt},$$

ანუ, თუ შევასრულებთ გამოანგარიშებას,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial t}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2}\right]-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left[\frac{d^2f}{dt^2}+\ldots\right]}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\right)^3}.$$

საზოგადოდ, n-ური რიგის $y^{(n)}$ წარმოებული გამოიხატება t, u-ს და $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dt^n}$ წარმოებულების საშუალებით.

მაგალითად, დავუშვათ, რომ ჩვენ გვაქვს წირის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში: $\rho=f(\omega)$. შემდეგი ფორმულები იძლევა (ρ, ω) წერტილის სწორკუთხოვან კოორდინატებს:

$$x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega.$$

ვთქვათ ρ', ρ'', ... არიან ρ-ს წარმოებულები ω-ს მიმართ, რომელიც განხილულია როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი. წინა ფორმულებიდან ჩვენ გვაქვს:

$$dx=\cos\omega\, d\rho-\rho\sin\omega\, d\omega,$$

$$dy=\sin\omega\, d\rho+\rho\cos\omega\, d\omega,$$

$$d^2x=\cos\omega\, d^2\rho-2\sin\omega\, d\omega\, d\rho-\rho\cos\omega\, d\omega^2,$$

$$d^2y=\sin\omega\, d^2\rho+2\cos\omega\, d\omega\, d\rho-\rho\sin\omega\, d\omega^2,$$

და მაშასადამე,

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2\,d\omega^2,$$
$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=2d\omega\,d\rho^2-\rho\,d\omega\,d^2\rho+\rho^2\,d\omega^3.$$

ამნაირად სიმრუდის რადიუსისათვის ზემოთ მოყვანილი გამოსახვა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$R=\pm\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

57. ბრტყელი წირების გარდაქმნა. დავუშვათ, რომ გარკვეული აგების საშუალებით ჩვენ დავამყარეთ შესაბამისობა სიბრტყის ყოველ m წერტილსა და იმავე სიბრტყის მეორე M წერტილს შორის. თუ (x, y)-ით აღვნიშნავთ m წერტილ ს კოორდინატებს და (X, Y)-ით M-ის კოორდინატებს, მაშინ ჩვენი გარდაქმნის ძალით ამ ოთხ კოორდინატს შორის ადგილი ექნება ორ დამოკიდებულებას:

$$X=f(x, y),\quad Y=\varphi(x, y). \tag{56}$$

ეს ფორმულები განსაზღვრავენ წ ე რ ტ ი ლ ო ვ ა ნ გარდაქმნას. გეომეტრიაში ჩვენ გვაქვს ურიცხვო მაგალითი ასეთ გარდაქმნათა; მაგალითად, ასეთია ჰომოგრაფიული გარდაქმნა, გარდაქმნა უკუღმა რადიუს — ვექტორით (ინვერსია) და სხვა. თუ m წერტილი შემოწერს c მრუდს, მაშინ შესაბამი M წერტილი მოხაზავს მეორე C მრუდს, რომლის თვისებაც შეიძლება გამოვიყვანოთ c მრუდის თვისებებიდან და გამოყენებულ გარდაქმნათა თვისებებიდან. ვთქვათ $y', y'',\ldots$ წარმოებულებია y-ის x-ით, ხოლო $Y', Y'',\ldots$ — წარმოებულები Y-ის X-ით. რომ შევისწავლოთ C მრუდი, აუცილებელია შეგვეძლოს გამოვსახოთ $Y', Y''\ldots$ წარმოებულები $x, y, y', y'',\ldots$-ის საშუალებით. მაგრამ ეს სწორედ ის ამოცანაა, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ; ჩვენ გვაქვს:

$$Y'=\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'},$$

$$Y''=\frac{\frac{dY'}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\ldots\right)-\ldots}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)^3}$$

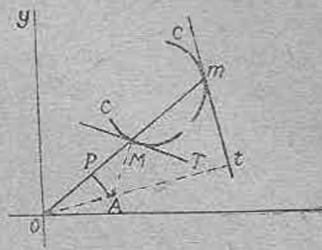
და ა. შ. ჩვენ ვხედავთ, რომ Y' დამოკიდებულია მხოლოდ x, y, y'-საგან; ამიტომ, თუ (56) გარდაქმნას გამოვიყენებთ, ორ c და c_1 მრუდზე, რომლებიც ეხება ერთმანეთს (x, y) წერტილში, მაშინ გარდაქმნილი C და C_1 წირები აგრეთვე შეეხება ერთმანეთს განსახილავ (X, Y) წერტილში. ეს შენიშვნა ნებას გვაძლევს შევცვალოთ c მრუდი ყოველგვარი სხვა მისი მხები მრუდით, თუ ლაპარაკია მხოლოდ გარდაქმნილი C მრუდის მხების მოძებნაზე.

მაგალითად, განვიხილოთ გარდაქმნა, განსაზღვრული ფორმულებით:

$$X=\frac{h^2x}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{h^2y}{x^2+y^2};$$

ეს გარდაქმნა არის გარდაქმნა უკუღმა რადიუს-ვექტორებით ანუ ი ნ ვ ე რ ს ი ა, პოლუსით კოორდინატთა სათავეში[1]. ვთქვათ m არის c მრუდის წერტილი, M—C მრუდის შესაბამი წერტილი., რომ მოვძებნოთ ამ C მრუდის მხები M წერტილში, ჩვენ უნდა ვისარგებლოთ იმ თვისებით, რომ უკუღმა რადიუს—ვექტორით გარდაქმნის დროს, შებრუნებული ფიგურა წრფისათვის არის წრეწირი, გამავალი ინვერსიის პოლუსზე.

თუ შევცვლით c მრუდს mt მხებით, მაშინ ფიგურა, შებრუნებული mt-სათვის, იქნება წრეწირი გამავალი ორ M და O წერტილზე, და რომლის ცენტრი ძევს სათავიდან mt-ზე დაშვებულ Ot მართობზე. ამ წრეწირის MT მხები მართობია AM-ის, და Mmt და mMT კუთხეები იქნება თანატოლი, როგორც mOt კუთხის დამატებითი კუთხეები. ამგვარად mt და MT მხებები იქნებიან ანტიპარალელური რადიუს-ვექტორის მიმართ[2].



ნახ. 5.

58. მხები გარდაქმნა. წინა გარდაქმნები არ იქნებიან ყველაზე ზოგადი იმათ შორის, რომლებიც გარდაქმნის ორ ერთიმეორის მხებ მრუდს ორ სხვა მრუდათ, რომლებიც აგრეთვე ერთმანეთს ეხებიან. დავუშვათ, რომ c მრუდის ყოველი m წერტილისათვის ჩვენ ვპოულობთ მეორე M წერტილს გარკვეული აგებით, რომელიც დამოკიდებულია არა მარტო თვით m წერტილის მდებარეობაზე, არამედ c მრუდის ამ m წერტილში მხების მიმართულებაზედაც. ამ გარდაქმნის განმსაზღვრელ ფორმულებს ექნება შემდეგი სახე:

$$X=f(x, y, y'), \quad Y=\varphi(x, y, y'). \tag{57}$$

გარდაქმნილი წირის მხების საკუთხო კოეფიციენტი Y' გამოისახება ასე:

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

საზოგადოდ, Y' დამოკიდებულია ოთხი x, y, y', y'' ცვლადისაგან; ამის გამო, თუ ჩვენ (57) გარდაქმნას გამოვიყენებთ (x, y) წერტილში თანამხებ ორ წირზე, მაშინ შესაბამი C და C'_1 წირებს ექნებათ საერთო (X, Y) წერტილი, მაგრამ საზოგადოდ არ შეეხებიან ერთმანეთს ამ წერტილში, თუ მხოლოდ y''-ს

---

[1] უკუღმა რადიუსებით გარდაქმნა ან ინვერსია მოცემული წრის მიმართ, h რადიუსით, ეწოდება ისეთ გარდაქმნას, როცა თითოეული წერტილი გადადის წრის იმავე რადიუსზე მდებარე მეორე წერტილში, მასთან r და r_1 მანძილები ამ წერტილებისა წრის ცენტრიდან შებმულია დამოკიდებულებით: $rr_1=h^2$. ამ დამოკიდებულებიდან ჩანს, რომ მონაკვეთი ამ წერტილებს შორის იყოფა ჰარმონიულად იმ წრის დიამეტრის ბოლოებით, რომელზედაც ისინი ძევს, და ამიტომ ორი წერტილიდან თითოეული ძევს მეორე წერტილის წრის მიმართ პოლარზე. (რედ.)

[2] ეს ნიშნავს, რომ mt და MT შეადგენენ Om რადიუს-ვექტორთან კუთხეებს, თანატოლს, მაგრამ მდებარეს რადიუსი-ვექტორის სხვადასხვა მხარეს.

არ ექნება ერთი და იგივე მნიშვნელობა ორივე c და c_1 წირისათვის. რომ გარდაქმნილი C და C_1 წირები ეხებოდეს ერთმანეთს მუდამ, როცა ერთმანეთს ეხება c და c_1 წირები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ Y' არ იყოს დამოკიდებული y''-საგან, ე. ი. რომ $f(x, y, y')$ და $\varphi(x, y, y')$ ფუნქციები აკმაყოფილებდეს პირობას: [1]

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y} y'\right)$$

ამ შემთხვევაში განხილულ გარდაქმნას ეწოდება **მხები გარდაქმნა**. აშკარაა, რომ წერტილოვანი გარდაქმნა არის კერძო შემთხვევა მხები გარდაქმნისა [2].

მაგალითად, განვიხილოთ ლეჟანრის გარდაქმნა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ c მრუდის ყოველ (x, y) წერტილს ეთანადება M წერტილი კოორდინატებით:

$$X=y', \quad Y=xy'-y;$$

ამ ფორმულებიდან ჩვენ ვღებულობთ:

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{xy''}{y''}=x,$$

საიდანაც ნათლად ჩანს, რომ ეს გარდაქმნა მართლაც მხები გარდაქმნაა. აგრეთვე ჩვენ გვექნება:

$$Y''=\frac{dY'}{dX}=\frac{dx}{y''dx}=\frac{1}{y''},$$

$$Y'''=\frac{dY''}{dX}=-\frac{y'''}{y''^3}$$

და ა. შ. წინა ფორმულებიდან ვღებულობთ:

$$x=Y', \quad y=XY'-Y, \quad y'=X,$$

---

[1] ეს პირობა იძლევა:

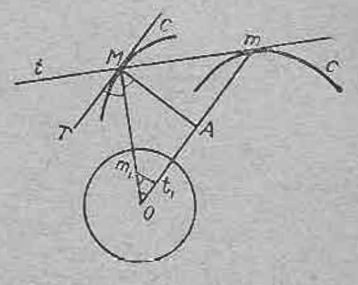
$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y} y'}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\frac{\partial f}{\partial y'} y''}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y} y'+\frac{\partial \varphi}{\partial y'} y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y} y'+\frac{\partial f}{\partial y'} y''}.$$

[2] ლეჟანრიმ და ამპერმა (Ampère) მოგვცა მრავალი მაგალითი ამ გარდაქმნათა. სოფუს ლიიმ (Sophus Lie) სხვადასხვა შრომებში განავითარა ზოგადი თეორია. იხ. კერძოდ, Geometrie der Berührungstransformationen; იხ, აგრეთვე Jacobi, Vorlesungen über Dynamik.

მხები გარდაქმნათა თეორია მოცემულია აგრეთვე გურსას წიგნში, Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre (თავი XI).

რომელიც მიგვითითებს გარდაქმნის ურთიერთობაზე. ყველა ეს თვისება ადვილად აიხსნება, თუ შევნიშნავთ, რომ წერტილი $X=y'$, $Y=xy'-y$ კოორდინატებით არის c მრუდის (x, y) წერტილზე მხების პოლუსი $x^2-2y=0$ პარაბოლის მიმართ. საზოგადოდ, თუ მივიღებთ M-ს c მრუდის m წერტილში მხების პოლუსად Σ კონუსური კვეთის მიმმართველის მიმართ, მაშინ M წერტილთა ადგილი არის C მრუდი, რომლის მხები M წერტილში არის m წერტილის პოლარი Σ-ს მიმართ. ამრიგად ორ c და C მრუდს შორის მყარდება ურთიერთ თანადობა. გარდა ამისა, თუ ჩვენ c მრუდს შევცვლით მეორე c_1 მრუდით, რომნლიც c-ს ეხება m წერტილში, მაშინ C_1 მრუდიც შეეხება C მრუდს M წერტილში.

ფ უ ძ ე წ ი რ ი. თუ c მრუდის სიბრტყეში აღებული O წერტილიდან დავუშვებთ OM მართობს ამ მრუდის მხებზე m წერტილში, მაშინ ამ მართობის ფუძეების ადგილი არის C მრუდი, რომელსაც ეწოდება ფ უ ძ ე წ ი რ ი (podaire) პირველი მრუდის მიმართ. ადვილად მივიღებთ გამოთვლით M წერტილის კოორდინატებს და დავრწმუნდებით, რომ ამგვარად მიღებული გარდაქმნა არის მხები გარდაქმნა, მაგრამ უფრო მარტივად შეიძლება მივიდეთ ამასთან შემდეგნაირად. განვიხილოთ γ წრე R რადიუსით და ცენტრით O-ში, ავიღოთ OM-ზე ისეთი m_1 წერტილი, რომ $Om_1 \cdot OM=R^2$. m_1 წერტილი არის mt მხების პოლუსი γ წრის მიმართ.



ნახ. 6.

ამრიგათ გარდაქმნა, რომელიც c-დან C-მდე მიგვიყვანს, შედგება ურთიერთ პოლარებისა და ინვერსიათა გარდაქმნებისაგან. თუ m წერტილი შემოწერს c მრუდს, მაშინ m_1 წერტილი, mt მხების პოლუსი, შემოწერს c_1 მრუდს, რომელიც ეხება m წერტილის პოლარებს γ წრის მიმართ, ე. ი. Om-ის მართობულ m_1t_1 წრფეს. C მრუდის MT მხები და c_1 მრუდის m_1t_1 მხები შეადგენენ რადიუს—ვექტორებთან თანატოლ Om_1M კუთხეს; ამიტომ, ჩვენ თუ გავავლებთ MA ნორმალს, მაშინ $AM\ddot{O}$ და AOM კუთხეები იქნება ტოლი, როგორც თანატოლი კუთხეების დამატებანი, და A იქნება Om რადიუსის შუა წერტილი. აქედან გამომდინარეობს, რომ ჩვენ მივიღებთ ფუძე წირის ნორმალს, თუ M წერტილს შევუერთებთ OM-ის შუა წერტილს.

59. ჰ ო მ ო გ რ ა ფ ი უ ლ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ე ბ ი. ყოველი y ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $y''=0$ განტოლებას, არის წრფივი ფუნქცია x ცვლადისა, და უკუღმა. მაგრამ თუ x და y ცვლადებზე ჩვენ შევასრულებთ ჰომოგრაფიულ გარდაქმნას [1],

$$x=\frac{aX+bY+c}{a''X+b''Y+c''}, \quad y=\frac{a'X+b'Y+c'}{a''X+b''Y+c''}, \tag{58}$$

მაშინ წრფე წირი შეიცვლება წრფე წირად; ამიტომ $y''=0$ განტოლება უნდა გადაიქცეს $\frac{d^2Y}{dX^2}=0$-განტოლებად. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, ჩვენ შევნიშნავთ, რომ ზოგადი ჰომოგრაფიული გარდაქმნა შეიძლება დაყვანილ იქნეს უფრო მარტივ სახის კერძო გარდაქმნათა წკრივზე. თუ ორივე a'', b'' კოეფიციენტი ნულს არ ეტოლება, მაშინ ჩვენ დავუშვებთ $X_1=a''X+b''Y+c''$. ვინაიდან, გარდა ამისა, შეუძლებელია ერთდროულად იყოს $ba''-ab''=0$, $a'b''-b'a''=0$ [2], ამიტომ

[1] ჰომოგრაფიული გარდაქმნა ეწოდება ისეთ წერტილოვან გარდაქმნას, როცა წრფე წირები გადაიქცევა წრფედ. ანალიზურად ასეთი გარდაქმნა გამოისახება წილადოვანი წრფივი ფორმულებით X და Y-ის მიმართ, საერთო მნიშვნელით.

[2] ასეთ შემთხვევაში ორივე ფორმულიდან შეიძლებოდა გამოგვერიცხა $a''X+b''Y$ გამოთქმა, ასე რომ x და y არიქნებოდა დამოუკიდებელი. (რედ).

ჩვენ აღვნიშნავთ $Y_1=a'X+b'Y+c'$, ვიგულისხმებთ რა $a'b''-b'a''$-ს ნულისაგან განსხვავებულად. თუ შევცვლით X და Y-ს მათი მნიშვნელობებით როგორც X_1 და Y_1-ის ფუნქციები ჩვენ შეგვიძლია წინა ფორმულა დავწეროთ ასეთი სახით:

$$y=\frac{Y_1}{X_1},\quad x=\frac{\alpha X_1+\beta Y_1+\gamma}{X_1}=\alpha+\beta\frac{Y_1}{X_1}+\frac{\gamma}{X_1}.$$

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ზოგადი ჰომოგრაფიული გარდაქმნა შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს როგორც შემდეგი ზოგადი სახის მთელი წრფივი გარდაქმნის შეერთება:

$$x=aX+bY+c,\qquad y=a'X+b'Y+c',$$

და კერძო გარდაქმნის:

$$x=\frac{1}{X},\quad y=\frac{Y}{X}.$$

თუ შევასრულებთ ამ უკანასკნელ ჩასმას, ვიპოვით:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{XY'-Y}{X^2}:\frac{-1}{X^2}=Y-XY',$$

და შემდეგ,

$$y''=\frac{dy'}{dx}=-XY''(-X^2)=X^3Y''.$$

თუ ჩვენ მოვახდენთ მთელ ჰომოგრაფიულ გარდაქმნას, მაშინ გვექნება:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{a'+b'Y'}{a+bY'},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{(ab'-ba')Y''}{(a+bY')^3}.$$

ორივე შემთხვევაში $y''=0$ განტოლება გადაიქცევა $Y''=0$ განტოლებად.

ჩვენ ახლა გადავალთ მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადი ფუნქციის განხილვაზე და გარკვეულობისათვის ჩვენ მსჯელობას ჩავატარებთ ორი ცვლადის ფუნქციისათვის.

60. ამოცანა. III. ვ თ ქ ვ ა თ $\omega=f(x,y)$ ა რ ი ს ო რ ი დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი x დ ა y ც ვ ლ ა დ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა. ა ვ ი ღ ო თ ო რ ი ა ხ ა ლ ი u დ ა v დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ც ვ ლ ა დ ი, შ ე ბ მ უ ლ ი x დ ა y ც ვ ლ ა დ ე ბ თ ა ნ შ ე მ დ ე გ ი ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი თ:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v);\tag{59}$$

მ ო თ ხ ო ვ ნ ვ ლ ი ა ω-ა ს კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი x დ ა y-ი თ გ ა მ ო ვ ს ა ხ ო თ u დ ა v-ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ დ ა ω-ა ს კ ე რ ძ ო წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი თ u დ ა v-ს მ ი მ ა რ თ.

ვთქვათ $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ ჩასმის შემდეგ $f(x,y)$ ფუნქცია გადაიქცევა $\omega=F(u,v)$-ად. რთულ ფუნქციათა განწარმოების წესის თანახმად გვაქვს:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ იაკობიანი არ შეიძლება ნული იყოს;მართლაც, რომ ყოფილაყო $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}=0$, მაშინ ჩვენ მიერ მოხდენილ ცვლადთა შეცვლას არავითარი აზრი არ ექნებოდა, ვინაიდან მაშინ φ და ψ ფუნქციები დამოკიდებული იქნებოდენ-ერთი მეორეზე (§ 52). ამიტომ წინა განტოლებებიდან ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ და $\frac{\partial \omega}{\partial y}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= A\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\,\frac{\partial \omega}{\partial v}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= C\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + D\,\frac{\partial \omega}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

სადაც A, B, C და D გარკვეული ფუნქციებია u და v-სი; ეს ფორმულები წყვეტენ ჩვენ ამოცანას პირველი რიგის წარმოებულისათვის. ისინი გვიჩვენებს, რომ ω ფუნქციის x-ით წარმოებულის მისაღებად საჭიროა ω-ას წარმოებული u-ით გავამრავლოთ A-ზე, ω-ას წარმოებულიv-თი გავამრავლოთ B-ზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. რომ მივიღოთ კერძო წარმოებული y-ით, უნდა მოვიქცეთ ამგვარადვე, შევცვლით რა მხოლოდ A და B-ს შესაბამად C და D-თი. მეორე რიგის წარმოებულთა გამოსათვლელად საკმარისია გამოვიყენოთ პირველი რიგის წარმოებულებზე წინა ფორმულებით გამოსახული წესები; ამგვარად, ჩვენ გვექნება:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\,\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) =$$

$$= A\,\frac{\partial}{\partial u}\left(A\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\,\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) + B\,\frac{\partial}{\partial v}\left(A\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + B\,\frac{\partial \omega}{\partial v}\right),$$

ანუ, თუ მოვახდენთ გამოთვლებს:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = A\left(A\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + B\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\,\frac{\partial \omega}{\partial v}\right) +$$

$$+ B\left(A\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + B\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\,\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\,\frac{\partial \omega}{\partial v}\right).$$

სრულიად ასევე ჩვენ მივიღებთ $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$-ს და შემდეგ წარმოებულებსაც. ყოველი გაწარმოების დროს საკმარისია შევცვალოთ ოპერაციები $\frac{\partial}{\partial x}$ და $\frac{\partial}{\partial y}$ შესაბამად ოპერაციებით:

$$A\,\frac{\partial}{\partial u} + B\,\frac{\partial}{\partial v}, \quad C\,\frac{\partial}{\partial u} + D\,\frac{\partial}{\partial v};$$

ამრიგად ყველაფერი დაიყვანება A, B, C და D კოეფიციენტების გამოთვლაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ განტოლება:

$$a\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0 \tag{61}$$

მუდმივი a, b, c კოეფიციენტებით. ჩვენ შევეცდებით მივიყვანოთ ეს განტოლება რაც შეიძლება უფრო მარტივ სახეზე. პირველად ყოვლისა შევნიშნავთ, რომ თუ ადგილი აქვს ერთდროულად $a=c=0$, მაშინ არ არის საჭირო ამ განტოლების გამარტივება; ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოდ, რომ, მაგალითად c ნულს არ უდრის. შემოვიყვანოთ ორი ახალი u და v დამოუკიდებელი ცვლადი:

$$u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y,$$

სადაც α და β ორი განუსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტია. ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\alpha\frac{\partial\omega}{\partial u}+\beta\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

ასე რომ ამ შემთხვევაში $A=B=1$, $C=\alpha$, $D=\beta$. ზოგადი ხერხი გვაძლევს:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}.$$

და (61) განტოლება ღებულობს ასეთ სახეს:

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0.$$

აქ უნდა გავარჩიოთ რამდენიმე შემთხვევა.

პ ი რ ვ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ $b^2-ac>0$; თუ α და β-ად მივიღებთ შემდეგი განტოლების ორივე ფესვს:

$$a+2br+cr^2=0,$$

ჩვენ მივიყვანთ ჩვენს განტოლებას მარტივ სახეზე:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}=0.$$

ვინაიდან უკანასკნელი განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)=0,$$

ამიტომ აქედან სჩანს, რომ $\frac{\partial\omega}{\partial u}$ უნდა იყოს ფუნქცია მხოლოდ ერთი u ცვლადის; ვთქვათ $\frac{\partial\omega}{\partial u}=f(u)$. აღვნიშნოთ $F(u)$-ით ფუნქცია u-სი, რომლის $F'(u)$ წარმოებული $f(u)$-ს ტოლია; ვინაიდან $\omega-F(u)$-ს წარმოებული u-თი ნულის ტოლია, ამიტომ ეს სხვაობა არ არის დამოკიდებული u-ზე, და მაშასადამე, $\omega=F(u)+\Phi(v)$. შებრუნებული დებულება ცხადია. თუ დაუბრუნდებით x და y ცვლადებს, დავასკვნით, რომ ყველა ω ფუნქცია, რომლებიც (61) განტოლებას აკმაყოფილებს, იქნება ასეთი სახის:

$$\omega=F(x+\alpha y)+\Phi(x+\beta y),$$

სადაც F და Φ ნებისმიერი ფუნქციებია. მაგალითად, ზოგადი ინტეგრალი განტოლების:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},$$

რომელიც სიმის რხევის თეორიაში გვხვდება, იქნება:

$$\omega = f(x+ay) + \varphi(x-ay).$$

მ ე ო რ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ, $b^2 - ac = 0$. ავიღოთ α ტოლი $a+2br+cr^2=0$ განტოლების ორჯერადი ფესვისა, ხოლო β—განსხვავებული α-საგან; მაშინ კოეფიციენტი $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}$-თან იქნება ნულის ტოლი, ვინაიდან ის ტოლია $a+b\alpha+\beta(b+c\alpha)$. ამგვარად ჩვენი განტოლება მიიღებს სახეს: $\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$. ჩვენ ვხედავთ, რომ ω უნდა იყოს წრფივი ფუნქცია v-ის, ე. ი. $\omega = vf(u) + \varphi(u)$, სადაც $f(u)$ და $\varphi(u)$ ნებისმიერი ფუნქციებია. თუ დავუბრუნდებით x და y ცვლადებს, ჩვენ მივიღებთ ω-სთვის გამოსახვას:

$$\omega = (x+\beta y)\, f(x+\alpha y) + \varphi(x+\alpha y),$$

რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\omega = [x+\alpha y + (\beta-\alpha)y]\, f(x+\alpha y) + \varphi(x+\alpha y),$$

ანუ,

$$\omega = yF(x+\alpha y) + \Phi(x+\alpha y).$$

მ ე ს ა მ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. როცა $b^2 - ac < 0$, მაშინ აღარ შეიძლება გამოვიყენოთ წინა გარდაქმნა, თუ არ შემოვიყვანეთ წარმოსახვითი ცვლადები. მაგრამ შეიძლება α და β განვსაზღვროთ ისე ,რომ გვექნეს:

$$a + 2b\alpha + c\alpha^2 = a + 2b\beta + c\beta^2,\quad a + b(\alpha+\beta) + c\alpha\beta = 0,$$

ეს გვაძლევს:

$$\alpha+\beta = -\frac{2b}{c},\quad \alpha\beta = \frac{2b^2 - ac}{c^2};$$

α და β იქნება ნამდვილი, ვინაიდან მეორე ხარისხის განტოლებას:

$$r^2 + \frac{2b}{c}r + \frac{2b^2 - ac}{c^2} = 0,$$

რომლის ფესვებსაც α და β წარმოადგენენ, აქვს ნამდვილი ფესვები. განსახილავი დიფერენციალური განტოლება მაშინ ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\Delta_2\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = 0.$$

ეს $\Delta_2\omega = 0$ განტოლება, რომელიც ცნობილია ლ ა პ ლ ა ს ი ს (Laplace) განტოლების სახელწოდებით, თამაშობს ძირითად როლს ანალიზისა და მათემატიკური ფიზიკის მრავალ საკითხში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი II. ვიპოვოთ, თუ როგორი სახეს მიიღებს წინა განტოლება, თუ ჩვენ დავუშვებთ: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\rho\cos\varphi,$$

ან თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ და $\frac{\partial\omega}{\partial y}$-ის მიმართ,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}.$$

აქედან

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\cos^2\varphi\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho\,\partial\varphi}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho};$$

ანალოგიურ გამოსახვას მივიღებთ ჩვენ $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$-სთვისაც; თუ მათ შევკრებთ, გვექნება:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

61. ამოხსნის სხვა ხერხი. წინა ხერხი მეტად ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როცა ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებულებს ჩვენ ვეძებთ, იქნება უცნობი. მაგრამ ზოგჯერ ხელსაყრელია აგრეთვე ვისარგებლოთ შემდეგი ხერხით.

ვთქვათ $z=f(x, y)$ არის ორი დამოუკიდებელი x და y ცვლადის ფუნქცია; თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ x, y და z გამოსახულია ორი დამხმარე u და v ცვლადების საშუალებით, მაშინ dx, dy და dz სრულ დიფერენციალებს შორის გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

რომელიც ტოლფასია ორი განტოლების:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

საიდანაც, როგორც პირველი ხერხის გამოყენების შემთხვევაში, ჩვენ გამოვიყვანთ $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$-ს როგორც $u, v, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$-ს ფუნქციებს. მაგრამ შემდეგი წარმოებულთა გამოთვლისათვის ჩვენ მივმართავთ იმავე წესს. მაგალითად, რომ გამოვიანგარიშოთ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ და $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, ჩვენ გამოვალთ იგივეობიდან:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy,$$

რომელიც ტოლფასია ორი თანაფარდობის:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

მასთან ამ ტოლობათა მარცხენა ნაწილში $\frac{\partial f}{\partial x}$ წარმოებული შეცვლილი უნდა იქ-

ნას მისი გამოსახვით u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$-ს საშუალებით. გამოვალთ რა იგივეობიდან:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy,$$

ჩვენ ასევე მივიღებთ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ და $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$-ს; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$-სათვის მიღებული ორივე გამოსახვა უნდა იყოს ურთიერთ შორის იგივური, რაც გამოთვლის შესამოწმებლად გამოგვადგება. უმაღლესი რიგის წარმოებულებიც ასევე გამოითვლება.

ფართეულებზე გამოყენება. წინა მეთოდები გამოიყენება ფართეულების შესწავლის დროს. დავუშვათ, რომ S ფართეულის წერტილის კოორდინატები გამოსახულია ორი ცვლადი u, v პარამეტრის ფუნქციებში შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$x=f(u, v),\quad y=\varphi(u, v),\quad z=\psi(u, v). \tag{62}$$

ჩვენ მივიღებთ ამ ფართეულის განტოლებას, თუ გამოვრიცხავთ u და v ცვლადებს (62) სამი განტოლებიდან; ჩვენ შეგვიძლია მიზნად დავისახოთ შევისწავლოთ S ფართეულის თვისებები უშუალოდ თვით (62) განტოლებებით u, v ცვლადების გამორიცხვის გარეშე, რომელიც პრაქტიკულად შეიძლება შეუძლებელიც აღმოჩნდეს. პირველად ყოვლისა შევნიშნავთ, რომ იაკობის სამი დეტერმინანტი:

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)},\quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)},\quad \frac{D(f, \psi)}{D(u, v)}$$

არ შეიძლება ერთდროულად ნული იყოს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში u და v-ს გამორიცხვა მიგვიყვანდა ორ სხვადასხვა დამოკიდებულებაზე x, y, z-ს შორის, და წერტილი (x,y,z) კოორდინატებით შემოწერდა არა ფართეულს, არამედ მრუდს.

ვთქვათ, მაგალითად,

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\neq 0;$$

მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (62) პირველი ორი განტოლებიდან ჩვენ u და v გამოვსახეთ x, y ფუნქციებში და თუ შევიტანთ მათ (62)-ის მესამე განტოლებაში, მივიღებთ S ფართეულის განტოლებას: $z=F(x, y)$. რომ გამოვიკვლიოთ ეს ფართეული მისი ერთ-ერთი წერტილის მახლობლობაში, აუცილებელია გვქონდეს $F(x, y)$ ფუნქციის p, q, r, s, t, ... კერძო წარმოებულები გამოსახული u და v პარამეტრების საშუალებით. პირველი რიგის p და q წარმოებულები მიიღება ტოლობიდან:

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

რომელიც ტოლფასია ორი განტოლების:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u}&=p\frac{\partial f}{\partial u}+q\frac{\partial\varphi}{\partial u},\\ \frac{\partial\psi}{\partial v}&=p\frac{\partial f}{\partial v}+q\frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

საიდანაც გამოითვლება p და q. როცა ვიპოვით p და q-ს, ჩვენ მივიღებთ მხები სიბრტყის, თუ მათ გამოსახვებს ჩავსვამთ განტოლებაში:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

ეს გვაძლევს:

$$(X-x)\frac{D(y, z)}{D(u, v)}+(Y-y)\frac{D(z, x)}{D(u, v)}+(Z-z)\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=0. \tag{64}$$

(63) განტოლებას აქვს მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა. ისინი გვიჩვენებს, რომ მხები სიბრტყე გაივლის მხებ წრფეებზე ორი მრუდისა, რომლებიც დალაგებულია S ფართეულზე; ეს მრუდეები მიიღება, თუ ჩვენ, დავტოვებთ რა v-ს მუდმივად, ვცვლით u-ს, ან პირიქით, დავტოვებთ რა u-ს მუდმივად, ვცვლით v-ს [1].

მივიღებთ რა p და q-ს: $p=f_1(u, v)$, $q=f_2(u, v)$, ჩვენ ვიპოვით r, s და t-ს ტოლობებიდან:

$$dp=rdx+sdy,$$

$$dq=sdx+tdy,$$

სადაც თითოეული ამ ტოლობებიდან გვაძლევს ორ სხვადასხვა დამოკიდებულებას და ა. შ.

62. ამოცანა IV. თუ გვაქვს:

$$x=f(u, v, w), \quad y=\varphi(u, v, w), \quad z=\psi(u, v, w), \tag{65}$$

მაშინ ყოველი დამოკიდებულებისათვის x, y, z ცვლადებს შორის ეს ფორმულები იძლევა შესაბამ დამოკიდებულებას u, v, w-ს შორის. მოთხოვნილია z-ის კერძო წარმოებულები x და y-ით გამოვსახოთ u, v, w-ს საშუალებით და w-ს კერძო წარმოებულებით u და v-ს მიმართ.

ეს ამოცანა დაიყვანება წინა პარაგრაფში განხილულ ამოცანაზე. მართლაც, დაუშვათ რომ (65) ფორმულებში w შეცვლილია ფუნქციით u და v-ს; მაშინ ჩვენ გვექნება x, y, z-ის გამოსახვანი ორ u, v პარამეტრების საშუალებით, და საკმარისია გამოვიყენოთ წინა ხერხი (§ 39), მივიღებთ რა f, φ და ψ-ს რთულ ფუნქციებად u და v-სი, მასთან ცვლადი w განიხილება როგორც დამხმარე ფუნქცია u და v-სი. მაგალითად, პირველი რიგის p, q კერ-

---

[1] მხები სიბრტყის განტოლება შეიძლება აგრეთვე მივიღოთ უშუალოდ. ყოველი მრუდი, ფართეულზე მდებარე, განისაზღვრება u და v შორის: $v=\Pi(u)$ დამოკიდებულებით, და ამ მრუდის მხები წარმოიდგინება განტოლებებით:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\,\Pi'(u)}=\frac{Y-y}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\Pi'(u)}=\frac{Z-z}{\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\,\Pi'(u)}.$$

თუ აქედან გამოვრიცხავთ $\Pi'(u)$-ს, მივალთ (64) მხები სიბრტყის განტოლებაზე.

ძო წარმოებულთა გამოსათვლელად ჩვენ გვექნება ორი ტოლობა:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}=p\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=p\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

და იგივე შემდეგი წარმოებულებისათვის.

წინა ამოცანა გეომეტრიულად შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ. სივრცის ყოველი m წერტილისათვის (x, y, z) კოორდინატებით შეიძლება გარკვეული აგებით ვიპოვით მეორე შესაბამი M წერტილი (X, Y, Z) კოორდინატებით. თუ m წერტილი შემოწერს S ფართეულს, მაშინ M წერტილი შემოწერს Σ ფართეულს, რომლის ყველა თვისება უნდა გამოვიყვანოთ პირველი ფართეულის თვისებებიდან.

ფორმულებს, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ გარდაქმნას, აქვს სახე:

$$X=f(x, y, z), \quad Y=\varphi(x, y, z), \quad Z=\psi(x, y, z);$$

ვთქვათ

$$z=F(x, y), \quad Z=\Phi(X, Y)$$

ორი S და Σ ფართეულის განტოლებებია.

საჭიროა $\Phi(X, Y)$ ფუნქციის $P, Q, R, S, T, \ldots$ კერძო წარმოებულები გამოვსახოთ x, y, z-ის საშუალებით და $F(x, y)$ ფუნქციის $p, q, r, s, t \ldots$ კერძო წარმოებულებით. მაგრამ ეს სწორედ ის ამოცანაა, რომელიც ჩვენ ზრმოთ განვიხილეთ; განსხვავება მხოლოდ აღნიშვნებშია.

პირველი რიგის P და Q წარმოებულები დამოკიდებული არის მხოლოდ x, y, z, p, q-საგან, ასე რომ განსახილავი გარდაქმნა გარდაქმნის ორ ურთიერთ მხებ ფართეულს აგრეთვე ორ მხებ ფართეულად. მაგრამ, როგორც ჩვენ ახლა მაგალითებზე ვნახავთ, წინა გადაქმნები არ იქნება ყველაზე ზოგადი იმათგან, რომლებსაც ახასიათებს ნაჩვენები თვისება.

63. ლეჟანრის გარდაქმნა. ვთქვათ $z=(x, y)$ არის S ფართეულის განტოლება. დავაკავშიროთ S ფართეულის თითოეული $m(x, y, z)$ წერტილი შესაბამ $M(X, Y, Z)$ წერტილთან, მივიღებთ რა:

$$X=p, \quad Y=q, \quad Z=px+qy-z;$$

ვთქვათ $Z=\Phi(X, Y)$ არის M წერტილით მოხაზული Σ ფართეულის განტოლება. თუ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ z, p, q შეცვლილია $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$-ით, მაშინ ჩვენ მივიღებთ M წერტილის სამი კოორდინატის გამოსახვებს ორი დამოუკიდებელი x, y ცვლადის ფუნქციებში.

აღვნიშნოთ P, Q, R, S, T-თი $\Phi(X, Y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები X, Y-ით; დამოკიდებულება:

$$dZ=PdX+QdY$$

გვაძლევს:

$$p\,dx+q\,dy+x\,dp+y\,dq-dz=P\,dp+Q\,dq,$$

ან

$$x\,dp+y\,dq=P\,dp+Q\,dq.$$

დავუშვათ, რომ განსახილავი ფართეულისათვის p და q არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი, ე. ი. რომ არ შეიძლება არსებობდეს იგივეობა შემდეგი სახის: $\lambda\,dp+\mu\,dq=0$, რომელშიაც ერთდროულად ადგილი არ აქვს პირობას: $\lambda=\mu=0$. მაშინ წინა ტოლობებიდან ჩვენ ვიპოვით:

$$P=x, \quad Q=y.$$

რომ მივიღოთ R, S, T, ჩვენ ვისარგებლებთ ტოლობებით:

$$dP=R\,dX+S\,dY,$$
$$dQ=S\,dX+T\,dY,$$

რომლებიც, X, Y, P, Q-ს მათი მნიშვნელობებით შეცვლის შემდეგ, გადაიქცევა:

$$dx=R\,(r\,dx+s\,dy)+S\,(s\,dx+t\,dy),$$
$$dy=S\,(r\,dx+s\,dy)+T\,(s\,dx+t\,dy).$$

აქედან მივიღებთ:

$$Rr+Ss=1, \quad Rs+St=0,$$
$$Sr+Ts=0, \quad Ss+Tt=1,$$

და მაშასადამე,

$$R=\frac{t}{rt-s^2}, \quad S=\frac{-s}{rt-s^2}, \quad T=\frac{r}{rt-s^2}.$$

პირიქით, წინა ფორმულებიდან ვპოულობთ:

$$x=P,\ y=Q,\ z=PX+QY-Z,\ p=X,\ q=Y,$$

$$r=\frac{T}{RT-S^2}, \quad s=\frac{-S}{RT-S^2}, \quad t=\frac{R}{RT-S^2}.$$

უკანასკნელი ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ლეჟანრის გარდაქმნა არის ურთიერთი. გარდა ამისა, ეს არის მხები გარდაქმნა, ვინაიდან X, Y, Z, P, Q დამოკიდებული არიან x, y, z, p, q-საგან. ეს თვისებანი ლეჟანრის გარდაქმნისა ნათელი იქნება გეომეტრიულად, თუ შევნიშნავთ, რომ წინა ფორმულები განსაზღვრავს გარდაქმნას ურთიერთ პოლარებით შემდეგი პარაბოლოიდის მიმართ

$$x^2+y^2-2z=0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. R, S, T გამოსახვები გადაიქცევა უსასრულობად, თუ m წერტილით მოხაზული ფართეულის ყველა წერტილისათვის ადგილი აქვს პირობას: $rt-s^2=0$. ამ შემთხვევაში M წერტილი მოხაზავს არა ფართეულს, არამედ მრუდს, ვინაიდან

$$\frac{D(X,\ Y)}{D(x,\ y)}=\frac{D(p,\ q)}{D(x,\ y)}=rt-s^2=0,$$

$$\frac{D(X,\ Y)}{D(x,\ y)}=\frac{D(p,\ px+qy-z)}{D(x,\ y)}=y\,(rt-s^2)=0.$$

ეს სწორედ ის შემთხვევაა, რომელიც ჩვენ ზემოთ გამოვრიცხეთ განხილვიდან.

64. ამპერის გარდაქმნა. დავტოვოთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნები და დავუშვათ

$$X=x, \quad Y=q, \quad Z=qy-z.$$

ტოლობა:

$$dZ=P\,dX+Q\,dY$$

გადაიქცევა

$$q\,dy+y\,dq-dz=Pdx+Q\,dq,$$

ან

$$ydq-pdx=Pdx+Qdq.$$

ამგვარად ჩვენ გვაქვს:

$$P=-p, \; Q=y,$$

და, პირიქით,

$$x=X, \quad y=Q, \quad z=QY-Z, \quad p=-P, \quad q=Y;$$

აქედან სჩანს, რომ ამპერის გარდაქმნა არის მხები გარდაქმნა და, გარდა ამისა, ის არის ურთიერთი. ტოლობა:

$$dP=RX+SdY$$

იძლევა

$$-r\,dx-s\,dy=R\,dx+S(s\,dx+t\,dy),$$

ე. ი.

$$R+Ss=-r, \quad St=-s,$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$R=\frac{s^2-rt}{t}, \quad S=-\frac{s}{t}.$$

ტოლობიდან: $dQ=S\,dX+T\,dY$ ჩვენ აგრეთვე ვიპოვით:

$$T=-\frac{1}{t}.$$

როგორც დამატება ამ ფორმულების, ვიპოვოთ ყველა $f(x, y)$ ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას: $rt-s^2=0$. ვთქვათ S არის $z=f(x, y)$ განტოლებით წარმოდგენილი ფართეული, Σ—გარდაქმნილი ფართეული, და $Z=\Phi(X, Y)$ არის Σ ფართეულის განტოლება. R-ის გამოსახვიდან გვაქვს:

$$R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}=0;$$

მაშასადამე, Φ უნდა იყოს X-ის წრფივი ფუნქცია:

$$Z=X\varphi(Y)+\psi(Y),$$

სადაც φ და ψ ნებითი ფუნქციებია Y-ის. უკანასკნელი განტოლებიდან ვღებულობთ.

$$P=\varphi(Y), \quad Q=X\varphi'(Y)+\psi'(Y),$$

და S ფართეულის წერტილის (x, y, z) კოორდინატები გამოისახება პირიქით ორი X, Y ცვლადის ფუნქციებში ფორმულებით:

$$x=X, \; y=X\varphi'(Y)+\psi'(Y), \; z=Y[(X\varphi'(Y)+\psi'(Y)]-X\varphi(Y)-\psi(Y).$$

ჩვენ მივიღებთ ამ ფართეულის განტოლებას, თუ გამოვრიცხავთ X, Y-ს, ან რაც იგივეა, თუ გამოვრიცხავთ ცვლად α პარამეტრს შემდეგი ორი განტოლებიდან:

$$z=\alpha y-x\,\varphi(\alpha)-\psi(\alpha),$$
$$0=y-x\,\varphi'(\alpha)-\psi'(\alpha),$$

რომლებიდანაც პირველი წარმოადგენს მოძრავ სიბრტყეს α პარამეტრით, ხოლო მეორე მიიღება პირველის გაწარმოებით ამ პარამეტრის მიმართ. ამგვარად ჩვენ ვღებულობთ განფენად ფართეულებს, რომლებიც შესწავლილი იქნება ქვემოთ.

65. პოტენციალის განტოლება მრუდწირულ კოორდინატებში. გამოთვლები, რომლებიც საჭიროა ცვლადთა გარდაქმნის დროს, შეიძლება უმეტეს შემთხვევაში გამარტივებულ იქნას სხვადასხვა ხელოვნური ხერხებით. მაგალითისათვის ავიღოთ პოტენციალის განტოლება მრუდწირულ ორტოგონალურ კოორდინატებში[1]. ვთქვათ

$$F(x, y, z)=\rho,$$
$$F_1(x, y, z)=\rho_1,$$
$$F_2(x, y, z)=\rho_2$$

არის ისეთ ფართეულთა სამი ოჯახის განტოლებები, რომლებიც ქმნიან სამმაგ ორტოგონალურ სისტემას, ისე, რომ ორი რომელიმე ფართეული, რომლებიც ეკუთვნიან ორ სხვადასხვა ოჯახს გადიკვეთება ყოველგან სწორი კუთხით. ამ განტოლებათა ამოხსნით, ჩვენ მივიღებთ x, y, z-ს ρ, ρ_1, ρ_2 პარამეტრების ფუნქციებში:

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(\rho, \rho_1, \rho_2), \\ y&=\varphi_1(\rho, \rho_1, \rho_2), \\ z&=\varphi_2(\rho, \rho_1, \rho_2); \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

ρ, ρ_1, ρ_2 ქმნიან მრუდწირულ ორტოგონალურ კოორდინატთა სისტემას.

ვინაიდან სამი წინა ოჯახის ფართეულები ორტოგონალურია, ამიტომ ამ ფართეულთა გადაკვეთის წირთა მხებები, აღებული წყვილწყვილად, უნდა ქმნიდენ სამწახნაგოვან კუთხეს ამი სწორი ბრტყელი კუთხეებით; ამიტომ უნდა იყოს:

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}=0,\ \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0,\ \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=0, \tag{67}$$

სადაც S ნიშანი გვიჩვენებს, რომ φ უნდა შევცვალოთ φ_1-ით, შემდეგ φ_2-ით და ავიღოთ ჯამი ამ სამი ნამრავლის.

ორტოგონალობის ეს პირობები შეიძლება კიდევ წარმოდგენილი იქნეს ასეთი სახით:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\rho_1}{\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\rho_1}{\partial z}=0, \\ &\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\ldots=0, \frac{\partial\rho_1}{\partial x}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\ldots=0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

ვნახოთ, თუ როგორ სახეს მიიღებს პოტენციალის განტოლება:

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

ρ, ρ_1, ცვლადების მისართ. ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}$$

---

[1] Lamé, Traité des coordonnées curvilignées. იხ. აგრეთვე Bertrand, Traité de Calcul différentiel, ტ. 1, გვ. 181.

შემდეგ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \rho_1}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \rho_2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2}.$$

თუ ჩვენ შევკრებთ სამ ანალოგიურ განტოლებას, მაშინ (68) ტოლობების შედეგად, გამოირიცხება $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\,\partial \rho_1}$ სახის ყველა წარმოებული, და ჩვენ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\Delta_1(\rho)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\Delta_1(\rho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}+\Delta_1(\rho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}+$$
$$+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial \rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial \rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial \rho_2}, \tag{69}$$

სადაც Δ_1 და Δ_2 აღნიშნავენ ლამეს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ პ ა რ ა მ ე ტ რ ე ბ ს:

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

პირველი რიგის დიფერენციალური პარამეტრები: $\Delta_1(\rho), \Delta_1(\rho_1), \Delta_1(\rho_2)$ ადვილად გამოითვლება.

(66) განტოლებებიდან ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=1,$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial x}=0;$$

თუ ამ სამ განტოლებას გავამრავლებთ $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}$ და $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}$-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}\right)^2};$$

ამნაირადვე ჩვენ გამოვთვლით $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ და $\frac{\partial \rho}{\partial z}$-ს და ვიპოვით:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}\right)^2}.$$

თუ დავუშვებთ

$$H=\mathrm{S}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2,\quad H_1=\mathrm{S}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1}\right)^2,\quad H_2=\mathrm{S}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2}\right)^2,$$

მასთან ნიშანი $\mathbf{S}$ აღნიშნავს მუდამ, რომ φ უნდა შევცვალოთ φ_1-ით, შემდეგ φ_2-ით და მიღებული გამოთქმები შევკრიბოთ, გვექნება:

$$\Delta_1(\rho)=\frac{1}{H},\quad \Delta_1(\rho_1)=\frac{1}{H_1},\quad \Delta_1(\rho_2)=\frac{1}{H_2}.$$

$\Delta_2(\rho)$, $\Delta_2(\rho_1)$ და $\Delta_2(\rho_2)$ გამოსახვებს ρ, ρ_1 და ρ_2 ფუნქციაში ლამე ღებულობს საკმაოდ მომქანცავი გამოანგარიშებათა გზით, რომლებიც შეიძლება გავამარტივოთ შემდეგნაირად. 69) იგივეობაში:

$$\Delta_2(V)=\frac{1}{H}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial V}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial V}{\partial\rho_2}$$

დავუშვათ მიმდევრობით $V=x$, $V=y$ და $V=z$; ჩვენ გვექნება სამი დამოკიდებულება:

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\rho_2^2}+\Delta_2(\rho)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}+\Delta_2(\rho_1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_1}+\Delta_2(\rho_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho_2}=0,$$

რომლებიც რჩება მხოლოდ ამოსახსნელი $\Delta_2(\rho)$, $\Delta_2(\rho_1)$ და $\Delta_2(\rho_2)$-ის მიმართ. მაგალითად, თუ მათ გავამრავლებთ $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}$ და $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}$-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\Delta(\rho)\,H+\frac{1}{H}\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{H_1}\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{H_2}\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=0.$$

გარდა ამისა,

$$\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\rho},$$

და, თუ გავაწარმოებთ პირველს (67) ტოლობიდან ρ_1-ით, მივიღებთ:

$$\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2}=-\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1\partial\rho}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}.$$

ამგვარადვე მივიღებთ:

$$\mathbf{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho},$$

და, მაშასადამე,

$$\Delta_2(\rho)=-\frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial\rho}+\frac{1}{2HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}+\frac{1}{2HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}=$$

$$=-\frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\ln\left(\frac{H}{H_1H_2}\right)\right].$$

თუ დავუშვებთ:

$$H=\frac{1}{h^2},\quad H_1=\frac{1}{h_1^2},\quad H_2=\frac{1}{h_2^2},$$

ჩვენ შეგვიძლია უკანასკნელი ფორმულა ასეთი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\Delta_2(\rho)=h^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\ln\frac{h}{h_1h_2}\right).$$

სრულიად ასევე გვექნება:

$$\Delta_2(\rho_1)=h_1^2\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\ln\frac{h_1}{hh_2}\right),\quad \Delta_2(\rho_2)=h_2^2\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\ln\frac{h_2}{hh_1}\right).$$

ამგვარად (69) ფორმულა საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=h^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\ln\frac{h}{h_1 h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho}\right]+$$

$$+h_1^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}+\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\ln\frac{h_1}{h h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right]+h_2^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2^2}+\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\ln\frac{h_2}{h h_1}\right)\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right], \tag{70}$$

ან, მოკლედ,

$$\Delta_2 V=h h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{h}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_1}{h h_2}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_2}{h h_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right)\right].$$

გამოვიყენოთ ეს ფორმულა პოლარ კოორდინატებზე. თუ ρ_1 და ρ_2-ს შევცვლით θ და φ-ით, ჩვენ მივიღებთ გარდაქმნის შემდეგ ფორმულებს:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta;$$

კოეფიციენტები h, h_1, h_2 მიიღებენ მნიშვნელობებს:

$$h=1,\quad h_1=\frac{1}{\rho},\quad h_2=\frac{1}{\rho\sin\theta},$$

და ზოგადი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\Delta_2 V=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\right],$$

ან

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

როგორც ეს უშუალოდაც ადვილად გამოიყვანება.

სავარჯიშოები.

1. თუ დავუშვებთ $u=x^2+y^2+z^2$, $v=x+y+z$, $w=xy+yz+zx$, გვექნება იგივეობა: $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=0$. იპოვეთ დამოკიდებულება u, v, და w-ს შორის.

განაზოგადეთ ეს ამოცანა.

2. თუ

$$u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}},\ldots,\quad u_n=\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}},$$

მაშინ

$$\frac{D_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{D_1(x_1,x_2,\ldots x_n)}=\frac{1}{\left(1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

3. თუ მივიღებთ:

$$x_1=\cos\varphi_1,$$
$$x_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$x_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{D\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = (-1)^n \sin^n \varphi_1 \sin^{n-1} \varphi_2 \sin^{n-2} \varphi_3 \ldots \sin^2 \varphi_{n-1} \sin \varphi_n.$$

4. შეამოწმეთ უშუალო გამოანგარიშებით, რომ $z=F(x, y)$ ფუნქცია, განსაზღვრული ორი განტოლებით:

$$z = \alpha x + yf(\alpha) + \varphi(\alpha),$$
$$0 = x + yf'(\alpha) + \varphi'(\alpha),$$

სადაც α დამხმარე ცვლადია, აკმაყოფილებს განტოლებას $rt-s^2=0$, როგორიც არ უნდა იყოს $f(\alpha)$ და $\varphi(\alpha)$ ფუნქციები.

5. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი უცხადო $z=F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასეთი სახის განტოლებით:

$$y = x\varphi(z) + \psi(z),$$

აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$rp^2 - 2pqs + tp^2 = 0,$$

როგორიც არ უნდა იყოს $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციები.

6. $z=F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ორი განტოლებით:

$$z\varphi'(\alpha) = [y-\varphi(\alpha)]^2, \quad (x+\alpha)\varphi'(\alpha) = y-\varphi(\alpha),$$

სადაც α დამხმარე ცვლადია, აკმაყოფილებს განტოლებას: $pq=z$, როგორიც არ უნდა იყოს $\varphi(\alpha)$ ფუნქცია.

7. $z=F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ორი განტოლებით:

$$[z-\varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2-\alpha^2), \quad [z-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = \alpha x^2,$$

აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$pq = xy.$$

8. ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა. ვთქვათ y არის ორი x და α ცვლადის უცხადო ფუნქცია, განსაზღვრული განტოლებით:

$$y = \alpha + x\varphi(y),$$

და $u=f(y)$ კი y-ის რომელიმე ფუნქცია. ჩვენ გვაქვს საზოგადოდ:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}\left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right]$$

(ლაპლასი).

პ ა ს უ ხ ი. დამტკიცება ემყარება შემდეგ ორ ფორმულას:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right], \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

სადაც u არის y-ის ნებისმიერი ფუნქცია, ხოლო $F(u)$ კი u-ს ნებისმიერი ფუნქცია; შემდეგ უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ ფორმულა სამართლიანია რომელიმე n მნიშვნელობისათვის, მაშინ ის სამართლიანი იქნება აგრეთვე $n+1$ მნიშვნელობისთვისაც.

როცა $x=0$, y გადაიქცევა α-ად, u კი $f(\alpha)$-ად, და n-ური რიგის წარმოებული u-დან x-ით ღებულობს სახეს:

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}}[\varphi(\alpha)^n f'(\alpha)].$$

9. თუ $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, და $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ტოლობებს:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

მაშინ გვექნება იგივურად:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

10. თუ $V(x, y, z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

მაშინ მას დააკმაყოფილებს აგრეთვე ფუნქციაც:

$$\frac{1}{r}V\left(k^2\frac{x}{r^2},\quad k^2\frac{y}{r^2},\quad k^2\frac{z}{r^2}\right),$$

[კელვინი (Lord Kelvin)],

სადაც k — მუდმივია, ხოლო $r^2=x^2+y^2+z^2$.

11. ვთქვათ $V(x, y, z)$ და $V_1(x, y, z)$ არის $\Delta_2 V=0$ განტოლების ორი ინტეგრალი; ფუნქცია:

$$U=V(x, y, z)+(x^2+y^2+z^2)\,V_1(x, y, z)$$

აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\Delta_2\,\Delta_2\,U=0.$$

12. როგორი სახეს მიიღებს განტოლება:

$$(x-x^3)\,y''+(1-3\,x^2)\,y'-xy=0,$$

თუ მოვახდენთ დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნას $x=\sqrt{1-t^2}$.

13. როგორი სახეს მიიღებს განტოლება:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2\,(y-y^3)\,\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0,$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას $x=uv,\ y=\dfrac{1}{v}$.

14. ვთქვათ $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ არის $2n$ დამოუკიდებელი $x_1, x_2, \ldots, x_n;$ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების ფუნქცია, რომელიც, მეორე ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციაა $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ცვლადების მიმართ. თუ დავუშვებთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}=p_1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}=p_2,\ldots,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}=p_n$$

და მივიღებთ $p_1, p_2, \ldots, p_n$-ს დამოუკიდებელ ცვლადებად $u_1, u_2, \ldots, u_n$-ს მაგიერ, მაშინ φ ფუნქცია გადაიქცევა ფუნქციად:

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

უჩვენეთ, რომ

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_k}=u_k,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_k}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

15. S ფართეულის თითოეულ M წერტილზე გავლებულია ამ ფართეულის NM ნორმალი; ვთქვათ N ამ ნორმალის მოცემულ P სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილია. გადავზომოთ N წერტილში გამავალ P სიბრტყის მართობზე სიგრძე $Nm=NM$. ვიპოვოთ m წერტილით მოხაზული ფართეულის მხები სიბრტყე.

ეს გარდაქმნა არის მხები გარდაქმნა, შეისწავლეთ უკუღმა გარდაქმნა.

16. S ფართეულის თითოეულ ნორმალზე მისი ფუძიდან გადავზომოთ მუდმივი l სიგრძე; ამგვარად მიღებული წერტილები ქმნიან Σ ფართეულს (*პარალელური ფართეულები*); იპოვეთ ამ Σ ფართეულის მხები სიბრტყე.

იგივე ამოცანა ბრტყელი მრუდისათვის.

17. მოცემულია S ფართეული და O წერტილი; O შევაერთოთ S ფართეულის რომელიმე M წერტილთან. გავავლოთ OMN სიბრტყე OM რადიუსზე და S ფართეულის MN ნორმალზე M წერტილში; O წერტილში OMN სიბრტყეზე ავმართოთ OM რადიუსის მართობი და მასზე გადავზომოთ სიგრძე $OP=OM$. მაშინ P შემოსწერს Σ ფართეულს, რომელსაც ეწოდება *აფსიდალური* ფართეული S ფართეულის მიმართ. იპოვეთ ამ ფართეულის მხები სიბრტყე.

წინა გარდაქმნა არის მხები გარდაქმნა, და კავშირი S და Σ ფართეულებს შორის არის ურთიერთი. თუ S ფართეული წარმოადგენს ელიფსოიდს და O წერტილი იმყოფება მის ცენტრში, მაშინ Σ ფართეული არის ტალღის ზედაპირი.

18. *ალფანის* (Halphen) *დიფერენციალური ინვარიანტი.* დიფერენციალური განტოლება:

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0$$

არ იცვლის სახეს, თუ x და y-ზე შევასრულებთ ნებისმიერ ჰომოგრაფიულ გარდაქმნას (§ 37).

19. გამოსახვაში:

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

სადაც P, Q, R არის x, y, z-ის ფუნქციები, დავუშვათ

$$x=f(u,\ v,\ w),\quad y=\varphi(u,\ v,\ w),\quad z=\psi(u,\ v,\ w),$$

სადაც u, v, w ახალი ცვლადებია. მაშინ წინა გამოსახვა გადაიქცევა იმავე სახის გამოსახვად:

$$P_1du+Q_1dv+R_1dw,$$

სადაც P_1, Q_1, R_1 ფუნქციებია u, v, w-ს. დაამტკიცეთ იგივეობა:

$$H_1=\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)}H,$$

სადაც

$$H=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1=P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial u}-\frac{\partial P_1}{\partial w}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

20. *ორადწრფივი კოვარიანტი* ვთქვათ Θ_d არის დიფერენციალთა წრფივი ფორმა

$$\Theta_d=X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\ldots+X_n\,dx_n,$$

სადაც $X_1, X_2, \ldots, X_n$ არის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის ფუნქციები. განვიხილოთ გამოსახვა

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k,$$

რომელიც შეიცავს დიფერენციალთა ორ სისტემას d, δ, სადაც

$$a_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

თუ ჩვენ მოვახდენთ ცვლადთა რომელიმე გარდაქმნას:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

მაშინ Θ_d გამოსახვა გადაიქცევა იმავე სახის გამოსახვად:

$$\Theta'_d = Y_1 dy_1 + \ldots + Y_n dy_n,$$

სადაც $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ არის $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ის ფუნქციები; ვთქვათ აგრეთვე

$$a'_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}$$

$$H' = \sum_i \sum_k a'_{ik}\, dy_i\, \delta y_k;$$

თუ H-ში dx_i და δx_k დიფერენციალებს შეცვლით შემდეგი სიდიდეებით:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} dy_n,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_2} \delta y_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} \delta y_n,$$

მაშინ გვექნება იგივურად $H = H'$.

H-ს ეწოდება Θ_d გამოსახვის ორადწრფივი კოვარიანტი.

21. ბელტრამის (Beltrami) დიფერენციალური პარამეტრები. მოცემულია გამოსახვა:

$$E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2,$$

სადაც E, F, G არის x და y ცვლადების ფუნქციები; თუ ჩვენ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, მაშინ მივიღებთ იმავე სახის გამოხატვას:

$$E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

სადაც E_1, F_1, G_1 არიან u და v-ს ფუნქციები. ვთქვათ $\theta(x, y)$ არის x, y ცვლადთა რომელიმე ფუნქცია, რომელიც ცვლადთა ასეთი შეცვლის შემდეგ გადაიქცევა $\theta_1(u, v)$-ად. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{G\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 - 2F \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y} + E\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2}{EG - F^2} = \frac{G_1\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right)^2 - 2F_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + E_1\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial v}\right)^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G \frac{\partial \theta}{\partial x} - F \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E \frac{\partial \theta}{\partial y} - F \frac{\partial \theta}{\partial x}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - F_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v}}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} - F_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial u}}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}\right).$$

22. შვარციანი. თუ დავუშვებთ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, სადაც x არის t-ს ფუნქცია, ხოლო

a, b, c, d რაიმე მუდმივები, მაშინ

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2;$$

აქ $x', x'', x''', y', y'', y'''$ აღნიშნავენ წარმოებულებს, აღებულს t—ცვლადის მიხედვით.

23. ვთქვათ u და v არის ორი დამოუკიდებელი x და y ცვლადის რაიმე ფუნქცია. დავუშვათ

$$U=\frac{au+bv+c}{a''u+b''v+c''},\quad V=\frac{a'u+b'v+c'}{a''u+b''v+c''},$$

ადაც $a, b, c, \cdots, c''$—მუდმივებია. მიიღეთ აღნიშვნები:

$$(u, v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x};\quad (U, V)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}$$

და დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{(u, v)}=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial x}}{(U, V)},$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)}{(u, v)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial y}+2\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)}{(U, V)},$$

და ანალოგიური ტოლობები, რომლებიც მიიღებიან x და y-ის გადასმით.

[გურსა და პენლევე (Painlevé), *Comptes rendus*, 1887].

24. იპოვეთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობანი მანძილებისა წერტილიდან ბრტყელ მრუდემდე, ორმაგი სიმრუდის მრუდემდე, ორი მრუდის ორ წერტილს შორის, ორი ფართეულის ორ წერტილს შორის.

25. S ფართეულის წერტილები, რომლებისთვისაც მოცემულ n წერტილამდე მანძილთა კვადრატების ჯამი იქნება უდიდესი ან უმცირესი, წარმოადგენს ამ ფართეულზე ამ n წერტილისათვის საშუალო მანძილთა ცენტრიდან დაშვებულ ნორმალთა ფუძეებს.[1]

26. ყველა ოთხკუთხედიდან ოთხი მონაცემი გვერდით ის, რომელსაც აქვს უდიდესი ზედაპირი, შეიძლება ჩაიწეროს წრეწირში.

განაზოგადეთ n—კუთხედისათვის.

27. იპოვეთ ელიფსოიდში ჩახაზული სწორკუთხოვანი პარალელოპიპედის მოცულობა.

28. ვიპოვოთ მეორე რიგის ცენტრალური მრუდის ღერძები, განვიხილავთ რა წვეროებს როგორც წერტილებს, რომელთა მანძილი ცენტრიდან იქნება უდიდესი ან უმცირესი.

29. იგივე ამოცანა ელიფსოიდის ცენტრალური კვეთის ღერძებისათვის.

30. იპოვეთ ელიფსი უმცირესი ფართობით, რომელიც გაივლის სამკუთხედის სამ წვეროზე, და ელიფსოიდი უმცირესი მოცულობით, რომელიც გაივლის ტეტრაედრის ოთხ წვეროზე.

31. ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი წრეწირსა და წრფეს შორის სივრცეში.

32. კვადრატი D დეტერმინანტის მოდულისა წარმოსახვითი ელემენტებით არ აღემატება, ყოველი სტრიქონის ელემენტთა მოდულების კვადრატების ჯამების ნამრავლიდან კვადრატულ ფესვს. [ადამარი].

---

[1] საშუალო მანძილთა ცენტრი ის წერტილია, რომლის დეკარტის კოორდინატები ეტოლება მონაცემ წერტილთა ერთსახელა კოორდინატების საშუალო არითმეტიკულს. (რ ე დ.).

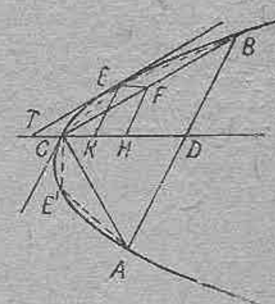
თ ა ვ ი IV

განსაზღვრული ინტეგრალები

I. კვადრატურის სხვადასხვა მეთოდები

66. პარაბოლის კვადრატურა. ბრტყელი მრუდის ფართობის გამოთვლა არის ერთერთი ამოცანა, რომლის გადაწყვეტა გეომეტრების განსაკუთრებულ ყურადღებას იზყრობდა. ძველთაგან დატოვებული მაგალითებიდან შესანიშნავია პარაბოლის კვადრატურა მოცემული არქიმედის მიერ. აქ ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ ამ უკანასკნელის მეთოდს.

ვთქვათ საძიებელია ფართობი, მოთავსებული პარაბოლის ACB რკალსა და AB ქორდას შორის. გავიყვანოთ CD დიამეტრი, შემაერთებელი AB ქორდის შუა D წერტილისა C წერტილთან, რომელშიაც მხები პარალელურია AB ქორდის. გავიყვანოთ BC და AC ქორდები და ავიღოთ E და E' წერტილები, რომლებშიაც მხებები შესაბამად პარალელურია BC და AC ქორდებისა. პირველად შევადაროთ BEC სამკუთხედის ფართობი ABC სამკუთხედის ფართობს. გავიყვანოთ ET მხები, რომელიც ჰკვეთს CB-ს T წერტილში, EF დიამეტრი, რომელიც ჰკვეთს CB-ს F წერტილში და, უკანასკნელად, გავიყვანოთ EK და FH წრფეები პარალელური AB ქორდის. პარაბოლის ძირითადი თვისების ძალით $TC=CK$; გარდა ამისა $CT=EF=KH$ და, მაშასადამე, $EF=\frac{CH}{2}=\frac{CD}{4}$. ფართობები BCE და BDC სამკუთხედებისა, რომლებსაც საერთო BC ფუძე აქვთ, შეეფარდებიან ერთიმეორეს, როგორც მათი სიმაღლეები, ანუ როგორც EF და CD მონაკვეთები. მაშასადამე, BCE სამკუთხედის ფართობი ტოლია BCD სამკუთხედის ფართობის ერთი მეოთხედისა, ანუ ABC სამკუთხედის S ფართობის ერთი მერვედის. ცხადია, რომ ACE' სამკუთხედს აქვს იგივე ფართობი. თუ მოვახდენთ იმავე მოქმედებებს თითოეულ BE, CE, CE', $E'A$ ქორდებზე, მივიღებთ ოთხ ახალ სამკუთხედს და თითოეულის ფართობი ტოლი იქნება $\frac{S}{8^2}$, და ა. შ. n-ური ოპერაცია მიგვიყვანს 2^n სამკუ-



ნახ. 7.

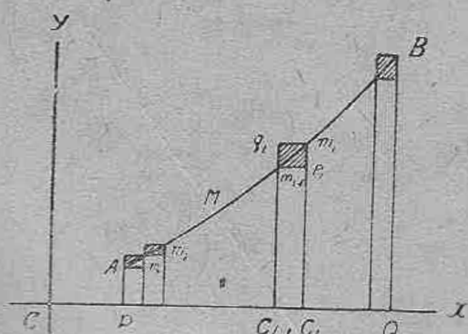
თხედამდე და მათგან თითოეულის ფართობი ტოლი იქნება $\frac{S}{8^n}$. ცხადია, რომ პარაბოლის სეგმენტის ფართობი ტოლია ზღვარის, რომლისკენაც მიისწრაფის ყველა ამ სამკუთხედის ფართობების ჯამი, როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება, ე. ი. ტოლია შემდეგი კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის:

$$S+\frac{S}{4}+\frac{S}{4^2}+\cdots+\frac{S}{4^n}+\cdots, \text{ ანდა } \frac{4S}{3}.$$

ამგვარად ვხედავთ, რომ საძიებელი ფართობი ტოლია იმ პარალელოგრამის ფართობის $\frac{2}{3}$-სა, რომელიც აგებულია AB და CD-ზე.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ მეთოდით მიღებული შედეგი დამოკიდებულია უმთავრესად პარაბოლის კერძო თვისებაზე და ამიტომ იგი ზოგადობას სავსებით მოკლებულია. უძველეს ხანაში მოცემული კვადრატურის სხვა მაგალითები, რომლებიც შეგვეძლო მოგვეყვანა, მხოლოდ ამოწმებენ ამ შენიშვნას; ყოველი ახალი მრუდი მოითხოვდა ახალ ხერხს. მაგრამ როგორიც არ უნდა ყოფილიყო ეს ხერხი, ფართობს ყოველთვის ყოფდენ ელემენტებად, რომელთა რიცხვს უსაზღვროდ ზრდიდნენ, და ყოველთვის საძიებელი იყო ასეთი ელემენტარული ფართობების ჯამის ზღვარი. ჩვენ არ შევჩერდებით ყველა ამ კერძო ხერხზე [1] და პირდაპირ გადავალთ დაყოფის ზოგად მეთოდზე, რომელიც ბუნებრივი გზით ინტეგრალურ აღრიცხვამდე მიგვიყვანს.

67. **ზოგადი მეთოდი.** ვთქვათ $y=f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, დადებითი და ზრდადი (a, b) შუალედში; ამ ფუნქციას შეესაბამება AMB მრუდის რკალი, მოთავსებული Ox ღერძის ზემოთ. დავსვათ ჩვენს წინაშე ამოცანა. გამოვთვალოთ ფართობი, მოთავსებული AMB რკალსა, PQ სეგმენტსა და AP და BQ ორდინატებს შორის (ნახ. 8). ამისათვის დავყოთ PQ სეგმენტი რამდენიმე მცირე სეგმენტად იმ წერტილების საშუალებით, რომელთა აბსცისებია $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, სადაც ეს აბსცისები იზრდებიან ინდექსებთან ერთად [2]. ამ დანაწილების წერტილებიდან გავიყვანოთ Oy ღერძის პარალელური წრფეები. ამით გამოსათვლელი ფართობი დანაწილდება რამოდენიმე მრუდწიროვან ტრაპეციად.



ნახ. 8.

მაგალითად განვიხილოთ მრუდწიროვანი ტრაპეცია $c_{i-1}m_{i-1}m_ic_i$; ამ ტრაპეციის ფართობი ცხადია, რომ მოთავსებულია $c_{i-1}m_{i-1}p_ic_i$ მართკუთხედის r_i ფართობსა და $c_{i-1}q_im_ic_i$ მართკუთხედის R_i ფართობს შორის. თუ აღვნიშნავთ გამოსათვლელ ფართობს $\mathfrak{A}$-თი, ამგვარად გვაქვს ორმაგი უტოლობა:

$$\Sigma r_i<\mathfrak{A}<\Sigma R_i.$$

[1] დიუჰამელის (Duhamel) „Traite"-ში იპოვით საკმაო რიცხვი მაგალითებს, რომლებშიაც მოყვანილია ფართობებისა, რკალებისა და მოცულობების უძველეს ხანაში მოცემული განმარტებანი.

[2] თითოეული (x_i, x_{i-1}) დანაყოფი უსაზღვროდ კლებულობს, როცა n იზრდება (რ ე დ.).

ადვილად გამოითვლება Σr_i და ΣR_i ჯამები:

$$s=\Sigma r_i=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}),$$
$$S=\Sigma R_i=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(b)(b-x_{n-1}).$$

$S-s$ სხვაობას აქვს სახე:

$$S-s=(x_1-a)\,[f(x_1)-f(a)]+(x_2-x_1)\,[f(x_2)-f(x_1)]+\cdots$$
$$\cdots+(b-x_{n-1})\,[f(b)-f(x_{n-1})].$$

ვთქვათ η არის $x_1-a,\ x_2-x_1,\cdots$ სხვაობებს შორის უდიდესი; ცხადია მარჯვენა მხარე გადიდდება, თუ ყველა ამ სხვაობას შევცვლით η-თი. მაშასადამე

$$S-s<\eta[f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1})],$$

ანდა

$$S-s<\eta\,[f(b)-f(a)].$$

$S-s$ სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ, როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ x_i-x_{i-1} სხვაობის მაქსიმუმი მიისწრაფის ნულისაკენ. იგივე პირობებში $S-\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}-s$ სხვაობები მით უმეტეს მიისწრაფის ნულისაკენ და $\mathfrak{A}$ ორი S და s ჯამების საერთო ზღვარია. ჩვენ გვაქვს, მაგალითად:

$$\mathfrak{A}=\lim\,[(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})]. \tag{1}$$

მსჯელობა სავსებით იგივე რჩება, როცა $f(x)$ ფუნქცია კლებადია $(a,\ b)$ შუალედში. თუ ფუნქციას აღებულ შუალედში აქვს მაქსიმუმის ან მინიმუმის განსაზღვრული რაოდენობა, მაშინ ჩვენ საერთო შუალედს დავანაწილებთ რამოდენიმე ნაწილობრივ შუალედად ორდინატების საშუალებით იმ წერტილებში, სადაც $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი.

მოვიყვანოთ ფერმას (Fermat) მაგალითი. ვთქვათ, გამოსათვლელია ფართობი, მოთავსებული $y=Ax^{\mu}$ მრუდსა, x ღერძსა და $x=a$, $x=b$ $(0<a<b)$ წრფეებს შორის, სადაც μ მაჩვენებელი ნებისმიერია. ამისათვის a და b-ს შორის მოვათავსოთ $n-1$ საშუალო გეომეტრიული რიცხვი ისე, რომ მივიღოთ მიმდევრობა

$$a,\ a\,(1+\alpha),\ a\,(1+\alpha)^2,\cdots,\ a\,(1+\alpha)^{n-1},\ b,$$

სადაც α რიცხვი აკმაყოფილებს პირობას $a(1+\alpha)^n=b$; თუ ამ რიცხვებს მივიღებთ დანაწილების წერტილების აბსცისებად, მაშინ შესაბამი ორდინატების მნიშვნელობა იქნება:

$$Aa^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{2\mu},\cdots,$$

ხოლო p-ური მართკუთხედის ფართობისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$[a(1+\alpha)^p-a\,(1+\alpha)^{p-1}]\,Aa^{\mu}\,(1+\alpha)^{(p-1)\mu}=Aa^{\mu+1}\alpha\,(1+\alpha)^{(p-1)\,(\mu+1)}.$$

ყველა მართკუთხედის ფართობების ჯამი კი იქნება

$$Aa^{\mu+1}\alpha[1+(1+\alpha)^{\mu+1}+(1+\alpha)^{2(\mu+1)}+\cdots+(1+\alpha)^{(n-1)\,(\mu+1)}];$$

თუ $\mu+1$ არ არის ნულის ტოლი, რასაც მივიღებთ თავიდანვე, მაშინ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი ტოლია

$$\frac{(1+\alpha)^{n(\mu+1)}-1}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1},$$

და, თუ $a(1+\alpha)^n$ სიდიდეს შევცვლით b-თი, მაშინ წინა ჯამი შეგვიძლიან დავწეროთ შემდეგნაირად:

$$A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}.$$

როდესაც α ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ $\frac{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}{\alpha}$ ფარდობას ზღვრად აქვს $(1+\alpha)^{\mu+1}$-ის წარმოებული α-თი, როცა $\alpha=0$, ე. ი. $\mu+1$; ამრიგად საძიებელი ფართობი ტოლია

$$\frac{A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})}{\mu+1}.$$

როცა $\mu=-1$, მაშინ წინა მეთოდით ფართობის გამოთვლა შეუძლებელია. ამ შემთხვევაში, ჩახაზულ მართკუთხედების ფართობების ჯამი ტოლია $nA\alpha$-სი და უნდა ვეძებოთ $n\alpha$ ნამრავლის ზღვარი, სადაც n და α რიცხვები შებმული არიან დამოკიდებულებით:

$$a(1+\alpha)^n=b.$$

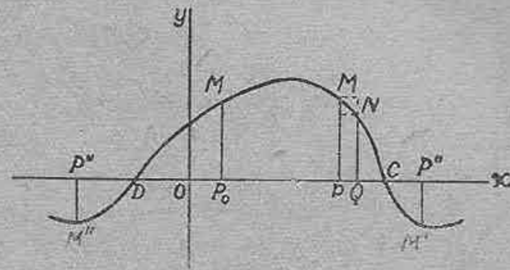
აქედან ჩვენ გამოგვყავს:

$$n\alpha=\ln\frac{b}{a}\,\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}=\ln\frac{b}{a}\,\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

სადაც ln-ით აღნიშნულია ნეპერის ლოგარითმი; როდესაც α მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$-ს ზღვრად აქვს e რიცხვი და, მაშასადამე, $n\alpha$ ნამრავლის ზღვარი იქნება $\ln\frac{b}{a}$. ამრიგად საძიებელი ფართობი ტოლია $A\ln\frac{b}{a}$.

68. პირველყოფილი ფუნქციები. ინტეგრალური აღრიცხვის აღმოჩენამ ფართობების გამოთვლა მიიყვანა ისეთი ფუნქციების მოძებნამდე, რომელთაც წარმოებულად მოცემული ფუნქცია აქვს. ვთქვათ $y=f(x)$ არის მრუდის განტოლება მართკუთხოვან კოორდინატთა ღერძების მიმართ და ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია. განვიხილოთ $\mathfrak{A}$ ფართობი, მოთავსებული ამ მრუდსა, x ღერძსა, უძრავი M_0P_0 და მოძრავი MP ორდინატებს შორის. ეს ფართობი არის ცვლადი MP ორდინატის x აბსცისის ფუნქცია. ცხადია, რომ $\mathfrak{A}$ ფართობი არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია, თუ კი $f(x)$ თვითონ არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია. რომ შევეხოთ ყველა შესაძლო შემთხვევას, საჭიროა შევთანხმდეთ შემდეგში: აღვნიშნოთ $\mathfrak{A}$-თი ალგებრული ჯამი ფართობებისა, შე-

მოსაზღვრული მოცემული მრუდით, x ღერძით და M_0P_0 და MP წრფეებით; მასთან ყოველ ნაწილს, რომლებიდან შედგება ეს ფართობი, მივანიჭოთ ნიშანი $+$, თუ ფართობი ძევს M_0P_0-ის მარჯვნით და Ox ღერძის ზევით, და ნიშანი $-$, თუ ფართობი ძევს M_0P_0-ის მარჯვნით და Ox ღერძის ქვევით. იმ ფართობებს, რომლებიც მოთავსებულია M_0P_0-ის მარცხნით, ჩვენ ავიღებთ საწინააღმდეგო ნიშნით. ამრიგად, როდესაც MP-ს ექნება $M'P'$-ის მდებარეობა, მაშინ $\mathfrak{A}$ ფართობი ტოლია ორი ფართობის სხვაობისა:



ნახ. 9.

$$M_0P_0C - M'P'C;$$

სრულიად ასევე, თუ MP იმყოფება $M''P''$-ში, მაშინ გვექნება

$$\mathfrak{A} = M''P''D - M_0P_0D.$$

ასეთი შეთანხმების შემდეგ დავამტკიცოთ, რომ ამნაირად განსაზღვრულ უწყვეტ $\mathfrak{A}$ ფუნქციას აქვს თავის წარმოებულად $f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ, ისე როგორც მე-9 ნახაზზეა ნაჩვენები, ორი მეზობელი MP და NQ ორდინატი x და $x+\Delta x$ აბსცისებით. ცხადია, რომ $\mathfrak{A}$ ფართობის $\Delta\mathfrak{A}$ ნაზრდი მოთავსებულია ისეთი ორი მართკუთხედის ფართობებს შორის, რომელთაც საერთო PQ ფუძე აქვთ, ხოლო სიმაღლეებად შესაბამად MN რკალის უდიდესი და უმცირესი ორდინატები.

თუ აღვნიშნავთ ორდინატების მაქსიმუმსა და მინიმუმს H და h-ით შესაბამად, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$h\,\Delta x < \Delta\mathfrak{A} < H\,\Delta x;$$

ანდა, თუ გაყოფით Δx-ზე, $h < \frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta x} < H$. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ H და h აქვთ საერთო MP ზღვარი ანუ $f(x)$, როცა Δx ნულისაკენ მიისწრაფის. მაშასადამე $\mathfrak{A}$ ფუნქციას აქვს თავის წარმოებულად $f(x)$ ფუნქცია. მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ ეს შედეგი უცვლელი დარჩება M წერტილის ყოველი მდებარეობისათვის.

თუ ჩვენთვის ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის ერთერთი პ ი რ ვ ე ლ ყ ო ფ ი ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა, ე. ი. რაიმე $F(x)$ ფუნქცია, რომელსაც წარმოებულად $f(x)$ ფუნქცია აქვს, მაშინ $\mathfrak{A} - F(x)$ სხვაობა, რომლის წარმოებული ნულის ტოლია, არის მუდმივი სიდიდე C (§ 8). რომ განვსაზღვროთ ეს C მუდმივი სიდიდე, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $\mathfrak{A}$ ფართობი ნულის ტოლია M_0P_0 წრფის $x=a$ აბსცისისათვის. ამიტომ

$$\mathfrak{A} = F(x) - F(a).$$

წინა მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ ფართობების გამოთვლა დაიყვანება პირველყოფილი ფუნქციების მოძებნაზე; მეორეს მხრით (ჩვენთვის ეს მეორე შედე-

გი უფრო მნიშვნელოვანია) იგი აგრეთვე გვიჩვენებს, რომ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არის სხვა ფუნქციის წარმოებული. ამრიგად ეს ძირითადი თეორემა მტკიცდება აქ ბრტყელი მრუდის ფართობის რამოდენიმე განუსაზღვრელი გეომეტრიული ცნების ნიადაგზე. ამ დამტკიცებით დიდი ხნის განმავლობაში კმაყოფილდებოდნენ, მაგრამ ამჟამად იგი საკმარისად ვერ ჩაითვლება. რომ ინტეგრალური აღრიცხვა იქნეს აგებული სავსებით მტკიცე საფუძველზე, ამისათვის აუცილებელია ამ თეორემის წმინდა ანალიზური დამტკიცება ისე, რომ არ მივმართოთ გეომეტრიულ წარმოდგენას. წინა დამტკიცება მოყვანილია არა მარტო მისი ისტორიული ინტერესის გამო, არამედ იმიტომაც, რომ იგი ჩვენ გვაძლევს ახალი დამტკიცებისათვის მთავარ ანალიზურ ელემენტს. მართლაც, ამ უკანასკნელში მთავარ როლს თამაშობს (1) სახის ჯამის და აგრეთვე უფრო ზოგადი სახის ჯამების შესწავლა.

სანამ შევუდგებოდეთ ასეთი ჯამების შესწავლას, საჭიროა მოვიყვანოთ რამოდენიმე შენიშვნა ფუნქციათა საერთო თვისებების შესახებ, კერძოდ—უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ. [1]

II. განსაზღვრული ინტეგრალები და მათთან დაკავშირებული გეომეტრიული ცნებები.

69. *S* **და** *s* **ჯამები.** ვთქვათ $f(x)$ არის შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც შეიძლება (a, b) შუალედში იყოს უწყვეტი ან წყვეტილი, სადაც $a<b$. წარმოვიდგინოთ, რომ (a, b) შუალედი დაყოფილია რამოდენიმე მცირე შუალედად: $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{p-1}, b)$, სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ რიცხვები შეადგენენ ზრდად მიმდევრობას. აღვნიშნოთ M და m-ით $f(x)$ ფუნქციის ნამდვილი ზედა და ქვედა საზღვრები მთელ (a, b) შუალედში, ხოლო M_i და m_i-ით—მისი საზღვრები (x_{i-1}, x_i) შუალედში და მივიღოთ:

$$S=M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_p(b-x_{p-1}),$$
$$s=m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_p(b-x_{p-1}).$$

(a, b) შუალედის მცირე შუალედებად დანაწილების ყოველ წესს შეესაბამება S და $s<S$ ჯამები. ცხადია, რომ ყველა S ჯამი მეტია, ვიდრე $m(b-a)$, რადგან ყველა M_i რიცხვი მეტია m-ზე; მაშასადამე, ამ S ჯამებს აქვს ნამდვილი ქვედა საზღვარი I. აგრეთვე ყველა s ჯამი ნაკლებია $M(b-a)$-ზე და, მაშასადამე, აქვს ნამდვილი ზედა საზღვარი I'. დავამტკიცოთ, **რომ I' არ შეიძლება I-ზე მეტი იყოს.** ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ, თუ მოცემულია

---

[1] განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობის შესახებ უმნიშვნელოვანეს შრომებიდან უნდა აღინიშნოს აქ რიმანის (*Riemann*) მემუარი, *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (*Werke*, 2-რე გამოცემა, 1892, გვ. 239 ფრანგული თარგმანი, *Oeuvres de Riemann, traduites par Laugel*, გვ. 225), და ჩვენს მიერ უკვე აღნიშნული დარბუს (*Darboux*) მემუარი, *Sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 2-რე სერია ტ. V).

(a, b) შუალედის ორი რაიმე დანაწილება, რომლებსაც შეესაბამებიან ჯამები: S და s, S' და s', მაშინ:

$$s<S', \quad s'<S.$$

ჯერ წარმოვიდგინოთ, რომ ყოველი (a, x_1), (x_1, x_2), ... შუალედი დაყოფილია უფრო მცირე შუალედებად, დაყოფის ახალი წერტილებით, და ვთქვათ

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{i-1}, x_2, y_{i+1}, \ldots, b$$

არის მიღებული ახალი მიმდევრობა. ასეთ ახალ დანაწილებას ვუწოდოთ პირველთან შედარებით მიმდევნო დანაწილება. აღვნიშნოთ S და s-ს ანალოგიური ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან (a, b) შუალედის ახალ დანაწილებას Σ და σ-თი და შევადაროთ ერთმანეთს S და Σ ერთის მხრით და s და σ მეორეს მხრით. მაგალითად, შევადაროთ S და Σ ჯამების ნაწილები, რომლებიც (a, x_1) შუალედს ეკუთვნიან. ვთქვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ნამდვილი ზედა და ქვედა საზღვრები (a, y_1) შუალედში არის M'_1 და m_1', M'_2 და m'_2—მისი ნამდვილი ზედა და ქვედა საზღვრები (y_1, y_2) შუალედში, ..., M'_k და m'_k—ნამდვილი ზედა და ქვედა საზღვრები (y_{k-1}, x_1) შუალედში. Σ ჯამის ნაწილი, რომელიც წარმოშობილია (a, x_1) შუალედით, ტოლია:

$$M'_1\ (y_1-a)+M'_2\ (y_2-y_1)+\cdots+M'_k\ (x_1-y_{k-1}).$$

რადგანაც $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$ რიცხვები არ აღემატება M_1-ს, ამიტომ, ცხადია. უკანასკნელი ჯამი არ შეიძლება $M_1(x_1-a)$-ზე მეტი იყოს. აგრეთვე Σ ჯამის ნაწილი, რომელიც გამოწვეულია (x_1, x_2) შუალედით არ შეიძლება $M_2(x_2-x_1)$-ზე მეტი იყოს და ა. შ. თუ ყველა ამ უტოლობას შევკრებთ, მივიღებთ $\Sigma \leqslant S$. ამგვარადვე ვნახავთ, რომ $\sigma \geqslant s$.

განვიხილოთ ახლა დანაწილების რაიმე ორი წესი, რომლებსაც შეესაბამება ჯამები S და s, S' და s'. თუ ერთდროულად განვიხილავთ ორივე დანაწილების წერტილებს, მივიღებთ მესამე ახალ დანაწილებას, რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ თითოეული მათგანის მიმართ როგორც მიმდევნო დანაწილება. ვთქვათ Σ და σ არის ჯამები, რომლებიც შეესაბამება ამ დამხმარე დანაწილებას. ზემოთ დამტკიცებულის ძალით ჩვენ გვაქვს უტოლობები

$$\Sigma\leqslant S, \quad \sigma\geqslant s, \quad \Sigma\leqslant S', \quad \sigma\geqslant s'.$$

რადგანაც Σ მეტია σ-ზე, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ $s'<S$, $s<S'$. ამრიგად ყველა S ჯამი მეტია, ვიდრე s ჯამები და ნამდვილი ქვედა საზღვარი J არ შეიძლება ნაკლები იყოს, ვიდრე ნამდვილი ზედა საზღვარი J'. მაშასადამე, $J\geqslant J'$.

70. დარბუს თეორემა. ვთქვათ $f(x)$ არის შემოსაზღვრული ფუნქცია (a, b) შუალედში. როგორიც არ უნდა იყოს (a, b) შუალედის ნაწილებად დაყოფის წესი S და s ჯამები მიისწრაფიან შესაბამად J და J' რიცხვებისაკენ, როდესაც დანაყოფთა რიცხვი n უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ თითოეული დანაყოფი მიისწრაფის ნულისაკენ.

დავამტკიცოთ ეს თეორემა, მაგალითად, S ჯამისათვის. სიმარტივისათვის მივიღოთ $a<b$, და ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია არის დადებითი (a, b) შუალედში; უკანასკნელ პირობას ყოველთვის ექნება ადგილი, თუ $f(x)$ ფუნქციას მივუმატებთ შესაფერის მუდმივს, რომელიც გამოიწვევს მხოლოდ S ჯამების მუდმივი სიდიდით გადიდებას. რადგან J არის S ჯამის ნამდვილი ქვედა საზღვარი, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ დანაწილებათა ისეთი კერძო სახე:

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b,$$

რომლისათვის S ჯამი ნაკლები იქნება ვიდრე $J+\frac{\varepsilon}{2}$, სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. განვიხილოთ ახლა (a, b) შუალედის ისეთი მცირე შუალედებად დანაწილება, რომლის თითოეული დანაყოფი ნაკლებია ვიდრე η, და ვიპოვოთ შესაბამისი S' ჯამის ზედა საზღვარი. განვიხილოთ ჯერ დანაყოფები, რომლებიც არ შეიცავენ არც ერთ წინა დამყოფ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$ წერტილებს; თუ ვისარგებლებთ § 69-ის მსჯელობით, ვნახავთ, რომ ისინი მოგვცემენ S'-ში ნაწილს, რომელიც წინა S ჯამზე ნაკლებია, ე. ი. ნაკლებია ვიდრე $J+\frac{\varepsilon}{2}$. მეორე მხრით, იმ დანაყოფთა რიცხვი, რომლებიც შეიცავენ $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ წერტილებს არ შეიძლება იყოს $p-1$-ზე მეტი და თუ M აღნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის ზედა საზღვარს, მაშინ ეს დანაყოფები ჯამში მოგვცემენ S'-ის ნაწილს, რომელიც გადააჭარბებს $(p-1)\,M\eta$ ს. მაშასადამე, გვაქვს:

$$S'<J+\frac{\varepsilon}{2}+(p-1)\,M\eta$$

ამრიგად საკმარისია ავიღოთ η ნაკლები ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2M(p-1)}$, რომ ჯამი S' იქნეს ნაკლები $J+\varepsilon$-ზე.

სწორედ ასევე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ s ჯამს აქვს J' ზღვარი. თუ $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერია, მაშინ ეს ორი J და J' ზღვარი საზოგადოდ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. იმისათვის რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ინტეგრადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$J'=J.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ნებისმიერად შევცვლით შემოსაზღვრულ ფუნქციის მნიშვნელობას შუალედის სასრული რიცხვის წერტილებზე, მაშინ ცხადია, S S', $s-s'$ სხვაობები ორ ჯამს შორის, რომლებიც შეესაბამებიან ერთსა-და-იმავე დანაწილებას, მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა შუალედების უდიდესი სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფის. ორივე ფუნქციისათვის J და J' რიცხვები არიან ერთი და იგივე.

71. ინტეგრადი ფუნქციები. ფუნქციას, შემოსაზღვრულს (a, b) შუალედში ეწოდება *ინტეგრადი* ამ შუალედში, თუ ორივე S და s ჯამი მიისწრაფის საერთო ზღვარისაკენ, როცა კერძო შუალედების რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ თითოეული შუალედი ნულისაკენ მიისწრაფის.

იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ინტეგრადი (a, b) შუალედში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი და-

დებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნოს ისეთი შესაბამი დადებითი η რიცხვი, რომ $S-s$ სხვაობა ნაკლები იყოს ε-ზე, როცა ყველა შუალედი ნაკლები გახდება η-ზე.

ეს პირობა არის აუცილებელი. მართლაც, თუ S და s აქვთ საერთო J ზღვარი, მაშინ შეიძლება მოიძებნოს იმდენად მცირე η რიცხვი, რომ $|S-J|$ და $|s-J|$ იყოს ნაკლები ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}$, როცა ყველა კერძო შუალედი იქნება ნაკლები η-ზე. აქედან, a fortiori, გვექნება $S-s<\varepsilon$.

ეს პირობა არის აგრეთვე საკმარისიც. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$S-s=S-J+J-J'+J'-s.$$

მაგრამ არც ერთი, $S-J$, $J-J'$, $J'-s$ რიცხვებიდან არ შეიძლება იყოს უარყოფითი; იმისათვის, რომ მათი ჯამი ნაკლები იყოს ε-ზე აუცილებელია, რომ თითოეული მათგანი ნაკლები იყოს ε-ზე. მაგრამ $J-J'$ სხვაობა გარკვეული რიცხვია დადებითი ან ნული, ε-კი ნებისმიერი დადებითი, ამიტომ აუცილებელია $J=J'$.

ახლა, რომ ადგილი ექნეს $S-J<\varepsilon$, $J'-s<\varepsilon$, როცა ყველა კერძო შუალედი ნაკლებია η-ზე, აუცილებელია, რომ S და s ჯამებს ქონდეს საერთო J ზღვარი.

ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არის ინტეგრადი. მართლაც, $S-s$ სხვაობა არ აღემატება $(b-a)\ \omega$, სადაც ω-თი აღნიშნულია $f(x)$ ფუნქციის რყევის ზედა საზღვარი ყოველ კერძო შუალედში. მაგრამ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი η რიცხვი, რომ ყოველ შუალედში, რომელიც η-ზე ნაკლებია, $f(x)$ ფუნქციის რყევა ნაკლები იყოს მოცემულ ნებისმიერ დადებით რიცხვზე (§ 8). თუ η-ს ავიღებთ იმნაირად, რომ რყევა ნაკლები იყოს ვიდრე $\frac{\varepsilon}{b-a}$, მაშინ $S-s$ სხვაობა ნაკლები იქნება ε-ზე.

ყოველი მონოტონური ფუნქცია არის ინტეგრადი. ვთქვათ $f(x)$ არის ზრდადი ფუნქცია. დავყოთ (a, b) შუალედი n შუალედად, რომლებიც η-ზე ნაკლებია.

შეგვიძლია დავწეროთ:

$$S=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(b)(b-x_{n-1}),$$
$$s=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

მართლაც, მაგალითად, (a, x_1) შუალედში ფუნქციის ზედა საზღვარი არის $f(x_1)$, ხოლო ქვედა საზღვარი კი $f(a)$, და ა. შ. სხვა შუალედებისათვის.

აქედან ვღებულობთ:

$$S-s=(x_1-a)[f(x_1)-f(a)]+(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]+\cdots$$
$$\cdots+(b-x_{n-1})[f(b)-f(x_{n-1})].$$

მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ყველა სხვაობა არის დადებითი რიცხვები, და ყველა x_1-a, $x_2-x_1, \ldots$ სხვაობა არის ნაკლები η-ზე. მაშასადამე,

$$S-s<\eta\,[f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1})],$$

ე. ი.

$$S-s<\eta\,[f(b)-f(a)].$$

თუ ჩვენ ავიღებთ

$$\eta<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)},$$

მაშინ გვექნება $S-s<\varepsilon$. ეს მსჯელობა გამოსადეგია აგრეთვე კლებადი ფუნქციისათვისაც.

ვთქვათ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ არის ნებისმიერი მიმდევრობა ზრდადი რიცხვებისა a-დან b-მდე. თუ *შემოსაზღვრული* $f(x)$ *ფუნქცია არის ინტეგრადი თითოეულ* $(a, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha_p, b)$ *შუალედში, მაშინ იგი ინტეგრადია აგრეთვე მთელ* (a, b) *შუალედში*. მართლაც, თუ განვიხილავთ ყოველ (α_i, α_{i+1}) შუალედის ისეთ დანაწილებას, რომ $S-s$ სხვაობა თითოეული შუალედისათვის იყოს ნაკლები ვიდრე ε, მაშინ სათანადო სხვაობა მთელ შუალედისათვის იქნება ნაკლები ვიდრე $p\varepsilon$.

შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს შუალედის შიგნით ნებისმიერი რიცხვი წყვეტის წერტილებისა, ინტეგრადია, *თუ ყველა ეს წყვეტის წერტილი შეგვიძლია მოვათავსოთ სასრულო რიცხვი შუალედებში, რომელთა ჯამი ნაკლებია ნებისმიერად მოცემულ დადებით რიცხვზე*. მართლაც, ვთქვათ ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, და H არის $|f(x)|$ ფუნქციის ზედა საზღვარი; დაშვების ძალით, შეგვიძლია მოვათავსოთ $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები სასრულო რიცხვის შუალედებში, რომელთა ამპლიტუდების ჯამი ნაკლებია ვიდრე $\frac{\varepsilon}{4H}$. ცხადია, რომ ნაწილი $S-s$ სხვაობისა, რომელიც მიღებულია ამ შუალედებიდან, ნაკლებია ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}$. მეორეს მხრით, რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია დანარჩენ შუალედებში, ამიტომ ესენიც შეგვიძლია აგრეთვე დავანაწილოთ უფრო მცირე შუალედებად, ასე რომ შესაბამი ნაწილი $S-s$ ჯამისა ნაკლები იქნება $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე. მაშასადამე, $S-s<\varepsilon$. კერძოდ, *შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომელსაც აქვს* (a, b) *შუალედში მხოლოდ სასრულო რიცხვი წყვეტის წერტილებისა, ინტეგრადია ამ შუალედში*.

განმარტებიდან აგრეთვე უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრადია, მაშინ იგივე თვისება აქვს $Cf(x)$ ფუნქციასაც, როგორიც არ უნდა იყოს მუდმივი C. თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ არის ორი ინტეგრადი ფუნქცია, მაშინ ინტეგრადია აგრეთვე მათი $f_1(x)+f_2(x)$ ჯამიც. მართლაც, ვთქვათ $S, s, S', s', \Sigma, \sigma$ არიან ამ სამი ფუნქციის ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან შუალედის ერთსა-და-იმავე დანაწილებას; ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\Sigma-\sigma\leqslant S-s+S'-s'$. კერძოდ, ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით (§ 11), როგორც ჯამი ორი მონოტონური ფუნქციისა არის ინტეგრადი.

დავამტკიცოთ კიდევ, რომ *ორი ინტეგრადი ფუნქციის ნამრავლი არის აგრეთვე ინტეგრადი ფუნქცია*. მივიღოთ პირველად, რომ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ არის დადებითი; ვთქვათ $M_i, m_i, M'_i, m'_i, \mathfrak{M}_i, \mu_i$ არიან ზედა და ქვედა საზღვრები $f_1(x), f_2(x)$ და $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ფუნქციებისა (x_{i-1}, x_i)

შუალედში; S, s, S', s', Σ, σ—შესაბამი ჯამები (a, b) შუალედის რაიმე დანაწილებისათვის. ცხადია,

$$\mathfrak{M}_i \leqslant M_i \, M'_i, \quad \mu_i \geqslant m_i \, m'_i,$$

მაშასადამე,

$$\mathfrak{M}_i - \mu_i \leqslant M_i \, M'_i - m_i \, m'_i = M_i \, (M'_i - m'_i) + m'_i \, (M_i - m_i),$$

და მით უმეტეს

$$\mathfrak{M}_i - \mu_i \leqslant M \, (M'_i - m'_i) + M' \, (M_i - m_i),$$

სადაც M და M'-ით აღნიშნულია $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციების ზედა და ქვედა საზღვრები (a, b) შუალედში. თუ ამ უტოლობას გავამრავლებთ $x_i - x_{i-1}$-ზე და ყველა ანალოგიურ უტოლობას შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\Sigma - \sigma \leqslant M \, (S' - s') + M' \, (S - s).$$

მაშასადამე, $\Sigma - \sigma$ სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ.

თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციებს აქვთ ნებისმიერი ნიშნები, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია მათ მივუმატოთ ორი C_1 და C_2 მუდმივი ისე, რომ $f_1(x) + C_1$ და $f_2(x) + C_2$ იყოს დადებითი. ვინაიდან ნამრავლი:

$$[f_1(x) + C_1] \cdot [f_2(x) + C_2] = f_1 f_2 + C_1 f_2 + C_2 f_1 + C_1 C_2$$

არის ინტეგრადი, ამიტომ ინტეგრადია აგრეთვე $f_1 f_2$ ნამრავლიც.

ამ სხვადასხვა დებულებათა გამოყენებით, ვნახავთ, რომ თუ $f_1, f_2, \ldots, f_p$ არიან ინტეგრადი ფუნქციები, მაშინ ნებისმიერი მთელი პოლინომი $f_1, f_2, \ldots, f_p$ ფუნქციების მიმართ, არის აგრეთვე ინტეგრადი ფუნქცია.

72. განსაზღვრული ინტეგრალები. ვთქვათ $f(x)$ არის ინტეგრადი ფუნქცია (a, b) შუალედში. S და s ჯამების საერთო ზღვარს ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი და გამოისახება სიმბოლოთი:

$$J = \int_a^b f(x) \, dx,$$

$\int$—სიმბოლო, რომელიც გვაგონებს ინტეგრალის წარმოშობას, არის გადაგვარებული S ასო. განმარტების ძალით J ყოველთვის მოთავსებულია S და s ჯამებს შორის, რომლებიც შეესაბამება დანაწილების ნებისმიერ წესს; თუ J ინტეგრალის მიახლოვებით მნიშვნელობად ავიღებთ რაიმე რიცხვს, მოთავსებულს S და s შორის, მაშინ დაშვებული ცდომილება ნაკლები იქნება ვიდრე $S - s$.

მივმართოთ ზოგად შემთხვევას. ინტეგრალის განმარტებაში S და s ჯამები შეგვიძლია შევცვალოთ უფრო ზოგადი გამოხატულებით. ვთქვათ მოცემულია (a, b) შუალედის დანაწილება:

$$a, \; x_1, \; x_2, \ldots, x_{i-1}, \; x_i, \ldots, x_{n-1}, \; b.$$

ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ არის x ცვლადის მნიშვნელობები, რომლებიც ეკუთვნიან შესაბამად თითოეულ ამ შუალედს, ასე რომ $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. ჯამი:

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \tag{2}$$

მოთავსებულია S და s ჯამებს შორის, რადგანაც ყოველთვის $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$; თუ ფუნქცია ინტეგრადია, მაშინ ამ ჯამსაც აქვს აგრეთვე ზღვრად I რიცხვი. კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ემთხვევიან შესაბამად $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$-ს, მაშინ მივიღებთ (1) ჯამს, რომელიც ზემოთ (§ 67) განვიხილეთ. $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ ნამრავლს ეწოდება ინტეგრალის ე ლ ე მ ე ნ ტ ი.

ინტეგრალის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს რამოდენიმე შედეგი. ზემოთ ჩვენ მივიღეთ $a<b$; ახლა, თუ ჩვენ გადავანაცვლებთ a და b საზღვრებს, მაშინ ყველა x_i-x_{i-1} მამრავლი შეიცვლის ნიშანს, და თვით ზღვარიც შეიცვლის ნიშანს; მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

თუ c მოთავსებულია a და b-ს შორის, მაშინ ეს ტოლობა თავისთავად ცხადია; თუ კი მაგალითად, b მოთავსებულია a და c-ს შორის, მაშინ წინა ფორმულა აგრეთვე სამართლიანია, როცა მხოლოდ $f(x)$ ფუნქცია არის ინტეგრადი a და c-ს შორის, რადგან ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

თუ $f(x)=A\varphi(x)+B\psi(x)$, სადაც A და B მუდმივებია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=A\int_a^b \varphi(x)\,dx+B\int_a^b \psi(x)\,dx;$$

ასეთივე ტოლობას ადგილი ექნება მაშინაც, როდესაც შესაკრებთა რიცხვი ნებისმიერია.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, თუ $c, d, \cdots, l$ არიან ნებისმიერი რიცხვები, ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \cdots + \int_l^b f(x)\,dx;$$

ეს დანაწილება იხმარება ინტეგრალის გამოთვლისათვის, როცა $f(x)$ ფუნქციას აქვს წყვეტის წერტილები ან და როცა მას აქვს სხვადასხვა ანალიზური გამოსახვა (a, b) შუალედის სხვადასხვა ნაწილებში.

მე-(2) ფორმულაში $f(\xi_i)$ გამოხატულება შეგვიძლია შევცვალოთ კიდევ უფრო ზოგადი გამოხატულებით. დავყოთ (a, b) შუალედი n კერძო შუალედებად $(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{i-1}, x_i), \cdots, (x_{n-1}, b)$. ყოველი $x_{i-1}, x_i)$ შუალედისათვის ავიღოთ რაიმე ζ_i სიდიდე იმ პირობით, რომ ζ_i მიისწრაფოდეს ნულისაკენ განსახილავი შუალედის $(x_i - x_{i-1})$ სიგრძესთან ერთად. ჩვენ ვიტყვით, რომ ζ_i თ ა ნ ა ბ რ ა დ მიისწრაფის ნულისაკენ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ, i-ზე დამოუკიდებელი, ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ როდესაც $(x_i - x_{i-1})$ ნაკლებია η-ზე, ადგილი ქონდეს უტოლობას: $|\zeta_i| < \varepsilon$.

დავამტკიცოთ, რომ თუ ζ_i თანაბრად მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ ჯამს:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + \zeta_i](x_i - x_{i-1}) \tag{3}$$

აქვს ზღვრად განსაზღვრული $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალი. ავიღოთ η იმდენად მცირე, რომ როდესაც ყველა $(x_1 - x_{i-1})$ შუალედების სიგრძე ნაკლებია $\bar{\eta}$-ზე, დაკმაყოფილებული იქნეს უტოლობა:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad |\zeta_i| < \varepsilon$$

და განვიხილოთ სხვაობა:

$$S - \int_a^b f(x)dx = \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right] + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i (x_i - x_{i-1}).$$

აღნიშნულ პირობებში ცხადია, რომ უკანასკნელ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $\varepsilon + \varepsilon(b-a)$-ზე, ე. ი.

$$\left| S - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

ამრიგად თეორემა დამტკიცებულია[1].

[1] გამოყენებებში უფრო ხშირად განსაზღვრული ინტეგრალები გვხვდება როგორც (3) სახის ჯამის ზღვარი. ამიტომ ჩვენ ხშირად მოგვიხდება ამ თვისების გამოყენება, რომელიც ვრცელდება აგრეთვე ორმაგი და სამმაგი ინტეგრალებზედაც.

78. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა. ქვემოთ, სადაც განსაკუთრებით არ იქნება აღნიშნული, ინტეგრალ-ქვეშა ფუნქციებს ყველგან ვიგულისხმებთ უწყვეტად.

ვთქვათ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორი ინტეგრადი ფუნქციაა (a, b) შუალედში, მასთან (a, b) შუალედში $\varphi(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს; გარკვეულობისათვის მივიღოთ რომ $a<b$ და $\varphi(x)>0$.

ვიგულისხმოთ, რომ (a, b) შუალედი დაყოფილია მცირე შუალედებად და ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots$ არის x ცვლადის მნიშვნელობები, რომელნიც ეკუთვნიან თითოეულ შუალედს შესაბამად. ყველა $f(\xi_i)$ რიცხვი მოთავსებული იქნება (a, b) შუალედში $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა M და m საზღვრებს შორის

$$m \leqslant f(\xi_i) \leqslant M.$$

გავამრავლოთ ეს ორმაგი უტოლობები მამრავლებზე:

$$\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

რომლებიც დაშვების თანახმად დადებითია და შევკრიბოთ. ვნახავთ, რომ

$$\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ჯამი მოთავსებულია

$$m\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{და} \qquad M\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ჯამებს შორის.

როცა კერძო შუალედების რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, ზღვარზე გვექნება:

$$m\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx < M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

ეს უტოლობები შეგვიძლია შევცვალოთ ტოლობით:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{4}$$

სადაც μ მოთავსებულია m-სა და M-ს შორის. რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) შუალედში, ამიტომ იგი მიიღებს μ-ს მნიშვნელობას რაიმე $x=\xi$ მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია a და b-სშორის და ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,^{1} \tag{5}$$

სადაც ξ მოთავსებულია a და b-ს შორის. კერძოდ, თუ მივიღებთ $\varphi(x)=1$, მაშინ ინტეგრალი $\int_a^b dx$ განმარტების ძალით ტოლია $b-a$-სი და მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi). \tag{6}$$

---

[1] ამ ფორმულას საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა ეწოდება (რ ე დ.)

74. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა. ბ ო ნ ე მ (Bonnet) მოგვცა საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა, რომელიც მან გამოიყვანა ა ბ ე ლ ი ს (Abel) შემდეგი მნიშვნელოვანი ლემიდან.

ლემა. ვთქვათ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ არის დადებითი და კლებადი რიცხვთა მიმდევრობა და $u, u_0, u_1, \ldots, u_p$ — იმდენივე რიცხვი ნებისმიერი დადებითი ან უარყოფითი სიდიდეებისა. თუ ყველა ჯამი: $s_0 = u_0, s_1 = u_0 + u_1, \ldots, s_p = u_0 + u_1 + \ldots + u_p$ მოთავსებულია ორ A და B რიცხვს შორის, მაშინ ჯამი:

$$S = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_p u_p$$

მოთავსდება $A\varepsilon_0$-სა და $B\varepsilon_0$-ს შორის.

მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$u_0 = s_0, \ u_1 = s_1 - s_0, \cdots, u_p = s_p - s_{p-1};$$

მაშასადამე, S ჯამი ტოლი იქნება:

$$s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p\varepsilon_p.$$

ვინაიდან ყველა $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$ სხვაობა დადებითია, ამიტომ S-თვის მივიღებთ ორ ზღვარს, თუ $s_0, s_1, \cdots, s_p$-ს ჯერ შევცვლით მათი ზედა A საზღვრით, ხოლო შემდეგ მათი ქვედა B საზღვრით. აქედან გვაქვს:

$$S < A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0;$$

ამგვარადვე მივიღებთ უტოლობას: $S > B\varepsilon_0$.

ვთქვათ ახლა, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორი ინტეგრადი ფუნქციაა, რომლებიდან $\varphi(x)$ დადებითია და კლებადი, როცა x იზრდება a-დან b-მდე. ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ არის ზღვარი შემდეგი ჯამისა:

$$J = f(a)\varphi(a)(x_1 - a) + f(x_1)\varphi(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots,$$

რომელიც მოთავსებულია ორ

$$J' = \sum M_i \varphi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \text{ და } J'' = \sum_i m_i \varphi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \text{ ჯამს შორის,}$$

სადაც M_i და m_i არის $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები (x_{i-1}, x_i) შუალედში. ამასთანავე $J' - J''$ სხვაობა ნაკლებია, ვიდრე

$$\varphi(a) \sum (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

და, მაშასადამე, ნულისაკენ მიისწრაფის, ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია არის ინტეგრადი. ამრიგად განსახილავი განსაზღვრული ინტეგრალი არის საერთო ზღვარი J' და J''

ჯამებისა, და მაშასადამე $J_1=\sum \mu_i \varphi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$-საც, სადაც μ_i—ნებისმიერი რიცხვია, მოთავსებული m_i და M_i შორის.

შევარჩიოთ ეს μ_i რიცხვები ისე, რომ

$$\mu_i(x_i-x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

რაც ყოველთვის შესაძლოა საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულის ძალით. ვინაიდან რიცხვები: $\varphi(a)$, $\varphi(x_1)$,... არიან დადებითი და კლებადი, ამიტომ აბელის ლემიდან გამომდინარეობს, რომ ეს უკანასკნელი J_1 ჯამი მოთავსებულია $A\varphi(a)$ და $B\varphi(a)$ შორის, სადაც A და B აღნიშნავენ $\int_a^c f(x)\,dx$ ინტეგრალის მაქსიმუმსა და მინიმუმს, როცა c იცვლება a-დან b-მდე. ვინაიდან ეს ინტეგრალი უწყვეტი ფუნქციაა c-სი, ამიტომ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ შეიძლება დავწეროთ:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx \quad (a<\xi<b). \tag{7}$$

თუ a და b-ს შორის $\varphi(x)$ ფუნქცია კლებულობს, მაგრამ არ რჩება დადებითი, მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ უფრო ზოგადი ფორმულა, რომელიც ეკუთვნის ვ ე ი ე რ შ ტ რ ა ს ს (Weierstrass). მართლაც, მივიღოთ $\varphi(x)=\varphi(b)+\psi(x)$; $\psi(x)$ ფუნქცია დადებითია და კლებადი და ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-(7) ფორმულა, რომელიც გვაძლევს:

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx=[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\int_a^b f(x)\varphi(b)\,dx+[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^{\xi} f(x)\,dx,$$

ანუ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+\varphi(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

ასეთივე ფორმულებს ვღებულობთ ჩვენ იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\varphi(x)$ ზრდადია.

75. პირველყოფილ ფუნქციებზე გადასვლა. ზემოთ განხილული ზოგადი თეორემები გამოიყენება ყველა ინტეგრად ფუნქციაზე. შემდეგი გამოყენებ-

ბებში საინტეგრო ფუნქცია არის ყველაზე ხშირად უწყვეტი, ან უკიდურეს შემთხვევაში, ინტეგრობის შუალედში, აქვს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა. შევნიშნოთ ერთხელ და სამუდამოდ, რომ, რადგანაც ინტეგრალის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფ ფუნქციის ბუნებასა და საზღვრებზე, ამიტომ სიმბოლოებს: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_a^b f(z)\,dz$, $\int\limits_a^b f(t)\,dt, \ldots$ აქვთ აბსოლუტურად იგივური აზრი.

თუ ერთერთ საზღვარს, მაგალითად, ქვედა a საზღვარს, დავტოვებთ უცვლელად, ხოლო ზედა საზღვარს განვიხილავთ როგორც ცვლადს, მაშინ ინტეგრალი არის ამ საზღვრის ფუნქცია, და დავწერთ:

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია არის შემოსაზღვრული, ამიტომ ცხადია, რომ $F(x)$ არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია.

ვუჩვენოთ რომ ამ ფუნქციას **აქვს წარმოებულად** $f(x)$ **ფუნქცია**. მართლაც, გვაქვს:

$$F(x+h)-F(x)=\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

ან და, თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის მე-(6) ფორმულას, მივიღებთ:

$$F(x+h)-F(x)=hf(\xi),$$

სადაც ξ მოთავსებულია x და $x+h$ შორის. როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ $f(\xi)$ მიისწრაფის $f(x)$ ზღვარისაკენ; ამრიგად $F(x)$ ფუნქციას წარმოებულად აქვს $f(x)$ ფუნქცია.

ყოველი სხვა ფუნქცია, რომელსაც იგივე წარმოებული აქვს, მიიღება $F(x)$ ფუნქციისაგან ნებისმიერი C მუდმივის მიმატებით (§ 17). აქედან ჩანს, რომ $f(x)$ ფუნქციას თუ აქვს ერთი პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ მას აქვს უსასრულო რიცხვი პირველყოფილი ფუნქციებისა. მაგრამ ყველა ამ ფუნქციას შორის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი, რომელიც $x=a$ მნიშვნელობისათვის ღებულობს მოცემულ y_0 მნიშვნელობას; ეს იქნება ფუნქცია:

$$y_0+\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

იმ შემთხვევებში, როცა გაურკვევლობას არა აქვს ადგილი, სარგებლობენ ერთი და იგივე x ასოთი, როგორც ინტეგრალის ზედა საზღვრისათვის,

ისე საინტეგრაციო ცვლადის აღსანიშნავად, და სწერენ $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ ნაცვლად $\int\limits_a^x f(t)\,dt$-ისა. მაგრამ ცხადია, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი დამოკიდებულია მხოლოდ ინტეგრობის საზღვრებზე და ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფ ფუნქციაზე; საინტეგრაციო ცვლადი თუ რა ასოთი იქნება აღნიშნული, ამას არა აქვს მნიშვნელობა.

ყოველ ფუნქციას, რომელსაც წარმოებულად აქვს $f(x)$, ეწოდება *განუსაზღვრელი ინტეგრალი* $f(x)$-დან და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\int f(x)\,dx,$$

მასთან საზღვრებს არ აღნიშნავენ. ზემოთმოყვანილ მსჯელობის ძალით გვაქვს:

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(x)\,dx+C.$$

პირიქით, თუ რაიმე საშუალებით მოვძებნეთ $F(x)$ ფუნქცია, რომელსაც წარმოებულად $f(x)$ აქვს, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)+C.$$

C-ს მოსაძებნად, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ როცა $x=a$, მაშინ ტოლობის მარცხენა ნაწილი ტოლია ნულის. ამიტომ უნდა ავიღოთ $C=-F(a)$; აქედან გვაქვს ძირითადი ფორმულა:

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a). \tag{8}$$

თუ ამ ფორმულაში შევცვლით $f(x)$ ფუნქციას $F'(x)$-ით, მივიღებთ:

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(x)\,dx;$$

საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$F(x)-F(a)=(x-a)F'(\xi),$$

სადაც ξ მოთავსებულია x-სა და a-ს შორის. აქ ხელახლა ვღებულობთ სასრულო ნაზრდის ფორმულას, მაგრამ ეს გამოყვანა არ არის ზოგადი ხასია-

თის, როგორც პირველი (იხ. § 17), რადგან აქ მოთხოვნილია $F'(x)$ წარმოებულის უწყვეტობა.

მე-(8) ძირითადი ფორმულა გამოყვანილი იყო იმ დაშვებით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია a და b-ს შორის. თუ ამას უყურადღებოდ დავტოვებთ, შეგვიძლია პარადოქსალურ დასკვნამდე მივიდეთ. მაგალითად, თუ მივიღებთ $f(x)=\frac{1}{x^2}$, მაშინ მე-(8) ფორმულიდან გვაქვს:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

მარცხენა ნაწილს მხოლოდ მაშინ აქვს აზრი, როცა a და b-ს აქვთ ერთნაირი ნიშანი, იმ დროს, როდესაც მარჯვენა ნაწილს აქვს აზრი მაშინაც, როცა a და b საწინააღმდეგო ნიშნებისაა. შემდეგში, ისეთი ინტეგრალების შესწავლის დროს, რომლებიც აღებულია წარმოსახვითი საზღვრებს შორის, დავინახავთ თუ რაში მდგომარეობს ამ პარადოქსის ახსნა.

სრულიად ამგვარადვე მე-(8) ფორმულით გვაქვს:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\ln\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right].$$

თუ $f(a)$ და $f(b)$ ოდენობებს აქვთ საწინააღმდეგო ნიშნები, მაშინ $f(x)$ გახდება ნულის ტოლი a და b-ს შორის, და წინა ტოლობის ორივე ნაწილს არა აქვთ ჩვენთვის ჯერ-ჯერობით არავითარი აზრი. შემდეგში დავინახავთ, თუ როგორი მნიშვნელობა უნდა მივანიჭოთ ამ ტოლობას.

მე-(8) ფორმულა შეიძლება აგრეთვე არ იყოს სავსებით გარკვეული. მაგალითად, თუ მივიღებთ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, გვექნება:

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} b-\operatorname{arc\,tg} a.$$

მარცხენა ნაწილს სავსებით გარკვეული აზრი აქვს, იმ დროს როდესაც მარჯვენა ნაწილს აქვს უსასრულო მრავალი მნიშვნელობა. რომ ავიცილოთ განუზღვრელობა, მივიღოთ

$$F(x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

$F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ყოველ შუალედში და გახდება ნულის ტოლი x-თან ერთად. მეორეს მხრით, აღვნიშნოთ Arc tg x-ით ის რკალი, რომელიც მოთავ-

სებულია $-\frac{\pi}{2}$-სა და $+\frac{\pi}{2}$-ს შორის. ამ ორ ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე წარმოებული და ნულის ტოლი გახდებიან მაშინ, როცა $x=0$. მაშასადამე, ეს ფუნქციები იგივურია ერთმანეთთან და ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} b - \operatorname{Arc\,tg} a,$$

იმ პირობით, რომ Arc tg-ის მნიშვნელობა ავიღოთ ყოველთვის $-\frac{\pi}{2}$-სა და $+\frac{\pi}{2}$-ს შორის.

სრულიად ამგვარადვე შეიძლება გამოყვანა ფორმულის:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc\,sin} b - \operatorname{Arc\,sin} a,$$

სადაც ფესვი აღებულია დადებითი ნიშნით, a და b მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის და Arc sin x-ით აღნიშნული რკალი, მოთავსებული $-\frac{\pi}{2}$-სა და $+\frac{\pi}{2}$-ს შორის.

საზოგადოდ, თუ პირველყოფილ $F(x)$ ფუნქციას აქვს რამოდენიმე მნიშვნელობა, მაშინ უნდა შევარჩიოთ ერთერთი საწყისი $F(a)$ მნიშვნელობა და დაუკვირდეთ ამ სიდიდის უწყვეტ ცვლადობას, როდესაც x იცვლება ერთსადა-იმავე მიმართულებით a-დან b-მდე. ზოგჯერ თურმე უფრო ხელსაყრელია შემოვიღოთ წყვეტილი პირველყოფილი ფუნქცია, მაგრამ ამისათვის აუცილებელია წინასწარ განვაზოგადოდ (8) ფორმულა. ეს ძირითადი ფორმულა გამოყვანილი იყო იმ დაშვებით, რომ ორივე $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი (a, b) შუალედში და რომ ამ შუალედის ყოველ წერტილზე $F'(x)=f(x)$. ახლა ჩვენ გავაკეთებთ რამოდენიმე უფრო ზოგად დაშვებას. დავუშვათ, რომ ორი $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებენ წინა პირობებს (a, b) შუალედის სასრული რიცხვი წერტილების გამორიცხვით, რომელთაც ვუწოდოთ გამონაკლისი წერტილები.

ამის გარდა, დავუშვებთ, რომ $f(x)$ რჩება შემოსაზღვრული, და რომ $F(x)$ აქვს ამ შუალედში მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილები. რომ დავინახოთ, თუ როგორ შეიცვლება ამ შემთხვევაში (8) ფორმულა დავუშვათ პირველად, რომ (a, b) შუალედში გვაქვს მხოლოდ ერთი გამონაკლისი c წერტილი; თუ აღვნიშნავთ ε-ით საკმაოდ მცირე დადებით რიცხვს, შეგვიძლია დავწეროთ, დავუშვებთ რა, რომ $a<c<b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

ანუ, რადგანაც a და $c-\varepsilon$-ს შორის, აგრეთვე $c+\varepsilon$ და b-ს შორის, არ არის გამონაკლისი წერტილები

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + F(b) - F(c+\varepsilon).$$

როცა ε ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$ აგრეთვე მიისწრაფის ნულისაკენ, და ზღვარზე გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Delta_c,$$

სადაც Δ_c-თი აღნიშნულია $F(c+0) - F(c-0)$, სხვაობა ანუ $F(x)$ ფუნქციის ნახტომი c წერტილზე.

როცა (a, b) შუალედში გვაქვს რამოდენიმე გამონაკლისი წერტილი, მაშინ მას დავყოფთ კერძო შუალედებად ისე, რომ თითოეული მათგანი შეიცავდეს არა უმეტეს ერთი გამონაკლისი წერტილისას. გამოვიყენებთ რა წინა მსჯელობებს თითოეულ ამ შუალედზე და ვისარგებლებთ რა მიღებულ შედეგებით, მივიღებთ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Sigma\Delta, \tag{9}$$

სადაც $\Sigma\Delta$ არის $F(x)$ ფუნქციის ნახტომთა ჯამი (a, b) შუალედში. თუ $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ ეს (9) ფორმულა დაიყვანება (8) ფორმულაზე; ამრიგად ვხედავთ, რომ (8) ფორმულა გამოიყენება აგრეთვე შემოსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციაზე, რომელსაც შეუძლია ჰქონდეს ნებისმიერი სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა (a, b) შუალედში, მხოლოდ თუ პირველყოფილი ფუნქცია უწყვეტია. შემდეგში ამ შენიშვნას გავავრცელებთ აგრეთვე არა შემოსაზღვრულ ფუნქციების შემთხვევაზედაც.

76. მაჩვენებლები. როგორც აღნიშნულია ზემოთ, თუ პირველყოფილ $F(x)$ ფუნქციას აქვს რამოდენიმე მნიშვნელობა, მაშინ უნდა შევარჩიოთ მისი ერთერთი მნიშვნელობა $x=a$-სათვის, $F(a)$ და დავუკვირდეთ ამ მნიშვნილობის უწყვეტ ცვლილებას, როცა x იცვლება ერთი და იგივე მიმართულებით a-დან b-მდე. ავიღოთ მაგალითად ინტეგრალი:

$$\int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2 + Q^2}\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx,$$

სადაც

$$f(x) = \frac{P}{Q},$$

და P, Q არიან უწყვეტი ფუნქციები (a, b) შუალედში, რომლებიც ერთდროულად არ ისპობა. პირველყოფილი ფუნქცია არის $\operatorname{arc\,tg} f(x)$. თუ Q არ ისპობა a და b შორის, მაშინ $f(x)$ არ გახდება უსასრულო დიდი ამ საზღვრებს შორის და $\operatorname{arc\,tg} f(x)$ მოთავსდება $-\frac{\pi}{2}$ და $+\frac{\pi}{2}$ შორის. მაგრამ ეს საზოგადოდ არ იქნება, თუ $Q=0$ განტოლებას აქვს ფესვები (a, b) შუალედში. რომ გავიგოთ, თუ როგორ უნდა შევცვალოთ ამ შემთხვევაში ზოგადი ფორმულა, მივიღოთ წინანდელივით აღნიშვნა $\operatorname{Arc\,tg}$ იმ რკალისათვის, რომელიც მოთავსებულია $-\frac{\pi}{2}$ და $+\frac{\pi}{2}$ შორის, და ვიგულისხმოთ პირველად, რომ Q ისპობა a და b-ს შორის მხოლოდ ერთი $x=c$ მნიშვნელობაზე.

შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'} + \int_{c+\varepsilon'}^{b},$$

სადაც ε და ε' ძალიან მცირე დადებითი რიცხვებია. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია არ გადაიქცევა უსასრულობად არც a და $c-\varepsilon$-ს, არც $c+\varepsilon'$ და b-ს შორის, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{Arc\,tg}(c-\varepsilon) - \operatorname{Arc\,tg} f(a) + \operatorname{Arc\,tg} f(b) - \operatorname{Arc\,tg} f(c+\varepsilon') + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}.$$

აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს რამდენიმე შემთხვევა. გარკვეულობისათვის წარმოვიდგინოთ რომ $f(x)$ ფუნქცია იქცევა უსასრულობად (a, b) შუალედში და გადადის $+\infty$-დან $-\infty$-ზე. მაშინ $f(c-\varepsilon)$ არის დადებითი და საკმაოდ დიდი, ამიტომ $\operatorname{Arc\,tg} f(c-\varepsilon)$ იქნება ძალიან ახლო $\frac{\pi}{2}$-თან, ხოლო $f(c+\varepsilon')$ უარყოფითია და სიდიდით საკმაოდ დიდი, მაშასადამე $\operatorname{Arc\,tg} f(c+\varepsilon')$ ძალიან ახლო იქნება $-\frac{\pi}{2}$-თან. რაც შეეხება ინტეგრალს: $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}$, მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა ძალიან მცირეა, რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფ $f(x)$ ფუნქციას შევცვლით $\frac{P}{Q}$. ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \pi + \operatorname{Arc\,tg} f(b) - \operatorname{Arc\,tg} f(a).$$

სრულიად ამგვარადვე შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია გადადის $-\infty$-დან $+\infty$-ზე, მაშინ უნდა გამოვაკლოთ π. ზოგად შემთხვევაში (a, b) შუალედი უნდა დავყოთ ისეთ შუალედებად, რომ თითოეულ მათგანში $f(x)$ ფუნქცია ხდებოდეს უსასრულობა მხოლოდ ერთხელ. თითოეულ ამ შუალედზე თუ გამოვიყენებთ წინა დასკვნებს და მიღებულ შედეგებს შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{1+f^3(x)} = \operatorname{Arc\,tg} f(b) - \operatorname{Arc\,tg} f(a) + (K-K')\,\pi,$$

სადაც K არის რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ $f(x)$ ფუნქცია გახდა უსასრულობა გადასვლით $+\infty$-დან $-\infty$-ზე, ხოლო K' არის ის რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ $f(x)$ გადადის $-\infty$-დან $+\infty$-ზე. ამ $K-K'$ რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ე ლ ი (*Indices*) a და b-ს შორის.

თუ $f(x)$ წარმოადგენს რაციონალურ $\frac{V_1}{V}$ ფუნქციას, მაშინ შეგვიძლია გამოვითვალოთ მაჩვენებელი ელემენტარული მოქმედებების საშუალებით იმ შემთხვევაშიაც, როცა არ ვიცით V პოლინომის ფესვები. ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ V_1 და V პოლინომები არიან თანამარტივი და V_1-ს ხარისხი ნაკლებია V-ს ხარისხზე, რადგანაც პოლინომის გამოკლებით ფუნქციის მაჩვენებელი არ შეიცვლება. შევასრულოთ გაყოფის ის მიმდევრობა, რომლის სა-

შუალებით ეძებენ V და V_1-ს შორის საერთო უდიდეს გამყოფს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ნაშთს ყოველთვის შეუცვლით ნიშანი. ჯერ V-ს გავყოფთ V_1ზე; მივიღებთ Q_1 ნაწილადსა და—V_2 ნაშთს. შემდეგ V_1-ს გავყოფთ V_2-ზე; მივიღებთ Q_2 ნაწილადსა და—V_3 ნაშთს, და ა. შ.; უკანასკნელად ჩვენ მივალთ მუდმივ—V_{n+1} ნაშთამდე. ამრიგად ჩვენ გვექნება ტოლობათა შემდეგი მიმდევრობა:

$$V=V_1Q_1-V_2$$
$$V_1=V_2Q_2-V_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$V_{n-1}=V_nQ_n-V_{n+1}.$$

პოლინომთა მიმდევრობას:

$$V,\ V_1,\ V_2, \ldots, V_{r-1},\ V_r,\ V_{r+1}, \ldots, V_n,\ V_{n+1} \tag{10}$$

აქვს შტურმის (Sturm) მიმდევრობის არსებითი თვისებები: 1) მეზობლად მდგომი ორი პოლინომი არ შეიძლება ნული გახდეს x-ის ერთი და იგივე მნიშვნელობისათვის, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში აქედან შეიძლება თანდათანობით გამოვიყვანოთ, რომ x-ის ამ მნიშვნელობისათვის ნული უნდა გახდეს დანარჩენი პოლონომებიც და კერძოდ V_{n+1} მუდმივიც; 2) თუ V_1 $V_2, \ldots, V_n$ პოლონომებიდან ერთ-ერთი წევრი ისპობა, მაშინ შეცვლათა რიცხვი, რომელიც მე (10) წკრივითაა გამოსახული არ იცვლება, რადგანაც, თუ V_r ნულის ტოლია $x=c$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ V_{r-1} და V_{r+1}-ს ექნებათ $x=c$ მნიშვნელობაზე მოწინააღმდეგე ნიშნები. აქედან გამომდინარეობს, რომ მე-(10) მიმდევრობის შეცვლათა რიცხვი მხოლოდ მაშინ შეიცვლება, როდესაც x გადადის $V=0$ განტოლების ფესვზე. ამასთანავე, თუ $\frac{V_1}{V}$ გადადის $+\infty$-დან $-\infty$-ზე, მაშინ შეცვლათა რიცხვი ერთით მატულობს; პირიქით, იგი კლებულობს ერთით, თუ $\frac{V_1}{V}$ გადადის $-\infty$-დან $+\infty$-ზე. ამრიგად $f(x)$ ფუნქციის მაჩვენებელი ტოლია მე-(10) მიმდევრობის შეცვლათა რიცხვისა, როცა x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ ჯერ b-ს და შემდეგ a-ს.

77. ბრტყელი არის ფართობი. *მრავალკუთხოვანი* არე ვუწოდოთ ყოველ ბრტყელ შემოსაზღვრულ არეს, რომლის საზღვრები შედგება სასრული რიცხვის წრფის ნაკვეთებისაგან; ეს არე შეიძლება შედგებოდეს რამდენიმე მრავალკუთხისაგან, რომელთაც არა აქვთ არც ერთი საერთო წერტილი. ასეთი მრავალკუთხოვანი არის განსაზღვრა ცნობილია ელემენტარულ გეომეტრიიდან. ახლა განვიხილოთ შეკრული მარტივი C მრუდი, რომელიც სიბრტყეს ჰყოფს ორ არედ, *შიგა* D არედ და გარე არედ. მივანიჭოთ D არეს გარკვეული ფართობი—ეს არსებითად ნიშნავს შემდეგი პოსტულატის დაშვებას:

I) არსებობს რიცხვი და მასთან მხოლოდ ერთი, მეტი ყოველ რიცხვზე, რომელიც ზომავს D-ში მოთავსებულ ნებისმიერ მრავალკუთხოვან არის ფართობს, და ნაკლები ყოველ რიცხვზე, რომელიც ზომავს იმ ნებისმიერ მრავალკუთხოვან არის ფართობს, რომელიც თვითონ შეიცავს D-ს.

არსებობა ერთადერთი რიცხვისა, რომელიც წინა პირობას აკმაყოფილებს, შეიძლება მკაცრად იქნეს დამტკიცებული იმ შემთხვევაში, როცა C მრუდი აკმაყოფილებს გარკვეულ მეტად ზოგად პირობას და რომელიც ყოველთვის კმაყოფილდება იმ მრუდეებისათვის, რომლებსაც ჩვეულებრივად განიხილავენ.

ვთქვათ P არის D-ს შემცველი მრავალკუთხოვანი არე, p კი—მეორე მრავალკუთხოვანი არე, რომელიც მოთავსებულია D-ში; A და a იყოს ამ

არეების შესაბამი ფართობები. ცხადია, რომ როგორიც არ უნდა იყოს ეს ორი მრავალკუთხოვანი ფართობი, ჩვენ გვაქვს $A > a$. მაშასადამე, A რიცხვებს აქვთ ნამდვილი ქვედა $\mathfrak{A}$ საზღვარი, ხოლო a რიცხვებს აქვთ ნამდვილი ზედა $\mathfrak{A}'$ საზღვარი; ამის გარდა, აუცილებელია $\mathfrak{A}' \leqslant \mathfrak{A}$. თუ $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ მაშინ D ფართობი არის კვადრებადი (quarrable), და $\mathfrak{A}$ რიცხვი არის D არის ფართობის ზომა [1].

ცხადია, რომ ეს რიცხვი არის ერთად-ერთი, რომელიც აკმაყოფილებს (I) პირობას.

II) იმისათვის, რომ D არე იყოს კვადრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შეიძლებოდეს მოძებნა D-ს შემცველი ისეთი მრავალკუთხოვანი P არესი და D-ში მოთავსებული მეორე ისეთი მრავალკუთხოვანი p არესი, რომ P და p არეების ფართობების $A-a$ სხვაობა იყოს ნაკლები ε-ზე.

განმარტების ძალით, ეს პირობა აუცილებელია. მაგრამ ამასთანავე იგი საკმარისიცაა, რადგანაც $A-a$ სხვაობა არ შეიძლება ნაკლები იყოს $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}'$ სხვაობაზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ D არე კვადრებადია და აქვს $\mathfrak{A}$ ფართობი, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი ორი მრავალკუთხოვანი P და p არე, რომლიდან ერთი შეიცავს D-ს, ხოლო მეორე მოთავსებულია D-ში და რომ $A-\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}-a$ სხვაობები ნაკლები იყოს ყოველ მოცემულ დადებით ε რიცხვზე.

D არის კვადრებადობის (II) პირობა შეიძლება გამოთქმული იქნეს შემდეგნაირად: D არის კვადრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ შეიძლებოდეს C საზღვრის მოთავსება ისეთ მრავალკუთხოვან არეში, რომლის ფართობი იყოს ნაკლები ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე. მართლაც, მრავალკუთხოვანი არე, რომელიც C-ს შეიცავს, არის სხვაობა ორი მრავალკუთხოვანი არისა, რომლებიდან ერთი შეიცავს D-ს, ხოლო მეორე მოთავსებულია D-ში.

წარმოვიდგინოთ, რომ D არე, შედგენილი C-ს შიგა წერტილებით, დაყოფილია ორ ანალოგიურ D_1 და D_2 არედ. ვთქვათ, მაგალითად, D-ს შიგნით გავლებულია C' რკალი, რომელიც აერთებს C რკალის ორ ნებისმიერ წერტილს. თუ D_1 და D_2 კვადრებადია, მაშინ იგივე შეიძლება ითქვას D-ს შესახებაც, სადაც D არე უდრის D_1 და D_2 არეების ჯამს.

ვთქვათ, რომ P_1 და p_1 ორი მრავალკუთხა არეა, რომელთაგან ერთი შეიცავს D_1-ს, ხოლო მეორე მოთავსებულია D-ში, A_1 და a_1—შესაბამად მათი ფართობები. ასევე P_2 და p_2, A_2 და a_2 იყოს იგივე სიდიდეები D_2 არესათვის.

[1] ბრტყელი არეების კვადრებადობის ეს ცნება შეიძლება გავრცელებული იქნეს არეებზე, განსაზღვრული მეტი ზოგადობით. იხ. Baire, Leçons sur les théories générales d'Analyse, ტომი I, გვ. 148.

ცხადია, რომ ის მრავალკუთხოვანი არე, რომელიც მიიღება p_1 და p_2-ის შეერთებით მდებარეობს D-ში. მაშასადამე, $a_1+a_2<\mathfrak{A}'$. მეორეს მხრით ორი P_1 და P_2 არის ერთობლიობა ადგენს მრავალკუთხოვან არეს, რომელიც შეიცავს D-ს. რადგან მათ აქვთ საერთო ნაწილი, ამიტომ $A_1+A_2>\mathfrak{A}$, მაშასადამე

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{A}'<(A_1-a_1)+(A_2-a_2).$$

რადგან D_1 და D_2 არეები კვადრებადია, ამიტომ A_1-a_1 და A_2-a_2 სხვაობები რაგინდ მცირე შეგვიძლია გავხადოთ. მაშასადამე, ორმაგი უტოლობა: $a_1+a_2<\mathfrak{A}<A_1+A_2$ გვიჩვენებს, რომ D ფართობი ტოლია D_1 და D_2 ფართობების ჯამისა. პირიქით, თუ D და D_1 კვადრებადია, მაშინ იგივე ითქმის აგრეთვე D_2-ს შესახებაც; მართლაც, რადგან D და D_1 კვადრებადია, ამიტომ ამ არეთა საზღვრები შეგვიძლია მოვათავსოთ ისეთ მრავალკუთხოვან არეებში, რომელთა ფართობები წინასწარ მოცემულ რიცხვზე ნაკლებია. იგივე ითქმის D_2-ის შესახებაც და რადგან D_2 ამრიგად კვადრებადი აღმოჩნდა, ამიტომ მისი ფართობი ტოლია D-სა და D_1-ის ფართობების სხვაობის.

მსჯელობის განზოგადოება შეიძლება. თუ D არე, რომლის საზღვარი შედგება ნებისმიერი რიცხვის შეკრული მრუდეებისაგან, შეიძლება დაიშალოს ზემოთ განხილული სახის კვადრებადი არეთა ჯამად ან სხვაობად, მაშინ თვით D არეც კვადრებადია და მისი ფართობი უდრის შემადგენელ არეთა ფართობების ჯამს ან სხვაობას.

78. ბრტყელი არის ფართობის გამოთვლა. განვიხილავთ მხოლოდ ბრტყელ არეებს, რომლებიც არიან შემოსაზღვრული ჩვეულებრივი შეკრული მრუდეებით. ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ისინი არიან კვადრებადი.

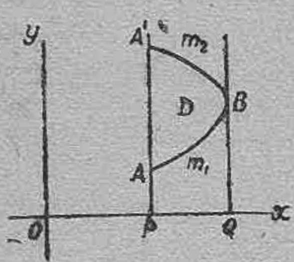
პირველად ავიღოთ D არე, ანალოგიური იმისა, რომლიდან ჩვენ გამოვდიოდით (§ 67), შემოსაზღვრული AB რკალით, რომელსაც Oy ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს არა უმეტეს ვიდრე ერთ წერტილში, ორი AP, BQ ორდინატით და Ox ღერძის PQ ნაკვეთით. ვთქვათ a და b არის P და Q წერტილების აბსცისები $(a<b)$, $y=f(x)$ არის AB რკალის განტოლება, ამასთანავე $f(x)$ უწყვეტია და დადებითი (a, b) შუალედში. ავიღოთ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა: $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, მოთავსებული a და b შორის, და ვთქვათ m_i და M_i არიან $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები (x_{i-1}, x_i) შუალედში. განვიხილოთ ორი მიმდევრობა r_i და R_i მართკუთხედებისა, შემოსაზღვრული სამი მხრიდან წრფეებით: $y=0$, $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, მეოთხე მხრიდან შესაბამად $y=m_i$, $y=M_i$ წრფეებით. ცხადია, რომ r_i მართკუთხედები შეადგენენ მრავალკუთხოვან არეს, მოთავსებულს D-ში, ხოლო R_i მართკუთხედები—მრავალკუთხოვან არეს, რომელიც შეიცავს D არეს. ამ არეების ფართობები არის შესაბამად:

$$\sum r_i=\sum m_i(x_i-x_{i-1}),\ \sum R_i=\sum M_i(x_i-x_{i-1});$$

Σr_i ჯამის ზედა საზღვარი და ΣR_i ჯამის ქვედა საზღვარი არიან ერთმანეთის ტოლი. მაშასადამე, D არე კვადრებადია, და მისი ფართობი წარმოგვიდგება

განსაზღვრული ინტეგრალით $\int_a^b f(x)\,dx$. ეს შედეგი სავსებით ეთანადება ფართობის ინტუიტურ გეომეტრიულ განმარტებას. შევნიშნოთ რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $f(x)$ ფუნქციის ნიშანი (a, b) შუალედში, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ როგორც გარკვეული ფართობი, მხოლოდ თუ მივიღებთ იმ შეთანხმებას, რომელზედაც ზემოთ გვქონდა ლაპარაკი (§ 68). ამიტომ ვინარჩუნებთ ტერმინს კ ვ ა დ რ ა ტ უ რ ა ს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის აღსანიშნავად.

განვიხილოთ ახლა არე, შემოსაზღვრული ორი პარალელური AA', BB' ნაკვეთით და ორი Am_1B, $A'm_2B'$ მრუდით, რომლებიც მოთავსებული არიან ამ წრფეებს შორის და იკვეთება აღნიშნული მიმართულების პარალელთან მხოლოდ ერთ წერტილზე (ნახ. 10). შევარჩიოთ Oy ღერძად წრფე, პარალელური AA'-ის, ხოლო Ox ღერძად — მართობული წრფე ისე, რომ მთელი არე იყოს მოთავსებული ამ ღერძის ზემოთ. ნახაზზე BB' ნაკვეთი შეკუმშულია B წერტილში; ვთქვათ, $y_1=\psi_1(x)$ და $y_2=\psi_2(x)$ არიან Am_1B და $A'm_2B'$ რკალების განტოლებები.



ნახ 10.

D არე არის სხვაობა ორი კვადრებადი არისა, შემოსაზღვრული Am_1BQPA და $A'm_2BQPA'$ კონტურებით; მაშასადამე, იგი თვითონ კვადრებადია, და მისი ფართობი ტოლია შემდეგი ორი ინტეგრალის სხვაობისა:

$$\int_a^b \psi_2(x)dx, \quad \int_a^b \psi_1(x)dx.$$

ყოველი არე, რომელიც შეიძლება დავყოთ განხილული სახის რამოდენიმე არედ, ცხადია იქნება კვადრებადი, და მისი ფართობი გამოისახება განსაზღვრული ინტეგრალების ალგებრული ჯამით. თუ კოორდინატთა ღერძები არ არიან მართობული და ადგენენ θ კუთხეს, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალები საჭიროა გავამრავლოთ $\sin\theta$-ზე.

ფართობების გამოსათვლელად ზოგჯერ ხელსაყრელია პოლარი კოორდინატებით სარგებლობა. ვთქვათ გამოსათვლელია ფართობი იმ არისა, რომელიც შემოსაზღვრულია OA, OB წრფეებით, რომლებიც ადგენენ პოლარ Ox ღერძთან ω_0 და Ω კუთხეებს ($\omega_0<\Omega$) და AMB რკალით, მოთავსებული AOB კუთხის შიგნით, რომელსაც ყოველი ნახევარი წრფე AOB კუთხეში მოთავსებული, ჰკვეთს მხოლოდ ერთ წერტილში. ვთქვათ $\rho=f(\omega)$ არის ამ AMB რკალის განტოლება პოლარ კოორდინატებში. დავყოთ AOB კუთხე რადიუს-ვექტორების საშუალებით რამოდენიმე მცირე კუთხედ, რომლებიც შეადგენენ Ox ღერძთან

ზრდად კუთხეებს: $\omega_1, \omega_2, \cdots$ ვთქვათ OM_i და OM_{i+1} არის ორი მიმდევნო რადიუს-ვექტორი, რომლებიც ადგენენ Ox ღერძთან ω_i და ω_{i+1} კუთხეებს, ხოლო ρ_i' და ρ''_i იყოს $f(\omega)$ ფუნქციის მინიმუმი და მაქსიმუმი (ω_i, ω_{i+1}) შუალედში. ავაგოთ ერთის მხარით ტოლფერდა t_i სამკუთხედი, რომლის ერთერთი წვერო ემთხვევა O წერტილს, ხოლო ორი დანარჩენი იმყოფება OM_i და OM_{i+1}-ზე ρ'_i მანძილზე O-დან, მეორე მხრით—მართკუთხა T_i სამკუთხედი, რომლის ერთერთი წვერო წინანდელივით ემთხვევა O-ს, მეორე, რომელიც მართკუთხეს ეთანადება მიიღება, თუ OM_i-ზე მოვზომავთ მონაკვეთს ρ''_i-ს ტოლს, ხოლო მესამე იმყოფება OM_{i+1}-ზე. ცხადია, რომ t_i სამკუთხედების სიმრავლე შეადგენს მრავალკუთხოვან არეს, მოთავსებულს D-ში, ხოლო T_i სიმკუთხედების სიმრავლე—მეორე მრავალკუთხოვან არეს, რომელიც შეიცავს D-ს. ამ არეების ფართობები არიან შესაბამად ტოლი

$$\frac{1}{2}\sum(\rho_i')^2\sin(\omega_{i+1}-\omega_i),\quad \frac{1}{2}\sum(\rho_i'')^2\operatorname{tg}(\omega_{i+1}-\omega_i)$$

და აქვთ საერთო ზღვარი $\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2\,d\omega$. პირველი მათგანი, მაგალითად, შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$\frac{1}{2}\sum(\rho_i')^2(1-\varepsilon_i)(\omega_{i+1}-\omega_i),$$

სადაც ε_i თ ა ნ ა ბ რ ა დ მიისწრაფის ნულისაკენ $(\omega_{i+1}-\omega_1)$-სთან ერთად. მაშასადამე, D არის ფართობი, ტოლია განსაზღვრული ინტეგრალის:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega_0}^{\Omega}\rho^2\,d\omega;$$

$\frac{1}{2}\rho^2\,d\omega$ არის ფ ა რ თ ო ბ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ი პოლარ კოორდინატებში. მისი გეომეტრიული მნიშვნელობა თავისთავად ცხადია.

ამ კერძო შემთხვევაზე ადვილად დაიყვანება ისეთი არის შემთხვევა, რომელიც შემოსაზღვრულია ჩვეულებრივი სახის კონტურით, თუ მას განვიხილავთ ზემოთ განხილული სახის არეების როგორც ჯამს ან სხვაობას.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა I. რიცხვი, რომელიც ზომავს იმ არის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი მრუდით, იყო განსაზღვრული როგორც განკვეთა დადებით რიცხვთა არეში. ასეთ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს მთელი რიგი თვისებებისა, რომლებიც შეგვეძლო მიგვეღო როგორც განმარტება. აი ერთერთი მათგანი, რომელიც შესაძლებელია ახლო იყოს ფართობის ჩვეულებრივი წარმოდგენასთან. ვთქვათ C კეტილი ბრტყელი მრუდია, რომელიც საზღვრავს კვადრებად D არეს $\mathfrak{A}$ ფართობით. ავილოთ მრავალკუთხოვანი P არე, შემცველი D არეისა, რომლის ფართობი ნაკლებია ვიდრე $\mathfrak{A}+\varepsilon$, და მეორე მრავალკუთხოვანი p არე, მოთავსებული D-ში, რომლის არე მეტია $\mathfrak{A}-\varepsilon$-ზე. ასეთ შემთხვევაში ფართობი მრავალკუთხოვანი K არისა, რომელიც წარმოადგენს P და p არეების სხვაობას, იქნება ნაკლები 2ε-ზე.

ეს მრავალკუთხოვანი არე შეიძლება შევცვალოთ მეორე მრავალკუთხოვანი K_1 არით შემცველი C-სი, ფართობით ნაკლები 4ε-ზე, რომლის L საზღვარს არა აქვს არც ერთი საერთო წერტილი C-თან. მართლაც, l ტეხილი, რომელიც შემოსაზღვრავს K-ს გარედან, შეიძლება შევცვალოთ მეორე ტეხილით, რომელიც შედგენილია პირველის პარალელური წრფეებით და გამავალი მათგან საკმაო მცირე მანძილზე იმისათვის, რომ ფართობი იმ არისა, რომელიც მოთავსებულია ორივე ტეხილს შორის, იყოს ε-ზე ნაკლები; ასევე შეიძლება მოვიქცეთ იმ l' ტეხილის მიმართ, რომელიც საზღვრავს K-ს შიგნიდან.

გავიყვანოთ ახლა ორი სისტემა წრფეების, პარალელური ორი თანამართობი მიმართულებისა და დაშორებული ერთმანეთისაგან ρ მანძილით. მივიღებთ სამგვარი სახის კვადრატებს: 1) შიგა კვადრატები D-ს მიმართ, რომელთა ყველა შიგა წერტილი ეკუთვნის D-ს; 2) გარეგანი კვადრატები, რომელთაც არა აქვთ არც ერთი საერთო წერტილი D-თან; 3) შერეული კვადრატები, რომლებიც შეიცავენ როგორც წერტილებს, რომლებიც ეკუთვნიან D-ს, ისე წერტილებს, რომლებიც არიან D-ს მიმართ გარეგანი. ადვილად შევნიშნავთ, რომ შერეული კვადრატების ფართობების ჯამი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა ρ უსაზღვროდ მცირდება. მართლაც, δ იყოს მინიმუმი მანძილის C კონტურის წერტილისა, იმ L ტეხილის წერტილიდან, რომელიც საზღვრავს K_1 არეს. თუ ρ აღებულია ნაკლები ვიდრე $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, მაშინ ყველა შერეული კვადრატი აუცილებლად ეკუთვნის K_1-ს, ვინაიდან ყოველ მათგანს აქვს წერტილი, მოთავსებული C კონტურზე. ასეთ შემთხვევაში ამ შერეული კვადრატების ფართობების ჯამი ნაკლები იქნება 4ε-ზე, და მაშასადამე, იგი მიისწრაფის ნულისაკენ ρ-თან ერთად, ვინაიდან ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. სრულიად ამგვარადვე დავრწმუნდებით იმაში, რომ შიგა კვადრატების ფართობების ჯამს აქვს ზღვრად D არის ფართობი, როცა ρ უსაზღვროდ მცირდება. მართლაც, ეს ჯამი ნაკლებია $\mathfrak{A}$-ზე, მაგრამ შიგა და შერეული კვადრატების ფართობების ჯამი მეტია $\mathfrak{A}$-ზე; ვინაიდან შერეული კვადრატების ფართობების ჯამი ნაკლებია 4ε-ზე, ამიტომ აქედან ჩვენ დავასკვნით, რომ სხვაობა D არის $\mathfrak{A}$ ფართობსა და შიგა კვადრატების ფართობების ჯამს შორის ნაკლებია 4ε-ზე.

შენიშვნა II. განვიხილოთ კერძოდ ისეთი არე, როგორიც წარმოდგენილია 1 ნახაზზე (§ 9), შემოსაზღვრული კონტურით

$$ACC'DD'BB_0A_0A;$$

$ACC'DD'B$ წირის წერტილის ორდინატი არის აბსცისის $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს რამოდენიმე პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. ცხადია, რომ არის ფართობი, უდრის ACC_0A_0, $C'DD_0C_0$ და $D'BB_0D_0$ არეების ფართობების ჯამს, ე. ი. ჯამს ინტეგრალებისას:

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{11}$$

თუ შევცვლით BB_0 ორდინატს ცვლად ორდინატით, მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ მაინც იქნება უწყვეტი ფუნქცია x-სა. იმ x წერტილზე, სადაც $f(x)$ უწყვეტია, გვაქვს $F'(x)=f(x)$. წყვეტის წერტილისათვის, მაგალითად $x=c$ წერტილისათვის, გვაქვს:

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(x)\,dx=hf(c+\theta h) \qquad (0<\theta<1;$$

$\frac{F(c+h)-F(c)}{h}$ ფარდობას აქვს ზღვრად $f(c+0)$ ან $f(c-0)$ იმისდა მიხედვით h დადებითია თუ უარყოფითი. ეს მაგალითი აშკარად გვიჩვენებს, რომ, თუ $f(x)$ არის ინტეგრადი ფუნქცია, მაგრამ არა უწყვეტი, ინტეგრალს $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ არ ექნება აუცილებლად თავის წარმოებულად $f(x)$.

79. მრუდის რკალის სიგრძე. ვთქვათ

$$x=f(t),\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t) \tag{12}$$

არის t ცვლადის სამი ფუნქცია, უწყვეტი (a, b) შუალედში, სადაც $a<b$. როცა t იზრდება a-დან b-მდე, წერტილი (x, y, z) კოორდინატებით აღწერს AB მრუდის რკალს, შეკრულს ან არა შეკრულს, რომელსაც შეუძლია ჰქონდეს რამოდენიმე ორმაგი წერტილი. ავიღოთ a და b შორის რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა $(a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b)$, და ვთქვათ $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ არიან მრუდის შესაბამი წერტილები, მასთან P_0 წერტილი ემთხვევა A-ს ხოლო P_n—B-ს. ეს $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ წერტილები არიან მიმდევნო წვეროები ტეხილი წირისა სიგრძით L, ჩაწერილი AB რკალში. თუ n რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ ყველა t_i-t_{i-1} სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ აღნიშნულ ტეხილის ყველა გვერდი მიისწრაფის აგრეთვე ნულისაკენ. ასეთ შემთხვევაში, თუ L სიგრძე მიისწრაფის s ზღვარისაკენ, მაშინ ამბობენ, რომ მრუდი *გამწრფევადია* და s ზღვარი არის AB რკალის სიგრძე.

ჩვენ ვნახავთ, რომ მრუდი *გამწრფევადია*, თუ $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებს აქვთ უწყვეტი $f'(t)$, $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ წარმოებულები (a, b) შუალედში[1].

---

[1] ეს პირობები *საკმარისია*, მაგრამ არა *აუცილებელი*. *აუცილებელი* და *საკმარისი* პირობები იმისა, რომ მრუდი იყოს გამწრფევადი, მოცემული იყო *ჟორდანის* (Jordan) მიერ; *იმისათვის, რომ C მრუდი იყოს გამწრფევადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ C-ში ჩახაზული მრავალგვერდების პერიმეტრების გამომსახველი L რიცხვთა სიმრავლე იყოს შემოსაზღვრული.*

ეს პირობა *აუცილებელია*. მართლაც, ვთქვათ L მიისწრაფის s ზღვარისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, იმ დროს, როცა მრავალგვერდის გვერდების სიგრძეთა λ maximum-ი ნულისაკენ მიისწრაფის. არ შეიძლება არსებობდეს არც ერთი სხვა მრავალგვერდა, ჩახაზული C-ში, რომლის L' პერიმეტრი იყოს s-ზე მეტი. მართლაც, ერთი ასეთი წირი მაინც რომ არსებობდეს, მაშინ თითოეულ შუალედს დავყოფდით უფრო მცირე შუალედებად, ჩვენ ვნახავდით, რომ ახალი მრავალგვერდების პერიმეტრები L'-ზე მეტია და მაშასადამე, არ მიისწრაფიან s-კენ.

პირობა *საკმარისია*. ეს მტკიცდება მსჯელობით, სრულიად ანალოგიური იმისა, რომელიც ჩვენ უკვე ორჯერ გამოვიყენეთ (§ 11 და 70). მართლაც, ვთქვათ s არის L რიცხვების ზედა საზღვარი; თუ ε არის წინასწარ მოცემული დადებითი რიცხვი, მაშინ არსებობს ისეთი მიმდევრობა ზრდადი რიცხვებისა:

$$(a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_p=b),$$

რომ მრუდში ჩახაზული შესაბამი მრავალგვერდის Δ პერიმეტრი იქნება მეტი ვიდრე $s-\frac{\varepsilon}{2}$. განვიხილოთ ისეთი მიმდევრობა ზრდადი რიცხვებისა:

$$(a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b)$$

ვთქვათ x_i, y_i, z_i არის P_i წვეროს კოორდინატები, ხოლო c_i კი $P_{i-1}\,P_i$ გვერდის სიგრძე, გვაქვს:

$$c_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2}$$

ანუ, თუ $x_i-x_{i-1},\ldots$-ზე სასრულო ნაზრდის თეორემას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$c_i=(t_i-t_{i-1})\sqrt{[f'(\xi_i)]^2+[\varphi'(\eta_i)]^2+[\psi'(\zeta_i)]^2},$$

სადაც ξ_i, η_i, ζ_i მოთავსებულია t_{i-1} და t_i შორის. თუ (t_{i-1}, t_i) შუალედი ძალიან მცირეა, მაშინ რადიკალი ძალიან მცირედ განსხვავდება შემდეგი რადიკალისაგან:

$$\sqrt{[f'(t_{i-1})]^2+[\varphi'(t_{i-1})]^2+[\psi'(t_{i-1})]^2}$$

რომ ყველა t_i-t_{i-1} შუალედი ნაკლები იყოს რაიმე დადებით η რიცხვზე, რომელიც თავის მხრივ ნაკლებია ვიდრე უმცირესი a_1-a_0, $a_2-a_1, \ldots, b-a_{p-1}$ სხვაობებიდან. ვთქვათ L არის პერიმეტრი სათანადო ჩახაზული მრავალგვერდისა. დავამტკიცოთ, რომ $s-L$ სხვაობა ნაკლები იქნება ვიდრე ε, როცა η საკმაოდ მცირეა.

ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ ყველა t_i და a_k რიცხვი დალაგებულია მათი ზრდადობის მიხედვით და L' იყოს დამხმარე მრავალგვერდის სიგრძე, რომელიც მიიღება ამ ახალი დანაწილების დროს. L' რიცხვი მეტია ან უკიდურეს შემთხვევაში უდრის L და Δ-ს და მაშასადამე მეტია $s-\frac{\varepsilon}{2}$-ზე.

ჩვენ შეგვიძლია L სიგრძის მრავალგვერდებიდან გადავიდეთ L' სიგრძის მრავალგვერდებზე, თუ შევცვლით c_i გვერდებს, რომლებსაც შეესაბამება (t_{i-1}, t_i) შუალედში მოთავსებული a_k წერტილი, იმ სამკუთხედის ორი სხვა გვერდით, რომელსაც აქვს წვეროები წერტილებში, რომლებიც შეესაბამებიან t ცვლადის t_{i-1}, a_k, t_i მნიშვნელობებს. ამ გვერდების რიცხვი არ აღემატება $p-1$-ს. დავუშვათ, რომ η რიცხვი აღებულია საკმაოდ მცირე იმისათვის, რომ უტოლობამ $|t'-t''|<\eta$, მოგვცეს უტოლობა:

$$\sqrt{[f(t')-f(t'')]^2+[\varphi(t')-\varphi(t'')]^2+[\psi(t')-\psi(t'')]^2}<\frac{\varepsilon}{4(p-1)},$$

რაც ყოველთვის შესაძლოა, რადგან f, φ და ψ ფუნქციები არიან უწყვეტი; მაშინ $L'-L$ სხვაობა ნაკლები იქნება $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე. და რადგანაც $L'>s-\frac{\varepsilon}{2}$, ამიტომ $L>s-\varepsilon$. მაშასადამე, L რიცხვს ზღვრად აქვს s.

L რიცხვი არ არის ნაკლები არც ერთ

$$\sum|x_i-x_{i-1}|,\ \ \sum|y_i-y_{i-1}|\ \text{და}\ \sum|z_i-z_{i-1}|$$

რიცხვებზე. მაშასადამე, იმისათვის რომ L იყოს შემოსაზღვრული, აუცილებელია, რომ $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები იყვნენ შემოსაზღვრული ცვლილებით. ეს პირობები აგრეთვე საკმარისია, ვინაიდან მეორეს მხრით ჩვენ გვაქვს:

$$L\leqslant\sum|x_i-x_{i-1}|+\sum|y_i-y_{i-1}|+\sum|z_i-z_{i-1}|.$$

ჩვენ ეს შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: *მრუდის გაწრფევადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები იყვნენ შემოსაზღვრული ცვლილებით* (à variation bornée).

რომ მოვძებნოთ სხვაობის ზღვარი, შეგვიძლია იგი წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{[f'(\xi_i)-f'(t_{i-1})][f'(\xi_i)+f'(t_{i-1})]+\dots}{\sqrt{f'^2(\xi_i)+\varphi'^2(\eta_i)+\psi'^2(\zeta_i)}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\varphi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}}.$$

მაგრამ გვაქვს:

$$|f'(\xi_i)|+|f'(t_{i-1})|\leqslant\sqrt{f'^2(\xi_i)+\dots}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\dots},$$

და, მაშასადამე,

$$\left|\frac{f'(\xi_i)+f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\xi_i)+\dots}+\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\dots}}\right|\leqslant 1.$$

ვინაიდან ფუნქციები: $f'(t)$, $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ არიან უწყვეტი, ამიტომ ნებისმიერ დადებით ε რიცხვისათვის შეიძლება მოვძებნოთ შესაბამი მეორე დადებითი η რიცხვი ისეთი, რომ ყოველ შუალედში, რომლის სიგრძე ნაკლებია η-ზე, $f'(t)$ $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ ფუნქციების რყევები იყოს ნაკლები $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე. მაშასადამე, გვაქვს:

$$c_i=(t_i-t_{i-1})\left[\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\varphi'^2(t_{i-1})+\psi'^2(t_{i-1})}+\rho_i\right],$$

სადაც ρ_i თ ა ნ ა ბ რ ა დ მიისწრაფის ნულისაკენ t_i-t_{i-1}-სთან ერთად, და მაშასადამე, $L=\sum c_i$ პერიმეტრს აქვს ზღვრად (§ 72) ინტეგრალი:

$$s=\int_a^b\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}\,dt. \tag{13}$$

ეს დამტკიცება ვრცელდება აგრეთვე იმ შემთხვევაზედაც, როცა f', φ' და ψ წარმოებულები წყვეტილია AB რკალის სასრულო რიცხვის წერტილებზე, რასაც აქვს ადგილი, როცა მრუდს აქვს კუთხითი წერტილები. ამ შემთხვევაში AB რკალი უნდა დავყოთ რამოდენიმე ისეთ რკალად, რომ თითოეულ მათგანში f', φ' და ψ' იყვნენ უწყვეტი.

მე-(13) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ რკალი მოთავსებული უძრავ A წერტილსა და ისეთ მოძრავ M წერტილს შორის, რომელიც შეესაბამება პარამეტრის t მნიშვნელობას, არის t-ს ფუნქცია, რომლის წარმოებული არის

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2};$$

ავამაღლოთ ორივე ნაწილი კვადრატში და გავამრავლოთ dt^2-ზე, მივიღებთ:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{14}$$

ამ ფორმულას ადგილი აქვს ყოველთვის, როგორიც არ უნდა იყოს დამოუკიდებელი ცვლადი. იგი ადვილად შეიძლება დავიმახსოვროთ მისი გეომეტრი-

ული მნიშვნელობის გამო იგი გამოთქვამს, რომ ds არის დიაგონალი იმ მართკუთხა პარალელოპიპედისა, რომლის წიბოები არიან dx, dy, dz.

შენიშვნა.—თუ განსაზღვრულ ინტეგრალზე, რომელიც წარმოადგენს M_0M_1 რკალის სიგრძეს და რომლის ბოლოები შეესაბამება t პარამეტრის t_0 და t_1 მნიშვნელობებს ($t_1 > t_0$), გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, მივიღებთ:

$$s = \text{arc}\, M_0M_1 = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}\,,$$

სადაც θ მოთავსებულია (t_0, t_1) შუალედში. აღვნიშნავთ რა M_0M_1 ქორდას c-თი, გვაქვს აგრეთვე:

$$c^2 = [f(t_1) - f(t_0)]^2 + [\varphi(t_1) - \varphi(t_0)]^2 + [\psi(t_1) - \psi(t_0)]^2.$$

თითოეულ $f(t_1) - f(t_0), \ldots,$ სხვაობაზე თუ გამოვიყენებთ სასრული ნაზრდის ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$c = (t_1 - t_0)\sqrt{f'^2(\xi) + \varphi'^2(\eta) + \psi'^2(\zeta)},$$

სადაც ξ, η, ζ რიცხვები მოთავსებულია (t_0, t_1) შუალედში. მაგრამ ზემოთ მიღებულის ძალით, ორივე ფესვის სხვაობა ნაკლებია ε-ზე, როცა $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ფუნქციების რყევა (t_0, t_1) შუალედში ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე. ამრიგად

$$s - c < \varepsilon(t_1 - t_0)$$

და, მაშასადამე,

$$1 - \frac{c}{s} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta) + \varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}}.$$

M_0M_1 რკალის უსაზღვროდ შემცირებით, $t_1 - t_0$ სხვაობა და მასთან ერთად ε-იც მიისწრაფიან ნულისაკენ; ამრიგად **უსასრულოდ მცირე რკალისა და შესაბამი ქორდის ფართობის ზღვარი ტოლია ერთის.**

მაგალითი.—ვთქვათ, საძიებელია რკალი იმ ბრტყელი მრუდისა, რომლის განტოლება მოცემულია პოლარ კოორდინატებში: $\rho = f(\omega)$. თუ მივიღებთ ω-ს დამოუკიდებელ ცვლადათ, მაშინ მრუდი შეიძლება წარმოვადგინოთ სამი განტოლებით: $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = 0$; აქედან გვაქვს:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\cos\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega)^2 + (\sin\omega\, d\rho + \rho\cos\omega\, d\omega)^2,$$

ანდა გამარტივების შემდეგ:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

ავიღოთ, მაგალითად კარდიოიდი, რომლის განტოლება არის:

$$\rho = R + R\cos\omega.$$

წინა ფორმულა გვაძლევს:

$$ds^2 = R^2 d\omega^2 [\sin^2\omega + (1 + \cos\omega)^2] = 4R^2\cos^2\frac{\omega}{2} d\omega^2;$$

როცა ω იცვლება 0-სა და π-ს შორის, გვექნება:

$$ds = 2R\cos\frac{\omega}{2}\, d\omega,$$

და რკალის გამოსახულება იქნება:

$$\left(4R\sin\frac{\omega}{2}\right)_{\omega_0}^{\omega_1},$$

სადაც ω_0 და ω_1—პოლარი კუთხეებია, რომლებიც შეესაბამებიან რკალის ბოლოებს. მაშასადამე, მთელი მრუდის სიგრძე ტოლია $8R$.

80. მიმართულების კოსინუსები. მრუდის თვისებების შესწავლის დროს ხშირად ხელსაყრელია დამოუკიდებელ ცვლადად მივიღოთ ამ მრუდის რკალის სიგრძე (ბუნებრივი პარამეტრი). განსახილავ მრუდზე ავირჩიოთ დადებითი მიმართულება; AM რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია უძრავ A წერტილსა და ნებისმიერ M წერტილს შორის აღვნიშნოთ s-ით და ჩავთვალოთ იგი დადებით ან უარყოფით სიდიდეთ იმისდა მიხედვით, მიმართულება A-დან M-საკენ იქნება დადებითი თუ უარყოფითი. ამ რკალის რაიმე M წერტილზე გავავლოთ მრუდის მხები და იგი მივმართოთ იქეთ, საითკენაც იზრდება s რკალი. ვთქვათ α, β, γ ის კუთხეებია, რომელსაც შეადგენს მხების მიმართულება მართკუთხა Ox, Oy, Oz ღერძების დადებით მიმართულებებთან. გვაქვს:

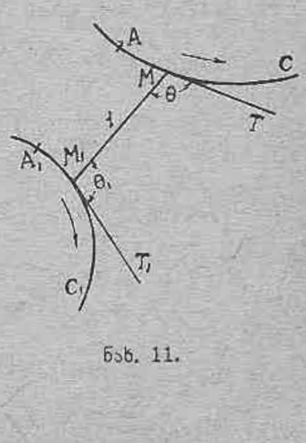
$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\pm\frac{1}{ds}.$$

რომ გამოვარკვიოთ, თუ რომელი ნიშანია ასაღები, ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მხების დადებითი მიმართულება Ox ღერძთან შეადგენს მახვილ კუთხეს. ამ შემთხვევაში x და s ერთდროულად იზრდებიან და მაშასადამე, ასაღებია $+$ნიშანი. თუ α—ბლაგვი კუთხეა, მაშინ $\cos\alpha$ უარყოფითია; აქ s-ის ზრდის დროს, x-სი კლებულობს, ამიტომ $\frac{dx}{ds}$ აგრეთვე უარყოფითია და ჩვენ უნდა ავიღოთ ისევ $+$ნიშანი. მაშ ყველა შემთხვევაში გვაქვს:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \cos\beta=\frac{dy}{ds},\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{15}$$

სადაც dx, dy, dz, ds დიფერენციალები აღებულია ნებისმიერი დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ.

81. წრფის მონაკვეთის ცვლილება. ვთქვათ MM_1 (ნახ. 11) არის წრფის მონაკვეთი, რომლის ბოლოები აღწერენ ორი C და C_1 მრუდს. თითოეულ ამ მრუდზე ავიღოთ საწყისი წერტილი და ავირჩიოთ დადებითი მიმართულება.



ნახ. 11.

s იყოს AM რკალის სიგრძე, ხოლო s_1 კი A_1M_1-ისა, მასთან ორივე აღებულია თავისი ნიშნით; l-ით აღვნიშნოთ MM_1-ის სიგრძე, ხოლო θ და θ_1-ით ის კუთხეები, რომელსაც შეადგენენ MM_1 და M_1M წრფეები MT და M_1T_1 მხებების დადებით მიმართულებებთან შესაბამად. ვიპოვოთ დამოკიდებულება θ, θ_1 და ds, ds_1, dl დიფერენციალებს შორის.

აღვნიშნოთ M და M_1 წერტილების კოორდინატები x, y, z და x_1 y_1 z_1-ით შესაბამად. ხოლო α,

β, γ და α_1, β_1, γ_1-ის კუთხეები, რომელსაც შეადგენენ MT და M_1T_1 მხებები კოორდინატთა ღერძებთან. გვაქვს:

$$l^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,$$

აქედან

$$l\,dl=(x-x_1)\ (dx-dx_1)+(y-y_1)\ (dy-dy_1)+(z-z_1)\ (dz-dz_1).$$

მე-(15) ფორმულისა და C_1 მრუდისათვის შესაბამი ფორმულის გამოყენებით, უკანასკნელი ტოლობა წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$dl=\left(\frac{x-x_1}{l}\cos\alpha+\frac{y-y_1}{l}\cos\beta+\frac{z-z_1}{l}\cos\gamma\right)ds+$$
$$+\left(\frac{x_1-x}{l}\cos\alpha_1+\frac{y_1-y}{l}\cos\beta_1+\frac{z_1-z}{l}\cos\gamma_1\right)ds_1.$$

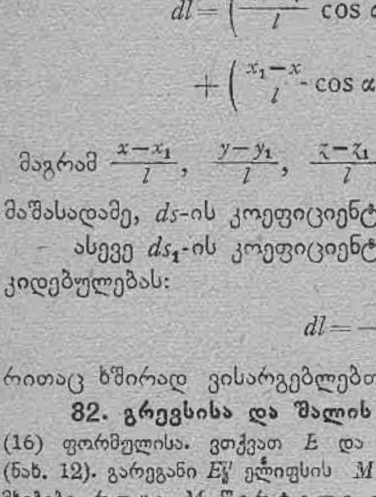
მაგრამ $\frac{x-x_1}{l}$, $\frac{y-y_1}{l}$, $\frac{z-z_1}{l}$ არის MM_1 წრფის მიმართულების კოსინუსები; მაშასადამე, ds-ის კოეფიციენტი ტოლია—$\cos\theta$-სი.

ასევე ds_1-ის კოეფიციენტი იქნება—$\cos\theta_1$ და მივიღებთ საძიებელ დამოკიდებულებას:

$$dl=-ds\cos\theta-ds_1\cos\theta_1, \qquad (16)$$

რითაც ხშირად ვისარგებლებთ.

82. გრევსისა და შალის თეორემები. მოვიყვანოთ აქ ერთერთი გამოყენება (16) ფორმულისა. ვთქვათ E და E' არის ორი ჰომოფოკალური (*homofocales*) ელიფსი (ნახ. 12). გარეგანი E' ელიფსის M წერტილიდან გავატაროთ E ელიფსისადმი MA და MB მხებები. როცა M წერტილი გადაადგილდება E' ელიფსზე, მაშინ $MA+$ $+MB-$arc ANB სხვაობა მუდმივი რჩება.



ნახ. 12.

ვთქვათ s და s' არის OA და OB რკალები, σ კი $O'M$ რკალი, l და l' არის AM და MB მონაკვეთების სიგრძეები, θ კი კუთხე MB მხებსა და MT მხების დადებით მიმართულებას შორის; ფოკალური თვისებების ძალით MA და MT-ს შორის კუთხე ტოლია $\pi-\theta$-სი[1]. თუ შევნიშნავთ, რომ AM ემთხვევა მხების დადებით მიმართულებას A-ში, ხოლო BM პირისპირ წინააღმდეგია მხების დადებითი მიმართულებისა B-ში, მე-(16) ფორმულიდან გვექნება:

$$dl=-ds+d\sigma\cos\theta,$$
$$dl'=+ds'-d\sigma\cos\theta;$$

ამ ტოლობების შეკრება გვაძლევს:

$$d\ (l+l')=d\ (s'-s)=d\ \text{arc}\ ANB,$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს ზემოთ აღნიშნული დებულების სამართლიანობა.

[1] შევუერთოთ M წერტილი ორივე ფოკუსს, მეორე რიგის ჰომოფოკალური მრუდთა თვისებების თანახმად MT მხები ერთნაირად არის დახრილი ორივე სხივ-ვექტორთან; ასევე, ეს სხივ-ვექტორები ერთნაირ კუთხეებს ადგენენ MA და MB მხებებთან. აქედან უკვე ცხადია ტექსტში მოყვანილი თეორემის სამართლიანობა.

ეს არის ინგლისელი გეომეტრის გ რ ე ვ ს ი ს (Craves) თეორემა. ამგვარადვე მტკიცდება შემდეგი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის შ ა ლ ს (Chasles). ვთქვათ, მოცემულია ჰომოფოკალური ელიფსი და ჰიპერბოლი, რომლებიც იკვეთება N წერტილზე: თუ N წერტილზე გამავალ ჰიპერბოლის შტოზე ავიღებთ M წერტილს და ამ წერტილიდან გავატარებთ ელიფსის MA და MB მხებებს, მაშინ რკალების $NA—NB$ სხვაობა ტოლი იქნება მხებების $MA—MB$ სხვაობისა.

III. ცვლადთა გარდაქმნა. ნაწილობითი ინტეგრობა

მრავალი განსაზღვრული ინტეგრალი, რომლებიც უშუალო ინტეგრობით ვერ მიიღებიან, შეიძლება მოძებნილი იქნას იმ ორი ხერხის საშუალებით, რომლებსაც აქ ჩამოვაყალიბებთ.

83. ცვლადთა გარდაქმნა. თუ $x=\varphi(t)$ ჩასმით განსაზღვრულ ინტეგრალში $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ შევცვლით x ცვლადს ახალი დამოუკიდებელი t ცვლადით, მაშინ მივიღებთ ახალ განსაზღვრულ ინტეგრალს. ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ არის უწყვეტი ფუნქცია და აქვს უწყვეტი წარმოებული α და β-ს შორის და ამისგარდა ვთქვათ, რომ როცა t იცვლება α-დან β-მდე, მაშინ $\varphi(t)$ მუდამ იცვლება ერთი და იმავე მიმართულებით $\varphi(\alpha)=a$-დან $\varphi(\beta)=b$-მდე.

(α, β) შუალედი დავყოთ ნაწილებად $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$ მნიშვნელობების საშუალებით და ვთქვათ $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ არის $x=\varphi(t)$ ცვლადის შესაბამი მნიშვნელობები. სასრულო ნაზრდის თეორემის ძალით გვაქვს:

$$x_i-x_{i-1}=(t_i-t_{i-1})\,\varphi'(\theta_i),$$

სადაც θ_i მოთავსებულია t_{i-1} და t_i-ს შორის. ვთქვათ $\xi_i=\varphi(\theta_i)$ არის x ცვლადის შესაბამი მნიშვნელობა, მოთავსებული x_{i-1} და x_i-ს შორის, მაშინ ჯამს:

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$

ზღვრად აქვს მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალი. მაგრამ ეს ჯამი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f[\varphi(\theta_1)]\,\varphi'(\theta_1)(t_1-\alpha)+\cdots+f[\varphi(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1})+\cdots$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მას ზღვრად აქვს ახალი განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

ამრიგად ჩვენ ვღებულობთ ტოლობას:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{17}$$

მე (17) ფორმულა არის განსაზღვრულ ინტეგრალში ც ვ ლ ა დ თ ა გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს ფორმულა. ჩვენ ვხედავთ, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი ახალი დიფერენციალური გამოსახვა მიიღება $f(x)\,dx$-დან, თუ x ცვლადსა და dx დიფერენციალს შევცვლით $\varphi(t)$ და $\varphi'(t)\,dt$-თი, მასთან ახალი საზღვრებია t-ს ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამებიან წინა საზღვრებს. $\varphi(t)$ ფუნქციის მოხერხებულად შერჩევით ახალი ინტეგრალი შეიძლება აღმოჩნდეს უფრო მარტივი ვიდრე პირვანდელი. მაგრამ არავითარი გარკვეული წესები ამისათვის არ არსებობს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.—ვთქვათ a და b ორი დადებითი რიცხვია; გვაქვს:

$$\int_1^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^{a}\frac{dx}{x}+\int_a^{ab}\frac{dx}{x};$$

უკანასკნელ ინტეგრალში თუ მოვახდენთ ჩასმას $x=ay$, მივიღებთ:

$$\int_a^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^{b}\frac{dy}{y}=\int_1^{b}\frac{dx}{x},$$

და, მაშასადამე, გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$\int_1^{ab}\frac{dx}{x}=\int_1^{a}\frac{dx}{x}+\int_1^{b}\frac{dx}{x}.$$

ამრიგად, ჩვენ ვღებულობთ ლოგარითმის ცნობილ ძირითად თვისებას (შდ. § 52).

ზოგიერთი დაშვება, რომლებიც მივიღეთ (17) ფორმულის გამოყვანის დროს, არ არის აუცილებელი. მაგალითად არ არის აუცილებელი რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია იცვლებოდეს ყოველთვის ერთი და იმავე მიმართულებით, როცა t იცვლება α-დან β-მდე. მაგალითად, ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(t)$ იზრდება a-დან c-მდე ($c<b$), როცა t იცვლება α-დან γ-მდე ($\gamma<\beta$), ხოლო t-სი შემდეგი ზრდადობის დროს γ-დან β-მდე, $\varphi(t)$ კლებულობს c-დან b-მდე. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (a, b) შუალედში, მაშინ თითოეული (a, c), (c, b), შუალედში შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-(17) ფორმულა; იგი გვაძლევს:

$$\int_a^{c} f(x)\,dx=\int_\alpha^{\gamma} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_c^{b} f(x)\,dx=\int_\gamma^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

ორივე ტოლობის შეკრება მოგვცემს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

პირიქით, აუცილებელია, რომ $\varphi(t)$ იყოს სრულიად გარკვეული ფუნქცია t-სი. თუ ამ პირობას ყურადღებას არ მივაქცევთ, მაშინ შეიძლება მივიღოთ არა სწორი დასკვნები. მაგალითად ინტეგრალში $\int_{-1}^{+1} dx$ თუ გამოვიყენებთ მე-(17) ფორმულას, რომელშიაც მოვახდენთ ჩასმას $x=t^{\frac{3}{2}}$, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_{-1}^{+1} dx = \int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

რაც შეუძლებელია, რადგანაც მეორე ინტეგრალი ტოლია ნულის. სწორად რომ გამოვიყენოთ მე-(17) ფორმულა, აუცილებელია $(-1,+1)$ შუალედი დავყოთ ორ $(-1, 0)$ და $(0, 1)$ შუალედად. პირველ შუალედში მივიღოთ $x=-\sqrt{t^3}$ და t ვცვალოთ 1-დან 0-მდე; მეორე შუალედში კი მივიღოთ $x=\sqrt{t^3}$ და t ვცვალოთ 0-დან 1-მდე. ამრიგად სწორი პასუხი იქნება:

$$\int_{-1}^{+1} dx = 3\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left(2t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 = 2$$

შენიშვნა. მე-(17) ფორმულაში თუ ზედა b და β საზღვრებს შევცვლით ცვლადი x და t საზღვრებით, მივიღებთ:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^t f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ მივიღებთ $x=\varphi(t)$, მაშინ $F(x)$ ფუნქცია რომლის წარმოებული $f(x)$-ია, გადაიქცევა $\Phi(t)$ ფუნქციად, რომლის წარმოებული არის, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. უკანასკნელი შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულიდან. ამრიგად საზოგადოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

ეს არის ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა განუსაზღვრელ ინტეგრალებში.

84. ნაწილობითი ინტეგრობა. ვთქვათ u და v არის უწყვეტი ფუნქციები თავისი u' და v' წარმოებულებით a და b-ს შორის. გვაქვს:

$$\frac{d\,(uv)}{dx}=u\;\frac{dv}{dx}+v\;\frac{du}{dx};$$

ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრობა გვაძლევს:

$$\int_a^b \frac{d\,(uv)}{dx}\,dx=\int_a^b u\,\frac{dv}{dx}\,dx+\int_a^b v\,\frac{du}{dx}\,dx.$$

უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du, \tag{18}$$

სადაც $[F(x)]_a^b$ სიმბოლოთი აღნიშნულია საზოგადოდ სხვაობა

$$F(b)-F(a).$$

თუ შევცვლით b საზღვარს ცვლადი x საზღვრით და a-ს დავტოვებთ უცვლელად, რაც ტოლფასია განსაზღვრული ინტეგრალებიდან განუსაზღვრელზე გადასვლისა, თანაგვარადვე გვექნება:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{19}$$

ამრიგად $\int u\,dv$ ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება $\int v\,du$ ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება პირვანდელზე მარტივი აღმოჩნდეს. ვთქვათ, მაგალითად, გამოსათვლელია განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_a^b x^m \ln x\,dx\;(m+1\neq 0).$$

მივიღოთ $u=\ln x$, $v=\frac{x^{m+1}}{m+1}$; მე-(18) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$\int_a^b \ln x\cdot x^m dx=\left[\frac{x^{m+1}\ln x}{m+1}\right]_a^b-\frac{1}{m+1}\int_a^b x^m dx=\left[\frac{x^{m+1}\ln x}{m+1}-\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right]_a^b.$$

ეს ფორმულა ვერ გამოიყენება მაშინ, როცა $m+1=0$. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\int_a^b \ln x\;\frac{dx}{x}=\left[\frac{1}{2}\;(\ln\;x)^2\right]_a^b.$$

მე-(18) ფორმულა შეიძლება განვაზოგადოთ. u და v ფუნქციების მიმდევრობითი წარმოებულები აღვნიშნოთ u', u'', ..., $u^{(n+1)}$ და v', v'', ..., $v^{(n+1)}$-თი. მე-(18) ფორმულას თუ გამოვიყენებთ $\int u dv^{(n)}$, $\int u' dv^{(n-1)}$, ... ინტეგრალებზე, მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\int_a^b uv^{(n+1)} dx = \int_a^b u\, dv^{(n)} = [uv^{(n)}]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)} dx,$$

$$\int_a^b u'v^{(n)} dx = \int_a^b u' dv^{(n-1)} = [u'v^{(n-1)}]_a^b - \int_a^b u''v^{(n-1)} dx,$$

. . . .

$$\int_a^b u^{(n)} v' dx = \int_a^b u^{(n)} dv = [u^{(n)} v]_a^b - \int_a^b u^{(n+1)} v\, dx.$$

ამ ტოლობებს თუ გავამრავლებთ რიგრიგობით $+1$ და -1-ზე და შემდეგ შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\int_a^b uv^{(n+1)} dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)} v]_a^b +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)} v\, dx. \tag{20}$$

ამ ფორმულის საშუალებით $\int uv^{(n+1)} dx$ ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება $\int u^{(n+1)} v\, dx$ ინტეგრალის გამოთვლაზე.

კერძოდ, მე-(20) ფორმულით სარგებლობა ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დგას n-ური ხარისხის u პოლინომისა და ცნობილი v ფუნქციის $(n+1)$ რიგის წარმოებულის ნამრავლი; ამ შემთხვევაში გვაქვს $u^{(n+1)} = 0$, და მარჯვენა ნაწილი თავისუფალი იქნება ინტეგრალის ნიშნისაგან.

ვთქვათ, მაგალითად, გამოსათვლელია განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\, dx,$$

სადაც $f(x)$ არის n-ური ხარისხის პოლინომი. მივიღოთ $u = f(x)$; $v = \frac{e^{\omega x}}{\omega^{n+1}}$.

მე-(20) ფორმულის ძალით, თუ $e^{\omega x}$-ს გამოვიტანთ ფრჩხილების გარეთ, გვექნება:

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)dx=\left\{e^{\omega x}\left[\frac{f(x)}{\omega}-\frac{f'(x)}{\omega^2}+\cdots+(-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{\omega^{(n+1)}}\right]\right\}_a^b. \tag{21}$$

ამავე წესით შეგვიძლია გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

$$\int_a^b \cos mx f(x)\,dx, \quad \int_a^b \sin mx\, f(x)\,dx,$$

სადაც $f(x)$ პოლინომია.

85. ტეილორის ფორმულა. მე-(20) ფორმულაში u შევცვალოთ $F(x)$ ფუნქციით, რომელიც a და b-ს შორის უწყვეტია თავისი ყველა წარმოებულით $(n+1)$ რიგამდე უკანასკნელის ჩათვლით და მივიღოთ $v=(b-x)^n$. გვაქვს:

$$v'=-n(b-x)^{n-1},\ v''=n(n-1)(b-x)^{n-2},\cdots,$$

$$v^{(n)}=(-1)^n\ 1\cdot2\cdot3\cdots n,\ v^{(n+1)}=0.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ როცა $x=b$ ფუნქციები: $v, v', v'',\cdots, v^{(n-1)}$ ისპობიან, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$0=(-1)^n\Big[n!\ F(b)-n!\ F(a)-n!\ F'(a)(b-a)-$$

$$-\frac{n!}{2}F''(a)(b-a)^2-\cdots-F^{(n)}(a)(b-a)^n\Big]+$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx.$$

აქედან გვაქვს:

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot2}F''(a)+\cdots$$

$$+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx.$$

რადგანაც x-ს ცვლილების დროს a-დან b-მდე, $(b-x)^n$ მამრავლი მუდმივ ნიშანს ინარჩუნებს, ამიტომ უკანასკნელ ინტეგრალზე შეიძლება საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენება; იგი გვაძლევს:

$$\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx=F^{(n+1)}(\xi)\int_a^b(b-x)^n\,dx=$$

$$=\frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1}F^{(n+1)}(\xi),$$

სადაც ξ მოთავსებულია a და b-ს შორის. ამ მნიშვნელობას თუ ჩავსვამთ წინა ფორმულაში, მივიღებთ ტეილორის ფორმულას ლაგრანჟის დამატებითი წევრით.

85. bise რიცხვის ტრანსცენდენტობა. (21) ფორმულის საშუალებით შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი შესანიშნავი დებულება, მოცემული ჰ ე რ მ ი ტ ი ს მიერ: e რ ი ც ხ ვ ი ა რ შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ფ ე ს ვ ი ი ყ ო ს ა რ ც ე რ თ ი მ თ ე ლ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ა ნ ი ა ლ გ ე ბ-რ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ა [1].

(21) ფორმულაში თუ მივიღებთ $a=0$, $\omega=-1$, გვექნება:

$$\int_0^b e^{-x} f(x)\, dx = -\left[e^{-x} F(x)\right]_0^b,$$

სადაც

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x);$$

ეს დამოკიდებულება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$F(b)=e^b F(0)-e^b\int_0^b f(x)\, e^{-x}\, dx. \tag{A}$$

ვიგულისხმოთ, რომ e არის ფესვი მთელი კოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლებისა:

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\ldots+c_me^m=0.$$

(A) ფორმულაში თუ მივიღებთ მიმდევრობით $b=0, 1, 2, \ldots m$ და მიღებულ ფორმულებს გავამრავლებთ შესაბამად $c_0, c_1, \ldots c_m$-ზე და შევკრებთ, გვექნება:

$$c_0F(0)+c_1F(1)+\ldots+c_mF(m)+\sum_{i=0}^{i=m} c_ie^i\int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx=0, \tag{B}$$

სადაც i ღებულობს მხოლოდ მთელ მნიშვნელობებს 0, 1, 2,..., m. აქამდის $f(x)$ პოლინომი რჩებოდა ნებისმიერი. ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ $f(x)$ პოლინომი შესაფერისად არის შერჩეული, (B) ტოლობა შეუძლებელია.

ავიღოთ

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-m)^p,$$

სადაც p მარტივი რიცხვია m-ზე მეტი. ცხადია, რომ $f(x)$ პოლინომის ხარისხი არის $(mp+p-1)$ და მისი უმაღლესი რიგის წარმოებულის ყველა კოეფიციენტი, მოყოლებული p-ური რიგიდან, იქნებიან მთელი რიცხვები და p-ს ჯერადი, რადგანაც ყოველი p მიმდევნო რიცხვების ნამრავლი იყოფა $p!$-ზე. ამის გარდა, $f(x)$ ფუნქცია თავისი პირველი $(p-1)$ რიგის წარმოებულებით

[1] ეს დამტკიცება მოცემული იყო დ. ჰ ი ლ ბ ე რ ტ ი ს (Hilbert) მიერ, რომელმაც თავის გამოყვანაში ძირითადად ისარგებლა ჰ ე რ მ ი ტ ი ს მეთოდით.

იქცევა ნულად, როცა $x=1, 2, \ldots, m$; აქედან გამომდინარეობს, რომ $F(1), F(2), \ldots, F(m)$— მთელი რიცხვებია, რომლებიც p-ზე იყოფა. გვრჩება გამოსათვლელი $F(0)$:

$$F(0)=f(0)+f'(0)+\ldots+f^{(p-1)}(0)+f^{(p)}(0)+f^{(p+1)}(0)+\ldots$$

მაგრამ $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(p-2)}(0)=0$, ხოლო წინა მსჯელობის ძალით $f^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0), \ldots$, არის მთელი რიცხვები p-ს ჯერადი. რომ მივიღოთ $f^{(p-1)}(0)$ სიდიდე, საკმარისია $f(x)$-ში x^{p-1}-ის კოეფიციენტი გავამრავლოთ $(p-1)!$-ზე. იგი მოგვცემს $\pm(1.\ 2.\ 3.\ldots m)^p$. ამრიგად ჯამი:

$$c_0 F(0)+c_1 F(1)+\ldots+c_m F(m)$$

მთელი რიცხვია. მას რომ მივუმატოთ $\pm c_0(1.\ 2.\ 3\ldots m)^p$ რიცხვი, მაშინ ჯამი გაიყოფა p-ზე. თუ p-თ ავიღებთ ისეთ მარტივ რიცხვს, რომელიც m-ზე და c_0-ზე მეტია, მაშინ ეს უკანასკნელი სიდიდე არ შეიძლება გაიყოს p-ზე და (B) ჯამის პირველი ნაწილი იქნება ნ უ ლ ი ს ა გ ა ნ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი მთელი რიცხვი.

უჩვენოთ ახლა, რომ თუ p-თ ავიღებთ საკმაო დიდ მარტივ რიცხვს, მაშინ

$$\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx$$

ჯამი შეგვიძლია გავხადოთ ნაკლები ყოველ მოცემულ სიდიდეზე. როცა x იცვლება 0-დან i-მდე, მაშინ $f(x)$ პოლინომში ყოველი მამრავლი ნაკლები იქნება m-ზე; მაშასადამე

$$|f(x)|<\frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1},$$

$$\left|\int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx\right|<\frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1}\int_0^i e^{-x}\, dx<\frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1}.$$

ამიტომ

$$\left|\sum_i c_i e^i \int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx\right|<M\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}e^m=\varphi(p),$$

სადაც M არის $|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_m|$ ჯამის ზედაზღვარი. როცა p უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ $\varphi(p)$ ფუნქცია ნულისაკენ მიისწრაფის, როგორც კრებადი მწკრივის ზოგადი წევრი, რომელშიაც ნებისმიერი წევრის შეფარდება მომდევნო წევრთან მიისწრაფის ნულისაკენ. ამრიგად შეგვიძლია მოვძებნოთ იმდენად დიდი მარტივი p რიცხვი, რომ (B) ტოლობა იქნეს შეუძლებელი; ეს კი ამტკიცებს ჰ ე რ მ ი ტ ი ს თეორემას.

86. ლეჟანდრის პოლინომები. მოვძებნოთ n-ური ხარისხის $P_n(x)$ პოლინომი იმ პირობით, რომ ინტეგრალი

$$\int_a^b Q P_n\, dx,$$

სადაც Q არის n-ზე დაბალი ხარისხის პოლინომი, იყოს ნულის ტოლი, როგორიც არ უნდა იყოს Q პოლინომი. ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ P_n, როგორც n-ური წარმოებული რაღაც $2n$ ხარისხის R პოლინომიდან; ამ პირობით ეს R პოლინომი სავსებით ვერ განისაზღვრება, რადგანაც მისი n-ური წარმოებულის შეუცვლელად ჩვენ შეგვიძლია მას მივუმატოთ ნებისმიერი პო-

ლინომი $(n-1)$ ხარისხისა. ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $P_n=\frac{d^nR}{dx^n}$ და R პოლინომი შევარჩიოთ ისე, რომ იგი თავისი პირველი $(n-1)$ რიგის წარმოებულებით ჰახდეს ნული $x=a$ მნიშვნელობისათვის. ნაწილობითი ინტეგრობის ფორმულა გვაძლევს:

$$\int_a^b Q\frac{d^nR}{dx^n}dx=\left[Q\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}}-Q'\frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}}+\ldots\pm R\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right]_a^b. \tag{22}$$

მაგრამ ჩვენ მივიღეთ, რომ

$$R(a)=0,\ R'(a)=0,\ldots,R^{(n-1)}(a)=0.$$

წინა ინტეგრალი რომ იყოს ნულის ტოლი, აუცილებელია კიდევ დაცული იყოს ტოლობა:

$$Q(b)R^{(n-1)}(b)-Q'(b)R^{(n-2)}(b)+\ldots\pm Q^{(n-1)}(b)R(b)=0.$$

ვინაიდან Q არის $(n-1)$ ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრი, ამიტომ $Q(b), Q'(b),\ldots,Q^{(n-1)}(b)$ სიდიდეებიც აგრეთვე ნებისმიერია, მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$R(b)=0,\ R'(b)=0,\ldots,R^{(n-1)}(b)=0.$$

აქედან ჩანს, რომ $R(x)$ პოლინომი შეიძლება განსხვავდებოდეს $(x-a)^n(x-b)^n$ ნამრავლიდან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით და P_n საძიებელ პოლინომს ექნება სახე:

$$P_n=C\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n]. \tag{23}$$

თუ a და b საზღვრები -1 და $+1$-ის ტოლია, მაშინ P_n მრავალწევრს ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს პოლინომი ეწოდება. თუ C მუდმივს შევარჩევთ ლეჟანდრის მიხედვით, ჩვენ დავუშვებთ:

$$X_n=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{24}$$

ამას გარდა მივიღოთ $X_0=1$, მაშინ გვექნება:

$$X_0=1,\ X_1=x,\ X_2=\frac{3x^2-1}{2},\ X_3=\frac{5x^3-3x}{2},\ldots$$

X_n არის n-ური ხარისხის პოლინომი, რომელშიაც x-ის ყველა ხარისხის მაჩვენებლები იქნება ან ყველა ლუწი ან ყველა კენტი იმისდა მიხედვით n-ლუწია თუ კენტი. თუ გამოვიყენებთ ლეიბნიცის ფორმულას ორი ფუნქციის ნამრავლის n-ური რიგის წარმოებულისათვის, მივიღებთ, რომ

$$X_n(1)=1,\ X_n(-1)=(-1)^n. \tag{25}$$

თუ $\varphi(x)$ რომელიმე პოლინომია n-ზე ნაკლები ხარისხის, მაშინ ლეჟანდრის პოლინომების ზემოთ დამტკიცებული ზოგადი თვისებების ძალით, გვაქვს:

$$\int_{-1}^{+1}X_n\varphi(x)dx=0 \tag{26}$$

კერძოთ, თუ m და n ერთმანეთისაგან განსხვავებული მთელი რიცხვებია, მაშინ ყოველთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_{-1}^{+1}X_mX_n\,dx=0. \tag{27}$$

უკანასკნელი ფორმულის საშუალებით ძალიან მარტივად შეიძლება მოძებნა რეკურენტული დამოკიდებულებისა, რომელიც აკავშირებს სამი მიმდევნო X_n პოლინომს. უპირველესად შევნიშნოთ, რომ ყოველი n-ური ხარისხის პოლინომი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს $X_0, X_1, \ldots, X_n$ პოლინომებისაგან შედგენილი მუდმივ კოეფიციენტებიანი წრფივი ფუნქციის სახით. მაშასადამე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$xX_n = C_0X_{n+1} + C_1X_n + C_2X_{n-1} + C_3X_{n-2} + \ldots,$$

სადაც $C_0, C_1, C_2, \ldots,$ — მუდმივი კოეფიციენტებია. მაგალითად, C_3 კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ X_{n-2}-ზე და ვაინტეგროთ -1 და $+1$ საზღვრებს შორის. (26) და (27) ფორმულების ძალით დაგვრჩება მხოლოდ

$$C_3 \int_{-1}^{+1} X^2_{n-2}\, dx = 0,$$

და მაშასადამე $C_3 = 0$. თანაგვარადვე დავამტკიცებთ, რომ $C_4 = 0$, $C_5 = 0, \ldots$; C_1 — კოეფიციენტიც აგრეთვე ნულია, რადგანაც xX_n ნამრავლი არ შეიცავს x^n-ან წევრს. უკანასკნელად C_0-სა და C_2 კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის, ჯერ გაუტოლოთ ერთმანეთს ტოლობის ორივე მხარის x^{n-1}-ს კოეფიციენტები, ხოლო შემდეგ ტოლობის ორივე მხარეში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ 1. ამრიგად ჩვენ მივიღებთ რეკურენტულ დამოკიდებულებას

$$(n+1)\,X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0. \tag{28}$$

ეს დამოკიდებულება გვაძლევს საშუალებას ძალიან ადვილად მოვძებნოთ მიმდევრობით X_n პოლინომები.

დამოკიდებულება (28) გვიჩვენებს, რომ

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n \tag{29}$$

პოლინომთა მიმდევრობას აქვს შტურმის მიმდევრობის თვისებები. როცა x იცვლება -1-დან $+1$-მდე, მაშინ ამ მიმდევრობის შეცვლათა რიცხვი შეიძლება მხოლოდ მაშინ შეიცვალოს, თუ x გადავა $X_n = 0$ განტოლების ერთერთ ფესვზე. მაგრამ (25) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ (29) მიმდევრობას აქვს n შეცვლა, როცა $x = -1$, ხოლო მას არ აქვს არც ერთი შეცვლა როცა $x = +1$. მაშასადამე, $X_n = 0$ განტოლებას აქვს n ნამდვილი ფესვი, რომლებიც მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის. ეს დებულება აგრეთვე ძალიან ადვილად შეიძლება გამოყვანილი იქნეს რ ო ლ ი ს თეორემიდან.

IV. ინტეგრალის ცნების გავრცელება. წირითი ინტეგრალები.

ჩვენ კიდევ გავაფართოვებთ განზღვრული ინტეგრალის ცნებას. აქამდე ყოველთვის ვგულისხმობდით ფუნქციისა და საინტეგრო არის შემოსაზღვრულობას. ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ამ შეზღუდვებისაგან განთავისუფლება.

87. ერთერთი საზღვარი უსასრულოა. ვთქვათ $f(x)$ არის x ცვლადის ფუნქცია, შემოსაზღვრული და ინტეგრადი ყოველ (a, l) შუალედში, სადაც a მუდმივი რიცხვია, ხოლო l — ნებისმიერი რიცხვი, მეტი a-ზე. ინტეგრალს $\int_a^l f(x)\,dx$, სადაც $l > a$, აქვს სასრული მნიშვნელობა, რაგინდ დიდი არ უნდა

იყოს l; თუ l რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს ეს ინტეგრალი მიისწრაფის ზღვარისაკენ, მაშინ ეს ზღვარი აღინიშნება სიმბოლოთი $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია ცნობილია, მაშინ ადვილად შეიძლება გავიგოთ, აქვს თუ არა მოცემულ ინტეგრალს ზღვარი. მაგალითად:

$$\int\limits_0^l \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} l;$$

l რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს მარჯვენა ნაწილს აქვს ზღვრად $\frac{\pi}{2}$, და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

სრულიად ამგვარადვე თუ ვიგულისხმებთ a-ს დადებითად $\mu-1$-ს განსხვავებულს ნულისაგან, გვექნება:

$$\int\limits_a^l \frac{k\,dx}{x^{\mu}} = \frac{k}{1-\mu}\left(\frac{1}{l^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right);$$

თუ μ ერთზე მეტია, მაშინ l რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფის ზღვარისაკენ, და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{k\,dx}{x^{\mu}} = \frac{k}{(\mu-1)a^{\mu-1}}.$$

პირიქით, თუ μ ერთზე ნაკლებია, მაშინ ინტეგრალი უსაზღვროდ იზრდება l რიცხვთან ერთად. იგივე იქნება იმ შემთხვევაშიაც, როცა $\mu=1$, ვინაიდან ინტეგრალი გამოისახება ლოგარითმის საშუალებით.

ზოგად შემთხვევაში ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ გავიგოთ, მიისწრაფის თუ არა ფუნქცია:

$$F(l) = \int\limits_a^l f(x)\,dx$$

ზღვარისაკენ, როდესაც l უსაზღვროდ იზრდება. ზემოთ მიღებული (§ 9) შედეგების საფუძვლით, **იმისათვის რომ $F(l)$ ფუნქციას ჰქონდეს ზღვარი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სხვაობა:**

$$F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f(x)\,dx$$

მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როცა ორივე p და q რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, და ამასთანავე ერთმანეთზე დამოუკიდებლად.

a რიცხვი არ შედის ამ პირობაში, რაც გასაგებია, რადგან ინტეგრალის ქვედა საზღვრად შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი რიცხვი, მეტი a-ზე. ამ პირობის სამართლიანობაში ადვილად ვრწმუნდებით ზემოთ განხილულ მაგალითიდან, სადაც $f(x)=kx^{-\mu}$.

თუ q მეტია ვიდრე p, მაშინ

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| \leqslant \int_q^p |f(x)|\,dx,$$

და, მაშასადამე, $\int\limits_a^l f(x)\,dx$ ინტეგრალს აქვს ზღვარი, როცა აქვს ზღვარი ინტეგრალს $\int\limits_a^l |f(x)|\,dx$, მაგრამ შებრუნებული დასკვნა უკვე არ იქნება სამართლიანი.

ადვილი შესამჩნევია წინა წესის ანალოგია ზოგად წესთან, რომელიც ეხება წკრივების კრებადობას (§ 5). როგორც ეს უკანასკნელიც, იგი საზოგადოდ ძნელი გამოსაყენებელია, როცა $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერია. ახლა გადავდივართ ზოგიერთი იმ კერძო შემთხვევების განხილვაზე, რომლებიც ხშირად გვხვდება, და რომელთათვის შეგვიძლია დავამყაროთ, მიისწრაფის ინტეგრალი ზღვარისაკენ თუ არა.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე $x^{-\alpha}\psi(x)$, სადაც $\psi(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც რჩება შემოსაზღვრული, როცა x უსაზღვროდ იზრდება. საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის ძალით, გვაქვს ტოლობა:

$$\int_p^q x^{-\alpha}\psi(x)\,dx=\mu\int_p^q x^{-\alpha}\,dx, \tag{30}$$

სადაც μ არის რიცხვი, მოთავსებული $\psi(x)$ ფუნქციის ზედა M საზღვარსა და ქვედა m საზღვრის შორის x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც აღემატება მუდმივ A რიცხვს, სადაც A არის ნაკლები p და q რიცხვებზე.

ეს ფორმულა გვაძლევს საშუალებას გავაკეთოთ გარკვეული დასკვნა შემდეგი ორი შემთხვევისათვის:

1) თუ α რიცხვი ერთზე მეტია, მაშინ ინტეგრალს $\int\limits_a^l f(x)\,dx$ აქვს ზღვარი, რადგან μ მამრავლი რჩება სასრული, იმ დროს

როდესაც $\int_p^q x^{-\alpha}dx$ ფაქტორი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა p და q უსაზღვროდ იზრდება.

2) თუ α რიცხვი არ აღემატება ერთს, და M და m აქვთ ერთი და იგივე ნიშანი, მაშინ ინტეგრალს არა აქვს ზღვარი.

მართლაც, μ რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა, რომელიც მოთავსებულია ორ ერთნაირი ნიშნის M და m რიცხვს შორის, აუცილებლად რჩება მეტი $|m|$ და $|M|$ რიცხვიდან უმცირესზე. რაც შეეხება $\int_p^q x^{-\alpha}dx$ მამრავლს, იგი უსაზღვროდ იზრდება p რიცხვთან ერთად, თუ დავუშვებთ, მაგალითად, $q=p^2$.

როცა M და m რიცხვებს აქვთ სხვადასხვა ნიშნები და $\alpha \leqslant 1$, მაშინ წარმოგვიდგება საეჭვო შემთხვევა, ვინაიდან (30) ნამრავლის მეორე მამრავლი არ მიისწრაფის ნულისაკენ, ხოლო პირველი μ მამრავლის შესახებ ჩვენ არ შეგვიძლია არავითარი დასკვნის გაკეთება.

მაგალითად, ინტეგრალს $\int_0^l \frac{\cos ax}{1+x^2}$ აქვს ზღვარი, ვინაიდან ნამრავლი $x^2 f(x)$ აბსოლუტური მნიშვნელობით ყოველთვის ერთზე ნაკლებია. მაგრამ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობის მიხედვით, ჩვენ ვერავითარ დასკვნას ვერ გავაკეთებთ $\int_0^l \frac{\sin x}{x}dx$ ინტეგრალის შესახებ; მართლაც, ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს $\varkappa=1$, $M=1$, $m=-1$.

ზემოთ მოყვანილი წესი საკმარისია ყველა იმ შემთხვევაში, როცა შეიძლება ისეთი დადებითი μ რიცხვის მოძებნა, რომ ნამრავლი $x^{\mu} f(x)$ მიისწრაფოდეს ნულისაგან განსხვავებულ ზღვარისაკენ, როცა x უსაზღვროდ იზრდება. ინტეგრალს აქვს ზღვარი, როცა μ ერთზე მეტია, და არა აქვს ზღვარი, როცა μ ნაკლებია ან ტოლი ერთისა.

მაგალითად, იმისათვის რომ რაციონალური წილადის ინტეგრალს ჰქონდეს ზღვარი, როცა ზედა საზღვარი უსაზღვროდ იზრდება, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მნიშვნელის ხარისხი იყოს მეტი მრიცხველის ხარისხზე, ყოველ შემთხვევაში, ორი ერთეულით მაინც. მივიღოთ:

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}};$$

სადაც P და Q არიან პოლინომები p და r ხარისხებისა; როცა x უსაზღვროდ იზრდება, ნამრავლს $x^{\frac{r}{2}-p} f(x)$ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი. ინტეგრალს რომ ჰქონდეს ზღვარი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იყოს $p<\frac{r}{2}-1$.

88. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულის გამოყენება. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა შეიძლება განვაზოგადოთ. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, სადაც $\psi(x)$ ფუნქცია დადებითია, ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქცია რჩება შემოსაზღვრული, როცა x უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა გვაძლევს:

$$\int_p^q f(x)\,dx=\mu\int_p^q \psi(x)\,dx,$$

სადაც μ არის რიცხვი, რომელიც რჩება შემოსაზღვრული, როცა p და q უსაზღვროდ იზრდება. თუ $\int_a^l \psi(x)\,dx$ ინტეგრალს აქვს ზღვარი, ე. ი. თუ $\int_p^q \psi(x)\,dx$ ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ ნულისაკენ მიისწრაფვის აგრეთვე ინტეგრალიც $\int_p^q f(x)\,dx$, და მაშასადამე $\int_a^l f(x)\,dx$ ინტეგრალს აქვს აგრეთვე ზღვარი.

საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა გვაძლევს აგრეთვე კრებადობის საკმარისობის ახალ პირობას.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე $\varphi(x)\psi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ არის კლებადი დადებითი ფუნქცია, მაშინ გვაქვს (§ 74):

$$\int_p^q \varphi(x)\psi(x)\,dx=\varphi(p)\int_q^\xi \psi(x)\,dx\quad (p<\xi<q); \tag{31}$$

აქედან უშუალოდ გამოგვყავს შემდეგი დებულება:

ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ს $\int_a^l \varphi(x)\psi(x)\,dx$, ს ა დ ა ც $\varphi(x)$ ა რ ი ს კ ლ ე ბ ა დ ი დ ა დ ე ბ ი თ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა, რ ო მ ე ლ ი ც ნ უ ლ ი ს ა კ ე ნ მ ი ი ს წ რ ა ფ ი ს x ც ვ ლ ა დ ი ს უ ს ა ზ ღ ვ რ ო დ ზ რ დ ი ს დ რ ო ს, ა ქ ვ ს ზ ღ ვ ა რ ი, თ უ ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს $\int_p^q \psi(x)\,dx$ ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ნ ა კ ლ ე ბ ი რ ჩ ე ბ ა რ ა ი მ ე მ უ დ მ ი ვ რ ი ც ხ ვ ზ ე, რ ო გ ო რ ი ც ა რ უ ნ დ ა ი ყ ო ს p დ ა q.

მარტივ მაგალითს მივიღებთ, თუ დავუშვებთ $\psi(x)=\sin x$, ვინაიდან ინტეგრალის $\int_p^q \sin x\,dx$, აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება ორს. უშუ-

ალოდ ადვილად შეიძლება ჩვენება იმისა, რომ ინტეგრალს $\int_a^l \varphi(x)\sin x\,dx$, სადაც $\varphi(x)$ არის კლებადი დადებითი ფუნქცია, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფის x ცვლადის უსაზღვროდ ზრდის დროს, აქვს ზღვარი, და რომ მისი კრებადობა ანალოგიურია ნიშანცვლადი წკრივის კრებადობისა.

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $a=0$, მასთან $\varphi(x)\sin x$ ნამრავალი რჩება სასრული $x=0$ მნიშვნელობისათვის. $y=\varphi(x)\sin x$ მრუდს აქვს სახე სინუსოიდისა, რომელიც ჰკვეთს Ox ღერძს $x=k\pi$ წერტილებში. ამრიგად ჩვენი ამოცანა დაიყვანება იმაზე, რომ გამოვიკვლიოთ ნიშანცვლადი წკრივი:

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+(-1)^n a_n+\dots, \tag{32}$$

სადაც აღნიშნულია

$$a_n=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\varphi(x)\sin x\,dx\right|,$$

ამასთანავე a_n წარმოადგენს ფართობს, შემოსაზღვრულს მრუდით და Ox ღერძის იმ ნაკვეთით, რომელიც მოთავსებულია $n\pi$ და $(n+1)\pi$ აბსცისებს შორის. მივიღებთ რა $x=y+n\pi$, გვექნება აგრეთვე

$$a_n=\int_0^{\pi}\varphi(y+n\pi)\sin y\,dy.$$

ცხადია, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია კლებულობს n რიცხვის ზრდის დროს, ვინაიდან $\varphi(x)$ ფუნქცია კლებადია; მაშასადამე, $a_{n+1}<a_n$. მეორე მხრით, a_n ნაკლებია ვიდრე $\pi\varphi(n\pi)$ და, მაშასადამე, ნულისაკენ მიისწრაფის n რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს. მაშ ნიშანცვლადი წკრივი (32) არის კრებადი. ვთქვათ l არის რიცხვი, მოთავსებული $n\pi$ და $(n+1)\pi$ შორის; ჩვენ გვაქვს:

$$\int_0^l\varphi(x)\sin x\,dx=S_n\pm\theta a_n \quad (0\leqslant\theta<1),$$

სადაც S_n არის (32) წკრივის პირველი n წევრის ჯამი. როცა l უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ უსაზღვროდ იზრდება n რიცხვიც, ხოლო a_n მიისწრაფის ნულისაკენ, და ინტეგრალს აქვს ზღვრად (32) წკრივის S ჯამი.

ამგვარადვე მტკიცდება, რომ ინტეგრალებს:

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx,\ \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx,$$

რომლებიც გვხდება დიფრაქციათა თეორიაში, აქვთ სასრული მნიშვნელობა. $y=\sin x^2$ მრუდს აქვს ტალღისებური სახე სინუსოიდისა, მაგრამ ტალღები უფრო და უფრო იკუმშებიან, ვინაიდან

$$\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$$

სხვაობა $y=\sin x^2=0$ განტოლების ორი მიმდევნო ფესვს შორის მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება. სხვათაშორის, შეიძლება ეს ინტეგრალები დავიყვანოთ წინა სახეზე, თუ მივიღებთ $x^2=y$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. უკანასკნელი მაგალითის მიმართ შეიძლება გავაკეთოთ საინტერესო შენიშვნა. როცა x უსაზღვროდ იზრდება, $\sin x$ ირყევა -1-დან $+1$-მდე; მაშასადამე, ინტეგრალს შეუძლია ჰქონდეს ზღვარი მაშინაც, როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია არ მიისწრაფის ნულისაკენ, სხვანაირად რომ ვთქვათ, როცა მრუდი $y=f(x)$ არ უახლოვდება Ox ღერძს ასიმპტოტურად. აი კიდევ მაგალითი, სადაც ამას აქვს ადგილი, და სადაც $f(x)$ ფუნქცია ინარჩუნებს ამას გარდა მუდმივ ნიშანს. ვთქვათ

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x};$$

ეს ფუნქცია რჩება დადებითი, როცა x დადებითია, და არ მიისწრაფის ნულისაკენ, რადგანაც $f(k\pi)=k\pi$. რომ დავრწმუნდეთ იმაში, რომ ინტეგრალს აქვს ზღვარი, განვიხილოთ, როგორც ჩვენ ეს ზემოთ გავაკეთეთ, წკრივი:

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots,$$

სადაც

$$a_n=\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x};$$

როდესაც x იცვლება $n\pi$-დან $(n+1)\pi$-მდე, x^6 რჩება მეტი, ვიდრე $n^6\pi^6$, და ჩვენ გვაქვს:

$$a_n<(n+1)\pi\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^6\pi^6\sin^2 x}.$$

პირველყოფილ ფუნქციას აქვს სახე:

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1+\qquad}\;x\right);$$

როცა x იცვლება $n\pi$-დან $(n+1)\pi$-მდე, $\operatorname{tg} x$ მხოლოდ ერთხელ გახდება უსასრულოდ დიდი, $+\infty$-დან $-\infty$-მდე გადასვლით, მაშასადამე, ინტეგრალი ტოლია (§ 76) $\frac{\pi}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}$, და ჩვენ გვაქვს:

$$a_n<\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}<\frac{n+1}{n^3\pi}.$$

ამრიგად, ვინაიდან Σa_n წკრივი კრებადია, ამიტომ ინტეგრალს $\int\limits_0^l f(x)\,dx$ აქვს ზღვარი.

სხვათა შორის, თითქმის ცხადია, რომ თუ $f(x)$ აქვს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი, როცა x უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ ინტეგრალს არ შეუძლია ჰქონდეს ზღვარი. მართ-

ლაც, ჩვენ გვაქვს $\int_p^q f(x)\,dx=\mu\,(q-p)$; თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი $h\neq 0$, მაშინ μ აქვს იგივე ზღვარი h, და ნამრავლი $\mu\,(q-p)$ არ შეიძლება მიისწრაფოდეს ნულისაკენ.

89. ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფი ფუნქცია ხდება უსასრულო. პირველად განვიხილოთ შემდეგი კერძო შემთხვევა: $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის a და b—შორის და აგრეთვე $x=b$ წერტილზე, ხოლო იგი ხდება უსასრულო დიდი, როცა $x=a$. სიმარტივისათვის მივიღოთ $a<b$. რაგინდ მცირე არ უნდა იყოს ε, ინტეგრალს $f(x)$ ფუნქციიდან, აღებულს $a+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ და b საზღვრებს შორის, აქვს ყოველთვის სასრულო მნიშვნელობა. თუ ეს ინტეგრალი მიისწრაფის ზღვარისაკენ, როცა ε მიისწრაფის ნულისაკენ მაშინ, როგორც ეს ბუნებრივია, აღნიშნავენ ამ ზღვარს სიმბოლოთი:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

თუ ცნობილია $f(x)$ ფუნქციისათვის რაიმე პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ გვაქვს:

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx=F(b)-F(a+\varepsilon),$$

და საკმარისია გამოკვლევა იმისა, მიისწრაფის თუ არა $F(a+\varepsilon)$ რაიმე ზღვარისაკენ, როცა ε მიისწრაფის ნულისაკენ. მაგალითად, გვაქვს:

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu}=-\frac{M}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}\right],\quad \mu\neq 1.$$

თუ $\mu>1$, მაშინ წევრი $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}$ უსაზღვროდ იზრდება, როცა ε ნულისაკენ მიისწრაფის; პირიქით, თუ $\mu<1$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}=\varepsilon^{1-\mu},$$

და ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს წევრი ნულისაკენ მიისწრაფის ε-თან ერთად. მაშ, უკანასკნელ შემთხვევაში განზღვრული ინტეგრალი მიისწრაფის ზღვარისაკენ:

$$\int_a^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu}=\frac{M\,(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu};$$

თუ $\mu=1$, მაშინ გვაქვს:

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{x-a}=M\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right),$$

და მარჯვენა ნაწილი უსაზღვროდ იზრდება, როცა ε ნულისაკენ მიისწრაფის. ამრიგად, წინამდებარე განსაზღვრულ ინტეგრალს რომ ჰქონდეს ზღვარი, აუცილებელია და საკმარისი μ იყოს ერთზე ნაკლები.

მრუდს რომლის განტოლება არის

$$y=\frac{M}{(x-a)^{\mu}},$$

აქვს ასიმპტოტად $x=a$ წრფე, როცა μ დადებითია. თუ $\mu<1$, მაშინ ფართობს, მოთავსებულს x ღერძსა, უძრავ $x=b$ ორდინატსა, მრუდსა და მის ასიმპტოტს შორის, აქვს სასრული მნიშვნელობა.

ზოგად შემთხვევაში საკითხი დაიყვანება იმაზე, რომ გავიგოთ, ε-ის ფუნქცია:

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

მიისწრაფის თუ არა ზღვარისაკენ, როცა ε ნულისაკენ მიისწრაფის დადებითი მნიშვნელობით.

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი (§ 9), რომ სხვაობა

$$F(\varepsilon)-F(\varepsilon')=\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f(x)\,dx$$

მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როცა ორივე დადებითი რიცხვი ε და ε' მიისწრაფის ნულისაკენ ერთმანეთზე დამოუკიდებლად.

აქედან ჩვენ გამოგვყავს იგივე შედეგები, რაც § 87-ში; ჩვენ მათ აღვნიშნავთ ზოგად ფარგლებში. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე $f(x)=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha}}$, სადაც α არის დადებითი ხარისხის მაჩვენებელი, ხოლო $\psi(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც a წერტილის მახლობლად მოთავსებულია ორ მუდმივ M და m რიცხს შორის, მაშინ გვაქვს:

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f(x)\,dx=\mu\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}},$$

სადაც μ მოთავსებულია M და m შორის. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

1) თუ α ნაკლებია ერთზე, ინტეგრალს აქვს ზღვარი;

2) თუ $\alpha\geqslant 1$, და ორივე M და m რიცხვს აქვს ერთიდაიგივე ნიშანი, მაშინ ინტეგრალს არა აქვს ზღვარი.

საეჭვო შემთხვევა იქნება მაშინ, როცა $\alpha\geqslant 1$ და M და m-ს აქვს სხვადასხვა ნიშნები.

ყოველთვის, როცა არსებობს ისეთი α რიცხვი, რომ $(x-a)^{\alpha} f(x)$ ნამრავლს აქვს ზღვრად ნულისაგან განსხვავებული K რიცხვი, როცა x მიისწრაფის a-კენ, მაშინ ინტეგრალის ზღვარის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ α იყოს ერთზე ნაკლები.

მაგალითები. ვთქვათ $f(x) = \frac{P}{Q}$ არის რაციონალური ფუნქცია; თუ a არის მნიშვნელის m ჯერადი ფესვი, მაშინ $(x-a)^m f(x)$ ნამრავლი მიისწრაფის ნულისაგან განსხვავებულ ზღვარისაკენ, როცა $x=a$. ვინაიდან m არ არის ერთზე ნაკლები, ამიტომ ჩვენ ვხედავთ, რომ როცა ε ნულისაკენ მიისწრაფის, ინტეგრალი $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$ უსაზღვროდ იზრდება.

მეორეს მხრით, მივიღოთ:

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

სადაც P და R არიან პოლინომები, და $R(x)$ პოლინომს არა აქვს ჯერადი ფესვები. თუ a არის $R(x)$ პოლინომის ფესვი, მაშინ $(x-a)^{\frac{1}{2}} f(x)$ ნამრავლს აქვს ზღვარი, როცა $x=a$; და მაშასადამე, ინტეგრალს აქვს აგრეთვე ზღვარი. ასე, მაგალითად, ინტეგრალს:

$$\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

აქვს ზღვარი $\frac{\pi}{2}$, როცა $\varepsilon=0$.

განვიხილოთ კიდევ ინტეგრალი $\int\limits_{\varepsilon}^{1} \ln x\, dx$. ნამრავლს $x^{\frac{1}{2}} \ln x$ აქვს ზღვრად ნული; მაშასადამე, x ცვლადის საკმაო მცირე ε მნიშვნელობიდან მოყოლებით, გვაქვს $|\ln x| < Mx^{\frac{1}{3}}$, სადაც M ნებისმიერად შერჩეული დადებითი რიცხვია. მაშასადამე, მოცემულ ინტეგრალს აქვს ზღვარი.

ყველაფერი რაც იყო ნათქვამი ქვედა a საზღვრის შესახებ, შეიძლება შეუცვლელად გადავიტანოთ ზედა b საზღვარზე. თუ $f(x)$ ხდება უსასრულო, როცა $x=b$, მაშინ ჩვენ განვმარტავთ ინტეგრალს $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ როგორც ზღვარს ინტეგრალისას $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx$, როცა $\varepsilon'=0$. თუ $f(x)$ ხდება უსასრულო ორივე a და b საზღვარზე, მაშინ ჩვენ ინტეგრალს $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ განვმარტავთ როგორც ზღვარს

ინტეგრალისას $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$, როცა ε და ε' ერთმანეთზე დამოუკიდებლად ნულისაკენ მიისწრაფის. ვთქვათ c არის რაიმე რიცხვი, მოთავსებული a და b შორის; ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

და მარჯვენა ნაწილის თითოეულ ინტეგრალთაგანს უნდა ჰქონდეს ზღვარი. დასასრულს, თუ $f(x)$ ხდება უსასრულო c მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია a და b შორის, მაშინ ჩვენ ინტეგრალს $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ განვმარტავთ როგორც ინტეგრალების $\int\limits_{a}^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx$ და $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ ზღვრების ჯამს; ამგვარადვე მოვიქცევით, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს a და b შორის რამდენიმე წყვეტის წერტილი.

უნდა შევნიშნოთ, რომ (§ 76) ძირითადი ფორმულა (6), რომელიც გამოყვანილი იყო იმ დაშვებით, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია a და b შორის, რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაშიაც, როცა $f(x)$ ფუნქცია ხდება უსასრულო ამ საზღვრებს შორის, მხოლოდ თუ პრიმიტული $F(x)$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი.

ვთქვათ, მაგალითად, რომ $f(x)$ ფუნქცია ხდება უსასრულო c მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია a და b შორის. მაშინ

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx;$$

თუ $F(x)$ არის $f(x)$-ის პრიმიტული ფუნქცია, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\int f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} F(c-\varepsilon') - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon=0} F(c+\varepsilon).$$

ვინაიდან ჩვენ დავუშვით, რომ $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x=c$, ამიტომ $F(c+\varepsilon)$ და $F(c-\varepsilon')$ ექნებათ ერთი და იგივე ზღვარი, და მაშასადამე

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

მაგალითად,

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = [3x^{3}]_{-1}^{+1} = 6.$$

თუ a და b შორის პრიმიტული $F(x)$ ფუნქცია თვითონ ხდება უსასრულო, მაშინ ფორმულა (6) უკვე ვერ გამოიყენება, რადგან ზემოთ არ არის ნაჩვენები ის, თუ რა აზრი შეიძლება ჰქონდეს ამ შემთხვევაში ინტეგრალს.

განვიხილავთ რა ამ განზოგადოებულ ინტეგრალებს როგორც ჩვეულებრივი ინტეგრალების ზღვარს, ჩვენ შეგვიძლია გავავრცელოთ მათზე ნაწილობითი ინტეგრობის და ცვლადთა შეცვლის ფორმულები.

90. $\Gamma(a)$ ფუნქცია. განზღვრულ ინტეგრალს:

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \tag{33}$$

აქვს გარკვეული მნიშვნელობა, როცა a დადებითია.

მართლაც, განვიხილოთ ორი ინტეგრალი:

$$\int_\varepsilon^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx, \int_1^l x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

სადაც ε—ძალიან მცირე დადებითი რიცხვია, ხოლო l ძალიან დიდი დადებითი რიცხვი. მეორე ინტეგრალს ყოველთვის აქვს ზღვარი, ვინაიდან x-ს საკმაო დიდი მნიშვნელობისათვის გვაქვს $e^x > x^{a+1}$, საიდანაც

$$x^{a-1} e^{-x} < \frac{1}{x^2}.$$

რაც შეეხება პირველ ინტეგრალს, როდესაც x მიისწრაფის ნულისაკენ $x^{1-a} f(x)$ ნამრავლს ზღვრად აქვს ერთი. ინტეგრალს რომ ჰქონდეს ზღვარი ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $1-a$ სხვაობა იყოს ერთზე ნაკლები, ე. ი. რომ a იყოს დადებითი. ვთქვათ ეს პირობა შესრულებულია; ორივე ზღვარის ჯამი არის $\Gamma(a)$ ფუნქცია, რომელსაც ეწოდება აგრეთვე ე ი ლ ე რ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი მ ე ო რ ე გ ვ ა რ ი ს ა. ეს ფუნქცია იქცევა უსასრულოდ, როცა a ნულისაკენ მიისწრაფის. მას აქვს დადებითი მნიშვნელობა a-ს ყოველი დადებითი მნიშვნელობისათვის და იზრდება უსაზღვროდ a-თან ერთად. მას აქვს minimum-ი, როცა $x=1,4616321\ldots$, და მისი შესაბამი მნიშვნელობა არის $0,8556032\ldots$

ვიგულისხმოთ, რომ $a>1$ და (33)—ფორმულა ნაწილობით ვაინტეგროთ, განვიხილავთ რა $e^{-x}\,dx$ როგორც დიფერენციალს—e^{-x}-სას; მივიღებთ:

$$\Gamma(a)=-\left[x^{a-1} e^{-x}\right]_0^{+\infty}+(a-1)\int_0^{\infty} x^{a-2} e^{-x}\, dx. \tag{34}$$

მაგრამ $+\infty$ და 0 საზღვრებში $x^{a-1} e^{-x}$ ნამრავლი ტოლია ნულისა, ვინაიდან $a>1$; ამიტომ

$$\Gamma(a)=(a-1)\,\Gamma(a-1)$$

თუ ამ ფორმულას რამოდენიმეჯერ გამოვიყენებთ, ჩვენ შეგვიძლია დავიყვანოთ $\Gamma(a)$ ფუნქციის გამოთვლა იმ შემთხვევაზე, როცა a არგუმენტი მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის. თუ a მთელი რიცხვია, მაშინ (34) ფორმულიდან ადვილად გამოიყვანება $\Gamma(a)$-ს მნიშვნელობა. ჩვენ გვაქვს:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx=-\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1;$$

ამის შემდეგ თუ (26) ფორმულაში მიმდევრობით მივიღებთ $a=2, 3, \ldots, n, \ldots$, გვექნება:

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1,\ \Gamma(3)=2\Gamma(2)=1\,.\,2,$$

და საზოგადოდ, როცა n მთელი და დადებითია, გვაქვს:

$$\Gamma(n)=1\cdot 2\,.\,3\ldots(n-1)=(n-1)! \tag{35}$$

91. წირითი ინტეგრალები. ვთქვათ AB ბრტყელი წირის უწყვეტი რკალია და $P(x, y)$ არის x და y ცვლადების ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია AB-ს გასწვრივ (აქ x და y არის AB რკალის წერტილის კოორდინატები იმ ორი ღერძის მიმართ, რომლებიც მდებარეობს მის სიბრტყეზე). AB რკალი დავყოთ ნაწილებად. დანაწილების წერტილები იყოს $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$ კოორდინატებით. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots$ ყოველ $m_{i-1} m_i$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი n_i წერტილი (ξ_i, η_i) კოორდინატებით. განვიხილოთ ჯამი:

$$P(\xi_1, \eta_1)(x_1 - a) + P(\xi_2, \eta_2)(x_2 - x_1) + \ldots + P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots, \qquad (36)$$

გავრცელებული ყველა კერძო შუალედზე. თუ დანაწილების წერტილთა რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ ყოველი $x_i - x_{i-1}$ სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ წინა ჯამი მიისწრაფის გარკვეულ ზღვრისაკენ, რომელსაც ეწოდება წ ი რ ი თ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $P(x, y)$-დან, გავრცელებული AB რკალზე; ეს ინტეგრალი აღინიშნება

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx$$

სიმბოლოთი.

ამ ზღვარის არსებობის დასამტკიცებლად, პირველად ვიგულისხმოდ, რომ Oy ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე ჰკვეთს AB რკალს არა უმეტეს ვიდრე ერთ წერტილზე. ვთქვათ A და B წერტილების აბსცისებია a და b; $y=\varphi(x)$ იყოს AB წირის განტოლება; $\varphi(x)$ არის x-ს უწყვეტი ფუნქცია (a, b) შუალედში. თუ $P(x, y)$-ში y-ს შევცვლით $\varphi(x)$-თ, მაშინ მიღებული შედეგიც იქნება აგრეთვე უწყვეტი ფუნქცია

$$\Phi(x) = P[x, \varphi(x)]$$

და ჩვენ გვექნება:

$$P(\xi_i, \eta_i) = P[\xi_i, \varphi(\xi_i)] = \Phi(\xi_i).$$

ამრიგად ზემოთ დაწერილი ჯამი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ასეთი სახით:

$$\Phi(\xi_1)(x_1 - a) + \Phi(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \Phi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots;$$

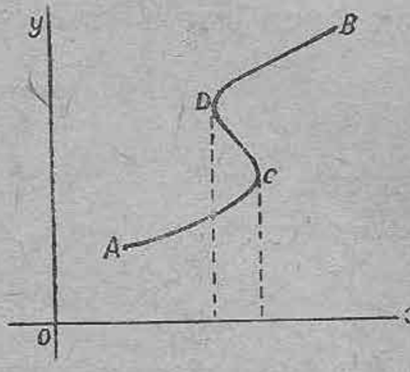
მაშასადამე, მას აქვს ზღვრად ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\, dx.$$

ამრიგად

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\, dx.$$

თუ Oy ღერძის პარალელური წრფეები AB რკალს ჰკვეთს ერთზე მეტ წერტილზე, მაშინ ენ რკალი შეგვიძლია დავყოთ რამოდენიმე ისეთ ნაწილად, რომლებიდან ყოველი იკვეთება Oy ღერძის პარალელური წრფით მხოლოდ ერთ წერტილზე. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია $ACDB$ წირის რკალი (ნახ. 13); C და D იყოს ის წერტილები, რომელთათვის აბსცისას აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. ყოველი AC, CD, DB რკალი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობას და, მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ



ნახ. 13.

$$\int_{ACDB} P(x, y)\,dx = \int_{AC} P(x, y)\,dx + \int_{CD} P(x, y)\,dx + \int_{DB} P(x, y)\,dx.$$

ამასთანავე უნდა შევნიშნოთ, რომ მარჯვენა ნაწილის სამივე ინტეგრალის გამოთვლის დროს $P(x, y)$-ში y უნდა შევცვალოთ x-ის სამი სხვადასხვა ფუნქციით. ამგვარადვე განისაზღვრება წირითი $\int_{AB} Q(x, y)\,dy$ ინტეგრალი.

შევნიშნოთ აგრეთვე ისიც, რომ AB რკალი შეიძლება შედგებოდეს სხვადასხვა მრუდეების ნაწილებისაგან; მაგალითად, წრფეებისაგან, წრის რკალებისაგან და სხვა.

წინანდელიდან ჩანს, რომ წირითი ინტეგრალები უშუალოდ დაიყვანება ჩვეულებრივ განსაზღვრულ ინტეგრალებამდე, მაგრამ მათი შემოღება გამართლებულია მათი სარგებლიანობით.

ხშირად გამოყენებითი საკითხებში AB რკალის წერტილის კოორდინატები გამოსახულია ცვლადი პარამეტრის ფუნქციების სახით:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

სადაც $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ თავისი $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ წარმოებულებით არიან t-ს უწყვეტი ფუნქციები. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ როდესაც t იცვლება α-დან β-მდე (x, y) წერტილი აღწერს AB რკალს ერთი და იგივე მიმართულებით. (α, β) შუალედი დავყოთ უფრო მცირე შუალედებად; ვთქვათ t_{i-1}, t_i არის t-ს ის ორი მიმდევნო მნიშვნელობა, რომლებსაც შეესაბამება AB რკალზე ორი m_{i-1} და m_i წერტილი კოორდინატებით (x_{i-1}, y_{i-1}) და (x_i, y_i). ჩვენ გვაქვს:

$$x_i - x_{i-1} = \varphi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

სადაც θ_i მოთავსებულია t_{i-1}-სა და t_i-ს შორის. θ_i-ს ამ მნიშვნელობას შეესა-

ზამება m_{i-1}, m_i რკალზე რაიმე (ξ_i, η_i) წერტილი. ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

$$\sum P(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum P[\varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)]\, \varphi'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ:

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

აშგვარადვე მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულას $\int Q\, dy$-სთვის. ორივე ფორმულას თუ შევკრებთ, გვექნება:

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int_{\alpha} [P\varphi'(t) + Q\psi'(t)]\, dt. \tag{37}$$

ეს არის წირითი ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა. ცხადია, რომ თუ AB რკალი შედგება სხვადასხვა მრუდის ნაწილებისაგან, მაშინ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები AB-ს გასწვრივ ვერ გამოისახებიან ერთნაირად; ამ შემთხვევაში ჩვენ უნდა გამოვიყენოთ (37) ფორმულა AB რკალის ყოველ ნაწილზე ცალკ-ცალკე.

92. გამოყენება შეკრული მრუდის ფართობზე. რომ ვუჩვენოთ მაგალითზე წირითი ინტეგრალების სარგებლიანობა უფრო ზოგადი დასკვნების მისაღებად, დავუბრუნდეთ ფორმულას, რომელიც გვაძლევს ჩაკეტილ $Am_1Bm_2A'A$ მრუდით შემოსაზღვრული არის ფართობს (ნახ. 10) (§ 78). ორი ინტეგრალი $\int_a^b \psi_2(x)\, dx$, და $\int_a^b \psi_1(x)\, dx$ არიან შესაბამად ტოლი წირითი ინტეგრალებისა $\int_{A'm_2B} y\, dx$ და $\int_{Am_1B} y\, dx$; მეორეს მხრით, $\int_{AA'} y\, dx$ ინტეგრალი ტოლია ნულის, და ავლის მიმართულების შეცვლით ინტეგრალის ნიშანი შეიცვლება.

თუ შევთანხმდებით, რომ C კონტური აიწერება დადებითი მიმართულებით, როცა დამკვირებლისათვის, რომელიც მოთავსებულია კონტურის სიბრტყეზე და უვლის ამ C კონტურს, კონტურის მიერ შემოსაზღვრული ფართობი რჩება მარცხენა მხარეზე (მასთან ღერძებს აქვთ ჩვეულებრივი დალაგება, როგორც ეს მე-10 ნახაზზეა ნაჩვენები) [1], მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ მიღებული შე-

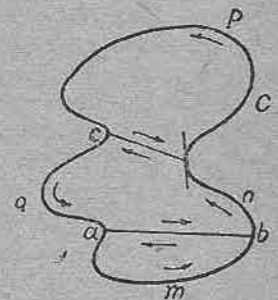
[1] საზოგადოდ, როგორი მდებარეობაც არ უნდა ჰქონდეთ Ox, Oy ღერძებს, ამბობენ, რომ C კონტური აღწერილია დადებითი მიმართულებით, თუ მობრუნება $\frac{\pi}{2}$ კუთხით, რომელიც ამთხვევს მხების დადებით მიმართულებას C კონტურის შიგა ნორმალის მიმართულებასთან, ხდება იმავე მიმართულებით, რაც მობრუნება $\frac{\pi}{2}$ კუთხით, რომელიც ამთხვევს Ox ღერძს Oy ღერძთან.

დეგი შემდეგნაირად: Ω ფართობი, შემოსაზღვრული C კონტურით, ტოლია:

$$\Omega = -\int_C y\,dx, \tag{38}$$

სადაც წირითი ინტეგრალი აღებულია C კონტურის განგრძივ დადებითი მიმართულებით. ვინაიდან უკანასკნელი ინტეგრალი არ შეიცვლება კოორდინატთა სათავის გადაადგილებით, ამიტომ ეს ფორმულა სამართლიანი რჩება C კონტურის საკოორდინატო ღერძების მიმართ ნებისმიერი მდებარეობისათვის.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი სახის C კონტური. დავუშვათ, რომ თუ გავიყვანთ წრფეებს, რომლებიც აერთებენ C კონტურის ორ წერტილს, შეიძლება მივიღოთ ისეთი ნაწილობრივი კონტურები, რომ Oy ღერძის პარალელური წრფეები თითოეულ მათგანს გადაკვეთს მხოლოდ ორ წერტილზე. ასეთია არე, შემოსაზღვრული C კონტურით მე-(14) ნახაზზე. განივი წრფეებით იგი შეგვიძლია დავყოთ სამ ნაწილად, შემოსაზღვრული $amba$, $abndcqa$, $cdpc$ კონტურებით. თითოეულ მათგანზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა ფორმულა; მიღებულ შედეგებს თუ შევკრებთ, მაშინ წირითი ინტეგრალები, აღებული ორ-ორჯერ დამხმარე ab და cd წრფეებზე



ნახ. 14.

ისპობიან, და ჩვენ ვნახავთ, რომ ამ შემთხვევაშიაც, C კონტურის მიერ შემოსაზღვრული ფართობი ტოლია წირითი ინტეგრალისა $-\int y\,dx$, აღებულს C კონტურის გასწვრივ დადებითი მიმართულებით. ასევე დავამტკიცებთ, რომ იგივე Ω ფართობი ტოლია

$$\Omega = \int_C x\,dy. \tag{39}$$

ორივე ფორმულის შეკრება გვაძლევს:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx, \tag{40}$$

მასთან ინტეგრალი ყოველთვის აიღება დადებითი მიმართულებით.

მაგალითად, ელიფსის ფართობს, რომლის განტოლება პარამეტრული სახით არის:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,$$

აქვს სახე:

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

თუ გადავალთ მართკუთხა კოორდინატებიდან პოლარ კოორდინატებზე, გვექნება:

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,$$

რის შემდეგ

$$dx=\cos\omega\,d\rho-\rho\sin\omega\,d\omega,\quad dy=\sin\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\,d\omega,\quad x\,dy-y\,dx=\rho^2 d\omega$$

და წირითი ინტეგრალი (40) ტოლფასია შემდეგი ინტეგრალის: $\frac{1}{2}\int\rho^2 d\omega$, რომელიც აღებულია C წირის გასწვრივ (იხ. § 78).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ყოველი წირითი ინტეგრალი $\int P\,dx+Q\,dy$, აღებული შეკრული C კონტურის გასწვრივ დადებითი მიმართულებით, შეიძლება ცოტა სხვა სახით დავწეროთ, თუ ვისარგებლებთ კონტურის რკალით. ვთქვათ α და β არიან კუთხეები, რომლებსაც მხების დადებითი მიმართულება ადგენს Ox და Oy ღერძებთან (რომლებიც იზომებიან 0-დან π-მდე), α' და β' კი კუთხეები, შედგენილი შ ი გ ა ნ ო რ მ ა ლ ი ს მიერ Ox და Oy ღერძებთან. ვთქვათ, რომ C კონტურის M წერტილიდან გავლებულია ორი Mx' და My' ნახევარი წრფე, შესაბამად პარალელური Ox და Oy-ის; ბრუნვა, რომელიც Mx'-ს მიიყვანს მხების დადებით მიმართულებასთან, My'-ს დაამთხვევს შიგა ნორმალთან; მაშ, ჩვენ გვაქვს, $\beta'=\alpha$, $\cos\beta'=\cos\alpha$. მართობულობის პირობა:

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'=0,$$

გვაძლევს:

$$\cos\beta=-\cos\alpha',$$

და მაშასადამე

$$dx=\cos\alpha\,ds=\cos\beta'\,ds,\ dy=\cos\beta\,ds=-\cos\alpha'\,ds.$$

წირითი $\int\limits_C P\,dx+Q\,dy$ ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int\limits_C (P\cos\beta'-Q\cos\alpha')\,ds,$$

სადაც ds ელემენტი არის არსებითად დადებითი. თუ C კონტურს აქვს კუთხითი წერტილები, მაშინ მას დავყოფთ რამოდენიმე რკალად იმნაირად, რომ თითოეულ მათგანზე α' და β' იყვენ s რკალის უწყვეტი ფუნქციები, და შემდეგ შევკრებთ ინტეგრალებს, გავრცელებულს თითოეულ ამ რკალებზე.

მაგალითად, D არის ფართობი წარმოგვიდგება ერთ-ერთით შემდეგი ორი ინტეგრალიდან:

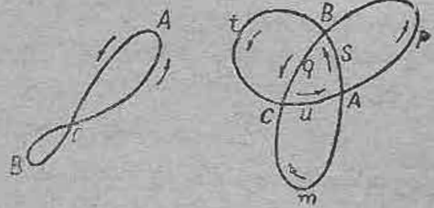
$$-\int\limits_C x\cos\alpha'\,ds,\ -\int\limits_C y\cos\beta'\,ds,$$

და ეს შედეგი არ არის დამოკიდებული ღერძების მდებარეობაზე.

93. $\frac{1}{2}\int x\,dy-y\,dx$ **— ინტეგრალის მნიშვნელობა.** ბუნებრივია დავსვათ ასეთი საკითხი: რას წარმოადგენს ინტეგრალი $\int x\,dy-y\,dx$, აღებული ნებისმიერი სახის მრუდზე რომელიც შეიძლება იყოს ჩაკეტილი ან არა ჩაკეტილი.

განვიხილოთ, მაგალითად, ორი ჩაკეტილი $OAOBO$ და $ApBqCrAsBtCuA$ მრუდი, რომელთაც აქვთ შესაბამად ერთი და სამი ორჯერადი წერტილები. ცხადია, რომ თითოეული ამ მრუდეებიდან შეგვიძლია შევცვალოთ ჩაკეტილი მრუდით, რომელსაც არა აქვთ ორჯერადი წერტილები. მაგალითად, $OAOBO$ ჩაკეტილი კონტური ტოლფასია ორი OAO და OBO კონტურისა. ინტეგრალი, აღებული მთელი კონტურის გასწვრივ, ტოლია OAO და OBO მარყუ-

ქების (Boucle) ფართობების სხვაობისა. ასევე მეორე კონტური შეიძლება შევცვალოთ ორი ჩაკეტილი $ApBqCrA$ და $AsBtCuA$ კონტურით. მაშასადამე, ინტეგრალი არის ჯამი $ApBsA$, $BtCqB$ და $ArCuA$ მარყუჟების ფართობებისა და $AsBqCuA$ მარყუჟის გაორკეცებული ფართობისა. ამ მსჯელობას აქვს სრულიად ზოგადი ხასიათი. ჩაკეტილი კონტური ნებისმიერი რიცხვის ორჯერადი წერტილებით განსაზღვრავს რამოდენიმე ნაწილობრივ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ ფართობს, რომლებიც მთლიანად შემოსაზღვრულია ამ კონტურის მიერ. მთელ კონტურზე აღებული ინტეგრალი ტოლია შემდეგი სახის ჯამისა:



ნახ. 15.

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \cdots + m_p\sigma_p,$$

სადაც $m_1, m_2, \ldots, m_p$ არიან მთელი რიცხვები, დადებითი ან უარყოფითი, რომლებიც განისაზღვრება შემდეგი წესით: ვთქვათ, მოცემულია ორი მოსაზღვრე ფართობი σ და σ', რომლებიც გაყოფილია C კონტურის ab რკალით. წარმოვიდგინოთ დამკვირებელი, რომელიც იმყოფება სიბრტყეზე და აღწერს კონტურს მიმართულებით, რომელიც ისრით არის ნაჩვენები. კოეფიციენტი იმ ფართობისა, რომელიც ძევს დამკვირებელის მარცხნით, ერთი ერთეულით მეტია, ვიდრე კოეფიციენტი იმ ფართობისა, რომელიც ძევს მის მარჯვნივ. შემოუსაზღვრელ ფართობს, რომელიც ძევს კონტურის გარეთ მიანიჭებენ კოეფიციენტ 0-ს და შემდეგ ეძებენ მიმდევრობით დანარჩენ კოეფიციენტებს.

თუ მოცემული AB მრუდი არ არის ჩაკეტილი, მაშინ მას გარდავქმნით, ჩაკეტილ მრუდად, თუ მისი A და B ბოლოებს შევაერთებთ კოორდინატთა სათავესთან; შემდეგ ამ კონტურებზე გამოვიყენებთ წინა წესს, რადგან ინტეგრალი $\int x\,dy - y\,dx$, აღებული OA და OB სხივებზე, ცხადია, არის ნულის ტოლი.

V. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოება და ინტეგრობა

94. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოება. ძალიან ხშირად გვიხდება განხილვა ისეთი განსაზღვრული ინტეგრალებისა, რომლებშიაც ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი ფუნქცია დამოკიდებულია არა მარტო საინტეგრო ცვლადზე, არამედ აგრეთვე ერთი ან რამდენიმე სხვა ცვლადზედაც, რომლებიც განიხილება როგორც პარამეტრები. ვთქვათ $f(x, \alpha)$ არის x-ს და α-ს ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია, როცა x იცვლება x_0-დან X-მდე, ხოლო α იცვლება რაიმე α_0, α_1 საზღვრებს შორის. ვიგულისხმოთ, რომ α აქვს რაიმე გარკვეული მნიშვნელობა, მოთავსებული α_0-სა და α_1-ს შორის, და რომ x_0, X საზღვრები არ არიან დამოკიდებული α-ზე; მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx$$

არის α ცვლადის ფუნქცია. განვიხილოთ ამ ფუნქციის თვისებები.

ჩვენ გვაქვს:

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx. \tag{41}$$

რადგანაც $f(x, \alpha)$ ფუნქცია არის უწყვეტი, ამიტომ $\Delta\alpha$ იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე, ნაკლები იყოს წინასწარ მოცემულ დადებით ε რიცხვზე. ამიტომ $\Delta F(\alpha)$ ნაზრდი აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იქნება $\varepsilon|X-x_0|$-ზე; აქედან გამომდინარეობს, რომ $F(\alpha)$ ფუნქცია არის უწყვეტი.

თუ $f(x, \alpha)$ აქვს წარმოებული α ცვლადის მიმართ, მაშინ გვაქვს

$$f(x, a+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)=\Delta\alpha\,[f'_\alpha(x, \alpha)+\varepsilon],$$

სადაც ε მიისწრაფის ნულისაკენ $\Delta\alpha$-თან ერთად. ამიტომ, თუ გავყოფთ (41) ტოლობის ორ ნაწილს $\Delta\alpha$-ზე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx+\int_{x_0}^{X}\varepsilon\,dx.$$

აღვნიშნოთ η-თი ε-ის აბსოლუტური მნიშვნელობის ზედა საზღვარი; მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია $\eta|X-x_0|$-ზე და თუ გადავალთ ზღვარზე მივიღებთ:

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx. \tag{42}$$

ეს დასკვნა, რომ იყოს სრულიად მკაცრი, აუცილებელია $\Delta\alpha$ ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ ε-ის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იყოს ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით η—რიცხვზე x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც მოთავსებულია x_0 და X საზღვრებს შორის. ეს უეჭველად იქნება იმ შემთხვევაში, თუ $f'_\alpha(x, \alpha)$ წარმოებული თვითონ არის უწყვეტი. მართლაც, სასრული ნაზრდის ფორმულა გვაძლევს:

$$f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)=\Delta\alpha\, f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha), \quad 0<\theta<1,$$

და მაშასადამე,

$$\varepsilon=f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x, \alpha).$$

თუ f'_α ფუნქცია არის უწყვეტი, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს x და α, ε სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება η-ზე, მხოლოდ თუ $|\Delta\alpha|$ ნაკლებია საკმაოდ მცირე დადებით h რიცხვზე (იხ. თავი I § 12).

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ X და x_0 საზღვრები აგრეთვე არიან დამოკიდებული α-ზე. აღვნიშნოთ ΔX და Δx_0-ით ის ნაზრდები, რომლებიც შეესაბამებიან $\Delta\alpha$ ნაზრდს, მაშინ გვაქვს:

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)]\,dx+$$

$$+\int_{X}^{X+\Delta X} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx.$$

ორ უკანასკნელ ინტეგრალზე თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას და მიღებულ შედეგს $\Delta\alpha$-ზე გავყოფთ, მივიღებთ:

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx+$$

$$+\frac{\Delta X}{\Delta\alpha}f(X+\theta\Delta X,\alpha+\Delta\alpha)-\frac{\Delta x_0}{\Delta\alpha}f(x_0+\theta'\Delta x_0,\alpha+\Delta\alpha).$$

როდესაც $\Delta\alpha$ ნულისაკენ მიისწრაფის პირველ ინტეგრალს აქვს ზემოთ მოძებნილი ზღვარი; ამიტომ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\frac{dX}{d\alpha}f(X,\alpha)-\frac{dx_0}{d\alpha}f(x_0,\alpha). \tag{43}$$

ეს არის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების ზოგადი ფორმულა.

ვინაიდან ყოველი წირითი ინტეგრალი შეიძლება დავიყვანოთ ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალების ჯამამდე, ამიტომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოება ვრცელდება ამ ინტეგრალებზედაც. მაგალითად, ვთქვათ, გვაქვს:

$$F(\alpha)=\int_{AB}P(x,y,\alpha)\,dx+Q(x,y,\alpha)\,dy$$

წირითი ინტეგრალი, აღებული ისეთ AB რკალის გასწვრივ, რომელიც α-ზე არის დამოუკიდებელი; ჩვენ გვაქვს:

$$F'(\alpha)=\int_{AB}P'_\alpha(x,y,\alpha)\,dx+Q'_\alpha(x,y,\alpha)\,dy,$$

სადაც ყოველი α-თვის ინტეგრალი აღებულია ერთი და იგივე მრუდის გასწვრივ.

(43) ფორმულით ხშირად სარგებლობენ იმისათვის, რომ მიიღონ ზოგიერთ განსაზღვრულ ინტეგრალთა მნიშვნელობები, დაჰყავთ რა ისინი სხვა უფრო მარტივი ინტეგრალებამდე. მაგალითად, დადებითი α—სათვის გვაქვს:

$$\int_0^x\frac{dx}{x^2+a}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}}.$$

გამოვიყენოთ აქ (42) ფორმულა $n-1$ ჯერ. მივიღებთ:

$$(-1)^{n-1}\,1\cdot2\ldots(n-1)\int_0^x\frac{dx}{(x^2+a)^n}=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

95. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრობა. ვთქვათ $f(x, y)$ არის ორი x და y ცვლადის ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია D არეში, განზღვრული პირობებით $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, სადაც a, b, c, d—მუდმივებია.

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

გამოსახულების აზრი სავსებით ნათელია; თუ x აქვს გარკვეული მნიშვნელობა, მოთავსებული a და b შორის, მაშინ ინტეგრალი $\int_c^d f(x, y)\, dy$ არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც ჩვენ შემდეგ ვაინტეგრებთ a და b საზღვრებს შორის. ამ გამოსახულებაში შეიძლება ინტეგრობის რიგის შეცვლა შედეგის შეუცვლელად. სხვანაირად რომ ვთქვათ გვაქვს ტოლობა:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{44}$$

რომელიც წარმოადგენს ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრობის ფორმულას.

რომ დავამტკიცოთ ეს, დავტოვოთ a, c და d უცვლელად და b შევცვალოთ t ცვლადით, რომელიც მოთავსებულია a და b-ს შორის; მაშინ ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\int_a^t dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^t f \quad dx. \tag{45}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე წარმოადგენს t ცვლადის ფუნქციებს, რომლებიც ისპობა $t=a$ მნიშვნელობისათვის; მაშასადამე, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ მათი წარმოებულები t-თი არიან ტოლი იგიურად. ამრიგად, თუ აღვნიშნავთ

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x), \quad \int_a^t f(x, y)\, dx = \Phi(t, y),$$

მაშინ გამოსახულება (45) დაიწერება ასე:

$$\int_a^t F(x)\, dx = \int_c^d \Phi(t, y)\, dy, \tag{45'}$$

და ჩვენ უშუალოდ ვრწმუნდებით იმაში, რომ ორივე ნაწილის წარმოებულები t ცვლადით, $F(t)$ და $\int_c^d \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dy$, არიან ტოლი $\int_c^d f(t, y)\, dy$.

ზემოთ მოყვანილ დამტკიცებაში არსებითად იგულისხმება, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეით მდგომი ფუნქციები არიან უწყვეტი და რომ ინტეგრობის საზღვრები სასრულოა. თუ ეს პირობები არ არის შესრულებული, მაშინ დასკვნები შეიძლება იყოს სრულიად სხვანაირი, და ჩვეულებრივი (43) და (44) ფორმულების გამოყენებამ შეიძლება მიგვიყვანოს აბსურდულ შედეგებამდე.

მაგალითად, გვაქვს:

$$F(\alpha)=\int_0^1 \frac{\alpha dx}{\alpha^2+x^2}=\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\alpha}\right]_0^1=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha};$$

ეს ფუნქცია არის წყვეტილი $\alpha=0$ მნიშვნელობისათვის, და გვაქვს:

$$F(+0)=\frac{\pi}{2},\ F(-0)=-\frac{\pi}{2};$$

აქ ინტეგრალის ქვეშ ფუნქცია წყვეტილია $x=\alpha=0$ წერტილზე. ავიღოთ აგრეთვე ინტეგრალი

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx;$$

თუ აღვნიშნავთ $\alpha x=y$, მივიღებთ:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx=\pm\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

აქ მეორე ინტეგრალის წინ ასაღებია იგივე ნიშანი, რომელიც აქვს α-ს, ვინაიდან ახალი ინტეგრალის საზღვრები არის 0 და $+\infty$, ან 0 და $-\infty$, იმისდა მიხედვით α დადებითია თუ უარყოფითი. ზემოთ ჩვენ ვნახეთ (§ 88), რომ ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$ არის დადებითი რიცხვი N. მაშასადამე, განსახილავი ინტეგრალი უდრის $\pm N$, α რიცხვის ნიშნის მიხედვით. ამ ინტეგრალზე თუ გამოვიყენებთ (43) ფორმულას, მივიღებთ ტოლობას:

$$F'(\alpha)=\int_0^{+\infty} \cos \alpha x\,dx,$$

რომლის მარჯვენა ნაწილს არა აქვს არავითარი აზრი.

განვიხილოთ კიდევ ფუნქცია $f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ და გამოვიყენოთ მასზე (44) ფორმულა, ავიღებთ რა ორივე ინტეგრობის საზღვრებად 0 და 1; მივიღებთ ამრიგად ტოლობას:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx. \qquad (46)$$

მოვახდენთ რა ერთ ინტეგრობას მარცხენა მხარისას, მივიღებთ:

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \left[\frac{y}{(x^2+y^2)}\right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2},$$

და ტოლობის მარცხენა მხარეს აქვს მნიშვნელობა $\frac{\pi}{4}$. მოვახდენთ რა ინტეგრობას შებრუნებული რიგით, მოვძებნით, რომ მარჯვენა ნაწილის მნიშვნელობა არის $-\frac{\pi}{4}$. ამ შედეგის აბსურდობა გამოწვეულია იმით, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია წყვეტილია $x=y=0$ წერტილზე, რომელიც ეკუთვნის არის საზღვარს (იხ. § 130).

96. თანაბრად კრებადი ინტეგრალები. (43) და (44) ფორმულები შეიძლება გამოყენებული იქნეს უფრო ზოგად შემთხვევაში. ვთქვათ $f(x, \alpha)$ არის ორი x და α ცვლადის ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია, როცა x რჩება მეტი a-ზე, ხოლო α მოთავსებულია α_0 და α_1-ს შორის. თუ ყოველი α-თვის, რომელიც მოთავსებულია (α_0, α_1) შუალედში, ინტეგრალი $\int_a^l f(x, \alpha)\, dx$ მიისწრაფის ზღვარისაკენ, როცა l უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ ეს ზღვარი

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \tag{47}$$

არის α-ს ფუნქცია, რომელიც საზოგადოდ არ არის უწყვეტი, როგორც ამას გვიჩვენებს ერთ-ერთი ზემოთმოყვანილი მაგალითი.

ჩვენ ვიტყვით, რომ ინტეგრალი (47) არის თ ა ნ ა ბ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი, თუ ყოველ წინასწარ მოცემულ ε რიცხვს ისეთი L რიცხვი შეესაბამება, რომ როცა $l \geq L$, ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left|\int_l^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon, \tag{48}$$

ამასთანავე L რიცხვი არის ერთი და იგივე α ყოველი მნიშვნელობისათვის (α_0, α_1) შუალედში. ამ შემთხვევაში, ფუნქცია

$$\Phi_n(\alpha) = \int_a^{a+n} f(x, \alpha)\, dx,$$

სადაც n მთელი და დადებითი რიცხვია, თანაბრად მიისწრაფის $F(\alpha)$ ზღვარისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, და მაშასადამე $F(\alpha)$ არის α-ს უწყვეტი ფუნქცია.

ახლა დავუშვათ, რომ ინტეგრალს, რომელიც მიიღება ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ჩვეულებრივი განაწარმოებით

$$F_1(\alpha)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx \tag{49}$$

აქვს აზრი და თვითონ არის თანაბრად კრებადი (α_0, α_1) შუალედში. ფუნქცია

$$\Psi_n(\alpha)=\int_a^{a+n}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$$

თანაბრად მიისწრაფის თავის $F_1(\alpha)$ ზღვართან; ამრიგად გვაქვს

$$\Psi_n(\alpha)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\Phi_n(\alpha)\right],$$

როგორიც,არ უნდა იყოს n, თუ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ უწყვეტია. მაშასადამე, $F_1(\alpha)$ არის $F(\alpha)$ ფუნქციის წარმოებული (§ 29).

ამრიგად ჩვენ უფლება გვაქვს გამოვიყენოთ (47) ინტეგრალზე, ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების ფორმულა, **მხოლოდ თუ ინტეგრალი, ამ წესით მიღებული, თანაბრად კრებადია.**

სრულიად ასევე, თუ $f(x, \alpha)$ უსასრულოა ინტეგრობის $x=a$ საზღვარზე, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ ინტეგრალი

$$F(\alpha)=\int_a^{b} f(x, \alpha)\,dx \quad (a<b) \tag{50}$$

თანაბრად კრებადია, თუ ნებისმიერ დადებით ε რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ მეორე დადებითი η რიცხვი, α-ზე დამოუკიდებელი, ისეთი, რომ

$$\left|\int_a^{a+h} f(x, \alpha)\,dx\right|<\varepsilon$$

h-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც η-ზე ნაკლებია. შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (50) ინტეგრალზე გაწარმოების ჩვეულებრივი ფორმულა, თუ ამრიგად მიღებული ინტეგრალი თანაბრად კრებადია; დამტკიცება ანალოგიურია ზემოთ მოყვანილი მსჯელობისა

ჩვენ შეგვიძლია გავავრცელოთ აგრეთვე ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრობის ფორმულა იმ შემთხვევაზე, როდესაც ერთ-ერთი საზღვარი უსასრულოა. ვთქვათ $f(x, \alpha)$ არის ორი x და α ცვლადის ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $x\geqslant a$, $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ მნიშვნელობებისათვის. **თუ ინტეგრალი** $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ **თანაბრად კრებადია** (α_0, α_1) **შუალედში, მაშინ გვაქვს:**

$$\int_a^{+\infty} dx\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx. \tag{51}$$

ვთქვათ l არის რაიმე რიცხვი, მეტი a-ზე; ზოგადი ფორმულის (44) ძალით გვაქვს:

$$\int_a^l dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^l f(x, \alpha)\, dx. \tag{52}$$

როცა l უსაზღვროდ იზრდება, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს აქვს ზღვრად

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

ვინაიდან ამ ორი გამოსახულების სხვაობა უდრის

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_l^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

და, მაშასადამე, აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია $\varepsilon\,|\alpha_1-\alpha_0|$-ზე, მხოლოდ თუ l აღემატება გარკვეულ L რიცხვს. მაშასადამე, (52) განტოლების მარცხენა ნაწილი მიისწრაფის აგრეთვე ზღვარისაკენ, რომელსაც წარმოვადგენთ სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

გაუტოლებთ რა ერთმანეთს ამ ორივე ზღვარს, მივიღებთ (51) ფორმულას.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\, dx,$$

სადაც $\alpha \geqslant 0$. ეს ინტეგრალი არის თანაბრად კრებადი, ვინაიდან ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულის ძალით:

$$\int_l^q e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{e^{-\alpha l}}{l}\int_l^{\xi} \sin x\, dx,$$

სადაც $l<\xi<q$, და მაშასადამე, გვაქვს:

$$\left|\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\, dx\right| < \frac{2}{l};$$

თუ l რიცხვი ნაკლებია $\frac{2}{\varepsilon}$-ზე, მაშინ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი იქნება ნაკლები ε-ზე, როგორიც არ უნდა იყოს $\alpha \geqslant 0$. მაშასადამე, $F(\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია $\alpha \geqslant 0$ მნიშვნელობისათვის.

გაწარმოებით მიღებული ინტეგრალი თანაბრად კრებადია α ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აღემატება რაიმე დადებით k რიცხვს. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$\left|\int_{l}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| < \int_{l}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha l};$$

თუ ავიღებთ l საკმაოდ დიდს ისე რომ $ke^{kl} > \frac{1}{2}$, მაშინ ამ ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა იქნება ნაკლები ε-ზე α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აღემატება k რიცხვს. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს:

$$F'(\alpha) = -\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx;$$

აქ განუსაზღვრელი ინტეგრალი ადვილად აიღება, და ჩვენ გვაქვს:

$$F'(\alpha) = \left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha\sin x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{1+\alpha^2};$$

აქედან

$$F(\alpha) = C - \operatorname{Arc\,tg}\alpha;$$

C მუდმივს ჩვენ განვსაზღვრავთ, შევნიშნავთ რა, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი $F(\alpha)$ მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა α უსაზღვროდ იზრდება; ეს პირობა გვაძლევს $C = \frac{\pi}{2}$. ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha}. \tag{53}$$

ამ ფორმულას აქვს ადგილი მხოლოდ α-ს დადებითი მნიშვნელობისათვის, მაგრამ, როგორც იყო აღნიშნული, $F(\alpha)$ არის α-ს უწყვეტი ფუნქცია, მაშინაც როცა $\alpha=0$. მაშასადამე, თუ α ნულისაკენ მიისწრაფის, გვაქვს:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{54}$$

2. ვთქვათ

$$F(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\alpha - x}},$$

სადაც $f(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი თავის $f'(x)$ წარმოებულით $(0, a)$ შუალედში, და α მოთავსებულია ამ შუალედში. გაწარმოების ჩვეულებრივი ფორმულა მიგვიყვანს უაზრო შედეგამდე, ვინაიდან ჩვენ ვღებულობთ ორი უსასრულობის სხვაობას.

მივიღებთ რა $x=\alpha t$, გვექნება:

$$F(\alpha)=\int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}\, f(\alpha t)\, dt}{\sqrt{1-t}},$$

გაწარმოებით მიღებული ინტეგრალი:

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} f(\alpha t)+t\sqrt{\alpha}\, f'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\, dt,$$

თანაბრად კრებადია მთელ (α_0, α_1) შუალედში, სადაც α_0 და α_1 არიან დადებითი და a-ზე ნაკლები, ვინაიდან მისი შედარება შეიძლება ინტეგრალთან $\int_0^1 \frac{M\, dt}{\sqrt{1-t}}$, სადაც M — მუდმივი რიცხვია. თუ დავუბრუნდებით x ცვლადს, ჩვენ გვაქვს, მაშასადამე:

$$F'(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{f(x)+2xf'(x)}{2\alpha\sqrt{\alpha-x}}\, dx.$$

როგორც გამოყენება დავსვათ ჩვენს წინაშე ამოცანა. განვსაზღვროთ $f(x)$ ფუნქცია იმნაირად, რომ $F(\alpha)$ იყოს α-ზე დამოუკიდებელი. $F'(\alpha)$ წარმოებული უნდა იყოს ნული, რომელსაც აქვს ადგილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $f(x)+2xf'(x)$ ფუნქცია იგიურად ნულის ტოლია, ყოველ შემთხვევაში, თუ ამ გამოსახულებას არა აქვს უსასრულო რიცხვი ნულებისა კოორდინატთა სათავის მახლობლობაში. ეს პირობა შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{2x}=0,$$

საიდანაც

$$f(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

ეს ფუნქცია გვაძლევს ამოცანის ამოხსნას; მართლაც, გვაქვს:

$$\int_0^\alpha \frac{C\,dx}{\sqrt{x(\alpha-x)}}=C\pi,$$

როგორც ეს ადვილი შესამჩნევია $x=\alpha\sin^2\varphi$ ჩასმის საშუალებით.

სავარჯიშო მაგალითები

1. დაამტკიცეთ, რომ როცა n უსაზღვროდ იზრდება $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$ ჯამს აქვს ზღვრად $\ln 2$.

[უნდა დავამტკიცოთ, რომ ამ ჯამს აქვს ზღვრად განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$].

2. ამგვარადვე მოძებნეთ ზღვარი შემდეგი ჯამებისა:

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}},$$

დაიყვანთ რა მათ განსაზღვრულ ინტეგრალებამდე. საზოგადოდ $\sum_{i=0}^{n}\varphi(i,n)$ ჯამის ზღვარი, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, უდრის გარკვეულ განსაზღვრულ ინტეგრალს, თუ $\varphi(i,n)$ არის ერთგვაროვანი ფუნქცია—1 ხარისხისა i და n-ის მამართ.

3. გამოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალის $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ მნიშვნელობა.

[შეიძლება გამოხვიდეთ ტრიგონომეტრიული ფორმულიდან:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

ან ისარგებლოთ ტოლობებით:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx.\ ]$$

4. აქედან გამოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალის

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x\,dx.$$

მნიშვნელობა.

5. დაამტკიცეთ, რომ $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

[შეიძლება მოვახდინოთ ჩასმა $x=\operatorname{tg}\varphi$ და მიღებული ინტეგრალი დავყოთ სამ ნაწილად.]

6.* მოძებნეთ განსაზღვრული ინტეგრალის $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$ მნიშვნელობა.

[პ ა უ ს ო ნ ი (Poisson)].

დავყოფთ რა შუალედს 0-დან π-მდე n თანატოლ ნაწილად და გამოვიყენებთ ტრიგონომეტრიის ცნობილ ფორმულას, ჩვენ დავიყვანთ ამოცანას შემდეგი ზღვარის გამოთვლაზე.

$$\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

---

* ვარსკვლავით აქ და შემდეგში აღნიშნულია უფრო რთული ამოცანები, რომლებიც ორიგინალურ მემუარებიდან არის მოყვანილი.

როცა n უსაზღვროდ იზრდება; თუ α მოთავსებულია -1 და $+1$ შორის, მაშინ ეს ზღვარი ნულის ტოლია; მხოლოდ როცა $\alpha^2 > 1$, მაშინ იგი უდრის $\pi \ln \alpha^2$.

7. განსაზღვრული ინტეგრალი $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$, სადაც α—დადებითია, უდრის 2-ს,

როცა $\alpha < 1$, და $\frac{2}{\alpha}$, როცა $\alpha > 1$.

8. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციები $F(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\alpha x\, dx}{(x^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$, $F_1(\alpha)=\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

არიან წყვეტილი $\alpha=0$ მნიშვნელობისათვის.

9.* იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს ინტეგრადი (a, b) შუალედში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველ დადებით ε რიცხვს შეესაბამებოდეს (a, b) შუალედის ისეთი დანაწილება, რომ შესაბამი ჯამების სხვაობა $S-s$ იყოს ε-ზე ნაკლები.

10. ვთქვათ $f(x)$ და $\varphi(x)$ არიან ინტეგრადი ფუნქციები (a, b) შუალედში. დაამტკიცეთ შვარცის (Schwarz) უტოლობა:

$$\left(\int\limits_a^b f\varphi\, dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)\, dx \times \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx;$$

ტოლობას აქვს ადგილი მაშინ, თუ ფარდობა $\frac{f}{\varphi}$ არის მუდმივი.

შეგვიძლია შევნიშნოთ მაგალითად, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int\limits_a^b [\alpha f(x)+\beta\varphi(x)]^2\, dx$ წარმოადგენს გარკვეულ დადებით კვადრატულ ფორმას α და β მიმართ.

11. ვთქვათ $f(x)$ და $\varphi(x)$ არიან ფუნქციები, უწყვეტი (a, b) შუალედში და $(a, x_1, x_2 \ldots, b)$ არის ამ შუალედის რაიმე დანაწილება. თუ ავიღებთ რაიმე ორ მნიშვნელობას ξ_i, η_i ყოველ (x_{i-1}, x_i) შუალედში, მაშინ ჯამს $\sum f(\xi_i)\,\varphi(\eta_i)\,(x_i - x_{i-1})$ ექნება ზღვრად განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\, dx.$$

12. ვთქვათ $f(x)$ არის ფუნქცია, უწყვეტი და დადებითი (a, b) შუალედში. ნამრავლი ინტეგრალების: $\int\limits_a^b f(x)\, dx, \int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}$ იქნება მინიმუმი მაშინ, თუ ფუნქცია მუდმივის ტოლია.

13. ვთქვათ $\mathop{\mathbf{I}}\limits_{x_0}^{x_1}$ არის ფუნქციის მაჩვენებელი [l'indice § 76] x_0 და x_1 შორის. დაამტკიცეთ დამოკიდებულება:

$$\mathop{\mathbf{I}}\limits_{x_0}^{x_1} f(x) + \mathop{\mathbf{I}}\limits_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

სადაც $\varepsilon=+1$, როცა $f(x_0)>0$, $f(x_1)<0$, და $\varepsilon=-1$, როცა $f(x_0)<0$, $f(x_1)>0$; ხოლო $\varepsilon=0$, როცა $f(x_0)$ და $f(x_1)$ არიან ერთნაირი ნიშნისა.

$f(x)$ და $\dfrac{1}{f(x)}$ ფუნქციებზე უნდა გამოიყენოთ 187 გვერდზე (§ 76) მოყვანილი უკანასკნელი ფორმულა.

14*. ვთქვათ U და V არიან n-ური და $(n-1)$ ხარისხის ურთიერთ მარტივი პოლინომები. $\dfrac{U}{V}$ რაციონალური წილადის მაჩვენებელი ცვლადის $-\infty$ და $+\infty$ საზღვრებს შორის უდრის სხვაობას $U+iV$ პოლინომის იმ წარმოსახვით ფესვთა რიცხვებისას, რომლებსაც i-ს წინ აქვთ შესაბამად დადებითი და უარყოფითი კოეფიციენტები.

15*. გამოიყვანეთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა ნაწილობითი ინტეგრობის წესით.

ვთქვათ $f(x)$ და $\varphi(x)$ არიან უწყვეტი ფუნქციები (a, b) შუალედში, ამასთანავე $f(x)$ მუდამ იზრდება ან მუდამ კლებულობს და აქვს უწყვეტი წარმოებული. აღვნიშნავთ რა

$$\Phi(x)=\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

და ნაწილობით ვაინტეგრებთ, გვექნება:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f(b)\,\Phi(b)-\int_a^b f'(x)\,\Phi(x)\,dx.$$

ვინაიდან $f'(x)$ წარმოებულს აქვს მუდმივი ნიშანი, ამიტომ ახალ ინტეგრალზე გვრჩება გამოსაყენებელი საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა.

16. უჩვენეთ, რომ ერთ მართკუთხოვანი სისტემიდან მეორე მასთან კონგრუენტულ მართკუთხოვან სისტემაზე გადასვლის დროს, ინტეგრალი $\int x\,dy-y\,dx$ აღებული რაიმე შეკრულ წირის განგრძივ გადადის იმავე სახის ინტეგრალში.

17. $\displaystyle\int_a^b \cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\lambda}(\sin\lambda b-\sin\lambda a)$ ფორმულიდან გამოთვალეთ შემდეგი განსაზღვრული ინტეგრალები:

$$\int_a^b x^{2p+1}\sin\lambda x\,dx,\quad \int_a^b x^{2p}\cos\lambda x\,dx.$$

18. განვიხილოთ ორი რაიმე ბრტყელი C და C' მრუდი; ორივე მრუდის შესაბამი (x, y) და (x', y') წერტილებად ჩავთვალოთ ისეთები, რომლებშიაც მხებები არიან ერთმანეთის პარალელური. წერტილი, კოორდინატებით $x_1=px+qx'$, $y_1=py+qy'$, სადაც p და q არიან მოცემული მუდმივები, აღწერს ახალ C_1 მრუდს. დაამტკიცეთ, რომ სამივე მრუდის შესაბამი რკალები არიან შებმული დამოკიდებულებით:

$$s_1=\pm ps\pm ps'.$$

19. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი მრუდეების შესაბამ რკალებს:

$$C\begin{cases}x=tf'(t)-f(t)+\varphi'(t),\\ y=f'(t)-t\varphi'(t)+\varphi(t),\end{cases}\qquad C'\begin{cases}x'=tf'(t)-f(t)-\varphi'(t)\\ y'=f'(t)+t\varphi'(t)-\varphi(t)\end{cases}$$

აქვთ ერთნაირი სიგრძე, როგორიც არ უნდა იყოს $f(t)$ და $\varphi(t)$ ფუნქციები.

20. გავატაროთ სიბრტყის M წერტილზე $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ ნორმალები წირებისადმი: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (რომელნიც მდებარეობენ ამ სიბრტყეზე). l_i — იყოს MP_i-ის სიგრძე. გეომეტრიული ადგილი ისეთი M წერტილებისა, რომელთათვის l_i მანძილები აკმაყოფილებენ პირობას $F(l_1, l_2, \ldots, l_n)=0$, არის რაიმე L წირი. დაამტკიცეთ, რომ თუ ყოველ MP_i სწორზე მოვზომავთ სათანადო მიმართულებით მონაკვეთს, $\frac{\partial F}{\partial l_i}$ სიდიდის ტოლფარდს, მაშინ ამ n მონაკვეთთა გეომეტრიული ჯამი მოგვცემს L წირის ნორმალის მიმართულებას. გაავრცელეთ დებულება ფართეულზე.

21. C იყოს შეკრული წირი. C წირის m წერტილზე გავლებულ მხებზე, m წერტილის ორთავე მხარეს ავიღოთ თანატოლი მონაკვეთები: mp და mp', სადაც mp მონაკვეთის სიგრძე იცვლება ნებისმიერი წესით. დაამტკიცეთ, რომ p და p' წერტილების მიერ აღწერილი წირების ფართობები ერთმანეთის ტოლია. შემთხვევა, როცა mp-ს სიგრძე მუდმივია.

22. ფართობი, მოთავსებული ამოზნექილი შეკრული წირისა და მისი პარალელური წირს შორის, რომელიც მიიღება პირველი წირის ნორმალზე მუდმივი l სიგრძის მონაკვეთის მოზომით, უდრის $\pm \pi l^2 + sl$, სადაც s — შეკრული წირის სიგრძეა.

23. C იყოს შეკრული წირი. გეომეტრიული ადგილები A წერტილებისა, რომელთათვის შესაბამისი ფუძე—წირის ფართობს აქვს მოცემული მნიშვნელობა, არის წრეწირი უძრავი ცენტრით.

საჭიროა განსაზღვრა C წირისა მისი ტანგენციალური განტოლებით:

$$x \cos t + y \sin t = f(t).$$

24. ვთქვათ C არის შეკრული მრუდი, ხოლო C_1 — მისი პოდერი A წერტილის მიმართ, C_2 — ადგილი იმ მართობების ფუძეებისა, რომლებიც დაშვებული არიან A წერტილიდან C მრუდის ნორმალზე. ამ სამი მრუდის ფართობებს შორის არსებობს დამოკიდებულება $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2$.

თუ ρ და ω არის C_1 მრუდის წერტილის პოლარი კოორდინატები, მაშინ პოდერი წირის თვისების ძალით (§ 36), C_2 წირის შესაბამი წერტილის კოორდინატები იქნება ρ' და $\omega + \frac{\pi}{2}$, ხოლო C წირის შესაბამი წერტილის კოორდინატები კი:

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \text{ და } \varphi = \omega + \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho'}{\rho}.$$

25. თუ C მრუდი უსრიალოდ გორავს წრფეზე, მაშინ ყოველი A წერტილი, რომელიც უცვლელად არის შებმული C მრუდთან, აღწერს გარკვეულ მრუდს, რომელსაც რ უ ლ ე ტ ი (გორწირი) ეწოდება. დაამტკიცეთ, რომ ფართობი, მოთავსებული რულეტის რკალსა და ფუძეს შორის, უდრის გაორკეცებულ შესაბამ ფართობს A წერტილის პოდერისას C მრუდის მიმართ. დაამტკიცეთ აგრეთვე, რომ რულეტის რკალის სიგრძე უდრის პოდერის შესაბამი რკალის სიგრძეს. [შ ტ ე ი ნ ე რ ი (Steiner)].

რომ დაამტკიცოთ ეს დებულება ანალიზურად, აღნიშნეთ X და Y-ით A წერტილის კოორდინატები იმ მოძრავი ღერძების მიმართ, რომლებიც შედგენილია C მრუდის M წერტილში მხები და ნორმალით. ვთქვათ s არის OM რკალი, რომელიც აითვლება C მრუდის მუდმივ წერტილიდან, ხოლო ω კუთხე O და M წერტილებში მხებებს შორის ადვილად შეიძლება გამოყვანა დამოკიდებულების:

$$ds + dX = Y\,d\omega, \quad dY + X\,d\omega = 0,$$

საიდანაც მიიღება ორივე დებულება.

თ ა ვ ი V

განსაზღვრულ ინტეგრალების გამოთვლა

1. განუსაზღვრელი ინტეგრალები

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა, მისი განმარტების[1] მიხედვით, საზოგადოდ წარმოადგენს ძნელ ამოცანას, იმ დროს როდესაც, თუ ცნობილია $f(x)$-ის პირველყოფილი ფუნქცია, ინტეგრალი უშუალოდ მოიძებნება ნებისმიერ საზღვრებისათვის.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ სხვადასხვაგვარ ელემენტარულ ფუნქციებს, რომლებიდან ინტეგრალები გამოიხატებიან იმავე სიმბოლოების საშუალებით. ელემენტარულ ფუნქციებად ჩვენ ვგულისხმობთ ალგებრულ ფუნქციებს, რაციონალურსა და ირაციონალურს, მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს, ტრიგონომეტრიულ და შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და ყველა იმ ფუნქციას, რომლებიც მიიღება ამ ფუნქციების კომბინაციებით, თუ მათი რიცხვი სასრულოა. როდესაც განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან ვერ გამოიხატება ამ სიმბოლოების საშუალებით, მაშინ ეს ინტეგრალი წარმოადგენს ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას. ამ ტრანსცენდენტულ ფუნქციების თვისებების შესწავლა და მათი კლასიფიკაცია შეადგენს ინტეგრალური აღრიცხვის ერთერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანათაგანს.

97. რაციონალური ფუნქციების ინტეგრობა. ზოგადი მეთოდი. ყოველი რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს ჯამს მთელი $F(x)$ ნაწილისა და წილადის $\frac{P(x)}{Q(x)}$, სადაც $P(x)$ პოლინომი მარტივია $Q(x)$-თან და მისი ხარისხი ნაკლებია ვიდრე $Q(x)$-ის ხარისხი. თუ $Q(x)=0$ განტოლების ნამდვილი და წარმოსახვითი ფესვები ცნობილია, მაშინ ეს რაციონალური წილადი შეგვიძლია დავშალოთ ისეთ მარტივი წილადების ჯამად, რომლებსაც აქვთ შემდეგი ორი გამოსახულებიდან ერთერთის სახე:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

პირველი ყაიდის მარტივი წილადები მიიღება ნამდვილი ფესვებიდან, ხოლო მეორე ყაიდის — შეუღლებული წარმოსახვითი ფესვებიდან. მთელი

---

[1] იხ. § 67-ის მაგალითი და სავარჯიშო მაგალითები 3 და 6 თავების.

ნაწილიდან ინტეგრალი აიღება უშუალოდ. შემდეგ, როცა $m>1$, მაშინ

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)\,(x-a)^{m-1}};$$

თუ კი $m=1$, ამ შემთხვევაში

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \ln (x-a).$$

სიმოკლისათვის ჩვენ არ ვწერთ C მუდმივს, რომელიც უნდა იქნეს მიმატებული მარჯვენა ნაწილზე. ამნაირად გვრჩება გამოვიკვლიოთ მხოლოდ მარტივი წილადები, რომლებიც მიიღება მნიშვნელის წარმოსახვითი ფესვებისაგან. გამარტივებისათვის, მივიღოთ

$$x=\alpha+\beta t, \quad dx=\beta dt;$$

მაშინ

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \frac{1}{\beta^{2n-1}} \int \frac{M\alpha+N+M\beta t}{(1+t^2)^n}\,dt$$

და ჩვენ ვღებულობთ ორგვარ ინტეგრალს:

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}, \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

პირველი ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება, თუ შევნიშნავთ, რომ $t\,dt$ არის $1+t^2$-ის დიფერენციალის ნახევარი. ამიტომ, თუ $n>1$, მაშინ გვაქვს:

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)\,(1+t^2)^{n-1}} = -\frac{\beta^{2n-2}}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

და თუ $n=1$, ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}\right].$$

დაგვრჩა მხოლოდ შემდეგი სახის ინტეგრალები:

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

თუ $n=1$, მაშინ ამ ინტეგრალის მნიშვნელობა იქნება:

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

როცა n მეტია ერთზე, მაშინ სარგებლობენ რედუქციის ფორმულით, რომელიც გვაძლევს საშუალებას დავიყვანოთ მოცემული ინტეგრალის გამოთვლა იმავე სახის ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელშიაც $(1+t^2)$-ის ხარისხი ერთი ერთეულით ნაკლებია. თუ აღვნიშნავთ განსახილავ ინტეგრალს I_n-ით, ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ იგი შემდეგი სახით:

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}.$$

გავაინტეგროთ $\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n}$ ნაწილობითი ინტეგრობის წესით, მივიღოთ:

$$u=t,\ dv=\frac{t\,dt}{(1+t^2)^n},\quad v=-\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}};$$

მაშინ გვექნება:

$$\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^n}=-\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$

შევცვალოთ I_n-ის გამოსახვაში უკანასკნელი წევრი მისი მნიშვნელობით, მივიღებთ:

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}.$$

თუ ამ ფორმულაში n-ს შევცვლით $n-1$-ით, შემდეგ $n-2$-ით და ა. შ. ჩვენ მივალთ ინტეგრალამდე $I_1=\operatorname{arc\,tg} t$.

თუ თანდათან დაუბრუნდებით I_n-ს, საბოლოოდ, მივიღებთ:

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3\,.\,1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}\operatorname{arc\,tg} t+R(t),$$

სადაც $R(t)$ არის რაციონალური ფუნქცია t-სი, რომლის გამოსახულების მიღება არ არის ძნელი. მხოლოდ შევნიშნოთ, რომ მისი მნიშვნელი იქნება $(1+t^2)^{n-1}$, ხოლო რაც შეეხება მრიცხველს, მისი ხარისხი იქნება $2n-2$-ზე ნაკლები (იხ. § 94).

ამრიგად, ინტეგრალი რაციონალური წილადიდან შედგება რაციონალური ნაწილისა და ტრანსცენდენტულ წევრებისაგან, რომლებსაც აქვთ შემდეგი გამოხატულებებიდან ერთერთის სახე:

$$\ln(x-a),\ \ln[(x-\alpha)^2+\beta^2],\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

ვთქვათ, მაგალითად, გამოსათვლელია ინტეგრალი $\int \frac{dx}{x^4-1}$. მნიშვნელს აქვს ორი ნამდვილი ფესვი $+1$ და -1 და ორი წარმოსახვითი $+i$ და $-i$. მაშ, თუ დავშლით მას მარტივ წილადებად, მივიღებთ:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

A კოეფიციენტის მოსაძებნად ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $x-1$ და შემდეგ ჩავსვათ $x=1$, მივიღებთ $A=\frac{1}{4}$. ამგვარადვე მოვძებნით $B=-\frac{1}{4}$. ახლა წინა იგივეობა შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{Cx+D}{1+x^2},$$

ანუ, დაყვანის შემდეგ, გვექნება:

$$\frac{-1}{2(1+x^2)}=\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

მაშასადამე, უნდა ავიღოთ $C=0,\ D=-\frac{1}{2}$, და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)},$$

საიდანაც

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

შენიშვნა. ზემოთ მოყვანილი მეთოდი სავსებით ზოგადია, მაგრამ იგი არ არის ყოველთვის ყველაზე მარტივი. ზოგჯერ შეიძლება გამოთვლის გამარტივება სათანადო ხელოვნური ხერხებით. ავიღოთ, მაგალითად, ინტეგრალი:

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}.$$

თუ $n>1$, მაშინ შეიძლება ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქციის დაშლა მარტივ წილადებად $+1$ და -1 ფესვების გამოყოფით, ან დაყვანის ფორმულის გამოყენებით ისე, როგორც I_n ინტეგრალისათვის. მაგრამ შეიძლება ამ ინტეგრალის მიღება უფრო ლამაზი ხერხით, თუ მოვახდენთ ცვლადის შეცვლას

$$x=\frac{1+z}{1-z};$$

ეს გვაძლევს:

$$x^2-1=\frac{4z}{(1-z)^2},\quad dx=\frac{2dz}{(1-z)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}=\frac{2}{4^n}\int\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}dz.$$

თუ დავშლით $(1-z)^{2n-2}$ ბინომის ფორმულით, ჩვენ მოგვიხდება ინტეგრობა Az^{μ} სახის მხოლოწევრებისა, სადაც μ არის დადებითი ან უარყოფითი.

ჰერმიტის მეთოდი. აქამდე ვგულისხმობდით, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი ფუნქცია დაშლილია მარტივ წილადებად; ამისათვის საჭირო იყო მნიშვნელის ფესვების ცოდნა. ახლა მოვიყვანთ მეთოდს (რომელიც ეკუთვნის ჰერმიტს), რომლის საშუალებით შეიძლება ინტეგრალის ალგებრული ნაწილის მოძებნა, მაშინაც, როცა არ არის ცნობილი მნიშვნელის ფესვები. აქ საჭირო იქნება მხოლოდ ელემენტარულ მოქმედებების წარმოება, ე. ი. მრავალწევრთა მიმატება, გამრავლება და გაყოფა.

ვთქვათ $\frac{f(x)}{F(x)}$ არის რაციონალური წილადი, რომლის ინტეგრალი საძიებელია. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მრიცხველი და მნიშვნელი ერთმანეთთან მარტივია. თანატოლი ფესვების თეორიის ძალით, $F(x)$ მრავალწევრი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი სახით:

$$F(x)=X_1\,X_2^2\,X_3^3\cdots X_p^p,$$

სადაც $X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots,\ X_p$ არის მრავალწევრები, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ მარტივ წრფივ მამრავლებს და წყვილ-წყვილად არა აქვთ საერთო მამრავლე-

ბი. შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია დავშალოთ მოცემული ფუნქცია მარტივ წილადებად, მნიშვნელებით: $X_1, X_2^2, \cdots, X_p^p$,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\cdots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

სადაც A_i არის მრავალწევრი, რომელიც მარტივია X_i-თან. მართლაც უდიდეს თანაგამყოფის თეორიიდან ცნობილია, რომ თუ მოცემულია ორი ერთმანეთთან მარტივი X და Y პოლინომი და რაიმე Z პოლინომი, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ორი A და B პოლინომი, რომლებიც დააკმაყოფილებენ იგივეობას:

$$BX+AY=Z.$$

მივიღოთ

$$X=X_1,\ Y=X_2^2\ldots X_p^p,\ Z=f(x);$$

მაშინ წინა იგივეობა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$BX_1+AX_2^2\ldots X_p^p=f(x).$$

უკანასკნელი ტოლობა გავყოთ $F(x)$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{X_1}+\frac{B}{X_2^2\ldots X_p^p}.$$

ზემოთ დაწერილი იგივეობის ძალით, თუ $f(x)$ პოლინომი მარტივია $F(x)$-თან, მაშინ A იქნება მარტივი X_1-თან, და B იქნება მარტივი $X_2^2\ldots X_p^p$-თან. თუ განვაგრძობთ იგივე მოქმედებებს წილადზე

$$\frac{B}{X_2^2\ldots X_p^p}$$

და ა. შ., ჩვენ $\frac{f(x)}{F(x)}$-ს წარმოვადგენთ მოთხოვნილი სახით.

ამრიგად საკმარისია გამოვარკვიოთ, თუ როგორ შეიძლება შემდეგი სახის ინტეგრალის:

$$\int\frac{A\,dx}{\varphi^n}$$

რაციონალური ნაწილის მოძებნა, სადაც $\varphi(x)$ არის მრავალწევრი, რომელიც მარტივია მის წარმოებულთან. ზემოთ აღნიშნული თეორემის ძალით, ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ორი სხვა B და C მრავალწევრი, რომლებიც დააკმაყოფილებენ იგივეობას;

$$B\varphi(x)+C\varphi'(x)=A,$$

და ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წინა ინტეგრალი შემდეგი სახით:

$$\int \frac{Adx}{\varphi^n} = \int \frac{B\varphi + C\varphi'}{\varphi^n} dx = \int \frac{Bdx}{\varphi^{n-1}} + \int C \frac{\varphi' dx}{\varphi^n}.$$

თუ n ერთზე მეტია, მაშინ მივიღოთ:

$$u = C, \ v = \frac{-1}{(n-1)\ \varphi^{n-1}}$$

და ნაწილობითი ინტეგრობა მოგვცემს:

$$\int C \frac{\varphi' dx}{\varphi^n} = -\frac{C}{(n-1)\ \varphi^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{C'}{\varphi^{n-1}} dx;$$

ეს გამოსახულება შევიტანოთ წინა დამოკიდებულებაში, მივიღებთ:

$$\int \frac{Adx}{\varphi^n} = -\frac{C}{(n-1)\ \varphi^{n-1}} + \int \frac{A_1 dx}{\varphi^{n-1}},$$

სადაც A_1-ით აღნიშნულია ახალი მრავალწევრი. თუ $n > 2$-ზე, ახალ ინტეგრალზე შეიძლება გამოვიყენოთ დაყვანის იგივე წესი და ა. შ. ჩვენ უნდა შევჩერდეთ მხოლოდ მაშინ, როცა მნიშვნელში φ-ს ხარისხი გახდება ერთის ტოლი. ჩვენ მაშინ მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\int \frac{Adx}{\varphi^n} = R(x) + \int \frac{\psi\ dx}{\varphi},$$

სადაც $R(x)$ არის x-ის რაციონალური ფუნქცია, ხოლო ψ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნაკლები ვიდრე φ-ს ხარისხი, მაგრამ შეიძლება მარტივი არ იყოს φ მრავალწევრთან. უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლისათვის აუცილებელია φ მრავალწევრის ფესვების ცოდნა, მაგრამ ინტეგრობა არ მოგვცემს მეტ რაციონალურ წევრებს. მართლაც $\frac{\psi}{\varphi}$ წილადის დაშლა მარტივ წილადებად გვაძლევს წევრებს მხოლოდ შემდეგი სახისას:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

თითოეულ ამ ინტეგრალიდან არის ტრანსცენდენტული ფუნქცია.

კერძოდ, ეს მეთოდი გვაძლევს საშუალებას გავიგოთ, იქნება თუ არა ინტეგრალი მოცემული რაციონალური ფუნქციიდან თვითონ რაციონალური. ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყველა ψ-ის ანალოგიური მრავალწევრი გახდეს ნულის ტოლი, მას შემდეგ, როცა დაყვანა გრძელდება რაც შეიძლება შორს.

შევნიშნოთ, რომ ის წესი, რომლითაც ჩვენ ვისარგებლეთ ზემოთ I_n ინტეგრალის დაყვანის დროს, არის არსებითად კერძო შემთხვევა აქ ჩამოყალიბებული მეთოდისა. ავიღოთ უფრო ზოგადი სახის ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \quad A \neq 0, \quad B^2-AC \neq 0.$$

ჩვენ გვაქვს იგივეობა:

$$A\,(Ax^2+2Bx+C)-(Ax+B)^2=AC-B^2,$$

რომელიც გვაძლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ მოცემული ინტეგრალი შემდეგი სახით:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{A}{AC-B^2} \int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{AC-B^2} \int (Ax+B)\, \frac{(Ax+B)\,dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}.$$

თუ უკანასკნელ ინტეგრალზე გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრობის ხერხს, მივიღებთ:

$$\int (Ax+B)\, \frac{Ax+B}{(Ax^2+2Bx+C)^n}\, dx = -\frac{Ax+B}{2\,(n-1)\,(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}$$

$$+\frac{A}{2n-2} \int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}},$$

და წინა გამოსახულება ღებულობს სახეს:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{Ax+B}{2\,(n-1)\,(AC-B^2)\,(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}} +$$

$$+\frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{A}{AC-B^2} \int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}.$$

ამგვარადვე თუ განვაგრძობთ, მივალთ ინტეგრალამდე:

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$$

რომელიც გამოისახება ლოგარითმებში, როცა $B^2-AC>0$, და გამოისახება arc tg-ში, როცა $B^2-AC<0$.

ავიღოთ კიდევ ინტეგრალი:

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\, dx.$$

ჩვენ გვაქვს იგივურად:

$$5x^3+3x-1=6x\,(x^2+1)-(x^3+3x+1);$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx = \int \frac{6x\,(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx - \int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

პირველი ინტეგრალი ნაწილობით ვაინტეგროთ, მივიღებთ:

$$\int x\,\frac{6\,(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx = \frac{-x}{(x^3+3x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^3+3x+1)^2},$$

და, მაშასადამე, გვექნება:

$$\int \frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx = \frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჰ ე რ მ ი ტ ი ს მეთოდის გამოყენების დროს უნდა ამოიხსნას შემდეგი ამოცანა. მ ო ც ე მ უ ლ ი ა ს ა მ ი მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი: A, B და C შ ე ს ა ბ ა მ ა დ m-უ რ ი, n-უ რ ი და p-უ რ ი ხ ა რ ი ს ხ ე ბ ი ს ა, მ ა ს თ ა ნ A და B მ ა რ ტ ი ვ ი ა ე რ თ მ ა ნ ე თ თ ა ნ; მ ო ვ ძ ე ბ ნ ო თ ო რ ი ს ხ ვ ა u და v მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ი ს ე, რ ო მ ი გ ი ვ უ რ ა დ ი ყ ო ს $Au+Bv=C$.

რომ მოვძებნოთ რაც შეიძლება დაბალი ხარისხების მრავალწევრები, რომლებიც ჩვენს ამოცანას დააკმაყოფილებენ, პირველად ვიგულისხმოთ, რომ p არ აღემატება $m+n-1$-ს. მაშინ u და v-თ შეიძლება მივიღოთ მრავალწევრები შესაბამად $(n-1)$-სა და $(m-1)$ ხარისხებისა; უცნობი $m+n$ კოეფიციენტი განისაზღვრება $m+n$ არა ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა სისტემიდან, რომლის დეტერმინანტი არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს; წინააღმდეგ შემთხვევაში, შეიძლებოდა ისეთი ორი u და v მრავალწევრის მოძებნა ხარისხებით არა უმეტესი ვიდრე $(n-1)$-სა და $(m-1)$-ს, რომლებიც დააკმაყოფილებენ იგივეობას $Au+Bv=0$; საიდანაც გამომდინარეობს, რომ A და B-ს უნდა ჰქონდეს საერთო გამყოფი.

თუ C მრავალწევრი არის $(m+n)$ ან უფრო მაღალ ხარისხის, მაშინ ჩვენ C-ს გავყოფთ AB-ზე ისე, რომ მივიღოთ C' ნაშთი არა უმეტესი ვიდრე $(m+n-1)$ ხარისხისა: $C'=ABQ+C'$. მივიღოთ $u-BQ=u_1$, მაშინ დამოკიდებულება $Au+Bv=C$ წარმოგვიდგება სახით:

$$Au_1+Bv=C',$$

და ამრიგად მივალთ წინა შემთხვევაზე.

ინტეგრალები: $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right) dx$. ბუნებრივია გადავიდეთ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალებიდან ირაციონალური ფუნქციების ინტეგრალების განხილვაზე. დავიწყებთ იმ შემთხვევიდან, როცა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დგას რაციონალური ფუნქცია x-სა და მეორე ხარისხის მრავალწევრიან კვადრატული ფესვისა. ფესვის მოსპობისათვის საკმარისია მოვახდინოთ აქ უბრალო ცვლადის შეცვლა და დავალთ წინა შემთხვევაზე. ცვლადის ეს შეცვლა თავისთავად ცხადია, როცა ფესვის ქვეშ მდგომი მრავალწევრი გადაიქცევა პირველი ხარისხის ორწევრად $ax+b$. თუ აღვნიშნავთ $ax+b=t^2$, მივიღებთ:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax+b}\right) dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right) \frac{2t\,dt}{a}.$$

და ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მდგომი ახალი ფუნქცია რაციონალურია.

როცა რადიკალის ნიშნის ქვეშ მყოფი მრავალწევრი მეორე ხარისხისაა და აქვს ორი ნამდვილი a და b ფესვი, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)}=(x-b)\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}},$$

და საკმარისია მივიღოთ

$$\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}}=t, \quad \text{ანუ} \quad x=\frac{Aa-bt^2}{A-t^2},$$

რომ ირაციონალობა მოისპოს.

როცა რადიკალის ნიშნის ქვეშ მყოფ მრავალწევრს აქვს წარმოსახვითი ფესვები, მაშინ ეს ხერხი მიგვიყვანდა წარმოსახვითი სიმბოლოებზე. რომ ახლო მივიდეთ საკითხის არსებით მხარესთან, შევნიშნოთ, რომ თუ აღვნიშნავთ

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

რადიკალს y-ით, მაშინ x და y იქნება კოორდინატები მრუდის იმ წერტილისა, რომელიც გამოისახება განტოლებით:

$$y^2=Ax^2+2Bx+C, \tag{1}$$

და ამოცანა დაიყვანება მეორე რიგის მრუდის წერტილის კოორდინატების გამოსახვაზე რაიმე პარამეტრის რაციონალური ფუნქციის სახით. გეომეტრიულად ცხადია, რომ ეს შესაძლოა. მართლაც, თუ ამ მრუდის რაიმე (α, β) წერტილზე გავიყვანთ ცვლად გამკვეთს

$$y-\beta=t(x-\alpha)$$

მაშინ ცხადია, რომ ამ გამკვეთისა და მრუდის გადაკვეთის მეორე წერტილის კოორდინატები მიიღება პირველი ხარისხის განტოლებიდან და იქნება, მაშასადამე, რაციონალური ფუნქციები t-სი.

თუ $Ax^2+2Bx+C$ სამწევრს აქვს წარმოსახვითი ფესვები, მაშინ A კოეფიციენტი უნდა იყოს დადებითი, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს სამწევრი იქნებოდა უარყოფითი x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. ამ შემთხვევაში კონუსური კვეთი (1) არის ჰიპერბოლი და ამ ჰიპერბოლს თუ გადავკვეთავთ წრფეებით, რომლებიც პარალელურია მისი ერთერთი ასიმპტოტისა,

$$y=x\sqrt{A}+t,$$

მაშინ გადაკვეთის წერტილს კოორდინატებისათვის მივიღებთ:

$$x=\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}; \quad y=t+\sqrt{A}\,\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}.$$

როცა A უარყოფითია, მაშინ მეორე რიგის მრუდი ელიფსია და

$$Ax^2+2Bx+C$$

სამწევრს უნდა ჰქონდეს ორი ნამდვილი ფესვი, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს სამწევრი იქნება უარყოფითი x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის. ცვლადის ის გარდაქმნა, რომელიც ზემოთ იყო ნაჩვენები, არის სწორედ ის, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ, თუ მრუდს გადავკვეთთ მოძრავი გამკვეთით

$$y=t(x-a).$$

ვთქვათ, მაგალითად, გამოსათვლელია ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{(x^2+k)\sqrt{x^2+k}}.$$

მეორე რიგის დამხმარე მრუდი $y^2=x^2+k$ არის ჰიპერბოლი, და თუ გადავკვეთთ მას ასიმპტოტის პარალელური წრფით $x+y=t$, მივიღებთ გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებისათვის გამოსახულებას:

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{t}\right), \quad y=\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{k}{t}\right),$$

და შემდეგ

$$dx=\frac{dt}{2}\left(\frac{t^2+k}{t^2}\right), \quad \int \frac{dx}{y^3}=\int \frac{4t\,dt}{(t^2+k)^2}=-\frac{2}{t^2+k}.$$

თუ დავუბრუნდებით x ცვლადს, მივიღებთ:

$$\int \frac{dx}{(x^2+k)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-\sqrt{x^2+k}}{k\sqrt{x^2+k}}=\frac{x}{k\sqrt{x^2+k}}-\frac{1}{k},$$

მარჯვენა ნაწილში უნდა იყოს კიდევ ნებისმიერი მუდმივი. საზოგადოდ, თუ $AC-B^2$ არ უდრის ნულს, მაშინ გვაქვს:

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{AC-B^2}\,\frac{Ax+B}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

ზოგიერთ შემთხვევაში ირაციონალობის მოსპობა არ არის საჭირო და ინტეგრალი, მარტივად, უშუალოდ მოიძებნება. როგორც მაგალითი განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

თუ A კოეფიციენტი არის დადებითი, მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{A^2x^2+2ABx+AC}}=\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{(Ax+B)^2+AC-B^2}},$$

და თუ მივიღებთ $Ax+B=t$, მაშინ გვექნება:

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+AC-B^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln(t+\sqrt{t^2+AC-B^2}).$$

როცა x-ს ცვლადს დავუბრუნდებით, მივიღებთ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\ (Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}).$$

თუ x^2-ის კოეფიციენტი უარყოფითია, მაშინ ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}}=\int\frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{AC+B^2-(Ax-B)^2}},\quad A>0;$$

აქ $AC+B^2$ სიდიდე უნდა იყოს დადებითი, და თუ აღვნიშნავთ

$$Ax-B=t\sqrt{AC+B^2},$$

ჩვენ დავალთ ინტეგრალამდე

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\arcsin t.$$

ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\arcsin\frac{Ax-B}{\sqrt{AC+B^2}}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ როცა x იცვლება სამწევრის ორ ფესვს შორის, მაშინ arc sin-ის ქვეშ ფუნქცია იცვლება -1-სა და $+1$ ს შორის.

როცა $A=0$ და $B\neq 0$, მაშინ ინტეგრალი არის ალგებრული

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2Bx+C}}=\frac{1}{B}\sqrt{2Bx+C}.$$

ინტეგრალები სახისა

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

დაიყვანებიან წინა შემთხვევაზე ჩასმით $x=a+\frac{1}{y}$. მართლაც, ჩვენ გვაქვს

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{A_1y^2+2B_1y+C_1}},$$

სადაც

$$A_1=Aa^2+2Ba+C,\ B_1=Aa+B,\ C_1=A.$$

აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი იქნება ალგებრული მხოლოდ მაშინ, როცა a არის ფესვი იმ სამწევრის, რომელიც იმყოფება რადიკალის ნიშნის ქვეშ.

განვიხილოთ კიდევ ინტეგრალი $\int \sqrt{x^2+A}\, dx$. ნაწილობითი ინტეგრობით მივიღებთ:

$$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+A}};$$

მეორე მხრით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \sqrt{x^2+A}\, dx - \int \frac{A\, dx}{\sqrt{x^2+A}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2+A}\, dx - A \ln (x + \sqrt{x^2+A});$$

ამ ორი დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ:

$$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2} \ln (x + \sqrt{x^2+A}), \tag{2}$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{2} \ln (x + \sqrt{x^2+A}). \tag{3}$$

სწორედ ასევე შეიძლება გამოვიყვანოთ ფორმულები:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \tag{4}$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}. \tag{5}$$

ჰიპერბოლის ფართობი. ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალები გვხვდება ელიფსის ან ჰიპერბოლის სექტორის ფართობის გამოთვლის დროს. ავიღოთ ჰიპერბოლი:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

და მოვძებნოთ ფართობი AMP სეგმენტისა, შემოსაზღვრული AM რკალით, Ox ღერძით და MP ორდინატით (ნახ. 15a). ეს ფართობი ტოლია განსაზღვრული ინტეგრალისა:

$$\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\, dx,$$

რომელიც (2) ფორმულის ძალით, უდრის:

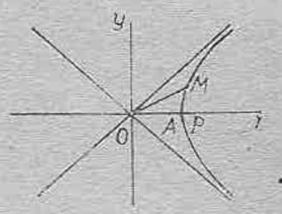
$$\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right].$$

მაგრამ

$$MP=y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

და ნამრავლი

$$\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,x\sqrt{x^2-a^2}$$



ნახ. 15a.

წარმოადგენს OMP სამკუთხედის ფართობს; აქედან გამომდინარეობს, რომ S ფართობს OAM სექტორისას მოთავსებულს AM რკალსა, OA და OM რადიუსებს შორის, აქვს გამოსახულება:

$$S=\frac{1}{2}\,ab\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)=\frac{1}{2}\,ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

ეს ფორმულა გვაძლევს საშუალებას გამოვსახოთ ჰიპერბოლის M წერტილის x და y კოორდინატები S ფართობის საშუალებით. მართლაც, წინა განტოლებიდან და ჰიპერბოლის განტოლებიდან ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=e^{\frac{2S}{ab}},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=e^{-\frac{2S}{ab}},$$

და მაშასადამე,

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}}+e^{-\frac{2S}{ab}}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}}-e^{-\frac{2S}{ab}}\right).$$

მარჯვენა მხარეზე მდგომ ფუნქციებს ეწოდება ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი ს ი ნ უ ს ი და ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი კ ო ს ი ნ უ ს ი:

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x=a\operatorname{ch}\frac{2S}{ab},\quad y=b\operatorname{sh}\frac{2S}{ab}.$$

ჰიპერბოლურ ფუნქციებს აქვთ თვისებები, ანალოგიური ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა [1]; მაგალითად, ჩვენ გვაქვს:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} y\operatorname{sh} x.$$

სრულიად ამგვარადვე შეგვიძლია მოვძებნოთ, რომ ელიფსის წერტილის კოორდინატები გამოისახებიან სექტორის ფართობით შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$x=a\cos\frac{2S}{ab},\quad y=b\sin\frac{2S}{ab}.$$

[1] ჰ უ ე ლ ი ს (Houël) Recueil des formules numériques შეიცავს ლოგარითმულ ცხრილს ამ ფუნქციებისას არგუმენტის დადებითი მნიშვნელობებისათვის.

ერთეული რადიუსის მქონე წრისათვის, და ტოლგვერდა ჰიპერბოლისათვის, ერთეულის ტოლი ნახევარ ღერძებით, ეს ფორმულები გარდაიქმნებიან, შესაბამად, შემდეგნაირად:

$$x=\cos 2S,\quad y=\sin 2S;$$
$$x=\operatorname{ch} 2S,\quad y=\operatorname{sh} 2S,$$

ჰიპერბოლური ფუნქციები იმავე როლს თამაშობენ ტოლგვერდა ჰიპერბოლის მიმართ, რასაც ტრიგონომეტრიული—წრის მიმართ.

პარაბოლის გაწრფევადობა. მოვძებნოთ $2py=x^2$ პარაბოლის რკალის სიგრძე O წვეროსა და M წერტილს შორის. ჩვენ გვაქვს:

$$\text{arc } OM=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^x\frac{\sqrt{x^2+p^2}}{p}\,dx,$$

ანუ თუ გამოვიყენებთ (2) ფორმულას:

$$\text{arc } OM=\frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p}+\frac{p}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right).$$

მარჯვენა ნაწილის ალგებრული წევრი წარმოადგენს MT მხების სიგრძეს. მართლაც, ცნობილია, რომ $OT=\frac{x}{2}$; ამიტომ

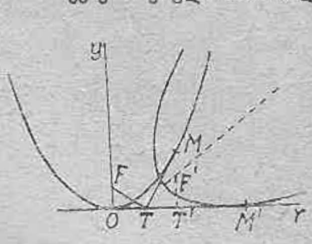
$$MT^2=y^2+\frac{x^2}{4}=\frac{x^4}{4p^2}+\frac{x^2}{4}=\frac{x^2(x^2+p^2)}{4p^2}.$$

შევაერთოთ T წერტილი F ფოკუსთან; MTF კუთხე არის სწორი და ჩვენ გვაქვს:

$$FT=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{p^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+p^2}.$$

აქედან შეიძლება გამოვიყვანოთ პარაბოლის შემდეგი საინტერესო თვისება.

დავუშვათ, რომ პარაბოლი უსრიალოდ გორავს Ox ღერძზე. მოვძებნოთ გეომეტრიული ადგილი წერტილებისა, აღწერილი ფოკუსის მიერ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ფოკუსი უცვლელად არის შეკავშირებული პარაბოლთან. თუ პარაბოლი შეეხება Ox ღერძს M' წერტილში, მაშინ ჩვენ გვექნება $OM'=\text{arc } OM$; T წერტილი გადავა T' წერტილში, ისე რომ $M'T'=MT$, და F ფოკუსი გადავა F' წერტილში, რომელსაც მივიღებთ, თუ Oy ღერძის პარალელურ წრფეზე გადავზომავთ სიგრძეს $T'F'=TF$. F' წერტილის X და Y კოორდინატებს ექნება შემდეგი მნიშვნელობები:



ნახ. 15b.

$$X=\text{arc } OM-MT=\frac{p}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right),$$
$$Y=TF=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+p^2}.$$

ამ ორი დამოკიდებულებიდან თუ გამოვრიცხავთ x, მივიღებთ ფოკუსის მიერ აღწერილ გეომეტრიულ ადგილის განტოლებას. პირველი განტოლებიდან გვაქვს:

$$x+\sqrt{x^2+p^2}=pe^{\frac{2X}{p}};$$

ამ განტოლებას შეგვიძლია დავუმატოთ კიდევ

$$x - \sqrt{x^2+p^2} = -pe^{-\frac{2X}{p}},$$

ვინაიდან მარცხენა ნაწილების ნამრავლი უდრის—p^2-ს. გამოკლება გვაძლევს:

$$\sqrt{x^2+p^2} = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}\right),$$

და საძიებელი განტოლება იქნება:

$$Y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}\right) = \frac{p}{2}\operatorname{ch}\frac{2X}{p}.$$

ადვილად ავაგებთ ამ მრუდს, რომელსაც *ჯაჭვწირი* ეწოდება; თავისი სახით მას აქვს მსგავსება პარაბოლთან.

98. უნიკურსალური მრუდეები. განვიხილოთ ახლა საზოგადოდ ინტეგრალები ალგებრული ფუნქციებიდან. ვთქვათ

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

არის ალგებრული მრუდის განტოლება და $R(x, y)$ — რაციონალური ფუნქცია x-სა და y-ს. ვიგულისხმოთ, რომ $R(x, y)$-ში y შევცვალეთ მე-(6) განტოლების ერთერთი ფესვით; მაშინ მივიღებთ მხოლოდ x ცვლადის ფუნქციას, და ინტეგრალს:

$$\int R(x, y)\,dx$$

ეწოდება *აბელის ინტეგრალი*, შეკავშირებული მე-(6) მრუდთან. თუ მოცემული მრუდი და $R(x, y)$ ფუნქცია ნებისმიერია, მაშინ ეს ინტეგრალები გამოსახავენ ტრანსცედენტულ ფუნქციებს. მაგრამ კერძო შემთხვევაში, როცა მოცემული მრუდი უნიკურსალურია, ე. ი. ამ მრუდის წერტილების x და y კოორდინატები რაციონალურად გამოიხატებიან ცვლადი t პარამეტრის ფუნქციის სახით, მაშინ აბელის ინტეგრალები, რომლებიც შეკავშირებული არიან ამ მრუდთან, დაიყვანება ინტეგრალებზე რაციონალური ფუნქციებიდან. მართლაც, ვთქვათ

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

არის x და y კოორდინატების გამოსახულება t-ს ფუნქციის სახით. თუ t-ს მივიღებთ ახალ დამოუკიდებელ ცვლადად, გვექნება:

$$\int R(x, y)\,dx = \int R[f(t), \varphi(t)]\,f'(t)\,dt,$$

და ახალი ფუნქცია ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, ცხადია არის რაციონალური.

ანალიზური გეომეტრიის კურსში[1] მტკიცდება, რომ ყოველი n-ური რიგის უნიკურსალურ მრუდს აქვს $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ორმაგი წერტილი და, პირიქით, ყოველი მრუდი n-ური რიგისა, რომელსაც აქვს ორმაგი წერტილების ასეთი რიცხვი, არის უნიკურსალური. მოვაგონებთ მხოლოდ, თუ როგორ შეიძლება მივიღოთ კოორდინატების გამოსახვა დამხმარე პარამეტრის ფუნქციის სახით. ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის C_n მრუდი, რომელსაც აქვს $\delta=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ორმაგი წერტილებისა; C_n მრუდის ამ δ ორმაგი და $n-3$ მარტივ წერტილებზე გავიყვანოთ $(n-2)$ რიგის მრუდთა კონა; ეს წერტილები სავსებით განსაზღვრავენ $(n-2)$ რიგის მრუდთა კონას, რადგანაც

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-3=\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1,$$

და $(n-2)$ რიგის მრუდის განსაზღვრელად საჭიროა $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ წერტილი. ვთქვათ $P(x, y)+tQ(x,y)=0$ არის ამ კონის განტოლება, სადაც t-თი აღნიშნულია ნებისმიერი პარამეტრი. კონის ყოველი მრუდი გადაკვეთს C_n მრუდს $n(n-2)$ წერტილზე; ამათგან ზოგიერთი გადაკვეთის წერტილები არ არის დამოკიდებული t-ზე, სახელდობრ $n-3$ მარტივი წერტილი და δ ორმაგი წერტილი, რომლებიდან თითოეული განიხილება როგორც გადაკვეთის ორი წერტილი, არ არის დამოკიდებული t-ზე. მაგრამ

$$n-3+2\delta=n-3+(n-1)(n-2)=n(n-2)-1;$$

ამრიგად გვრჩება მხოლოდ ერთი გადაკვეთის წერტილი, რომელიც იცვლება t-თან ერთად. ამ წერტილის კოორდინატები მიიღება პირველი ხარისხის ორი განტოლებიდან, რომლის კოეფიციენტები იქნება t-ს მთელი მრავალწევრები, ამიტომაც ეს კოორდინატები იქნება t-ს რაციონალური ფუნქციები. შეიძლება აგრეთვე სარგებლობა $(n-1)$ რიგის იმ მრუდთა კონით, რომლებიც გაივლის $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ორმაგ წერტილზე და $2n-3$ მარტივ წერტილზე, რომლებიც ნებისმიერად აღებულია C_n მრუდზე.

თუ $n=2$, მაშინ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}=0$; ამრიგად, მეორე რიგის ყოველი მრუდი, როგორც ეს უკვე იყო ნაჩვენები, უნიკურსალურია. თუ $n=3$, მაშინ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}=1$; მაშასადამე, მესამე რიგის მრუდეებიდან უნიკურსალური იქნება ის, რომელსაც აქვს ერთი ორმაგი წერტილი. თუ მივიღებთ ორმაგ წერტილს კოორდინატთა სათავედ, მაშინ მესამე რიგის მრუდის განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახემდე:

$$\varphi_3(x, y)+\varphi_2(x, y)=0,$$

---

[1] იხ. მაგალითად, Niewenglowski, Cours de Géometrie analytique, ტ. II გვ. 99–114.

სადაც φ_3 და φ_2 არიან ერთგვაროვანი მრავალწევრები მესამე და მეორე რიგისა შესაბამად. გამკვეთი $y=tx$, რომელიც გაივლის ორმაგ წერტილზე, მრუდს კიდევ გადაკვეთს მხოლოდ ერთ წერტილზე, რომელიც იცვლება t-თან ერთად; ამ წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$x=-\frac{\varphi_2(1,\ t)}{\varphi_3(1,\ t)},\quad y=-\frac{t\,\varphi_2(1,\ t)}{\varphi_3(1,\ t)}.$$

მეოთხე რიგის უნიკურსალურ მრუდს აქვს სამი ორმაგი წერტილი. რომ მივიღოთ მისი წერტილების კოორდინატების გამოსახვა პარამეტრის საშუალებით, შევადგინოთ მეორე რიგის იმ მრუდთა კონის განტოლება, რომლებიც გაივლიან სამ ორმაგ წერტილზე და ერთ მარტივ წერტილზე, რომელიც აღებულია ნებისმიერად მრუდზე. ამ კონის ყოველი მრუდი გადაჰკვეთს მეოთხე რიგის მრუდს მხოლოდ ერთ წერტილზე, რომელიც იცვლება პარამეტრთან ერთად. მაგალითად, თუ შევადგენთ განტოლებას გადაკვეთის წერტილის აბსცისისათვის, მაშინ ეს განტოლება მას შემდეგ, როცა მოვახდენთ მის განთავისუფლებას მამრავლებისაგან, რომლებიც შეესაბამებიან უკვე ცნობილ ფესვებს, გადაიქცევა პირველი ხარისხის განტოლებად და x-სი განისაზღვრება პარამეტრის რაციონალური ფუნქციის სახით; თანაგვარადვე მოვიქცევით y კოორდინატის მისაღებად.

ავიღოთ, მაგალითად, ლემნისკატი:

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$

რომელსაც აქვს ერთი ორმაგი წერტილი კოორდინატთა სათავეში, და ამის გარდა ორი ორმაგი წერტილი უსასრულოდ დაშორებულ წრიულ წერტილებში. წრეწირი:

$$x^2+y^2=t(x-y),$$

რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და ეხება ლემნისკატის ერთერთ შტოს ამ წერტილში, ჰკვეთს ამ მრუდს მხოლოდ ერთ წერტილში, რომელიც იცვლება t-თან ერთად. მოყვანილი ორი განტოლებიდან ადვილად მიიღება:

$$t^2(x-y)^2=a^2(x^2-y^2);$$

აქედან, $x-y$-ზე გაყოფის შემდეგ დაგვრჩება:

$$t^2(x-y)=a^2(x+y).$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს წრფეს, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და რომელიც ჰკვეთს წრეწირს სათავიდან განსხვავებულ წერტილზე, კოორდინატებით:

$$x=\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\quad y=\frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

ამ ფორმულების მიღება შეიძლება უფრო მარტივად, თუ გამოვიყენებთ შემდეგ ხერხს, რომელიც გამოდგება მეოთხე რიგის ყოველი უნიკურსალური მრუდისათვის, რომლის ერთი ორმაგი წერტილი ცნობილია. გადავკვეთოთ ლემნისკატი $y=\lambda x$ გამკვეთით; იგი გადაკვეთს მრუდს ორ წერტილში, კოორდინატებით:

$$x=\frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2},\ y=\lambda x.$$

რადიკალის ნიშნის ქვეშ დგას მეორე ხარისხის მრავალწევრი, და რომ მოვსპოთ ირაციონალობა, საკმარისია მივიღოთ $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$ (§ 105). ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ეს მიგვიყვანს წინა ფორმულებამდე.

შენიშვნა 1. თუ ბრტყელ მრუდს აქვს მაღალი ჯერადობის განკუთრი წერტილები, მაშინ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ყოველი მათგანი ტოლფასია რამოდენიმე ორმაგი წერტილისა. იმისათვის, რომ მრუდი იყოს უნიკურსალური, საკმარისია, რომ ეს განკუთრი წერტილები იყვნენ ტოლფასი $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ორმაგი წერტილისა. მაგალითად, n-ური რიგის მრუდი, რომელსაც აქვს $(n-1)$ რიგის ჯერადი წერტილი, იქნება უნიკურსალური, რადგანაც ამ ჯერად წერტილზე გამავალი წრფე ჰკვეთს მრუდს მხოლოდ ერთ ცვლად წერტილში.

შენიშვნა 2. სხვა ინტეგრალებიდან, რომლებშიაც მარტივად შეიძლება ირაციონალობის მოსპობა, ჩვენ დავასახელებთ კიდევ შემდეგს:

$$\int R\left[x,(ax+b)^{\frac{1}{q}}\right]dx,\quad \int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,dx,$$

$$\int R(x^{\alpha},x^{\alpha'},x^{\alpha''},\ldots,)\,dx$$

სადაც R არის რაციონალური ფუნქცია, ხოლო $\alpha,\alpha',\alpha'',\ldots$ მაჩვენებლები არის რაციონალური რიცხვები. პირველ ინტეგრალში საკმარისია მივიღოთ $ax+b=t^q$. მეორე ინტეგრალში თუ მივიღებთ

$$ax+b=t^2,$$

მაშინ გვექნება მხოლოდ ერთი კვადრატული ფესვი მეორე ხარისხის მრავალწევრიდან, და საკმარისია ახალი ცვლადით შეცვლა, რომ მოვსპოთ ეს ირაციონალობა. უკანასკნელად, მესამე ინტეგრალში შეგვიძლია მივიღოთ $x=t^D$, სადაც D არის მთელი რიცხვი შერჩეული იმნაირად, რომ ყველა ნამრავლი $D\alpha$, $D\alpha'$, $D\alpha''$, ... იყოს მთელი რიცხვები.

99. ალგებრულ-ლოგარითმული ინტეგრალები. წინა პარაგრაფში დამტკიცებულის ძალით, აბელის ყოველი ინტეგრალი, რომელიც დაკავშირებულია უნიკურსალურ მრუდთან, არის ალგებრულ-ლოგარითმული ფუნქცია, ე. ი. დაიშლება x და y-ის რაციონალურ ფუნქციად და რაციონალური ფუნქციების ლოგარითმების ჯამად, რომლებსაც მუდმივი კოეფიციენტები აქვთ. თუ მე (6) მრუდი არ არის უნიკურსალური, მაშინ მასთან დაკავშირებული აბელის ინტეგრალი ზოგად შემთხვევაში ტრანსცენდენტული ფუნქციაა, რომლის გამოსახვა მხოლოდ ლოგარითმებით შეუძლებელია.

მიუხედავად ამისა როგორიც არ უნდა იყოს დამოკიდებულება:

$$F(x,y)=0$$

ყოველთვის არსებობს უსასრულო სიმრავლე ისეთი რაციონალური $R(x, y)$ ფუნქციებისა, რომ ინტეგრალი $\int R(x, y)\,dx$ იქნება ალგებრულ-ლოგარითმული, რადგან წარმოებული ასეთი ფუნქციებისა არის x და y-ის რაციონალური ფუნქცია. მაგრამ მოცემული $R(x, y)$ ფუნქციით, საზოგადოდ ძნელია გაგება იქნება თუ არა $\int R(x, y)\,dx$ ინტეგრალი ალგებრულ-ლოგარითმული.

კერძოდ ამას ექნება ადგილი, თუ $R(x, y)\,dx$ შესაძლოა დაყვანილი იქნას რაციონალურ დიფერენციალამდე რაიმე ალგებრული (არ არის სავალდებულო რაციონალური) ჩასმით.

უკანასკნელ მაგალითთან მჭიდროდ არის შეკავშირებული შემდეგი სახის კლასი დიფერენციალებისა:

$$x^m (ax^n + b)^p \, dx,$$

რომელთაც *დიფერენციალური ბინომი* ეწოდება. ვიგულისხმოთ, რომ სამივე მაჩვენებელი m, n, p—*რაციონალური რიცხვებია*; თუ p—მთელი რიცხვია, მაშინ ზემოთაღნიშნული დებულების ძალით, ეს დიფერენციალი შეიძლება გავხადოთ რაციონალური, თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას $x = t^{D}$. რომ მივიღოთ ინტეგრადობის ახალი შემთხვევები, მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$ax^n + b = t;$$

მივიღებთ:

$$x = \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{na}\left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx = \frac{1}{na}\int t^p \left(\frac{t-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt.$$

ახალი ინტეგრალი იმავე სახისაა, რაც პირვანდელი, მხოლოდ p მაჩვენებელი შეცვლილია $\frac{m+1}{n} - 1$ მაჩვენებლით; მაშასადამე, ინტეგრობა შეიძლება შევასრულოთ, თუ $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია.

მეორეს მხრით, წინა ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\int x^{m+np} (a + bx^{-n})^p \, dx,$$

და ჩვენ ვხედავთ, რომ არსებობს ინტეგრადობის ახალი შემთხვევა, როცა

$$\frac{m+np+1}{n} = \frac{m+1}{n} + p$$

მთელი რიცხვია. ამრიგად, ინტეგრობა შეგვიძლია შევასრულოთ იმ შემთხვევაში, თუ p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ რიცხვებიდან ერთერთი მთელი რიცხვია. ეს სამი შემთხვევა არის ერთად ერთი, როცა m, n, p რაციონალური რიცხვების შემთხვევაში ინტეგრალი გამოისახება ელემენტარული სიმბოლოების სასრული რიცხვით.

ინტეგრაციის შესრულებისათვის, როცა ეს შესაძლოა, ხელსაყრელია ინტეგრალი დავიყვანოთ პირველად უფრო მარტივ სახემდე, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ორ მაჩვენებელს. ამისათვის მივიღოთ $ax^n=bt$; გვექნება:

$$x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}},\ dx=\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

$$\int x^m (ax^n+b)^p\, dx=\frac{b^p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^p\, dt.$$

თუ მუდმივ მამრავლს მხედველობაში არ მივიღებთ და აღვნიშნავთ

$$q=\frac{m+1}{n}-1,$$

მაშინ დავალთ ინტეგრალამდე

$$\int t^q (1+t)^p\, dt,$$

და ინტეგრადობის შემთხვევები იქნება შემდეგი: p, q, $p+q$, რ ი ც ხ ვ ე ბ ი დ ა ნ ე რ თ ე რ თ ი მ ა ი ნ ც უ ნ დ ა ი ყ ო ს მ თ ე ლ ი.

თუ p მთელია და $q=\frac{r}{s}$, მაშინ მივიღოთ $t=u^s$. თუ q მთელია და $p=\frac{r}{s}$, მაშინ მივიღოთ $1+t=u^s$; და უკანასკნელად, თუ $p+q$—მთელია, მაშინ ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt,$$

და ირაციონალობის მოსპობისათვის საჭიროა მივიღოთ მხოლოდ $1+t=tu^s$, თუ $p=\frac{r}{s}$.

ავიღოთ, მაგალითად, ინტეგრალი:

$$\int x\sqrt[3]{1+x^3}\, dx;$$

აქ $m=1$, $n=3$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=1$; მაშ, აქ ჩვენ გვაქვს ინტეგრადობის შე-

მთხვევა. პირველად თუ მივიღებთ $x^3=t$, დავალთ ახალ ინტეგრალამდე

$$\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{\frac{1+t}{t}}\,dt,$$

და რადიკალის მოსასპობათ საკმარისია მოვახდინოთ მეორეჯერ ცვლადის შეცვლა $1+t=tu^3$.

100. ელიფსური და ფსევდოელიფსური ინტეგრალების დაყვანა. ვთქვათ $P(x)$ არის p-ური ხარისხის პოლინომი, რომელიც მარტივია თავისი წარმოებულთან. თუ $P(x)$ პოლინომის ხარისხი 2-ზე მეტია, მაშინ ინტეგრალი:

$$\int R\left[x, \sqrt{P(x)}\right] dx,$$

სადაც R აღნიშნავს რაციონალურ ფუნქციას x-სა და $y=\sqrt{P(x)}$ რადიკალისას, საზოგადოთ ვერ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. ასეთი სახის ინტეგრალები წარმოადგენენ კერძო შემთხვევას აბელის უფრო ზოგადი ინტეგრალებისას (§ 98). ეს ინტეგრალები შეიძლება დაიშალოს ალგებრულ და ლოგარითმულ ნაწილებად და გარკვეული სახის ინტეგრალებად, რომლებიც წარმოადგენენ ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს და ვერ გამოისახებიან ელემენტარული სიმბოლოების სასრულო რიცხვით. აქ ჩვენ მოვიყვანთ ამ გარდაქმნას.

რაციონალური $R(x, y)$ ფუნქცია წარმოადგენს x-ისა და y-ის ორი პოლინომის ფარდობას. შევცვალოთ y-ის ლუწი ხარისხები, მაგალითად y^{2q}, $[P(x)]^q$-ით, ხოლო კენტი ხარისხები, მაგალითად y^{2q+1}, $y\,[P(x)]^q$-ით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამის შემდეგ, ყოველთვის შეიძლება ჩავთვალოთ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი პირველი ხარისხის გამოსახულებებად y-ს მიმართ:

$$R(x, y)=\frac{A+By}{C+Dy},$$

სადაც A, B, C და D არიან x-ის პოლონომები. მრიცხველსა და მნიშვნელს თუ გავამრავლებთ $C-Dy$-ზე და შემდეგ y^2-ს შევცვლით $P(x)$-თ, მივიღებთ:

$$R(x, y)=\frac{F+Gy}{K}.$$

ამრიგად განსახილავი ინტეგრალი დაიშლება ორ სხვა ინტეგრალად; ერთი მათგანი $\int\frac{F\,dx}{K}$ არის ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან, ხოლო მეორე $\int\frac{Gy}{K}\,dx$ შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ასეთი სახით:

$$\int\frac{M\,dx}{N\sqrt{P(x)}},$$

სადაც M და N—პოლინომებია x-ის მიმართ. ჩვენ სწორედ უნდა შევისწავლოთ

ეს მეორე ინტეგრალი. რაციონალური $\frac{M}{N}$ წილადი შეიძლება დაიშალოს ჯამად მთელი $E(x)$ ნაწილისა და წილადი წევრებისა; ასე რომ

$$\frac{M}{N}=E(x)+\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\cdots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

სადაც ყოველი X_i პოლინომი მარტივია თავის წარმოებულთან. ამრიგად ჩვენ უნდა განვიხილოთ მხოლოდ შემდეგი ორი სახის ინტეგრალი:

$$Y_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{P(x)}};\quad Z_n=\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}.$$

თუ $P(x)$ არის p-ური ხარისხის პოლინომი, მაშინ ყველა Y_m ინტეგრალი გამოისახება $p-1$ პირველი $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$ ინტეგრალებისა და ალგებრულ ოდენობათა საშუალებით.

მართლაც, ვთქვათ რომ

$$P(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots$$

გვაქვს:

$$\frac{d}{dx}\left[x^m\sqrt{P(x)}\right]=mx^{m-1}\sqrt{F(x)}+\frac{x^m P'(x)}{2\sqrt{P(x)}}=$$
$$=\frac{2mx^{m-1}P(x)+x^m P'(x)}{2\sqrt{P(x)}};$$

აქ მრიცხველი არის $(m+p-1)$ ხარისხის პოლინომი, რომლის უფროსი წევრია $(2m+p)a_0x^{m+p-1}$. ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავაინტეგრებთ, მივიღებთ:

$$2x^m\sqrt{P(x)}=(2m+p)a_0Y_{m+p-1}+\cdots,$$

სადაც წევრები, რომლებიც არ არიან დაწერილი შეიცავენ Y ინტეგრალებს, რომელთა მაჩვენებლები ნაკლებია $m+p-1$-ზე. თუ ამ ფორმულაში მიმდევრობით მივიღებთ $m=0,1,2,\ldots,$ ჩვენ შეგვიძლია გამოვსახოთ $Y_{p-1}, Y_p, \ldots$ ალგებრული ნაწილისა და $p-1$ ინტეგრალის $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$-ს საშუალებით.

მეორე სახის ინტეგრალის შესახებ უნდა იქნეს განხილული ორი შემთხვევა იმისდა მიხედვით X მარტივია თუ არა $P(x)$-თან.

1. თუ X პოლინომი მარტივია $P(x)$-თან, მაშინ Z_n ინტეგრალი დაიყვანება ალგებრულ წევრზე, Y_k ინტეგრალების ჯამზე და ახალ ინტეგრალზე:

$$\int\frac{B\,dx}{X\sqrt{P(x)}},$$

სადაც B არის პოლინომი ხარისხით უფრო დაბალი, ვიდრე X.

ვინაიდან X პოლინომი მარტივია თავისი X' წარმოებულთან და $P(x)$-თან, ამიტომ X^n იქნება მარტივი PX' ნამრავლთან. ამიტომაც ყოველთვის შე-

იძლება მოიძებნოს ორი λ და μ პოლინომი, რომლებიც აკმაყოფილებენ იგივეობას $\lambda X^n + \mu X'P = A$; ამ შემთხვევაში ინტეგრალი დაიშლება ორ სხვა ინტეგრალად:

$$\int \frac{A\,dx}{X^n \sqrt{P(x)}} = \int \frac{\lambda\,dx}{\sqrt{P(x)}} + \int \frac{\mu \sqrt{P}\, X'}{X^n}\,dx.$$

პირველი ნაწილი არის Y ინტეგრალების ჯამი; მეორე ინტეგრალი, როცა $n > 1$, შეიძლება ნაწილობით ვაინტეგროთ; აღვნიშნოთ:

$$\mu\sqrt{P} = u, \quad v = \frac{-1}{(n-1)X^{n-1}};$$

ეს გვაძლევს:

$$\int \frac{\mu\sqrt{P}\,X'dx}{X^n} = \frac{-\mu\sqrt{P}}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{2\mu' P + \mu P'}{2X^{n-1}\sqrt{P(x)}}\,dx.$$

ახალი ინტეგრალი იმავე სახისაა, რაც პირველი, მხოლოდ X-ის ხარისხის მაჩვენებელი არის ერთი ერთეულით დაწეული. თუ განვაგრძობთ ამ რედუქციას სანამ შესაძლებელია, ე. ი. სანამ X-ის ხარისხის მაჩვენებელი ერთზე მეტია, ჩვენ მივალთ შემდეგი სახის შედეგამდე:

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}} = \int \frac{B\,dx}{X\sqrt{P}} + \int \frac{C\,dx}{\sqrt{P}} + \frac{D\sqrt{P}}{X^{n-1}},$$

სადაც B, C, D—სამი პოლინომია; ყოველთვის შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ B პოლინომის ხარისხი ნაკლებია X-ის ხარისხზე.

2. ვიგულისხმოთ, რომ X და P აქვთ საერთო D გამყოფი, ასე რომ $X = YD$, $P = SD$ და D, S, Y პოლინომებია ერთმანეთთან წყვილ-წყვილად მარტივი. შეიძლება მოიძებნოს ისეთი ორი λ და μ პოლინომი, რომ იყოს $A = \lambda D^n + \mu Y^n$; ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int \frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda\,dx}{Y^n\sqrt{P}} + \int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}}.$$

პირველ ინტეგრალს აქვს ზემოთ განხილული სახე, ხოლო რაც შეეხება ინტეგრალს:

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}},$$

სადაც D გამყოფია P პოლინომისა, იგი დაიყვანება ალგებრულ წევრამდე და Y ინტეგრალამდე.

მართლაც, რადგანაც D^n პოლინომი მარტივია $D'S$ ნამრავლთან, ამიტომ შეიძლება მოიძებნოს ისეთი ორი λ_1 და μ_1 პოლინომი, რომ იყოს

$$\lambda_1 D^n + \mu_1 D'S = \mu,$$

და განსახილავი ინტეგრალი შეიძლება წარმოგვიდგეს შემდეგი სახით:

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\, dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{\mu_1 S D'}{D^n \sqrt{P}}\, dx.$$

თუ P-ს შევცვლით SD-თი, ამ ინტეგრალებიდან მეორე წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int \mu_1 \sqrt{S}\, \frac{D'}{D^{n+\frac{1}{2}}}\, dx$$

იგი ნაწილობით ვაინტეგროთ, თუ აღვნიშნავთ:

$$u = \mu_1 \sqrt{S}, \quad v = \frac{-1}{n - \frac{1}{2}} \frac{1}{D^{n-\frac{1}{2}}}.$$

მივიღებთ:

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1 dx}{\sqrt{P}} - \frac{\mu_1 \sqrt{S}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) D^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2n-1} \int \frac{2\mu_1' S + \mu_1 S'}{D^{n-1} \sqrt{P}}\, dx.$$

ჩვენ გვაქვს აგრეთვე რედუქციის ფორმულა. ვინაიდან ჩვენს გამოსახულებაში შედის ნაწევროვანი $n - \frac{1}{2}$ მაჩვენებელი, ამიტომ რედუქცია შეიძლება განვაგრძოთ იმ წევრამდე, სადაც D იქნება მნიშვნელში პირველ ხარისხში და ჩვენ დავალთ შემდეგი სახის შედეგამდე:

$$\int \frac{\mu\, dx}{D^n \sqrt{P}} = \frac{K \sqrt{P}}{D^n} + \int \frac{H\, dx}{\sqrt{P}},$$

სადაც H და K პოლინომებია.

ამრიგად, ყოველი ინტეგრალი $\int \frac{M\, dx}{N \sqrt{P}}$ დაიყვანება ალგებრულ ნაწილამდე და შემდეგი

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{P}}, \quad \int \frac{X_1\, dx}{X \sqrt{P}}$$

სახის ინტეგრალების ჯამამდე, სადაც m არ არის $p-2$-ზე მეტი, ხოლო X პოლინომი მარტივია თავის X' წარმოებულთან და P პოლინომთან და X_1 პოლინომის ხარისხი დაბალია X პოლინომის ხარისხზე. ეს დაყვანა მოითხოვს მხოლოდ პოლინომების შეკრებას, გამრავლებას და გაყოფას.

თუ $X=0$ განტოლების ფესვები ცნობილია, მაშინ რაციონალური $\frac{X_1}{X}$ წილადი შეიძლება დაიშალოს შემდეგი სახის მარტივი წილადების ჯამად

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Bx+C}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

სადაც A, B, C მუდმივებია, და ჩვენ ვღებულობთ ორ ახალ სახის ინტეგრალს:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{(Bx+C)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]\sqrt{P(x)}},$$

რომლებიც შეგვიძლია დავიყვანოთ მხოლოდ პირველ ინტეგრალამდე, თუ ჩვენ დაუშვებთ, რომ a პარამეტრს აქვს ვითარსი მნიშვნელობებიც. ასეთ ინტეგრალებს ეწოდება **მესამე სახის** ინტეგრალები. **პირველი სახის** ინტეგრალებს უწოდებენ Y_m სახის ინტეგრალებს, სადაც m ნაკლებია ვიდრე $\frac{p}{2}-1$; როცა m უდრის ან მეტია $\frac{p}{2}-1$-ზე, მაშინ Y_m ინტეგრალებს ეწოდება **მეორე სახის** ინტეგრალები. პირველი სახის ინტეგრალებს აქვთ დამახასიათებელი თვისებები,—ისინი ინარჩუნებენ სასრულო მნიშვნელობას, როცა ზედა საზღვარი უსაზღვროდ იზრდება ან კიდევ როცა ზედა საზღვარი გახდება ტოლი $P(x)$ პოლინომის ფესვისა (§ 89, 90). რაც შეეხება მეორე და მესამე სახის ინტეგრალებს, მათ შორის ზემოთმოყვანილი განსხვავება არ არის არსებითი. ნამდვილი განსხვავება ნაჩვენები იქნება შემდეგში.

შენიშვნა. აქამდე ჩვენ არაფერი არ გვიგულისხმებია $P(x)$ პოლინომის p ხარისხის შესახებ. თუ ამ პოლინომის ხარისხი კენტია, მაშინ იგი ყოველთვის შეიძლება გადიდებული იქნეს ერთით. მართლაც, ვთქვათ $P(x)$ არის $(2q-1)$ ხარისხის პოლინომი

$$P(x)=A_0x^{2q-1}+A_1x^{2q-2}+\ldots+A_{2q-1}.$$

დაჭუშვებთ რა $x=a+\frac{1}{y}$, სადაც a არ არის ფესვი $P(x)$ პოლინომის, მივიღებთ:

$$P(x)=P(a)+P'(a)\frac{1}{y}+\cdots+\frac{P^{(2q-1)}(a)}{(2q-1)!}\frac{1}{y^{2q-1}}=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

სადაც $P_1(y)$ აღნიშნავს $2q$ ხარისხის პოლინომს. მაშასადამე

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

და ყოველი ინტეგრალი, რომელიც შეიცავს რაციონალურად x და $\sqrt{P(x)}$, გარდაიქმნება ინტეგრალად y და $\sqrt{P_1(y)}$-ს რაციონალური ფუნქციიდან.

შებრუნებით, თუ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დგას ლუწი $2q$ ხარისხის $P(x)$ პოლინომი, მაშინ ამ პოლინომის ხარისხი შეიძლება დავწიოთ ერთი ერთეულით, **მხოლოდ თუ ცნობილია მისი ერთერთი ფესვი.** ვთქვათ, მაგალითად a არის ერთერთი ფესვი $P(x)=0$ განტოლებისა; დავუშვებთ რა $x=a+\frac{1}{y}$, გვექნება

$$P(x)=P'(a)\frac{1}{y}+\ldots+\frac{P^{(2q)}(a)}{2q}\frac{1}{y^{2q}}=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

სადაც $P_1(y)$ არის $(2q-1)$ ხარისხის პოლინომი; აქედან

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

და ახალი ინტეგრალი შეიცავს მხოლოდ ერთ ირაციონალობას $\sqrt{P_1(y)}$.

101. ინტეგრადობის შემთხვევა ალგებრული სახით. შეიძლება მიღებული იქნეს საბოლოო ფორმულა, რომელიც უშუალოდ გამოსახავს ყოველ ინტეგრალს $\int \frac{M}{N} \frac{dx}{\sqrt{P}}$ გარეშე იმ დამხმარე გამოთვლებისა, რომლებსაც ჩვენ ვახდენდით. V იყოს საერთო უდიდესი გამყოფი N—მრავალწევრის მის წარმოებულთან, W—საერთო უდიდესი გამყოფი N და P-სი და, უკანასკნელად, U—ნაწილადი N და VW-ს ფარდობის. წინა პარაგრაფში დამტკიცებულის ძალით განსახილავი ინტეგრალი არის ჯამი $\frac{Q\sqrt{P}}{VW}$ -სახის ალგებრული ნაწილის, გარკვეული რიცხვი Y_i ინტეგრალებისა და $\int \frac{S\,dx}{U\sqrt{P}}$ ინტეგრალის, სადაც Q და S არის ორი მრავალწევრი. ვინაიდან ყოველი გამოთქმა $F(x)\sqrt{P}$, სადაც $F(x)$ რაიმე პოლინომია, არის Y_i ინტეგრალების ჯამი, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{P}} = \int \frac{T\,dx}{\sqrt{P}} + \frac{Q\sqrt{P}}{VW} + \int \frac{S\,dx}{U\sqrt{P}},$$

სადაც Q-ს ხარისხი დაბალია VW-ს ხარისხზე, ხოლო S-ს ხარისხი დაბალია U-ს ხარისხზე. სამივე U, V, W პოლინომი მიიღება რაციონალური ოპერაციების საშუალებით; იგივე შეიძლება ითქვას Q, S, T პოლინომებზე.

მართლაც, თუ გაუტოლებთ ერთმანეთს წინა ტოლობის ორთავე მხარეს წარმოებულებს და გავამრავლებთ $N\sqrt{P}$-ზე, მივიღებთ:

$$M = TN + Q'PU + \frac{1}{2} P'QU - QP\frac{UW'}{W} - QP\frac{UV'}{V} + SVW,$$

და ჩვენ გვაქვს T-ს ხარისხის ზედა ზღვარი, შევნიშნავთ რა, რომ TN-ს ხარისხი არ აღემატება დანარჩენ წევრების უდიდეს ხარისხს. მივიღებთ რა ამრიგად ზედა ზღვარს Q, S, T პოლინომების ხარისხისას, ჩვენ გამოვთვლით მათ კოეფიციენტებს, თუ მოვახდენთ უკანასკნელ ტოლობაში კოეფიციენტთა შედარების ხერხს. ჩვენ წინასწარ ვართ დარწმუნებული, რომ ამრიგად მიღებული განტოლებები თავსებადია, ვინაიდან ასეთი დაშლა შესაძლოა. ინტეგრალი $\int \frac{T\,dx}{\sqrt{P}}$ თავის მხრივ შეიძლება დაიშალოს ალგებრულ ნაწილად და წრფივ კომბინაციად $p-1$ ინტეგრალებისა $Y_0, Y_1, \ldots Y_{p-2}$. მაშასადამე, ყოველთვის შეგვიძლია განსახილავი ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int \frac{M}{N\sqrt{P}}\,dx = R(x)\sqrt{P} + \int \frac{T_1\,dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{S\,dx}{U\sqrt{P}},$$

სადაც T_1-ის ხარისხი არ აღემატება $p-2$-ს, S-ს ხარისხი ნაკლებია U-ს ხარისხზე, ხოლო $R(x)$ აღნიშნავს რაციონალურ ფუნქციას.

რომ ინტეგრალი იყოს ალგებრული ფუნქცია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ორივე T_1 და S პოლინომი იყოს ნული. რადგან ყოველი

$$\int R(x, \sqrt{P})\,dx$$

ინტეგრალი შეიძლება დაიშალოს ინტეგრალად რაციონალური ფუნქციისაგან და ზემო სახის ინტეგრალად, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია, რაციონალური ოპერაციებით, გავიგოთ წარმოადგენს თუ არა ეს ინტეგრალი ალგებრულ ფუნქციას და აღნიშნულ შემთხვევაში მივიღოთ იგი ცხადი სახით.

102. ელიფსური ინტეგრალები. თუ $P(x)$ არის მეორე ხარისხის პოლინომი, მაშინ ზემოთმოყვანილი დაყვანის ზოგადი წესი გვაძლევს საშუალებას დავიყვანოთ ინტეგრობა x და $\sqrt{P(x)}$-ს რაციონალური ფუნქციისა შემდეგი ინტეგრალების გამოთვლაზე:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

რომელთა გამოთვლა ჩვენ უკვე ვიცით უშუალოდ (§ 97).

ამის შემდეგ უმარტივეს შემთხვევას წარმოადგენენ ელიფსური ინტეგრალები, როცა $P(x)$ არის მესამე ან მეოთხე ხარისხისა; როგორც ზემოთ დავინახეთ, ორივე ეს შემთხვევა დაიყვანება ერთიმეორეზე. ვთქვათ, $P(x)$ არის მეოთხე ხარისხის პოლინომი არსი კოეფიციენტებით, რომელსაც აქვს მხოლოდ მარტივი წრფივი მამრავლები. უპირველესად დავამტკიცოთ, რომ არსი კოეფიციენტებიანი წრფივი ჩასმით, ყოველთვის შეგვიძლია დავიყვანოთ $P(x)$ ისეთ პოლინომამდე, რომელიც შეიცავს ცვლადის მხოლოდ ლუწ ხარისხებს.

ვთქვათ a, b, c და d არის $P(x)=0$ განტოლების ოთხი ფესვი. შეიძლება შევადგინოთ ინვოლუციური დამოკიდებულება:

$$Lx'x''+M(x'+x'')+N=0, \tag{7}$$

რომელიც კმაყოფილდება $x'=a$, $x''=b$ და $x'=c$, $x''=d$ მნიშვნელობებით. L, M, N კოეფიციენტების მოსაძებნად, გვაქვს ორი დამოკიდებულება:

$$L\,ab+M(a+b)+N=0$$

$$L\,cd+M(c+d)+N=0,$$

და ვხედავთ, რომ შეიძლება ავიღოთ

$$L=a+b-c-d,\ M=cd-ab;\ N=ab(c+d)-cd(a+b).$$

აღვნიშნოთ α და β-თი წინა ინვოლუციის ორმაგი წერტილები, ე. ი. ფესვები განტოლებისა:

$$Lu^2+2Mu+N=0.$$

პირობა იმისა, რომ აღნიშნული ფესვები იყოს არსი რიცხვები არის:

$$(cd-ab)^2-(a+b-c-d)\,[ad(c+d)-cd(a+b)]>0,$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ უკანასკნელი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)>0 \tag{8}$$

a, b, c, d ფესვები ყოველთვის შეიძლება დავალაგოთ ისე, რომ ეს პირობა იქნეს დაკმაყოფილებული. თუ ოთხივე ფესვი არის არსი, მაშინ საკმარისია ავიღოთ a და b-დ ორი უდიდესი ფესვი; მაშინ (8) უტოლობის ოთხივე მამრავლი იქნება დადებითი. თუ $P(x)=0$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ორი არსი ფესვი, მაშინ a და b-დ ავიღოთ ეს ორი არსი ფესვი, ხოლო c და d-დ — ორი შეუღლებული ვითარსი ფესვი; მაშინ მამრავლები $a-c$, $a-d$ და $b-c$, $b-d$

იქნებიან შეუღლებული ვითარსი რიცხვები. და, ბოლოს, თუ ოთხივე ფესვი არის ვითარსი, მაშინ a და b-დ ავიღებთ ორს ვითარს შეუღლებულ ფესვს, ხოლო c და d-დ ორს სხვა ვითარს შეუღლებულ ფესვს; (8) უტოლობის ოთხივე მამრავლი იქნება წყვილ-წყვილად შეუღლებული. L, M, N კოეფიციენტების შესაბამი მნიშვნელობები იქნება არსი ყველა შემთხვევაში.

თუ შემოვიღებთ α, β ოდენობებს, ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (7) დამოკიდებულება ასეთი სახით:

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0. \tag{9}$$

დავუშვებთ რა $\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y$, ანუ $x=\frac{\beta y-\alpha}{y-1}$, მივიღებთ:

$$P(x)=\frac{P_1(y)}{(y-1)^4},$$

სადაც $P_1(y)$ არის არსი კოეფიციენტებიანი მეოთხე ხარისხის ახალი პოლინომი, რომლის ფესვები არის:

$$\frac{a-\alpha}{a-\beta},\quad \frac{b-\alpha}{b-\beta},\quad \frac{c-\alpha}{c-\beta},\quad \frac{d-\alpha}{d-\beta}.$$

(9) ფორმულის ძალით ეს ფესვები აკმაყოფილებენ წყვილ-წყვილად დამოკიდებულებას: $y'+y''=0$; მაშასადამე, $P_1(y)$ პოლინომი შეიცავს მხოლოდ ლუწ ხარისხებს y-სას.

თუ ფესვები a, b, c, d აკმაყოფილებენ დამოკიდებულებას $a+b=c+d$, მაშინ გვაქვს $L=0$, და ინვოლუციის ორმაგი წერტილებიდან ერთერთი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. აღვნიშნავთ რა $\alpha=-\frac{N}{2M}$, ჩვენ წარმოვადგენთ (7) განტოლებას ასეთი სახით:

$$x'-\alpha+x''-\alpha=0,$$

და საჭიროა მხოლოდ აღვნიშნოთ $x=\alpha+y$, რომ მივიღოთ პოლინომი ლუწი ხარისხით y-სა.

ამრიგად ყველა შემთხვევაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $P(x)$ პოლინომი დაყვანილია კანონიკურ სახემდე:

$$P(x)=A_0x^4+A_1x^2+A_2.$$

მაშინ ყოველი ელიფსური ინტეგრალი შეიძლება დაყვანილ იქნეს ალგებრულ ნაწილამდე, ინტეგრალზე რაციონალურ ფუნქციიდან, ინტეგრალებზე:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}},\quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

და

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

სახის ინტეგრალებზე.

ინტეგრალი:

$$u=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

არის პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი; პირიქით, თუ განვიხილავთ მასში x როგორც u-ს ფუნქციას, მივიღებთ ელიფსურ ფუნქციას. მეორე ინტეგრალი ჩასმით $x^2=u$ დაიყვანება ელემენტარულ ინტეგრალზე. მესამე ინტეგრალი:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

არის ლეჟანდრის მეორე გვარის ინტეგრალი. საბოლოოდ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}=\int\frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}}+a\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}};$$

ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

არის ლეჟანდრის მესამე გვარის ინტეგრალი.

ელიფსურმა ინტეგრალებმა მიიღეს ასეთი სახელწოდება იმიტომ, რომ მათ პირველად შეხვდნენ ელიფსის გაწრფევადობის ამოცანაში. ვთქვათ

$$x=a\cos\varphi,\ \ y=b\sin\varphi$$

არიან ელიფსის წერტილის კოორდინატები; გვაქვს

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2,$$

ანუ, თუ აღვნიშნავთ $a^2-b^2=e^2a^2$, მივიღებთ:

$$ds=a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

ინტეგრალი, რომელიც წარმოადგენს ელიფსის რკალის სიგრძეს, $\cos\varphi=t$ ჩასმის შემდეგ ღებულობს სახეს:

$$s=a\int\frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt=a\int\frac{1-e^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}dt;$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ელიფსის რკალის სიგრძე გამოიხატება პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალების ჯამის საშუალებით.

განვიხილოთ კიდევ ლემნისკატი, წარმოდგენილი განტოლებებით:

$$x=a^2\frac{t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\ \ y=a^2\frac{t(t^2-a^2)}{t^4+a^4};$$

ვაწარმოვებთ რა გამოთვლას, მივიღებთ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2a^4}{t^4 + a^4}\, dt^2.$$

ამრიგად ლემნისკატის რკალის სიგრძე გამოისახება პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალით[1].

102a. ფსევდო-ელიფსური ინტეგრალები. ზოგიერთ შემთხვევაში ინტეგრალი

$$\int F\left[x, \sqrt{P(x)}\,\right] dx,$$

სადაც $P(x)$ არის მესამე ან მეოთხე ხარისხის პოლინომი, შეიძლება გამოსახული იქნეს ალგებრული ფუნქციებისა და სასრული რიცხვის ალგებრული ფუნქციებიდან ლოგარითმების ჯამის საშუალებით; ასეთ ინტეგრალებს ეწოდებათ ფსევდო-ელიფსური. აი საკმაოდ ზოგადი შემთხვევა, როცა ამას ექნება ადგილი. ვთქვათ

$$Lx'x'' + M(x' + x'') + N = 0 \tag{10}$$

არის ინვოლუციური დამოკიდებულება, რომელიც აკავშირებს მეოთხე ხარისხის $P(x)=0$ განტოლების ოთხივე ფესვს წყვილ-წყვილად; თუ რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ იგიურად აქვს ადგილი:

$$f(x) + f\left(-\frac{Mx+N}{Lx+M}\right) = 0,$$

მაშინ $\int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{P(x)}}$ ინტეგრალი არის ფსევდო-ელიფსური.

ვთქვათ α, β არიან ინვოლუციის ორმაგი წერტილები; როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, (10) დამოკიდებულება შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} + \frac{x''-\alpha}{x''-\beta} = 0. \tag{11}$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრალში ჩასმას $\frac{x-\alpha}{x-\beta} = y$, მივიღებთ:

$$dx = \frac{(\alpha-\beta)\, dy}{(1-y)^2},\quad P(x) = \frac{P_1(y)}{(1-y)^4},$$

და, მაშასადამე

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{(\alpha-\beta)\, dy}{\sqrt{P_1(y)}},$$

სადაც $P_1(y)$ არის მეოთხე ხარისხის პოლინომი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ y ცვლადის ლუწ ხარისხებს (§ 102). რაც შეეხება რაციონალურ $f(x)$ წილადს, იგი გარდაიქმნება რაციონალურ $\varphi(y)$ წილადად, რომლისათვის $\varphi(y) + \varphi(-y) = 0$. მართლაც, თუ x-ის ორი მნიშვნელობა ზებმული არის (11) დამოკიდებულებით, მაშინ y ცვლადის სათანადო მნიშვნელობები y', y'' უნდა აკმაყოფილებდეს დამოკიდებულებას $y' + y'' = 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(y)$ ფუნქციას

[1] ეს თვისება ეკუთვნის მრუდეების მთელ კლასს, რომლებიც მოძებნილი იყო სერეს (Serret) მიერ (Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral, ტ. II, გვ. 264).

ექნება სახე $y\psi(y^2)$, სადაც ψ არის y^2-ის რაციონალური ფუნქცია. მაშასადამე, განსახილავი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int\frac{y\psi(y^2)\,dy}{\sqrt{A_0y^4+A_1y^2+A_2}},$$

და საკმარისია დავუშვათ $y^2=z$, რომ იგი დავიყვანოთ ელემენტარულ ინტეგრალამდე. ამრიგად თეორემა დამტკიცებულია, და ამას გარდა ჩვენ გვაქვს ამასთანავე წესიც, რომლის საშუალებით შევასრულებთ თვით დაყვანას.

ზემოთმოყვანილი თეორემა არის სამართლიანი იმ შემთხვევაშიაც, როცა $P(x)$ არის მესამე ხარისხის პოლინომი; მხოლოდ უნდა მივიღოთ ამ პოლინომის ოთხ ფესვს შორის ერთი უსასრულო დიდად. დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია წინა დამტკიცებისა.

მაგალითად, თუ $P(x)=0$ განტოლება არის შექცევადი, მაშინ ინვოლუციის ერთერთი დამოკიდებულება, რომელიც გადაანაცვლებს ფესვებს წყვილწყვილად, იქნება $x'x''=1$. მაშასადამე, თუ რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ გვაქვს იგიურად

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

მაშინ ინტეგრალი

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$$

იქნება ფსევდო-ელიფსური, და საკმარისია დავუშვათ $\frac{x-1}{x+1}=y$, და $y^2=z$, რომ იგი დავიყვანოთ ელემენტარულ ინტეგრალამდე.

დავუშვათ კიდევ, რომ $P(x)$ არის მესამე ხარისხის პოლონომი

$$P(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{k^2}\right);$$

მივიღოთ $a=\infty$, $b=0$, $c=1$, $d=\frac{1}{k^2}$. არსებობს სამი ინვოლუციური დამოკიდებულება, რომლებიც წყვილ-წყვილად გადაადგილებენ ამ ფესვებს:

$$x'=\frac{1}{k^2x''},\quad x'=\frac{1-k^2x''}{k^2(1-x'')},\quad x'=\frac{1-x''}{1-k^2x''}.$$

თუ რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ერთერთს დამოკიდებულებებიდან:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{k^2x}\right)=0;\quad f(x)+f\left(\frac{1-k^2x}{k^2(1-x)}\right)=0,$$

$$f(x)+f\left(\frac{1-x}{1-k^2x}\right)=0,$$

მაშინ ინტეგრალი:

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

არის ფსევდო-ელიფსური. ამ ინტეგრალიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ სხვა ინტეგრალებიც. მაგალითად, თუ დავუშვებთ $x=z^2$, ჩვენ წინა ინტეგრალს გარდავქმნით ასე:

$$\int\frac{2f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

აქედან დავასკვნით, რომ თუ $f(\zeta^2)$ აკმაყოფილებს ერთ ერთს დამოკიდებულებებიდან:

$$f(\zeta^2)+f\left(\frac{1}{k^2\zeta^2}\right)=0, \qquad f(\zeta^2)+f\left[\frac{1-k^2\zeta^2}{k^2(1-\zeta^2)}\right]=0,$$

$$f(\zeta^2)+f\left(\frac{1-\zeta^2}{1-k^2\zeta^2}\right)=0,$$

მაშინ ახალი ინტეგრალი იქნება აგრეთვე ფსევდო-ელიფსური; ამ შემთხვევებიდან პირველი უკვე იყო შემჩნეული ე ი ლ ე რ ი ს (*Euler*) მიერ [1].

103. ტრანსცენდენტული ფუნქციების ინტეგრობა. ინტეგრობა რაციონალური ფუნქციებისა sin x და cos x-ის მიმართ. ცნობილია, რომ $\sin x$ და $\cos x$ გამოიხატებიან რაციონალურად $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ საშუალებით, და ეს ცვლადის შეცვლა გვაძლევს საშუალებას შემდეგი სახის ინტეგრალის

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

გამოთვლა დავიყვანოთ t-სი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრობამდე. გვაქვს:

$$x=2\operatorname{arc\,tg} t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

განსახილავი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int \Phi(t)\,dt,$$

სადაც $\Phi(t)$ აღნიშნავს რაციონალურ ფუნქციას. მაგალითად,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=\ln t$$

და მაშასადამე

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

ინტეგრალი $\int\frac{dx}{\cos x}$ დაიყვანება წინა ინტეგრალზე ჩასმით $x=\frac{\pi}{2}-y$: იგი გვაძლევს:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=-\ln [\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right].$$

წინა წესს აქვს ის უპირატესობა, რომ იგი არის სრულიად ზოგადი, მაგრამ ხშირად შეიძლება მოვძებნოთ ცვლადთა ისეთი გარდაქმნები, რომლებიც უფრო

[1] იხ. ლიტოგრაფიული კურსი ჰ ე რ მ ი ტ ი ს ა, მეოთხე გამოცემა, გვ. 25—28.

სწრაფად მიგვიყვანენ მიზნამდე. მაგალითად, თუ $R(\sin x, \cos x)$ ფუნქციას აქვს პერიოდად π, მაშინ იგი ტოლია $\operatorname{tg} x$-დან რაციონალური ფუნქციისა: $F(\operatorname{tg} x)$. და თუ მივიღებთ $\operatorname{tg} x=t$ ახალ ცვლადად, გვექნება:

$$\int F(\operatorname{tg} x)\, dx=\int \frac{F(t)\, dt}{1+t^2}.$$

ვთქვათ მაგალითად გამოსათვლელია განუსაზღვრელი ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{A \cos^2 x+B \sin x \cos x+C \sin^2 x+D},$$

სადაც A, B, C, D—ნებისმიერი მუდმივებია. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფ ფუნქციას აქვს პერიოდი π, ამიტომ თუ ავღნიშნავთ $\operatorname{tg} x=t$, მივიღებთ:

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x=\frac{t}{1+t^2}; \quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},$$

და განსახილავი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int \frac{dt}{A+Bt+Ct^2+D(1+t^2)}.$$

პირველყოფილი ფუნქციის სახე დამოკიდებულია მნიშვნელის ფესვების ხასიათზე. თუ დავუშვებთ მიმდევრობით ოთხი კოეფიციენტიდან სამს ნულის ტოლად, მივიღებთ ფორმულებს:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}=\ln(\operatorname{tg} x),$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x.$$

თუ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფ ფუნქციას აქვს სახე $R(\sin x) \cos x$ ან $R(\cos x) \sin x$, მაშინ ცვლადის შეცვლა თავისთავად ცხადია; პირველ შემთხვევაში უნდა მივიღოთ $\sin x=t$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $\cos x=t$.

სანამ გამოვიყენებდეთ ზოგად მეთოდს, ზოგჯერ ხელსაყრელია გავამარტივოთ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მყოფი ფუნქცია ცვლადის სათანადო შეცვლით. განვიხილოთ მაგალითად ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{a \cos x+b \sin x+c},$$

სადაც a, b, c რაიმე მუდმივებია. განვსაზღვროთ დადებითი ρ რიცხვი და φ კუთხე დამოკიდებულებებიდან:

$$a=\rho \cos \varphi, \quad b=\rho \sin \varphi,$$

საიდანაც

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int\frac{dx}{\rho\cos(x-\varphi)+c}=\int\frac{dy}{\rho\cos y+c},$$

სადაც $x-\varphi=y$. ახლა თუ გამოვიყენებთ ზოგად მეთოდს, დავუშვებთ რა $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=t$, მაშინ წინა ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int\frac{2dt}{\rho+c+(c-\rho)t^2}.$$

გამოთვლა ადვილად შეგვიძლია დავიყვანოთ ბოლომდე, და ჩვენ მივიღებთ ორ სხვადასხვა პირველყოფილ ფუნქციას შემდეგი გამოსახულების ნიშნის მიხედვით

$$\rho-c^2=a^2+b^2-c^2.$$

ინტეგრალი

$$\int\frac{m\cos x+n\sin x+p}{a\cos x+b\sin x+c}\,dx$$

დაიყვანება წინა ინტეგრალზე. სიმოკლისათვის მივიღოთ

$$u=a\cos x+b\sin x+c,$$

და განვსაზღვროთ სამი λ, μ და ν მუდმივი იმგვარად, რომ ადგილი ჰქონდეს იგიურად ტოლობას:

$$m\cos x+n\sin x+p=\lambda u+\mu\frac{du}{dx}+\nu.$$

ამისათვის უნდა ამოვხსნათ სამი განტოლება:

$$m=\lambda a+\mu b,\quad n=\lambda b-\mu a,\quad p=\lambda c+\nu,$$

რომლებიდან პირველი ორი გვაძლევს λ და μ. მუდმივების ასეთნაირი შერჩევით განსახილავი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int\frac{\lambda u+\mu\dfrac{du}{dx}+\nu}{u}\,dx=\lambda x+\mu\ln u+\nu\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}.$$

მაგალითი.—გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+e\cos x},$$

სადაც $|e|<1$.

განვიხილავთ რა პირველად განუსაზღვრელ ინტეგრალს, დავუშვებთ მიმდევრობით

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \text{ და } t=u\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

$$\int\frac{dx}{1+e\cos x}=2\int\frac{dt}{1+e+(1-e)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\int\frac{du}{1+u^2}.$$

მაშასადამე, განუსაზღვრელი ინტეგრალი ტოლია:

$$\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

როცა x იცვლება 0-დან π-მდე, $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ იზრდება 0-დან $+\infty$-მდე, და $\operatorname{arc\,tg}$ იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე. მაშასადამე, საძიებელი განსაზღვრული ინტეგრალი ტოლია $\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}$.

რედუქციის ფორმულები. ზოგიერთი ინტეგრალების გამოთვლის დროს შეიძლება აგრეთვე ვისარგებლოთ რედუქციის ფორმულებით. მაგალითად, ფორმულა წარმოებულისა $\operatorname{tg}^{n-1}x$-დან შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ასეთი სახით:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{n-1}x)=(n-1)\operatorname{tg}^{n-2}x(1+\operatorname{tg}^2 x);$$

აქედან გვაქვს:

$$\int\operatorname{tg}^n x\,dx=\frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx.$$

აქ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ $\operatorname{tg}x$-ის ხარისხმა ორი ერთეულით დაიწია. თუ ამგვარადვე მოვიქცევით შემდეგშიაც, ჩვენ დავალთ ერთ-ერთზე შემდეგი ორი ინტეგრალიდან:

$$\int dx=x,\qquad\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln(\cos x).$$

ასეთივე რედუქციის ფორმულა არსებობს $\int\operatorname{ctg}^n x\,dx$ ინტეგრალისათვის,

$$\int\operatorname{ctg}^n x\,dx=-\frac{\operatorname{ctg}^{n-1}x}{n-1}-\int\operatorname{ctg}^{n-2}x\,dx.$$

განვიხილოთ უფრო ზოგადი ინტეგრალი:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

სადაც m და n არიან ორი რაიმე მთელი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვები. თუ ამ რიცხვებიდან ერთ-ერთი არის კენტი, მაშინ ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ერთ-ერთი ზემოთაღნიშნულ ცვლადთა შეცვლით. მაგალითად, თუ $n=2p+1$,

მაშინ აღნიშვნით $\sin x=t$, ჩვენ დავალთ $\int t^m(1-t^2)^n\,dt$ ინტეგრალის გამოთვლაზე. ამიტომ დავკმაყოფილდეთ იმ შემთხვევით, როცა m და n ორივე ლუწია, ე. ი. შემდეგი სახის ინტეგრალებით:

$$I_{m,n}=\int \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx.$$

ეს ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$I_{m,n}=\int \sin^{2m-1} x\cos^{2n} x\sin x\,dx;$$

თუ განვიხილავთ $\cos^{2n} x\sin x\,dx$, როგორც დიფერენციალს $\frac{-1}{2n+1}\cos^{2n+1} x$-დან და ნაწილობით ვაინტეგრებთ, მივიღებთ:

$$I_{m,n}=-\sin^{2m-1}x\,\frac{\cos^{2n+1}x}{2n+1}+\frac{2m-1}{2n+1}\int \sin^{2m-2}x\,\cos^{2n}x\,(1-\sin^2 x)\,dx,$$

ანდა

$$I_{m,n}=-\frac{\sin^{2m-1}x\,\cos^{2n+1}x}{2\,(m+n)}+\frac{2m-1}{2\,(m+n)}\,I_{m-1,n}. \tag{A}$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევამციროთ პირველი m მაჩვენებელი, მეორის შეუცვლელად. როცა m უარყოფითია მაშინ, თუ ამოვხსნით (A) განტოლებას $I_{m-1,n}$-ის მიმართ და m-ს შევცვლით $1-m$—ით, მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულას:

$$I_{-m,n}=\frac{\sin^{1-2m}x\cos^{2n+1}x}{1-2m}+\frac{2\,(m-n+1)}{1-2m}\,I_{1-m,n}. \tag{B}$$

ასეთივე ფორმულები გვაქვს აგრეთვე $\cos x$-თან მაჩვენებლის დასაწევად

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x}{2\,(m+n)}+\frac{2n-1}{2\,(m+n)}\,I_{m,n-1}, \tag{C}$$

$$I_{m,-n}=-\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{1-2n}x}{1-2n}+\frac{2\,(m+1-n)}{1-2n}\,I_{m,-n+1}. \tag{D}$$

თუ გამოვიყენებთ ამ ფორმულებს საჭირო რიცხვჯერ, შევგვიძლია დავიყვანოთ თითოეული m და n რიცხვებიდან ნულზე. ამ ფორმულებით ჩვენ არ შეგვეძლო გარდაქმნა დაგვეყვანა ბოლომდე, მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ჩვენ დავიდოდით $I_{m,n}$ ინტეგრალამდე, რომელშიაც $m+n=0$, ე. ი. ერთერთ ინტეგრალამდე, რომელთათვის რედუქციის ფორმულა გამოყვანილი იყო ამ პარაგრაფის დასაწყისში.

ვალისის ფორმულა.—წინა ინტეგრალების მზგავსი ინტეგრალების დასაყვანად, არსებობს აგრეთვე ფორმულები, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული იმაზე, m და n ლუწია თუ კენტი.

გამოვთვალოთ, მაგალითად, განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx,$$

სადაც m მთელი დადებითი რიცხვია. ნაწილობითი ინტეგრობა იძლევა:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x \, dx = -[\cos x \sin^{m-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \cos^2 x \, dx;$$

ვინაიდან ორივე საზღვარზე $\cos x \sin^{m-1} x$ არის ნულის ტოლი, ამიტომ

$$I_m = (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m).$$

აქედან გვაქვს რეკურენტული ფორმულა:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \tag{E}$$

ამგვარად განვაგრძობთ რა, ჩვენ დავალთ, როცა m ლუწია, $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ინტეგრალამდე, ხოლო როცა m კენტია $I_1 = 1$ ინტეგრალამდე. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა, $m = 2p$; მივიღებთ რა (E) ფორმულაში მიმდევრობით $m = 2, 4, 6, \ldots, 2p$, გვექნება:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_3, \ldots, \quad I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2};$$

თუ გავამრავლებთ წევრობრივ ყველა ამ ტოლობებს, მივიღებთ:

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \frac{\pi}{2}.$$

სრულიად ამგვარადვე, გვექნება:

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p+1)}.$$

აქედან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ საინტერესო ფორმულა მოცემული ვ ა ლ ი ს ი ს (Wallis) მიერ. ცხადია, რომ I_m ინტეგრალი კლებულობს m-ის ზრდის დროს, ვინაიდან $\sin^{m+1} x$ ნაკლებია, ვიდრე $\sin^m x$; ამიტომ ჩვენ გვაქვს:

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}.$$

შევცვლით რა I_{2p+1}, I_{2p}, I_{2p-1} მათი წინა მნიშვნელობებით და სიმოკლისათვის აღვნიშნავთ

$$H_p = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1}$$

მივიღებთ ორ ახალ უტოლობას:

$$H_p > \frac{\pi}{2} > H_p \frac{2p}{2p+1}.$$

ამრიგად p რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს $\frac{\pi}{2H_p}$ ფარდობას ზღვრად აქვს ერთი, ე. ი. $\frac{\pi}{2}$ რიცხვი არის ზღვარი H_p ნამრავლისა, როცა მამრავლთა რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, აქ მამრავლთა შედგენის კანონი ცხადია.

ინტეგრალები: $\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\ldots dx$. — განვიხილოთ ნამრავლი რამოდენიმე $\cos(ax+b)$ სახის მამრავლთა, სადაც a და b არიან მუდმივები, ამასთანავე ერთი და იგივე მამრავლი შეიძლება შედიოდეს ნამრავლში რამოდენიმეჯერ. ფორმულა:

$$\cos u \cos v = \frac{\cos(u+v)}{2} + \frac{\cos(u-v)}{2}$$

საშუალებას გვაძლევს ასეთი სახის ორი მამრავლის ნამრავლი შევცვალოთ x-ს წრფივი ფუნქციის ორი კოსინუსის ჯამით; მაშასადამე, ნამრავლი n მამრავლისა შეიცვლება $(n-1)$ მამრავლიან ორი ნამრავლის ჯამით. გამოვიყენებთ რა ამ ფორმულას საკმაო რიცხვჯერ, ჩვენ შევცვლით მოცემულ ნამრავლს $\Sigma H\cos(Ax+B)$ სახის ჯამით, რომლის ყოველი წევრის გაინტეგრება შეიძლება უშუალოდ. თუ A არ უდრის ნულს, მაშინ

$$\int \cos(Ax+B)\,dx = \frac{\sin(Ax+B)}{A} + C;$$

თუ $A=0$, მაშინ $\int \cos B\,dx = x\cos B + C$.

კერძოდ, ეს გარდაქმნა გამოიყენება შემდეგი სახის ნამრავლზე:

$$\cos^m x \sin^n x,$$

სადაც m და n ორი მთელი დადებითი რიცხვია. მართლაც, ეს ნამრავლი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\cos^m x \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

გამოვიყენებთ რა წინა წესს, ჩვენ შევცვლით უკანასკნელ ნამრავლს ჯერადი რკალების სინუსებისა და კოსინუსების ჯამით, და ინტეგრობა შესრულდება უშუალოდ.

ვთქვათ, მაგალითად, საძიებელია ფართობი მრუდისა:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

ავღნიშნოთ $x=a\cos^3\theta$, $y=b\sin^3\theta$; ჩვენ მივიღებთ მთელ მრუდს, თუ θ-ს ვცვლით 0-სა და 2π შორის.

ამ შემთხვევაში ფორმულა კეტილი მრუდის ფართობისათვის:

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{2}\int\limits_{C} x\,dy-y\,dx$$

გვაძლევს:

$$\mathfrak{A}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{3ab}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta;$$

მაგრამ

$$(\sin\theta\cos\theta)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2\theta=\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta),$$

და, მაშასადამე, საძიებელი $\mathfrak{A}$ ფართობი ტოლია:

$$\mathfrak{A}=\frac{3ab}{16}\left[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi ab}{8}.$$

კერძოთ, გვაქვს შემდეგი ინტეგრალები:

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C,$$

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\,dx=-\frac{3\cos x}{4}+\frac{\cos 3x}{12}+C,$$

$$\int\sin^4 x\,dx=\int\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8}\,dx=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C,$$

. . . .

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C,$$

$$\int\cos^3 x\,dx=\int\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\,dx=\frac{3\sin x}{4}+\frac{\sin 3x}{12}+C,$$

$$\int\cos^4 x\,dx=\int\frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}\,dx=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

. . . .

ამ ფორმულების შესახებ შეგვიძლია შევნიშნოთ ერთი ზოგადი კანონი. ინტეგრალები:

$$F(x)=\int\limits_0^x\sin^n x\,dx\quad\text{და}\quad\Phi(x)=\int\limits_0^x\cos^n x\,dx.$$

როცა n კენტია, არიან პერიოდული და აქვთ პერიოდად 2π; თუ კი n ლუწია, მაშინ x-ის 2π-ით გადიდებით ეს ინტეგრალები გადიდდებიან მუდმივი დადებითი სიდიდით. ამ თვისების შემჩნევა შეიძლებოდა თავიდანვე; მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$F(x+2\pi)=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx+\int_{2\pi}^{2\pi+x}\sin^n x\,dx,$$

ანუ, $\sin x$-ს პერიოდობის გამო:

$$F(x+2\pi)=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx+\int_0^{x}\sin^n x\,dx=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx.$$

თუ n ლუწია, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_0^{2\pi}\sin^n x\,dx$ არის, ცხადია, დადებითი სიდიდე; თუ კი n კენტია, მაშინ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, როგორც ეს გამომდინარეობს $\sin(x+\pi)=-\sin x$ დამოკიდებულებიდან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. გარდაქმნების დიდი სხვადასხვაობის გამო, რომელსაც გვაძლევს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, უკანასკნელით სარგებლობა ხშირად არის ხელსაყრელი ინტეგრალების გამოთვლის დროს. მაგალითად, დავუბრუნდეთ $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ინტეგრალს; თუ მივიღებთ მასში $x=\operatorname{tg}\varphi$, იგი მიიღებს სახეს $\int\cos\varphi\,d\varphi=\sin\varphi+C$ და, როცა დავუბრუნდებით x ცვლადს, მივიღებთ წინად მოძებნილ (§ 97) ფორმულას:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

ინტეგრალები: $\int R(x)e^{\omega x}dx$. ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი: $\int R(x)e^{\omega x}dx$, სადაც $R(x)$ არის x-ის რაციონალური ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ $R(x)$ ფუნქცია დავშალეთ, როგორც ეს არა ერთხელ გავაკეთეთ:

$$R(x)=E(x)+\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\dots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

სადაც $E(x)$, A_1, A_2, ..., A_p, X_1, ..., X_p არიან პოლინომები, და ყოველი X_i პოლინომი არის პირველადი (მარტივი) თავის წარმოებულთან. მოცემული ინ-

ტეგრალი ტოლი იქნება ინტეგრალისა $\int E(x)e^{\omega x}\,dx$, მიმატებული

$$\int \frac{Ae^{\omega x}dx}{X^n}$$

სახის ინტეგრალების ჯამი.

პირველი ინტეგრალი შეიძლება გამოვითვალოთ მიმდევრობით ნაწილობითი ინტეგრობით (§ 84); რაც შეეხება ინტეგრალებს $\int \frac{Ae^{\omega x}\,dx}{X^n}$, როცა n ერთზე მეტია მათზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ რედუქციის ფორმულა. მართლაც, ვინაიდან X პოლინომი არის მარტივი თავის წარმოებულთან, ამიტომ შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ორი λ და μ პოლინომი, რომ ადგილი ჰქონდეს იგივურად $A=\lambda X+\mu X'$; აქედან მივიღებთ:

$$\int \frac{Ae^{\omega x}\,dx}{X^n}=\int\frac{\lambda e^{\omega x}\,dx}{X^{n-1}}+\int\frac{\mu X' e^{\omega x}}{X^n}dx.$$

შემდეგ, ნაწილობით გაინტეგრება გვაძლევს:

$$\int \mu e^{\omega x}\,\frac{X'\,dx}{X^n}=-\frac{1}{n-1}\,\frac{\mu e^{\omega x}}{X^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{e^{\omega x}(\mu'+\mu\omega)}{X^{n-1}}\,dx,$$

და, თუ შევაერთებთ ორივე ფორმულას, ვნახავთ, რომ განსახილავი ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება იმავე სახის ინტეგრალის გამოთვლაზე, მაგრამ რომელშიაც n მაჩვენებელი შემცირებულია ერთი ერთეულით. მოვიქცევით რა შემდეგაც ასეთნაირად, ჩვენ დავალთ ინტეგრალამდე:

$$\int\frac{Be^{\omega x}}{X}\,dx,$$

რომელშიაც ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ B პოლინომი მარტივია X პოლინომთან, და რომ B პოლინომის ხარისხი დაბალია X პოლინომის ხარისხზე. მიღებულ ინტეგრალზე დაყვანის ეს წესი უკვე გამოდგება; მაგრამ თუ ცნობილია $X=0$ განტოლების ფესვები, მაშინ ეს ინტეგრალი შეგვიძლია დავიყვანოთ მხოლოდ ერთ ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციაზე. გარკვეულობისათვის, ვიგულისხმოთ, რომ X პოლინომის ყველა ფესვი ნამდვილია; ამ შემთხვევაში ინტეგრალი დაიშლება რამოდენიმე შემდეგი სახის ინტეგრალად:

$$\int\frac{\alpha e^{\omega x}}{x-a}\,dx.$$

ჩამოვაშორებთ რა მუდმივ მამრავლს, ჩვენ შეგვიძლია ეს ინტეგრალი ჩასმებით:

$$x=a+\frac{y}{\omega},\quad u=e^{y}$$

დავიყვანოთ ერთერთზე შემდეგი ორი სახიდან:

$$\int \frac{e^y\,dy}{y}, \qquad \int \frac{du}{\ln u}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი $\int \frac{du}{\ln u}$ წარმოადგენს ახალ ტრანსცენდენტულ ფუნქციას, რომელსაც ეწოდება ინტეგრალური ლოგარითმი.

სხვადასხვა ინტეგრალები. განვიხილოთ კიდევ ინტეგრალები:

$$\int e^{ax} f(\sin x,\ \cos x)\,dx,$$

სადაც f არის მთელი ფუნქცია $\sin x$ და $\cos x$-სა. ამ ინტეგრალის ყოველ წევრს აქვს სახე:

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

სადაც m და n არიან მთელი დადებითი რიცხვები. ზემოთ გაკეთებული შენიშვნების ძალით ნამრავლი $\sin^m x \cos^n x$ შეიძლება შევცვალოთ ჯერადი რკალების სინუსებისა და კოსინუსების ჯამით, და ამრიგად ჩვენ უნდა განვიხილოთ მხოლოდ შემდეგი ორი სახის ინტეგრალი:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx, \qquad \int e^{ax} \sin bx\,dx.$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ ინტეგრალებს ნაწილობით, მივიღებთ:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx;$$

აქედან გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} \int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}, \\ \int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ინტეგრალებიდან, რომლებიც დაიყვანებიან წინა ინტეგრალებზე, აღვნიშნავთ კიდევ შემდეგს:

$$\int f(\ln x)\,x^m\,dx, \qquad \int f(\arcsin x)\,dx$$

$$\int f(x)\arcsin x\,dx, \qquad \int f(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx,$$

სადაც f აღნიშნავს მთელ ფუნქციას. თუ პირველ ორ ინტეგრალში ახალ ცვლადად მივიღებთ $\ln x$ და $\arcsin x$, ხოლო უკანასკნელ ორზე გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრობის ფორმულას, განვიხილავთ რა $f(x)\,dx$-ს როგორც რაიმე $F(x)$ პოლინომის დიფერენციალს, ამით მივალთ უკვე განხილულ სახის ინტეგრალებზე.

II. განსაზღვრული ინტეგრალების მიახლოვებითი გამოთვლა

104. ზოგადი საფუძვლები. თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია არ არის ცნობილი, მაშინ მიმართავენ ისეთ მეთოდებს, რომელნიც იძლევა განსაზღვრული ინტეგრალის

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

მიახლოვებით მნიშვნელობას.

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა გვაძლევს ორ საზღვარს, რომელთა შორის მოთავსებულია ეს ინტეგრალი. ანალოგიური წესით შეიძლება მოიძებნოს უსასრულო სიმრავლე სხვა საზღვრებისა. ვთქვათ, რომ როდესაც x იცვლება a და b-ს შორის $(a<b)$ გვაქვს მუდამ:

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x);$$

მაშინ ცხადია, რომ გვექნება აგრეთვე

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

თუ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციებად მივიღებთ ორი ცნობილი ფუნქციის წარმოებულებს, მაშინ ამ წესით მივიღებთ ორ საზღვარს, რომელთა შორის მოთავსდება განსახილავი ინტეგრალი. განვიხილოთ, მაგალითად, ინტეგრალი:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

ჩვენ გვაქვს $\sqrt{1-x^4}=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}$. როდესაც x იცვლება 0 და 1-ს შორის, მაშინ $\sqrt{1+x^2}$ მოთავსებულია 1 და $\sqrt{2}$-ს შორის. მაშასადამე, საძიებელი ინტეგრალი მოთავსდება შემდეგ ორ ინტეგრალს შორის:

$$\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ე. ი. $\frac{\pi}{2}$ და $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$-ს შორის. მაგრამ შეიძლება მოიძებნოს ორი ერთმანეთთან უფრო დაახლოვებული საზღვარი, თუ მხედველობაში მივიღებთ იმას, რომ $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ მეტია $1-\frac{x^3}{2}$-ზე, როგორც ეს გამომდინარეობს $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$-ის დაშლიდან ტეილორის ფორმულით, თუ ვიკმარისებთ დაშლის პირველი ორი წევრით. ამრიგად, I ინტეგრალი მეტია ვიდრე

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალი ტოლია $\frac{\pi}{4}$ (იხ. § 97), და, მაშასადამე, I მოთავსდება $\frac{3\pi}{8}$ და $\frac{\pi}{2}$-ს შორის.

ცხადია, რომ ამნაირად ვღებულობთ მხოლოდ ზოგად მითითებებს ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობების შესახებ. რომ გვექნეს უფრო ახლობელი მნიშვნელობები, უნდა დავყოთ (a, b) შუალედი უფრო მცირე შუალედებად და თითოეულ მათგანზე გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა. ვთქვათ, მაგალითად, რომ $f(x)$ ფუნქცია მუდამ იზრდება a-დან b-მდე. დავყოთ (a, b) შუალედი თანატოლ შუალედებად $(b-a=nh)$. ინტეგრალის განმარტების ძალით, ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ მოთავსებულია შემდეგ ორ ჯამს შორის:

$$s=h\{f(a)+f(a+h)+\ldots+f[a+(n-1)h]\},$$

$$S=h\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\}.$$

თუ ინტეგრალის მნიშვნელობად მივიღებთ $\frac{S+s}{2}$ ნახევარ~~ი~~ ჯამს, მაშინ ცხადია, რომ დაშვებული ცდომილება იქნება ნაკლები ვიდრე $S-s=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$. სიდიდე $\frac{S+s}{2}$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$h\left\{\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}+\ldots+\frac{f[a+(n-1)h]+f(a+nh)}{2}\right\}.$$

ვინაიდან $\frac{h}{2}\{f(a+ih)+f[a+(i+1)h]\}$ წარმოადგენს ფართობს იმ ტრაპეციისას, რომელსაც h სიმაღლე აქვს, ხოლო ფუძეებად $f(a+ih)$ და $f[a+(i+1)h]$, ამიტომ ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს მეთოდი ტოლფასია იმისა, რომ ფართობი, მოთავსებული $y=f(x)$ მრუდსა და ორ მეზობელ ორდინატას შორის,

შევცვალოთ იმ წრფივი ტრაპეციის ფართობით, რომელსაც ფუძეებად აქვს იგივე ორი ორდინატი. ეს ხერხი გამოსადეგია მაშინ, როდესაც არ მოითხოვება დიდი სიზუსტე.

ავიღოთ, მაგალითად ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. თუ ავიღებთ $n=4$, მაშინ ინტეგრალისათვის ჩვენ მივიღებთ მიახლოებითი მნიშვნელობას:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\right)=0{,}78279\ldots,$$

და ცდომილება ნაკლებია, ვიდრე $\frac{1}{16}=0{,}0625$. აქედან შეგვიძლია მივიღოთ მიახლოებითი მნიშვნელობა $\pi=3{,}1311\ldots$, რომელიც ზუსტია პირველი ათეულის ნიშნამდე.

თუ $f(x)$ ფუნქცია არ იცვლება ერთი და იმავე მიმართულებით, როდესაც x იზრდება a-დან b მდე, მაშინ ამ შუალედს დავყოფთ რამოდენიმე სხვა შუალედად, რომელთათვის ეს პირობა დაცული იქნება.

105. ინტერპოლირება. განვიხილოთ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალის გამოთვლის სხვა მეთოდი. გავიყვანოთ $y=f(x)$ მრუდზე აღებული $B_0, B_1, \ldots, B_n$ წერტილებზე n-ური რიგის პარაბოლი:

$$y=\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n.$$

მრუდზე აღებული საწყისი და ბოლო წერტილების აბსცისები იყოს a და b. საძიებელი ინტეგრალის მიახლოვებითი მნიშვნელობად მივიღოთ $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ ინტეგრალის მნიშვნელობა, რომელიც ადვილად გამოითვლება.

ვთქვათ $(x_0\ y_0), (x_1\ y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ არის $B_0, B_1, \ldots B_n$ წერტილების კოორდინატები. ლაგრანჟის საინტერპოლო ფორმულიდან მივიღებთ $\varphi(x)$ პოლინომისათვის გამოხატულებას:

$$\varphi(x)=y_0X_0+y_1X_1+\ldots+y_iX_i+\ldots+y_nX_n,$$

სადაც X_i კოეფიციენტს აქვს სახე:

$$X_i=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

და არის x-ის მიმართ n-ური რიგის პოლინომი, რომელიც ნულად იქცევა მოცემულ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებზე, გარდა $x=x_i$, და ტოლია ერთის, რო-

ცა $x=x_i$. ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=n} y_i \int_a^b X_i\,dx.$$

x_i რიცხვებს აქვს სახე:

$$x_0=a+\theta_0\ (b-a),\ x_1=a+\theta_1\ (b-a), \ldots, x_n=a+\theta_n\,(b-a),$$

სადაც $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ არიან რიცხვები, რომლებიც იზრდებიან 0-დან 1-მდე. თუ მოვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x=a+(b-a)\,t$, მივიღებთ ინტეგრალის მიახლოვებითი მნიშვნელობისათვის გამოთქმას:

$$(b-a)\ (K_0y_0+K_1y_1+\ldots+K_ny_n), \tag{13}$$

სადაც

$$K_i=\int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\ldots(t-\theta_{i-1})\ (t-\theta_{i+1})\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\ldots(\theta_i-\theta_{i-1})\ (\theta_i-\theta_{i+1})\ldots(\theta_i-\theta_n)}\,dt.$$

თუ ყოველნაირ $f(x)$ ფუნქციისათვის ჩვენ (a, b) შუალედს დავყოფთ უფრო მცირე შუალედებად, რომლებიც იმყოფებიან ერთდაიმავე ფარდობაში, მაშინ $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ რიცხვები, და მაშასადამე, K_i კოეფიციენტებიც არ იქნება დამოკიდებული $f(x)$ ფუნქციის სახეზე. მას შემდეგ, რაც K_i კოეფიციენტები იქნება გამოთვლილი, ჩვენ დაგვრჩება მხოლოდ მე-(13) ფორმულაში $y_0, y_1, \ldots \ldots y_n$-ის შეცვლა მათი მნიშვნელობებით.

თუ $y=f(x)$ მრუდი, რომლის ფართობია საძიებელი, მოცემული არის გრაფიკულად, მაშინ ყველაზე ხელსაყრელია (a, b) შუალედის დაყოფა თანატოლ ნაწილებად, და გასაზომი იქნება მხოლოდ მრუდის თანასწორად დაშორებული ორდინატები. თუ ჩვენ დავყოფთ (a, b) შუალედს ორ თანასწორ ნაწილად, მაშინ უნდა მივიღოთ $\theta_0=0$, $\theta_1=\frac{1}{2}$, $\theta_2=1$; ეს გვაძლევს ინტეგრალის მიახლოვებითი მნიშვნელობისათვის

$$I=\frac{b-a}{6}\,(y_0+4y_1+y_2).$$

ანალოგიურად, თუ $n=3$ მივიღებთ ფორმულას:

$$I=\frac{b-a}{8}\,(y_0+3y_1+3y_2+y_3),$$

და როცა $n=4$, გვაქვს:

$$I=\frac{b-a}{90}\,(7y_0+32y_1+12y_2+32y_3+7y_4).$$

ეს მეთოდი ეკუთვნის კოტესს (Cotes). სიმპსონის (Simpson) მეთოდი ცოტა სხვანაირია. ვიგულისხმოთ, რომ (a, b) შუალედი დაყოფილია $2n$ თანატოლ ნაწილად; და ვთქვათ $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ არიან დანაწილების წერტილებზე შესაბამი ორდინატები. თუ ჩვენ გამოვიყენებთ კოტესის ფორმულას იმ ფართობზე, რომელიც მოთავსებულია ორ მიმდევნო ლუწ მაჩვენებლიან ორდინატას შორის, როგორიც არის მაგალითად y_0 და y_2, y_2 და y_4, და ა. შ., ... ჩვენ გვექნება საძიებელი ფართობისათვის შემდეგი გამოსახულება:

$$I=\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\dots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})];$$

თუ მოვახდენთ სათანადო წევრების შეკრებას, მივიღებთ სიმპსონის შემდეგ ფორმულას:

$$I=\frac{b-a}{6n}\,[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})$$

106. გაუსის მეთოდი. გაუსის (Gauss) მეთოდში θ_i სიდიდეებისათვის აიღება სხვა მნიშვნელობები. ისინი მიიღებიან შემდეგი მოსაზრებებიდან:

ვთქვათ შეიძლება მოიძებნოს ისეთი მრავალწევრები უფრო მაღალი და მაღალი ხარისხებისა, რომლებიც (a, b) შუალედში უფრო მცირე და მცირედ განსხვავდებიან $f(x)$ ფუნქციისაგან, რომლის გაინტეგრება არის საჭირო. ვთქვათ მაგალითად,

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots+\alpha_{2n-1}x^{2n-1}+R_{2n}(x),$$

სადაც x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის a და b-ს შორის, $R_{2n}(x)$ ნაშთის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები რჩება რაიმე დადებით ε_n რიცხვზე[1]. საზოგადოდ არ არის ცნობილი α_i კოეფიციენტები, მაგრამ როგორც ამას ქვემოთ დავინახავთ, ეს კოეფიციენტები არ შევა გამოთვლაში. ვთქვათ $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ არის x ცვლადის მნიშვნელობები, მოთავსებული a და b-ს შორის, და ვთქვათ $\varphi(x)$ არის $(n-1)$ ხარისხის პოლინომი, რომელიც ღებულობს $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ მნიშვნელობებისათვის იგივე მნიშვნელობებს, რაც $f(x)$ ფუნქცია. ლაგრანჟის საინტერპოლო ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ მრავალწევრის წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი სახით:

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{2n-1}\alpha_m\varphi_m(x)+R_{2n}(x_0)\Psi_0(x)+\dots+R_{2n}(x_{n-1})\Psi_{n-1}(x),$$

სადაც φ_m და Ψ_k მრავალწევრებია არა უმეტეს, ვიდრე $(n-1)$ ხარისხისა. ცხადია, რომ φ_m მრავალწევრი დამოკიდებულია მხოლოდ შერჩეულ $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ მნიშვნელობებზე. მეორე მხრით $\varphi_m(x)$ მრავალწევრები, როცა $x=x_0$, $x=x_1, \dots, x=x_{n-1}$ უნდა ღებულობდეს იმავე მნიშვნელობებს, რასაც x^m.

[1] ვეიერშტრასის თეორემის ძალით ეს არის ზოგადი თვისება (a, b) შუალედში უწყვეტი ფუნქციისა (იხ. შემდეგი თავი IX, § 199).

მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ ყველა α_i კოეფიციენტი, გარდა α_m-სა, ნულის ტოლია, ასევე $R_{2n}(x)$ მრავალწევრიც; მაშინ $f(x)$ გახდება $\alpha_m x^m$, ხოლო $\varphi(x)$ კი $\alpha_m \varphi_m(x)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x^m - \varphi_m(x)$ სხვაობა უნდა გაიყოს ნამრავლზე:

$$P_n(x) = (x)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

და როცა $m \geqq n$ ჩვენ უნდა გვექნეს $x^m - \varphi_m(x) = P_n\, Q_{m-n}(x)$, სადაც $Q_{m-n}(x)$ არის $(m-n)$ ხარისხის პოლინომი; თუ $m \leqslant n-1$, მაშინ უნდა იყოს $x^m - \varphi_m(x) = 0$. ამიტომ ცთომილება, როდესაც $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ინტეგრალს შევცვლით $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ ინტეგრალით, იქნება ტოლი

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \alpha_m \int_a^b [x^m - \varphi_m(x)]\,dx + \int_a^b R_{2n}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} P_{2n}(x_i) \int_a^b \Psi_i(x)\,dx. \tag{14}$$

ის წევრები, რომლებიც დამოკიდებულია $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ კოეფიციენტებზე, იგიურად ნულის ტოლია, და ჩვენ ვხედავთ, რომ ცთომილება დამოკიდებულია მხოლოდ $\alpha_n, \alpha_{2n+1}, \cdots, \alpha_{2n-1}$ კოეფიციენტებზე და $P_{2n}(x)$ ნაშთზე. საზოგადოდ ეს P_{2n} ნაშთი ძალიან მცირეა $\alpha_n, \alpha_{2n+1}, \cdots, \alpha_{n+1}$ კოეფიციენტებთან შედარებით; ამიტომ მოსალოდნელია მივიღოთ დიდი სიზუსტე, თუ შესაძლებელია $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$ ავიღოთ იმნაირად, რომ ყველა წევრი, რომლებიც დამოკიდებულია $\alpha_n, \alpha_{n+1} \cdots, \alpha_{2n-1}$-ზე, იყოს აგრეთვე ნულის ტოლი. ამისათვის აუცილებელია დ საკმარისი, რომ შემდეგი n ინტეგრალი:

$$\int_a^b P_n Q_0\,dx,\ \int_a^b P_n Q_1\,dx, \ldots, \int_a^b P_n Q_{n-1}\,dx,$$

სადაც Q_i არის i-ური ხარისხის მრავალწევრი, იყოს ნულის ტოლი. ზემოთ (§ 86) დავინახეთ, რომ ამ პირობას დავაკმაყოფილებთ, თუ ავიღებთ

$$P_n = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n] \tag{15}$$

ამრიგად საჭიროა მხოლოდ, რომ $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$-ად მივიღოთ $P_n = 0$ განტოლების n ფესვი, რომლებიც მოთავსებულია a და b-ს შორის.

თუ $a = -1$, $b = +1$, მაშინ $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ იქნებიან ფესვები ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს $X_n = 0$ მრავალწევრისა. ყველა დანარჩენი შემთხვევა შეიძლება დავიყვანოთ ამ შემთხვევაზე ჩასმით $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$. ბ ე რ ტ რ ა ნ ი ს „Traité de Calcul intégrdal“ (გვ. 342) მოცემულია ამ ფესვების მნიშვნელობები, და აგრეთვე მე-(13) ფორმულისა K_i კოეფიციენტები $n=5$-მდე 7 და 8 ათწილადი ნიშნით.

გ ა უ ს ი ს მეთოდში ცთომილება ტოლია:

$$\int\limits_a^b P_{2n}(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} P_{2n}(x_i) \int\limits_a^b \Psi_i(x)\, dx, \tag{16}$$

სადაც $\Psi_i(x)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული იმ ფუნქციაზე, რომლის ინტეგრალია საძიებელი. რომ გვექნეს ცთომილების საზღვარი, საკმარისია ვიცოდეთ $R_{2n}(x)$-ს საზღვარი, ე. ი. ვიცოდეთ (a, b) შუალედში რა მიახლოებით შეიძლება $f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა $(2n-1)$ ხარისხის მრავალწევრით და არ არის საჭირო თვით მრავალწევრის ცოდნა.

რომ ვიპოვოთ განსაზღვრული ინტეგრალის რიცხვითი მნიშვნელობა, შეიძლება აგრეთვე $f(x)$ ფუნქცია დავშალოთ წკრივად და შემდეგ მიღებული წკრივი ვაინტეგროთ წევრობრივ. შემდეგში (თავი VIII) ჩვენ ვნახავთ, თუ რა პირობებში გამოდგება ეს ხერხი და როგორ მიახლოებას გვაძლევს იგი.

106ა. ამსლერის პლანიმეტრი. არსებობს ბევრი ხელსაწყო, რომელნიც გამოგონებულია ბრტყელ მრუდთა ფართობების გამოსათვლელად.[1] ყველაზე საგულისხმო მათ შორის არის ა მ ს ლ ე რ ი ს (Amsler) პლანიმეტრი, მისი თეორია წარმოადგენს წირითი ინტეგრალების საინტერესო გამოყენებას.

განვიხილოთ წრფივი ღერო, რომელსაც შეუძლია იმოძრაოს რამე სიბრტყეზე. $\mathfrak{A}_1$ და $\mathfrak{A}_2$ იყოს ღეროს A_1 და A_2 წერტილების მიერ აღწერილი ჩაკეტილი წირთა ფართობები. (x_1, y_1) და (x_2, y_2) იყოს A_1 და A_2 წერტილების მართკუთხოვანი კოორდინატები, l—მანძილი მათ შორის და θ კუთხე A_1A_2 წრფესა და Ox ღერძს შორის. რომ მოგვეცეს წერტილის ძრაობა (ჩაკეტილი წირზე), საჭიროა მივიღოთ x_1, y_1, θ რამე დამოუკიდებელ t პარამეტრის პერიოდულ ფუნქციებად (ე. ი. x_1, y_1, θ ღებულობენ პირვანდელ მნიშვნელობებს, როცა t იზრდება l-თი). ჩვენ გვაქვს $x_2=x_1+l\cos\theta$, $y_2=y_1+l\sin\theta$ და მაშასადამე

$$x_2\, dy_2 - y_2\, dx_2 = x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1 + l^2\, d\theta + l(\cos\theta\, dy_1 - \sin\theta\, dx_1 + x_1\cos\theta\, d\theta + y_1\sin\theta\, d\theta)$$

თუ აღვნიშნავთ $\mathfrak{A}_1$ და $\mathfrak{A}_2$-ით იმ წირთა ფართობებს, რომლებსაც A_1 და A_2 წერტილები აღწერენ და მივიღებთ მხედველობაში ფართობებისათვის ზემოთ (§ 93) მოყვანილ პირობებს, გვექნება:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2}\int x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2}\int x_2\, dy_2 - y_2\, dx_2;$$

მაშასადამე, წინა ტოლობის ორთავე მხარის ინტეგრობით, მივიღებთ:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + \frac{l^2}{2}\int d\theta + \frac{l}{2}\left[\int(\cos\theta\, dy_1 - \sin\theta\, dx_1) + \int(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta)\, d\theta\right],$$

სადაც ყველა ინტეგრალი აიღება იმ საზღვრებში, რომელნიც ესაბამება t პარამეტრის t_0 და t_0+l საზღვრებს. ცხადია, რომ $\int d\theta = 2K\pi$, სადაც K მთელი რიცხვია, რომელიც დამოკიდებულია იმაზე თუ როგორ მოძრაობს წრფე. მეორე მხრით ნაწილობითი ინტეგრობა გვაძლევს:

[1] აქ აღწერილი ხელსაწყო შეგიძლიათ ნახოთ Abdank-Abakanowicz-ის „Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications" შრომაში (1886).

$$\int x_1 \cos\theta \, d\theta = x_1 \sin\theta - \int \sin\theta \, dx_1,$$

$$\int y_1 \sin\theta \, d\theta = -y_1 \cos\theta + \int \cos\theta \, dy_1.$$

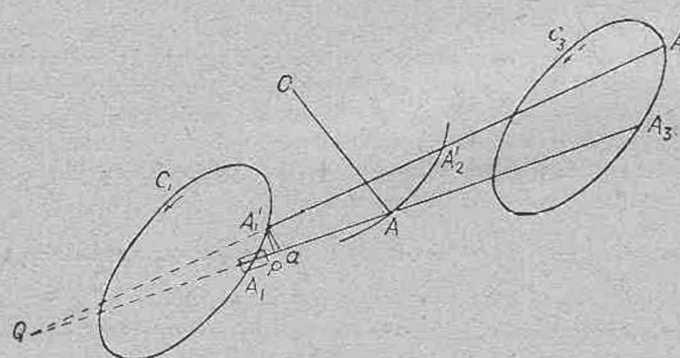
მაგრამ როდესაც t იზრდება t_0-დან t_0+T-მდე, $x_1 \sin\theta$ და $x_1 \cos\theta$ ღებულობს პირვანდელ მნიშვნელობებს, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + K\pi l^2 + l \int (\cos\theta \, dy_1 - \sin\theta \, dx_1).$$

ვთქვათ s არის A_1 წერტილის მიერ აღწერილი წირის რკალის სიგრძე (ნახ. 15c), რომელიც ათვლილია რაიმე საწყისი წერტილიდან გარკვეულ მიმართულებით. α-ით აღვნიშნოთ კუთხე, რომელსაც რკალის ბოლო წერტილზე მხების დადებითი გეზი ადგენს Ox ღერძთან, მაშინ:

$$\cos\theta \, dy_1 - \sin\theta \, dx_1 = (\sin\alpha \cos\theta - \sin\theta \cos\alpha) \, ds = \sin V ds,$$

სადაც V არის კუთხე ღეროს დადებით გეზსა და მხების დადებით გეზს შორის, ათვლილი ისე, როგორც ეს მიღებულია ტრიგონომეტრიაში.



ნახ. 15c.

წინა ფორმულა შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + K\pi l^2 + l \int \sin V ds. \tag{A}$$

ვთქვათ A_3 არის წრფეზე მესამე წერტილი, რომელიც l'—მანძილით არის დაშორებული A_1-დან; A_3 წერტილის მიერ აწერილი ფართობისათვის, ჩვენ მივიღებთ:

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 + K\pi l'^2 + l' \int \sin V ds \tag{B}$$

გამორიცხვა ორივე ფორმულიდან უცნობი $\int \sin V \, ds$ ინტეგრალისა იძლევა დამოკიდებულებას:

$$l'\mathfrak{A}_2 - l\mathfrak{A}_3 = (l'-l)\mathfrak{A}_1 + K\pi ll'(l-l'),$$

რომელსაც შეიძლება მივცეთ სახე:

$$\mathfrak{A}_1(23)+\mathfrak{A}_2(31)+\mathfrak{A}_3(12)+K\pi(12)(23)(31)=0, \tag{C}$$

სადაც (ik) გამოსახავს მანძილს A_i და A_k $(i, k=1, 2, 3)$ წერტილებს შორის, აღებულს შესაბამი ნიშნით. როგორც ამ ფორმულის გამოყენება, განვიხილოთ A_1A_2 მონაკვეთი $a+b$ სიგრძით, რომლის A_1 და A_2 ბოლოები აღწერენ ერთიდაიგივე ჩაკეტილ ამოზნექილ C კონტურს. A_3 წერტილი, რომელიც A_1A_2 მონაკვეთს ყოფს $A_1A_3=a$, $A_3A_2=b$ ნაწილებად, აგრეთვე აღწერს ჩაკეტილ C' კონტურს, რომელიც მდებარეობს C კონტურის შიგნით. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს:

$$\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1,\ (12)=a+b,\ (23)=-b,\ (31)=-a,\ K=1,$$

და (C) ფორმულის გაყოფა $a+b$-ზე, მოგვცემს:

$$\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3=\pi ab,$$

სადაც $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3$ არის ფართობი, რომელიც მოქცეულია (C) და (C') კონტურებს შორის. ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს ფართობი არ არის დამოკიდებული (C) წირის ფორმაზე. ეს თეორემა ეკუთვნის ჰ ო ლ დ ი ჩ ს (Holditch).

იმის ნაცვლად რომ გამოვრიცხოთ (A) და (B) ფორმულებიდან $\int \sin V ds$ ინტეგრალი, პირიქით, გამოვრიცხოთ $\mathfrak{A}_1$ სიდიდე, მივიღებთ:

$$\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_2+K\pi(l'^2-l^2)+(l'-l)\int \sin V ds \tag{D}$$

ა მ ს ლ ე რ ი ს პლანიმეტრი წარმოადგენს ამ ფორმულის გამოყენებას. ვთქვათ $A_1A_2A_3$ არის მყარი ღერო, რომელიც A_2-ში დაკავშირებულია მეორე OA_2 ღეროსთან.

თუ O წერტილს დავამაგრებთ, ხოლო A_3 ბოლოთი, რომელზედაც მობმულია შტიფტი, ავწერთ საძიებელი ფართობის C_3 კონტურს, მაშინ A_2 წერტილი აღწერს ან წრის რკალის ნაწილს ანდა მთელ წრეწირს. $\mathfrak{A}_2$, K, l, l' სიდიდეები ყოველთვის ცნობილია, ამიტომ, რომ ვიპოვოთ საძიებელი ფართობი საჭიროა გამოვთვალოთ $\int \sin V ds$ ინტეგრალი. ეს ინტეგრალი აღებულია (C_1) წირის განგრძივ, რომელსაც A_1 ღეროს ბოლო წერტილი აღწერს. ამ ბოლოზე მოთავსებულია წრიული ცილინდრი დანაყოფებით. ცილინდრს, რომლის ღერძი ემთხვევა A_1A_3 ღეროს, შეუძლია ბრუნვა ამ ღერძის გარს.

განვიხილოთ ღეროს უსასრულოდ მცირე გადაადგილება, რომელსაც იგი გადაყავს $A_1A_2A_3$ მდებარეობიდან $A_1'\ A_2'\ A_3'$ მდებარეობაში. ვთქვათ Q არის A_1A_3 და $A_1'\ A_3'$ წრფეების გადაკვეთის წერტილი. შემოვწეროთ Q წერტილის ირგვლივ, როგორც ცენტრის, წრის $A_1'\alpha$ რკალი და A_1' წერტილიდან დავუშვათ A_1A_2 წრფეზე $A_1'P$ მართობი.

ჩვენ შეგვიძლია ღეროს ეს მცირე გადაადგილება წარმოვადგინოთ, როგორც ჯერ სრიალი თავის თავის განგრძივ ისე, რომ A_1 წერტილი გადადის α-ში ასეთ დროს ცილინდრი სრიალებს სიბრტყეზე მსახველის განგრძივ და მისი ბრუნვა ნულია. შემდეგ კი Q-ს ირგვლივ ბრუნვა ისე, რომ α წერტილი გადავიდეს A_1'-ში. მაგრამ $\dfrac{\alpha A_1'}{A_1'P}$ და $\dfrac{A_1'P}{\operatorname{arc} A_1A_1'}$ ფარდობები, როცა

$A_1' A_1$ რკალი მიისწრაფის ნულისაკენ, უახლოვდებიან 1 და $\sin V$-ს. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$\alpha A_1' = \Delta s (\sin V + \varepsilon)$, სადაც ε არის მცირე სიდიდე Δs-თან ერთად. ამრიგად ცილინდრის მთელი ბრუნვა ტოლფარდია $\Sigma \Delta s (\sin V + \varepsilon)$ ჯამის, ე. ი. ტოლფარდია $\int \sin V ds$-ს. ამიტომ საჭიროა, მხოლოდ ამ ბრუნვის გაზომვა და ჩვენ მივიღებთ საძიებელ ფართობს.

107. წკრივების ინტეგრობა. ვთქვათ $f_1, f_2, \ldots f_n \ldots$ არის უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც (a, b) შუალედში თანაბრად მიისწრაფის $f(x)$-კენ. ჩვენ გვაქვს (§ 29)

$$f(x) = f_n(x) + \delta_n(x), \tag{17}$$

სადაც $\delta_n(x)$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა (a, b) შუალედში ნაკლებია წინასწარ მოცემულ დადებით ε რიცხვზე, თუ მხოლოდ n ინდექსი აღემატება გარკვეულ მთელ N რიცხვს, რომელიც დამოკიდებულია ε რიცხვზე. (17) ფორმულიდან, გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx + \int_a^b \delta_n(x)\,dx. \tag{18}$$

მაგრამ ინტეგრალი $\int_a^b \delta_n(x)\,dx$ აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია ვიდრე $\varepsilon |b - a|$, როდესაც $n \geqq N$. მაშასადამე, ეს ინტეგრალი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, და ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

ანდა

$$\int_a^b \left[\lim_{n=\infty} f_n(x)\right] dx = \lim_{n=\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]; \tag{19}$$

ამგვარად ჩვენ შეგვიძლია გადავანაცვლოთ ინტეგრობისა და ზღვრის ნიშნების რიგი [1].

[1] მეტი ზოგადობით, თუ ინტეგრადი $f_n(x)$ ფუნქციები შემოსაზღვრულია თავისი სიმრავლით, ე. ი. ყოველი x და n-სათვის აქვთ ინდეგრადი $f(x)$ ზღვარი, მაშინ ინტეგრალს $f_n(x)$ ფუნქციიდან ზღვრად აქვს $f(x)$ ფუნქციიდან ინტეგრალი (*Lesbesgue, Lesons sur l'intégration etc*... გვერ. 114). ამ თეორემის კერძო შემთხვევა, როცა f და f_n ფუნქციები უწყვეტია, იყო ადრე დამტკიცებული ოზგუდის (Osgood) მიერ („*American Journal of Mathematics*" 1897).

როდესაც $f_n(x)$ ფუნქცია არა თანაბრად მიისწრაფის $f(x)$-კენ, მაშინ (19) ტოლობა ყოველთვის არ იქნება სამართლიანი. ავიღოთ, მაგალითად,

$$f_n(x)=nxe^{-nx^2},\quad a=0,\quad b=1.$$

აქ ჩვენ გვაქვს $f(x)=\lim\limits_{n=\infty}\left[nxe^{-nx^2}\right]=0$; მე-(19) ფორმულის მარცხენა ნაწილი არის ნული, იმ დროს როდესაც მარჯვენა ნაწილისათვის გვაქვს შემდეგი მნიშვნელობა:

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx\right)=\lim_{n=\infty}\left(-\frac{e^{-nx^2}}{2}\right)_0^1=\lim\left(\frac{1-e^{-n}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

წინამდებარე ფორმულა გამოვიყენოთ (a, b) შუალედში შემდეგი თანაბრად კრებადი წკრივის ჯამზე, რომლის წევრები უწყვეტი ფუნქციებია:

$$f(x)=u_0(x)+\dots+u_n(x)+u_{n+1}(x)+\dots; \tag{20}$$

გვაქვს:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

სადაც $S_n(x)$ არის წკრივის პირველი $n+1$ წევრის ჯამი და $R_n(x)$ წკრივის ჯამი, დაწყებული u_{n+1} წევრიდან. თქმა იმისა, რომ წკრივი თანაბრად კრებადია (a, b) შუალედში, არის ტოლფასი იმისა, რომ $S_n(x)$ თანაბრად მიისწრაფის $f(x)$-კენ ამ შუალედში. ვინაიდან S_n არის აგრეთვე უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ ჩვენ გვექნება ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\left[\int_a^b u_0(x)\,dx+\dots+\int_a^b u_n(x)\,dx\right], \tag{21}$$

რომელიც გამოთქვამს, რომ წკრივი, რომლის ზოგადი წევრი არის $\int_a^b u_n(x)\,dx$ არის კრებადი და ჯამად აქვს ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$. ეს შედეგი მოკლეთ შეგვიძლია ასე გამოვთქვათ: **უწყვეტწევრებიანი ყოველი თანაბრად კრებადი წკრივი შეიძლება ვაინტეგროთ წევრობრივ.**

სწორედ ასევე წკრივის წევრობრივ გაწარმოება შეიძლება, თუ რომ გაწარმოებით მიღებული წკრივი თანაბრად კრებადია.

ვთქვათ

$$f(x)=u_0(x)+u_1(x)+\dots+u_n(x)+\dots$$

არის წკრივი, კრებადი (a, b) შუალედში; დავუშვათ, რომ წკრივი, შედგენილი $u_0', \dots u_1', \dots, u_n', \dots$ ფუნქციების წარმოებულებისაგან არის თანაბრად კრება-

დი იმავე შუალედში, და აღვნიშნოთ $\varphi(x)$-ით ჯამი ამ ახალი წკრივისა:

$$\varphi(x)=\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}+\ldots$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას ვაინტეგრებთ x_0 და x საზღვრებს შორის, რომლებიც მოთავსებულია a და b შორის, მივიღებთ

$$\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx=[u_0(x)-u_0(x_0)]+[u_1(x)-u_1(x_0)]+\ldots,$$

ე. ი.

$$\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx=f(x)-f(x_0), \tag{22}$$

ეს დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ $\varphi(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული

ეს დამტკიცება გულისხმობს, რომ $\frac{du_i}{dx}$ არიან უწყვეტი წარმოებულები, რომლის დაშვება დამტკიცებისათვის[1] არ არის აუცილებელი (§ 30).

---

[1] § 96-ის (51) ფორმულიდან. შეიძლება აგრეთვე გამოყვანა ინტეგრალის ნიშნის ქვეით გაწარმოების ფორმულისა. დავუშვათ, რომ ორი $f(x,\alpha)$ და $f'_\alpha(x,\alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია როცა $x\geqslant a$, $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$, ინტეგრალებს:

$$F(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx \quad \text{და} \quad \Phi(\alpha)=\int_a^{+\infty}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

აქვთ სასრული მნიშვნელობები, და რომ უკანასკნელი ინტეგრალი თანაბრად კრებადია (α_0, α_1) შუალედში. თუ α მოთავსებულია α_0 და α_1 შორის, მაშინ (51) ფორმულის ძალით, გვაქვს:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}du\int_a^{+\infty}f'_u(x,u)\,dx=\int_a^{+\infty}dx\int_{\alpha_0}^{\alpha}f'_u(x,u)\,dy,$$

რომელიც შეიძლება დავწეროთ კიდევ ასე:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Phi(u)\,du=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx-\int_a^{+\infty}f(x,\alpha_0)\,dx=F(\alpha)-F(\alpha_0),$$

საიდანაც გამოვყავს ტოლობა:

$$F'(\alpha)=\Phi(\alpha).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. ინტეგრალი $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ არ შეიძლება გამოსახულ იქნეს ელემენტურ ფუნქციების სასრულო რიცხვის საშუალებით; წარმოვადგინოთ იგი შემდეგი სახით:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^x-1}{x}\,dx = \ln x + \int \frac{e^x-1}{x}\,dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალისათვის შეიძლება მოვძებნოთ დაშლა, რომელიც გამოიყენება x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

რაგინდ დიდი იყოს R, უკანასკნელი წკრივი თანაბრად კრებადია შუალედში $-R$-დან $+R$-მდე, ვინაიდან მისი წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობები ნაკლებია შესაბამად შემდეგი კრებადი წკრივის წევრებზე.

$$1 + \frac{R}{1.2} + \ldots + \frac{R^{n-1}}{1.2\ldots n} + \ldots$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრობით მიღებული წკრივი:

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{n}\,\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

არის კრებადი x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის და წარმოადგენს ფუნქციას, რომლის წარმოებული უდრის $\frac{e^x-1}{x}$.

2. იმ ელიფსის პერიმეტრი, რომლის დიდი ღერძი უდრის $2a$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი არის e, უდრის განსაზღვრულ ინტეგრალს (§ 102):

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

ვინაიდან ნამრავლი $e^2\sin^3\varphi$ მოთავსებულია 0 და $e^2<1$ შორის, ამიტომ ფესვი $\sqrt{1-e^2\sin^3\varphi}$ უდრის იმ წკრივის ჯამს, რომელიც მიიღება ბინომის ფორმულით:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,e^{2n}\sin^{2n}\varphi - \ldots$$

მარჯვენა მხარეში მდგომი წკრივი თანაბრად კრებადია, ვინაიდან მისი წევრები აბსოლუტური მნიშვნელობით არიან ნაკლები იმ წკრივის წევრებზე, რომლებიც მიიღება მოცემულ წკრივიდან, როცა $\sin\varphi=1$. მაშასადამე, მიღებული წკრივი შეგვიძლია ვაინტეგროთ წევრობრივ, და თუ შევნიშნავთ რომ (§ 103)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

მივიღებთ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\dots\right.$$

$$\left.\dots-\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\right]^2(2n-1)\,e^{2n}-\dots\right\}.$$

თუ e ექსცენტრისიტეტი ძალიან მცირეა, მაშინ მარჯვენა ნაწილში საკმარისია ავიღოთ რამოდენიმე რიცხვი წევრებისა, რომ მივიღოთ ინტეგრალის მნიშვნელობა დიდი სიზუსტით.

სრულიად ამგვარადვე შეიძლება დავშალოთ წკრივად ინტეგრალი:

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

როგორიც არ უნდა იყოს მისი ზედა საზღვარი φ. ჩვენ აქ მოვიყვანთ კიდევ ფორმულას:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{4}e^2+\frac{9}{64}e^4+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\right]^2 e^{2n}+\dots\right\},$$

რომელიც გვაძლევს ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს (Legendre) პირველი გვარის ინტეგრალის დაშლას.

III. სხვადასხვა მეთოდი

108. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოებისა და ინტეგრობის ფორმულების გამოყენება. 94 და 95 პარაგრაფების ფორმულები ხშირად ჩვენ საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალების მნიშვნელობები, დაუკავშირებთ რა მათ სხვა, უკვე ცნობილ განსაზღვრულ ინტეგრალებს. მაგალითად, როცა a დადებითია, გვაქვს:

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{a}};$$

თუ გამოვიყენებთ $n-1$-ჯერ (42) ფორმულას, მივიღებთ:

$$(-1)^{n-1}\,1\cdot 2\dots(n-1)\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

ამ მაგალითში, განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა უშუალოდ მიიღება, თუ ჯერ გამოვთვლით განუსაზღვრელ ინტეგრალს. შემდეგ მაგალითებში ეს ასე არ იქნება.

ქვემოთ (თავ. VI, § 128) გამოყვანილი იქნება ფორმულა:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

დავუშვებთ რა $x = y\sqrt{\alpha}$, სადაც α არის დადებითი, მივიღებთ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ თუ α რჩება მეტი რაიმე დადებით k რიცხვზე, მაშინ ყველა ინტეგრალი, რომლებიც მიიღება (23) ინტეგრალის გაწარმოებით α პარამეტრით, იქნება თანაბრად კრებადი. ამიტომ წინა ფორმულიდან მიიღება მთელი რიგი ინტეგრალების მნიშვნელობები:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2} \alpha^{-\frac{3}{2}}, \\
&\int_0^{+\infty} y^4 e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1 \cdot 3}{2^3} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{5}{2}}; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\int_0^{+\infty} y^{2n} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{2n+1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

თუ ვისარგებლებთ ამ ფორმულებით, შეგვიძლია მივიღოთ მრავალი სხვა ფორმულა. ასე, მაგალითად, ჩვენ გვაქვს:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \cos 2\beta y \, dy =$$

$$= \int e^{-\alpha y^2} dy \left[1 - \frac{(2\beta y)^2}{1 \cdot 2} + \dots + (-1)^n \frac{(2\beta y)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} + \dots \right] dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \frac{(2\beta y)^2}{1 \cdot 2} dy + \dots$$

$$+ (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \frac{(2\beta y)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} dy + \dots$$

მარჯვენა მხარეში მოთავსებული ყველა ინტეგრალი ჩვენთვის ცნობილია, და ჩვენ მივიღებთ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} - \frac{(2\beta)^2}{1\cdot 2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha^{-\frac{3}{2}}}{2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(2\beta)^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\alpha^{-\frac{2n+1}{2}} + \ldots,$$

ანუ, გამარტივების შემდეგ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}. \tag{25}$$

სხვა შემთხვევებში ჯერ გამოთვლიან პარამეტრის მიმართ წარმოებულს იმ ინტეგრალისას, რომლის გამოთვლაც უნდათ. ვთქვათ, მაგალითად, გვაქვს ინტეგრალი:

$$I = F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების ფორმულის ძალით გვაქვს:,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} + \int_0^{\alpha} \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}.$$

დავშლით რა მარტივ წილადებად, გვექნება:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)$$

და, მაშასადამე:

$$\int_0^{\alpha} \frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = -\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{Arctg}\alpha.$$

ამრიგად გვაქვს:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{Arctg}\alpha + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)},$$

და შევნიშნავთ რა, რომ როცა $\alpha=0$ ფუნქცია I ნულის ტოლია, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$I=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}\,d\alpha+\int_0^{\alpha}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{Arc\,tg}\alpha\,d\alpha.$$

პირველ ინტეგრალს თუ ვაინტეგრებთ ნაწილობით, საბოლოოდ გვექნება:

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\alpha\ln(1+\alpha^2). \tag{26}$$

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრობის ფორმულაც ზოგჯერ საშუალებას გვაძლევს აგრეთვე გამოვთვალოთ ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალი.

განვიხილოთ, მაგალითად, x^y ფუნქცია; იგი არის უწყვეტი, როცა x იცვლება 0 და 1 შორის, ხოლო y კი a და b შორის, სადაც a და b არიან დადებითი რიცხვები. მაშასადამე, ზოგადი (44) (§ 95), ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx.$$

მაგრამ

$$\int_0^1 x^y\,dx=\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_0^1=\frac{1}{y+1};$$

ამიტომ მარჯვენა ნაწილი უდრის:

$$\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

მეორე მხრით, გვაქვს:

$$\int_a^b x^y\,dy=\left(\frac{x^y}{\ln x}\right)_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x};$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx=\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right). \tag{27}$$

საზოგადოდ, ვთქვათ $P(x$ და $y)$ და $Q(x, y)$ არიან ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$ და x_0, x_1, y_0, y_1 კი რაიმე მუდმივები. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრობის ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx,$$

ე. ი.

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(x, y_1) - P(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y_1} [Q(x_1, y) - Q(x_0, y)]\, dy.$$

ამ ფორმულიდან კოშიმ მოძებნა მრავალი განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა.

109. გამოთვლა ინტეგრალისა: $\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$. აი კიდევ მაგალითი განსაზღვრული ინტეგრალისა, რომელიც გამოითვლება განსაკუთრებული მეთოდით. ინტეგრალს:

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

აქვს სასრული მნიშვნელობა, თუ $|\alpha|$ განსხვავებულია ერთისაგან. ეს $F(\alpha)$ ფუნქცია არის შემდეგი თვისებების:

1. $F(-\alpha)=F(\alpha)$. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$F(-\alpha)=\int_0^{\pi} \ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx,$$

და თუ შევცვლით x ცვლადს $\pi-y$-ით, მივიღებთ:

$$F(-\alpha)=\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)\,dy=F(\alpha).$$

2. $F(\alpha^2)=2F(\alpha)$. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$2F(\alpha)=F(\alpha)+F(-\alpha)$$

ანდა

$$2F(\alpha)=\int_0^{\pi}[\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)+\ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)]dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,dx.$$

თუ $2x$ შევცვლით y-ით, მივიღებთ:

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy;$$

უკანასკნელ ინტეგრალში თუ მივიღებთ $y=2\pi-z$, მოვძებნით:

$$\int_{\pi}^{2\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,dy=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,dz,$$

და, მაშასადამე,

$$2F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)+\frac{1}{2}F(\alpha^2)=F(\alpha^2).$$

წინა ფორმულიდან, თანდათანობით გამოვიყვანთ:

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha^2)=\frac{1}{4}F(\alpha^4)=\cdots=\frac{1}{2^n}F(\alpha^{2^n}).$$

როდესაც $|\alpha|<1$, მაშინ n რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს α^{2^n} მიისწრაფის ნულისაკენ; ამასთან ერთად აგრეთვე $F(\alpha^{2^n})$-იც, ვინაიდან ინტეგრალის ნიშნის ქვეით ლოგარითმი მიისწრაფის ნულისაკენ. მაშასადამე, როცა $|\alpha|<1$ გვაქვს: $F(\alpha)=0$. თუ კი $|\alpha|>1$, მაშინ აღვნიშნავთ რა $\alpha=\frac{1}{\beta}$, მივიღებთ:

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-\frac{2\cos x}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)dx=\int_0^{\pi}\ln(1-2\beta\cos x+\beta^2)\,dx=\pi\ln\beta^2;$$

ვინაიდან $|\beta|<1$, ამიტომ გვრჩება:

$$F(\alpha)=-\pi\ln\beta^2=\pi\ln\alpha^2$$

და ბოლოს შეიძლება დამტკიცდეს (გვერ. 232, მაგალითი 6), რომ $F(\pm1)=0$. მაშასადამე, $F(\alpha)$ ფუნქცია არის უწყვეტი α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის.

110. $\ln\Gamma(n+1)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა. არსებობს აგრეთვე მრავალი სხვადასხვა ხერხი, რომელთა საშუალებით შეიძლება მივიღოთ ზუსტად თუ არა, ყოველ შემთხვევაში, მიახლოებითი მნიშვნელობა განსაზღვრული ინტეგრალისა. აქ მოვიყვანთ ერთ მაგალითს. განმარტების ძალით, გვაქვს:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$$

$x^n e^{-x}$ ფუნქციას აქვს maximum როცა $x=n$, და მისი უდიდესი მნიშვნელობა ეტოლება $n^n e^{-n}$-ს, $(n>0)$, ხოლო x-ის შემდეგი ზრდადობის დროს n-დან $+\infty$-მდე, $x^n e^{-x}$ კლებულობს $n^n e^{-n}$-დან 0-მდე. $n^n e^{-n} e^{-t^2}$ ფუნქციაც აგრეთვე იზრდება 0-დან $n^n e^{-n}$-მდე, როცა t იზრდება $-\infty$-დან 0-მდე და შემდეგ კლებულობს $n^n e^{-n}$-დან 0-მდე t-ს შემდეგი ზრდადობის დროს 0-დან $+\infty$-მდე.

მაშასადამე მოვახდენთ რა ცვლადის შეცვლას

$$x^n e^{-x}=n^n e^{-n} e^{-t^2}, \tag{28}$$

ჩვენ შეგვიძლია დავამყაროთ x და t ცვლადების მნიშვნელობათა შორის ისეთი თანადობა, რომ, როცა t იზრდება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, x იზრდებოდეს 0-დან $+\infty$-მდე.

ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ კიდევ $\frac{dx}{dt}$. თუ ავიღებთ ლოგარითმულ წარმოებულს (28) ფორმულის ორივე მხარისას, მივიღებთ:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

მეორეს მხრით, იმავე (42) ფორმულიდან, გვაქვს:

$$t^2=x-n-n\ln\left(\frac{x}{n}\right).$$

გამოთვლის გამარტივებისათვის, მივიღოთ $x=n+z$ და $\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$ დავშალოთ ტეილორის ფორმულით და შევჩერდეთ პირველ ორ წევრზე; მივიღებთ:

$$t^2=z-n\left[\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2\left(1+\theta\frac{z}{n}\right)^2}\right]=\frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2},$$

სადაც θ მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის. აქედან მოვძებნით მიმდევრობით:

$$\frac{n}{z}+\theta=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\frac{2tx}{x-n}=2t\left(\frac{n}{z}+1\right)=2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)\,t\right];$$

მაშასადამე, ცვლადის შეცვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\Gamma(n+1)=2n^n e^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt+2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)\,t\,dt.$$

პირველი ინტეგრალი ეტოლება:

$$\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-t^2}\,dt=2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\,.$$

მეორე ინტეგრალის გამოთვლა ზუსტად არ შეიძლება, რადგანაც θ უცნობია, მაგრამ შეიძლება მოვძებნოთ ამ ინტეგრალის საზღვარი. მართლაც, ყველა მისი ელემენტი უარყოფითია $-\infty$-სა და 0-ს შორის, ხოლო დადებითი 0-სა და $+\infty$ შორის. ამას გარდა, აბსოლუტური მნიშვნელობით თითოეულ $\int_{-\infty}^{0}$, $\int_{0}^{+\infty}$ ინტეგრალთაგანი ნაკლებია ინტეგრალზე $\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}$.

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2n}\,n^n e^{-n}\left(\sqrt{\pi}+\frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right), \tag{29}$$

სადაც ω მოთავსებულია -1-სა და $+1$ შორის.

როცა n ძალიან დიდია, მაშინ $\frac{\omega}{\sqrt{2n}}$ ძალიან მცირეა, და თუ $\Gamma(n+1)$-ის მიახლოვებითი მნიშვნელობად მივიღებთ გამოსახვას:

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}\,,$$

მაშინ ფარდობითი ცდომილება იქნება ძალიან მცირე, თუმცა აბსოლუტური ცდომილება შეიძლება იყოს ძალიან დიდიც. თუ ავიღებთ (29) ფორმულის ორივე მხრიდან ლოგარითმს, მივიღებთ:

$$\ln\Gamma(n+1)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\varepsilon, \tag{30}$$

სადაც ε ძალიან მცირეა, როცა n ძალიან დიდი. თუ ε-ს მხედველობაში არ მივიღებთ, ჩვენ გვექნება ეგრეთწოდებული ასიმპტოტური მნიშვნელობა $\ln\Gamma(n+1)$-სა. ეს ფორმულა საინტერესოა იმიტომ, რომ იგი გვიჩვენებს ფაქტორიალის სიდიდის რიგს.

სავარჯიშო მაგალითები

1. გამოთვალეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალები შემდეგი ფუნქციებიდან:

$$\frac{1}{(x^4+1)^2},\quad \frac{1}{x(x^5+1)^2},\quad \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3},\quad \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}},\quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}},\quad \frac{x}{\cos^2 x},$$

$$xe^x\cos x,\quad \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}},\quad x^{\mu}\,\mathrm{arc\,tg}\,x,$$

სადაც μ არის წილადი $\frac{p}{q}$.

2. იპოვეთ მარყუჟის ფართობი დეკარტის ფოთოლისა:

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

3. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int y\,dx$, სადაც x და y შეზმული არიან დამოკიდებულე-ბებით:

$$(x^2-a^2)^2-ay^3(2y+3a)=0,\quad y^2(a-x)=x^3,$$

$$y(x^2+y^2)=a(y^2-x^2).$$

4. დაამტკიცეთ ფორმულები:

$$\int \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C,$$

$$\int \sin^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int \cos^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}+C,$$

$$\int \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{\cos^n x\cos nx}{n}+C$$

(*Euler*).

5. გამოთვალეთ ფსევდო-ელიფსური ინტეგრალები:

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},\quad \int\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

6. დაიყვანეთ ელიფსურ ინტეგრალებამდე შემდეგი ინტეგრალები:

$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}},$$

$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^8)+bx^2(1+x^4)+cx^4}},$$

სადაც $R(x)$ არის რაციონალური ფუნქცია.

7. მივიღოთ a, b, c და d მეოთხე ხარისხის $P(x)=0$ განტოლების ფესვებად. არსებობს სამი ინვოლუციური დამოკიდებულება (§ 102):

$$x'=-\frac{M_i x''+N_i}{L_i x''+M_i}\ (i=1,2,3),$$

რომელნიც გადაანაცვლებს ამ ფესვებს წყვილ-წყვილად. თუ რაციონალური $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ გვაქვს იგიურად:

$$f(x)+\sum_{i=1}^{3}f\left(-\frac{M_i x+N_i}{L_i x+M_i}\right)=0,$$

მაშინ ინტეგრალი $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ —ფსევდო-ელიფსურია (იხ. *Bulletin de la Société mathématique* ტ. XV გვერ. 106).

8. $y=Ax^{\mu}$ მრუდის გაწრფევადობა მიგვიყვანს ინტეგრალამდე დიფერენციალური ბინომიდან. შეისწავლეთ ინტეგრადობის შემთხვევები.

9. ვიგულისხმებთ რა $a>1$, გვაქვს:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

აქედან გამოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\pi.$$

10. ვიგულისხმებთ რა $AC-B^2>0$, გვაქვს:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\pi \frac{A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

გამოიყენეთ რედუქციის ფორმულა § 37.

11. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი: $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$.

12. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულები:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\,\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\right), \quad \alpha\beta>0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)\,dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}.$$

13. აღვნიშნავთ რა m და n-ით მთელ დადებით რიცხვებს $(m<n)$, გვაქვს:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

აქ უნდა ისარგებლოთ ელემენტარულ წილადებად დაშლით.

14. წინა ფორმულიდან გამოიყვანეთ დამოკიდებულება:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1).$$

15. აღვნიშნავთ რა $I_{p,q} = \int t^q (t+1)^p \, dt$, გვაქვს რედუქციის ფორმულები:

$$(p+q+1)\, I_{p,q} = t^{q+1}(t+1)^p + p\, I_{p-1,q},$$

$$(p-1)\, I_{-p,q} = t^{q+1}(t+1)^{1-p} - (2+q-p)\, I_{-p+1,q},$$

და ორი ანალოგიური ფორმულა q მაჩვენებლის დასაწევად.

16. გამოიყვანეთ რედუქციის ფორმულები ინტეგრალებისათვის:

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}, \quad Z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

17. გამოიყვანეთ რედუქციის ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

აქედან გამოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალისათვის $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ფორმულა, ანალოგიური ვ ა ლ ი ს ი ს ფორმულისა.

18. აქვს თუ არა განსაზღვრულ ინტეგრალს:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$$

სასრული მნიშვნელობა?

19. დაამტკიცეთ, რომ ფართობს ელიფსური სექტორისას, მოთავსებულს ფოკალურ ღერძსა და იმ რადიუს-ვექტორს შორის, რომელიც გამოდის ფოკუსიდან, აქვს გამოსახულება

$$\mathfrak{A} = \frac{p^2}{2} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

სადაც $p = \frac{b^2}{a}$ აღნიშნავს ელიფსის პარამეტრს და e არის ექსცენტრისიტეტი. დავუშვებთ რა, ზოგადი წესის მიხედვით, $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t$, $t = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, u$, მივიღებთ:

$$\mathfrak{A} = ab\left(\operatorname{arc\,tg} u - e\,\frac{u}{1+u^2}\right).$$

დაამტკიცეთ, რომ ეს გამოხატულება შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს აგრეთვე შემდეგი სახით:

$$\mathfrak{A}=\frac{ab}{2}\,(\varphi-e\sin\varphi),$$

სადაც φ აღნიშნავს ექსცენტრულ ანომალიას.

20. მოძებნეთ ისეთი ბრტყელი მრუდები, რომელთათვის სიგრძე NT ან და MNT სამკუთხედის ფართობი იყოს მუდმივი (იხ. ნახაზი $2a$). ააგეთ მრუდის ორივე შტო.

21. ვთქვათ

$$A_n=\frac{x^{2n+1}}{2.4.6\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n\cos xz\,dz.$$

გამოიყვანეთ რეკურენტული ფორმულა:

$$A_{n+1}=(2n+1)A_n-x\frac{dA_n}{dx}.$$

აქედან გამოიყვანეთ ფორმულები:

$$A_{2p}=U_{2p}\sin x+V_{2p}\cos x,$$

$$A_{2p+1}=U_{2p+1}\sin x+V_{2p+1}\cos x,$$

სადაც U_{2p}, V_{2p}, U_{2p+1}, V_{2p+1} არიან მთელი კოეფიციენტებიანი პოლინომები, და U_{2p}, U_{2p+1} შეიცავენ x ცვლადის მხოლოდ ლუწ ხარისხებს. შეამოწმეთ ამ კანონის სამართლიანობა როცა $n=1$, შემდეგ ადვილად დარწმუნდებით რეკურენტული ფორმულის საშუალებით, რომ მას აქვს ზოგადი ხასიათი.

თუ გამოვიყენებთ A_{2p}-თვის წინა გამოხატულებას, შეიძლება დაამტკიცოთ π^2 რიცხვის უთანაზომადობა. მართლაც, რომ ყოფილიყო $\frac{\pi^2}{4}=\frac{b}{a}$, მაშინ A_{2p}-ში x ოდენობის $\frac{\pi}{2}$-ით შეცვლა, ჩვენ მოგვცემდა შემდეგი სახის დამოკიდებულებას:

$$H_1=a^p\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p}}{2.4.6\ldots 4p}\int_0^1 (1-z^2)^{2p}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz,$$

სადაც H_1 — მთელი რიცხვია. მაგრამ ასეთი ტოლობა შეუძლებელია, რადგან p რიცხვის უსაზღვროდ ზრდადობის დროს მარჯვენა მხარე ნულისაკენ მიისწრაფის.

22. გამოიყვანეთ ფორმულა:

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2a}$$

$\left[\text{დაამტკიცეთ, რომ } \frac{dI}{da}=-2I\right]$.

23. წინა ფორმულიდან გამოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha-\frac{k^2}{\alpha}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\pi}\,e^{-2k}.$$

24. დამოკიდებულებიდან $\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$ გამოიყვანეთ ფორმულა:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}.$$

25. გ ა უ ს ი ს ინტეგრობის მეთოდში ცდომილებას აქვს სახე:

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{1.2\ldots 2n} \cdot \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots(2n-1)}\right]^2,$$

სადაც ξ მოთავსებულია -1 და $+1$ შორის.

(Mansion, *Comptes rendus*, 1886).

თ ა ვ ი VI

ორჯერადი ინტეგრალები

---

1. ორჯერადი ინტეგრალები. გამოთვლის წესები. გრინის ფორმულა

111. S და s ჯამები ორი ცვლადის ფუნქციისათვის. ვთქვათ A სიბრტყის სასრული ნაწილია, შემოსაზღვრული Γ კონტურით, რომელიც შეიძლება შედგენილი იყოს ერთი შეკრული C მრუდისაგან, ან ერთი C კონტურისაგან და რამდენიმე სხვა შეკრული C', C'', ... მრუდისაგან, რომლებიც C-ს შიგნით იმყოფებიან. წარმოვიდგინოთ, რომ A არე დავყავით n ნაწილობრივ არედ: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ დამხმარე წირების საშუალებით. ეს დანაწილება შეიძლება მოვახდინოთ ნებისმიერი წესით; ვიგულისხმოთ მხოლოდ, რომ a_i არეები კ ვ ა დ რ ე ბ ა დ ე ბ ი ა. ვთქვათ $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ამ ნაწილობრივი არეების ფართობებია და Ω—ფართობი A არისა. ცხადია, რომ როგორიც არ უნდა იყოს A არის დანაწილება, ყოველთვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\Omega=\sum\limits_{1}^{n}\omega_i$.

ვთქვათ $f(x, y)$ არის შემოსაზღვრული ფუნქცია A არეში (Γ კონტურის ჩათვლით), M და m იყოს $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები ამ არეში, ხოლო M_i და m_i—საზღვრები $f(x, y)$ ფუნქციისა ნაწილობით a_i არეში. განვიხილოთ ორი ჯამი:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\omega_i M_i, \quad S=\sum_{i=1}^{n}\omega_i m_i;$$

ამრიგად A-ს ყოველ დანაწილებას შეესაბამება ზედა S ჯამი და ქვედა s ჯამი. ცხადია, რომ ყველა S ჯამი აღემატება $m\Omega$; მაშასადამე, მათ აქვთ ნამდვილი ქვედა საზღვარი I. აგრეთვე ყველა s ჯამი არის ნაკლები $M\Omega$; მაშასადამე, მათ აქვთ ნამდვილი ზედა საზღვარი I'. შეიძლება დამტკიცდეს ისე როგორც ზემოთ (§ 69), რომ $I' \leqslant I$; ეს მიიღება აგრეთვე (§ 70) პარაგრაფში მოყვანილ მსჯელობის მსგავსად, შემდეგი წინადადებიდან:

S და s ჯამებს აქვთ ზღვრად I და I' რიცხვები შესაბამად, როცა n უსაზღვროდ იზრდება და მასთან ისე, რომ ყველა a_i არე მიისწრაფის ნულისაკენ თავისი ყველა ზომადობით.

სიმოკლისათვის ვიტყვით, რომ სიბრტყის სასრული A ნაწილი ნაკლებია თავისი ყველა ზომადობით l რიცხვზე, თუ შესაძლოა მოიძებნოს ისეთი l რადიუსიანი წრე, რომელიც შეიცავს A-ს მთლიანად თავის შიგნით. სიბრტყის

ცვლად ნაწილს ეწოდება უ ს ა ს რ უ ლ ო მ ც ი რ ე თავისი ყველა ზომადობით, თუ შეიძლება, მოიძებნოს ნებისმიერი მცირე რადიუსიანი წრე, რომელიც შეიცავს სიბრტყის ამ ნაწილს თავის შიგნით. მაგალითად, კვადრატი, რომლის გვერდები მიისწრაფის ნულისაკენ; ან ელიფსი, რომლის ორივე ღერძი მიისწრაფის ნულისაკენ, არიან უსასრულო მცირეები თავისი ყველა ზომადობით. პირიქით, სწორკუთხედი, რომლის მხოლოდ ერთი გვერდი მიისწრაფის ნულისაკენ ან ელიფსი, რომლის მხოლოდ ერთი ღერძი მიისწრაფის ნულისაკენ, არ არიან უსასრულო მცირე თავის ყველა ზომადობით.

დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ S ჯამს აქვს ზღვრად I რიცხვი. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ დადებითია მთელ A არეში, ვინაიდან ყოველთვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი დადებითი C მუდმივი, რომ ფუნქცია:

$$\varphi(x, y)=C+f(x, y)$$

იყოს დადებითი A არეში. f და φ ფუნქციების S და S' ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან ერთ და იმავე დანაწილების წესს, განსხვავდებიან მხოლოდ მუდმივი $C\Omega$ სიდიდით.

ვთქვათ ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია; ვინაიდან I არის S ჯამების ნამდვილი ქვედა საზღვარი, ამიტომ არსებობს A არის ასეთი დანაწილება n ნაწილობრივ არედ: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, რომ შესაბამი S ჯამი ნაკლები იყოს $I+\frac{\varepsilon}{2}$-ზე. L-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე Γ კონტურებისა და იმ დამხმარე წირებისა, რომლებიც გვაძლევენ A არის დანაწილების კერძო წესს. ვთქვათ ω_i ფართობია a_i არისა და γ_i-კი მისი კონტური. a_i არის შიგნით ჩავხაზოთ შეკრული კონტური γ'_i, რომელსაც არა აქვს საერთო წერტილი γ_i-სთან, მაგრამ იმდენად ახლო γ_i-სთან, რომ γ_i და γ_i' კონტურებს შორის მოთავსებული ფართობი ნაკლები იყოს $\frac{\eta}{n}$-ზე, სადაც η ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. წარმოვიდგინოთ, რომ იგივე შესრულებულია ყველა ნაწილობრივ არეზე: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, და ვთქვათ L' არის სიმრავლე γ'_i წირებისა. ეს L' სისტემა ჰყოფს A' არეს ორ A' და A'' არედ; A' შედგება იმ არეთა სიმრავლისაგან, რომლებიც γ'_i შიგნით იმყოფებიან, ხოლო A''—დარჩენილ არეებისაგან, რომელიც მიიღება A'-ს გამორიცხვით. თუ Ω' და Ω''-ით აღვნიშნავთ ამ ორი არის ფართობებს, მაშინ გვაქვს: $\Omega=\Omega'+\Omega''$ და თანახმად γ'_i წირების შერჩევის წესისას $\Omega-\Omega'$ სხვაობა ანუ Ω'' ნაკლებია η-ზე. L და L' წირებს არა აქვთ არც ერთი საერთო წერტილი; ავღნიშნოთ λ-თი L და L' წირების წერტილებს შორის უმცირესი მანძილი.

ახლა განვიხილოთ A არის ისეთი ნებისმიერი დანაწილება ნაწილობრივ არეებად, რომელთა ყველა ზომა λ-ზე ნაკლებია და ვთქვათ, რომ S'—შესაბამი ზედა ჯამია. S'-ის ნაწილი, რომელიც მიიღება იმ ნაწილობრივ არეებისაგან, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილი L წირთან, ცხადია ნაკლებია S-ზე. მეორე მხრით, ნაწილობრივი არეები, რომელთაც აქვთ ერთი საერთო წერტილი მაინც L წირთან, არიან A'' არის შიგნით და გვაძლევენ S' ჯამის ნაწილს, რომელიც ნაკლებია $M\eta$-ზე. ამგვარად ჩვენ გვაქვს:

$$S'<S+M\eta<I+\frac{\varepsilon}{2}+M\eta;$$

თუ ნებისმიერი η—რიცხვი აღებულია $\frac{\varepsilon}{2M}$-ზე ნაკლები, მაშინ გვექნება

$$S' < I + \varepsilon,$$

ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

ასევე შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ s ჯამს ზღვრად აქვს I' რიცხვი. თუ A არე დაყოფილია p ნაწილობრივ არედ: $A_1, A_2, \dots A_p$, მაშინ, ცხადია, გვექნება ასეთი დამოკიდებულება:

$$I = I_1 + \dots + I_p,\quad I' = I_1' + \dots + I_p',$$

სადაც I_i და I_i' არიან რიცხვები, რომლებიც განსაზღვრულია ისე როგორც ახლა იყო აღნიშნული A_i არეს მიმართ.

112. ორჯერადი ინტეგრალები. თუ I და I' რიცხვები ერთიმეორის ტოლია, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრადია A არეში. S და s ჯამების საერთო I ზღვარს ეწოდება ორჯერადი ინტეგრალი $f(x,y)$ ფუნქციიდან, გავრცელებული A არეზე. მას აღნიშნავენ[1]

$$I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy,$$

სადაც A საინტეგრო არეა.

როგორც მარტივი ინტეგრალის შემთხვევაში, უშუალოდ ჩანს, რომ $f(x,y)$ ფუნქციის ინტეგრადობისათვის A არეში აუცილებელია და საკმარისი, რომ $S-s$ სხვაობა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როცა ნაწილობრივი არეთა ზომების უდიდესი მნიშვნელობა ნულისაკენ მიისწრაფის. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქცია არის ინტეგრადი. მართლაც, ვთქვათ გვაქვს აღებული ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ფუნქციის რყევა ნაკლებია ε-ზე A-ს ყოველ ნაწილში, რომელთა ზომები ნაკლებია η-ზე. თუ ყველა ნაწილობითი $a_1, a_2, \dots, a_n$ არეები თავისი ზომადობით ნაკლებია η-ზე, მაშინ თითოეული $M_i - m_i$ სხვაობათაგანი ნაკლები იქნება ε-ზე და, მაშასადამე, $S-s$ სხვაობა ნაკლებია $\varepsilon\Omega$-ზე.

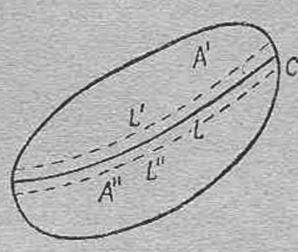
ისე, როგორც ზემოთ (§ 71)-ში, აქაც ამტკიცებენ, რომ ჯამი ან ნამრავლი ნებისმიერი რიცხვი ინტეგრადი ფუნქციებისა არის აგრეთვე ინტეგრადი ფუნქცია. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ინტეგრადია A არეში, იგი ინტეგრადია ყოველ A' არეში, მოთავსებული A-ს შიგნით; თუ A არე დანაწილებულია რამდენიმე ნაწილობრივ $A_1, A_2, \dots A_p$ არედ, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული A არეზე ტოლია იმ ორჯერადი ინტეგრალების ჯამისა, რომლებიც გავრცელებულია $A_1, A_2, \dots, A_p$ არეებზე.

[1] მას აღნიშნავენ აგრეთვე $\iint_A f(x,y)\,d\omega$-ით, სადაც $d\omega$ არის ფართობის ელემენტი; ანალოგიურ აღნიშვნებს ხმარობენ აგრეთვე მრავალჯერადი ინტეგრალებისათვის.

განვიხილოთ ახლა უფრო ზოგადი შემთხვევა, როცა $f(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც შემოსაზღვრულია A არეში, აქვს ამ არეში უსასრულო რიცხვი წყვეტის წერტილებისა; მივიღოთ მასთან, რომ ყველა წყვეტის წერტილი შეგვიძლია მოვათავსოთ რაიმე δ არეში, რომლის ფართობი ნაკლებია ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით რიცხვზე. *ასეთი ფუნქცია ინტეგრადია A არეში.* მართლაც, $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრადობის პირობა შეიძლება გამოითქვას ასე: *იმისათვის, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია იყოს ინტეგრადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველ წინასწარ მოცემულ ε რიცხვს შეესაბამებოდეს A არის ისეთი დანაწილება ნაწილ-ნაწილ არეებად, რომ შესაბამი $S-s$ სხვაობა ნაკლები იყოს ε-ზე.* ეს შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს იქიდან, რომ სხვაობა $S-s$ ნაკლებია ან ტოლი $I-I'$-სა.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ A არეში შემოსაზღვრული $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან ამ არეში, სადაც არე შემოსაზღვრულია შეკრული C მრუდით გარდა იმ L წირის წერტილებისა, რომლებიც ყოფს A არეს ორ A' და A'' არედ (ნახ. 16). A' არეში $f(x, y)$ ფუნქცია იგიურად ტოლია უწყვეტი $f_1(x, y)$ ფუნქციისა და A'' არეში კი უწყვეტი $f_2(x, y)$ ფუნქციისა.

$f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობების შესახებ L წირის განრძივ ჩვენ არ გავაკეთებთ არავითარ დაშვებას, გარდა იმისა, რომ იგი რჩება შემოსაზღვრული. A არეში L წირის ორივე მხრით გავიყვანოთ ორი უსასრულო მახლობელი L' და L'' წირი ისე, რომ მათ შორის მოთავსებული ფართობი ნაკლები იყოს $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$-ზე, სადაც ε მოცემული დადებითი რიცხვია. ეს ორი L' და L'' წირი ყოფენ A არეს სამ A', A'', A''' არედ, სადაც A''' არის ის არე, რომელიც L წირს შიგ შეიცავს. წარმოვიდგინოთ, რომ A', A'', A''' დავანაწილეთ უფრო მცირე არეებად; $S-s$ სხვაობის ნაწილი მიღებული A'''-დან ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე, და რადგან $f(x, y)$ უწყვეტია A' და A'' არეებში, $S-s$-ს ნაწილი მიღებული A' და A''-დან ნაკლებია აგრეთვე $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე, თუ სათანადოდ შევარჩევთ დანაწილების წესს. ამრიგად გვაქვს $S-s<\varepsilon$; რადგანაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრადია A არეში. ცხადია, რომ ეს მსჯელობა ზოგადია.



ნახ. 16.

ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული A არეზე ტოლია ინტეგრალების ჯამისა, გავრცელებული A', A'', A''' არეებზე.

როცა L', L'' წირები უსაზღვროდ უახლოვდებიან L-ს, ორჯერადი ინტეგრალი A''' არეზე გავრცელებული ნულისაკენ მიისწრაფის; ამგვარად ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული A არეზე არის ზღვარი იმ ორი ინტეგრალის ჯამისა, რომლებიც გავრცელებულია A' და A'' არეებზე და არ არის დამოკიდებუ-

ლი ფუნქციის მნიშვნელობებზე L წირის განვრძივ. უფრო ზოგადად, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრადია A არეში, შეგვიძლიან ინტეგრალის მნიშვნელობის შეუცვლელად, ნებისმიერად ვცვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები წერტილთა სიმრავლეზე იმ პირობით, რომ იგი რჩება შემოსაზღვრული და რომ ყველა ეს წერტილი შეიძლება მოთავსდეს ბ არეში (ბმული ან არა), რომლის ფართობი ნაკლებია წინასწარ მოცემულ დადებით რიცხვზე. ამ შენიშვნას შეიძლება დაუკავშიროთ შემდეგი: თუ გამოვთვლით I-ს როგორც S ჯამის ზღვარს, შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ ამ ჯამში ნაწილები, მიღებული ნაწილობრივ არეთა ნებისმიერი რიცხვიდან, თუ კი ჯამი ამ ნაწილობრივი არეების ფართობებისა მიისწრაფის ნულისაკენ.

ორჯერადი ინტეგრალის ცნება შეიძლება განზოგადოებულ იქნას. ვთქვათ (ξ_i, η_i) ნებისმიერი წერტილია a_i ნაწილის შიგ ან მის კონტურზე; ცხადია, რომ ჯამი $\sum f(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i$ მოთავსებულია S და s ჯამებს შორის. ამრიგად მას აქვს აგრეთვე ზღვრად ორჯერადი ინტეგრალი, როგორიც არ უნდა იყოს (ξ_i, η_i) წერტილის ამორჩევის წესი.

საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემა უშუალოდ ვრცელდება ორჯერად ინტეგრალებზე. ვთქვათ $f(x, y)$ და $\varphi(x, y)$ ინტეგრადი ფუნქციებია, რომლებთაგან ერთ-ერთი $\varphi(x, y)$ მუდმივ ნიშანს ინარჩუნებს A არეში; ვიგულისხმოთ მაგალითად, რომ $\varphi(x, y) > 0$.

თუ M და m არის $f(x, y)$ ფუნქციის ნამდვილი ზედა და ქვედა საზღვრები A არეში, მაშინ ცხადია, რომ:

$$M\varphi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i > f(\xi_i, \eta_i)\,\varphi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i > m\,\varphi(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i;$$

თუ ყველა ასეთ უტოლობას შევკრებთ და ზღვარზე გადავალთ, მივიღებთ:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_A \varphi(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

სადაც μ მოთავსებულია M და m-ს შორის. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ იგი მიიღებს μ-ს მნიშვნელობას რაიმე (ξ, η) წერტილზე, მოთავსებულს C კონტურის შიგნით, და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

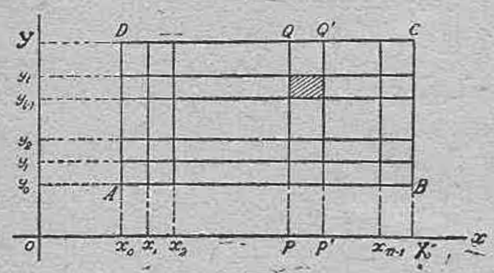
$$\iint\limits_A f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta) \iint\limits_A \varphi(x, y)\,dx\,dy \tag{2}$$

ეს არის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა ორჯერადი ინტეგრალისათვის. თუ, მაგალითად, $\varphi(x, y) = 1$, მაშინ ინტეგრალი $\iint dx\,dy$, გავრცელებული სიბრტყის A ნაწილზე, ცხადია, უდრის სიბრტყის ამ ნაწილის Ω ფართობს, და (1) ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \Omega f(\xi, \eta) \tag{3}$$

113. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ორი მარტივი ინტეგრალის მიმდევრობით გამოთვლაზე. განვიხილოთ პირველად შემთხვევა, როცა საინტეგრო არე მართკუთხედია, შემოსაზღვრული წრფეებით: $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$, სადაც $x_0<X$, $y_0<Y$ (ნახ.17).

ვთქვათ $I(x)$ არის მნიშვნელობა ორჯერადი ინტეგრალისა $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, გავრცელებული ამ მართკუთხედის იმ ნაწილზე, რომელიც მდებარეობს Oy ღერძის პარალელურ PQ წრფის მარცხნით. ამ წრფის აბსცისი არის x, რომელიც მოთავსებულია x_0-სა და X შორის. ცხადია, რომ ეს ინტეგრალი $I(x)$ არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ტოლია ნულის $x=x_0$-თვის; რომ ვიპოვოთ მისი წარმოებული $I'(x)$, საკმარისია გამოვითვალოთ $I(x+h)-I(x)$ ნაზრდის მთავარი ნაწილი. ეს სხვაობა ტოლია ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობისა, რომელიც გავრცელებულია მართკუთხედის უსასრულო ვიწრო ზოლზე, მოთავსებული Oy ღერძის პარალელურ PQ და $P'Q'$ წრფეებს შორის, აბსცისებით x და $x+h$. მისი გამოსახულების შედგენისათვის, წარმოვიდგინოთ, რომ ეს ზოლი დანაწილებულია მცირე მართკუთხედებად x ღერძის პარალელურ წრფეებით, $y=y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, სადაც y_i რიცხვები იზრდებიან ინდექსთან ერთად. თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას თითოეულ ასეთ მცირე მართკუთხედზე, გვექნება:



ნახ. 17.

$$I(x+h)-I(x)=h\,[(y_1-y_0)f(\xi_1, \eta_1)+\cdots+(y_i-y_{i-1})f(\xi_i, \eta_i)+\cdots], \quad (4)$$

სადაც (ξ_i, η_i) არის იმ მართკუთხედის ერთ-ერთი წერტილის კოორდინატები, რომელიც შედგენილია წრფეებით: PQ, $P'Q'$ და Ox ღერძის პარალელებით $y=y_{i-1}$, $y=y_i$. მეორეს მხრით, თანახმად საშუალო მნიშვნელობის ფორმულისა მარტივი ინტეგრალისათვის, გვაქვს:

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x, y)\,dy=(y_i-y_{i-1})\,f(x, y_i'), \quad y_{i-1}<y_i'<y_i.$$

თუ აღვნიშნავთ $f(\xi_i, \eta_i)-f(x, y_i')=\varepsilon_i$, მაშინ სხვაობა:

$$I(x+h)-I(x)$$

დაიწერება ასე:

$$h\left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy+\varepsilon_1(y_1-y_0)+\cdots+\varepsilon_i(y_i-y_{i-1})+\cdots\right].$$

(ξ_i, η_i) და (x, y_i') წერტილები ეკუთვნიან ერთსა და იმავე ნაწილობრივ მართკუთხედს. ვინაიდან $f(x, y)$ თანაბრად უწყვეტია, ამიტომ h რიცხვი და ყველა $y_i - y_{i-1}$ სხვაობა შეგვიძლია ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ ყველა აბსოლუტური მნიშვნელობა $|\varepsilon_i|$ ნაკლები იქნეს ნებსით აღებულ დადებით ε რიცხვზე და ჩვენ გვაქვს:

$$I(x+h) - I(x) = h\left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy + \varepsilon'\right], \tag{5}$$

სადაც ε'-ს აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $\varepsilon(Y - y_0)$-ზე. მაშასადამე, ფარდობას:

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h}$$

ზღვრად აქვს $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy$, როცა h ნულისაკენ მიისწრაფის, და ამრიგად

$I(x)$ ინტეგრალი უდრის $\int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} f(a, y)\,dy$. კერძოდ ორჯერადი ინტეგრალი,

გავრცელებული მთელს მართკუთხედზე მოცემული იქნება ფორმულით:

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy; \tag{6}$$

ამრიგად, რომ გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი, პირველად უნდა ვაინტეგროთ $f(x, y)$, ფუნქცია y_0 და Y საზღვრებს შორის, განვიხილავთ რა x-ს როგორც მუდმივს, ხოლო y-ს როგორც ცვლადს; მიღებული შედეგი იქნება x-ს ფუნქცია, რომელიც კიდევ ერთხელ უნდა ვაინტეგროთ x_0-სა და X საზღვრებს შორის.

მოვახდენთ რა მოქმედებას შექცეული რიგით, ე. ი. გამოვთვლით რა პირველად ნაწილს S ჯამისას, რომელიც მიიღება მართკუთხედებისაგან, მოთავსებული Ox ღერძის პარალელურ ორ წრფეს შორის, იმავე წესით გვექნება:

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx;$$

ამ ორი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$

ამ ფორმულით გამოთქმული თეორემა ატარებს ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ინტეგრობის სახელწოდებას. დამტკიცების დროს ვგულისხმობდით, რომ საზღვრები x_0, X, y_0, Y მუდმივებია და $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ამ საზღვრებს შორის.

მაგალითი. ვთქვათ $z=\frac{xy}{a}$. ზოგადი ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$\iint_R \frac{xy}{a}\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{xy}{a} dy = \int_{x_0}^{X} \frac{x}{2a} (Y^2-y_0^2) dx = \frac{1}{4a} (X^2-x_0^2)\ (Y^2-y_0^2).$$

საზოგადოდ, თუ $f(x, y)$ ფუნქცია არის ნამრავლი ორი ფუნქციისა, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე და მეორე მხოლოდ y-ზე, მაშინ გვაქვს:

$$\iint_R \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx \,.\, \int_{y_0}^{Y} \psi(y)\, dy;$$

სადაც მარჯვენა ნაწილის ორივე ინტეგრალი სრულიად დამოუკიდებელია ერთიმეორისაგან.

ამ შენიშვნიდან ფრანკლინმა[1] (Franklin) გამოიყვანა ჩებიშევის ერთი საინტერესო თეორემის მეტად მარტივი დამტკიცება. ვთქვათ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ არიან ფუნქციები უწყვეტი (a, b) შუალედში, სადაც $a<b$. ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint [\varphi(x)-\varphi(y)][\psi(x)-\psi(y)]\, dx\, dy,$$

გავრცელებული კვადრატზე, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით: $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=b$, ეტოლება სხვაობას:

$$2(b-a) \int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx - 2 \int_a^b \varphi(x)\, dx \,.\, \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

მაგრამ ზემო ორჯერადი ინტეგრალის ყველა ელემენტი ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, თუ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები მთელს (a, b) შუალედში ერთდროულად იზრდებიან ან კლებულობენ და სრულიად ამგვარადვე ორჯერადი ინტეგრალის ყველა ელემენტი შეინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც ერთი ამ ფუნქციათაგანი ყოველგან მატულობს, ხოლო მეორე — კლებულობს. პირველ შემთხვევაში $\varphi(x)-\varphi(y)$ და $\psi(x)-\psi(y)$ სხვაობებს აქვთ ყოველთვის ერთნაირი ნიშანი, ხოლო მეორე შემთხვევაში სხვადასხვა.

---

[1] *American Journal of Mathematics* ტ. VII გვ. 77.

მაშასადამე, თუ ყველგან (a, b) შუალედში $\varphi(x)$ და $\psi\ (x)$ ფუნქციები ან ორივე იზრდება ან ორივე კლებულობს, მაშინ გვაქვს:

$$(b-a) \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

როცა ამ ფუნქციებიდან ერთი ზრდადია და მეორე კლებადი, მაშინ:

$$(b-a) \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,dx \,.\, \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi(x) = \psi(x)$, ორჯერად ინტეგრალს აქვს სრულიად გარკვეული ნიშანი, რადგან ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქცია არის სრული კვადრატი. ამ შემთხვევაში ყოველი სახის $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის გვაქვს:

$$(b-a) \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx \geqslant \left[\int_a^b \varphi(x)\,dx\right]^2,$$

ამასთანავე ტოლობის ნიშანს აქვს ადგილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi(x)$ არის მუდმივი.

აქედან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ვარიაციათა აღრიცხვის ერთი საინტერესო ამოცანის გადაწყვეტა. ვთქვათ P და Q არის სიბრტყის ორი მოცემული წერტილი კოორდინატებით (a, A) და (b, B). ვთქვათ, რომ $y=f(x)$ არის განტოლება იმ წირისა, რომელიც აერთებს ამ ორი წერტილს, ამასთანავე იგულისხმება, რომ $f(x)$ ფუნქცია თავის $f(x)$ წარმოებულითურთ უწყვეტია (a, b) შუალედში. საძიებელია ისეთი მრუდი, რომლისთვისაც ინტეგრალს $\int_a^b y'^2\,dx$ ჰქონდეს minimum-ი. შევცვლით რა $\varphi(x)$-ს წინა უტოლობაში y'-ით და შევნიშნავთ, რომ დაშვების თანახმად $f(a)=A$ და $f(b)=B$, გვაქვს:

$$(b-a) \int_a^b y'^2\,dx \geqslant (B-A)^2.$$

მაშასადამე, ინტეგრალის უმცირესი მნიშვნელობა ეტოლება $\dfrac{(B-A)^2}{b-a}$, და ინტეგრალი მართლაც აღწევს ამ მნიშვნელობას, თუ y' არის მუდმივი, ე. ი. თუ წირი, რომელიც განსახილავ წერტილებს აერთებს არის PQ წრფე.

114. ნებისმიერი არის შემთხვევა. სანამ გადავიდოდეთ ინტეგრობის ნებისმიერი არის შემთხვევაზე, პირველად განვაზოგადოთ მე-(6) ფორმულა, მივიღებთ რა, რომ $f(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც რჩება შემოსაზღვრული, აქვს $ABCD$ მართკუთხედში ერთი ან რამოდენიმე წყვეტის წირი. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია წყვეტილია იმ L წირის განგრძივ (ან იმ წირის გარკვეულ ნაწილის განგრძივ), რომელიც აერთებს AD-ს წერტილს BC-ს წერ-

ტილთან და რომლის განტოლება არის $y=\varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია (x_0, X) შუალედში. ეს L წირი ჰყოფს R მართკუთხედს ორ ნაწილად: ერთი R_1 ნაწილი, მდებარე L-ის ქვევით, რომელშიაც გვაქვს $f(x,y)=f_1(x,y)$, სადაც $f_1(x,y)$ არის უწყვეტი R_1 არეში, და R_2 ნაწილი, მდებარე L-ის ზევით, რომელშიაც $f(x,y)=f_2(x,y)$, სადაც $f_2(x,y)$ არის ფუნქცი უწყვეტია R_2 არეში. როგორც უკვე შევნიშნეთ (§ 112), $f(x,y)$ არის ინტეგრადი.

რომ მივიღოთ აღნიშნულ ორჯერადი ინტეგრალის გამოსახვა, საკმარისია ცოტა ოდნავ შევცვალოთ წინა პარაგრაფის მსჯელობა. $I(x)$ ინტეგრალი, როგორც განმარტებული გვქონდა არის ჯამი ორჯერადი ინტეგრალებისა $I_1(x)$ და $I_2(x)$, გავრცელებული იმ არის ნაწილებზე, რომლებიც დალაგებულია შესაბამად L წირის ზევით და ქვევით და მოთავსებულია Oy ღერძის პარალელურ PQ წრფის მარცხნით. რომ გამოვითვალოთ $I_1'(x)$ ამისათვის ζ-ით აღვნიშნოთ $\varphi(x)$-ის მინიმალური ორდინატი $(x, x+h)$ შუალედში; მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავშალოთ $I_1(x+h)-I_1(x)$ ორ ინტეგრალად:

$$I_1(x+h)-I_1(x)=J+j,$$

სადაც J ორჯერადი ინტეგრალია, გავრცელებული R ზოლის ნაწილზე, $y=\zeta$ წრფის ქვევით, და j გავრცელებულია ამავე ზოლის ნაწილზე $y=\zeta$ წრფის ზემოთ. ისე, როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც დავამტკიცებთ, რომ

$$J=h\Big[\int_{y_0}^{\zeta} f_1(x,y)\,dy+\eta_1\Big]=h\Big[\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\int_{\varphi(x)}^{\zeta} f_1(x,y)\,dy+\eta_1\Big],$$

და, მაშასადამე,

$$J=h\Big[\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\eta_2\Big],$$

სადაც η_1 და η_2 უსასრულო მცირეებია h-თან ერთად. მეორე მხრით, გვაქვს

$$|j|<Mh\delta,$$

სადაც M არის $|f|$-ს ზედა ზღვარი, ხოლო δ კი $\varphi(x)$ ფუნქციის რყევა $(x, x+h)$ შუალედში. ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ $\frac{j}{h}$ ფარდობა მიისწრაფის ნულისაკენ h-თან ერთად და გვაქვს:

$$J_1'(x)=\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy.$$

$I_2''(x)$ წარმოებული გამოითვლება ამავე წესით, და თუ მივიღებთ

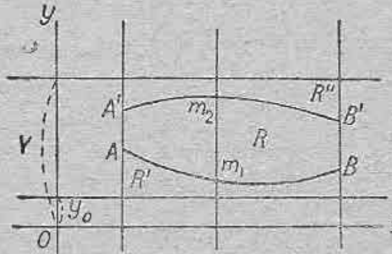
$$\int_{y_0}^{X} f(x,y)\,dy=\int_{y_0}^{\varphi(x)} f_1(x,y)\,dy+\int_{\varphi(x)}^{Y} f_2(x,y)\,dy,$$

ჩვენ ვხედავთ რომ ორჯერადი ინტეგრალის

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

მნიშვნელობა მოცემული იქნება (6) ფორმულით. ცხადია, რომ ეს მეთოდი არის ზოგადი და გამოყვანა რჩება იგივე, როგორიც არ უნდა იყოს რიცხვი წყვეტის წირებისა, რომლებიც L-ის ანალოგიურია $ABCD$ მართკუთხედში, იმ პირობით, რომ $f(x,y)$ რჩება შემოსაზღვრული.

განვიხილოთ ახლა ისეთი კონტური, რომელსაც Oy ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს არა უმეტეს ვიდრე ორ წერტილში. მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ კონტური შექმნილია ორი წრფის AA' და BB' ნაკვეთით, რომლებიც ეკუთვნიან Oy $(a<b)$ ღერძის პარალელურ $x=a$, $x=b$ წრფეებს, და ორი მრუდის Am_1B, $A'm_2B'$ რკალით, რომლებიც წარმოდგენილია განტოლებებით: $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, $y_2 \geqslant y_1$, სადაც y_1 და y_2 ფუნქციები უწყვეტია a და b-ს შორის. შეიძლება, A და A' წერტილები ერთმანეთს ემთხვეოდნენ და აგრეთვე B და B' წერტილებიც; ეს იქნება, მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როცა განსახილავი კონტური შეკრული მრუდია, ანალოგიური ელიფსისა. ვთქვათ $f(x, y)$ არის უწყვეტი ფუნქცია ასეთი მრუდით შემოსაზღვრულ R არეში და თვით კონტურზედაც. რომ გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი, გავავლოთ Ox ღერძის პარალელური ორი წრფე: $y=y_0$, $y=Y$ ისე, რომ R არე მოთავსდეს მთლიანად მათ შორის, და ვთქვათ T მართკუთხედია შემოსაზღვრული ოთხი წრფით: $x=a$, $x=b$, $y=y_0$, $y=Y$ (ნახ. 18).



ნახ. 18.

Am_1B, $A'm_2B'$ წირები T არეს ანაწილებენ სამ არედ: R არე, R' არე Am_1B მრუდის ქვევით და R'' არე $A'm_2B'$ მრუდის ზემოთ. ვთქვათ $F(x,y)$ არის დამხმარე ფუნქცია განსაზღვრული T არეში შემდეგნაირად: 1) $F(x,y)=f(x,y)$ R არეში და მის კონტურზე; 2) $F(x,y)=0$ R' და R'' არეებში. ცხადია, რომ

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T F(x,y)\,dx\,dy.$$

მაგრამ (6) ფორმულა გამოიყენება $F(x,y)$ ფუნქციაზე, რომელსაც აქვს წყვეტის წირებად Am_1B და $A'm_2B'$, და ჩვენ გვაქვს:

$$\iint_T F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_0}^{Y} F(x,y)\,dy,$$

მეორე მხრით თანახმად $F(x, y)$ ფუნქციის განმარტებისა, გვაქვს:

$$\int_{y_0}^{Y} F(x, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy,$$

და, მაშასადამე,

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy. \tag{7}$$

პირველი ინტეგრობის დროს x უნდა განვიხილოთ როგორც მუდმივი, მაგრამ y_1 და y_2 საზღვრები არიან არა მუდმივები, არამედ x-ის გარკვეული ფუნქციები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი $\frac{xy}{a}$ ფუნქციიდან, აღებული იმ წრის მეოთხედის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებით და წრეწირით:

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

x-ის საზღვრები არის 0 და R, ხოლო როცა x მუდმივია y იცვლება 0-დან $\sqrt{R^2-x^2}$-მდე. მაშასადამე, ორჯერადი ინტეგრალი გამოისახება:

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{xy}{a}\,dy = \int_0^R \frac{x}{2a}\left[y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_0^R \frac{x\,(R^2-x^2)}{2a}\,dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება; იგი უდრის $\frac{R^4}{8a}$.

თუ ინტეგრობის არე შემოსაზღვრულია ნებისმიერი სახის კონტურით, მაშინ ამ არეს დავყოფთ რამდენიმე ნაწილად ისე, რომ Oy ღერძის პარალელური წრფე, ჰკვეთდეს თითოეულ ამ ნაწილის კონტურს არა უმეტეს, ვიდრე ორ წერტილში. შეგვეძლო აგრეთვე დაგვეწყო ინტეგრობა x ცვლადის მიხედვით, დავყოფდით რა არეს ისეთ ნაწილებად, რომ წრფე პარალელური Ox ღერძისა, ჰკვეთდეს თითოეულ ამ ნაწილის კონტურს არა უმეტეს, ვიდრე ორ წერტილში. ავიღოთ, მაგალითად, შეკრული ამოზნექილი მრუდი, დალაგებული იმ მართკუთხედის შიგნით, რომლის გვერდები: $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ გადიან ამ მრუდის ოთხ A, B, C, D წერტილზე, რომლებზედაც x და y-ს აქვთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები[1]. ვთქვათ $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$ არიან ACB და ADB რკალების განტოლებები. ვთქვათ აგრეთვე $x_1=\psi_1(y)$, და $x_2=\psi_2(y)$ არიან CAD, და CBD რკალების განტოლებები; ამასთანავე $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ უწყვეტია a-დან b-მდე, ხოლო $\psi_1(y)$ და $\psi_2(y)$ უწყვეტი, როცა y იცვლება c-დან d-მდე. გამო-

[1] მკითხველს ეკისრება ნახაზის შედგენა.

ვთვლით რა ორი სხვადასხვა წესით ორჯერად ინტეგრალს $f(x, y)$ ფუნქციიდან, რომელიც უწყვეტია ამ კონტურის შიგნით და გაუტოლებთ რა ერთმანეთს ორივე მიღებულ გამოხატულებებს, მივიღებთ:

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx; \tag{8}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ორთავე ინტეგრალში საზღვრები სრულიად განსხვავებულია. ყოველი ამოზნექილი კონტური გვაძლევს ასეთ სახის ფორმულას. ასე, მაგალითად, თუ მივიღებთ ინტეგრობის არედ სამკუთხედს, შემოსაზღვრულს წრფეებით $y=0$, $x=a$, $y=x$, მივიღებთ ფორმულას, რომელიც მოცემული იყო ლეჟან-დირიხლეს (Lejeune-Dirichles) მიერ

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

115. ანალოგია მარტივ ინტეგრალებთან. ინტეგრალს

$$\int_a^x f(t)\, dt,$$

განხილულს როგორც x-ის ფუნქცია, აქვს თავის წარმოებულად $f(x)$ ფუნქცია. ანალოგიური თეორემა არსებობს ორჯერადი ინტეგრალებისათვის. ვთქვათ $f(x, y)$ არის ფუნქცია უწყვეტი იმ მართკუთხედის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით:

$$x=a,\ x=A,\ y=b,\ y=B (a<A,\ b<B).$$

ორჯერადი ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან, გავრცელებული იმ მართკუთხედის არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით:

$$x=a,\ x=X,\ y=b,\ y=Y (a<X<A,\ b<Y<B),$$

არის ფუნქცია ცვლადი წვეროს X, Y კოორდინატებისა. ეს ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$F(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy.$$

ვთქვათ

$$\Phi(x) = \int_b^Y f(x, y)\, dy.$$

$F(X, Y)$-ის პირველი გაწარმოება X-ით, გვაძლევს:

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\Phi(X)=\int_b^Y f(X, y)\, dy,$$

და მეორე გაწარმოების შემდეგ Y-ით მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}=f(X, Y). \tag{9}$$

ყველაზე ზოგადი სახე $u(X, Y)$ ფუნქციისა, რომელიც აკმაყოფილებს წინა (9) პირობას, ცხადია, მიიღება, თუ $F(X, Y)$ ფუნქციას მივუმატებთ ისეთ χ ფუნქციას, რომლის მეორე წარმოებული $\frac{\partial^2 \chi}{\partial X \partial Y}$ იქნება ნულის ტოლი. მაშასადამე $u(X, Y)$ ფუნქციას ექნება სახე (§ 60):

$$u(X, Y)=\int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy+\varphi(X)+\psi(Y), \tag{10}$$

სადაც $\varphi(X)$ და $\psi(Y)$ ნებისმიერი ფუნქციებია. ეს ფუნქციები შეიძლება ყოველთვის ამოვარჩიოთ ისეთნაირად, რომ $u(X, Y)$ ფუნქცია როცა $X=a$ გარდაიქცეს მოცემულ $V(Y)$ ფუნქციად, ხოლო როცა $Y=b$, გარდაიქცეს მეორე მოცემულ $U(X)$ ფუნქციად; ამასთანავე უკანასკნელი ორი ფუნქცია უნდა იყოს შებმული ერთმანეთთან დამოკიდებულებით: $U(a)=V(b)$. მართლაც, მივიღოთ წინა (10) დამოკიდებულებაში მიმდევრობით $X=a$, $Y=b$, მივიღებთ ორ პირობას:

$$V(Y)=\varphi(a)+\psi(Y), \quad U(X)=\varphi(X)+\psi(b);$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\psi(Y)=V(Y)-\varphi(a), \quad \psi(b)=V(b)-\varphi(a), \quad \varphi(X)=U(X)-V(b)+\varphi(a),$$

და (10) ფორმულა გადაიქმნება ასე:

$$u(X, Y)=\int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy+U(X)+V(Y)-V(b). \tag{11}$$

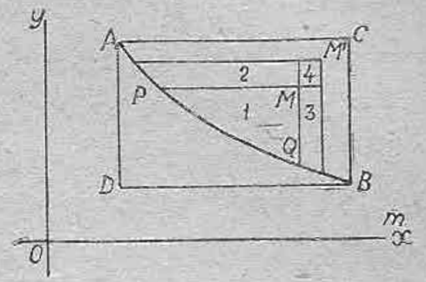
პირიქით, თუ რაიმე წესით მოვძებნით $u(X, Y)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (9) დამოკიდებულებას, მაშინ თანახმად წინა ფორმულისა, ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობა ტოლია:

$$\int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy=u(X, Y)-u(X, b)-u(a, Y)+u(a, b). \tag{12}$$

ახლა შევცვალოთ მართკუთხედის ორი გვერდი მრუდის ისეთი AB რკალით (ნახ. 19), რომლის ორდინატი მუდამ კლებულობს, როცა აბსცისი იზრდება.

ვთქვათ, $f(x, y)$ არის $ACBD$ მართკუთხედის შიგნით უწყვეტი ფუნქცია. ამ მართკუთხედის ნებისმიერ M წერტილზე გამავალი კოორდინატთა ღერძების პარალელები AB რკალს ჰკვეთენ ორ P და Q წერტილში შესაბამად და ორჯერადი ინტეგრალი

$$F(X, Y)=\iint\limits_{PMQ} f(x, y)\, dx\, dy,$$



ნახ. 19

გავრცელებული მრუდწირული PMQ სამკუთხედის ფართობზე, არის უწყვეტი ფუნქცია ამ მართკუთხედში. თუ დავწერთ ორჯერად ინტეგრალს მე-(7) სახით, ადვილად გამოვიყვანთ, რომ იგი აკმაყოფილებს აგრეთვე (9) დამოკიდებულებას. ამაში შეიძლება უშუალოდაც შემდეგნაირად დავრწმუნდეთ: მივცეთ X და Y-ს ნაზრდები h და k; ამით ჩვენ გადავდივართ M წერტილიდან მეზობელ M' წერტილზე.

აღვნიშნოთ (1), (2), (3), (4)-ით ორჯერადი ინტეგრალები, გავრცელებული იმავე ციფრებით აღნიშნული არეებზე, გვექნება:

$$F(X+h, Y+k)=(1)+(2)+(3)+(4),$$

$$F(X+h, Y)=(1)+(3), \quad F(x, Y+k)=(1)+(2),$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{F(X+h, Y+k)-F(X, Y+k)-F(X+h, Y)+F(X, Y)}{h\,k}=\frac{(4)}{hk}.$$

მარცხენა ნაწილის ფარდობას აქვს ზღვარად $\frac{\partial^2 F}{\partial X\, \partial Y}$, როცა h და k მიისწრაფიან ნულისაკენ (§ 21). მეორე მხრით, თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას ორჯერად ინტეგრალზე (4), მივიღებთ:

$$(4)=hkf(X+\theta h, Y+\theta' k).$$

თუ h და k მიისწრაფიან ნულისაკენ, მივიღებთ ზუსტად მე-(9) ფორმულას.

(9) განტოლების $F(X, Y)$ ამონახსნი არის ნული AB-ს განგრძივ. იგივე უნდა ითქვას მისი პირველი რიგის ორი კერძო წარმოებულის შესახებ; მართლაც, ნახაზიდან უშუალოდ ვხედავთ, რომ, თუ M წერტილი AB-ზეა, მაშინ X-ის h ნაზრდს შეესაბამება $F(X, Y)$-ის მეორე რიგის უსასრულო მცირე ნაზრდი.

ეს ფორმულა ძირითადი (8) ფორმულის ანალოგიურია (§ 75).

შემდეგი ფორმულა წარმოადგენს ერთგვარ ანალოგიას ნაწილობითი ინტეგრობის ფორმულასთან. ვთქვათ A სიბრტყის სასრულო ნაწილია, შემოსაზღვრული ნებისმიერი სახის ერთი ან რამდენიმე მრუდით. ფუნქცია $f(x, y)$, უწყვეტი A-ში, იცვლება ამ არეში რაიმე უმცირესი v_0 მნიშვნელობასა და უდიდესი V მნიშვნელობას შორის. გავატაროთ დონეს წირები: $f(x, y)=v$ სადაც v იმყოფება v_0-სა და V-ს შორის; დავუშვათ, რომ ჩვენ შეგვიძლია მოვძებნოთ ფართობი A არის იმ ნაწილისა, რომელშიაც $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობა მოთავსებულია v_0-სა და v შორის. ეს ფართობი არის v-სი გარკვეული $F(v)$ ფუნქცია, რომელიც იზრდება v-თან ერთად; ორი უსასრულოდ ახლო დონეს წირებს შორის მოთავსებული ფართობი ცხადია, ეტოლება:

$$F(v+\Delta v)-F(v)=\Delta v\, F'(v+\theta \Delta v).$$

თუ დავყოფთ ამ ფართობს უსასრულოდ მცირე ნაწილებად ისეთი წირებით, რომლებიც ფართეულის ორ მეზობელ წირს აერთებს, ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ თითოეულ ამ ნაწილთაგანში ისეთი (ξ, η) წერტილი, რომ გვექნეს $f(\xi, \eta)=v+\theta\Delta v$. მაშინ იმ ორჯერადი $\int\int f\,dx\,dy$ ინტეგრალის ელემენტების ჯამი, რომელიც შეესაბამება დონეს ორ მეზობელ წირს შორის არეს, ტოლი იქნება:

$$(v+\theta\Delta v)\,F'(v+\theta\Delta v)\,\Delta v.$$

მაშასადამე ორჯერადი ინტეგრალი იქნება ტოლი:

$$\sum(v+\theta\Delta v)\,F'(v+\theta\Delta v)\,\Delta v$$

ჯამის ზღვარისა, ე. ი. ეტოლება მარტივ ინტეგრალს

$$\int_{v_0}^{V} vF'(v)\,dv=VF(V)-\int_{v_0}^{V} F(v)\,dv.$$

ეს მეთოდი განსაკუთრებით ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრობის არე შემოსაზღვრულია დონეს ორი წირით:

$$f(x, y)=v_0, \quad f(x, y)=V.$$

ვთქვათ, მაგალითად, გამოსათვლელია ორჯერადი ინტეგრალი

$$\int\int\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

აღებული $x^2+y^2=1$ წრის შიგნით. თუ მივიღებთ $v=\sqrt{1+x^2+y^2}$, ჩვენ ვხედავთ, რომ ინტეგრობის არე იქნება შემოსაზღვრული ორი დონეს წირით: $v=1$; $v=\sqrt{2}$, და $F(v)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს $\sqrt{v^2-1}$ რადიუსიან წრის ფართობს, ტოლი იქნება $\pi(v^2-1)$-სა. მაშასადამე ორჯერადი ინტეგრალი ტოლია:

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2\pi v^2\,dv=\frac{2\pi}{3}\,(2\sqrt{2}-1)$$ [1]

წინა ფორმულა ადვილად გავრცელდება ორჯერად ინტეგრალებზე

$$\int\int f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

თუ აღვნიშნავთ $F(v)$-თი ორჯერად $\int\int \varphi(x, y)\,dx\,dy$ ინტეგრალს, გავრცელებულს ინტეგრობის იმ არის ნაწილზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $v=f(x, y)$ მრუდით.

116. გრინის ფორმულა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია არის კერძო წარმოებული x-ით ან y-ით რაიმე ცნობილ ფუნქციისა, მაშინ ერთერთი ინტეგრობა უშუალოდ შესრულდება და დარჩება შესასრულებელი მხოლოდ ერთი კვადრატურა. ეს უბ-

[1] კატალანის (Catalan) მემუარში (Journal de Liouville, I სერია, ტომი IV, გვ. 233) შეიძლება ვნახოთ ამ მეთოდის ბევრი გამოყენება.

რალო შენიშვნა მიგვიყვანს მნიშვნელოვან ფორმულაზე, რომელიც ცნობილია გ რ ი ნ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ი ს სახელწოდებით.

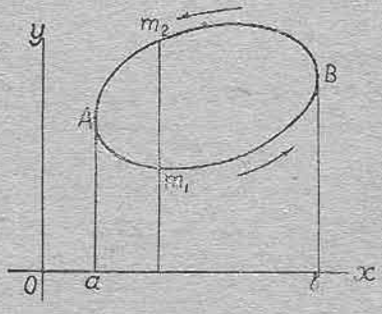
განვიხილოთ პირველად ორჯერადი ინტეგრალი $\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, გავრცელებული სიბრტყის იმ ნაწილზე, რომელიც შემოსაზღვრულია C კონტურით, რომელსაც Oy ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს არა უმეტეს ვიდრე ორ წერტილში (ნახ. 18). იყოს A და B კონტურის ის წერტილები, რომლებშიაც x მაქსიმალურია ან მინიმალური. Oy ღერძის პარალელური ერთ-ერთი წრფე, რომელიც გადის Aa და Bb წირებს შორის, ჰკვეთს C-ს ორ m_1 და m_2 წერტილში, ორდინატებით: y_1 და y_2. თუ პირველად y-ით მოვახდენთ ინტეგრობას მივიღებთ ორჯერადი ინტეგრალისათვის გამოთქმას:

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx.$$

მაგრამ ინტეგრალები $\int_a^b P(x, y_1)\,dx$, $\int_a^b P(x, y_2)\,dx$ არიან წირითი ინტეგრალები, აღებული შესაბამად Am_1B და Am_2B რკალების განგრძივ. ამიტომ შეგვიძლია წინა ფორმულა დავწეროთ ასეთი სახით:

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C P\,dx, \tag{13}$$

სადაც წირითი ინტეგრალი აიღება C კონტურის განგრძივ დადებითი მიმართულებით, თუ საკოორდინატო ღერძები დალაგებულია ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. რომ გავავრცელოთ ეს ფორმულა ფართობზე, რომელიც შემოსაზღვრულია ნებისმიერი სახის კონტურით, მაშინ ისე როგორც ზემოთ (§ 92) დავყოფთ ამ ფართობს განივი წირებით რამოდენიმე ისეთ ნაწილად, რომ თითოეული მათგანის კონტური აკმაყოფილებდეს ზემოთ აღნიშნულ პირობას და გამოვიყენებთ წინა ფორმულას თითოეულ ამ ნაწილთაგანზე. ასეთივე წესით მიიღება ფორმულა:



ნახ. 19 *a*.

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C Q\,dy, \tag{14}$$

სადაც წირითი ინტეგრალი ისევ აიღება დადებით მიმართულებით. თუ გამოვაკლებთ (13) ტოლობას (14)-ს, მივიღებთ:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{15}$$

სადაც ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებულია არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია C კონტურით. ამაში მდგომარეობს გ რ ი ნ ი ს ფორმულა, რომელსაც აქვს მრავალი მეტად მნიშვნელოვანი გამოყენება. შევნიშნოთ, რომ თუ დავუშვებთ $Q=x$, $P=-y$ მივიღებთ ზემოთ მიღებულ ფორმულას (§ 92), რომელიც გამოსახავს შეკრული კონტურის ფართობს წირითი ინტეგრალის საშუალებით.

II. ცვლადთა გარდაქმნა. მოცულობები. ფართეულის ფართობი.

აქამდე ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის დროს, ჩვენ ინტეგრობის არეს ვანაწილებდით უსასრულო მცირე მართკუთხედებად, კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეებით. ჩვენ ვიგულისხმებთ ახლა, რომ ინტეგრობის არის დანაწილება ხდება ნებისმიერი სახით მრუდთა ორი ოჯახის საშუალებით.

117. წინასწარი ფორმულა. ვთქვათ u და v წერტილის კოორდინატებია სიბრტყეზე აღებული მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ და x, y— მეორე წერტილის კოორდინატები, მეორე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც დალაგებულია იმგვარადვე, როგორც პირველი იმავე სიბრტყეზე ან პირველისაგან განსხვავებულ სიბრტყეზე. ფორმულები:

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v) \tag{16}$$

ამყარებენ ორივე სიბრტყის წერტილებს შორის გარკვეულ თანადობას. ვიგულისხმოთ: 1) რომ ეს $f(u, v)$ და $\varphi(u, v)$ ფუნქციები არიან უწყვეტი თავისი კერძო წარმოებულებითურთ, როდესაც (u, v) წერტილი აღწერს სიბრტყის იმ A_1 ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია C_1 კონტურით; 2) რომ (16) ფორმულების ძალით (u, v) სიბრტყის A_1 ნაწილს შეესაბამება (x, y) სიბრტყის A ნაწილი, შემოსაზღვრული C კონტურით და რომ თანადობა ორივე ფართობისა და ორივე კონტურის წერტილებს შორის არის უ რ თ ი ე რ თ ც ა ლ ს ა ხ ა, ე. ი. A არის ყოველ წერტილს შეესაბამება A_1 არის მხოლოდ ერთი წერტილი და პირიქით; 3) რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი $\Delta=\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ არ იცვლის ნიშანს C_1 კონტურის შიგნით (თუმცა შეუძლია ნული გახდეს A_1 არის ზოგიერთ წერტილებზე).

აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს ორი შემთხვევა. როდესაც (u, v) წერტილი აღწერს C_1 კონტურს პირდაპირი მიმართულებით (§ 94), მაშინ (x, y) წერტილი აღწერს C კონტურს ან პირდაპირი მიმართულებით ანდა შექცევით. ამისდა მიხედვით ჩვენ ვიტყვით, რომ A და A_1 არეებს შორის თანადობა არის პირდაპირი ან შექცეული.

სიბრტყის A არის Ω ფართობი წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$\Omega=\int_C x\, dy,$$

სადაც ინტეგრალი აიღება C კონტურის განგრძივ პირდაპირი მიმართულებით.

თუ მოვახდენთ ცვლადების გარდაქმნას (16) ფორმულების მიხედვით, მივიღებთ აგრეთვე

$$\Omega=\pm\int_{C_1} f(u, v)\, d\varphi(u, v),$$

სადაც ახალი ინტეგრალი აღებულია C_1 კონტურის განგრძივ პირდაპირ მიმართულებით, ამასთანავე. უნდა ავიღოთ ნიშანი + ან — იმისდა მიხედვით იქნება თანადობა პირდაპირი თუ შექცევითი. ამ ახალ ინტეგრალზე გამოვიყენოთ გრინის ფორმულა, რომელშიაც მივიღოთ: $u=x$, $v=y$, $P=f\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $Q=f\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, რომლებიც გვაძლევენ:

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\Delta=\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)};$$

ამიტომაც

$$\Omega=\pm\iint_{A_1}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\, du\, dv.$$

გამოვიყენებთ რა საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას ორჯერადი ინტეგრალზე, მივიღებთ

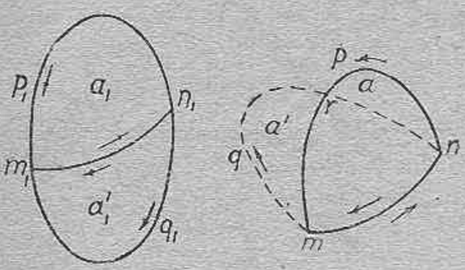
$$\Omega=\pm\,\Omega_1\,\frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)}, \tag{17}$$

სადაც (ξ, η) იმ წერტილის კოორდინატებია, რომელიც ძევს C_1 კონტურის შიგნით, ხოლო Ω_1 კი (u, v) სიბრტყის A_1 არის ფართობი. ჩვენ ვხედავთ, რომ მარჯვენა მხარის წინ უნდა იყოს აღებული ნიშანი + ან — იმისდა მიხედვით, იქნება თუ არა Δ დეტერმინანტი თვითონ დადებითი თუ უარყოფითი. მაშასადამე, თანადობა იქნება პირდაპირი ან შექცევითი იმისდა მიხედვით, Δ დადებითია თუ უარყოფითი.

(17) ფორმულა ამყარებს კიდევ ერთ ანალოგიას ფუნქციონალური დეტერმინანტსა და წარმოებულებს შორის. მართლაც, დავუშვათ რომ სიბრტყის A_1 არე უსაზღვროდ მცირდება ყველა მიმართულებით, ისე რომ ყველა მისი წერტილი მიისწრაფის გარკვეულ (u, v) წერტილისაკენ. მაშინ A არეც უსაზღვროდ მცირდება; ამიტომ Ω და Ω_1 ფართობების ფარდობას ზღვრად აქვს Δ დეტერმინანტის აბსოლუტური მნიშვნელობა. მაშასადამე, მსგავსად იმისა, როგორც წარმოებული არის ორი წრფივი ელემენტის ფარდობის ზღვარი, Δ დეტერმინანტი არის ორი ზედაპირული ელემენტის ფარდობის ზღვარი. ამ თვალსაზრისით (17) ფორმულას აქვს მსგავსება სასრული ნაზრდის ფორმულასთან.

შენიშვნა. ის დაშვებები, რომლებიც ჩვენ გავაკეთეთ A და A_1 არეებს შორის თანადობის შესახებ, ყველა არ არის ერთმანეთზე დამოუკიდებელი. ამრიგად, იმისათვის, რომ თანადობა იყოს ცალსახა აუცილებელია, რომ Δ დეტერმინანტი არ იცვლიდეს ნიშანს (u, v) სიბრტყის A_1 ნაწილში. მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ Δ უდრის ნულს, იმ γ_1 მრუ-

დის განგრძივ, რომელიც გამოყოფს A_1 არის იმ ნაწილს, სადაც Δ დადებითია იმ ნაწილისაგან, სადაც Δ უარყოფითია. განვიხილოთ γ_1 მრუდის ძალიან მცირე m_1n_1 რკალი და ძალიან მცირე ნაწილი A_1 არისა, რომელიც შეიცავს თავის შიგნით m_1n_1 რკალს; ეს ნაწილი გაიყოფა m_1n_1 რკალის საშუალებით ორ a_1 და a_1' არეთ (ნახ. 20).



ნახ. 20.

იმ დროს, როცა (u, v) წერტილი აღწერს a_1 ფართობს, რომელშიაც Δ დადებითია, (x, y) წერტილი აღწერს a ფართობს $mnpq$ კონტურით და მოძრაობის მიმართულება ორივე $m_1n_1p_1q_1$ და $mnpq$ კონტურზე იქნება ერთდროულად პირდაპირი ან ერთდროულად შექცევითი. როდესაც (u, v) წერტილი აღწერს a' ფართობს, რომელშიაც Δ უარყოფითია, (x, y) წერტილი აღწერს a' ფართობს, ამასთანავე მოძრაობა მისი $nmqr$ კონტურზე მოხდება შექცეული მიმართულებით, თუ $m_1n_1n_1q_1$ კონტურზე მოძრაოა ხდებობდა პირდაპირ. ამიტომ a' ფართობი ნაწილობრივ უნდა ფარავდეს a ფართობს; ამგვარად, a და a_1 ფართობების საერთო nrm ნაწილის ყოველ (x, y)წერტილს შეესაბამება ორი (u, v) წერტილი, რომლებიც მდებარეობს m_1n_1 წირის სხვადასხვა მხარეს.

მივიღოთ, მაგალითად, $X = x$, $Y = y^2$, ჩვენ გვაქვს $\Delta = 2y$. თუ (x, y) წერტილი აღწერს შეკრულ ფართობს, რომელიც შეიცავს $0x$ ღერძის ab ნაკვეთს, მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ (X, Y) წერტილი აღწერს ორ ფართობს, დალაგებულს X ღერძის ზემოთ და რომლებიც ეყრდნობიან ამ ღერძის ერთი და იგივე AB ნაკვეთს. ქაღალდის ფურცელი, დაკეცილი წრფე წირის განგრძივ, გვაძლევს წარმოდგენას იმ ფართობზე, რომელსაც აღწერს (X, Y) წერტილი.

იმისათვის, რომ თანადობა იყოს ცალსახა, არ არის საკმარისი, რომ Δ დეტერმინანტი A_1 არეში ინარჩუნებდეს მუდმივ ნიშანს. ავიღოთ, მაგალითად, $X = x^2 - y^2$, $Y = 2xy$; იაკობიენი $\Delta = 4(x^2 + y^2)$ ყოველთვის დადებითია. თუ აღვნიშნავთ (r, θ) და (R, ω) ორივე (x, y) და (X, Y) წერტილებისას პოლარ კოორდინატებს, ჩვენ წარმოგვიდგება წინა ფორმულები შემდეგი სახით: $R = r^2$, $\omega = 2\theta$. ვცვალოთ r a-დან b-მდე $(a < b)$, და θ 0-დან $\pi + \alpha$-მდე (α მოთავსებულია 0 და $\frac{\pi}{2}$ შორის). (R, ω) წერტილი აღწერს რგოლისებურ ზოლს, მოთავსებულს ორ წრეწირს შორის, რადიუსებით a^2 და b^2. მაგრამ ω კუთხის ყოველ მნიშვნელობას, მოთავსებულს 0 და 2α შორის, შეესაბამება θ კუთხის ორი მნიშვნელობა: ერთი θ_1, მოთავსებული 0 და α შორის, და მეორე θ_2, მოთავსებული π და $\pi + \alpha$ შორის. (X, Y) წერტილის მიერ აღწერილი ფართობი შეიძლება წარმოვადგინოთ ბრტყელი ქაღალდის რგოლისებული ზოლით, რომლის ბოლოები ნაწილობრივ ფარავენ ერთმანეთს.

118. ცვლადთა გარდაქმნა. პირველი მეთოდი. შევინარჩუნოთ წინა პარაგრაფში აღნიშნული დაშვებები A და A_1 არეების შესახებ და აგრეთვე (16) ფორმულები; ვთქვათ $F(x, y)$ არის უწყვეტი ფუნქცია A არეში. დავანაწილოთ A_1 არე ნებისმიერ მცირე არეებად: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; მათ შეესაბამება A არის დანაწილება $a_1, a_2, \ldots, a_n$ არეებად. ვთქვათ ω_i და σ_i არიან ორი a_i და α_i არის ფართობები. (17) ფორმულების ძალით გვაქვს:

$$\omega_i = \sigma_i \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right|,$$

სადაც u_i, v_i არიან α_i არის რაიმე წერტილის კოორდინატები. ამ (u_i, v_i) წერტილს

შეესაბამება a_i არის $x_i=f(u_i, v_i)$, $y_i=\varphi(u_i, v_i)$ წერტილი. ამიტომ, თუ აღვნიშნავთ $\Phi(u, v)=F[f(u, v), \varphi(u, v)]$, შეგვიძლია დავწეროთ:

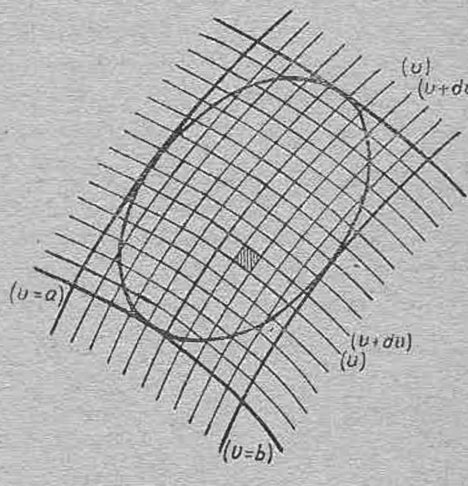
$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\,\omega_i=\sum_{i=1}^{n}\Phi(u_i, v_i)\left|\frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)}\right|\sigma_i;$$

აქედან თუ გადავალთ ზღვარისაკენ, მივიღებთ:

$$\int_A\int F(x, y)\,dx\,dy=\int_{A_1}\int F[f(u, v), \varphi(u, v)]\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u, v)}\right|du\,dv. \qquad (18)$$

ამგვარად, რომ მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა ორჯერად ინტეგრალში, უნდა შევცვალოთ x და y მათი მნიშვნელობებით, ახალ u, v ცვლადების ფუნქციების საშუალებით, ხოლო $dx\,dy$ ნამრავლი კი $|\Delta|\,du\,dv$ ნამრავლით. რაც შეეხება ინტეგრობის ახალ არეს, ჩვენ უკვე ზემოთ გავაშუქეთ, თუ როგორ განისაზღვრება იგი.

რომ მოვძებნოთ საზღვრები, რომელთა შორის უნდა იქნეს შესრულებული ინტეგრობა ახალი ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობის მისაღებად, საზოგადოდ არაა საჭირო ახალი A_1 არის C_1 კონტურის აგება. მართლაც, განვიხილოთ u და v როგორც მრუდწიროვანი კოორდინატთა სისტემა; თუ ჩვენ (16) ფორმულაში ერთერთ ცვლადთაგანს მივცემთ მუდმივ მნიშვნელობას, ხოლო მეორეს ვცვლით, მაშინ მივიღებთ მრუდთა ორ ოჯახს $u=$const., $v=$const. შედეგად იმ წინადაშვებებისა, რომელიც გაკეთებული იყო (16) ფორმულების გამოყვანის დროს, A არის ყოველ წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი მრუდი თითოეულ ოჯახიდან. გარკვეულობისათვის მივიღოთ, რომ $v=$const მრუდი ჰკვეთს C კონტურს მხოლოდ ორ M_1-და M_2 წერტილში, რომლებიც შეესაბამებიან u ცვლადის u_1 და u_2 $(u_1<u_2)$ მნიშვნელობებს, და რომ ყველა (v) მრუდი, რომლებიც ჰკვეთენ C კონტურს, დალაგებულია $v=a$, $v=b$ $(a<b)$ მრუდეებს შორის (ნახ. 21). მაშინ, თუ მოვახდენთ ინტეგრობას ჯერ u-ს მიხედვით და v-ს მუდმივად დავტოვებთ, ჩვენ u უნდა ვცვალოთ u_1-დან u_2-მდე (u_1 და u_2 იქნებიან საზოგადოთ v-ს ფუნქციები) და



ნახ. 21.

შემდეგ მიღებული შედეგი ხელახლა ვაინტეგროთ v ცვლადის მიმართ a და b საზღვრებს შორის.

ამგვარად საძიებელ ორჯერად ინტეგრალს აქვს შემდეგი გამოხატულება:

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F[f(u, v), \varphi(u, v)] |\Delta| du\, dv.$$

არსებითად, ცვლადთა გარდაქმნა დაიყვანება ინტეგრობის არის დაყოფაზე უსასრულო მცირე არეებად ორი (u) და (v) მრუდთა ოჯახის საშუალებით. ვთქვათ ω არის მრუდწიროვანი ოთხკუთხედის ფართობი, შემოსაზღვრული მრუდებით: (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, სადაც du და dv დადებითია; (u, v) სიბრტყეზე ამ ოთხკუთხედს შეესაბამება მართკუთხი, გვერდებით du და dv. ამიტომ (17) ფორმულების საშუალებით გვაქვს; $\omega = |\Delta(\xi, \eta)| du\, dv$, სადაც ξ იმყოფება u და $u+du$ შორის, ხოლო η კი v და $v+dv$ შორის. $|\Delta(u, v)| du\, dv$ გამოსახვას ეწოდება ფ ა რ თ ო ბ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ი (u, v) კოორდინატთა სისტემაში. ω-ს ზუსტი მნიშვნელობა არის $\omega = \{|\Delta(u, v)| + \varepsilon\} du\, dv$, სადაც ε უსასრულოდ მცირეა du და dv-თან ერთად. მაგრამ $\sum F(x, y)\omega$ ჯამის ზღვარის გამოთვლის დროს ε ოდენობა შეიძლება უყურადღებოთ დავტოვოთ; მართლაც, რადგან $\Delta(u, v)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ შეიძლება ვიგულისხმოთ, (u), (v) მრუდები იმდენად ახლოს, რომ ყველა ε ოდენობა აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იყვნენ ყოველ წინასწარ მოცემულ დადებით რიცხვზე, და მაშასადამე, რომ $\sum F(x, y)\, \varepsilon\, dx\, dy$ ჯამი აბსოლუტური მნიშვნელობით აგრეთვე ნაკლები იყოს ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე.

119. მაგალითები: 1. პ ო ლ ა რ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი. გადავიდეთ მართკუთხა კოორდინატებიდან პოლარ კოორდინატებზე. მაშინ $x = \rho \cos\omega$, $y = \rho \sin\omega$ და ჩვენ მივიღებთ სიბრტყის ყველა წერტილს თუ ρ-ს ვცვლით 0-დან $+\infty$-მდე და ω-ს კი 0-დან 2π-მდე. ფუნქციონალური დეტერმინანტი $\Delta = \rho$, ასე რომ ფართობის ელემენტი არის $\rho d\omega d\rho$, როგორც ეს ადვილად შეგვიძლია გამოვიყვანოთ გეომეტრიულად. პირველად დავუშვათ, რომ გამოსათვლელია ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული სიბრტყის იმ ნაწილზე, რომელიც შემოსაზღვრულია OA და OB წრფეებით, რომლებიც ჰქმნიან Ox ღერძთან ω_1 და ω_2 კუთხეებს და AB რკალით, რომელიც იკვეთება კოორდინატთა სათავიდან გამოსულ ნახევარ წრფეებით არა უმეტეს, ვიდრე ერთ წერტილში. ვთქვათ $R = \varphi(\omega)$ არის AB რკალის განტოლება; რადგან ω იცვლება ω_1 და ω_2 შორის, ხოლო ρ-ს შეუძლია ცვლადობა ნულიდან R-მდე, ამიტომ ორჯერად ინტეგრალს $f(x, y)$ ფუნქციიდან აქვს მნიშვნელობა:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_0^R f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\, \rho\, d\rho.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც AB მრუდი შეკრულია და კოორდინატთა სათავეს შეიცავს თავის შიგნით, მაშინ უნდა მივიღოთ $\omega_1=0$, $\omega_2=2\pi$. ყოველი სხვა ინტეგრობის არე შეიძლება დავანაწილოთ რამდენიმე არედ, რომლებიც მსგავსია წინა არეებისა. დავუშვათ მაგალითად, რომ C კონტური არის შეკრული ამოზნექილი მრუდი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს გარეთ სტოვებს. ვთქვათ OA და OB არის მხებები, გატარებული ამ კონტურისადმი და გამავალი კოორდინატთა სათავეზე; $R_1=\varphi_1(\omega)$, $R_2=\varphi_2(\omega)$ იყოს ANB, AMB მრუდების განტოლებები. ω-ს მოცემული მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია ω_1 და ω_2 შორის, ρ-ს შეუძლია ცვლადობა R_1-დან R_2-მდე და ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობისათვის მივიღებთ გამოსახვას:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega)\,\rho\, d\rho.$$

2. ელიფსური კოორდინატები. განვიხილოთ მეორე რიგის კონფოკალური (homofocales) მრუდების ოჯახი:

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1, \tag{19}$$

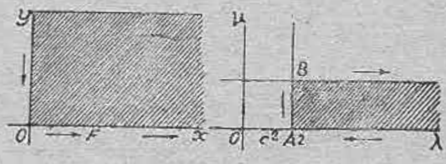
სადაც λ-თი აღნიშნულია ნებისმიერი პარამეტრი. სიბრტყის ყოველ წერტილზე გაივლის ორი ამგვარი მრუდი: ეს იქნება ელიფსი და ჰიპერბოლი, რადგან (19) განტოლებას აქვს ერთი ფესვი λ მეტი c^2 და ერთი დადებითი ფესვი μ ნაკლები c^2, x და y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. (19) დამოკიდებულებიდან და ასეთივე დამოკიდებულებიდან, რომელშიაც λ შეცვლილია μ-თი მოვძებნით:

$$x=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c},\quad y=\frac{\sqrt{(\lambda-c^2)(c^2-\mu)}}{c}\quad (o\leqslant\mu\leqslant c^2\leqslant\lambda); \tag{20}$$

გაურკვევლობის თავიდან ასაცილებლად, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ xy სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია xOy კუთხეში (ნახ. 22). ამ არის წერტილები ესაბამებიან ცალსახად (λ, μ) სიბრტყის იმ ნაწილის წერტილებს, რომლებიც შემოსაზღვრულია წრფეებით:

$$\lambda=c^2,\ \mu=0,\ \mu=c^2.$$

როდესაც (λ, μ) წერტილი აღწერს ამ არის კონტურს ისრებით ნაჩვენებ მიმართულებით, მაშინ როგორც სჩანს (20) ფორმულებიდან, (x, y) წერტილი აღწერს Ox, Oy ღერძებს ისრებით ნაჩვენებ მიმართულებით. მაშასადამე, თანადობა შექცევითია. ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ აგრეთვე, თუ გამოვთვლით Δ-ს:



ნახ. 22.

$$\Delta=\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)}=-\frac{1}{4}\,\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda-c^2)(c^2-\mu)}}.$$

120. ცვლადთა გარდაქმნა. მეორე მეთოდი. გამოვიყვანოთ ახლა ზოგადი ფორმულა (18) სხვა წესით, რომელიც ეყრდნობა უმთავრესად თვით ორჯერა-

დი ინტეგრალის გამოთვლის წესს. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ შენარჩუნებულია ყველა ის დაშვება, რომლებიც ჩვენს მიერ იყო გაკეთებული წინათ A და A_1 არეების წერტილებს შორის თანადობის შესახებ. შევნიშნოთ პირველად, რომ თუ ფორმულა სწორია ორი კერძო გარდაქმნისათვის:

$$x=f(u, v), \qquad u=f_1(u', v'),$$
$$y=\varphi(u, v), \qquad v=\varphi_1(u', v'),$$

მაშინ იგი იქნება სწორი აგრეთვე იმ გარდაქმნისათვის, რომელიც მიიღება ორივე წინა გარდაქმნების მიმდევრობითი გამოყენებით; ეს გამომდინარეობს ფუნქციონალური დეტერმინანტის ცნობილ თვისებიდან (§ 52):

$$\frac{D(x, y)}{D(u', v')}=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\cdot\frac{D(u, v)}{D(u', v')}.$$

სრულიად ამგვარადვე, თუ ფორმულა სწორია რამდენიმე სხვადასხვა $A, B, C, \ldots, L$ არისათვის, რომლებსაც შეესაბამება $A_1, B_1, C_1, \ldots, L_1$ არეები, მაშინ იგი იქნება სამართლიანი აგრეთვე $A+B+C+\ldots+L$ არისათვის. და ბოლოს, ფორმულა სწორია, თუ ცვლადების შეცვლა დაიყვანება კოორდინატთა გარდაქმნაზე:

$$x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს $\Delta=1$, და ორივე ინტეგრალი არიან ტოლი:

$$\iint_{A} F(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{A'} F(x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\ y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)\,dx'\,dy',$$

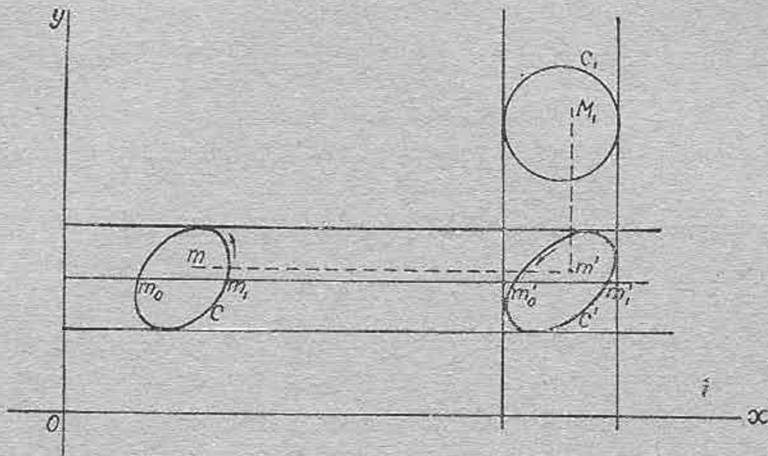
რადგან ორივე გამოსახავს ერთსა და იმავე მოცულობას.

პირველად ჩვენ გამოვიყვანთ ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას კერძო გარდაქმნისათვის:

$$x=\varphi(x', y'), \quad y=y', \tag{21}$$

რომლის დროს A არეს შეესაბამება მეორე A' არე, მოთავსებული იმავე $y=y_0$, $y=y_1$ წრფეებს შორის, რომლებიც Ox ღერძის პარალელურია. წარმოვიდგინოთ, რომ A არის ყოველ წერტილს შეესაბამება მხოლოდ ერთი წერტილი A' არისა და პირიქით. თუ Ox ღერძის პარალელური წრფე გადაჰკვეთს A არის C კონტურს მხოლოდ ორ წერტილში, მაშინ A' არის C' კონტურიც გადიკვეთება იმავე წრფესთან მხოლოდ ორ წერტილში. C კონტურის ორ m_0 და m_1 წერტილს, y ორდინატით შეესაბამებათ, C' კონტურზე m'_0 და m'_1 წერტილები. მაგრამ აქ წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა იმისდა მიხედვით, თანადობა პირდაპირია თუ შექცევითი. რომ განვასხვავოთ ეს ორი შემთხვევა, შევნიშნოთ, რომ

თუ $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ დადებითია, მაშინ x იზრდება x'-თან ერთად; m_0 და m_1, m_0' და m_1' წერტილები დალაგებულია ისე, როგორც ეს 23-მე ნახაზზეა ნაჩვენები და თანადობა პირდაპირია. პირიქით, თუ $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$—უარყოფითია, მაშინ თანადობა—შექცევითია.



ნახ. 23.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. ვთქვათ x_0, x_1, x'_0, x_1' არიან m_0, m_1, m_0', m_1' წერტილების აბსცისები. გამოვიყენოთ მარტივ ინტეგრალზე ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა, გვაქვს:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx = \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x', y'), y] \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\, dx',$$

სადაც y და y' განიხილებიან როგორც მუდმივები; ამგვარად ვღებულობთ:

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx = \int_{y_0}^{y_1} dy' \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x', y'), y'] \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\, dx'.$$

მაგრამ ამ შემთხვევაში Δ იაკობიენი დაიყვანება აქ $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$-ზე და წინამდებარე ფორმულა შეიძლება ასეთი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\int_A\int F(x, y)\, dx\, dy = \int_A\int F[\varphi(x' y'), y'] \,|\Delta|\, dx'\, dy'.$$

თუ $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ უარყოფითია, მაშინ ფორმულა შეიძლება გამოვიყვანოთ იმავე წესით. ცხადია, რომ ის შეიძლება გავავრცელოთ ნებისმიერი სახის კონტურით შემოსაზღვრულ არეზე. ასევე, თუ დავუშვებთ, რომ

$$x = x', \quad y = \psi(x', y'); \tag{22}$$

მივიღებთ ფორმულას:

$$\iint_A F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A'} F[x', \psi(x', y')]\, |\Delta|\, dx'\, dy',$$

ამასთანავე ინტეგრობის ახალი A' არის წერტილები შექცევით ცალსახად ეთანადებიან A არის წერტილებს.

განვიხილოთ ახლა გარდაქმნის ზოგადი ფორმულები:

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = f_1(x_1, y_1). \tag{23}$$

და მეტი თვალსაჩინოებისათვის აღვნიშნოთ (x, y) და (x_1, y_1)-ით m_1 და M_1 წერტილების კოორდინატები შესაბამად. ვთქვათ A და A_1 არიან არეები, შემოსაზღვრული შესაბამად C და C_1 კონტურებით. თუ დავუმატებთ m და M წერტილებს კიდევ m' წერტილს, კოორდინატებით $x' = x_1$, $y' = y_1$, მაშინ ეს m' წერტილი აღწერს დამხმარე A' არეს, და ჩვენ პირველად ვიგულისხმებთ, რომ მისი წერტილები იმყოფებიან ურთიერთ ცალსახა თანადობაში თითოეულ A და A_1 არეების წერტილებთან. x, y, x_1, y_1, x', y' კოორდინატებს შორის არსებობს ოთხი დამოკიდებულება:

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = f_1(x_1, y_1), \quad x' = x_1, \quad y' = y;$$

აქედან უპირველესად გვაქვს:

$$x' = x_1, \quad y' = f_1(x_1, y_1); \tag{24}$$

რომელიც განსაზღვრავს (22) სახის გადაქმნას. $y' = f_1(x', y_1)$ დამოკიდებულებიდან მივიღებთ $y_1 = \pi(x', y')$ და მაშასადამე,

$$x = f(x', y_1) = \varphi(x', y'), \quad y = y'. \tag{25}$$

ამგვარად განსახილავი (23) გარდაქმნა შეიძლება იყოს მიღებული როგორც შედეგი ორი კერძო (24) და (25) გაარდაქმნისა, ზოგადი (18) ფორმულის გამოყენებით. ამგვარად იგი გამოსაყენებელია აგრეთვე (23) გარდაქმნისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ m' წერტილის მიერ აღწერილი არე იმყოფება ცალსახა თანადობაში, თითოეულ A, A_1 არეებთან. ამას ყოველთვის შევგიძლია მივაღწიოთ. მართლაც, განვიხილოთ A_1 არეში წირები, რომლებსაც შეესაბამებიან A არეში Ox ღერძის პარალელური წრფეები. თუ Oy ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს თითოეულ ამ წირთაგანს მხოლოდ ერთ წერტილში მაშინ ცხადია, რომ A არის ყოველ m წერტილს შეესაბამება A' არის მხოლოდ ერთი m' წერტილი, ამიტომ საკმარისია დავანაწილოთ A_1 ფართობი საკმაო

მცირე ნაწილებად ისე, რომ თითოეულ მათგანში ეს პირობა იყოს დაკმაყოფილებული. თუ A არის წირები არის წრფეები, პარალელური Oy ღერძისა, მაშინ წინასწარ მოვახდენთ კოორდინატთა გარდაქმნას.

121. მოცულობები. მსზგავსად იმისა, როგორც ბრტყელი წირის ფართობის ინტუიტურ წარმოდგენას მივყევართ განსაზღვრული ინტეგრალის ანალიზურ განსაზღვრამდე (§ 66—68), ანალიზური გამოსახვა, რომელიც ჩვენ მივიღეთ ორმაგი ინტეგრალის განსაზღვრისათვის, შეიძლებოდა მიგვეღო, ჩვეულებრივ გამოთვლით მოცულობისა შემოსაზღვრული ცილინდრით, სიბრტყით, რომელიც მართობულია ცილინდრის შემქმნელის და რაიმე ფართეულის ნაწილით. ჩვენ აქ არ განვავითარებთ ზემოთ (§ 67) მოყვანილ მსჯელობებს, პირიქით, მოვიყვანთ შეკრულ ფართეულით შემოფარგლულ მოცულობის წმინდა ანალიზურ განსაზღვრას. მივიღოთ Σ შეკრულ ფართეულად, რომელიც მთელ სივრცეს ჰყოფს ორ სხვადასხვა არედ: *შიგა* D *არე* და *გარე* D' *არე*; ერთი და იგივე არის ორი წერტილი ყოველთვის შეიძლება შეერთებული იქნას ისეთი ტეხილით, რომელიც არ ჰკვეთს Σ ფართეულს, იმ დროს, როცა სხვადასხვა არის ორი წერტილის შემაერთებელი ტეხილი ერთხელ მაინც გადაჰკვეთს Σ ფართეულს.

რომ განვსაზღვროთ მოცულობა ასეთი არისა, ჩვენ გავყვებით იმავე გზას, როგორც ბრტყელი წირის ფართობის შემთხვევაში. ვუწოდოთ *მრავალწახნაგა არე*, ყოველი შემოსაზღვრულ არეს, რომლის საზღვრები არის სასრული რიცხვი ბრტყელი მრავალკუთხედებისა, რომელთაც *წახნაგებს* უწოდებენ.

ყოველი მრავალწახნაგა არე მიიღება სასრულო რიცხვის ამოზნექილ მრავალწახნაგების შეერთებით; ამ უკანასკნელთა მოცულობის განსაზღვრა მოცემულია ელემენტარულ გეომეტრიაში. P და p იყოს ორი მრავალწახნაგა არე, რომელთაგან პირველი შეიცავს D-ს, ხოლო მეორე თვით მოთავსებულია D-ში და V_P და V_p შესაბამი მოცულობები. ჩვენ გვაქვს ყოველთვის $V_P > V_p$; და მაშასადამე, V_P-ს აქვს ნამდვილი ქვედა საზღვარი V, ასევე V_p— სიდიდეს აქვს ზედა საზღვარი V'; ამის გარდა ჩვენ გვაქვს:

$$V' \leqslant V.$$

თუ $V'=V$, ამბობენ, რომ D არეს აქვს *გარკვეული მოცულობა* და V რიცხვს ღებულობენ ამ მოცულობის ზომად. ისე როგორც ბრტყელი არის შემთხვევაში (§ 77 და 78) მტკიცდება შემდეგი დებულებები:

იმისათვის, რომ D არეს ჰქონდეს მოცულობა აუცილებელია და საკმარისი, რომ როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი, მოიძებნოს ისეთი, ორი P და p მრავალწახნაგა არე, რომელთაგან ერთი შეიცავს D-ს, ხოლო მეორე თვით მოთავსებულია D-ში, და $V_P - V_p$ სხვაობა იყოს ნაკლები ε-ზე.

თუ D არე შეიძლება დანაწილდეს რამოდენიმე $D_1, D_2, \ldots$
D_n არეთ, რომელთა მოცულობებია: $V_1, V_2, \ldots, V_n$, მაშინ D არეს
აქვს მოცულობა:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n.$$

თუ მთელი სივრცე დაყოფილია კოორდინატთა სიბრ-
ტყეების პარალელურ სიბრტყეებით კუბებათ, რომლის
გვერდი უდრის ρ-ს, მაშინ D-ს შიგ მოთავსებული კუბების
მოცულობების ჯამს ზღვარად აქვს V მოცულობა, როცა ρ
მიისწრაფის ნულისაკენ, ხოლო იმ კუბების მოცულობათა
ჯამი, რომელთაც D არეს საზღვართან აქვთ ერთი ან რა-
მოდენიმე საერთო წერტილი, მიისწრაფის ნულისაკენ.

ავიღოთ ჯერ D არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ცილინდრით, რომლის
ნორმალური კვეთი წარმოადგენს ბრტყელ შეკრულ C წირს, რომელსაც არა
აქვს ჯერადი წერტილები, Q სიბრტყით, რომელიც მართობულია ცილინდრის
შემქნელისა და S ფართეულის ნაწილით, რომელიც ცილინდრის შიგ არის მოქ-
ცეული და რომელსაც ცილინდრის შემქნელის პარალელური ყოველი წრფე ჰკვეთს
მხოლოდ ერთ წერტილში. Q სიბრტყე მივიღოთ xy სიბრტყეთ, ცილინდრის
შემქნელის, პარალელური რამე წრფე z ღერძად. $z = f(x, y)$ იყოს S ფართეულის
განტოლება. $f(x, y)$ ფუნქცია არის უწყვეტი ფუნქცია ბრტყელ d არეში, რო-
მელიც მიღებულია ცილინდრის $z=0$ სიბრტყით გადაკვეთით და რომელსაც C
კონტური საზღვრავს. გარდა ამისა ჩვენ მივიღებთ: $f(x, y) \geqslant 0$. დავყოთ xy
სიბრტყე კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეებით კვადრატებად, რო-
მელთა გვერდები ტოლია ρ-სი და შემდეგ ავაგოთ ორი P და p მრავალწახნაგა
არე შემდეგნაირად. ყველა იმ კვადრატზე, რომელთაც აქვს C კონტურთან
ერთი საერთო წერტილი მაინც, ავაგოთ სწორი პრიზმი ისე, რომ ფუძეთ ექნეს
აღნიშნული კვადრატი, ხოლო სიმაღლეთ $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა M საზღვარი;
ხოლო C კონტურის შიგ მდებარე კვადრატებზე ავაგოთ სწორი პრიზმები, რო-
მელთა სიმაღლე იყოს M_i, სადაც M_i არის $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა საზღვარი
აღნიშნულ კვადრატის შიგ. ცხადია, რომ ასეთი პრიზმები შეადგენენ მრავალ-
წახნაგა P არეს, რომელიც შეიცავს D არეს. ყოველ შიგა მდებარე კვადრატზე
ავაგოთ, აგრეთვე, სწორი პრიზმი, რომელსაც ფუძეთ აქვს აღნიშნული კვად-
რატი, ხოლო სიმაღლეთ $f(x, y)$ ფუნქციის ქვედა m_i საზღვარი აღნიშნულ კვად-
რატში. ასეთნაირად მიღებულ ახალ პრიზმების სიმრავლე ადგენს აგრეთვე
მრავალწახნაგა არეს, რომელიც მოთავსებულია D-ში. ამ ორ მრავალწახნაგას
მოცულობების $V_P - V_p$ სხვაობა ნაკლებია ვიდრე $M\eta + A\omega$, სადაც η არის შერე-
ული კვადრატების ფართობთა ჯამი, A კი d არის ფართობი, ხოლო ω არის $f(x, y)$
ფუნქციის რყევის ზედა საზღვარი იმ კვადრატის შიგ, რომლის გვერდია ρ. მაგრამ
ჩვენ შეგვიძლია ρ ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ თითოეულ ნამრავლთაგან:
$M\eta$, $A\omega$ იყოს წინასწარ მოცემულ ε რიცხვზე ნაკლები. მაშასადამე, D არეს

აქვს გარკვეული მოცულობა. და ეს მოცულობა ტოლია შემდეგი ორმაგი ინტეგრალის:

$$V=\iint_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

ვინაიდან, როგორიც არ უნდა იყოს ρ, V_P მოცულობა მეტია მოყვანილ ორმაგ ინტეგრალზე, იმ დროს, როცა V_p იმავე ინტეგრალზე ნაკლებია.

არე, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული ფართეულით და რომელსაც Oz ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს არა უმეტეს ორ წერტილში, განიხილება როგორც ორი წინა სახის არის სხვაობა. უკანასკნელად ყოველი არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ნებისმიერი შეკრული ფართეულით და რომელსაც Oz ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს სასრულო რიცხვ წერტილებზე, შეიძლება დაყოფილი იქნეს რამოდენიმე ისეთ არედ, რომლებსაც უკვე Oz ღერძის პარალელური წრფე გადაჰკვეთს არა უმეტეს ორ წერტილში. მაშასადამე, ასეთი არის მოცულობა გამოისახება ორმაგ ინტეგრალთა ალგებრული ჯამის სახით.

122. მოცულობების გამოთვლა. ისე როგორც ეს ზემოთ გავაკეთეთ, განვიხილოთ სივრცის ნაწილი, შემოსაზღვრული S ფართეულით, რომელიც მოთავსებულია xOy სიბრტყის ზემოთ, თვით ამ სიბრტყით და იმ ცილინდრით, რომლის მსახველნი Oz ღერძის პარალელურია. მივიღოთ, რომ ცილინდრის კვეთა $z=0$ სიბრტყესთან არის კონტური, რომელიც როგორც 18 ნახაზზეა ნაჩვენები, შედგენილია Oy ღერძის პარალელური ორი წრფით და მრუდის ორი Am_1B და $A'm_2B'$ რკალით. თუ $z=f(x, y)$ არის S ფართეულის განტოლება, მაშინ ასეთნაირად შემოსაზღვრულ მოცულობას აქვს შემდეგი გამოსახვა:

$$V=\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

მაგრამ

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$$

ინტეგრალი წარმოადგენს იმ კვეთის ფართობს, რომელსაც მივიღებთ ამ მოცულობის გადაკვეთით იმ სიბრტყესთან, რომელიც პარალელურია yz სიბრტყისა; ამიტომ წინამდებარე ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$V=\int_a^b \mathfrak{A}\, dx. \tag{26}$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი ფართეულით შემოსაზღვრული მოცულობა უდრის ალგებრულ ჯამს გარკვეულ რიცხვის მოცულობებისას, რომლებიც შემოსაზღვრულია იმგვარადვე, როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი. მაგალითად, იმ

მოცულობის გამოსათვლელად, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული ამოზნექილი ფართეულით, ჩვენ შეგვიძლია შემოვხაზოთ ამ ფართეულის გარშემო ცილინდრი, რომლის შემქმნელები პარალელურია Oz ღერძისა, და გამოვითვალოთ ორი ზემოთ განხილულის მზგავსი მოცულობის სხვაობა. ამრიგად (26) ფორმულა გამოიყენება ყოველ მოცულობაზე, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი პარალელური სიბრტყით: $x=a$, $x=b\,(a<b)$ და ნებისმიერი სახის ფართეულით, მასთან $\mathfrak{A}$-თი აღნიშნულია ამ მოცულობის იმ კვეთის ფართობი, რომელიც მიიღება წინა სიბრტყეების პარალელური სიბრტყით გადაკვეთით. წარმოვიდგინოთ, რომ (a, b) შუალედი დანაწილებულია მცირე შუალედებად: $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ ზრდადი რიცხვების საშუალებით; ვთქვათ $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_i \ldots$ არიან $x=a$, $x=x_1, \ldots$ სიბრტყეების შესაბამი კვეთების ფართობები.

განსაზღვრული ინტეგრალი $\int\limits_a^b \mathfrak{A}\,dx$ არის ზღვარი შემდეგი ჯამისა:

$$\mathfrak{A}_0(x_1-a)+\mathfrak{A}_1(x_2-x_1)+\ldots+\mathfrak{A}_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\ldots$$

ამ ჯამის გეომეტრიული აზრი ცხადია. მართლაც, მაგალითად, $\mathfrak{A}_{i-1}(x_i-x_{i-1})$ წარმოადგენს იმ ცილინდრის ფენის მოცულობას, რომელსაც ფუძეთ აქვს კვეთა, შედგენილი $x=x_{i-1}$ სიბრტყის მიერ, და რომელსაც სიმაღლეთ აქვს მანძილი ორ მეზობელ სიბრტყეს შორის. მაშასადამე, საძიებელი მოცულობა არის ასეთი უსასრულოდ ვიწრო ცილინდრული ფენების ჯამის ზღვარი, რაც სრულიად ეთანადება მოცულობის ჩვეულებრივ ცნებას.

თუ ცნობილია $\mathfrak{A}$ ფართობის გამოსახვა x-ის ფუნქციის სახით, მაშინ საძიებელი მოცულობა მიიღება მხოლოდ ერთი კვადრატურით. წარმოვიდგინოთ, მაგალითად, რომ საძიებელია მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ბრუნვითი ფართეულით და მისი ღერძის ორი მართობი სიბრტყით. ეს ღერძი მივიღოთ Ox ღერძად და ვთქვათ $z=f(x)$ არის xz სიბრტყეში მერიდიანის განტოლება; ამ შემთხვევაში მოცულობის კვეთა yz სიბრტყის პარალელური სიბრტყის მიერ, არის წრეწირი, რადიუსით $f(x)$ და საძიებელ მოცულობას აქვს გამოსახვა

$$\pi\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

ვიპოვოთ კიდევ მოცულობა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ელიფსოიდის იმ ნაწილის, რომელიც მოთავსებულია ორ $x=x_0$, $x=X$ სიბრტყეს შორის. ელიფსოიდის კვეთა, მიღებული $x=0$ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყით, არის ელიფსი, რომლის ნახევარი ღერძებია:

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

ამრიგად გვაქვს საძიებელი მოცულობისათვის:

$$V=\int_{x_0}^{X}\pi\, bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\, bc\left(X-x_0-\frac{X^3-x_0^3}{3a^2}\right).$$

რომ გვექნეს მთელი ელიფსოიდის მოცულობა, საკმარისია მივიღოთ $x_0=-a$, $X=+a$, რაც გვაძლევს $\frac{4}{3}\pi abc$.

123. მოცულობა შემოსაზღვრული წრფოვანი ფართეულით. როცა $\mathfrak{A}$ ფართობი არის x-ის მეორე ხარისხის მთელი ფუნქცია, მაშინ მოცულობა ძალიან მარტივად გამოისახება ორი კიდური კვეთის B, B' ფართობებით, საშუალო კვეთის b ფართობის და კიდური კვეთებს შორის h მანძილის საშუალებით. თუ მივიღებთ yz სიბრტყეს კვეთის საშუალო სიბრტყედ, გვაქვს:

$$V=\int_{-a}^{+a}(lx^2+2mx+n)\,dx=2l\frac{a^3}{3}+2na;$$

მეორეს მხრით, გვაქვს:

$$h=2a,\ b=n,\ B=la^2+2ma+n,\ B'=la^2-2ma+n,$$

საიდანაც

$$n=b,\ a=\frac{h}{2},\ 2la^2=B+B'-2b.$$

აქედან მივიღებთ ფორმულას:

$$V=\frac{h}{6}\,[B+B'+4b]. \tag{27}$$

ეს ფორმულა გამოიყენება კერძოდ ისეთ მოცულობაზე, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი პარალელური სიბრტყით და რაიმე წრფოვანი ფართეულით. მართლაც, ვთქვათ $y=ax+p$, $z=bx+q$ არიან მოძრავი წრფის განტოლებები, სადაც a, b, p, q არიან ცვლადი t პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც ღებულობენ საწყის მნიშვნელობებს, როცა t გადადის t-დან T-ში. ეს წრფე აღწერს წრფოვან ფართეულს და ამ ფართეულის $x=0$ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყესთან კვეთის ფართობს აქვს გამოსახულება (§ 94):

$$\mathfrak{A}=\int_{t_0}^{T}(ax+p)\,(b'x+q')\,dt,$$

სადაც a', b', p', q' აღნიშნავენ a, b, p, q-ს წარმოებულებს t-თი; ეს წარმოებულები შეიძლება იყვნენ წყვეტილი t-ს მნიშვნელობებისათვის t_0-სა და T შორის, და წყვეტის წერტილთა რიცხვი იყოს სასრული; ეს მოხდება იმ შემთხვევაში, თუ წრფოვანი ფართეული შედგება სხვადასხვა ფართეულის ნაწილისაგან. უკანასკნელი ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ აგრეთვე შემდეგი სახით

$$\mathfrak{A}=x^2\int_{t_2}^{T}ab'\,dt+x\int_{t_0}^{T}(aq'+pb')\,dt+\int_{t_0}^{T}pq'\,dt;$$

ცხადია, რომ მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალები x-ზე დამოუკიდებელია. მაშასადამე (27) ფორმულა გამოიყენება საძიებელ მოცულობაზე. შეიძლება შევნიშნოთ, რომ მისგან მიიღება გამოსახულებანი მოცულობათა უმეტესი ნაწილისა, რომლებიც გამოითვლებიან ელემენტარულ გეომეტრიაში.

124. მრუდე ზედაპირის ფართობი. ანალიზურად ფართეული შემდეგნაირად განისაზღვრება. ვთქვათ $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ და $\psi(u, v)$ არის ორი u, v ცვლადის სამი უწყვეტი ფუნქცია, როდესაც წერტილი (u, v) კოორდინატებით რჩება სიბრტყის R არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი L მრუდით. როდესაც (u, v) წერტილი აღწერს R არეს, მაშინ გეომეტრიული ადგილი წერტილებისა სივრცეში, რომლის კოორდინატებია: $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$ და $z=\psi(u, v)$ არის S ფართეული; ხოლო Γ მრუდი, რომელიც შეესაბამება (u, v) სიბრტყის L მრუდს, არის ამ ფართეულის კონტური. ჩვენ ვიტყვით, რომ S ფართეული არის რ ე გ უ ლ ა რ უ ლ ი, თუ შეიძლება u და v პარამეტრები შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობებს: 1) S ფართეულისა და მისი Γ კონტურის წერტილები იმყოფებიან ცალსახა თანადობაში (u, v) სიბრტყის R არისა და მისი L კონტურის წერტილებთან; 2) f, φ და ψ ფუნქციებს აქვთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები, უწყვეტი R არეში და L კონტურზე; 3) სამივე $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$ და $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ იაკობიანი ერთდროულად არ არის ნულის ტოლი R არისა და L კონტურის არც ერთ წერტილზე. ჩვენ განვიხილავთ პირველად მხოლოდ რეგულარულ ფართეულებს ან ფართეულებს, შედგენილს სასრულო რიცხვი რეგულარულ ფართეულების ნაწილებისაგან.

რეგულარული ფართეულის ყოველ M წერტილს შეესაბამება R არეს (u, v) წერტილი; ამ ფართეულს აქვს მხები სიბრტყე, რომლის განტოლება არის (§ 61):

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

სადაც

$$A=\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B=\frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C=\frac{D(x, y)}{D(u, v)};$$

ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს აქვთ შემდეგი გამოხატულებები:

$$\alpha=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \gamma=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

სადაც სამივე ფორმულაში ნიშნები ერთი და იგივე აიღება. ეს ორი ნიშანი შეესაბამება ორ მოპირდაპირე მიმართულებას, რომელიც შეგვიძლია ავარჩიოთ ნორმალზე. მაგალითად, თუ გვსურს გვქონდეს იმ მიმართულების კოსინუსები, რომლებიც ჰქმნიან Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს, ჩვენ ავიღებთ ნიშანს, რომელიც ემთხვევა C-ს ნიშანს.

თუ შევცვლით u და v-ს t პარამეტრის ფუნქციებით, მაშინ (x, y, z) წერტილი აღწერს S ფართეულზე მრუდს, და ამ მრუდის ელემენტის კვადრატს

მივიღებთ, თუ ავამაღლებთ dx, dy, dz-ის გამოხატულებებს კვადრატში და შევკრებთ; შედეგი გამოითქმება შემდეგი ფორმულით:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{28}$$

სადაც აღნიშნულია:

$$E = \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2;$$

ნიშანი $\mathbf{S}$ გვიჩვენებს, რომ საკმარისია x შევცვალოთ y-ით, შემდეგ z-ით და შევადგინოთ ჯამი. ეს E, F, G ფუნქციები ასრულებენ მნიშვნელოვან როლს ფართეულების გამოკვლევაში; თუ f, φ და ψ ნამდვილი ფუნქციებია, რასაც ჩვენ თავიდან ვგულისხმობთ, მაშინ ცხადია, რომ E, G, $EG-F^2$ არიან დადებითი.

A, B, C კოეფიციენტები დამოკიდებულია არა მარტო ფართეულის განსახილავ წერტილზე, არამედ დამოკიდებულია აგრეთვე საკოორდინატო ღერძებზე, იმ დროს როდესაც E, F, G არ არის დამოკიდებული საკოორდინატო ღერძების შერჩევაზე, არამედ დამოკიდებულია მხოლოდ S ფართეულსა და აღებული u და v ცვლადებზე. ეს, ცხადია, კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობებიდან. მაგრამ მასში დავრწმუნდებით სხვათაშორის უშუალოდ კოორდინატთა გადაქმნის ფორმულების საშუალებით. ეს ექვსი ფუნქცია შებმულია მნიშვნელოვანი დამოკიდებულებით:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

რომელიც გამოიყვანება ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს იგივეობიდან:

$$(ab'-ba')^2 + (bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 =$$

$$= (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2,$$

თუ მასში a, b, c, a', b', c'—სიდიდეებს შევცვლით $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial v}$-თი შესაბამად.

წინასწარ გამოვიყვანოთ კიდევ ერთი ფორმულა. ვთქვათ r არის R-ის ნაწილი, შემოსაზღვრული შეკრული c კონტურით, m—წერტილი r-ის შიგნით, s—ნაწილი S-ის, რომელიც შეესაბამება r-ს, γ იყოს s-ის კონტური და M კი s-ის წერტილი m-ის შესაბამი. ვიგულისხმოთ r არე იმდენად მცირე, რომ s ფართეულის M წერტილში ნორმალის პარალელური წრფეს შეუძლია გადაკვეთოს s არა უმეტეს ვიდრე ერთ წერტილში. ამ s ფართეულის ორტოგონალური გეგმილი s ფართეულის M წერტილში გავლებული მხები სიბრტყეზე, არის ბრტყელი s' ნაწილი, შემოსაზღვრული კეტილი γ' მრუდით, რომელიც γ-ს გეგმილია. ვთქვათ ω არის r არის ფართობი, ხოლო σ კი s'-ის ფართობი; მოვძებნოთ პირველად $\frac{\sigma}{\omega}$ ფარდობის გამოსახვა (შეად. § 117). ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ M წერტილი არჩეულია კოორდინატთა სათავედ, z ღერძად—s ფართეულის M წერტილში გავლებული ნორმალი, ხოლო x და y ღერძებად რაიმე მართობული

წრფეები, მდებარე მხებ სიბრტყეში და რომლებიც გამოდიან M-დან. თუ u_0, v_0 არიან m წერტილის კოორდინატები (u, v) სიბრტყეში, და რადგანაც კოორდინატთა სათავეზე მხები სიბრტყე არის $z=0$ სიბრტყე, ამიტომ ჩვენ გვაქვს: $A_0=B_0=0$, და მაშასადამე $C^2{}_0=E_0G_0-F_0{}^2$, სადაც ნული ინდექსებით აღნიშნულია ფუნქციების მნიშვნელობანი $u=u_0$, $v=v_0$-თვის. σ არის არე შემოფარგლული γ მრუდით, რომელსაც (x, y) წერტილი აღწერს $z=0$ სიბრტყეში, როცა (u, v) წერტილი აღწერს c კონტურს; ამრიგად ჩვენ გვაქვს (§ 117) $\sigma=\omega|C(u', v')|$, სადაც u' და v' არიან c-ს შიგნით რაიმე m' წერტილის კოორდინატები. ორი $|C(u, v)|$ და $\sqrt{EG-F_2}$ ფუნქცია ერთმანეთის ტოლია $u=u_0$, $v=v_0$-თვის; რადგან ეს ფუნქციები არიან უწყვეტი, ამიტომ თუ r არე საკმაოდ მცირეა, მათი სხვაობა, როცა $u=u'$, $v=v'$, არის აგრეთვე საკმაოდ მცირე, და ჩვენ გვაქვს:

$$\sigma=\omega\left\{\sqrt{E'G'-F'^2}+\varepsilon\right\},$$

სადაც E', F', G' არიან E, F, G-ს მნიშვნელობები r არის რაიმე წერტილის u', v' კოორდინატებისათვის, ხოლო ε უსასრულოდ მცირე, r არის განზომილებასთან ერთად.

ეს ε რიცხვი თ ა ნ ა ბ რ ა დ მიისწრაფის ნულისაკენ r არის უდიდესი განზომილებასთან ერთად. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$|\varepsilon|=\frac{A'^2+B'^2}{|C'|+\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}<\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\left\{\frac{A'^2+B'^2}{A'^2+B'^2+C'^2}\right\}<H\sin^2\theta,$$

სადაც H არის $\sqrt{EG-F^2}$ გამოხატულების მაქსიმალური მნიშვნელობა, ხოლო θ—კუთხე, შედგენილი S ფართეულის ორი ნორმალის მიერ (u_0, v_0) და (u', v') წერტილებში. ამრიგად ჩვენთვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ მახვილი θ კუთხე, შედგენილი S ფართეულის ნორმალების მიერ ორ მეზობელ M და M' წერტილებში, თანაბრად მიისწრაფის ნულისაკენ MM' მანძილთან ერთად. როგორიც არ უნდა იყოს ღერძთა სისტემა, ცხადია გვაქვს:

$$\sin^2\theta=\frac{(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2}{(A^2+B^2+C^2)\,(A'^2+B'^2+C'^2)},$$

და ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე არის ოთხი u, v, u', v' ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ნულია $u'=u$, $v'=v$ მნიშვნელობებისათვის. ამრიგად, ის მიისწრაფის ნულისაკენ ყოველთვის $(u'-u)^2+(v'-v)^2$-თან ერთად (§ 8, 12).

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ (u, v) სიბრტყის R არე დანაწილებულია $r_1, r_2, \cdots, r_n$ ნაწილობრივ არეებად, სადაც r_i არე შემოსაზღვრულია კეტილი c_i მრუდით, და ავიღოთ r_i-ის შიგნით რაიმე m_i (u_i, v_i) წერტილი. ამ r_i არესა და c_i მრუდს შეესაბამება S ფართეულის s_i ნაწილი და მისი γ_i კონტური. ვთქვათ M_i არის s_i-ს წერტილი, რომელიც შეესაბამება m_i წერტილს; ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა r_i არე არის აღებული იმდენად მცირე, რომ M_i წერტილში ნორმალის პარალელური წრფე s_i-ს გადაკვეთს არა უმეტეს, ვიდრე ერთ წერტილ-

ში[1]. s_i ფართეულის გეგმილი M_i წერტილზე გავლებულ მხებ სიბრტყეზე წარმოადგენს ბრტყელ არეს, რომლის ფართობი არის σ_i. როდესაც n რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, მასთან იმგვარად, რომ ყველა r_i არე მიისწრაფის ნულისაკენ თავის ყველა ზომით, მაშინ ამ ბრტყელი არეების ჯამი:

$$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n=\Omega$$

მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ, რომელიც არის თანახმად განმარტებისა, S ფართეულის ფართობი. მართლაც, ახლა დამტკიცებულის თანახმად, ჩვენ გვაქვს:

$$\Omega=\sum \omega_i\left\{\sqrt{E_i'G_i'-F_i'^2}+\varepsilon_i\right\},$$

სადაც ω_i არის r_i არის ფართობი, u'_i და v'_i კი r_i არის რაიმე წერტილის კოორდინატები, ხოლო ε_i—უსასრულოდ მცირე სიდიდე. რადგანაც ε_i თანაბრად მიისწრაფის ნულისაკენ, ამიტომ $\sum \omega_i \varepsilon_i$ ჯამი მიისწრაფის ნულისაკენ და მაშასადამე Ω-ს აქვს ზღვრად ორჯერადი ინტეგრალი

$$A=\int\int_{R}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{29}$$

ასეთია S ფართეულის ფართობის გამოსახვა[2].

125. ფართეულის ელემენტი. გამოსახულება $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ არის S ფართეულის ელემენტის ფართობი (u, v) კოორდინატთა სისტემაში. ზუსტი მნიშვნელობა S ფართეულის მცირე ფართობისა, რომელიც მოთავსებულია (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$ მრუდებს შორის, არის $(\sqrt{EG-F^2}+\varepsilon)\,du\,dv$, სადაც ε უსასრულოდ მცირეა du და dv-თან ერთად; მაგრამ ისე, როგორც ზემოთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\varepsilon\,du\,dv$ წევრი შეგვიძლია უყურადღებოდ დავტოვოთ. ფართობის ელემენტის გამოსახულება ადვილად შეიძლება მივიღოთ დი-

---

[1] ეს გარემოება შეიძლება დამტკიცდეს მკაცრად (Bulletin de la Sociétè mathématique, t. XXXVIII, 1910, გვ. 139). სიძნელეების თავიდან ასაცილებლად, უწოდოთ s გეგმილის ფართობი აბსოლუტური მნიშვნელობას შემდეგი ინტეგრალისა $\int ydx$, რომელიც აღებულია γ_i-ს განგრძივ (შეად. § 93).

[2] ამ განმარტებას საფუძვლად აქვს შეცვალოს S ფართეულის მცირე არე სიბრტყის ისეთი მცირე ნაჭერით, რომელიც S ფართეულის აღნიშნულ არეს ეხება რომელიმე წერტილზე. თითქო უფრო ბუნებრივი იქნებოდა მიგველო განმარტებად, მრუდის რკალის სიგრძის განმარტების ანალოგიური, ე. ი. განვმარტოთ S ფართობი, როგორც ზღვარი ჩაწერილ მრავალგვერდას ფართობისა, როცა გვერდების რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, ისე, რომ უდიდესი წიბოს სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფის. შვარცმა (Schwarz) მოგვცა მარტივი მაგალითი, რომლიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი, პირველი შეხედვით, პარადოქსალური გარემოება: მრავალგვერდას ფართობი არავითარი ზღვარისაკენ არ მიისწრაფის თუ არ დაუმატებთ გარკვეულ პირობას (იხ. სავარჯიშო მაგ. 12 გვ. 349).

ფერენციალური გეომეტრიის მარტივი მოსაზრებების მიხედვით. მართლაც, თუ ჩვენ მივიღებთ განსახილავ S ფართეულის უსასრულო მცირე ნაწილს პარალელოგრამად, რომელიც მდებარეობს S ფართეულის (u, v) წერტილზე, გავლებული მხებ სიბრტყეში[1], მაშინ ამ ნაწილის ფართობი იქნება ნამრავლი გვერდების სიგრძეებისა და (u) და (v) მრუდეებს შორის კუთხის სინუსისა. თუ ჩვენ მივიღებთ რკალის ნაზრდს ds დიფერენციალად, მაშინ პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეები, თუ ვიგულისხმებთ du და dv-ს დადებითად, თანახმად (28) ფორმულისა, იქნება ტოლი $\sqrt{E}\,du, \sqrt{G}\,dv$. რაც შეეხება ორივე მრუდს შორის მოთავსებულ α კუთხეს, იგი გამოიხატება ფორმულით:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

სადაც $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ არიან შესაბამად ორივე მრუდისადმი მხებების მიმართულების პარამეტრები; მაშასადამე, გვაქვს აგრეთვე

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

შევასრულებთ რა გამრავლებას, მოვძებნით ფართობის ელემენტის გამოსახულებას. ჩვენ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ფორმულაში, რომელიც გვაძლევს $\cos\alpha$-ს გამოსახულებას, კოეფიციენტი F ტოლია ნულის, როცა (u) და (v) მრუდთა ორი ოჯახი ადგენენ ფართეულზე ორტოგონალურ ქსელს, და მხოლოდ ამ შემთხვევაში.

როდესაც S ფართეული გადაიქცევა სიბრტყედ, ჩვენ ისევ მივიღებთ ზემოთ მიღებულ მნიშვნელობას (§ 118), მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ $\psi(u, v) = 0$, გვაქვს:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

და დეტერმინანტის კვადრატში ამაღლების წესი გვაძლევს:

$$\Delta^2 = \left\{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right\}^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2.$$

ამრიგად $\sqrt{EG - F^2}$ დაიყვანება $|\Delta|$-ზე.

---

[1] აქ იგულისხმება, რომ აღნიშნული პარალელოგრამის ორი გვერდი მიყვება (u) და (v) წირების მხებებს (რ ე დ.).

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. ვთქვათ საძიებელია S ფართეულის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც წარმოდგენილია $z=f(x, y)$ განტოლებით, და რომლის გეგმილი xOy სიბრტყეზე არის R არე, და მასთან ამ არეში $f(x, y)$ ფუნქცია და მისი $p=\frac{\partial f}{\partial x}$ და $q=\frac{\partial f}{\partial y}$ წარმოებულები არიან უწყვეტი. თუ მივიღებთ x და y-ს დამოუკიდებელ ცვლადებად, გვექნება $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$ და საძიებელი ფართობი წარმოგვიდგება ორჯერადი ინტეგრალის საშუალებით

$$\mathfrak{A}=\iint\limits_{R}\sqrt{1+p^2+q^2}\;dx\,dy=\iint\limits_{R}\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}, \tag{30}$$

სადაც γ-ით აღნიშნულია მახვილი კუთხე, რომელსაც ჰქმნის ფართეულის ნორმალი Oz ღერძთან.

2. ვთქვათ საძიებელია ბრუნვითი ფართეულის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია ორ პარალელს შორის. ფართეულის ღერძი მივიღოთ Oz ღერძად და ვთქვათ $z=f(x)$ არის xOz სიბრტყეზე მდებარე მერიდიანის განტოლება. თუ მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადებად ფართეულის რაიმე წერტილის xOy სიბრტყეზე გეგმილის პოლარ კოორდინატებს ρ და ω, მაშინ ფართეულის აღნიშნული წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad z=f(\rho),$$

აქედან

$$ds^2=d\rho^2\,[1+f'^2(\rho)]+\rho^2\,d\omega^2,$$

$$E=1+f'^2(\rho),\; F=0,\; G=\rho^2.$$

რომ მივიღოთ ფართეულის ნაწილი, მოთავსებული ρ_1 და ρ_2 რადიუსებიანი ($\rho_1<\rho_2$) პარალელებს შორის, ცხადია, რომ ρ უნდა ვცვალოთ ρ_1-დან ρ_2-მდე, ხოლო ω კი 0-დან 2π-მდე. მაშასადამე, საძიებელი ფართობისათვის გვაქვს:

$$\mathfrak{A}=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}d\rho\int\limits_{0}^{2\pi}\rho\sqrt{1+f'^2(\rho)}\,d\omega=2\pi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\sqrt{1+f'^2(\rho)}\,d\rho,$$

და, ჩვენ დაგვრჩება შესასრულებელი მხოლოდ ერთი კვადრატურა. თუ აღვნიშნავთ s-ით მერიდიანის რკალს, გვექნება:

$$ds^2=d\rho^2+dz^2=d\rho^2\,[1+f'^2(\rho)],$$

და წინამდებარე ფორმულა შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$\mathfrak{A}=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}2\pi\rho\,ds.$$

ამ ფორმულის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია თავისთავად ცხადია: $2\pi\rho\,ds$ არის ფართობი მოკვეთილი კონუსის ფერდითი ზედაპირისა, რომლის მსახველი ტოლია ds-ის, ხოლო საშუალო წრის რადიუსი ρ-სი. თუ განვიხილავთ ფართობს, მოთავსებულს ორ უსასრულოდ ახლო მდებარე პარალელს შორის, როგორც ფართობს მოკვეთილი კონუსის ფერდითი ზედაპირის, ჩვენ მივიღებთ $\mathfrak{A}$ ფორმულას.

მაგალითად, თუ გვაქვს პარაბოლოიდი, შექმნილი $x^2=2pz$ პარაბოლის ბრუნვით, მაშინ ამ პარაბოლოიდის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ρ რადიუ-

შიანი პარალელით, უდრის:

$$\mathfrak{A} = 2\pi \int_0^r \frac{\rho}{p} \sqrt{\rho^2 + p^2}\, d\rho = \frac{2\pi}{3p} \left[(r^2 + p^3)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right].$$

126. ვივიანის ამოცანა. სფეროს რაიმე OA რადიუსზე ($OA = R$), როგორც დიამეტრზე, შემოვწეროთ C წრე, და მოვძებნოთ სფეროს იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია წრიული ცილინდრის შიგნით, რომლისთვის C წრე არის მართობული კვეთა. მივიღოთ სფეროს ცენტრი კოორდინატთა სათავედ, მაშინ საძიებელი მოცულობის მეოთხედი ტოლია ორჯერადი ინტეგრალის

$$\frac{V}{4} = \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

გავრცელებული იმ წრის ნახევარზე, რომელიც შემოწერილია OA რადიუსზე, როგორც დიამეტრზე. თუ ჩვენ გადავალთ ρ და ω პოლარ კოორდინატებზე, სადაც ω კუთხე იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, ხოლო ρ—0-დან R-მდე, გვექნება:

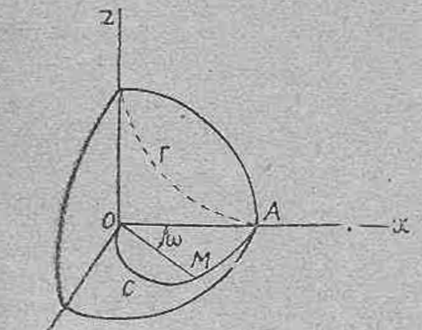
$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \rho \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \left[(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R\cos\omega} d\omega,$$

ანუ

$$\frac{V}{4} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^3 - R^3 \sin^3 \omega)\, d\omega = \frac{R^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

თუ გამოვაკლებთ სფეროდან ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია განსახილავი ცილინდრის შიგნით და მეორე ასეთივე ცილინდრის შიგნით, დალაგებული პირველთან Oz ღერძის მიმართ სიმეტრიულად, ვნახავთ, რომ დარჩენილი ნაწილის მოცულობა უდრის:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{9} R^3.$$



ნახ. 24.

სფეროს ფართეულის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც იმყოფება წინა ცილინდრის შიგნით, მიიღება აგრეთვე ფორმულიდან:

$$\Omega = 4 \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy;$$

თუ შევცვლით p და q მათი მნიშვნელობებით $-\frac{x}{z}$ და $-\frac{y}{z}$, და გავალთ პოლარ კოორდინატებზე, მივიღებთ:

$$\Omega = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R\left[\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R\cos\omega} d\omega,$$

ანუ

$$\Omega = 4R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\omega)\,d\omega = 4R^3\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

ახლა თუ გამოვაკლებთ მთელი სფეროს ზედაპირიდან იმ ნაწილს, რომელიც იმყოფება ორი ზემოთხსენებული ცილინდრების შიგნით, დარჩენილი ნაწილისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$4\pi R^2 - 8R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 8R^2.$$

III. ორჯერადი ინტეგრალის ცნების გაფართოება. ზედაპირული ინტეგრალები

127. ორჯერადი ინტეგრალები უსასრულო არეზე გავრცელებული. ვთქვათ $f(x, y)$ არის შემოსაზღვრული და ინტეგრადი ფუნქცია სიბრტყის მთელ ნაწილში, რომელიც კეტილი Γ მრუდის გარეთ მდებარეობს. ორჯერად ინტეგრალს $\iint f(x, y)\,dx\,dy$, გავრცელებულს არეზე, რომელიც მოთავსებულია Γ მრუდსა და Γ მრუდის გარეთ მდებარე მეორე კეტილი C მრუდს შორის, აქვს სასრულო მნიშვნელობა. თუ ამ ინტეგრალს აქვს ზღვარი, როდესაც C მრუდი ყოველი მიმართულებით მიდის უსასრულეთში, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ ორჯერად ინტეგრალს $f(x, y)$ ფუნქციიდან, გავრცელებულს არეზე, რომელიც მთლიანად მდებარეობს Γ მრუდის გარეთ. ჩვენ ვიტყვით, რომ ცვლადი C მრუდი ყოველი მიმართულებით მიდის უსასრულოეთში, თუ გარკვეულ მომენტიდან ეს მრუდი რჩება მუდამ ნებისმიერი R რადიუსიანი წრის გარეთ, რომელიც შემოწერილია რაიმე მუდმივი წერტილიდან როგორც ცენტრიდან.

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ეს ზღვარი არსებობდეს არის შემდეგი: ვთქვათ C, C' ორი რაიმე კეტილი მრუდია, რომლებიც Γ-ს თავის შიგ შეიცავენ, და ვთქვათ $\delta(C, C')$ არის სხვაობა ორი ორჯერადი ინტეგრალისა, რომლებიც გავრცელებულია (Γ, C) და (Γ, C') მრუდეებით ზემოსაზღვრულ არეებზე შესაბამად. ზემოთ აღნიშნული ზღვარის არსებობისათვის *აუცილებელია და საკმარისი*, რომ $\delta(C, C')$ *სხვაობა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როდესაც, C და C' მრუდეები ყოველი მიმართულებით, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, მიდიან უსასრულოეთში.*

ცხადია, რომ ეს პირობა არის *აუცილებელი*. ის არის აგრეთვე *საკმარისიც*. მართლაც, განვიხილოთ კეტილი მრუდთა მიმდევრობა: $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, რომლებიც Γ მრუდს გარსევლებიან და ერთიმეორეშია ჩალაგებული და ამას გარდა მიისწრაფიან უსასრულეთში, როცა n უსაზღვროდ იზრდება. რადგან $\delta(C_m, C_n)$ სხვაობა მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა ორი m და n რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება, ამიტომ ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული Γ და C_n მრუდებს შორის მოთავსებული არეზე, მიისწრაფის რაიმე I ზღვარისაკენ (§ 5).

ავიღოთ ახლა სხვა ნებისმიერი სახის კეტილი C' მრუდი, რომელიც ყოველი მიმართულებით მიისწრაფის უსასრულეთში. რადგან, თანახმად დაშვებისა, $\delta(C', C_n)$ მიისწრაფის ნულისაკენ, ამიტომ ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული Γ და C' შორის მოთავსებული არეზე მიისწრაფის აგრეთვე I-საკენ.

ჩვენ გვქონდა ნაგულისხმევი გარკვეულობისათვის, რომ ინტეგრობის არე უსასრულოა ყოველი მიმართულებით. მაგრამ ცხადია, რომ ეს დაშვება არ არის აუცილებელი. ჩვენ შეგვიძლია, მაგალითად, განვიხილოთ ინტეგრობის არე, შემოსაზღვრული ორი უძრავი წრფით და ცვლადი მრუდით, რომელიც მიისწრაფის უსასრულეთში ამ ორი წრფის მიერ შექმნილ კუთხეში. წინა მსჯელობა აქაც გამოიყენება უცვლელად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ $f(x, y)$ ფუნქცია, რომელსაც კოორდინატთა სათავიდან შემოწერილ r რადიუსიანი წრის გარედ აქვს სახე

$$f(x, y)=\frac{\psi(x, y)}{(x^2+y^2)^{\alpha}},$$

მასთან მრიცხველი მუდამ რჩება ორი დადებითი m და M რიცხვებს შორის. ორჯერადი ინტეგრალს, გავრცელებულს კოორდინატთა სათავიდან შემოწერილ r და R რადიუსებიანი წრეწირებს შორის მოთავსებულ არეზე, აქვს გამოსახვა:

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_r^R \frac{\psi(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\,\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}};$$

მაშ, ეს გამოთქმა მოთავსებულია ორ ინტეგრალს:

$$2\pi m\int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}, \quad 2\pi M\int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

შორის.

როდესაც R უსაზღვროდ იზრდება განსახილავ ინტეგრალს აქვს ზღვარი, როცა $2\alpha-1>1$, ე. ი. $\alpha>1$ (§ 90). პირიქით, როცა $\alpha\leqslant 1$ ინტეგრალი უსაზღვროდ იზრდება R-თან ერთად.

აუცილებელი და საკმარისი პირობიდან, რომელიც ზემოთ მივიღეთ, გამომდინარეობს, რომ ორჯერად ინტეგრალს $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ აქვს ზღვარი, თუ რომ აქვს ზღვარი ორჯერად ინტეგრალს $\int\int |f(x, y)|\,dx\,dy$. მაგრამ აქ არსებობს ერთ დამოუკიდებელ ცვლადის შემთხვევისაგან მნიშვნელოვანი განსხვავება. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინარჩუნებს მუდამ ნიშანს, მაგალითად თუ ის დადებითია, მაშინ იმისათვის, რომ გავიგოთ აქვს თუ არა ინტეგრალს ზღვარი, საკმარისია განვიხილოთ შეკრული მრუდთა მიმდევრობა $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, რომლებიც ერთიმეორეს შეიცავენ და მასთან ისეთები, რომ როცა n უსაზღვროდ იზრდება, C_n მრუდი მიისწრაფოდეს უსასრულობისაკენ ყოველი მიმართულებით. თუ ორჯერადი ინტეგრალი: $I_n=\int\int f(x, y)\ dx\,dy$, გავრცელებული

Γ და C_n შორის მოთავსებულ R_n არეზე, მიისწრაფის რაიმე I ზღვარისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ I' ინტეგრალი, გავრცელებული Γ და C' შორის მოთავსებულ R' არეზე, მიისწრაფის იმავე ზღვარისაკენ, როცა C' მიისწრაფის უსასრულობისაკენ ყოველი მიმართულებით. მართლაც, C' კონტური მოთავსებულია ორ C_m, C_{m+n} კონტურს შორის, რომლებიც მიისწრაფიან უსასრულობისაკენ C'-თან ერთად. ამრიგად ჩვენ გვაქვს $I_m < I' < I_{m+n}$, და მაშასადამე I' აქვს ზღვრად I.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია არ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული ნებისმიერ არეზე არის ორი ორჯერადი ინტეგრალის სხვაობა, დადებითი ელემენტებით

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\int f_1(x, y)\,dx\,dy - \int\int f_2(x, y)\,dx\,dy,$$

იმ დროს, როცა

$$\int\int |f(x, y)|\,dx\,dy = \int\int f_1(x, y)\,dx\,dy + \int\int f_2(x, y)\,dx\,dy;$$

აქ მიღებულია $f_1 = f$, თუ $f > 0$, და $f_1 = 0$, თუ $f < 0$, და აგრეთვე $f_2 = 0$, თუ $f > 0$ და $f_2 = -f$, თუ $f < 0$. თუ ორჯერად ინტეგრალს $\int\int |f(x, y)|\,dx\,dy$ არა აქვს ზღვარი, მაშინ შემდეგი ორჯერადი ინტეგრალებიდან $\int\int f_1(x, y)\,dx\,dy$, $\int\int f_2(x, y)\,dx\,dy$ ერთი მაინც უსაზღვროდ იზრდება. თუ ორივე ინტეგრალი, უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ მათი სხვაობა არის *განუზღვრელი*. მართლაც, თუ ვიმსჯელებთ ისე, როგორც ნახევრად კრებადი მწკრივების შესწავლისას (იხ. ქვემოთ, თავი VIII), ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ შეიძლება ავარჩიოთ ცვლადი მრუდეების ოჯახი ისე, რომ ორჯერადი $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ ინტეგრალის ზღვარი იყოს წინასწარ მოცემული რაიმე რიცხვი; მასთან ვიგულისხმებთ, რომ f ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

მოვიყვანოთ მაგალითი *კელის* (Cayley) მიერ მოცემული. ვთქვათ $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$; თუ პირველად მოვახდენთ ინტეგრობას იმ კვადრატის შიგნით, რომლის გვერდი არის a, მივიღებთ ორჯერადი ინტეგრალისათვის გამოსახვას:

$$\int_0^a dx \int_0^a \sin(x^2 + y^2)\,dy =$$

$$= \int^a \sin x^2\,dx \cdot \int^a \cos y^2\,dy + \int_0^a \cos x^2\,dx \cdot \int_0^a \sin y^2\,dy.$$

როდესაც a უსაზღვროდ იზრდება, მარჯვენა მხარის ინტეგრალებს აქვთ ზღვარი (§ 88). შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს ზღვარი ტოლია $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$-ის და მარჯვენა მხარეს ზღვრად აქვს π. თუ ჩვენ მოვახდენთ ინტეგრობას R რადიუსიანი წრის შიგნით ორჯერადი ინტეგრალისათვის მივიღებთ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^R \rho \sin \rho^2 \, d\rho = -\frac{\pi}{4} \left[\cos \rho^2\right]_0^R = \frac{\pi}{4} \left[1 - \cos R^2\right],$$

და მარჯვენა ნაწილი არის განუზღვრელი, როცა R უსაზღვროდ იზრდება.

128. B (p, q) ფუნქცია. ზემოთ ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ C_n კონტური უსაზღვროდ იზრდება ყოველ მიმართულებით; მაგრამ ცხადია, შეიძლება დავუშვათ, რომ უსასრულობისაკენ მიისწრაფის ამ კონტურის მხოლოდ ნაწილი, ამას აქვს ადგილი ზემოთმოყვანილ კ ე-ლ ი ს მაგალითში და აგრეთვე შემდეგ მაგალითში. ვთქვათ

$$f(x, y) = 4x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2},$$

სადაც $p>0$, $q>0$. $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია და დადებითი xOy საკოორდინატო კუთხეში. თუ ამ ფუნქციას ვაინტეგრებთ პირველად იმ a გვერდიანი კვადრატის შიგნით, რომელიც შედგენილია საკოორდინატო ღერძებით და $x=a$, $y=a$ წრფეებით, ჩვენ მივიღებთ ორჯერადი ინტეგრალისათვის გამოხატულებას:

$$\int_0^a 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^a 2y^{2q-1} e^{-y^2} dy.$$

წინამდებარე თითოეულ ინტეგრალს აქვს ზღვარი, როცა a უსაზღვროდ იზრდება. მართლაც, თუ ინტეგრალში, რომელიც განსაზღვრავს $\Gamma(p)$ ფუნქციას (§ 90),

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \, dt,$$

მივიღებთ $t=x^2$, მაშინ გვექნება:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx. \tag{31}$$

მაშასადამე, საძიებელ ორჯერად ინტეგრალს აქვს ზღვრად $\Gamma(p)\,\Gamma(q)$ ნამრავლი.

ახლა იგივე ფუნქცია ვაინტეგროთ იმ წრის მეოთხედზე, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით და $x^2+y^2=R^2$ წრეწირით. თუ შემოვიღებთ პოლარ კოორდინატებს, ორჯერადი ინტეგრალისათვის მივიღებთ გამოხატულებას:

$$\int_0^R 2\rho^{2(p+q)-1} e^{-\rho^2} d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi \, d\varphi.$$

ამრიგად, თუ ავღნიშნავთ

$$B(p, q)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi \, d\varphi, \tag{32}$$

მოვძებნით, რომ R-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს საძიებელ ორჯერად ინტეგრალს აქვს ზღვრად

$$\Gamma(p+q)\ B(p, q).$$

ორივე ზღვარს თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ შემდეგი დამოკიდებულებას:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\,B(p, q). \tag{33}$$

$B(p, q)$ ინტეგრალს ეწოდება ე ი ლ ე რ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი გ ვ ა რ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი. თუ ავღნიშნავთ $\sin^2\varphi=t$, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$B(p, q)=\int_{0}^{1} t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt. \tag{34}$$

(33) ფორმულას $B(p, q)$ ფუნქციის გამოთვლა დაჰყავს Γ ფუნქციის გამოთვლაზე. მაგალითად, თუ დავუშვებთ $p=q=\frac{1}{2}$, მაშინ მივიღებთ:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma(1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi=\pi,$$

და მაშასადამე $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. აქედან (31) ფორმულის საშუალებით გვაქვს:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

საზოგადოდ, თუ $q=1-p$ და p მოთავსებულია 0-სა და 1 შორის, მაშინ

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=B(p, 1-p)=\int_{0}^{1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}\frac{dt}{t};$$

შემდეგში ვნახავთ, რომ ეს ინტეგრალი ტოლია $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

129. ინტეგრალები არა შემოსაზღვრული ფუნქციებიდან. ჩვენ განვსაზღვრავთ იმავე წესით ორჯერად ინტეგრალს $f(x, y)$ ფუნქციიდან, რომელიც ერთ წერტილზე ან მთელი წირის განგრძივ ხდება უსასრულო. ამისათვის ჯერ საინტეგრო არედან გამოვყოფთ წყვეტის წერტილს ან წირს, შემოვფარგლავთ რა

მათ ფრიად მცირე კონტურით, ან წყვეტისწ ირს ფრიად მახლობელი კონტურით და შემდეგ უსასრულოდ შევამციერებთ არეს, რომელიც ასეთი კონტურის შიგნით არის მოთავსებული. მაგალითად, როცა (a, b) წერტილის მახლობლობაში $f(x, y)$ ფუნქციას აქვს სახე:

$$f(x, y)=\frac{\psi(x, y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha},$$

სადაც $\psi(x, y)$-ს აბსოლუტური მნიშვნელობა მოთავსებულია ორი დადებითი m და M რიცხვებს შორის, მაშინ ორჯერად ინტეგრალს, გავრცელებულს იმ არეზე, რომელიც არ შეიცავს სხვა წყვეტის წერტილებს, გარდა (a, b) წერტილისა, აქვს სასრული მნიშვნელობა, მხოლოდ თუ α ნაკლებია ერთზე, და მხოლოდ ამ შემთხვევაში. დამტკიცება არის სრულიად მსგავსი იმისა, როგორიც იყო მოყვანილი ზემოთ (§ 127).

განვიხილოთ კიდევ $f(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: 1) იგი არის უწყვეტი A არეში, რომელიც განსაზღვრულია პირობებით $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant g(x)$, სადაც $g(x)$ არის დადებითი უწყვეტი ფუნქცია a და b-ს შორის; 2) $y=g(x)$ წირის მახლობლობაში მას აქვს სახე:

$$f(x, y)=\frac{\psi(x, y)}{[g(x)-y]^\alpha},$$

სადაც α დადებითი ხარისხის მაჩვენებელია, და მრიცხველი რჩება შემოსაზღვრული. ორჯერად ინტეგრალს, გავრცელებულს ბ არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით: $x=a$, $x=b$ და ორი მრუდით: $y=g(x)-\varepsilon$, $y=g(x)-\eta$, სადაც ε და η დადებითი უსასრულოდ მცირე რიცხვებია, აქვს შემდეგი გამოსახულება

$$\int_a^b dx \int_\varepsilon^\eta \frac{\psi[x, g(x)-u]\, du}{u^\alpha}$$

და მიისწრაფის ნულისაკენ, მხოლოდ მაშინ, თუ $\alpha<1$. ამრიგად ორჯერად ინტეგრალს $f(x,y)$ ფუნქციიდან, გავრცელებულს A არეზე, აქვს სასრული მნიშვნელობა.

როდესაც ცნობილია, რომ ორჯერად ინტეგრალს არა შემოსაზღვრულ ფუნქციიდან ცნობილ არეში აქვს გარკვეული მნიშვნელობა, მაშინ ამ ინტეგრალის გამოთვლისათვის შეგვიძლია მოვიქცეთ ისე, როგორც შემოსაზღვრულ ფუნქციის შემთხვევაში. ვთქვათ მაგალითად, გამოსათვლელია ორჯერადი ინტეგრალი ფუნქციიდან:

$$f(x, y)=\frac{\psi(x, y)}{(x-y)^\alpha},$$

გავრცელებული T სამკუთხედის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=0$, $y=x$, $x=a$ წრფეებით, სადაც ψ ფუნქცია უწყვეტია ამ არეში, და α ნაკლებია

ერთზე. ეს ინტეგრალი არის ზღვარი ორჯერადი ინტეგრალისა

$$I' = \int_h^a dx \int_0^{x-h} f(x, y)\, dy$$

როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ. მაგრამ ჩვენ გვაქვს

$$\int_0^{x-h} f(x, y)\, dy = \int_0^x f(x, y)\, dy - \eta(x, h),$$

სადაც $\eta(x, h)$ არის უსასრულოდ მცირე, რომელიც თანაბრად მიისწრაფის ნულისაკენ h-თან ერთად, როცა x არის $(0, a)$ შუალედში. მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$I' = \int_h^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy - \int_h^a \eta(x, h)\, dx$$

და I'-ს აქვს ზღვრად გამოსახვა:

$$I = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy.$$

სრულიად ასევე, I-სათვის ჩვენ მივიღებდით გამოსახვას:

$$I = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

ამგვარად, დ ი რ ი ხ ლ ე ს ფორმულას (§ 114) ამ შემთხვევაში აქვს ადგილი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ორჯერადი ინტეგრალი, არა შემოსაზღვრულ ფუნქციიდან, R არეში არ ინარჩუნებს ერთი და იგივე ნიშანს, მაშინ მას არა აქვს ამ არეში გარკვეული მნიშვნელობა. შეიძლება გვექნეს განუსაზღვრელობა სრულიად მსგავსი იმისა, რაც უკვე აღნიშნული იყო უსასრულო არის შემთხვევაში. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს წყვეტის წერტილი. თუ განვახოლოებთ ამ წერტილს c მრუდის საშუალებით, მაშინ ორჯერად ინტეგრალს, გავრცელებულს დარჩენილ არეზე, შეუძლია ჰქონდეს სრულიად სხვადასხვა ზღვარი იმისდა მიხედვით, თუ რა სახისაა c მრუდი. ავიღოთ, მაგალითად

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

სადაც ინტეგრობის R არედ არის მართკუთხედი, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, სადაც a და b დადებითი რიცხვებია. დავიწყოთ სათავის განხოლოებით, გამოვყოთ რა იმ ნაწილს მართკუთხედის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია ღერძებით და წრფეებით: $x=\varepsilon$, $y=\varepsilon'$ სადაც ε და ε' ძალიან მცირე დადებითი რიცხვებია. დარჩე-

ნილი R' არე შეიძლება იყოს დანაწილებული სამ მართკუთხედად $x=0$, $x=\varepsilon$, $x=a$, $y=0$, $y=\varepsilon'$, $y=b$ წრფეების საშუალებით. მეორე მხრით, გვაქვს:

$$f(x, y)=\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right),$$

და გამოვიყენებთ რა მიმდევრობით (12) ფორმულას თითოეულ ამ მართკუთხედზე, ზოგიერთი მარტივი გარდაქმნის შემდეგ, მივიღებთ:

$$\iint\limits_{R'} f(x, y)\, dx\, dy=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ორჯერად ინტეგრალის ზღვარი იცვლება $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ ფარდობის ზღვართან ერთად, როცა ε და ε' მიისწრაფიან ნულისაკენ (შეად. § 95).

130. აბელის ფუნქციონალური განტოლება. მექანიკის ერთერთი პრობლემის შესწავლამ ა ბ ე ლ ი მიიყვანა შემდეგი სახის განტოლებამდე:

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{x-y}}, \tag{35}$$

სადაც $\varphi(x)$ არის მოცემული ფუნქცია, უწყვეტი $(0, a)$ შუალედში, a დადებითია, ხოლო $f(y)$ არის საძიებელი ფუნქცია. თუ ეს ფუნქცია უწყვეტია $y=0$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ ცხადია, რომ უნდა გვექნეს $\varphi(0)=0$. ამას ჩვენ თავიდანვე ვიგულისხმებთ.

გავამრავლოთ (35) განტოლების ორივე მხარე $\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}$-ზე, სადაც α მოთავსებულია $(0, a)$ შუალედში, და ახალი განტოლების ორივე მხარე ვაინტეგროთ 0 და α საზღვრებს შორის; მივიღებთ:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha dx \int_0^x \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}};$$

თუ გამოვიყენებთ დირიხლეს ფორმულას მეორე მხარის ორჯერად ინტეგრალზე, მივიღებთ:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha f(y)\, dy \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}.$$

პირველი კვადრატურა შესრულდება უშუალოდ, თუ დავუშვებთ

$$x=y\cos^2\varphi+\alpha\sin^2\varphi,$$

და ჩვენ გვაქვს:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\pi\int_0^\alpha f(y)\, dy. \tag{36}$$

ამ ფორმულის ორივე მხარე ნულია $\alpha=0$-თვის; ამრიგად საკმარისია ვიგულისხმოთ რომ წარმოებულები არიან ტოლი.

მარჯვენა მხარის წარმოებული არის $\pi f(\alpha)$; პირველი ნაწილის წარმოებული უკვე გამოთვლილი იყო (§ 96), მას აქვს გამოხატულება:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)+2x\varphi'(x)}{2\alpha\sqrt{\alpha-x}}\,dx,$$

ან, როგორც ადვილად დავრწმუნდებით, გვექნება:

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}} - \frac{1}{2}\left[\varphi(x)\sqrt{\alpha-x}\right]_0^\alpha.$$

თანახმად დაშვებისა $\varphi(0)=0$; მაშასადამე:

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}. \tag{37}$$

თუ $\varphi(0)$ არ არის ნული, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ (35) განტოლება (§ 96)-ის ეკვივალენტური სახით:

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\int_0^x \frac{f(y)-\dfrac{\varphi(0)}{\pi\sqrt{y}}}{\sqrt{x-y}}\,dy.$$

ახალი განტოლების მარცხენა ნაწილი ისპობა $x=0$ მნიშვნელობისათვის, და (37) ფორმულის თანახმად თუ მასში შევცვლით α-ს y-ით მივიღებთ:

$$f(y)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\varphi(0)}{\sqrt{y}}+\int_0^y \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{y-x}}\right]. \tag{38}$$

131. ზედაპირული ინტეგრალები. ვთქვათ S რეგულიარული ფართეულია, ხოლო $F(M)$ არის ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად იცვლება ამ ფართეულზე M წერტილის მდებარეობასთან ერთად. § 111—112 პარაგრაფების მსჯელობა შეიძლება განვიმეოროთ უცვლელად, თუ შევცვლით სიბრტყის ნაწილს, S ფართეულების ნაწილებით. წარმოვიდგინოთ, რომ S დანაწილებულია მცირე ნაწილებად $s_1, s_2,\ldots,s_n$, რომელთა ფართობებია: $\sigma_1, \sigma_2,\ldots,\sigma_n$ და ავიღოთ ნებისმიერად M_i წერტილი s_i-ში. ჯამი $\Sigma F(M_i)\,\sigma_i$ მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ, როცა n უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ ფართეულის ყოველი ნაწილის ფართობი მიისწრაფის ნულისაკენ. ეს ზღვარი არის ზ ე დ ა პ ი რ უ ლ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი, გავრცელებული S ფართეულზე და აღინიშნება $\iint_S F d\sigma$ სიმბოლოთი. თუ S ფართეულის წერტილის x, y, z კოორდინატები გამოიხატებიან ორი u და v პარამეტრის ფუნქციებში ისე, რომ S ფართეულის წერტილები იმყოფებიან ურთიერთ ცალსახა თანადობაში (u, v) სიბრტყის D არის წერტილებთან, მაშინ $F(M)$ არის გარკვეული უწყვეტი $f(u,v)$ ფუნქცია (u, v) ცვლადებისა ამ არეში და ზედაპირულ ინტეგრალს, თანახმად § 124 აღნიშვნებისა, აქვს გამოსახულება:

$$\iint_D f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

მრავალ საკითხში, სადაც გვხვდება ზედაპირული ინტეგრალები, $F(M)$ არის ფართეულის ნორმალის მიმართულების კოსინუსების წრფივი ფუნქცია. შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ფართეულს აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მხარე, და თუ შევღებავთ, მაგალითად, ერთერთ მხარეს წითლად, ხოლო მეორე მხარეს მწვანეთ, მაშინ შეუძლებელია გადავიდეთ წითელ მხარიდან მწვანე მხარეზე ფართეულზე მდებარე გზის საშუალებით, ისე რომ არ გადავკვეთოთ ერთერთი იმ წირებისაგან, რომლებიც ამ ფართეულს შემოსაზღვრავენ[1]. S ფართეული განვიხილოთ როგორც მატერიალური ზედაპირი, რომელსაც აქვს რაიმე სისქე, დავთქვათ m, m' ორი უსასრულოდ მახლობელი წერტილია, მდებარე ორ განსხვავებულ მხარეზე, გავატაროთ m წერტილზე mn ნორმალი იმ მიმართულებით, რომელიც არ ჰკვეთს ფართეულს: ჩვენ სიმოკლისათვის ვიტყვით, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული მიმართულება ფართეულზე შეესაბამება ფართეულის პირმხარეს (ან ზედამხარეს). ფართეულის უკუღმა მხარეზე m' წერტილში ნორმალის მიმართულება იქნება მოწინააღმდეგე პირველთან შედარებით. მაგალითად, ყველა S ფართეულს, რომელთაც Oz ღერძის პარალელური წრფეები არ ჰკვეთენ რამოდენიმე წერტილში, ცხადია, აქვთ ორი მხარე; ნორმალის შესაბამი მიმართულებანი ჰქმნიან Oz ღერძთან შესაბამად მახვილ და ბლაგვ კუთხეებს; ზედამხარე არის ის, რომლისათვის ნორმალი Oz ღერძთან ჰქმნის მახვილ კუთხეს.

ვთქვათ ახლა $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ და $R(x, y, z)$ არიან უწყვეტი ფუნქციები S-ზე; α, β, γ კუთხეებია, რომლებსაც ჰქმნის ზედაპირული გარკვეული მხარის შესაბამი ნორმალის მიმართულება კოორდინატთა ღერძებთან. ზედაპირული ინტეგრალები, რომლებიც გვხვდებიან უფრო ხშირად გამოყენებებში, არის ინტეგრალები შემდეგი სახისა:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma; \tag{39}$$

თუ ჩვენ შევცვლით ფართეულის მხარეს, მაშინ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ და მაშასადამე ინტეგრალი აგრეთვე იცვლის ნიშანს. ვიგულისხმოთ ისე, როგორც ზემოთ, რომ S ფართეულის წერტილის კოორდინატები გამოისახებიან u და v პარამეტრების ფუნქციებში ისე, რომ S ფართეული შეესაბამებოდეს (u, v) სიბრტყის D არეს ცალსახად; ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}} = \frac{\cos\beta}{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}} = \frac{\mp 1}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{40}$$

და წინამდებარე ინტეგრალი ღებულობს სახეს:

$$\pm\iint_D \left[P\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\, dv, \tag{41}$$

სადაც ასაღებია ნიშანი + ან − იმისდა მიხედვით, თუ რომელ მხარეზეა გავრცელებული ინტეგრალი.

თუ S ფართეული შედგენილია რამოდენიმე ფართეულის ნაჭრებისაგან, რასაც აქვს ადგილი, მაგალითად, თუ გვაქვს ამ ფართეულზე წ ი ბ ო ე ბ ი, რომლის განგრძივ ერთდებიან ორი რეგულიარული ფართეული სხვადასხვა მხები სიბრტყეებით, მაშინ ზედაპირული ინტეგრალი, გავრცელებული S-ზე არის თანახმად განმარტებისა ჯამი ინტეგრალებისა, რომლებიც გავრცელებულია თითოეულ ფართეულის რეგულიარულ ნაწილზე. შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ S არის რეგულიარული ფართეული, მაგრამ დამტკიცებული თვისებები გამოიყენება აგრეთვე

---

[1] ადვილად შეიძლება აგებული იქნას ფართეული, რომელიც არ აკმაყოფილებს ამ პირობას. საკმარისია ავიღოთ, მაგალითად, მართკუთხა ქაღალდის ფურცელი $ABCD$ და BC გვერდი მივაწებოთ AD გვერდს ისე, რომ C წერტილი დაემთხვეს A წერტილს ხოლო B წერტილი D-ს.

ამ უფრო ზოგად შემთხვევაში, თუ მსჯელობას გამოვიყენებთ თითოეულ რეგულარულ ნაწილზე და მიღებულ ფორმულებს შევკრებთ.

(39) სახის ინტეგრალები შემოგვყავს, როცა გვსურს განვაზოგადოთ წირითი ინტეგრალების ცნება, შევცვლით რა წირებს ფართეულებით, ხოლო მარტივ ინტეგრალს—ორჯერადი ინტეგრალით. ვთქვათ

$$z=\varphi(x, y)$$

არის განტოლება S ფართეულისა, რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი Γ კონტურით; მასთან $\varphi(x, y)$ ფუნქცია არის უწყვეტი xy სიბრტყის A არეში, შემოსაზღვრული იმ C მრუდით, რომელიც Γ კონტურის გეგმილია. ვთქვათ მეორე მხრით, რომ $R(x, y, z)$ არის უწყვეტი ფუნქცია ამ S ფართეულზე. ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\int_A\int R[x, y, \varphi(x, y] \, dx \, dy \tag{42}$$

ცხადია, არის ანალოგიური წირითი ინტეგრალისა და ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ეს გამოსახვა ზედაპირული ინტეგრალის განსაზღვრისათვის. მაგრამ ეს ინტეგრალი დაიყვანება უკვე განხილული სახის ზედაპირულ ინტეგრალამდე, რადგან ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ (§ 132):

$$\int_S\int R(x, y, z) \cos\gamma \, d\sigma,$$

სადაც γ მახვილი კუთხეა შედგენილი S-ის ნორმალის მიერ Oz ღერძთან; ამრიგად, ის არის იგიური ზედაპირულ ინტეგრალთან, რომელიც გავრცელებულია S ფართეულის ზედა მხარეზე (du côté supérieur). იგივე ინტეგრალი იცვლის ნიშანს, თუ იგი გავრცელებულია S ფართეულის ქვედა მხარეზე (côté inferieur). კერძოდ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩვეულებრივი ორჯერადი ინტეგრალი $\int_A\int f \, dx \, dy$ წარმოადგენს ზედაპირულ ინტეგრალს, გავრცელებულს xy სიბრტყის ზედა მხარეზე.

ეს შენიშვნა მიგვიყვანს (39) ზედაპირულ ინტეგრალის მოკლე აღნიშვნაზე, რომელსაც ჩვენ წარმოვადგენთ აგრეთვე ასე:

$$\int_S\int P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy; \tag{43}$$

სადაც უნდა უჩვენოთ მხარე ფართეულისა, რომელზედაც გავრცელებულია ინტეგრალი. მაგრამ ეს აღნიშვნა არის ნაკლებად ნათელი, ვიდრე წინა (39) და (41), რომელთაც ყოველთვის საჭიროა დაუბრუნდეთ თუ გვსურს ინტეგრალის გამოთვლა.

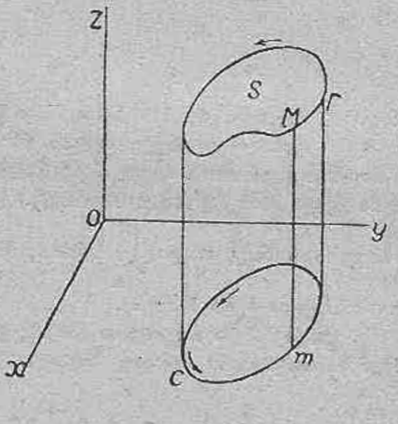
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვთქვათ V არის ვექტორი, კომპონენტებით: P, Q, R, რომელსაც აქვს სათავე ფართეულის $M(x, y, z)$ წერტილში; $P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$ წარმოადგენს ალგებრულ მნიშვნელობას ამ ვექტორის გეგმილისას ფართეულის M წერტილზე გავლებული ნორმალის დადებით მიმართულებაზე. ამრიგად (39) ორჯერადი ინტეგრალის ელემენტი არის ტოლი იმ ცილინდრის მოცულობისა, რომელსაც ფუძეთ აქვს S ფართეულის $d\sigma$ ელემენტი და სიმაღლეთ იმ V ვექტორის გეგმილი, რომლის სათავე ელემენტის რაიმე წერტილია, ნორმალზე ამ წერტილში.

132. სტოკსის ფორმულა. ვთქვათ მოცემულია ღერძთა მართკუთხა სისტემა Ox, Oy, Oz. შევთანხმდეთ უწოდოთ ბრუნვის დ ა დ ე ბ ი თ ი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა, ბრუნვის მიმართულებას Ox ღერძიდან Oy ღერძისაკენ, მზვერავისათვის, რომელიც დგას xOy სიბრტყეზე ფეხებით O წერტილზე და თავით Oz ღერძის მიმართულებაზე. მაგალითად, თუ სამწახნაგას აქვს ისეთი დალაგება როგორც 25 ნახაზზე, სადაც ნახაზის სიბრტყე არის yOz სიბრტყე, ხოლო Ox

ღერძი აღებულია yOz სიბრტყისათვის წინა მხარეზე, მაშინ დადებითი მიმართულება არის ბრუნვის მიმართულება მარჯვნიდან მარცხნით. მაგრამ შედეგი, რომელსაც ჩვენ მივიღებთ დამოუკიდებელია ღერძთა დალაგებაზე.

ვთქვათ S რეგულიარული ფართეულია, რომელსაც აქვს ორი სხვადასხვა მხარე, და რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი Γ მრუდით. ეს Γ კონტური შეიძლება შემოწერილი იქნეს ორი სხვადასხვა მიმართულებით. თითოეულ მიმართულებას შეუსაბამებთ ფართეულის სათანადო მხარეს, თანახმად შემდეგი პირობისა. ვთქვათ AB არის Γ მრუდის მცირე რკალი, ხოლო P—წერტილი S-ზე, AB რკალის მახლობლად; P-ში გავატაროთ მიმართულება Pn ნორმალისა ისეთი, რომ მზვერავისათვის, რომელსაც ფეხები აქვს P-ში, ხოლო თავი Pn მიმართულებაზე, წერტილის მოძრაობა AB რკალზე ხდებოდეს ბრუნვის დადებითი მიმართულებით.

Γ კონტურზე ავლის აღნიშნულ მიმართულებას ჩვენ შეუსაბამებთ S ფართეულის მხარეს, რომლისათვის ნორმალის მიმართულება არის Pn. მაგალითად: თუ S არის $z=\varphi(x, y)$ განტოლებით წარმოდგენილი ფართეულის ნაწილი, სადაც $\varphi(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია არეში, შემოსაზღვრული კეტილი C კონტურით, რომელიც არის S ფართეულის Γ კონტურის გეგმილი xy სიბრტყეზე, მაშინ როცა M წერტილი აღწერს Γ-ს ისეთნაირად, რომ მისი გეგმილი m აღწერდეს C-ს დადებითი მიმართულებით, S ფართეულის შესაბამი მხარე არის ზედა მხარე (ნახ. 25).



ნახ. 25.

წარმოვიდგინოთ, რომ თანადობა არის ცალსახა S ფართეულის წერტილებსა და (u, v) სიბრტყის იმ D არის წერტილებს შორის, რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი Γ მრუდით. ეს დამხმარე u, v ცვლადები არ შედიან შედეგში, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (u, v) სიბრტყე პარალელურია xy სიბრტყისა და, რომ Ou, Ov ღერძებს აქვთ ისეთივე დალაგება, როგორც Ox, Oy ღერძებს.

როცა (u, v) წერტილი აღწერს ამ კონტურს დადებითი მიმართულებით (§ 92, შენიშვნა), მაშინ (x, y, z) წერტილი აღწერს Γ კონტურს ცნობილ მიმართულებით, რომელსაც ჩვენ ვუწოდებთ დადებით მიმართულებას; დადებითი ავლას Γ კონტურზე შეესაბამება ფართეულის გარკვეული მხარე, რომელსაც ჩვენ აგრეთვე დადებითი მხარეს ვუწოდებთ. ფართეულის ნორმალის მიმართულების კოსინუსები მოცემულია (40) ფორმულებით, სადაც $\sqrt{EG-F^2}$-ის წინ ავიღებთ $+$ ნიშანს. საკმარისია დამტკიცებისათვის ვუჩვენოთ, რომ $\cos\gamma$ აქვს იგივე ნიშანი, რაც $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$. მართლაც, განვიხილოთ S ფართეულის P წერტილი და კეტილი λ მრუდი ამ წერტილის გარშემო იმდენად მცირე, რომ Oz ღერძის პრალელური წრფეები არ ხვდებოდნენ S ფართეულის s ნაწილს, მოთავსებულს λ-ს შიგნით, ერთზე მეტ წერტილში; ამ s ფართეულის დაგეგმილება xy სიბრტყეზე მოგვცემს s' არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია λ' მრუდით, რომელიც არის λ-ს გეგმილი. S-ის ამ s არეს შეესაბამება (u, v) სიბრტყეზე მცირე r არე, შემოსაზღვრული კეტილი l მრუდით. დავუშვათ, რომ ამ არეში იაკობიანი $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ არის დადებითი; მაშინ, როცა (u, v) წერტილი აღწერს l კონტურს დადებითი მიმართულებით $(x, y, 0)$ წერტილი აღწერს λ' კონტურს აგრეთვე დადებითი მიმართულებით. λ კონტურის ავლის ამ დადებით მიმართულებას შეესაბამება s-ის დადებითი მხარე, რომელიც, ცხადია არის თანახმად ზემოთ მიღებულ შენიშვნისა s-ის ზედა მხარე. ამრიგად, γ კუთხე მახვილია; ჩვენ, ასევე დავრწმუნდებით იმაში, რომ ეს კუთხე არის ბლაგვი ყოველ წერტილში, სადაც იაკობიანი

$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ უარყოფითია. ჩვენ გვაქვს ამრიგად S ფართეულის დადებითი მხარის ნორმალის მიმართულების კოსინუსებისათვის, ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\, d\sigma &= \frac{D(y, z)}{D(u, v)}\, du\, dv,\\ \cos\beta\, d\sigma &= \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\, du\, dv,\\ \cos\gamma\, d\sigma &= \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv,\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

ახლა ვთქვათ $\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx$ არის წირითი ინტეგრალი, აღებული Γ-ს განგრძივ დადებითი მიმართულებით; ჩვენ შეგვიძლია იგი შევცვალოთ წირითი ინტეგრალით:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z) \left\{\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right\}$$

აღებული L-ის გაგრძივ დადებითი მიმართულებით. თუ გამოვიყენებთ ამ ფორმულაზე გ რ ი - ნ ი ს ფორმულას (§ 116), მივიღებთ:

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx = \int\limits_{D}\int \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[P\,\frac{\partial x}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[P\,\frac{\partial x}{\partial u}\right]\right\} du\, dv =$$

$$= \int\limits_{D}\int \left[\frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\, dv.$$

თანახმად (44) ფორმულებისა, ეს უკანასკნელი ორჯერადი ინტეგრალი იგივურია ზედაპირულის ინტეგრალთან:

$$\int\limits_{S}\int \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right] d\sigma = \int\limits_{S}\int \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy,$$

გავრცელებული S ფართეულის დადებითი მხარეზე. წრიული გარდანაცვლებით მივიღებთ ორს სრულიად ანალოგიურ ფორმულას:

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x, y, z)\, dy = \int\limits_{S}\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz,$$

$$\int\limits_{\Gamma} R(x, y, z)\, dz = \int\limits_{S}\int \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dz\, dx;$$

თუ ამათ შევაერთებთ პირველთან, მივიღებთ ს ტ ო კ ს ი ს (Stoces) ზოგად ფორმულას:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{S}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx. \tag{45}$$

სადაც Γ კონტურის ავლის გეზი და S ფართეულის მხარე, რომელზედაც გავრცელებულია ინტეგრალი, შეესაბამებიან ისე, როგორც ეს ჩვენ გვქონდა განმარტებული.

133. ზედაპირული ინტეგრალების გამოყენება მოცულობების გამოსათვლელად. ისე, როგორც კეტილი ბრტყელი მრუდის ფართობი გამოისახება წირითი ინტეგრალით, აღებული ამ მრუდის განგრძივ, ასევე მთელი მოცულობა, კეტილი S ფართეულის შიგნით გამოისახება ზედაპირული ინტეგრალით. პირველად განვიხილოთ კეტილი S ფართეული, რომელსაც Oz ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს მხოლოდ ორ წერტილში. ამ ფართეულის წერტილები დაგეგმილდებიან xy სიბრტყეზე A არის შიგნით, და ყოველი წერტილი A-დან არის გეგმილი S-ის ორი m_1 და m_2 წერტილებისა. ვთქვათ $z_1=f_1(x, y)$, $z_2=f_2(x, y)$ არიან განტოლებები ორი S_1 და S_2 ფართეულებისა აღწერილი m_1 და m_2 წერტილებით შესაბამად ($f_1<f_2$). საძიებელი მოცულობა ეტოლება ორი ორჯერადი ინტეგრალის სხვაობას.

$$V=\int_A\int f_2(x, y)\,dx\,dy-\int_A\int f_1(x, y)\,dx\,dy,$$

რომლებიდან პირველი წარმოადგენს ინტეგრალს $\iint z\,dx\,dy$, აღებულს S_2 ფართეულს ზედა მხარეზე, ხოლო მეორე არის ინტეგრალი $\iint z\,dx\,dy$, აღებული S_1 ფართეულის ზედა მხარეზე. მათი სხვაობა არის ტოლი $\iint z\,dx\,dy$ ინტეგრალის გავრცელებული მთელ S ფართეულზე, აღებული იმ მხარეზე, რომელიც შეესაბამება გარე ნორმალის მიმართულებას. ანალოგიურ მსჯელობის საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია მოცულობის გამოსახულებისათვის ავიღოთ ერთი რომელიმე ზედაპირული ინტეგრალთაგანი

$$\int_S\int z\,dx\,dy,\quad \int_S\int x\,dy\,dz,\quad \int_S\int y\,dz\,dx,$$

თითოეული მათგანი აღებულია გარე მხარეზე, და ფორმულა ვრცელდება მოცულობაზე, რომელიც შემოსაზღვრულია ნებისმიერი ფართეულის საშუალებით (იხ. § 92, შენიშვნა).

სავარჯიშო მაგალითები

1. მართკუთხა კოორდინატთა ღერძების მიმართ ჯაჭვწირის განტოლება არის:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

ამ წირის რაიმე M წერტილზე გავატაროთ მხები და იგი განვაგრძოთ Ox ღერძის გადაკვეთამდე; ეს ნაკვეთი ვაბრუნოთ ამ ღერძის გარს. გამოსახეთ სხვაობა იმ ფართობებისა, რომელსაც შემოხაზავს ჯაჭვწირის M რკალი, სადაც A არის ჯაჭვწირის წვერო, და MT მხები: *a)* M წერტილის აბსცისის ფუნქციის სახით; *b)* T წერტილის აბსცისის ფუნქციით (Licence Paris, 1880).

2. ვთქვათ Ox, Oy, Oz მართკუთხა ღერძებია. განვიხილოთ წრფოვანი ფართეული შედგენილი შემდეგნაირად: zOA სიბრტყე ბრუნავს Oz ღერძის გარს; D მსახველი, რომელიც ძევს ამ სიბრტყეზე, დახრილია Oz ღერძთან მუდმივი კუთხით, რომლის ტანგენსი ტოლია λ-სი და მოჰკვეთს OA-ზე (მოთავსებულს xOy სიბრტყეზე) OC ნაკვეთს, რომელიც ტოლია $\lambda a\theta$, სადაც a აღნიშნავს მოცემულ სიგრძეს, ხოლო θ არის კუთხე zOx და zOA სიბრტყეებს შორის.

a) გამოთვალეთ მოცულობა, შემოსაზღვრული წრფოვანი ფართეულით და xOy, zOx, zOA სიბრტყეებით, ამასთანავე ამ უკანასკნელ სიბრტყეებს შორის θ კუთხე ნაკლებია 2π-ზე;

b) გამოთვალეთ ფართობი ზედაპირის იმ ნაწილისა, რომელიც შემოსაზღვრულია xOy, zOx და zOA სიბრტყეებით. [Licence: Paris, juillet 1882].

3. გამოთვალეთ მოცულობა, შემოსაზღვრული ელიფსური პარაბოლოიდის ფართეულით, რომლის განტოლება არის:

$$\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2},$$

xy სიბრტყით და ცილინდრული ფართეულით: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

[Licence: Paris, 1882].

4. გამოთვალეთ არე მრუდწირული ოთხკუთხედის, რომელიც შემოსაზღვრულია ოთხი მეორე რიგის კონფოკალური წირით:

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$$

და ესაბამება λ პარამეტრის მნიშვნელობებს: $\frac{c^2}{3}, \frac{2c^2}{3}, \frac{4c^2}{3}, \frac{5c^2}{3}$.

5. მოცემულია წირი, რომლის განტოლება მართკუთხა კოორდინატთა ღერძების მიმართ არის $y=\sqrt{2}\,(\sin x-\cos x)$, სადაც x იცვლება $\frac{\pi}{4}$ ან $\frac{5\pi}{4}$-მდე. საძიებელია,

a) არე მოთავსებული ამ წირსა და Ox ღერძის შორის;

b) მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ არის Ox ღერძის ირგვლივ ბრუნვით;

c) ფართობი, აღნიშნული ბრუნვითი ფართეულის;

6. ვთქვათ Ox და Oy მართკუთხა კოორდინატთა ღერძებია, A და B—წერტილები Oy ღერძზე. გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი:

$$\int [\varphi(y)\,e^{x}-my]\,dx+[\varphi'(y)\,e^{x}-m]\,dy,$$

აღებული A და B წერტილების შემაერთებელ AMB გზის განგრძივ, რომელსაც აქვს ნებისმიერი სახე, მაგრამ ისეთი, რომელიც შემოსაზღვრავს AB ნაკვეთთან ერთად $AMBA$ ფართობს მოცემულ S სიდიდისას; აქ m არის მუდმივი, ხოლო $\varphi(y)$ და მისი $\varphi'(y)$ წარმოებული არიან უწყვეტი. [Licence: Nancy, 1895].

7. გამოთვალეთ ორი სხვადასხვა გზით ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin ax\,dy\,dx;$$

უჩვენეთ, რომ თუ a განსხვავდება ნულისაგან, გვაქვს:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\pm\frac{\pi}{2}.$$

8. მოძებნეთ ფართობი ბრუნვითი ელიფსოიდისა ან ბრუნვითი ჰიპერბოლოიდის ნაწილისა, რომელიც მოთავსებულია ორ პარალელს შორის.

9. სამღერძა ელიფსოიდის ფართობი. მთელი $\mathfrak{A}$ ფართობის ნახევარი ტოლია ორჯერადი ინტეგრალის:

$$\frac{\mathfrak{A}}{2}=\iint\sqrt{\frac{1-\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

აღებული $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ელიფსის შიგნით. იმ წესებს შორის, რომელიც მოცემული იყო ამ ორჯერადი ინტეგრალის დასაყვანად ელიფსურ ინტეგრალამდე, ყველაზე მარტივი წესი ეკუთვნის კატალანს, ეს წესი მდგომარეობს § 115-ში აღნიშნულ გარდაქმნაში. აღვნიშნავთ რა v-თი ორჯერადი ინტეგრალის ნიშნის ქვეით ფუნქციას და v-ს ვცვლით 1-დან $+\infty$-მდე, მოვძებნით, რომ ორჯერადი ინტეგრალი ტოლია შემდეგი სხვაობის ზღვარისა, როცა l მიისწრაფის უსასრულობისაკენ:

$$\frac{\pi abl(l^2-1)}{\sqrt{\left(l^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(l^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}-\pi ab\int_1^l\frac{(v^2-1)\,dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}.$$

ზემოთმოყვანილ გამოსახულებას აქვს განუზღვრელობის სახე, მაგრამ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\int_1^l\frac{v^2dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}=\left[\frac{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}{v}\right]_1^l+$$

$$+\int_1^l\frac{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}},$$

და ადვილი შესამჩნევია, რომ ზემოთმოყვანილი გამოხატულების ზღვარი ტოლია:

$$\pi ab\left[\frac{c^2}{ab}+\int_1^{+\infty}\frac{dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\int_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right].$$

10. იმ ზედაპირის ფართობის გამოსახულება, რომლის განტოლება პოლარ კოორდინატებში არის $\rho=F(\theta,\varphi)$, გამოითქმება ორჯერადი ინტეგრალის $\iint \frac{\rho^3}{6} \sin\theta\alpha \, d\theta \, d\varphi$ საშუალებით, სადაც ზ—მანძილია სათავიდან (θ,φ) წერტილში მხები სიბრტყემდე. გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ა.—ფ რ ე ს ნ ე ლ ი ს (Fresnel) დრეკადი ფართეული

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

არის პ ო დ ე რ ი (Podaire) ელიფსოიდისა მისი ცენტრის მიმართ და მისი ფართობი უდრის იმ ელიფსოიდის ფართობს, რომლის ნახევარღერძებია: $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{ab}{c}$ [William Roberts, Journal de Liouville, t. XI, 1re serie, p. 81].

11. გამოთვლით რა ორი სხვადასხვა ხერხით ორჯერად ინტეგრალს

$$(x-y)^n f(y)\text{-დან},$$

გავრცელებულს სამკუთხედის ფართობზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x_0$, $y=x$, $x=X$ წრფეებით, დაამტკიცეთ, რომ:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\, dy = \int_{x_0}^{X} \frac{(X-y)^{n+1}}{n+1} f(y)\, dy.$$

აქედან გამოიყვანეთ დამოკიდებულება:

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\, dy.$$

დაამტკიცეთ აგრეთვე ფორმულა:

$$\int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{x_0}^{x} x\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n} \int_{x_0}^{x} (x^2-y^2)^n f(y)\, dy,$$

და შეამოწმეთ ეს ფორმულები ინტეგრალის ნიშნის ქვეით გაწარმოების საშუალებით.

12. შ ვ ა რ ც ი ს მ ა გ ა ლ ი თ ი. (შენიშვნა, გვ. 329) ვთქვათ მოცემულია ბრუნვითი ცილინდრი რომლის ფუძის რადიუსი არის r, სიმაღლე იყოს h; ეს სიმაღლე დავანაწილოთ m თანასწორ ნაწილად და დანაწილების წერტილებზე გავატაროთ მოცემული ცილინდრის ორი ფუძის პარალელური სიბრტყეები; შემდეგ ასეთნაირად მიღებულ თანასწორ კვეთებში ჩავწეროთ n გვერდა ამოზნექილი წესიერი მრავალკუთხედი ისე, რომ ცილინდრის მსახველი, რომელიც გადის ერთ რომელიმე მრავალკუთხედის წვეროზე გადიოდეს იმ რკალის შუა წერტილზე, რომელიც სჭიმავს მეზობელ მრავალკუთხედის გვერდებს. ამ მრავალკუთხედების წვეროები არიან

ჩახაზული მრავალწახგაგა (polyédrale) ზედაპირის წვეროები, შედგენილი $2mn$ თანასწორი ტოლფერდა სამკუთხედებისაგან და ფართობი ამ მრავალწახნაგა ზედაპირისა არის ტოლი:

$$2mnr \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{4r^2 \left(\sin \frac{\pi}{2n} \right)^4 + \frac{h^2}{m^2}}\,.$$

ამ გამოსახულების ზღვარი, როცა m და n რიცხვები უსაზღვროდ იზრდებიან, დამოკიდებულია $\frac{m}{n^2}$ ფარდობის ზღვარისაგან. თუ ეს ფარდობა მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ ზემოთ აღნიშნული გამოსახულების ზღვარი უდრის $2\pi rh$.

თავი VII

ჯერადი ინტეგრალები

სრული დიფერენციალების ინტეგრება

I. ჯერადი ინტეგრალები. ცვლადთა გარდაქმნა

134. სამჯერადი ინტეგრალები. ჩვენ განვსაზღვრავთ სამჯერად ინტეგრალებს სრულიად იმგვარადვე, როგორც ორჯერად ინტეგრალებს (§ 111—112). ამისათვის საკმარისია შევცვალოთ ორგანზომილებიანი არეები სამგანზომილებიანი არეებით, ხოლო ფართობები კი—მოცულობებით. ვთქვათ $F(x, y, z)$ არის შემოსაზღვრული ფუნქცია განსაზღვრული სივრცის შემოსაზღვრულ D არეში. წარმოვიდგინოთ, რომ ეს არე ნებისმიერი წესით დანაწილებულია n ნაწილობრივ არედ: $d_1, d_1, \cdots, d_n$, რომელთა მოცულობები არის შესაბამად $v_1, v_2, \cdots, v_n$, და ვთქვათ M_i და m_i არიან F-ის ზედა და ქვედა ზღვრები d_i არეში. ჯამები:

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i v_i, \qquad s=\sum_{i=1}^{n} m_i v_i$$

მიისწრაფიან შესაბამად I და I' ზღვრებისაკენ, როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება იმგვარად, რომ ყოველი ნაწილობრივი არე უსაზღვროდ მცირდება ყოველი თავისი ზომადობით, და ჩვენ გვაქვს $I' \leqslant I$.

ჩვენ ვიტყვით, რომ $F(x, y, z)$ ფუნქცია **ინტეგრადია** D არეში, თუ ადგილი აქვს ტოლობას $I=I'$; S და s ჯამების საერთო ზღვარს ეწოდება სამჯერადი ინტეგრალი $F(x, y, z)$ ფუნქციიდან, გავრცელებული D არეზე. მას აღვნიშნავთ სიმბოლოთი:

$$I=\iiint\limits_{D} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

D არეს ეწოდება ინტეგრობის არე. I რიცხვი არის აგრეთვე შემდეგი ჯამის ზღვარი:

$$S'=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i\, \zeta_i)\, v_i, \tag{1}$$

სადაც (ξ_i, η_i, ζ_i) არიან d_i არის ან მისი კონტურის რაიმე წერტილის კოორდინატები.

ყოველი უწყვეტი ფუნქცია არის ინტეგრადი. ეს სამართლიანია აგრეთვე ყოველი შემოსაზღვრული ფუნქციისათვისაც, რომელსაც აქვს რამდენიმე წყვეტის წერტილი, მხოლოდ ისეთი, რომ შეგვეძლოს ყველა ამ წყვეტის წერტილების მოთავსება ისეთ არეში, რომლის მოცულობა ნაკლები იქნეს რაიმე ნებისმიერ დადებით რიცხვზე. ამას ადგილი აქვს, მაგალითად, შემოსაზღვრულ $F(x, y, z)$ ფუნქციისათვის, რომელსაც აქვს D არეში ერთი ან რამოდენიმე წყვეტის ფართეული.

სამჯერადი ინტეგრალები ხვდებიან მექანიკის სხვადასხვა საკითხებში, კერძოდ მყარი სხეული მასისა და სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრის დროს. წარმოვიდგინოთ, რომ (D) არე შევსებულია არა ერთგვაროვანი ნივთიერებით, და ვთქვათ $\mu(x, y, z)$ არის სიმკვრივე რომელიმე (x, y, z) წერტილში, ე. ი. არის ზღვარი იმ მასის ფარდობისა, რომელიც მოთავსებულია მცირე რადიუსიან სფეროში, ცენტრით (x, y, z) წერტილში, ამ სფეროს მოცულობასთან. თუ μ_1 და μ_2 არიან μ სიმკვრივის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები (d_i) არეში, მაშინ, ცხადია, რომ ამ არეში მოთავსებული მასა იმყოფება $\mu_1 v_i$ და $\mu_2 v_i$ შორის; მაშასადამე, ეს მასა უდრის $v_1 \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, სადაც (ξ_i, η_i, ζ_i) წერტილი სათანადოდ არის არჩეული (d_i) არეში. ამრიგად მთელი მასა უდრის სამჯერად ინტეგრალს $\iiint \mu \, dx \, dy \, dz$, აღებულს (D) არეში.

135. გამოთვლის წესები. განვიხილოთ პირველად $F(x, y, z)$ ფუნქცია, უწყვეტი D არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყის პარალელური ორი $z=z_0$, $z=Z$ სიბრტყით, და ცილინდრით, რომლის მსახველი პარალელურია Oz ღერძის, და კვეთა xy სიბრტყესთან არის კეტილი C მრუდი, რომელიც შემოსაზღვრავს სიბრტყის A არეს. ვიგულისხმოთ, რომ ეს A არე დანაწილებულია მცირე $a_1, a_2, \cdots, a_n$ არეებად, $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ ფართობებით, და განვიხილოთ ცილინდრები, რომელთა მსახველები პარალელურია Oz ღერძის და ფუძეებად აქვთ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ არეები. გამოვთვალოთ პირველად, ისე როგორც § 113-ში, მთავარი ნაწილი სამჯერადი ინტეგრალისა, რომელიც გავრცელებულია მცირე ცილინდრულ D_i არეზე და რომელსაც აქვს ფუძეთ სიბრტყის a_i არე. წარმოვიდგინოთ, რომ ეს D_i არე თავის მხრივ დანაწილებულია მცირე ცილინდრულ არეებად $z=z_k$ $(k=1, 2, \cdots, m-1)$ სიბრტყეების საშუალებით, სადაც $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ ჰქმნიან ზრდად რიცხვთა მიმდევრობას, მოთავსებულს z_0 და Z შორის. სამჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული D_i არეზე საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის თანახმად უდრის:

$$\omega_i [F(\xi_{i1}, \eta_{i1}, \zeta_{i1})(z_1 - z_0) + F(\xi_{i2}, \eta_{i2}, \zeta_{i2})(z_2 - z_1) + \cdots],$$

სადაც $(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik})$ კოორდინატებია წერტილისა მცირე ცილინდრის შიგნით, განზღვრული D_i-ში ორი სიბრტყით $z=z_{k-1}$, $z=z_k$. ვთქვათ მეორე მხრით (ξ_i, η_i) არის რაიმე a_i წერტილის კოორდინატები; მარტივი ინტეგრალებისა-

თვის საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i, \eta_i, z)\, dz = F(\xi_i, \eta_i, \zeta_1)(z_1 - z_0) + F(\xi_i, \eta_i, \zeta_2)(z_2 - z_1) + \cdots,$$

სადაც ξ_k მოთავსებულია z_{k-1} და z_k შორის. ამრიგად, სამჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული D_i-ზე შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$\omega_i \left[\int_{z_0}^{Z} F(\xi_i, \eta_i, z)\, dz + \varepsilon_1 (z_1 - z_0) + \cdots + \varepsilon_k (z_k - z_{k-1}) + \cdots \right],$$

სადაც ჩვენ აღვნიშნავთ:

$$F(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik}) = F(\xi_i, \eta_i, \zeta_k) + \varepsilon_k;$$

რადგან (ξ_i, η_i, ζ_k) და $(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik})$ წერტილები ეკუთვნიან ერთსა და იმავე ნაწილობრივ ცილინდრს, ამიტომ ყველა $|\varepsilon_k|$ აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია ვიდრე ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი, როცა a_i განზომილებანი და $z_k - z_{k-1}$ სხვაობები იქნება ნაკლები ვიდრე დადებითი η რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია ε-ზე. სამჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული D_i ცილინდრის არეზე, ამრიგად, უდრის:

$$\omega_i \left[\int_{z}^{Z} F(\xi_i, \eta_i, z)\, dz + \rho_i \right],$$

სადაც (ξ_i, η_i) არის a_i არის რაიმე წერტილის კოორდინატები და ρ_i თანაბრად მიისწრაფის ნულისაკენ ამ არის უდიდესი განზომილებასთან ერთად. ამრიგად საძიებელი სამჯერადი ინტეგრალი ტოლია $\sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i, \eta_i)\, \omega_i$ ჯამის ზღვარისა, სადაც გვაქვს აღნიშნული:

$$\Phi(x, y) = \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz. \tag{2}$$

ეს ზღვარი ტოლია იმ ორჯერადი ინტეგრალისა $\Phi(x y)$ ფუნქციიდან, რომელიც გავრცელებულია A არეზე, და ჩვენ გვაქვს:

$$\iiint_{D} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{A} \Phi(x, y)\, dx\, dy = \iint_{A} dx\, dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz. \tag{3}$$

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ თუ როგორ დაიყვანება ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა მარტივ კვადრატურებზე. მაგალითად, თუ D არე არის პარალელოპიპედი, შექმნილი $y=y_0$, $y=Y$, $z=z_0$, $z=Z$ სიბრტყეებით და A არე არის მართკუთხედი, მაშინ სამჯერად ინტეგრალს აქვს გამოსახულება:

$$\int_{x_0}^{X} dz \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz \tag{4}$$

ამ სიმბოლოს აზრი სრულიად ცხადია. ჩვენ პირველად ვაინტეგრებთ $F(x, y, z)$ ფუნქციას z-ით, განვიხილავთ რა x და y როგორც მუდმივებს; შედეგი არის ორი x და y ცვლადის ფუნქცია, რომელსაც ვაინტეგრებთ შემდეგ y_0 და Y საზღვრებს შორის, განვიხილავთ რა x როგორც მუდმივს და y როგორც ცვლადს. შედეგი ამ მეორე ინტეგრობისა არის მხოლოდ x-ის ფუნქცია, რომელსაც ჩვენ ვაინტეგრებთ ხელახლა x_0 და X საზღვრებს შორის.

ცხადია, რომ სამჯერადი ინტეგრალი შეიძლება გამოვთვალოთ იმდენი წესით, რამდენიც არსებობს გადანაცვლება 3 ელემენტისაგან, ე. ი. ექვსი. ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, მაგალითად, სამჯერადი ინტეგრალი ასეთი სახით:

$$\int_{z_0}^{Z} dz \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} F(x, y, z)\, dy = \int_{z_0}^{Z} \Psi(z)\, dz,$$

სადაც $\Psi(z)$-ით აღნიშნულია იმ მართკუთხედზე გავრცელებული ორჯერადი ინტეგრალი $F(x, y, z)$-დან, რომელიც შექმნილია წრფეებით $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. უკანასკნელი გამოსახვა ჩვენ შეგვეძლო მიგვეღო სხვა ხერხით, თუ დავიწყებდით გამოთვლას S' ჯამის იმ ნაწილისას, რომელიც წარმოიშობა ორი მეზობელი $z=z_{i-1}$, $z=z_i$ სიბრტყის შორის მოთავსებულ პარალელოპიპედების ფენებისაგან; (ξ, η, ζ) წერტილის სათანადოდ ამორჩევით ეს ფენა გვაძლევს S' ჯამში შემდეგი ჯამს:

$$\Psi(z_{i-1})(z_i - z_{i-1}),$$

და მსჯელობა თავდება ისე, როგორც ზემოთ.

(3) ფორმულა გამოიყენება აგრეთვე შემოსაზღვრულ $F(x, y, z)$ ფუნქციაზე, რომელსაც არეში აქვს ერთი ან რამოდენიმე წყვეტის ფართეული. მაგალითად, წარმოვიდგინოთ, რომ F ფუნქცია წყვეტილია ორი S_1 და S_2 ზედაპირის გარკვეულ ნაწილებზე. ამ ფართეულების განტოლებები იყოს შესაბამად:

$$z=\varphi_1(x, y), \tag{S_1}$$

$$z=\varphi_2(x, y), \tag{S_2}$$

სადაც φ_1 და φ_2 უწყვეტი ფუნქციებია A არეში $(z_0<\varphi_1<\varphi_2<Z)$. ეს ორი S_1 და S_2 ფართეული D-ს ანაწილებენ სამ არედ, სადაც თითოეულ მათგანში F

ფუნქცია უწყვეტია. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს:

1) $z=z_0$ სიბრტყისა და S_1 შორის $F=f_1(x, y, z)$;

2) S_1-სა და S_2 შორის $F=f_2(x, y, z)$;

3) S_2 და $z=Z$ სიბრტყეს შორის $F=f_3(x, y, z)$.

იგულისხმება, რომ f_1, f_2, f_3 ფუნქციები არიან უწყვეტი შესაბამის არეებში. ფორმულა (3) გამოიყენება კიდევ სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლისათვის, მხოლოდ თუ დავუშვებთ (§ 114):

$$\int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz = \int_{z_0}^{\varphi_1} f_1(x, y, z)\, dz + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_2(x, y, z)\, dz + \int_{\varphi_2}^{Z} f_3(x, y, z)\, dz.$$

ეს შენიშვნა გვაძლევს საშუალებას უშუალოდ გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი უწყვეტი $F(x, y, z)$ ფუნქციიდან D არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ისეთივე ცილინდრით როგორც ზემოთ, და ორი ფართეულის $z_1=\varphi_1(x, y)$, $z_2=\varphi_2(x, y)$ ნაწილებით, სადაც φ_1 და φ_2 არიან უწყვეტი სიბრტყის A არეში. ამისათვის საკმარისია ავიღოთ მხოლოდ ორი დამხმარე სიბრტყე $z=z_0$, $z=Z$ $(z_0<\varphi_1<\varphi_2<Z)$, და დამხმარე $F(x, y, z)$ ფუნქცია ტოლი $F(x, y, z)$-სა D არეში და ნულის ტოლი ამ არის გარეთ.

§ 114 მსჯელობა გამოიყენება უცვლელად ამ შემთხვევაში და სამჯერად ინტეგრალს D არეში აქვს მნიშვნელობა:

$$\iint\limits_{A} dx\, dy \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x, y, z)\, dz.$$

თუ A არის C კონტური შედგენილია Oy ღერძის პარალელური წრფეების ნაკვეთებით და ორი მრუდის $y_1=\psi_1(x)$, $y_2=\psi_2(x)$ $(\psi_1<\psi_2)$ რკალებით, მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$\iiint\limits_{D} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a}^{b} dx \int_{\psi_1}^{\psi_2} dy \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(x, y, z)\, dz. \tag{5}$$

პირველი ინტეგრობის φ_1 და φ_2 საზღვრები დამოკიდებულია x და y-ზე, ψ_1 და ψ_2 საზღვრები დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე და, ბოლოს, a და b მუდმივებია.

როდესაც ინტეგრობის D არე შემოსაზღვრულია კეტილი Σ ფართეულით, რომელიც ერთერთი ღერძის პარალელური წრფით იკვეთება არა უმეტეს ვიდრე ორი წერტილში (როგორც ამოზნექილი ფართეული), ჩვენ შეგვიძლია მოვახდინოთ ინტეგრობა ნებისმიერი მიმდევრობით, მაგრამ საზოგადოდ საზღვრები იქნება სხვადასხვა, ინტეგრობის მიმდევრობის მიხედვით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი . ვთქვათ გამოსათვლელია სამჯერადი ინტეგრალი $\iiint z\,dx\,dy\,dz$, გავრცელებული $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს მერვედზე, რომელიც მოთავსებულია $Oxyz$ სამწახნაგში. თუ ჩვენ პირველად ვაინტეგრებთ z-ის მიმართ, შემდეგ y-ისა და ბოლოს x-ის მიმართ, საზღვრები იქნება შემდეგი: როცა x და y მოცემულია, z იცვლება ნულიდან $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$-მდე; თუ x— მოცემულია, y იცვლება ნულიდან $\sqrt{R^2-x^2}$-მდე, და ბოლოს, x იცვლება, ნულიდან R-მდე. ამრიგად, ჩვენ გვაქვს:

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz;$$

ინტეგრობით მივიღებთ:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2-y^2\right),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(R^2-x^2-y^2\right)dy=\left[\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)y-\frac{1}{6}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{1}{3}\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

და დაგვრჩა გამოსათვლელი განზღვრული ინტეგრალი:

$$\frac{1}{3}\int_0^R\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx,$$

რომელიც, თუ მივიღებთ $x=R\cos\varphi$, გვაძლევს:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\sin^4\varphi\,d\varphi.$$

ამრიგად, სამჯერად ინტეგრალს აქვს თავის მნიშვნელობად $\frac{\pi R^4}{16}$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა . იმის ნაცვლად, რომ პირველად გამოვითვალოთ ჯამი ელემენტებისა, რომელიც წარმოიშობა ცილინდრული არეებით, შეიძლება მოვიქცეთ სხვანაირად. ვთქვათ D არის შემოსაზღვრული არე, მოთავსებული ორი პარალელური $z=z_0$, $z=Z$ სიბრტყეებს შორის; პირველად დავყოთ ნაჭრებად $z=z_i$ $(i=1, 2, \ldots, m-1)$ სიბრტყეების საშუალებით, სადაც $z_1, z_2, \ldots, \ldots, z_{m-1}$ ჰქმნიან ზრდად მიმდევრობას რიცხვებისას, რომლებიც მოთავსებულია z_0 და Z შორის. შემდეგ დავყოთ თითოეული ნაჭერი მცირე ცილინდრულ არეებად; ვიმსჯელებთ რა ისე, როგორც § 135-ში ჩვენ დავინახავთ, რომ მთავარ ნაწილს სამჯერადი ინტეგრალისას, გავრცელებულს იმ ნაჭერზე, რომელიც მოთავსებულია $z=z_{i-1}$, $z=z_i$ სიბრტყეებს შორის, აქვს მნიშვნელობა

$$(z_i-z_{i-1})\iint_{A_{i-1}} F(x, y, z_{i-1})\,dx\,dy,$$

სადაც A_{i-1} არის D არისა და $z=z_{i-1}$ სიბრტყის საერთო არე. ამრიგად, თუ აღვნიშნავთ

$$\Psi(z)=\iint\limits_{A_z} F(x, y, z)\, dx\, dy,$$

სადაც A_z ბრტყელი არეა, რომელიც არის ზემოთ განსაზღვრულის ანალოგიური, მაშინ სამჯერად ინტეგრალს აქვს თავის გამოსახულება:

$$\int\limits_{z_0}^{Z} \Psi(z)\, dz.$$

რომ გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული ნებისმიერ D არეზე, მაშინ მას დავანაწილებთ ჯამად ისეთ არეებისა, როგორიც გვქონდა წინათ, მაგალითად ისეთ არეებად, რომ წრფე პარალელური უცვლელი მიმართულებისა, ჰკვეთდეს მსაზღვრელ ფართეულს არა უმეტეს ვიდრე ორ წერტილში.

136. გრინის ფორმულა. სამჯერადი ინტეგრალებისათვის არსებობს § 116 პარაგრაფის (15) ფორმულის სრულიად ანალოგიური ფორმულა. განვიხილოთ პირველად კეტილი S ფართეული, რომელსაც Oz ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს მხოლოდ ორ წერტილში და ვთქვათ $R(x, y, z)$ არის უწყვეტი ფუნქცია თავისი $\frac{\partial R}{\partial z}$ წარმოებულით ამ ფართეულის შიგნით. S ფართეულის ყველა წერტილი დაგეგმილდება xy სიბრტყეზე ისეთ A არის წერტილებში, რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი C კონტურით. A არის ყოველ (x, y) წერტილს შეესაბამება S ფართეულის ორი წერტილი, კოორდინატებით: $z_1=\varphi_1(x, y)$ და $z_2=\varphi_2(x, y)$. ამრიგად ეს ფართეული დანაწილდება S_1 და S_2 ნაწილად; ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $z_1<z_2$. დავუშვებთ რა ამას, სამჯერადი ინტეგრალი

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz,$$

გავრცელებული S კეტილი ფართეულის შიგნით, შეიძლება მივიღოთ, თუ პირველად ვაინტეგრებთ z-ის მიმართ z_1 და z_2 საზღვრებს შორის (§ 135); პირველი ინტეგრადობის შედეგი არის $R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)$, და ბოლოს ჩვენ უნდა ავიღოთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint [R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)]\, dx\, dy,$$

გავრცელებული A არეზე. მაგრამ ორჯერადი ინტეგრალი $\iint R(x, y, z_2)\, dx\, dy$ არის იგივე რაც შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალი (§ 131):

$$\iint\limits_{S_2} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

აღებული S_2 ფართეულის ზედა მხარე. აგრეთვე ორჯერადი ინტეგრალი $R(x, y, z_1)$-დან შებრუნებული ნიშნით არის ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint\limits_{S_1} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

აღებული S_1 ფართეულის ქვედა მხარეზე. შევაერთებთ რა ორივე ინტეგრალს, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \int_S \int R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

სადაც ზედაპირული ინტეგრალი აღებულია S ფართეულის გ ა რ ე მხარეზე.

ეს შედეგები გამოიყენება აგრეთვე მაშინაც, თუ S-ის მთელი საზღვარი არის არე, შედგენილი S_1 და S_2 ფართეულებით და ცილინდრული ფართეულის ნაწილით, რომლის მსახველები პარალელურია Oz ღერძის, ვინაიდან ზედაპირული ინტეგრალი $\iint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy$ აღებული ამ ცილინდრიული ფართეულის განგრძივ არის ნული.

ეს ფორმულა იმ მსჯელობით, რომელიც ჩვენ უკვე რამოდენიმეჯერ ჩავატარეთ, ვრცელდება ნებისმიერი ფართეულით შემოსაზღვრულ მოცულობაზე. გადავანაცვლებთ რა x, y, z-ს, გამოვიყვანთ ორ სრულიად ანალოგიურ ფორმულას:

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int_S \int P(x, y, z)\, dy\, dz,$$

$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y} dx\, dy\, dz = \int_S \int Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

მიღებული სამი ფორმულის შეკრება მოგვცემს სამჯერადი ინტეგრალებისათვის გ რ ი ნ ი ს ზოგად ფორმულას:

$$\iiint \left(\frac{\partial P}{dx} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, \partial y\, \partial z =$$

$$= \int_S \int P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

სადაც ზედაპირული ინტეგრალები აღებულია ყოველთვის გარე მხარეზე.

თუ მივიღებთ $P = x$, $Q = R = 0$, ან $Q = y$, $P = R = 0$; ან $R = z$, $P = Q = 0$ ჩვენ მოგვეცემა მოცულობა შემოსაზღვრული S ფართეულით.

137. დამოკიდებულება ფართეულის ორ ელემენტს შორის რომ გამოვიყვანოთ ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა სამჯერადი ინტეგრალებისათვის, ჩვენ შეგვიძლია გავყვეთ მეთოდს, რომელიც სრულიად ანალოგიურია იმისა, რომელიც გვქონდა § 117—118. წინასწარ დავამტკიცოთ დამხმარე ფორმულა. ვთქვათ:

$$x = f(x', y', z'); \qquad y = \varphi(x', y', z'); \qquad z = \psi(x', y', z') \tag{6}$$

ტოლობები განსაზღვრავენ წერტილოვან (ponctuelle) გარდაქმნას სივრცეში; x', y', z' არის რაიმე m' წერტილის მართკუთხა კოორდინატები მართკუთხა Ox', $O'y'$, $O'z'$ სისტემის მიმართ, და x, y, z არის შესაბამი m წერტილის კოორდინატები მართკუთხა Ox, Oy, Oz-ის სისტემის მიმართ, რომელსაც იგივე დალაგება აქვს, როგორც პირველს, ე. ი. შეუძლია დაემთხვეს პირველს. ჩვენ ვიგულისხმებთ: 1) რომ x, y, z წერტილი აღწერს შემოსაზღვრულ (E) არეს, როცა x', y', z' წერტილი აღწერს მეორე შემოსაზღვრულ (E') არეს; 2) რომ ორივე არის წერტილები იმყოფებიან ურთიერთ ცალსახა თანადობაში; 3) რომ f, φ, ψ ფუნქციები არიან უწყვეტი და აქვთ უწყვეტი კერძო წარმოებულები (E')-ში; და რომ $\frac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}$ იაკობიანი არ არის ნული (E')-ში.

ორივე არის წერტილებს შორის თანადობა შეიძლება იყოს პირდაპირი (directe) ან შექცევითი (inverse). ვთქვათ, რომ სამი წრფივი ელემენტი: $m't'_1$, $m't'_2$, $m't'_3$ ჰქმნიან სამწახნაგას (E')-ში. ამ სამ წრფივ ელემენტს შეესაბამება (E) არეში სამი წრფივი mt_1, mt_2, mt_3 ელემენტი, რომლებიც აგრეთვე ჰქმნიან სამწახნაგას, რადგან იაკობიანი f, φ, ψ ფუნქციებიდან არ არის ნული m' წერტილზე (იხ. მაგალითი 13, § 65). თუ ამ სამწახნაგს $mt_1\, t_2\, t_3$ აქვს იგივე მდებარეობა რაც $m't'_1\, t'_2\, t'_3$-ს, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ თანადობა განსაზღვრული (6) ფორმულებით არის პ ი რ დ ა პ ი რ ი; წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ თანადობა არის შ ე ქ ც ე ვ ი თ ი. ეს განმარტება შეგვიძლია შევცვალოთ შემდეგით. ვთქვათ S, S' არის E, E' არეებში ორი შესაბამი ფართეული, რომელთაც აქვთ ორი განსხვავებული მხარე, ხოლო Γ, Γ'—კეტილი მრუდეები, რომლებიც საზღვრავენ შესაბამად ამ ფართეულებს. ამოვირჩიოთ ამ კონტურებზე ავლის ორი მიმართულება ერთი მეორის შესაბამი (6) ფორმულების მიხედვით; ავლის ამ მიმართულებას შეესაბამება თითოეული ფართეულის გარკვეული მხარე, თანახმად იმ პირობებისა, რომლებიც იყო გაკეთებული § 132-ში. თუ S და S' ფართეულების ეს ორი მხარე შეესაბამებიან ერთიმეორეს აგრეთვე (6) ფორმულებით, მაშინ თანადობა განსაზღვრული ამ ფორმულებით არის პირდაპირი; წინააღმდეგ შემთხვევაში კი შექცევითი.

ვიგულისხმებთ რა ამას, განვიხილოთ S და S' ფართეულებზე ორი მხარე, რომლებიც შეესაბამებიან ერთმანეთს განხილულ წერტილოვან გარდაქმნაში, და ვთქვათ (α, β, γ) და $(\alpha', \beta', \gamma')$ არის ამ მხარეების ნორმალთა მიმართულების მიერ შედგენილი კუთხეები ღერძებთან. ვიგულისხმოთ, რომ S და S' ფართეულთა წერტილების კოორდინატები გამოსახულია u და v პარამეტრების საშუალებით; ჩვენ ზემოთ გვქონდა ახსნილი, თუ როგორ უნდა ავიღოთ Γ, Γ' კონტურების დადებითი მიმართულება და ფართეულების დადებითი მხარეები. თუ შესაბამობა არის პირდაპირი, მაშინ S ფართეულის დადებით მხარეს შეესაბამება S'-ის დადებითი მხარე, და თანახმად § 132-ის (44) ფორმულებისა და ანალოგიური ფორმულებისა S' ფართეულის მიმართ, გვაქვს:

$$\cos\gamma\, d\sigma = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv, \quad \cos\gamma'\, d\sigma' = \frac{D(x', y')}{D(u, v)}\, du\, dv,$$

სადაც $d\sigma$ და $d\sigma'$ ფართეულების ელემენტების ფართობებია; თუ თანადობა არის შექცევითი, მაშინ S-ის დადებით მხარეს შეესაბამება S'-ის უარყოფითი მხარე და $\cos\gamma'$ უნდა შევცვალოთ $-\cos\gamma'$-ით ზემოთ ფორმულაში. გავყოთ რა ამ ფორმულებს ერთიმეორეზე წევრობრივ, მივიღებთ:

$$\frac{\cos\gamma\, d\sigma}{\cos\gamma'\, d\sigma'} = \pm \frac{D(x, y)}{D(u, v)} : \frac{D(x', y')}{D(u, v)}, \tag{7}$$

სადაც აიღება ნიშანი + ან — იმისდამიხედვით თანადობა არის პირდაპირი თუ შექცევითი. ამ დამოკიდებულებიდან შეიძლება გამოვრიცხოთ დამხმარე u, v ცვლადები; მართლაც, გვაქვს

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\, \frac{D(x', y')}{D(u, v)} + \frac{D(f, \varphi)}{D(y', z')}\, \frac{D(y', z')}{D(u, v)} + \frac{D(f, \varphi)}{D(z', x')}\, \frac{D(z', x')}{D(u, v)}.$$

მიღებული დამოკიდებულება ერთგვაროვანია $\frac{D(x', y')}{D(u, v)}, \ldots$ იაკობიანების მიმართ; თუ მათ შევცვლით მათი პროპორციული $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ სიდიდეებით, გვექნება:

$$\cos\gamma\, d\sigma = \pm\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(y', z')} \cos\alpha' + \frac{D(f, \varphi)}{D(z', x')} \cos\beta' + \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} \cos\gamma'\right] d\sigma'. \tag{7'}$$

ჩვენ გვაქვს ორი ანალოგიური ფორმულა $\cos\alpha\, d\sigma$, $\cos\beta\, d\sigma$-თვის და ეს ფორმულები გვაძლევენ საშუალებას შევცვალოთ ყოველ S ფართეულზე გავრცელებული ინტეგრალი S' ფართეულზე გავრცელებული ინტეგრალით.

138. ცვლადთა გარდაქმნა. პირველი მეთოდი. ვთქვათ D და D' ორი ერთმანეთის შესაბამი არეა, აღებული მიმდევრობით (E) და (E') არეებში და შემოსაზღვრული ორი კეტილი S და S' ფართეულით. პირველად მოვძებნით ამ ორი არის მოცულობებისათვის $\frac{V}{V'}$ ფარდობის გამოსახულებას.

ჩვენ გვაქვს:

$$V=\int_S z\,dx\,dy=\int_S z\cos\gamma\,d\sigma, \tag{8}$$

სადაც $d\sigma$ არის S ფართეულის ელემენტი, γ—კუთხე, რომელსაც (E) არის გარე ნორმალის მიმართულება ჰქმნის Oz ღერძთან. მაგრამ (7′) ფორმულა გვაძლევს საშუალებას შევცვალოთ ზედაპირული ინტეგრალი მე-(8) ზედაპირულ ინტეგრალით, რომელიც გავრცელებულია S'-ზე. ამრიგად გვაქვს:

$$V=\pm\iint_{S'}\psi(x',y',z')\left[\cos\alpha'\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}+\cos\beta'\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}+\cos\gamma'\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right]d\sigma',$$

სადაც α', β', γ' არიან კუთხეები, რომლებსაც ჰქმნის S' ფართეულის გარე ნორმალის მიმართულება კოორდინატთა ღერძებთან; ინტეგრალის წინ ასაღებია + ნიშანი ან — ნიშანი იმისდამიხედვით თანადობა არის პირდაპირი თუ შექცევითი. ეს ახალი ინტეგრალი არის შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალი: (იხ. § 131, 132 და 137).

$$\iint_{S'}\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}dy'\,dz'+\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}dz'\,dx'+\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}dx'\,dy',$$

გავრცელებული S' ფართეულის გარე მხარეზე.

ამ უკანასკნელ ფორმულაში გამოვიყენოთ გრინის ზოგადი ფორმულა; გვაქვს:

$$V=\pm\iiint_{E}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}\right]+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(z',y')}\right]+\frac{\partial}{\partial z'}\left[\psi\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right]\right\}dx'\,dy'\,dz' \tag{8'}$$

თუ გავშლით ინტეგრალის ნიშნის ქვევით მყოფ ფუნქციებს მივიღებთ ორგვარი სახის გამოთქმებს: პირველი მათგანი, როგორც მაგალითად $\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\varphi}{\partial z'}$, შეიცავენ მეორე რიგის წარმოებულს. მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს გამოთქმები შეიკვეცება წყვილ-წყვილად. რაც შეეხება წევრებს, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს, მათი ჯამი არის:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{D(f,\varphi)}{D(y',z')}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{D(f,\varphi)}{D(z',x')}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}=\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}.$$

ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

$$V=\pm\iiint_{E'}\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}dx'\,dy'\,dz',$$

და ბოლოს საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენება, გვაძლევს:

$$V=\pm V'\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)}, \tag{9}$$

სადაც (ξ,η,ζ) არიან (E) არის რაიმე წერტილის კოორდინატები. ამ ფორმულიდან გამოგვყავს, რომ თანადობა პირდაპირი ან შექცევითი იმისდამიხედვით იაკობიანი $\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(x',y',z')}$ არის დადებითი თუ უარყოფითი (იხ. მაგალითი 13, § 65), რადგან V და

V' არიან არსებითად დადებითი. (9) ფორმულა შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგნაირად:

$$V=V'\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(\xi, \eta, \zeta)}\right|. \tag{9'}$$

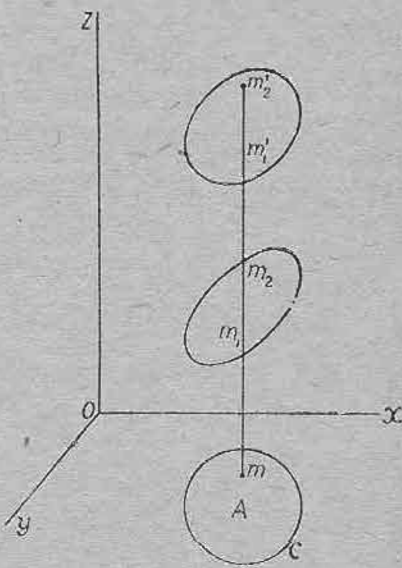
ეს ახალი (9′) ფორმულა სრულიად ანალოგიურია VI თავის (17) ფორმულისა, და ჩვენ მივიღებთ აგრეთვე მთელ რიგ შედეგებს. კერძოდ ჩვენ უშუალოდ გამოვიყვანთ ცვლადთა გარდაქმნის ზოგად ფორმულას სამჯერად ინტეგრალში; საკმარისია მხოლოდ აღვადგინოთ შეუცვლელად § 118-ის მეთოდი. თუ $F(x, y, z)$ არის ინტეგრადი ფუნქცია (E) არეში, მაშინ გვაქვს:

$$\iiint\limits_{E} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{E'} F(f, \varphi, \psi)\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x', y', z')}\right| dx'\, dy'\, dz'. \tag{10}$$

139. ცვლადთა გარდაქმნა. მეორე მეთოდი. მე-(10) ფორმულა შეიძლება დავამტკიცოთ კიდევ შემდეგნაირად. პირველად შევნიშნოთ, რომ თუ მე-(10) ფორმულა დამტკიცებულია ცვლადების ორი ან რამდენიმე კერძო გარდაქმნისათვის, მაშინ ფუნქციონალური დეტერმინანტის ცნობილ თვისებების (§ 52) ძალით, იგი სამართლიანი იქნება აგრეთვე ცვლადთა გარდაქმნისათვის, რომელიც მიიღება ცვლადთა ამ ყველა გარდაქმნის მიმდევრობით მოხდენით. ასევე მე-(10) ფორმულა თუ გამოიყენება სივრცის რამოდენიმე არეზე, მაშინ გამოიყენება აგრეთვე არეზე, მიღებული წინა არეთა შეერთებით. ვიგულისხმებთ რა ამას, ჩვენ როგორც ორჯერად ინტეგრალის შემთხვევაში, დავამტკიცებთ, რომ მე-(10) ფორმულა გამოიყენება ყოველ გარდაქმნაზე, რომლის დროს შეცვლილია მხოლოდ ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი, მაგალითად:

$$x=x',\quad y=y',\quad z=\psi(x', y', z'). \tag{11}$$

სახის გარდაქმნისათვის.



ნახ. 26.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ორივე $M(x, y, z)$ და $M'(x', y', z')$ წერტილი განხილულია ერთი და იგივე ღერძთა სისტემის მიმართ და, რომ Oz ღერძის პარალელური წრფე ჰკვეთს ორ წერტილში ფართეულს, რომელიც (E) არეს საზღვრავს. მე-(11) ფორმულები ამყარებენ თანადობას ამ ფართეულსა და მეორე ფართეულს შორის, რომელიც საზღვრავს (E') არეს. ორივე ფართეულის გარშემო შემოვწეროთ ცილინდრი, რომლის მსახველები არიან პარალელური Oz ღერძისა; იგი გადაიკვეთება $z=0$ სიბრტყესთან რაიმე შეკრულ C კონტურზე. ყოველი m წერტილი A არისა, შემოსაზღვრული C

კონტურით, არის გეგმილი პირველი ფართეულის რაიმე ორი m_1 და m_2 წერტილებისა, კოორდინატებით: z_1 და z_2 და მეორე ფართეულის რაიმე ორი m_1' და m'_2 წერტილებისა, კოორდინატებით z'_1 და z'_2. შევარჩიოთ აღნიშვნები იმ გვარად, რომ გვქონდეს: $z_1 < z_2$ და $z_1' < z'_2$. მე-(11) ფორმულის მიხედვით, m_1 წერტილს შეესაბამება ან m'_1 წერტილი ან m'_2 წერტილი. რომ განვასხვავოთ ეს ორი შემთხვევა, საკმარისია ყურადღება მივაქციოთ $\frac{\partial \psi}{\partial z'}$-ის ნიშანს. თუ $\frac{\partial \psi}{\partial z'}$ დადებითია, მაშინ z იზრდება z'-თან ერთად, და, მაშასადამე, m_1 წერტილს შეესაბამება m_1' წერტილი, ხოლო m_2 წერტილს—m_2' წერტილი. პირიქით, თუ $\frac{\partial \psi}{\partial z'}$ უარყოფითია, მაშინ z' ზრდის დროს z კლებულობს; მაშასადამე, m_1 წერტილს შეესაბამება m_2' წერტილი, ხოლო m_2 წერტილს—m_1' წერტილი. პირველ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz = \int_{z_1'}^{z_2'} F[x, y, \psi(x, y, z')] \frac{\partial \psi}{\partial z'}\, dz';$$

მეორე შემთხვევაში კი, პირიქით

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz = -\int_{z_1'}^{z_2'} F[x, y, \psi(x, y, z')] \frac{\partial \psi}{\partial z'}\, dz'.$$

ორივე შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz = \int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')] \left|\frac{\partial \psi}{\partial z'}\right| dz'. \tag{12}$$

ახლა თუ ავიღებთ ტოლობის ორივე მხრიდან ორჯერად ინტეგრალს A არეზე გავრცელებულს, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint_A dx\, dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz$$

არის სამჯერადი ინტეგრალი

$$\iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

გავრცელებული სივრცის (E) ნაწილზე. სრულიად ასევე, თუ მე-(12) ტოლობის მარჯვენა მხარეში x და y-ს შევცვლით შესაბამად x' და y'-ით ჩვენ ვნახავთ, რომ ორჯერადი ინტეგრალი მე-(12)-ს მარჯვენა მხრიდან არის ტოლი სამჯერადი ინტეგრალისა შემდეგი გამოსახულებიდან:

$$F[x', y', \psi(x', y', z')] \left|\frac{\partial \psi}{\partial z'}\right|$$

ალებული E' არეში. ამრიგად ამ კერძო შემთხვევაში გვაქვს:

$$\iiint\limits_{E} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{E'} F[x',y',\psi(x',y',z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right| dx'\,dy'\,dz';$$

მაგრამ, აქ $\dfrac{D(x,y,z)}{D(x',y',z')}$ დეტერმინანტი დადის $\dfrac{\partial\psi}{\partial z'}$-მდე, და ამრიგად მე-(10) ფორმულა არის დამტკიცებული მე-(11) სახის ცვლადთა გარდაქმნისათვის.

ზოგადი ფორმულა მე-(10) გამოიყენება აგრეთვე ცვლადთა გარდაქმნისათვის, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულებით:

$$x=f(x',y',z'),\ y=\varphi(x',y',z'),\ z=z', \tag{13}$$

სადაც z რჩება შეუცვლელი. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს ფორმულები ამყარებენ ურთიერთ ცალსახა თანადობას სივრცის (E) და (E') არეებს შორის და კერძოდ, რომ (E) და (E') არეების R და R' კვეთები, მიღებული ერთი და იგივე $z=0$ სიბრტყით, შეესაბამება ერთმანეთს ურთიერთ ცალსახად. ამრიგად, თანახმად ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულისა, ჩვენ გვაქვს:

$$\iint\limits_{R} F(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{R'} F[f(x',y',z'),\varphi(x',y',z'),z']\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right| dx'\,dy'; \tag{14}$$

ამ ტოლობის ორივე წევრი დამოკიდებულია მხოლოდ $z=z'$ ცვლადზე. თუ ხელახლა ვაინტეგრებთ z_1 და z_2 საზღვრებს შორის, რომელთა შორის z იცვლება (E) არეში, ჩვენ მივიღებთ ფორმულას:

$$\iiint\limits_{E} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{E'} F[f(x',y',z'),\varphi(x',y',z'),z']\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(x',y')}\right| dx'\,dy'\,dz'. \tag{15}$$

მაგრამ ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს: $\dfrac{D(x,y,z)}{D(x',y',z')}=\dfrac{D(x,y)}{D(x',y')}$; ასე რომ მე-(10) ფორმულა გამოიყენება აგრეთვე მე-(13) სახის ცვლადთა გარდაქმნისათვის. ახლა უჩვენოთ, რომ ცვლადთა ყოველი გარდაქმნა:

$$x=f(x_1,y_1,z_1),\ y=\varphi(x_1,y_1,z_1),\ z=\psi(x_1,y_1,z_1) \tag{16}$$

შეიძლება მივიღოთ წინა გარდაქმნების კომბინაციით. მართლაც, დავუშვათ რომ $x'=x_1$, $y'=y_1$, $z'=z$; მე-(16) ფორმულის უკანასკნელი განტოლება შეიძლება დაიწეროს ასე: $z'=\psi(x',y',z_1)$, საიდანაც ჩვენ მივიღებთ $z_1=\pi(x',y',z')$. ამრიგად მე-(16) ფორმულები შეიძლება შეცვლილი იქნას ექვს განტოლებათა სისტემით:

$$x=f[x',y',\pi(x',y',z')],\ y=\varphi[x',y',\pi(x',y',z')],\ z=z', \tag{17}$$

$$x'=x_1,\qquad y'=y_1,\qquad z'=\psi(x_1,y_1,z_1). \tag{18}$$

როგორც ვნახეთ ზოგადი ფორმულა მე-(10) გამოიყენება მე-(17) და მე-(18) ფორმულებით განსაზღვრულ თითოეულ გარდაქმნაზე ცალცალკე და, მაშასადამე, მე-(16) ცვლადთა გარდაქმნისთვისაც.

ჩვენ შეგვიძლია აგრეთვე, როგორც ამაში მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, შევცვალოთ ზოგადი მე-(16) გარდაქმნა სამი მე-(11) სახის მიმდევრობითი გარდაქმნით.

140. მოცულობის ელემენტი.—დავწეროთ (6) ფორმულები, რომლებიც განსაზღვრავენ ცვლადთა გარდაქმნას, რომელშიაც შევცვლით რა x', y', z'-ს შესაბამად u, v, w-თი, ასე:

$$x=f(u, v, w), \quad y=\varphi(u, v, w), \quad z=\psi(u, v, w). \tag{19}$$

შევცვლით რა მცირედ აქამდე მიღებულ ინტერპრეტაციას, განვიხილოთ ახლა u, v, w, როგორც მრუდწირული კოორდინატები.

(u) ფართეულები არის მაგალითად, ფართეულები აღწერილი (x, y, z) წერტილის მიერ, როცა v და w იცვლება ნებისმიერად, ხოლო u ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას; (v) და (w) ფართეულები განსაზღვრულია სრულიად ასეთივე წესით. თუ (E) არის ყოველ წერტილზე გაივლის ამ ფართეულთა ოჯახიდან მხოლოდ ერთი ფართეული, მაშინ ისინი ანაწილებენ ამ არეს მცირე ექვსწახნაგებად, ანალოგიურად იმ პარალელოპიპედებისა, რომლებსაც ჰქმნიდნენ კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები. მცირე ექვსწახნაგას მოცულობას, მოთავსებულს (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, (w), $(w+dw)$ ფართეულებს შორის, სადაც du, dv, dw არიან დადებითი, მე-(19) ფორმულის მიხედვით, აქვს გამოსახვა:

$$\left[\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| + \varepsilon\right] du\, dv\, dw,$$

სადაც ε უსასრულოდ მცირეა du, dv, dw-სთან ერთად. ჩვენ შეგვიძლია უყურადღებოდ დავტოვოთ $\varepsilon\, du dv dw$ წევრი, როგორც ჩვენ ამაზე არა ერთხელ მიუთითეთ (§ 72, 118); ნამრავლს:

$$dV=\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| du\ dv\ dw \tag{20}$$

ეწოდება მ ო ც უ ლ ო ბ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ი მრუდწიროვანი კოორდინატთა (u, v, w) სისტემაში.

ვთქვათ ds^2 არის წრფივი ელემენტი კოორდინატთა იმავე სისტემაში; მე-(9) ფორმულის მიხედვით გვაქვს:

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u} du+\frac{\partial f}{\partial v} dv+\frac{\partial f}{\partial w} dw, \quad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u} du+\ldots;$$

ავამაღლებთ რა უკანასკნელ ტოლობებს კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$ds^2=H_1 du^2+H_2 dv^2+H_3 dw^2+2F_1\, dv\, dw+2F_2\, du\, dw+2F_3 du\, dv, \tag{21}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, & H_2 &= \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, & H_3 &= \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2, \\ F_1 &= \mathrm{S}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial w}, & F_2 &= \mathrm{S}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial w}, & F_3 &= \mathrm{S}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ამასთანავე S ნიშანი ყოველთვის უჩვენებს, რომ x უნდა შეიცვალოს მიმდევრობით y-ით და z-ით და ავიღოთ ჯამი სამი ამნაირად მიღებული წევრისა. ფორმულა dV-თვის შეიძლება მიღებული იქნას ფრიად მარტივად ds^2-თვის მიღებული ფორმულიდან; მართლაც, ავამაღლებთ რა კვადრატში დეტერმინანტს ჩვეულებრივი ცნობილი წესით, მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix} = M;$$

და მოცულობის ელემენტი უდრის $\sqrt{M}\,du\,dv\,dw$.

განვიხილოთ კერძოდ ის ფრიად მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როცა საკოორდინატო ფართეულები (u), (v), (w) ჰქმნიან სამმაგად ორტოგონალურ სისტემას, ე. ი. როცა სამი ფართეული, რომლებიც გადიან სივრცის რომელიმე წერტილზე წყვილ-წყვილად მართი კუთხით იკვეთებიან აღნიშნულ წერტილში. მაშინ სამი ფართეულის გადაკვეთის წირების მხები წრფეები ჰქმნიან მართკუთხა სამწახნაგოვან კუთხეს. ამისათვის აუცილებელია, რომ გვექნეს $F_1=F_2=F_3=0$, და ეს სამი პირობა იქნება აგრეთვე საკმარისიც. ამ შემთხვევაში ფორმულები ds^2 და dV-თვის ღებულობენ მარტივ სახეს:

$$ds^2 = H_1 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2, \qquad dV = \sqrt{H_1 H_2 H_3}\,du\,dv\,dw. \tag{23}$$

ეს ფორმულები ადვილი გამოსაყვანია გეომეტრიულად. დავუშვათ, რომ du, dv, dw არიან საკმაოდ მცირეები, და განვიხილოთ ელემენტარული მოცულობა, შემოსაზღვრული (u), (v), (w), $(u+du)$, $(v+dv)$, $(w+dw)$ ფართეულებით, როგორც მცირე პარალელოპიპედი ბრტყელი წახნაგებით. ამ პარალელოპიპედის წიბოები იქნება შესაბამად $\sqrt{H_1}\,du$, $\sqrt{H_2}\,dv$, $\sqrt{H_3}\,dw$, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეებს. მივიღებთ რა ამ ელემენტარულ პარალელოპიპედის დიაგონალს და მოცულობას წრფივ ელემენტად და ელემენტარულ მოცულობად შესაბამად, ჩვენ მივიღებთ (23) ფორმულას. სრულიად ამგვარადვე, ერთერთი წახნაგის ფართობი $\sqrt{H_1 H_2}\,du\,dv$ წარმოადგენს (w) ფართეულის ელემენტს.

განვიხილოთ, მაგალითად, პოლარი კოორდინატები სივრცეში:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta, \tag{24}$$

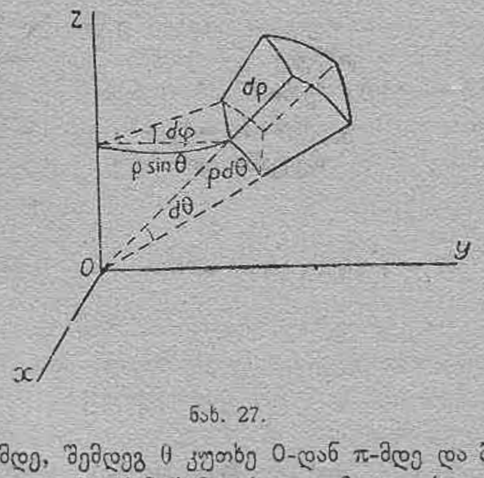
სადაც ρ წარმოადგენს მანძილს $M(x, y, z)$ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, θ არის კუთხე, რომელსაც ჰქმნის OM ნაკვეთი Oz ღერძთან და φ—კუთხე, რომელსაც ჰქმნის Ox ღერძთან MOz სიბრტყის კვალი $z=0$ სიბრტყეზე. რომ მივიღოთ სივრცის ყველა წერტილი საკმარისია ვცვალოთ ρ ნულიდან $+\infty$-მდე, θ კუთხე 0-დან π-მდე, და φ კი—0-დან 2π-მდე. (24) ფორმულებიდან თუ შევასრულებთ გამოთვლებს, მივიღებთ:

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2\,d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,d\varphi^2, \tag{25}$$

და, მაშასადამე,

$$dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi. \tag{26}$$

ეს ფორმულები ადვილად მიიღება უშუალოდ გამოთვლის გარეშე. ფართეულთა სამი ოჯახი: (ρ), (θ), (φ) არიან შესაბამად: კონცენტრული სფეროები, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, რგვალი კონუსები, რომელთა წვერო კოორდინატთა სათავეშია და რომელთა ბრუნვის ღერძი არის Oz, და ბოლოს სიბრტყეები, რომლებიც გადიან Oz ღერძზე. ეს სამი ოჯახი, ცხადია, ჰქმნიან სამმაგად ორტოგონალურ სისტემას და როგორც 27 ნახაზიდან უშუალოდ ვხედავთ ელემენტარული სხეულის განზომილება არის $d\rho$, $\rho\,d\theta$, $\rho\sin\theta\,d\varphi$, და ეს ჩვენ მიგვიყვანს (25) და (26) ფორმულებამდე.



ნახ. 27.

ვთქვათ $E=f(\theta, \varphi)$ არის იმ S ფართეულის განტოლება, რომელიც სათავეს თავის შიგნით შეიცავს და რომელსაც სათავიდან გამოსული ყოველი წრფე ჰკვეთს მხოლოდ ერთ წერტილში. რომ გამოვითვალოთ ρ, θ, φ ცვლადების საშუალებით სამჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული ამ კეტილი S ფართეულით შემოსაზღვრულ არეზე, საჭიროა ρ ვცვალოთ 0-დან R-მდე, შემდეგ θ კუთხე 0-დან π-მდე და ბოლოს φ 0-დან 2π-მდე. მაგალითად, მოცულობა შემოსაზღვრული ამ S ფართეულით უდრის სამჯერად ინტეგრალს:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R}\rho^2\sin\theta\,d\rho;$$

პირველი ინტეგრობა შესრულდება უშუალოდ და მივიღებთ

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^3 \sin\theta}{3}\, d\theta.$$

ზოგჯერ სარგებლობენ ნახევრად პოლარული ანუ ცილინდრული კოორდინატებით: r, ω, z, სადაც $x=r\cos\omega$, $y=r\sin\omega$. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$ds^2=dr^2+r^2\,d\omega^2+dz^2,$$

და

$$dV=r\,d\omega\,dr\,dz.$$

141. ელიფსური კოორდინატები. ფართეულები, წარმოდგენილი განტოლებით:

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}-1=0, \tag{27}$$

სადაც λ არის ცვლადი პარამეტრი და $a>b>c>0$, ჰქმნიან მეორე რიგის ჰომოფოკალურ (homofocales) ფართეულებს. სივრცის ყოველ წერტილზე გაივლის ამ ოჯახიდან სამი ფართეული: ელიფსოიდი, ორკალთა ჰიპერბოლოიდი და ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, რადგან (27) განტოლებას აქვს ყოველთვის ერთი λ_1 ფესვი, მოთავსებული b და c შორის; ერთი λ_2 ფესვი, მოთავსებული a და b შორის და ერთი λ_3 ფესვი მეტი a-ზე. ამ სამ λ_1, λ_2, λ_3 ფესვს ეწოდება *ელიფსური კოორდინატები* წერტილისა, რომლის მართკუთხა კოორდინატები არის x, y, z. ყოველი ორი ფართეული ამ ოჯახიდან არის ორტოგონალური. მართლაც, შევცვლით რა (27) განტოლებაში λ-ს ჯერ λ_1-ით, შემდეგ λ_2-ით და მიღებულ ტოლობებს წევრობრივ გამოვაკლებთ და ამას გარდა $(\lambda_1-\lambda_2)$ ზე გავყოფთ, მივიღებთ დამოკიდებულებას:

$$\frac{x^2}{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)(\lambda_2-b)}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)(\lambda_2-c)}=0, \tag{28}$$

რომელიც ამტკიცებს ორი (λ_1) და (λ_2) ფართეულების ორტოგონალობას.

მარტივ წესით რომ მივიღოთ x, y, z როგორც ფუნქციები λ_1, λ_2, λ_3-ს, ამისათვის შევნიშნოთ, რომ რადგან λ_1, λ_2, λ_3 არიან (27) განტოლების ფესვები, ამიტომ უნდა იყოს იგივურად:

$$\begin{aligned}(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)-x^2(\lambda-b)(\lambda-c)-y^2(\lambda-a)(\lambda-c)-z^2(\lambda-a)(\lambda-b)=\\ =(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3);\end{aligned}$$

თუ დავუშვებთ ამ იგივეობაში მიმდევრობით $\lambda=a$, $\lambda=b$, $\lambda=c$, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(\lambda_3-a)(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)}\\ y^2&=\frac{(\lambda_3-b)(\lambda_2-b)(b-\lambda_1)}{(a-b)(b-c)}\\ z^2&=\frac{(\lambda_3-c)(\lambda_2-c)(\lambda_1-c)}{(a-c)(b-c)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

აქედან, თუ ავიღებთ ლოგარითმულ წარმოებულს, მივიღებთ:

$$dx=\frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-a}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-a}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-a}\right),$$

$$dy=\frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-b}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-b}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-b}\right)$$

$$dz=\frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-c}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-c}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-c}\right);$$

შევადგენთ რა უკანასკნელ ტოლობების კვადრატების ჯამს, დავინახავთ, რომ (28) და მისი ანალოგიური დამოკიდებულებების საფუძვლით, წევრები $d\lambda_1 d\lambda_2$, $d\lambda_2 d\lambda_3$, $d\lambda_1 d\lambda_3$-ით, უნდა მოისპოს. $d\lambda_1^2$-ის კოეფიციენტი არის:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(\lambda_1-a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)^2}\right],$$

ან, თუ შევცვლით x^2, y^2, z^2 მათი მნიშვნელობებით და მოვახდენთ გამარტივებას, მივიღებთ:

$$M_1=\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_3-\lambda_1)\,(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)};$$

$d\lambda_2^2$ და $d\lambda_3^2$-თან მდგომი, M_2 და M_3 კოეფიციენტები მიიღება M_1-დან წრიული გადანაცვლებით მაშინ მოცულობის ელემენტი არის $\sqrt{M_1 M_2 M_3}\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3$.

142. დირიხლეს ინტეგრალები. ვთქვათ გამოსათვლელია სამჯერადი ინტეგრალი

$$\iiint x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\, dx\, dy\, dz,$$

აღებული ტეტრაედრის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია სიბრტყეებით: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. აღვნიშნოთ:

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta,$$

სადაც ξ, η, ζ ახალი ცვლადებია; ეს ფორმულები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\xi=x+y+z,\quad \eta=\frac{y+z}{x+y+z},\qquad \zeta=\frac{z}{y+z},$$

და უკუღმა, ჩვენ გვაქვს $x=\xi(1-\eta)$, $y=\xi\eta(1-\zeta)$, $z=\xi\eta\zeta$, როცა x, y, z არიან დადებითი და მათი ჯამი ნაკლებია ერთზე, მაშინ ξ, η, ζ არიან მოთავსებული 0-სა 1 შორის. პირიქით, როცა ξ, η, ζ არიან მოთავსებული ნულსა და ერთს შორის, მაშინ $x>0$, $y>0$, $z>0$ და $x+y+z<1$. ამგვარად, ჩვენ ტეტრაედრი შევცვალეთ კუბით.

რომ გამოვთვალოთ ფუნქციონალური დეტერმინანტი, ამისათვის მივიღოთ $X=\xi$, $Y=\xi\eta$, $Z=\xi\eta\zeta$, საიდანაც გვაქვს $x=X-Y$, $y=Y-Z$, $z=Z$; მაგრამ

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}\cdot\frac{D(X,Y,Z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\xi^2\eta,$$

და სამჯერადი ინტეგრალი, ზემოთაღნიშნული გარდაქმნის შემდეგ, გარდაიქმნება ასე:

$$\int_0^1 d\xi\int_0^1 d\eta\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\,\eta^{q+r+1}(1-\eta)^p\,\zeta^r(1-\zeta)^q\,d\zeta.$$

ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქცია წარმოადგენს ნამრავლს ξ-ის ფუნქციის, η-ს ფუნქციისა და ζ-ს ფუნქციისას. მაშასადამე, მოცემული სამჯერადი ინტეგრალი არის ნამრავლი სამი ინტეგრალისა:

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r+2} (1-\xi)^s \, d\xi \cdot \int_0^1 \eta^{q+r+1} (1-\eta)^p \, d\eta \cdot \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^q \, d\zeta,$$

ანუ თუ შემოვიღებთ Γ ფუნქციას [იხ. § 128 (33) და (34) ფორმულები], სამჯერადი ინტეგრალის გამოსახვისათვის მივიღებთ:

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \cdot \frac{\Gamma(q+r+2)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)};$$

საერთო მამრავლზე შეკვეცის შემდეგ გვექნება:

$$\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

143. ჯერადი ინტეგრალები. წმინდა ანალიზური გამოხატულებები, რომლებიც ჩვენ მივიღეთ ორჯერადი და სამჯერადი ინტეგრალებისათვის, გვაძლევს საშუალებას გავავრცელოთ ჯერადი ინტეგრალის განსაზღვრა ნებისმიერი რიცხვის დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციებზე. ჩვენ დავკმაყოფილდებით აქ მხოლოდ ზოგადი მითითებებით.

ვთქვათ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ არის n დამოუკიდებელი ცვლადის სისტემა. სიმარტივისათვის ჩვენ ვიტყვით, რომ ამ ცვლადების მნიშვნელობათა ყოველი $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ სისტემა წარმოადგენს *წ ე რ ტ ი ლ ს* n განზომილებიან სივრცეში. სრულიად ამგვარადვე, ყოველი $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ დამოკიდებულება, რომლის მარცხენა მხარე არის უწყვეტი ფუნქცია, წარმოადგენს *ჰ ი პ ე რ ფ ა რ თ ე უ ლ ს*; თუ F არის პირველი ხარისხის მრავალწევრი, ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს განტოლება წარმოადგენს სიბრტყეს. განვიხილოთ სიმრავლე წერტილებისა, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგი სახის უტოლობებს:

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, k); \tag{30}$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს სიმრავლე წერტილებისა ჰქმნის D არეს n განზომილებიან სივრცეში. თუ ამ არის ყოველი წერტილისათვის თითოეული x_i კოორდინატის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება ერთ გარკვეულ რიცხვს, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ D არე იმყოფება მთლიანად სასრულო ნაწილში. თუ უტოლობებს, რომლებიც განსაზღვრავენ D არეს, აქვს სახე

$$x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^1, \quad x_2^0 \leqslant x_2 \leqslant x_2^1, \ldots, \quad x_n^0 \leqslant x_n \leqslant x_n^1, \tag{31}$$

მაშინ ამ არეს უწოდებთ *პ რ ი ზ მ ა ტ ო ი დ ს* (prizmatoïde), და ვიტყვით, რომ n დადებითი $x_i^1 - x_i^0$ რიცხვი არიან ამ პრიზმატოიდის განზომილებები. დაბოლოს ჩვენ ვიტყვით, რომ D არის წერტილი მდებარეობს ამ არის საზღვარზე, თუ ამ წერტილის კოორდინატებისათვის ერთი მაინც ψ_i ფუნქციათაგანი (30) ფორმულაში ნულის ტოლია.

ვთქვათ D სასრულო არეა და $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის ფუნქცია, უწყვეტი ამ არეში. დავუშვათ, რომ ეს D არე დანაწილებულია მცირე არეებად $x_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებით. ავიღოთ ერთერთი პრიზმატოიდი, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ სიბრტყეებით და მოთავსებულია D არის შიგნით; ვთქვათ $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ არის მისი განზომილებები, და $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — ამ პრიზმატოიდის რაიმე წერტილის კოორდინატები. თუ

რიცხვი ყველა პრიზმატოიდისა, რომლებიც D არის შიგნით იმყოფება, უსაზღვროდ იზრდება ისე, რომ მათი ზომა მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ ჯამი:

$$S=\sum f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \Delta x_1\, \Delta x_2 \ldots \Delta x_n, \tag{32}$$

გავრცელებული ყველა ამ პრიზმატოიდზე, მიისწრაფის გარკვეულ J ზღვარისაკენ. ამ J ზღვარს ეწოდება n ჯერადი ინტეგრალი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ფუნქციიდან გავრცელებული D არეზე,

$$J=\int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

n ჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა აქ დაიყვანება n მარტივი ინტეგრალის მიმდევრობით გამოთვლაზე. რომ დავამტკიცოთ ამ კანონის ზოგადობა, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ თუ იგი სამართლიანია $(n-1)$ ჯერადი ინტეგრალისათვის, მაშინ იგი სამართლიანი იქნება აგრეთვე n ჯერადი ინტეგრალისათვისაც. ამისათვის განვიხილოთ D არის რაიმე წერტილი

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

თუ დროებით არ მივაქცევთ ყურადღებას x_n ცვლადს, მაშინ ცხადია, რომ წერტილი $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ აღწერს რაიმე D' არეს $n-1$ განზომილებიან სივრცეში. ვიგულისხმოთ, რომ D არე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: ყოველ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ წერტილს D' არეს შიგნით შეესაბამება D არის საზღვარზე ორი წერტილი კოორდინატებით: $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; \overset{(1)}{x_n})$ და $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; \overset{(2)}{x_n})$, ამასთანავე $\overset{(1)}{x_n}$ და $\overset{(2)}{x_n}$ კოორდინატები არის $(n-1)$ ცვლადის: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ფუნქციები, უწყვეტი D' არის შიგნით. თუ ეს პირობა არ არის დაკმაყოფილებული, მაშინ D არეს დავანაწილებთ ისეთ ნაწილებად, რომ თითოეულ მათგანში იყოს ეს პირობა შესრულებული. განვიხილოთ ახლა D არეში პრიზმატოიდების მიმდევრობა, რომლებიც შეესაბამებიან D' არის ერთი და იგივე წერტილს $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ წერტილების სათანადოდ ამორჩევით, როგორც ჩვენ ამას ჩავდიოდით ორჯერად ინტეგრალში, ამ შემთხვევაში ეს პრიზმატოიდები მოგვცემენ S-ში ჯამს, რომელიც უდრის:

$$\Delta x_1\, \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1} \left[\int\limits_{\overset{(1)}{x_n}}^{\overset{(2)}{x_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n+\varepsilon\right],$$

სადაც $|\varepsilon|$ შეიძლება ნაკლები გახდეს ყოველ დადებით რიცხვზე, მხოლოდ თუ ყველა Δx_i სიდიდე იქნება საკმარისად მცირე. თუ აღვნიშნავთ:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})=\int\limits_{\overset{(1)}{x_n}}^{\overset{(2)}{x_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n, \tag{33}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ J უდრის ზღვარს შემდეგი ჯამისას:

$$\sum \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, \Delta x_1\, \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1},$$

ე. ი. $(n-1)$ ჯერადი ინტეგრალს:

$$J=\int\int\int \ldots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}, \tag{34}$$

გავრცელებულს D' არეზე. მაგრამ ჩვენ ვიგულისხმეთ თავიდანვე, რომ კანონი სამართლიანია $(n-1)$ ჯერადი ინტეგრალისათვის; მაშასადამე ამ კანონს აქვს ზოგადი ხასიათი.

შეიძლება კიდევ ვიმსჯელოთ სხვანაირად. განვიხილოთ სიმრავლე იმ $(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1})$ წერტილებისა, რომელთათვის x_n კოორდინატს აქვს მოცემული მნიშვნელობა. $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ წერტილი აღწერს $(n-1)$ განზომილებიან სივრცეში რაიმე δ არეს, და ადვილად დავინახავთ, რომ n ჯერადი J ინტეგრალი უდრის აგრეთვე შემდეგ გამოხატულებას:

$$J=\int\limits_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} \theta(x_n)\, dx_n, \tag{35}$$

სადაც $\theta(x_n)$ არის $(n-1)$ ჯერადი ინტეგრალი $\iiint \ldots \int f\, dx_1, dx_2 \ldots dx_{n-1}$ გავრცელებული δ არეზე, ხოლო $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ არიან x_{n-1}-ის ქვედა და ზედა საზღვრები D არეში.

რა წესითაც არ უნდა გამოვთვალოთ ინტეგრალი, მისი საზღვრები სხვადასხვა ინტეგრობისათვის დამოკიდებულია D არის თვისებაზე, და საზოგადოდ ი ვლება ინტეგრობის რიგის შეცვლასთან ერთად. გამონაკლისს შეადგენს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა D არე არის პრიზმატოიდი განსაზღვრული შემდეგი პირ ბებით:

$$\overset{0}{x}_1 \leqslant x_1 < X_1, \ldots, \overset{0}{x}_i < x_i < X_i, \ldots$$

ამ შემთხვევაში ჯერადი ინტეგრალს აქვს გამოსახვა:

$$\int\limits_{\overset{0}{x}_1}^{X_1} dx_1 \int\limits_{\overset{0}{x}_2}^{X_2} dx_2 \ldots \int\limits_{\overset{0}{x}_n}^{X_n} f\, dx_n,$$

და ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერად ვცვალოთ ინტეგრობის რიგი, თითოეული ცვლადის საზღვრების შეუცვლელად.

ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულა აგრეთვე ვრცელდება n ჯერად ინტეგრალზე. ვთქვათ

$$x_i=\varphi_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

გარდაქმნის ფორმულებია, რომლებიც ამყარებენ ურთიერთ ცალსახა თანადობას $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ წერტილის მიერ აღწერილ D' არისა და $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილის მიერ აღწერილ D არეს შორის. გვაქვს:

$$\iiint\limits_{D} \ldots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$=\iint\limits_{D'} \ldots \int F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \left| \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x'_1, \ldots, x'_n)} \right| dx'_1 \ldots dx'_n. \tag{37}$$

ამ ფორმულის დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია იმისა, რაც წინად იყო. მოვიყვანთ აქ მსჯელობის მსვლელობა მხოლოდ ზოგად ფარგლებში.

1) თუ (37) ფორმულა სამართლიანია ორი გარდაქმნისათვის, მაშინ იგი იქნება სამართლიანი იმ გარდაქმნისთვისაც, რომელიც მიიღება ამ ორი გარდაქმნის მიმდევრობით მოხდენით.

2) ცვლადთა ყოველი გარდაქმნა შეიძლება მიღებულ იქნას, როგორც შეერთება ცვლადთა ორი გარდაქმნისა შემდეგი სახით:

$$x_1=x_1', \quad x_2=x_2', \ldots, x_{n-1}=x'_{n-1}, \quad x_n=\varphi_n(x_1', x_2', \ldots, x'_n); \tag{38}$$

$$x_1=\psi_1(x'_1, \ldots, x'_n), \ldots, x_{n-1}=\psi_{n-1}(x'_1, \ldots, x'_n), \quad x_n=x'_n. \tag{39}$$

3) (37) ფორმულა გამოიყენება (38) სახის ცვლადთა გარდაქმნისათვის; ეს გამომდინარეობს n ჯერადი ინტეგრალის (34) გამოსახვიდან. სრულიად ამგვარადვე, n ჯერადი ინტეგრალის (35) გამოსახვიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ (37) ფორმულა დამტკიცებულია $(n-1)$ ჯერადი ინტეგრალისათვის, მაშინ ეს ფორმულა გამოიყენება აგრეთვე (39) სახის ცვლადთა გარდაქმნისათვისაც. ამრიგად, გადავალთ რა მიმდევრობით n-დან $(n+1)$-ზე, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (37) ფორმულას აქვს ზოგადი ხასიათი.

ვთქვათ, მაგალითად, გამოსათვლელია განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$J=\int\int\ldots\int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}(1-x_1-x_2-\ldots-x_n)^{\beta}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

სადაც $\alpha_1\ \alpha_2, \ldots \alpha_n$, β არის დადებითი რიცხვები, გავრცელებულ ᵓ D არეზე, განსაზღვრული უტოლებებით:

$$0 \leqslant x_1, \quad 0 \leqslant x_2, \ldots, 0 \leqslant x_n, \quad x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1.$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\xi_1, \quad x_2+\ldots+x_n=\xi_1\xi_2, \ldots, x_n=\xi_1\xi_2\ldots\xi_n,$$

ჩვენ შევცვლით D არეს D' არით, რომელიც განსაზღვრულია უტოლობებით:

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant \xi_n \leqslant 1.$$

ამას გარდა უბრალო გამოთვლით (§ 142) მივიღებთ:

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}=\xi_1^{n-1}\xi_2^{n-2}\ldots\xi_{n-1}.$$

ინტეგრალის ქვეით მყოფი ფუნქცია ღებულობს სახეს:

$$\xi_1^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+n-1}\ \xi_2^{\alpha_2+\cdots+\alpha_n+n-2}\ \ldots\ \xi_n^{\alpha_n}(1-\xi_1)^{\beta}(1-\xi_2)^{\alpha_1}\ldots(1-\xi_n)^{\alpha_{n-1}},$$

და საძიებელი ინტეგრალი გამოითქმება Γ ფუნქციის დახმარებით ასე:

$$J=\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\ \Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)\ \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta+n+1)}. \tag{40}$$

II. სრული დიფერენციალების ინტეგრება

144. ზოგადი მეთოდი. ვთქვათ $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ არის ორი x და y ცვლადის ფუნქციები. გამოთქმა:

$$Pdx+Qdy$$

საზოგადოდ არ წარმოადგენს ორი x და y ცვლადის რაიმე ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. მართლაც, როგორც ცნობილია, განტოლება:

$$du = Pdx + Qdy \tag{41}$$

ტოლფასია შემდეგი ორი განტოლების:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \tag{42}$$

თუ გავაწარმოვებთ (42) განტოლებებიდან პირველს y-ით, მეორეს x-ით, ჩვენ ვხედავთ, რომ $u(x,y)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ორ დამოკიდებულებას:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ არსებობდეს $u(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (41) პირობას, ადგილი უნდა ჰქონდეს იგივურად შემდეგ ტოლობას

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{43}$$

ეს აუცილებელი პირობა ამასთანავე არის საკმარისიც. მართლაც, არსებობს უამრავი $u(x,y)$ ფუნქციები, რომელთა კერძო წარმოებულები x-ით არიან ტოლი $P(x,y)$; ყველა ეს ფუნქცია მოცემულია ფორმულით

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + Y,$$

სადაც x_0 ნებისმიერი მუდმივია, მხოლოდ Y არის y ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია. ეს $u(x,y)$ ფუნქცია რომ აკმაყოფილებდეს (41) განტოლებას, ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი კერძო წარმოებულები y-ით იყოს $Q(x,y)$-ის ტოლი; ე. ი. უნდა იყოს

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx + \frac{\partial Y}{\partial y} = Q(x,y).$$

მაგრამ (43) განტოლების ინტეგრობა გვაძლევს:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = Q(x,y) - Q(x_0,y),$$

და წინა დამოკიდებულება გარდაიქმნება შემდეგი დამოკიდებულებად:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = Q(x_0,y).$$

მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია მხოლოდ y-ზე; მაშასადამე, არსებობს უამრავი Y ფუნქციებისა, რომლებიც დამოკიდებულია y-ზე და აკმაყოფილებენ უკანასკნელ პირობას. ყველა ისინი მოთავსდება ფორმულაში:

$$Y=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C,$$

სადაც y_0 არის y ცვლადის რაიმე კერძო მნიშვნელობა, ხოლო C ნებისმიერი მუდმივი. ამგვარად არსებობს უსასრულო სიმრავლე $u(x, y)$ ფუნქციებისა, რომ ლებიც აკმაყოფილებენ (41) განტოლებას. ისინი გამოიხატება ფორმულით:

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C \tag{44}$$

და განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ დამატებითი C მუდმივის მნიშვნელობით.

ვთქვათ, მაგალითად

$$P=\frac{x+my}{x^2+y^2},\ Q=\frac{y-mx}{x^2+y^2};$$

აქ (43) პირობა დაკმაყოფილებულია, და თუ მივიღებთ $x_0=0$, $y_0=1$, გვექნება:

$$u=\int_0^x \frac{x+my}{x^2+y^2}\,dx+\int_1^y \frac{dy}{y}+C.$$

შევასრულებთ რა ნაჩვენებ ინტეგრობას, მივიღებთ:

$$u=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_0^x+m\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right]_0^x+\ln y+C,$$

ანუ

$$u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+m\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+C.$$

ეს მეთოდი შეიძლება გავავრცელოთ დამოუკიდებელ ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაზე. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ სამი ცვლადის შემთხვევას. ვთქვათ P, Q და R არის x, y, z ცვლადების ფუნქციები; განტოლება სრულ დიფერენციალებში

$$du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz \tag{45}$$

ტოლფასია შემდეგი სამი განტოლების:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial u}{\partial z}=R. \tag{46}$$

თუ გამოვთვლით ორი სხვადასხვა წესით წარმოებულებს $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, მივიღებთ სამ აუცილებელ პირობას:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}. \tag{47}$$

ვთქვათ, რომ ეს პირობები შესრულებულია. პირველი პირობის ძალით არსებობს უსასრულო სიმრავლე $u(x, y, z)$ ფუნქციებისა, რომელთა კერძო წარმოებულები x-ით და y-ით შესაბამად ეტოლება P და Q; ყველა ეს ფუნქცია მოთავსდება ფორმულაში:

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy+Z,$$

სადაც Z არის z-ის ნებისმიერი ფუნქცია. $\frac{\partial u}{\partial z}$ წარმოებული რომ იყოს R-ის ტოლი, საჭიროა

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial z}\, dx+\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x_0, y, z)}{\partial z}\, dy+\frac{dZ}{dz}=R;$$

(47) დამოკიდებულების ძალით, უკანასკნელი განტოლება გარდაიქმნება შემდეგი სახით:

$$R(x, y, z)-R(x_0, y, z)+R(x_0, y, z)-R(x_0, y_0, z)+\frac{dZ}{dz}=R(x, y, z),$$

ანუ

$$\frac{\partial Z}{dz}=R(x_0, y_0, z).$$

აქედან ჩვენ დავასკვნით, რომ არსებობს უსასრულო სიმრავლე $u(x, y, z)$ ფუნქციებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (45) პირობას; ყველა ისინი წარმოიდგინება ფორმულით:

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\, dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\, dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\, dz+C, \tag{48}$$

სადაც x_0, y_0, z_0 არიან ცვლადების ნებისმიერად ამორჩეული მნიშვნელობები, ხოლო C ნებისმიერი მუდმივი.

145. გამოკვლევა ინტეგრალისა $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P\, dx+Q\, dy$. წინა საკითხი შეიძლება განხილული იქნას მეორე თვალსაზრისით, რომელიც მოგვცემს საშუალე-

ბას გამოვიკვლიოთ იგი ღრმად და მიგვიყვანს აგრეთვე ახალ შედეგებამდე. ვთქვათ $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ არიან უწყვეტი ფუნქციები, თავისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებით A არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია კეტილი C კონტურით; ეს A არე შეიძლება აგრეთვე შეიცავდეს მთელ სიბრტყეს, რაც იმ დაშვების ტოლფასია, რომ C კონტური მიდის უსასრულეთში. წირითი ინტეგრალი:

$$\int P\,dx+Q\,dy,$$

აღებული იმ L გზის განგრძივ, რომელიც მთლიანად A არეში იმყოფება, საზოგადოდ დამოკიდებულია ინტეგრობის გზაზე. მოვძებნოთ უპირველესად, თუ რა პირობებში ეს ინტეგრალი დამოკიდებულია მხოლოდ ამ გზის ბოლო წერტილების (x_0, y_0), (x_1, y_1) კოორდინატებზე. ვთქვათ M და N არის A არის რაიმე ორი წერტილი, და L, L'—ორი გზა, რომლებიც აერთებენ ამ წერტილებს და ერთმანეთს არ ჰკვეთენ; ორივე ეს გზა, ერთად აღებული გვაძლევს კეტილ კონტურს. იმისათვის რომ წირითი ინტეგრალები, აღებული L და L' წირების განგრძივ, იყოს ტოლი, ცხადია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ინტეგრალი აღებული გარკვეულ მიმართულებით კეტილი კონტურის განგრძივ, რომელსაც ორივე წირები შეადგენენ, იყოს ნულის ტოლი. ამგვარად დასმული საკითხი ტოლფასია შემდეგი საკითხისა: წირითი ინტეგრალი

$$\int P\,dx+Q\,dy,$$

აღებული რაიმე კეტილი კონტურის განგრძივ, რომელიც მთლიანად A არეში იმყოფება, რა პირობებში იქნება ნულის ტოლი?

პასუხს ამ კითხვაზე უშუალოდ გვაძლევს გრინის შემდეგი ფორმულა:

$$\int\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{49}$$

სადაც C არის A არეში მდებარე რაიმე კეტილი კონტური, ხოლო ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებულია C კონტურის შიგნით მოთავსებულ A' არეზე. ცხადია, რომ თუ P და Q ფუნქციების წარმოებულები აკმაყოფილებენ (43) დამოკიდებულებას, მაშინ მარცხენა მხარეზე მდგომი წირითი ინტეგრალი ყოველთვის ნულის ტოლია. ამასთანავე ეს პირობა არის აუცილებელი. მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ A არეში სხვაობა $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$ არ უდრის ნულს იგიურად; რადგან დაშვების ძალით, ეს სხვაობა არის უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს იმდენად მცირე a არე, რომ ამ ფუნქციის ნიშანი a არეში იყოს მუდმივი; მაშინ (49) ფორმულიდან ცხადია, რომ a არის კონტურის განგრძივ აღებული წირითი ინტეგრალი, არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი.

თუ (43') პირობა დაკმაყოფილებულია იგიურად, მაშინ ორი L და L' გზა რომელთაც აქვთ ერთი და იგივე განაპირა M და N წერტილები და არ იკვეთებიან ამ წერტილებს შორის, მოგვცემენ წირითი ინტეგრალისათვის ერთი და იგივე მნიშვნელობას. იგივე იქნება იმ შემთხვევაშიც, თუ M და N წერტილებს შორის ეს გზები რამდენჯერმე გადიკვეთება, რადგან საკმარისია მათი შედარება მესამე L'' გზასთან, რომელიც არ ხვდება პირველ ორს არსად, გარდა M და N წერტილებისა.

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ საინტეგრო წირის ერთერთი ბოლო (x_0, y_0) წერტილი არის უძრავი (მუდმივი), ხოლო მეორე ბოლო იყოს ცვლადი (x, y) წერტილი, რომლებიც მოთავსებულია A არეში; ინტეგრალი:

$$F(x,y)=\int_{x_0, y_0}^{x, y} P\,dx+Q\,dy, \tag{50}$$

აღებული ნებისმიერი სახის გზის განგრძივ, დამოკიდებულია მხოლოდ ცვლადი ბოლო (x, y) წერტილის კოორდინატებზე. $F(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები არიან სწორედ $P(x, y)$ და $Q(x, y)$. მაგალითად, ჩვენ გვაქვს:

$$F(x+\Delta x, y)=F(x, y)+\int_{x, y}^{x_0+\Delta x, y} P(x, y)\,dx;$$

მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ პირველად მივდივართ (x_0, y_0) წერტილიდან (x, y) წერტილამდე წინაგზით, შემდეგ (x, y) წერტილიდან $(x+\Delta x, y)$ წერტილამდის Ox ღერძის პარალელური წრფით, ამასთანავე ამ წრფის განგრძივ ჩვენ გვაქვს $dy=0$. თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{F(x+\Delta x, y)-F(x, y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x, y) \quad (0<\theta<1);$$

როცა Δx მიისწრაფის ნულისაკენ, მივიღებთ $F'_x=P$. სრულიად ამგვარადვე დავრწმუნდებით, რომ $F'_y=Q$. ამგვარად წირითი ინტეგრალი $F(x, y)$ აკმაყოფილებს (41) განტოლებას სრული დიფერენციალებით, და ჩვენ მივიღებთ ამ განტოლების ზოგად ინტეგრალს, თუ მივუმატებთ $F(x, y)$-ს ნებისმიერ მუდმივს.

ახალი (50) ფორმულა უფრო ზოგადია, ვიდრე (44) ფორმულა, რადგან მასში ინტეგრობის გზა რჩება განუსაზღვრელი; სხვათა შორის მისგან ადვილად გამოიყვანება (44) ფორმულა. ყოველგვარი გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად, აღვნიშნოთ (x_0, y_0) და (x_1, y_1)-ით საინტეგრო გზის ორივე ბოლოს კოორდინატები, და ავიღოთ საინტეგრო გზად ორი წრფე $x=x_0$, $y=y_1$; პირველი წრფის განგრძივ გვაქვს $x=x_0$, $dx=0$, და y იცვლება y_0-დან y_1-მდე. მეო-

რე წრფის განგრძივ $y=y_1$, $dy=0$, და x იცვლება x_0-დან x_1-მდე. მაშასადამე, ჩვენი ინტეგრალი ტოლია:

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)\,dx;$$

ეს ფორმულა განსხვავდება (44)-დან მხოლოდ აღნიშვნებით.

მაგრამ ზოგჯერ ხელსაყრელია ავირჩიოთ ინტეგრობის სხვა გზა. ვიგულისხმოთ, რომ $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ და t ვცვალოთ t_0-დან t_1-მდე. ჩვენ ვაიძულებთ (x, y) წერტილს აღწეროს რაიმე მრუდი, რომელიც აერთებს (x_0, y_0) წერტილს (x_1, y_1) წერტილთან. ჩვენ გვაქვს:

$$\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} P\,dx+Q\,dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x, y)\,f'(t)+Q(x, y)\,\varphi'(t)]\,dt,$$

და რჩება შესასრულებელი მხოლოდ ერთი კვადრატურა, მაგალითად, თუ ჩვენ ვიმოძრავებთ წრფის განგრძივ, მაშინ უნდა მივიღოთ $x=x_0+t(x_1-x_0)$, $y=$ $=y_0+t(y_1-y_0)$ და t ვცვალოთ 0-დან 1-მდე.

პირიქით, თუ ვიცით (41) განტოლების რაიმე კერძო $\Phi(x, y)$ ინტეგრალი, მაშინ ჩვენ მივიღებთ მისგან წირითი ინტეგრალს შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} P\,dx+Q\,dy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0);$$

უკანასკნელი ფორმულა ანალოგიურია IV თავის (8) ფორმულისა.

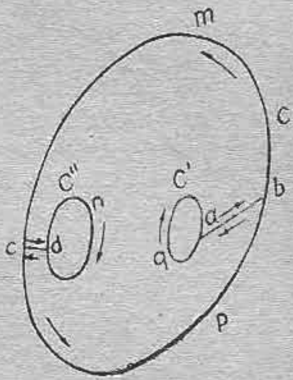
146. პერიოდები. შეიძლება განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა. უპირველესად შევნიშნოთ, რომ გ რ ი ნ ი ს ფორმულა გამოიყენება აგრეთვე ისეთ არეებზე, რომელნიც შემოსაზღვრულია რამოდენიმე კონტურით. გინვიხილოთ მაგალითად A არე, შემოსაზღვრული გარე C კონტურით და ორი C' და C'' კონტურით, რომლებიც პირველის შიგნით მდებარეობენ (ნახ. 28), ვთქვათ P და Q არის უწყვეტი ფუნქციები თავიანთი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებით ამ A არეში. (სიბრტყის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია C' და C'' კონტურების შიგნით, უნდა განვიხილოთ როგორც A არის არა შემადგენელი ნაწილი; ჩვენ არ ვაკეთებთ არავითარ დაშვებას P და Q ფუნქციების თვისებების შესახებ ამ ორ არეში). შევაერთოთ C' და C'' კონტურები კეტილ C კონტურთან ტრანსვერსალური ab და cd წირებით. ამგვარად ჩვენ მივიღებთ კეტილ კონტურს $abmcdndcpbaqa$ ანუ Γ-ს, რომელიც შეიძლება აღწერილ იქნას უწყვეტი მოძრაობით [1]. გრინის ფორმულის გამოყენებით იმ არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ კონტურით, ვნახავთ, რომ წირითი ინტეგრალები, წარმოშობილი ab და cd წირებიდან, მოისპობიან, რადგან თითოეული მათგანი აიღება ორი მოწინაალმდეგე მიმართულებით და ჩვენ დაგვრჩება:

$$\int P\,dx+Q\,dy = \int\!\!\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy;$$

---

[1] ტრანსვერსული ab და cd წირები განხილულია აქ როგორც ორმაგი წირები, რომელნიც შედგება ორი უსასრულოდ ახლო მდებარე წირისაგან.

ამ ფორმულაში წირითი ინტეგრალი აიღება A არის მთელი კონტურის განგრძივ, ე. ი. სამი კონტურის C, C', C''-ის განგრძივ ისრით ნაჩვენები მიმართულებით ისე, რომ ამ კონტურებით შემოსაზღვრული არე რჩებოდეს ყოველთვის მარცხენა მხარეზე.



ნახ. 28.

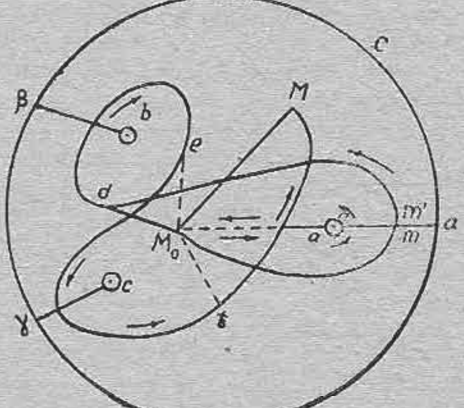
თუ P და Q ფუნქციები A არეში აკმაყოფილებენ პირობას $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი უდრის ნულს, და მიღებული დამოკიდებულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\int\limits_{C} P\,dx+Q\,dy=$$

$$=\int\limits_{C'} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{C''} P\,dx+Q\,dy, \qquad (51)$$

თუ აქ შევთანხმდებით ავიღოთ სამივე წირითი ინტეგრალი ერთი და იგივე მიმართულებით.

დავუბრუნდეთ A არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია მხოლოდ ერთი C კონტურით. ვთქვათ P და Q არის უწყვეტი ფუნქციები თავისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად მთელს A არეში, გარდა სასრულო რიცხვი წერტილებისა, რომლებზედაც ერთერთი P და Q ფუნქციათაგანი ხდება წყვეტილი. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ A არეში იმყოფება სამი წყვეტის წერტილი a, b და c. თითოეული ამ წერტილის გარშემო შემოვწეროთ საკმაოდ მცირე რადიუსებიანი წრეები და შევაერთოთ ეს წრეები C კონტურთან ჭრილებით (ნახ. 29) ინტეგრალს $\int P\,dx+Q\,dy$, აღებული რაიმე მუდმივი (x_0, y_0) წერტილიდან რომელიმე ცვლადი (x, y) წერტილამდე წირის განგრძივ, რომელიც არ ჰკვეთს არც ერთ ჭრილთაგანს, აქვს ერთად ერთი მნიშვნელობა ყოველ წერტილზე, რადგან C კონტური, ჭრილები და მცირე წრეები ჰქმნიან ერთად წირს, რომელიც შეიძლება აღწერილ იქნას უწყვეტი მოძრაობით. აღვნიშნოთ $F(x, y)$-ით ზემო ინტეგრალის მნიშვნელობა, აღებული ამ პირდაპირი გზის განგრძივ $M\ (x_0, y_0)$ წერტილიდან $M(x, y)$ წერტილამდე.



ნახ. 29.

გზას, შედგენილს იმ წრფე წირით, რომელიც აერთებს M_0 წერტილს a წერტილის უსასრულოდ ახლო მდებარე a' წერტილთან, მცირე რადიუსის წრეწირით aa' ცენტრით a-ში და $a'M_0$ წრფე წირით, ეწოდება მარყუჟი (lacet). ცხადია, რომ წირითი ინტეგრალი $\int P\,dx+Q\,dy$, აღებული მარყუჟის განგრძივ, დაიყვანება წირითი ინტეგრალზე, რომელიც აღებულია მხოლოდ a წერტილის გარს შემოწერილ წრეწირის განგრძივ. თუ ერთერთი ფუნქციათაგანი P და Q ხდება a წერტილში უსასრულო, მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი, საზოგადოდ არ უდრის ნულს, მაგრამ იგი არ არის დამოკიდებული

ამ მცირე წრეწირის რადიუსზე; ის უდრის რაიმე $\pm\mathfrak{A}$ მუდმივს, ამასთანავე ორი ნიშანი შეესაბამება წრეწირის გარშემო ავლის ორ მიმართულებას. სრულიად ამგვარადვე, ჩვენ აღვნიშნავთ $\pm\mathfrak{B}$ და $\pm\mathfrak{C}$-თი წირითი ინტეგრალების მნიშვნელობებს, რომლებიც აღებულია იმ მარყუჟების განგრძივ, რომლებიც აღწერილია b და c განკუთრი წერტილების გარშემო.

ახლა ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველი გზა, რომელიც აერთებს M_0 წერტილს M წერტილთან, შეიძლება შეცვლილ იქნეს პირდაპირი გზით M_0 წერტილიდან M წერტილამდე, და მთელი რიგი მარყუჟებით, მაგალითად, M_0mdefM გზა შეიძლება შეცვლილი იქნეს შემდეგი გზათა მიმდევრობით: M_0mdM_0, M_0deM_0, M_0efM_0, M_0fM_0; M_0mdM_0 თავის მხრით შეიძლება შეიცვალოს განკუთრი a წერტილის გარშემო აღწერილი მარყუჟით; იგივე შეიძლება ითქვას სხვა გზების მიმართ. უკანასკნელად, M_0fM გზა პირდაპირი გზის ტოლფასია. ეს გვიჩვენებს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს საინტეგრო გზა, წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობას ექნება სახე:

$$F(x, y) = \overline{F(x, y)} + m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B} + p\mathfrak{C}, \tag{52}$$

სადაც m, n, p—სრულიად ნებისმიერი მთელი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვებია. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ სიდიდეებს ეწოდება წირითი ინტეგრალის პ ე რ ი ო დ ე ბ ი. ამგვარად ინტეგრალი არის x და y-ის ფუნქცია, რომელსაც აქვს უსასრულო მრავალი მნიშვნელობებისა, და ჩვენთვის ცხადია ამ მრავალმნიშვნელოვანების წარმოშობა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მას შემდეგ, რაც გატარებულია $a\alpha$, $b\beta$ და $c\gamma$ ჭრილები, ფუნქცია $F(x, y)$ იქნება A არეში სრულიად გარკვეული; მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ ჭრილის ორი უსასრულო მახლობელ წერტილში, რომლებიც ჭრილის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ, მაგალითად m და m'-ში, $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ ხვაობას აქვს სასრულო მნიშვნელობა. მართლაც, გვაქვს:

$$\mathfrak{A} = \int_{M_0}^{m} + \int_{m}^{m'} + \int_{m'}^{M_0}.$$

ეს ტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int_{M_0}^{m} = \int_{M_0}^{m'} + \mathfrak{A} + \int_{m'}^{m};$$

მაგრამ $\int_{m'}^{m}$ უსასრულოდ მცირეა, და ჩვენ გვრჩება

$$\overline{F(m)} - \overline{F(m')} = \mathfrak{A}.$$

ამგვარად, მთელი $a\alpha$ ჭრილის განგრძივ $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ სხვაობა მუდმივია და უდრის $\mathfrak{A}$-ს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი .—წირითი ინტეგრალს:

$$\int_{(1,\,0)}^{(x,\,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

აქვს ერთი კრიტიკული წერტილი კოორდინატთა სათავე. რომ მივიღოთ შესაბამი პერიოდი, ავიღოთ მოცემული ინტეგრალი $x^2 + y^2 = \rho^3$ წრეწირის განგრძივ, გვაქვს:

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad d\,xy - y\,dx = \rho^2\,d\omega,$$

და პერიოდი უდრის $\int\limits_0^{2\pi} d\omega = 2\pi$. ეს შედეგი ადვილი შესამოწმებელია, რადგან ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დგას arc tg $\frac{y}{x}$-დან სრული დიფერენციალი.

147. წინა შედეგების განზოგადოება. უკანასკნელ პარაგრაფების დასკვნები შეიძლება შეუცვლელად გავავრცელოთ წირითი ინტეგრალებზე სივრცეში

$$U = \int\limits_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{53}$$

ჩვენ აღვნიშნავთ P, Q და R-ით ფუნქციებს, რომლებიც არიან უწყვეტი თავიანთი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებით E არეში, შემოსაზღვრული ერთი კეტილი S ფართეულით. თავდაპირველად მოვძებნოთ, რა პირობებში ეს წირითი ინტეგრალი დამოკიდებულია საინტეგრო გზის მხოლოდ (x_0, y_0, z_0), და (x, y, z) ბოლოებისაგან, ან რაც იგივეა, გამოვარკვიოთ, თუ რა შემთხვევაში წირითი ინტეგრალი, აღებული რაიმე კეტილ Γ მრუდის განგრძივ, უდრის ნულს. სტოკსის ფორმულის მიხედვით (§ 132), ეს წირითი ინტეგრალი უდრის ზედაპირულ ინტეგრალს :

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx,$$

რომელიც გავრცელებულია რაიმე Σ ზედაპირზე, შემოსაზღვრული Γ კონტურით. იმისათვის რომ ეს ზედაპირული ინტეგრალი ყოველი Γ კონტურისათვის იყოს ნული, ცხადია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იყოს:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{54}$$

თუ ეს პირობები დაკმაყოფილებულია, მაშინ არსებობს x, y, z ცვლადების U ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი არის $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, და რომელიც არის ცალსახა სივრცის E ნაწილში. რომ მივიღოთ U ფუნქციის მნიშვნელობა რომელიმე წერტილში, შეიძლება ამოვირჩიოთ ინტეგრობის გზა სრულიად ნებისმიერი.

თუ P, Q და R ფუნქციები აკმაყოფილებენ (54) დამოკიდებულებას, მაგრამ ხდებიან უსასრულო E არის ერთი ან რამდენიმე წირის წერტილებზე, მაშინ მოგვეცემა § 146-ში მიღებულის ანალოგიური შედეგები.

მაგალითად, თუ P, Q და R ფუნქციებიდან ერთერთი გახდება უსასრულო კეტილი γ მრუდის ყველა წერტილზე, მაშინ U ინტეგრალს აქვს პერიოდი, რომელიც უდრის წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობას, აღებულს კეტილი კონტურის განგრძივ; ეს კონტური ჰკვეთს ერთ ხელ და მხოლოდ ერთხელ γ მრუდით შემოსაზღვრულ σ ფართეულს.

ზედაპირული ინტეგრალებისათვის შეგვიძლია აგრეთვე დავსვათ კითხვა, ანალოგიური ზემოთ გარჩეული წირითი ინტეგრალებისათვის. აღვნიშნოთ A, B და C-თი ფუნქციები, უწყვეტი თავისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად სივრცის E ნაწილში, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთი კეტილი S ფართეულით. ვთქვათ E ნაწილში, Σ არის რაიმე რთეული, შემოსაზღვრული ნებისმიერი სახის Γ კონტურით. ზედაპირული ინტეგრალი

$$J = \iint\limits_{\Sigma} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \tag{55}$$

დ მოკიდებულია საზოგადოდ თვით Σ ფართეულზე, და არა მარტო Γ კონტურზე. რომ ეს ინტეგრალი იყოს დამოკიდებული მხოლოდ Γ კონტურზე, აუცილებელია, რომ ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული ნებისმიერ კეტილ ფართეულზე, აღებული E-ს შიგნით, იყოს ნულის ტოლი. ეს პირობა შეიძლება უშუალოდ გამოვიყვანოთ გ რ ი ნ ი ს ფორმულიდან (§ 136). მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ ზემოთ მოყვანილი ორჯერადი ინტეგრალი, გავრცელებული რომელიმე კეტილ ფართეულზე, უდრის სამჯერად ინტეგრალს:

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

გავრცელებულს მოცულობაზე, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ ფართეულით. იმისათვის, რომ ყოველი მოცულობისათვის ეს უკანასკნელი ინტეგრალი იყოს ნულის ტოლი, ცხადია, აუცილებელია, რომ A, B და C ფუნქციები აკმაყოფილებდენ დამოკიდებულებას:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{56}$$

ამასთანავე ეს პირობა არის საკმარისიც.

ს ტ ო კ ს ი ს ფორმულა გვაძლევს საშუალებას ადვილად შევამოწმოთ ეს შედეგი. მართლაც, თუ მოცემულია სამი A, B და C ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებენ (56) დამოკიდებულებას, მაშინ უსასრულო მრავალი წესით შეგვიძლია მოვძებნოთ სამი ისეთი P, Q და R ფუნქცია, რომ იყოს

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C. \tag{57}$$

თუ ამ განტოლებებს აქვთ ერთი მაინც ამოხსნა, მაშინ მათ აქვთ უსასრულო მრავალი ამონახსნებისა, რადგან ისინი არ იცვლებიან, როცა შევცვლით P, Q და R-ს შესაბამად

$$P + \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad Q + \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad R + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\text{-ით,}$$

სადაც λ არის x, y, z ცვლადების ნებისმიერი ფუნქცია. დავუშვათ $R=0$; (57)-ის პირველი ორი დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ:

$$P = \int_{z_0}^{z} B(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y), \qquad Q = -\int_{z_0}^{z} A(x, y, z)\, dz + \psi(x, y),$$

სადაც $\varphi(x, y)$, და $\psi(x, y)$ არიან x და y ცვლადების ნებისმიერი ფუნქციები. შევიტანთ რა ამ მნიშვნელობებს უკანასკნელ (57) განტოლებაში, იგი წარმოგვიდგება ასეთი სახით:

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C(x, y, z),$$

ან, თუ მივიღებთ მხედველობაში (56) პირობას, გვექნება:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C(x, y, z_0).$$

ამგვარად, φ, ψ ფუნქციებიდან ერთერთი შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად.

ამნაირად მოვძებნით რა P, Q და R ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (57) განტოლებებს, თანახმად სტოკსის ფორმულისა ზედაპირული ინტეგრალი უდრის წირითი ინტეგრალს:

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz;$$

მაშასადამე, ის დამოკიდებულია მხოლოდ Γ კონტურზე.

სავარჯიშო მაგალითები

1. გამოთვალეთ მნიშვნელობა სამჯერადი ინტეგრალისა:

$$\int\int\int [5(x-y)^2 + 3az - 4a^2]\,dx\,dy\,dz,$$

გავრცელებული მოცულობაზე, რომელიც განსაზღვრულია უტოლობებით:

$$x^2+y^2-az<0, \quad x^2+y^2+z^2-2a^2<0.$$

2. გამოთვალეთ ფართობი ფართეულისა, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{a^2b^2(x^2+y^2)\,z}{a^2x^2+b^2y^2},$$

და ამ ფართეულით შემოსაზღვრული მოცულობა.

3. გამოიკვლიეთ თვისებები ფუნქციისა:

$$F(X, Y, Z) = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\,dz,$$

განხილული როგორც X, Y, Z-ის ფუნქცია. გაავრცელეთ ამ შემთხვევაზე § 115-ის დასკვნები.

4. გამოთვალეთ მოცულობა შემოსაზღვრული იმ ფართეულის ნაწილით, რომლის განტოლება არის:

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = 3a^3xyz,$$

და რომელიც მოთავსებულია სამწახნაგოვან კუთხეში $Oxyz$.

5. დაიყვანეთ მარტივ ინტეგრალზე ჯერადი ინტეგრალი:

$$\int\int\cdots\int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} F(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

გავრცელებული D არეზე, განზღვრული უტოლობებით:

$$0\leqslant x_1,\ 0\leqslant x_2, \ldots,\ 0\leqslant x_n,\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant a.$$

(აქ უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც § 147).

6. იგივე საკითხი ამოხსენით შემდეგი ჯერადი ინტეგრალისათვის:

$$\int\int\cdots\int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} F\left(\left[\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right] dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

რომელიც გავრცელებული D არეზე, განსაზღვრული უტოლობებით:

$$0\leqslant x_1,\ 0\leqslant x_2, \ldots,\ 0\leqslant x_n,\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n} \leqslant 1.$$

7. დაამტკიცეთ ფორმულა:

$$\int\int\int\dots\int dx_1\,dx_2\dots dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

სადაც ჯერადი ინტეგრალი გავრცელებულია D არეზე, განსაზღვრული უტოლობით:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1.$$

8. დაამტკიცეთ ფორმულა:

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} F(a\cos\theta + b\sin\theta\cos\varphi + c\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\,d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{+1} F(uR)\,du,$$

სადაც a, b, c არიან ნებისმიერი მუდმივები, ხოლო $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. [პუასონი]. აქ საჭიროა მიექცეს ყურადღება იმას, რომ მოცემული ორჯერადი ინტეგრალი წარმოადგენს ზედაპირულ ინტეგრალს, გავრცელებულს $x^2+y^2+z^2=1$ სფეროზე, და მივიღოთ ახალი xy სიბრტყეთ, $bx+cy+az=0$ სიბრტყე.

9. ვთქვათ $\rho=F(\theta, \varphi)$ არის კეტილი ფართეულის განტოლება პოლარ კოორდინატებში. დაამტკიცეთ, რომ ამ ფართეულით შემოსაზღვრული მოცულობა უდრის ორჯერად ინტეგრალს:

$$\frac{1}{3}\int\int \rho\cos\gamma\,d\sigma, \qquad (\alpha)$$

გავრცელებულს მთელს ფართეულზე, სადაც $d\sigma$ არის ფართეულის ელემენტი და γ არის კუთხე რადიუსს ვექტორსა და გარე ნორმალს შორის.

10. განვიხილოთ ელიფსოიდი, წარმოდგენილი განტოლებით:

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-b^2} + \frac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1.$$

განვსაზღვროთ მისი წერტილები ელიპსური ν და ρ კოორდინატებით, ე. ი. წინა განტოლების ფესვებით, რომელშიაც μ შეცვლილია უცნობით (იხილე § 141). § 133-ის ფორმულების გამოყენება ამ ელიფსოიდის მოცულობაზე მიგვიყვანს შემდეგ დამოკიდებულებაზე:

$$\int_0^b d\rho \int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\sqrt{(c^2-\rho^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)}}\,d\nu = \frac{1}{b}\pi c^2(c^2-b^2).$$

(α) ფორმულის გამოყენება (მაგალითი 9) გვაძლევს აგრეთვე:

$$\int_0^b d\rho \int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

[ლამე].

თ ა ვ ი VIII

წკრივები და უსასრულო ნამრავლნი

1. კრებადობის პირობები

148. ზოგადი შენიშვნა. ზემოთ (§ 5) ჩვენ შევეხეთ წკრივის კრებადობის ზოგად პირობებს. პრაქტიკულ საკითხებში, როცა უნდათ გამოარკვიონ მოცემული წკრივი კრებადია თუ განშლადი, ხშირად სარგებლობენ ისეთ პირობებით, რომლებიც ნაკლებად ზოგადია, მაგრამ უფრო მოხერხებულია მათი გამოყენება. ამათგან ჩვენ აქ მოვიყვანთ მხოლოდ ისეთებს, რომლებიც უფრო გავრცელებულია და საკმარისია პრაქტიკის უმეტეს საკითხებში. ჯერ გავაკეთოთ რამოდენიმე შენიშვნა, რომლებიც უშუალოთ გამომდინარეობს თვით კრებადობის განმარტებიდან.

1. თუ რომელიმე წკრივის ყველა წევრს გავამრავლებთ რაიმე ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივ a რიცხვზე, მაშინ ახალი წკრივი იქნება აგრეთვე კრებადი ან განშლადი პირველთან ერთად. თუ პირველი წკრივი კრებადია და მისი ჯამი არის S, მაშინ მეორე წკრივიც არის კრებადი და მისი ჯამი უდრის aS.

2. თუ გვაქვს ორი კრებადი წკრივი:

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{2}$$

რომელთა ჯამები არის სათანადოდ S და S', მაშინ წკრივი, რომელიც მიიღება ამ ორი წკრივის წევრობრივ შეკრებით

$$(u_0+v_0)+(u_1+v_1)+\cdots+(u_n+v_n)\cdots, \tag{3}$$

იქნება აგრეთვე კრებადი და მისი ჯამი ტოლია $S+S'$. ასეთივე შედეგს მივიღებთ თუ წევრობრივ შევკრებთ p კრებად წკრივს.

3. თუ შევცვლით წკრივის სასრულო რიცხვი წევრების მნიშვნელობებს, ამით მისი კრებადობა ან განშლადობა არ ირღვევა, რადგან ეს შეცვლა ეკვივალენტურია ყველა S_n ჯამის, დაწყებული საკმარისად დიდი n-დან, მუდმივი სიდიდით გადიდებისა ან შემცირების. კერძოდ წკრივი კრებადია ან განშლადი იმ წკრივთან ერთად, რომელიც მიიღება მისგან, პირველიდან დაწყებული, რამოდენიმე წევრების ჩამოშორებით.

4. ვთქვათ S არის კრებადი წკრივის ჯამი, S_n—მისი პირველი $n+1$ წევრის ჯამი, R_n კი u_{n+1} წევრიდან დაწყებული წკრივის ჯამი; თუ ჩვენ ავიღებთ S ის მიახლოებითი მნიშვნელობად S_n-ს (პირველი $n+1$ წევრის ჯამს), მაშინ შეცთომა, რომელსაც ჩვენ დავუშვებთ, ცხადია, უდრის R_n-ს რადგან S_n-ის ზღვარი, როცა n უსაზღვროთ იზრდება, არის S, ამიტომ R_n მიისწრაფის ნულისაკენ და ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლია ავიღოთ, ყოველ შემთხვევაში თეორიულად მაინც საკმარისად დიდი რიცხვი წევრებისა, რომ შეცთომა, რომელსაც ჩვენ დავუშვებთ S-ის S_n-ით შეცვლით, იყოს ნაკლები ყოველ წინასწარ მოცემულ რიცხვზე. საკმარისია ვიცოდეთ R_n-ის ზედა ზღვარი, რომ შესაძლო გახდეს მიღებული მიახლოების შეფასება. ცხადია, რომ ფაქტიური გამოთვლებისათვის, პრაქტიკაში ის წკრივებია გამოსადეგი, რომელთა R_n შედარებით სწრაფად უახლოვდება ნულს.

149. დადებით-წევრებიანი წკრივები. წკრივებს, რომელთა ყველა წევრი დადებითია, აქვთ დიდი მნიშვნელობა, და ჩვენ დავიწყებთ სწორედ მათი განხილვით. ყოველ ასეთ წკრივისათვის S_n ჯამი იზრდება n-თან ერთად; ამიტომ წკრივის კრებადობისათვის, საკმარისია რომ S_n ჯამი, ყოველი n-ისათვის, რაიმე გარკვეულ სიდიდეზე ნაკლები რჩებოდეს. უზოგადესი ხერხი წკრივის კრებადობის ან განშლადობის საკითხის გადასაწყვეტად მდგომარეობს მოცემულ წკრივის სხვა, წინასწარ შესწავლილ, წკრივთან შედარებაში. ეს ხერხი ეყრდნობა შემდეგ ორ დებულებას:

1. თუ რომელიმე დადებით წევრებიან წკრივის ყველა წევრი შესაბამად ნაკლებია ან ტოლი სხვა დადებით წევრებიან კრებად წკრივის წევრებზე, მაშინ პირველი წკრივიც აგრეთვე კრებადია.

მართლაც, მოცემულ წკრივის პირველი n წევრის S_n ჯამი, ცხადია მეორე წკრივის S' ჯამზე ნაკლებია; ამიტომ ამ ჯამს აქვს S'-ზე ნაკლები S ზღვარი.

2. თუ რომელიმე დადებით წევრებიან წკრივის ყველა წევრი შესაბამად მეტი ან ტოლია სხვა დადებით წევრებიან განშლად წკრივის წევრებზე, მაშინ პირველი წკრივიც აგრეთვე განშლადია.

მართლაც, პირველი წკრივის პირველი n წევრის ჯამი მეტია ან ტოლი მეორე წკრივის პირველი n წევრის ჯამზე, და, მაშასადამე, ის უსაზღვროდ იზრდება n-თან ერთად.

შესაძლებელია აგრეთვე ორი წკრივის შედარება შემდეგ ლემაზე დამყარებულ ხერხით. ვთქვათ

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{U}$$

$$v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots, \tag{V}$$

არის ორი დადებით-წევრებიანი წკრივი. თუ (U) წკრივი კრებადია, და რომელიმე n რიგიდან მოყოლებული მუდამ

ადგილი აქვს პირობას: $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, მაშინ (V) წკრივიც აგრეთვე კრებადია. ხოლო თუ (U) წკრივი განშლადია და დაწყებული რომელიმე n რიგიდან მუდამ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, მაშინ (V) წკრივიც აგრეთვე განშლადია.

დებულების პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$ უტოლობა დაცულია, როდესაც $n \geqslant p$. ვინაიდან, წკრივის ყველა წევრის გამრავლებით რაიმე მუდმივ მამრავლზე, ჩვენ არ შევცვლით არც წკრივის კრებადობას და არც ორ მიმდევარ წევრის ურთიერთ ფარდობას, ამიტომ შეგვიძლიან ვიგულისხმოთ, რომ $v_p < u_p$; მაშინ, ცხადია, გვექნება: $v_{p+1} < u_{p+1}$, $v_{p+2} < u_{p+2}$ და ა. შ. მაშასადამე (V) წკრივი — კრებადია. ასეთივე ხერხით მტკიცდება ლემის მეორე ნაწილიც.

ამგვარად, თუ მოცემულია დადებითწევრებიანი წკრივი, რომლის ხასიათი მისი კრებადობის მხრივ ცნობილია, ჩვენ შეგვიძლიან, ვისარგებლებთ რა წინა დებულებებით, შევადაროთ მას სხვა დადებითწევრებიანი წკრივები; იმისდამიხედვით, შევადარებთ თვით წევრებს ან მხოლოდ ფარდობებს ორ მიმდევარ წევრებისას, ჩვენ მივიღებთ ორ დებულებას, რომლებიც ზოგიერთ შემთხვევაში მოგვცემენ საშუალებას დავრწმუნდეთ მეორე წკრივის კრებადობაში ან განშლადობაში.

150. კოშისა და დალამბერის კრებადობის პირობები. უმარტივესი წკრივი, რომლითაც შეგვიძლიან ვისარგებლოთ მასთან სხვა წკრივების შესადარებლად არის გეომეტრიული პროგრესია, რომლის მნიშვნელი იყოს r; ეს პროგრესია კრებადია, როდესაც $r<1$, და განშლადია თუ $r>1$. დადებითწევრებიან წკრივების შედარება გეომეტრიულ პროგრესიასთან მიგვიყვანს შემდეგ კრებადობის პირობამდე, რომელიც კოშის ეკუთვნის:

თუ დადებითწევრებიან წკრივში $\sqrt[n]{u_n}$ სიდიდე გარკვეული წევრიდან დაწყებული, მუდამ ნაკლებია ერთ გარკვეულ ერთზე ნაკლებ რიცხვზე, მაშინ წკრივი კრებადია; ხოლო თუ $\sqrt[n]{u_n}$, დაწყებული რომელიმე გარკვეული წევრიდან, მუდამ ერთზე მეტი რჩება, მაშინ წკრივი განშლადია.

მართლაც, პირველ შემთხვევაში გვაქვს $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, და, მაშასადამე, $u_n < k^n$. ამნაირად გარკვეული წევრიდან დაწყებული, წკრივის ყველა შემდგომი წევრი ნაკლებია ერთზე ნაკლებ k მნიშვნელიან გეომეტრიულ პროგრესიის წევრებზე.

მეორე შემთხვევაში, პირიქით, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, ე. ი. $u_n > 1$; მაშასადამე, წკრივის ზოგადი წევრი ნულთან არ მიისწრაფის.

წინა პირობა გამოიყენება მუდამ, როდესაც $\sqrt[n]{u_n}$ მიისწრაფის ზღვართან; ამ შემთხვევაში ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ დებულებას:

თუ, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, $\sqrt[n]{u_n}$ მიისწრაფის გარკვეულ l ზღვარისაკენ, მაშინ წკრივი კრებადია, როდესაც l ნაკლებია ერთზე, ხოლო განშლადი, თუ l მეტია ერთზე.

როდესაც $l=1$, წკრივის ხასიათი გაურკვეველი რჩება, გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც $\sqrt[n]{u_n}$ მიისწრაფის ერთისაკენ ისე, რომ რჩება მუდამ ერთზე მეტი: ამ შემთხვევაში წკრივი განშლადია.

სრულიად ასევე, თუ შევადარებთ დადებითწევრებიან წკრივის ორ მიმდევარ წევრთა ფარდობას გეომეტრიულ პროგრესიის ორ მიმდევარ წევრთა ფარდობასთან, ვღებულობთ დალამბერის კრებადობის პირობას:

თუ დადებითწევრებიან წკრივში, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, ყოველი წევრის მის წინამავალთან ფარდობა რჩება ნაკლები გარკვეულ რიცხვზე, რომელიც თვითონ ერთზე ნაკლებია, მაშინ წკრივი კრებადია. თუ ეს ფარდობა, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, მეტია ერთზე, მაშინ წკრივი განშლადია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ მაჩვენებლის უსაზღვროდ ზრდასთან ერთად $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა მიისწრაფის l ზღვართან, წკრივი კრებადია, როდესაც $l<1$, და იგი განშლადია, თუ $l>1$. ერთად ერთი საეჭვო შემთხვევა არის ის, როდესაც $l=1$; მაგრამ თუ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ მიისწრაფის ერთისაკენ ისე, რომ მუდამ ერთზე მეტი რჩება, მაშინ წკრივი უეჭველად განშლადია.

151. შენიშვნები. I. კოშის კრებადობის პირობა გამოიყენება უფრო ფართო შემთხვევებში ვიდრე დალამბერის კრებადობის პირობა. მართლაც, ვთქვათ რომ მოცემული წკრივის წევრები, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, ნაკლები არიან ვიდრე რაიმე კლებად გეომეტრიულ პროგრესიის წევრები, ე. ი. რომ, როდესაც n გარკვეულ p რიცხვზე მეტია, წკრივის ზოგადი u_n წევრი ნაკლებია ვიდრე Ar^n, სადაც A მუდმივია და r ნაკლები ერთზე. ასეთი წკრივი, § 150-ის თანახმად, კრებადი იქნება. ამ შემთხვევაში $\sqrt[n]{u_n}<rA^{\frac{1}{n}}$, და n ის უსაზღვროდ ზრდის დროს უტოლობის მარცხენა მხარეს აქვს r ზღვარი. ამრიგად, თუ აღვნიშნავთ k-თი მუდმივ რიცხვს, მოთავსებულს r-ისა და 1-ის შორის, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, გვექნება $\sqrt[n]{u_n}<k$. მაშასადამე, კოშის კრებადობის ნიშანი აქ მუდამ გამოიყენება, მაშინ როდესაც შესაძლებელია მოხდეს, რომ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა ღებულობდეს ერთზე დიდ მნიშვნელობებს, რაგინდ შორს არ უნდა წავიდეთ მოცემულ წკრივში. ავიღოთ, მაგალითად, წკრივი

$$1+r|\sin\alpha|+r^2|\sin 2\alpha|+\ldots+r^n|\sin n\alpha|+\ldots,$$

სადაც $r<1$, და α რაიმე მუდმივია. გვაქვს $\sqrt[n]{u_n}=r\sqrt[n]{|\sin n\alpha|}<r$, მაშინ როდესაც

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=r\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\right|$$

ფარდობას n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს შეუძლია უსასრულოდ ბევრჯერ მიიღოს ერთზე დიდი მნიშვნელობა.

მიუხედავად ამისა სასარგებლოა შევინარჩუნოთ დალამბერის კრებადობის პირობაც, რომლით სარგებლობა ხშირად უფრო მოსახერხებელია ვიდრე კოშის კრებადობის პირობით. ასე, მაგალითად,

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{x^n}{1\,.\,2\ldots n}+\ldots$$

წკრივისათვის ნებისმიერი წევრის მის წინამავალთან ფარდობა, რომელიც უდრის $\frac{x}{n+1}$, n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს მიისწრაფის ნულთან, მაშინ როდესაც უშუალოდ არ ჩანს, რა მნიშვნელობებს ღებულობს $\sqrt[n]{u_n}=\frac{x}{\sqrt[n]{1\,.\,2\ldots n}}$ n-ის დიდ მნიშვნელობათათვის.

II. თუ, ერთ-ერთ მოყვანილ წესთაგანის გამოყენებით, ჩვენ ვნახეთ, რომ დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, წკრივის ყველა წევრი შესაბამად ნაკლებია ვიდრე

$$A,\ Ar,\ Ar^2,\ldots,Ar^n,\ldots,$$

კლებად გეომეტრიულ პროგრესიის წევრები, ადვილია პოვნა იმ ცთომილების საზღვარისა, რომელიც მიიღება წკრივის ჯამის მისი m პირველი წევრის ჯამით შეცვლით; ცხადია, ეს ცთომილება ნაკლებია, ვიდრე შემდეგი გეომეტრიულ პროგრესიის ჯამი:

$$Ar^m+A_r^{m+1}+Ar^{m+2}+\ldots=\frac{Ar^m}{1-r}.$$

III. შევნიშნოთ, რომ თუ ორივე $\sqrt[n]{u_n}$ და $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ გამოთქმას აქვს ზღვრები, ეს ზღვრები აუცილებლად ერთმანეთის ტოლია. მართლაც, განვიხილოთ დამხმარე წკრივი:

$$u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots, \tag{4}$$

სადაც x იგულისხმება დადებითი. ამ წკრივში ნებისმიერი წევრის წინამავალთან ფარდობას აქვს ზღვრად lx, სადაც l არის $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობის ზღვარი; მაშასადამე, მე-(4) წკრივი კრებადია, როდესაც $x<\frac{1}{l}$, ხოლო იგი განშლადია, როდესაც $x>\frac{1}{l}$. სრულიად ასევე, თუ $\sqrt[n]{u_n}$ გამოთქმის ზღვარი არის l', მაშინ $\sqrt[n]{u_n x^n}$ გამოთქმას აქვს ზღვრად $l'x$, ისე რომ მე-(4) წკრივი იქნება კრებადი, როდესაც $x<\frac{1}{l'}$ და განშლადი, როდესაც $x>\frac{1}{l'}$. რომ ეს ორი კრებადობის პირობა ერთიმეორეს არ ეწინააღმდეგებოდეს, ცხადია, აუცილებლად უნდა იყოს $l=l'$; თუ, მაგალითად, დავუშვებთ რომ $l>l'$, მაშინ ყოველივე x რიცხვისათვის, რომელიც მოთავსებულია $\frac{1}{l}$ და $\frac{1}{l'}$ შორის, კოშის კრებადობის პირობის თანახმად მე-(4) წკრივი კრებადი იქნებოდა, ხოლო დალამბერის პირობის თანახმად განშლადი.

IV. შეიძლება იმის ჩვენება, რომ თუ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა მიისწრაფის l ზღვარისაკენ, იმავე ზღვარისაკენ მიისწრაფის აგრეთვე $\sqrt[n]{u_n}$-იც[1]. მართლაც, დავუშვათ რომ,დაწყებული გარკვეუ-

[1] Cauchy, Cours d' Analyse.

ლი წევრიდან ყველა

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},\ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},\ldots,\ \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

ფარდობა მოთავსებულია $l-\varepsilon$ და $l+\varepsilon$ შორის, სადაც ε გარკვეული დადებითი რიცხვია, რომელიც ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ნებისმიერად მცირედ, თუ მხოლოდ n აღებულია საკმარისად დიდი. ჩვენ გვექნება:

$$(l-\varepsilon)^p<\frac{u_{n+p}}{u_n}<(l+\varepsilon)^p,$$

ანუ

$$u_n^{\frac{1}{n+p}}(l-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}<\sqrt[n+p]{u_{n+p}}<u_n^{\frac{1}{n+p}}(l+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}.$$

თუ n ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას, ხოლო p უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ უკანასკნელი ორმაგი უტოლობის კიდური წევრები მიისწრაფის შესაბამად $l-\varepsilon$ და $l+\varepsilon$-თან. ამნაირად, ყოველ საკმაოდ დიდ m—თვის:

$$l-2\varepsilon<\sqrt[m]{u_m}<l+2\varepsilon\,[1],$$

ვინაიდან ε ნებისმიერია, აქედან გამომდინარეობს რომ $\sqrt[m]{u_m}$-ს ზღვრად აქვს l რიცხვი.

უნდა შევნიშნოთ, რომ უკუღმა დებულებას არ ექნება ადგილი. ავიღოთ, მაგალითად, მიმდევრობა:

$$1,\ a,\ ab,\ a^2b,\ a^2b^2,\ldots,a^nb^{n-1},\ a^nb^n,\ldots,$$

სადაც a და b ორი სხვადასხვა რიცხვია. $\sqrt[n]{u_n}$ გამოთქმას, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს ზღვრად აქვს ab, მაშინ როდესაც ნიბისმიერი წევრის წინამავალთან ფარდობა თანმიმდევრობით უდრის a-ს ან b-ს.

წინა დებულება სასარგებლოა ზოგიერთ განუზღვრელ სახის მქონე გამოთქმების ზღვრების მოძებნის დროს. მაგალითად, ამ დებულების შედეგი არის ის რომ $\sqrt[n]{1.2\ldots n}$ უსაზღვროდ იზრდება n-თან ერთად, რადგანაც $\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-1)}$ ფარდობა იზრდება უსაზღვროდ. ასევე შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $\sqrt[n]{n}$ და $\sqrt[n]{\ln n}$ გამოთქმებს ზღვარად აქვს ერთი.

152. ზღვართა შორის უდიდესის გამოყენება. *კოშიმ* წარმოადგინა წინა დებულება უფრო ზოგადი სახით. ვთქვათ a_n არის დადებითწევრებიანი წკრივის ზოგადი წევრი. განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$a_1,\quad a_2^{\frac{1}{2}},\ a_3^{\frac{1}{3}},\ldots,a_n^{\frac{1}{n}},\ldots,\tag{5}$$

თუ ამ მიმდევრობის წევრებს არა აქვთ ზედა საზღვარი, მაშინ a_n ზოგადი წევრი ნულთან არ მიისწრაფის და შესაბამისი წკრივი განშლადია. დავუშვათ რომ მე-(5) მიმდევრობის ყველა წევრი ნაკლებია რომელიღაც გარკვეულ რიცხვზე, და ვთქვათ, რომ ამ შემთხვევაში ω არის უდიდესი ამ მიმდევრობის წევრთა ზღვრებს შორის.

Σa_n წკრივი არის კრებადი, თუ ω ნაკლებია ერთზე და განშლადი, თუ ω მეტია ერთზე.

---

[1] n-ის საკმარისად დიდ მნიშვნელობისათვის, წინა უტოლობის კიდური წევრები განსხვავდებიან თავის ზღვრებისაგან ε-ზე მცირე სიდიდით.

დებულების პირველი ნაწილის დამტკიცებისათვის, აღვნიშნოთ $1-\alpha$-თი რომელიმე გარკვეული რიცხვი მოთავსებული ω-სა და 1-ის შორის. ზღვართა შორის უდიდესის თვით განმარტების თანახმად (§ 4), არსებობს მე-(5) მიმდევრობის წევრთა მხოლოდ სასრული რიცხვი, რომელნიც მეტია $1-\alpha$-ზე; მაშასადამე, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი მთელი p რიცხვი, რომ n-ის ყოველ ისეთ მნიშვნელობისათვის, რომელიც მეტია p-ზე, გვექნეს $\sqrt[n]{a_n} < 1-\alpha$; ამიტომ, Σa_n წკრივი იქნება კრებადი. პირიქით, თუ $\omega>1$, არსებობს მე-(5) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლე, რომელთაგან ყოველი მეტია ვიდრე $1+\alpha$, სადაც $1+\alpha$ არის რომელიმე, 1-სა და ω-ს შორისი მყოფი რიცხვი, და, ამნაირად, არსებობს n მაჩვენებლის ისეთ მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, რომელთათვისაც $a_n>1$; ამრიგათ Σa_n წკრივი განშლადია. საეჭვო შემთხვევად რჩება მხოლოდ ის, როდესაც $\omega=1$.

153. კოშის თეორემა. როდესაც $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ანდა $\sqrt[n]{u_n}$ მიისწრაფის ერთისაკენ, მაგრამ არ რჩება მუდამ ერთზე მეტი, მაშინ დალამბერის და კოშის პირობების დახმარებით შეუძლებელია გავიგოთ კრებადია თუ განშლადი მოცემული წკრივი. ამ შემთხვევაში უნდა შევადაროთ მოცემული წკრივი სხვა იმავე თვისებით აღჭურვილ წკრივებს, რომელთა ხასიათი ცნობილია. შემდეგი დებულება, რომელიც *კოშიმ* გამოიყვანა განსაზღვრული ინტეგრალების განხილვიდან, იძლევა საშუალებას გადავწყვიტოთ საკითხი წკრივის ხასიათის შესახებ ბევრ იმ შემთხვევაში, როდესაც დალამბერის და კოშის პირობების გამოყენება არ იძლევა გარკვეულ შედეგს.

ვთქვათ $\varphi(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც x ცვლადის გარკვეულ a მნიშვნელობიდან დაწყებული, დადებითია, მუდამ კლებულობს და x-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს მიისწრაფის ნულისაკენ. $y=\varphi(x)$ მრუდს აქვს x ღერძი თავის ასიმპტოტად; განსაზღვრული ინტეგრალი $\int\limits_a^l \varphi(x)\,dx$ l-ის უსასრულოდ ზრდის დროს შეიძლება მიასწრაფოდეს სასრულო ზღვართან ან უსასრულოდ იზრდებოდეს. კოშის თეორემა იმაში მდგომარეობს, რომ *წკრივი*:

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+n)+\cdots \tag{6}$$

არის კრებადი, თუ წინა ინტეგრალი მიისწრაფის ზღვარისაკენ, და განშლადია წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მართლაც, დავუშვათ, რომ x იმყოფება $a+p-1$ და $a+p$ შორის, სადაც p დადებითი მთელი რიცხვია, უტოლობიდან:

$$\varphi(a+p-1)>\varphi(x)>\varphi(a+p),$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრობას $a+p-1$ და $a+p$ ზღვრებს შორის, ჩვენ მივიღებთ:

$$\varphi(a+p-1)>\int\limits_{a+p-1}^{a+p}\varphi(x)\,dx>\varphi(a+p)$$

თუ დავუშვებთ, თანდათანობით რომ $p=1, 2, \ldots n$ და შევკრებთ მიღებულ უტოლობებს, გვექნება:

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n-1)>\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx,$$

$$\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\ldots+\varphi(a+n)<\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx$$

ამგვარად, თუ l-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ მიისწრაფის გარკვეულ L ზღვარისაკენ, მაშინ ჯამიც

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n),$$

რჩება მუდამ ნაკლები $\varphi(a)+L$-ზე და მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ; მაშასადამე, მე-(6) წკრივი არის კრებადი. პირიქით, თუ $\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx$ უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)$$

ჯამიც, პირველი უტოლობის თანახმად, აგრეთვე უსაზღვროდ იზრდება და, მაშასადამე, მე-(6) წკრივი არის განშლადი.

ავიღოთ, მაგალითად, $\varphi(x)=\frac{1}{x^{\mu}}$, სადაც μ დადებითია და $a=1$. ცხადია, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია ყველა წინა პირობებს აკმაყოფილებს; გარდა ამისა, $\int_1^l \frac{dx}{x^{\mu}}$ ინტეგრალი l-ის უსაზღვრო ზრდის დროს მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ მიისწრაფის ზღვართან, როდესაც μ მეტია ერთზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ წკრივი:

$$\frac{1}{1^{\mu}}+\frac{1}{2^{\mu}}+\frac{1}{3^{\mu}}+\ldots+\frac{1}{n^{\mu}}+\ldots$$

არის კრებადი, თუ $\mu>1$ და განშლადი, თუ $\mu\leqslant 1$.

ავიღოთ კიდევ $\varphi(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\mu}}$, სადაც μ დადებითია, ხოლო $\ln x$ ნიშნავს ნეპერის ლოგარითმს, და მივიღოთ $a=2$. თუ დავუშვებთ, რომ $\mu\neq 1$, გვექნება:

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{\mu}}=\frac{-1}{\mu-1}\left[(\ln n)^{1-\mu}-(\ln 2)^{1-\mu}\right].$$

მარჯვენა მხარეს აქვს სასრული ზღვარი, როცა $\mu>1$, ხოლო იგი უსაზღვროდ იზრდება n-თან ერთად, როცა $\mu<1$; გარდა ამისა ადვილად დავრწმუნდებით, რომ როდესაც $\mu=1$ ინტეგრალი აგრეთვე უსაზღვროდ იზრდება. მაშასადამე, წკრივი:

$$\frac{1}{2(\ln 2)^{\mu}}+\frac{1}{3(\ln 3)^{\mu}}+\cdots+\frac{1}{n(\ln n)^{\mu}}+\cdots$$

არის კრებადი, როცა $\mu>1$, ხოლო განშლადი, როცა $\mu\leqslant 1$.

საზოგადოდ, წკრივი, რომლის ზოგადი წევრი არის:

$$\frac{1}{n\ln n\ln^{2} n\ln^{3} n\cdots\ln^{p-1} n\,(\ln^{p} n)^{\mu}}$$

კრებადია, როცა $\mu>1$, და განშლადი, როცა $\mu\leqslant 1$. წინა გამოთქმაში $\ln^2 n, \ln^3 n, \ldots$ აღნიშვნები შემოღებულია სიმოკლისათვის, $\ln\ln n, \ln\ln\ln n, \ldots$ გამოსახვების ნაცვლად. აქ, რასაკვირველია, n მთელ რიცხვს ეძლევა იმდენად დიდი მნიშვნელობები, რომ $\ln n, \ln^2 n, \ln^3 n, \ldots, \ln^p n$ იყოს დადებითი, და იგულისხმება, რომ წკრივის წევრები, რომელნიც ამ პირობას არ აკმაყოფილებენ, ე. ი. n-ის უფრო ნაკლებ მნიშვნელობების შესაბამისი წევრები, შეცვლილია ნულებით. დამტკიცება აქ იგივეა რაც წინა წკრივებისათვის; მაგალითად, თუ $\mu\neq 1$, მაშინ ფუნქცია:

$$\frac{1}{x\ln x\ln^{2} x\cdots(\ln^{p} x)^{\mu}}$$

წარმოადგენს $\frac{1}{1-\mu}(\ln^{p} x)^{1-\mu}$ გამოსახვის წარმოებულს, ხოლო ეს გამოსახვა x-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს მხოლოდ მაშინ მიისწრაფის სასრული ზღვართან როდესაც $\mu>1$.

კოშის თეორემას აქვს აგრეთვე სხვაგვარი გამოყენებაც. დავუშვათ რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ყველა ზემოთ ნაჩვენებ პირობას. განვიხილოთ ჯამი:

$$\varphi(n)+\varphi(n+1)+\cdots+\varphi(n+p), \tag{7}$$

სადაც n და p ორი მთელი რიცხვია, რომელნიც უსასრულოდ იზრდება. თუ წკრივი, რომლის ზოგადი წევრი არის $\varphi(n)$, კრებადია, მაშინ განსახილავი ჯამის ზღვარი არის ნული, ვინაიდან ის S_{n+p+1} და S_n ჯამების სხვაობას უდრის, ხოლო ორივე უკანასკნელნი მიისწრაფის წკრივის S ჯამისაკენ. თუ კი წკრივი განშლადია, ჩვენ არ შეგვიძლია წინა ჯამზე არავითარი ზოგადი დასკვნის გაკეთება. ვისარგებლებთ რა ამ პარაგრაფში მოცემულ გეომეტრიული წარმოდგენით მივალთ შემდეგ ორმაგ უტოლობამდე:

$$\int_{n}^{n+p}\varphi(x)\,dx<\varphi(n)+\varphi(n+1)+\cdots+\varphi(n+p)<\varphi(n)+\int_{n}^{n+p}\varphi(x)\,dx.$$

ვინაიდან, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, $\varphi(n)$ მიისწრაფის ნულთან, განსახილავი ჯამის ზღვარი უდრის $\int_{n}^{n+p}\varphi(x)\,dx$ ინტეგრალის ზღვარს და დამოკიდებულია იმაზე თუ რა კანონით იზრდება n და p რიცხვები.

მაგალითად, რომ მივიღოთ ჯამის:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n+p}$$

ზღვარი, საკმარისია ვიპოვოთ განსაზღვრული ინტეგრალის $\int\limits_{n}^{n+p}\frac{dx}{x}=\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)$ ზღვარი.

ცხადია, რომ ამ ინტეგრალს აქვს ზღვარი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც აქვს ზღვარი $\frac{p}{n}$ ფარდობას; თუ ამ ფარდობის ზღვარი არის α, მაშინ, როგორც ეს უკვე ზემოთ იყო დამტკიცებული (§ 18), წინა მწკრივის ჯამს ზღვრად აქვს $\ln(1+\alpha)$.

სრულიად ასევე, რომ მივიღოთ

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}$$

ჯამის ზღვარი, საკმარისია ვიპოვოთ შემდეგი ინტეგრალის ზღვარი:

$$\int\limits_{n}^{n+p}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\left(\sqrt{n+p}-\sqrt{n}\right).$$

რომ უკანასკნელ გამოთქმას ექნეს ზღვარი, აუცილებელია რომ $\frac{p}{\sqrt{n}}$ ფარდობასაც ჰქონდეს რაიმე α ზღვარი. ამ შემთხვევაში, წარმოვადგენთ რა წინა გამოთქმას შემდეგი სახით:

$$2\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}=2\frac{\frac{p}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{p}{n}}}$$

ვნახავთ, რომ მისი ზღვარი უდრის იმავე α-ს.

154. ლოგარითმული პირობები. გამოვიდა რა მწკრივიდან (§ 153):

$$\frac{1}{1^{\mu}}+\frac{1}{2^{\mu}}+\ldots+\frac{1}{n^{\mu}}+\ldots,$$

კოშიმ მივიდა კრებადობის სხვა პირობამდე, რომელიც $\sqrt[n]{u_n}$-ის განხილვაზე დამყარებულ პირობის სრულიად ანალოგიურია.

თუ $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$ ფარდობა, დაწყებული რომელიმე წევრიდან, მუდამ მეტია რაიმე, ერთზე მეტ რიცხვზე, მაშინ მწკრივი არის კრებადი. თუ კი $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$ ფარდობა მუდამ ნაკლებია ერთზე, მაშინ მწკრივი არის განშლადი.

თუ n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს $\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$ ფარდობა მიისწრაფის l ზღვრისაკენ, მაშინ წკრივი არის კრებადი, როდესაც $l>1$ და განშლადი, როდესაც $l<1$. შემთხვევა როდესაც $l=1$ არის საეჭვო.

დებულების პირველი ნაწილის დამტკიცებისათვის, შევნიშნოთ რომ

$$\ln \frac{1}{u_n} > k \ln n$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{1}{u_n} > n^k,$$

ანუ

$$u_n < \frac{1}{n^k};$$

ვინაიდან $k>1$, ამიტომ მოცემული წკრივი არის კრებადი

სრულიად ასევე, თუ

$$\ln \frac{1}{u_n} < \ln n,$$

მაშინ ვღებულობთ $u_n > \frac{1}{n}$, და, მაშასადამე, წკრივი იქნება განშლადი.

ამ პირობის თანახმად შეგვიძლიან ვთქვათ, რომ წკრივი კრებადი იქნება ყოველთვის, როდესაც დაწყებული რაიმე გარკვეული ადგილიდან ამ წკრივის წევრები ნაკლები არიან შესაბამისად შემდეგი წკრივის:

$$\frac{A}{1^\mu} + \frac{A}{2^\mu} + \cdots + \frac{A}{n^\mu} + \cdots,$$

წევრებზე, სადაც A მუდმივია, და $\mu>1$. მართლაც, თუ

$$u_n < \frac{A}{n^\mu},$$

მაშინ

$$\ln u_n + \mu \ln n < \ln A,$$

ანუ

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} > \mu - \frac{\ln A}{\ln n}.$$

მაგრამ, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, მარჯვენა მხარეს აქვს ზღვრად μ. მაშასადამე, თუ აღვნიშნავთ k-თი 1-სა და μ-ს შორის მოთავსებულ რიცხვს, დაწყებული გარკვეულ წევრიდან, გვექნება:

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} > k.$$

ა სეთნაირადვე, თუ ვისარგებლებთ შესადარებლად შემდეგი წკრივებით:

$$\sum \frac{1}{n (\ln n)^\mu}, \sum \frac{1}{n \ln n (\ln^2 n)^\mu}, \ldots,$$

მივიღებთ კრებადობის პირობების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც ყველა მიიღება წინაპირობიდან, თუ წინა თეორემაში შევცვლით $\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$ გამოსახვას $\frac{\ln \frac{1}{nu_n}}{\ln^2 n}$ გამოსახვით, და შემდეგ $\frac{\ln \frac{1}{nu_n \ln n}}{\ln^3 n}$-ით და ა. შ.[1] ეს ნიშნები გამოიყენება უფრო ფართო შემთხვევებში; მართლაც, ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ თუ ერთ-ერთი ამ პირობათაგანის გამოყენებით შესაძლოა მოცემულ წკრივის კრებადობის ან განშლადობის გამორკვევა, იგივე შედეგს მოგვცემს ყველა შემდგომი პირობაც. მაგრამ შესაძლებელია ისიც, რომ რამდენიც ამგვარი ნიშანი არ უნდა გამოვიყენოთ, ჩვენ ვერასოდეს ვერ გადავწყვეტთ მოცემულ წკრივის კრებადობის საკითხს. მართლაც, დ ი უ ბ უ ა რ ე ი მ ო ნ მ ა (du Bois—Reymond)[2] და პ რ ი ნ გ ს ჰ ე ი მ მ ა (Pringsheim)[3] შეადგინეს როგორც კრებადი ისე განშლადი წკრივები, რომელთათვისაც ლოგარითმული პირობები არ გამოიყენება. თეორიულად ეს შედეგი წარმოადგენს დიდ ინტერესს, მაგრამ ცხადია, რომ ასეთი წკრივები ძალიან ნელა იკრიფება და, არა აქვთ დიდი მნიშვნელობა გამოთვლებში[4].

155. რაბეს და დიუჰამელის პირობები. გამოვიდეთ იმავე წკრივებიდან, მაგრამ შევადაროთ არა თვით წევრები წკრივებისა, არამედ ორი მიმდევნო წევრის ფარდობა, მაშინ შეიძლება მივიღოთ კრებადობის სხვა ნიშნები, თუმცა უფრო ნაკლებად ზოგადი, ვიდრე წინამავალი, მაგრამ ხშირად პრაქტიკაში უფრო გამოსაყენებელი. ვთქვათ, მაგალითად,

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

ისეთი დადებითწევრებიანი წკრივია, რომლისათვისაც $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა მიისწრაფის ერთისაკენ და ამავე დროს მუდამ ნაკლები რჩება ერთზე. ეს შეიძლება გამოისახოს ტოლობით:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n},$$

სადაც დადებითი α_n რიცხვი მიისწრაფის ნულთან n რიცხვის უსაზღვრო ზრდის დროს. ამ ფარდობის შედარება $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$ გამოსახვასთან მიგვიყვანს შემდეგ კრე-

---

[1] იხ. Bertrand, Traité de Calcul différentiel et intégral, ტ. I. გვ. 238; *Journal de Liouville*, 1-ლი სერია, ტ. VII, გვ. 35.

[2] Über Convergenz von Reihen (*Crelle's Journal*, ტ. 76, გვ. 835; 1873).

[3] Allgemeine Theorie der Divergenz ... (*Mathematische Annalen*, ტ. 25; 1890).

[4] დ ი უ ბ უ ა — რ ე ი მ ო ნ ი ს მიერ მოცემულ, ერთ-ერთ კრებად წკრივის მაგალითში, წკრივის ჯამის მხოლოდ ნახევარის მისაღებადაც კი, საჭიროა, როგორც ავტორი გვიჩვენებს გამოვითვალოთ ჯამი წევრთა ისეთი რიცხვის, როგორიც არის კუბიკურ მილიმეტრებში გაგოსახული დედამიწის მოცულობა.

ბადობის პირობამდე, რომელიც მიღებულია ჯერ რაბესა (Raabe)[1] და შემდეგ დიუჰამელის (Duhamel)[2] მიერ.

თუ მოცემულ წკრივისათვის $n\alpha_n$ ნამრავლი, გარკვეული წევრიდან დაწყებული, მუდამ მეტია ვიდრე ერთზე მეტი რომელიმე გარკვეული რიცხვი, მაშინ წკრივი არის კრებადი. თუ ეს ნამრავლი, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, მუდამ ნაკლებია ერთზე, მაშინ წკრივი არის განშლადი.

დებულების მეორე ნაწილი ცხადია თავისთავად. მართლაც, თუ, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, $n\alpha_n<1$, მაშინ

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{n}{n+1};$$

და ამნაირად, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა მეტია ვიდრე ჰარმონიულ წკრივის ორ მიმდევარ წევრის ფარდობა, და მაშასადამე, წკრივი არის განშლადი.

დებულების პირველი ნაწილის დამტკიცებისათვის ვიგულისხმოთ, რომ დაწყებული გარკვეული წევრიდან მუდამ $n\alpha_n>k>1$. ვთქვათ μ არის 1-სა და k-ს შორის მოთავსებული რიცხვი, $1<\mu<k$. წკრივი უეჭველად იქნება კრებადი, თუ, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა იქნება ნაკლები ვიდრე $n^{-\mu}$ ზოგადწევრიან წკრივის ორ მიმდევარ წევრის $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$ ფარდობა. ამისათვის უნდა დაცული იყოს შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{1}{1+\alpha_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}}; \tag{8}$$

დავშლით რა $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ გამოსახვას ტეილორის ფორმულის მიხედვით და დავკმაყოფილდებით სამი წევრით, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მე-(8) უტოლობა შემდეგი სახით:

$$1+\frac{\mu}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2} < 1+\alpha_n,$$

სადაც n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს λ_n მუდამ რჩება ნაკლები, ვიდრე რაღაც გარკვეული რიცხვი. უკანასკნელი უტოლობა გვაძლევს:

$$\mu+\frac{\lambda_n}{n} < n\alpha_n.$$

n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს მარცხენა მხარის ზღვარი არის μ; მაშასადამე, დაწყებული n-ის საკმარისად დიდ მნიშვნელობიდან, ეს მარცხენა მხა-

[1] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, ტ. X; 1832.

[2] *Journal de Liouville*, ტ. IV; 1838.

რე მუდამ ნაკლები იქნება ვიდრე $n\alpha_n$; აქედან გამომდინარეობს მე-(8) უტოლობა და, მაშასადამე, წკრივის კრებადობაც.

თუ n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს $n\alpha_n$ ნამრავლი მიისწრაფის l ზღვარისაკენ, მაშინ წინაწესის გამოყენებით ჩვენ მივიღებთ რომ მოცემული წკრივი კრებადია, როცა $l>1$ და განშლადი როცა $l<1$. გაურკვევლობას აქვს ადგილი როდესაც $l=1$, მაგრამ ამ შემთხვევაშიაც თუ ცნობილია რომ $n\alpha_n$ მიისწრაფის ერთთან იმნაირად, რომ მუდამ $n\alpha_n<1$, მაშინ წკრივი არის განშლადი.

თუ $n\alpha_n$ ნამრავლის ზღვარი არის 1, მაშინ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ უნდა შევადაროთ შემდეგი წკრივის

$$\frac{1}{2(\ln 2)^{\mu}}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^{\mu}}+\ldots$$

ორ მიმდევარ წევრის ფარდობას. უკანასკნელი წკრივი კი კრებადია როცა $\mu>1$ და განშლადი როცა $\mu\leqslant 1$.

აღვნიშნოთ: $n\alpha_n=1+\beta_n$, მაშინ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}},$$

სადაც n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს β_n მიისწრაფის ნულისაკენ. თუ, *დაწყებული გარკვეული წევრიდან, $\beta_n \ln n$ ნამრავლი მუდამ მეტია ერთზე მეტი რაიმე გარკვეულ რიცხვზე, მაშინ წკრივი არის კრებადი. თუ ეს ფარდობა მუდამ ნაკლებია ერთზე, მაშინ წკრივი არის განშლადი.*

დებულების პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად, დავუშვათ, რომ ყოველი n-ისათვის, რომელიც მეტია p-ზე, გვაქვს $\beta_n \ln n>k>1$. ვთქვათ μ არის ისეთი რიცხვი რომ $1<\mu<k$. წკრივი იქნება კრებადი, თუ დაწყებულია გარკვეული წევრიდან აქვს ადგილი უტოლობას:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^{\mu}, \tag{9}$$

ანდა სხვანაირად,

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^{\mu};$$

გამოვიყენებთ რა მარჯვენა მხარისათვის ტეილორის ფორმულას, გვექნება:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{\mu\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}+\lambda_n\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right]^{3}\right\},$$

ამასთან, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, λ_n თავისი აბსოლუტური სიდიდით გარკვეულ რიცხვზე ნაკლები რჩება. გამარტივების შემდეგ უკანასკნელი უტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\beta_n \ln n>\mu(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\lambda_n(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{3}}{\ln n}.$$

n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ნამრავლის ზღვარი არის 1; მართლაც ეს ნამრავლი, ტეილორის ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლიან ასე წარმოვადგინოთ

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{2n}(1+\varepsilon), \tag{10}$$

სადაც ε მიისწრაფის ნულისაკენ. ამნაირად უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა ნაწილის ზღვარი არის μ; მაშასადამე, გარკვეული წევრიდან დაწყებული ეს უტოლობა უეჭველად სამართლიანია, ვინაიდან პირობის თანახმად, $\beta_n \ln n$ მეტია ვიდრე რიცხვი $k>\mu$.

სრულიად ასეთნაირადვე მტკიცდება დებულების მეორე ნაწილიც. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა აქ უნდა შევადაროთ $\frac{1}{n\ln n}$ ზოგადწევრიან წკრივის ორ მიმდევარ წევრის ფარდობა უტოლობა:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{n}{n+1}\,\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ასე:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right],$$

ანუ

$$\beta_n \ln n<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

როგორც სჩანს მე-(10) ფორმულიდან n-ის ერთზე მეტ მნიშვნელობებისათვის უკანასკნელ უტოლობის მარჯვენა ნაწილის ზღვარი არის 1; მაშასადამე, დაწყებული გარკვეული ადგილიდან, უკანასკნელ უტოლობას, უეჭველად ექნება ადგილი, ვინაიდან პირობის თანახმად ამ შემთხვევაში $\beta_n \ln n$ ნაკლებია ერთზე.

დამტკიცებული დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს $\beta_n \ln n$ ნამრავლი მიისწრაფის l-კენ, მაშინ წკრივი იქნება კრებადი როცა $l>1$ და განშლადი როცა $l<1$. გაურკვევლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც $l=1$, იმ გამონაკლის შემთხვევის გარდა, როდესაც $\beta_n \ln n$ მიისწრაფის ერთისაკენ იმნაირად, რომ მუდამ $\beta_n \ln n<1$,; ამ შემთხვევაში წკრივი არის განშლადი.

თუ $\beta_n \ln n$ მიისწრაფის ერთისაკენ ისე რომ მუდამ მეტი რჩება ერთზე, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია, წარმოვადგინოთ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა შემდეგნაირად:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1+\gamma_n}{n\ln n}},$$

სადაც, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, γ_n მიისწრაფის ნულისაკენ. თუ განვიხილავთ $\gamma_n \ln^3 n$ ნამრავლს, მივიღებთ წინა დებულებების ანალოგიურ დებულებებს და ა. შ.

შ ე დ ე გ ი. თუ დადებითწევრებიან წკრივში ყოველივე წევრის წინამავალთან ფარდობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}},$$

სადაც μ დადებითი რიცხვია, r—მუდმივი და n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს H_n სიდიდის

აბსოლუტური მნიშვნელობა გარკვეულ რიცხვზე ნაკლები რჩება, მაშინ წკრივი არის კრებადი, როცა $r>1$, და განშლადი როცა $r\leqslant 1$.

მართლაც, მივიღებთ რა

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n},$$

გვაქვს:

$$n\alpha_n=\frac{r-\dfrac{H_n}{n^{\mu}}}{1-\dfrac{r}{n}+\dfrac{H_n}{n^{1+\mu}}},$$

და, მაშასადამე, $\lim n\alpha_n=r$. ამნაირად, წკრივი არის კრებადი, როცა $r>1$ და განშლადი როცა $r<1$. გაურკვევლობას აქვს ადგილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $r=1$. რომ ავიცილოთ ეს შემთხვევა, მივიღოთ:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\beta_n}{n}}$$

აქედან გვაქვს:

$$\beta_n \ln n=\frac{\dfrac{\ln n}{n}-\dfrac{n+1}{n}H_n\dfrac{\ln n}{n^{\mu}}}{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{H_n}{n^{1+\mu}}}.$$

n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს მარჯვენა მხარე მიისწრაფის ნულისაკენ მიუხედავად იმისა თუ როგორია დადებითი μ რიცხვი; მაშასადამე, წკრივი არის განშლადი.

დავუშვათ, მაგალითად, რომ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ არის n-ის რაციონალური ფუნქცია, რომელიც მიისწრაფის 1-თან როდესაც n იზრდება უსაზღვროდ, ე. ი.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1 n^{p-1}+a_2 n^{p-2}+\dots}{n^p+b_1 n^{p-1}+b_2 n^{p-2}+\dots};$$

შევასრულებთ რა გაყოფას და შევჩერდებით წევრზე $\frac{1}{n^2}$-ით, შეგვიძლიან წინა ტოლობა შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{a_1-b_1}{n}+\frac{\varphi(n)}{n^2},$$

სადაც $\varphi(n)$ არის n-ის რაციონალური ფუნქცია, რომელიც მიისწრაფის სასრულო ზღვარისაკენ როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება. წინა დებულების თანახმად, წკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება

$$b_1>a_1+1.$$

უკანასკნელი თეორემა გაუსს ეკუთვნის. გაუსმა ის დაამტკიცა უშუალოდ. კრებადობის ეს ნიშანი ზოგად ნიშნების შორის დროის მიხედვით ერთ-ერთი პირველთაგანია[1].

---

[1] Disquisitiones generales circa seriem iufinitam $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\dots$ (Gesammelte Werke, ტ. III. გვ. 138).

156. აბსოლუტურად კრებადი წკრივები. მივმართოთ ახლა წკრივებს, რომელთა წევრებს აქვთ ნებისმიერი ნიშანი. თუ, დაწყებული საკმარისად დაშორებული წევრიდან, ყველა წევრის ნიშანი ერთნაირია, მაშინ ეს შემთხვევა დაიყვანება წინა §§-ში უკვე შესწავლილ შემთხვევაზე. ამიტომ ჩვენ უნდა განვიხილოთ ახლა მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც წკრივი შეიცავს უსასრულო რიცხვს, როგორც დადებით ისე უარყოფით წევრებისას. პირველყოვლისა ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ ძირითად თეორემას.

წკრივი, რომლის წევრებს აქვს ნებისმიერი ნიშნები, იქნება კრებადი ყოველთვის, როდესაც კრებადია ამ წკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებით შედგენილი წკრივი.

ვთქვათ

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots \tag{11}$$

არის წკრივი, რომლის წევრებს აქვს ნებისმიერი ნიშნები; ვთქვათ, შემდეგ

$$U_0+U_1+\cdots+U_n+\cdots \tag{12}$$

არის პირველი წკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი წკრივი, ასე რომ $U_n=|u_n|$. თუ მე-(12) წკრივი არის კრებადი, მაშინ მე-(11) წკრივიც იქნება კრებადი. ეს გამომდინარეობს კრებადობის ზოგადი თეორემიდან. მართლაც, გვაქვს:

$$|u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<U_n+U_{n+1}+\cdots+U_{n+p};$$

ხოლო თუ ჩვენ ავიღებთ n-ს საკმაოდ დიდს, შეგვიძლიან, p-სგან დამოუკიდებლად, გავხადოთ მეორე ჯამი წინასწარ მოცემულ რიცხვზე ნაკლები.

მე-(11) წკრივის კრებადობაში შეგვიძლიან კიდევ სხვანაირად დავრწმუნდეთ. წარმოვადგინოთ u_n შემდეგი სახით:

$$u_n=(u_n+U_n)-U_n$$

და განვიხილოთ დამხმარე u_n+U_n ზოგადწევრიანი წკრივი:

$$(u_0+U_0)+(u_1+U_1)+\cdots+(u_n+U_n)+\cdots \tag{13}$$

აღვნიშნავთ რა (11), (12), (13) წკრივების პირველი n წევრის ჯამებს შესაბამისად S_n, S_n', S_n'' სიმბოლოებით, ცხადია, გვექნება:

$$S_n=S''_n-S'_n.$$

დაშვების თანახმად, მე-(12) წკრივი არის კრებადი; კრებადი იქნება აგრეთვე მე-(13) წკრივიც, რომელსაც არ აქვს არც ერთი უარყოფითი წევრი და რომლის ზოგადი წევრი არ აღემატება $2U_n$-ს. ამნაირად S_n' და S_n'' ჯამები და, მაშასადამე, S_n ჯამიც n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს მიისწრაფის გარკვეულ ზღვრებისაკენ, ე. ი. მოცემული (11) წკრივი არის კრებადი. გარდა ამისა ვხედავთ, რომ მე-(11)

წკრივი შეგვიძლიან განვიხილოთ როგორც ორი დადებითწევრებიანი წკრივების წევრობრივ გამოკლებით მიღებული.

წკრივი, რომლის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობანი კრებად წკრივს შეადგენს, იწოდება **აბსოლუტურად კრებად წკრივად**. ასეთ წკრივში მისი წევრების რიგის ნებისმიერი შეცვლა არ სცვლის წკრივის ჯამს. განვიხილოთ ჯერ დადებითწევრებიანი კრებადი წკრივი:

$$a_0+a_1+\dots+a_n+\dots, \tag{U}$$

რომლის ჯამი იყოს S, ვთქვათ

$$b_0+b_1+\dots+b_n+\dots \tag{V}$$

არის სხვა წკრივი, რომელიც შედგენილია იმავე წევრებიდან რაც (U) წკრივი, მაგრამ ეს წევრები დალაგებულია სხვანაირად. ცხადია, რომ (U) წკრივის ყოველი წევრი იმყოფება სადღაც (V) წკრივში და, პირიქით, (V) წკრივის ყოველი წევრი იმყოფება სადღაც (U) წკრივში.

აღვნიშნოთ (V) წკრივის პირველი m წევრის ჯამი S'_m სიმბოლოთი; ვინაიდან ყველა ეს წევრი იმყოფება (U) წკრივშიაც, ცხადია, შეგვიძლია მოვძებნოთ იმდენად დიდი n რიცხვი, რომ (V) წკრივის პირველი m წევრი იმყოფებოდეს (U) წკრივის პირველ n წევრთა შორის. მაშასადამე, გვექნება:

$$S'_m < S_n < S,$$

რაც ამტკიცებს იმას, რომ (V) წკრივი არის კრებადი და მისი ჯამი $S' \leqslant S$. სრულიად ასეთნაირადვე უნდა გვქონდეს $S \leqslant S'$, ხოლო აქედან $S'=S$. იგივე მსჯელობა გვიჩვენებს რომ თუ (U) და (V) წკრივებს შორის ერთი განშლადია, განშლადია აგრეთვე მეორეც.

ჩვენ შეგვიძლიან აგრეთვე, წკრივის ჯამის შეუცვლელად, შევაერთოთ ნებისმიერი წესით კრებადი დადებითწევრებიანი წკრივის წევრები, ე. ი. ჩვენ შეგვიძლიან შევადგინოთ ახალი წკრივი, რომლის ყოველი წევრი წარმოადგენს ნებისმიერ რიგით დაწერილი პირველი წკრივის წევრების ნებისმიერ რიცხვის ჯამს. დავუშვათ ჯერ, რომ ჩვენ ვაერთიანებთ წევრებს იმ რიგით, რა რიგითაც ისინი შედიან მოცემულ წკრივში; ვთქვათ

$$A_0+A_1+A_2+\dots+A_m+\dots \tag{14}$$

არის ასეთნაირად მიღებული წკრივი, რომელშიაც, მაგალითად,

$$A_0=a_0+a_1+\dots+a_p, \quad A_1=a_{p+1}+\dots+a_q,$$

$$A_2=a_{q+1}+\dots+a_r, \dots$$

მე-(14) წკრივის პირველი m წევრის S'_m ჯამი უდრის მოცემული წკრივის N პირველი წევრის S_N ჯამს, სადაც $N>m$. m რიცხვის უსაზღვროდ ზრდის დროს

N რიცხვიც უსაზღვროდ იზრდება და, მაშასადამე, S'_m ჯამს აქვს ზღვრად იგივე S ზღვარი.

გავაერთიანებთ რა ორივე წინა გარდაქმნას, დავრწმუნდებით, რომ თუ მოცემულია კრებადი დადებითწევრებიანი წკრივი, მაშინ ჩვენ შეგვიძლიან, მისი ჯამის შეუცვლელად, შევცვალოთ ეს წკრივი ისეთი სხვა წკრივით, რომლის ყოველი წევრი წარმოადგენს პირველი წკრივის რაიმე ნებისმიერად დალაგებულ წევრთა ჯამს. საჭიროა მხოლოდ, რომ პირველი წკრივის ყოველი წევრი მონაწილეობდეს მხოლოდ და მხოლოდ ერთ-ერთ ჯგუფში იმ წევრებისა, რომლებიც შეადგენენ მეორე წკრივის წევრებს.

ვინაიდან ყოველი აბსოლუტურად კრებადი წკრივი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორი კრებადი დადებითწევრებიანი წკრივის სხვაობა, ამიტომ წინა გარდაქმნები გამოიყენება აგრეთვე აბსოლუტურად კრებადი წკრივის მიმართაც. აქედან ჩანს, რომ გამოთვლების დროს ჩვენ შეგვიძლია მოვექცეთ აბსოლუტურად კრებად უსასრულო წკრივს ისე, როგორც ჯამს წევრების სასრულო რიცხვით.

157. პირობით კრებადი წკრივები. იმისათვის რომ სხვადასხვა ნიშნის წევრებიანი წკრივი კრებადი იყოს არ არის აუცილებელი, რომ მისი წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებით შედგენილი წკრივიც იყოს კრებადი. ეს ჩანს, მაგალითად, შემდეგი თეორემიდან ნიშანცვლადი წკრივების შესახებ. ამ თეორემას მოვიყვან დაუმტკიცებლად:

მიმდევნობით ნიშანცვლად წევრებისაგან შედგენილი წკრივი იქნება კრებადი, თუ ყოველი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია წინამავალ წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე და თუ ამას გარდა მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად წკრივის წევრები თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობით უსაზღვროდ კლებულობენ.

მაგალითად წკრივი:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \tag{15}$$

არის კრებადი; ჩვენ ვნახეთ (§ 49), რომ მისი ჯამი უდრის log 2-ს. მაშინ როდესაც, ამ წკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებით შედგენილი წკრივი არის ჰარმონიული წკრივი და იგი განშლადია (§ 161).

კრებადი წკრივები, რომლებიც არ არიან იმავე დროს აბსოლუტურად კრებადი, იწოდებიან *პირობით კრებად*, *ნახევრად კრებად* ანდა *უბრალოდ კრებად წკრივებათ*.

კოშის, *ლეჟენ-დირიხლეს* და *რიმანის* (Reimann) შრომებმა ნათელჰყვეს თუ რამდენად აუცილებელია განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან აბსოლუტურად კრებადი და ნახევრად-კრებადი წკრივები. ასე, მაგალითად, ნახევრად კრებად წკრივში ჩვენ არ გვაქვს უფლება წევრთა რიგის შეცვლისა ან და წევრების ურთიერთ ნებისმიერად შეერთებისა; ამ გარდაქმნებს შეუძლიან გამო-

იწვიონ წკრივის ჯამის შეცვლა ანდა კიდეც კრებადი წკრივის განშლად წკრივად გადაქცევა და პირიქით.

ავიღოთ, მაგალითად, შემდეგი კრებადი წკრივი:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\ldots$$

მისი ჯამი, ცხადია, არის

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

გამოსახვის ზღვარი, როდესაც m უსაზღვროდ იზრდება. დავალაგოთ ამ წკრივის წევრები სხვანაირად, სახელდობრ, ისე რომ ყოველ დადებით წევრს მოსდევდეს ორი უარყოფითი

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\ldots \tag{16}$$

განვიხილავთ რა S_{3n}, S_{3n+1}, S_{3n+2} ჯამებს, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ეს ახალი წკრივი არის კრებადი; მისი ჯამი უდრის

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)$$

გამოსახვის ზღვარს, როდესაც m უსაზღვროდ იზრდება. მაგრამ ჩვენ გვაქვს

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

და, მაშასადამე, მეორე წკრივის ჯამი უდრის პირველი წკრივის ჯამის ნახევარს.

საზოგადოდ, თუ მოცემულია კრებადი წკრივი, მაგრამ კრებადი არა აბსოლუტურად, ყოველთვის შეიძლება დავალაგოთ ამ წკრივის წევრები ისეთი მიმდევრობით, რომ ახალი წკრივი კრებადი იყოს და მისი ჯამი უდრიდეს წინასწარ მოცემულ ნებისმიერ A რიცხვს. აღვნიშნოთ S_p-თი ამ წკრივის პირველი p დადებითი წევრების ჯამი, ხოლო S'_q-თი პირველი q უარყოფითი წევრების აბსოლუტურ მნიშვნელობათა ჯამი; ცხადია, რომ ჩვენი წკრივის პირველი $p+q$ წევრთა ჯამი არის სწორედ $S_p-S'_q$. თუ ორივე p და q რიცხვები უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ უსაზღვროდ იზრდება აგრეთვე ორივე S_p და S'_q ჯამი, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში წკრივი იქნებოდა განშლადი, როცა უსაზღვროდ იზრდება მხოლოდ ერთი ამ ჯამთაგანი, ან აბსოლუტურად კრებადი, როცა ორივე ჯამი მიისწრაფის გარკვეულ ზღვრებისაკენ. მეორეს მხრივ, ვინაიდან მოცემული წკრივი პირობის თანახმად კრებადია, მისი ზოგადი წევრი უნდა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ.

ვისარგებლებთ რა ამ შენიშვნებით, ჩვენ შეგვიძლია შემდეგნაირად შევადგინოთ ახალი წკრივი, რომელსაც აქვს A რიცხვი თავის ჯამათ. ავიღოთ მოცემული წკრივის დადებით წევრთა ისეთი რიცხვი, იმ დალაგებით როგორც ისინი წკრივშივე არიან მოცემული, რომ მათი ჯამი იყოს A-ზე მეტი; შემდეგ მივუწეროთ მოცემული წკრივის პირველი უარყოფითი წევრები იმ რიგით რა რიგითაც ისინი წკრივში მონაწილეობენ და გავჩერდეთ მაშინ, როდესაც ყველა ალე-

ბულ წევრის ჯამი A-ზე ნაკლები შეიქნება; შემდეგ დავიწყებთ ისევ დადებით წევრების წერას იმ წევრიდან დაწყებული, რომელზედაც პირველად გავჩერდით და შევჩერდებით მაშინ, როდესაც ყველა აღებულ წევრის ჯამი ხელახლა A-ზე მეტი შეიქნება; შემდეგ ისევ უარყოფით წევრებს ავიღებთ და ა. შ., ცხადია, რომ ასეთნაირად აგებულ წკრივის პირველი წევრების ჯამები იქნება მუდამ ხან მეტი ხან ნაკლები A-ზე, მაგრამ ეს ჯამები განსხვავდება A რიცხვისაგან ისეთ სიდიდით, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფის.

158. აბელის პირობა. *აბელმა* მოგვცა თეორემა, რომელიც იძლევა საშუალებას დავამტკიცოთ ზოგიერთი ისეთი წკრივების კრებადობა, რომელთა კრებადობა შეუძლებელია აღმოჩენილი იყოს კრებადობის წინა პირობების გამოყენებით. ამ თეორემის დამტკიცება დამყარებულია ლემაზე, რომლითაც ჩვენ უკვე ვსარგებლობდით (§ 74).

ვთქვათ

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

არის კრებადი ან *განუსაზღვრელი* წკრივი (ე. ი. ისეთი, რომ მისი პირველი n წევრის ჯამი თავისი აბსოლუტური სიდიდით მუდამ ნაკლებია რომელიმე გარკვეულ A რიცხვზე). მეორე მხრით, ვთქვათ:

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ldots,\ \varepsilon_n,\ldots$$

არის ისეთ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, რომ ყოველი მათგანი ნაკლებია წინამავალზე და მასთან $\lim\limits_{n=\infty}(\varepsilon_n)=0$. *ასეთ პირობებში* წკრივი:

$$\varepsilon_0u_0+\varepsilon_1u_1+\ldots+\varepsilon_nu_n+\ldots \tag{17}$$

იქნება კრებადი.

მართლაც, ამ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ n-ისა და p-ს ყოველ მნიშვნელობათათვის, გვექნება:

$$|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<2A;$$

მაშასადამე, თანახმად § 74-ის ლემისა, გვაქვს:

$$|u_{n+1}\varepsilon_{n+1}+\ldots+u_{n+p}\varepsilon_{n+p}|<2A\,\varepsilon_{n+1}.$$

ვინაიდან, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, ε_{n+1} მიისწრაფის ნულისაკენ, ამიტომ შეგვიძლიან იმდენად დიდი n ავიღოთ, რომ ყოველივე p-სათვის

$$\varepsilon_{n+1}\,u_{n+1}+\ldots+\varepsilon_{n+p}\,u_{n+p}$$

ჯამის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იყოს ყოველი წინასწარ დანიშნულ რიცხვზე. მაშასადამე, თანახმად § 5-ის ზოგადი თეორემისა, მე-(17) წკრივი იქნება კრებადი.

თუ $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ წკრივი არის შემდეგი წკრივი:

$$1-1+1-1+1-1\ldots,$$

რომლის წევრები არის მიმდევრობით ხან $+1$ და ხან -1, მაშინ წინა დებულება გადაიქცევა ნიშანცვლად წკრივების შესახებ ზემოთ მოყვანილ (§ 165) დებულებად.

განვიხილოთ სხვა მაგალითი. წკრივი:

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\ldots+\sin n\theta+\ldots$$

არის კრებადი ან განუსაზღვრელი. თუ $\sin\theta=0$, მაშინ, წკრივის ყველა წევრი ნულის ტოლია; თუ $\sin\theta\gtrless 0$, მაშინ, პირველი n წევრის ჯამი, ტრიგონომეტრიის ფორმულის მიხედვით, **უდრის**

$$\frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right);$$

მაშასადამე, ეს ჯამი აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლებია ვიდრე $\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$. აქედან დავასკვნით, რომ θ ოდენობის ყოველ მნიშვნელობისათვის წკრივი:

$$\varepsilon_1 \sin\theta + \varepsilon_2 \sin 2\theta + \ldots + \varepsilon_n \sin n\theta + \ldots$$

არის კრებადი. ასეთნაირადვე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ წკრივი:

$$\varepsilon_1 \cos\theta + \varepsilon_2 \cos 2\theta + \ldots + \varepsilon_n \cos n\theta + \ldots$$

არის კრებადი θ-ს ყოველ მნიშვნელობისათვის, გარდა $\theta = 2k\pi$.

შ ე დ ე გ ი. თუ განვიხილავთ მხოლოდ კრებად წკრივებს, შეგვიძლიან გამოვთქვათ უფრო ზოგადი დებულება. ვთქვათ

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

არის კრებადი წკრივი და

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$$

მუდამ ზრდადი ანდა მუდამ კლებადი დადებითი წევრთა მიმდევრობა, რომელნიც n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს მიისწრაფის გარკვეულ k ზღვარისაკენ, რომელიც ნულისაგან განსხვავდება. მ ა შ ი ნ წ კ რ ი ვ ი:

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \ldots \tag{18}$$

ი ქ ნ ე ბ ა ა გ რ ე თ ვ ე კ რ ე ბ ა დ ი.

გარკვეულობისათვის, დავუშვათ, რომ α_i რიცხვების მიმდევრობა ზრდადია. შეგვიძლიან დავწეროთ:

$$\alpha_0 = k - \varepsilon_0, \quad \alpha_1 = k - \varepsilon_1, \ldots, \alpha_n = k - \varepsilon_n, \ldots,$$

სადაც $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, წარმოადგენენ დადებით კლებად რიცხვების მიმდევრობას, მასთან n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, ε_n ნულისაკენ მიისწრაფის. ორივე წკრივი:

$$ku_0 + ku_1 + \ldots + ku_n + \ldots$$

$$\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_n u_n + \ldots,$$

არის კრებადი; კრებადია, მაშასადამე, აგრეთვე მე-(18) წკრივიც.

II. წარმოსახვითწევრებიანი წკრივები. ჯერადი წკრივები

159. განსაზღვრები. ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ წკრივის ცნების ზოგიერთ განზოგადოებას. ვთქვათ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{19}$$

არის ისეთი წკრივი, რომლის ყველა წევრი კომპლექსური სიდიდეებია:

$$u_0 = a_0 + b_0 i, \quad u_1 = a_1 + b_1 i, \ldots, \quad u_n = a_n + b_n i, \ldots$$

ასეთი წკრივი იწოდება კრებად წკრივად იმ შემთხვევაში, თუ კრებადია ორი შემდეგი წკრივი:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{20}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{21}$$

ე. ი. ნამდვილი ნაწილებით და i-სიან მდგომი კოეფიციენტებით შედგენილი წკრივები. ვთქვათ მე-(20) და (21) წკრივების ჯამი არის S' და S''; მე-(19) წკრივის ჯ ა მ ა დ იწოდება $S=S'+iS''$ სიდიდე. ცხადია, რომ აქაც, ისე, როგორც წინათ, ეს ჯამი წარმოადგენს მე-(19) წკრივის პირველი n წევრის S_n ჯამის ზღვარს, როდესაც n რიცხვი უსაზღვროდ იზრდება. ჩვენ ვხედავთ, რომ წარმოსახვითწევრებიანი წკრივი არსებითად არის ორი ნამდვილწევრებიან წკრივების ერთობლიობა.

თუ მე-(19) წკრივის წევრების მოდულებით შედგენილი წკრივი:

$$\sqrt{a_0^2+b_0^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\ldots, \tag{22}$$

არის კრებადი, მაშინ მე-(20) და (21) წკრივები, ცხადია, აბსოლუტურად კრებადია, ვინაიდან

$$|a_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

და

$$|b_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

ამ შემთხვევაში მე-(19) წკრივი იწოდება ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ა დ. ასეთ წკრივში ჩვენ შეგვიძლიან, მისი ჯამის შეუცვლელად, შევცვალოთ წევრების რიგი ან და შევაერთოთ ეს წევრები ნებისმიერად.

კრებადობის ყოველი პირობას, რომელიც ამტკიცებს რომელიმე დადებითწევრიან წკრივის კრებადობას, შეესაბამება პირობა, რომელიც იძლევა საშუალებას დავამტკიცოთ რაღაც გარკვეულ ნამდვილ ან წარმოსახვითწევრებიანი წკრივის აბსოლუტური კრებადობა. ასე, მაგალითად, თუ დაწყებული გარკვეული წევრიდან, რაიმე წკრივში $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობის მოდული ნაკლებია, ვიდრე ერთზე ნაკლები რაიმე გარკვეული რიცხვი, მაშინ წკრივი არის აბსოლუტურად კრებადი. მართლაც, აღვნიშნოთ $U_i=|u_i|$. თუ, დაწყებული გარკვეული წევრიდან, მუდამ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<k<1$, ჩვენ შეგვიძლიან წარმოვადგინოთ ეს უტოლობა შემდეგი სახით:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}<k<1;$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ მოდულებისაგან შედგენილი წკრივი:

$$U_0+U_1+\ldots+U_n+\ldots$$

არის კრებადი. თუ n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ ფარდობა მიისწრაფის l ზღვარისაკენ, მაშინ წკრივი იქნება კრებადი, როდესაც $l<1$ და განშლადი, როდესაც $l>1$; მართლაც, უკანასკნელ შემთხვევაში u_n ზოგადი წევრის მოდული ნულთან არ მიისწრაფის, და ორივე მე-(20) და (21) წკრივი არ შეიძლება ერთდროულად იყოს კრებადი. შემთხვევა $l=1$ რჩება საეჭვო.

საზოგადოდ, ვთქვათ ω არის $\sqrt[n]{U_n}$ ოდენობათა ზღვრებს შორის უდიდესი, როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება. მე-(19) წკრივი იქნება აბსოლუტურად კრებადი, როდესაც $\omega<1$ და განშლადი, როდესაც $\omega>1$, ვინაიდან უკანასკნელ შემთხვევაში ზოგადი წევრის მოდული ნულთან არ მიისწრაფის (§ 152). შემთხვევა $\omega=1$ რჩება საეჭვო. ამ შემთხვევაში წკრივი შეიძლება იყოს აბსოლუტურად კრებადი, პირობით კრებადი ანდა განშლადიც.

160. **წკრივთა გადამრავლება.** ვთქვათ:

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{23}$$

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{24}$$

არის ორი ნებისმიერ სახის წევრებიანი წკრივი. გავამრავლოთ პირველი წკრივის ყოველი წევრი მეორე წკრივის ყოველ წევრზე და შევკრიბოთ ერთად ყველა ის u_iv_j ნამრავლი, რომელთა მაჩვენებლების $i+j$ ჯამი ერთი და იგივეა; ასეთნაირად ჩვენ მივიღებთ ახალ წკრივს:

$$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\dots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\dots+u_nv_0)+\dots \tag{25}$$

თუ ორივე (23) და (24) წკრივი არის აბსოლუტურად კრებადი, მაშინ (25) წკრივიც აგრეთვე კრებადია და მისი ჯამი უდრის ორივე წინა წკრივის ჯამების ნამრავლს. ეს თეორემა, კოშის მიერ დამტკიცებული, განზოგადოებული იყო მერტენსის (Mertens)[1] მიერ, რომელმაც დაამტკიცა, რომ ის რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც ერთი წკრივთაგანი აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო მეორე პირობით კრებადი.

ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ აბსოლუტურად კრებადია (23) წკრივი. აღვნიშნოთ (25) წკრივის ზოგადი წევრი w_n-ით, ე. ი.

$$w_n=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0.$$

თეორემის დამტკიცებისათვის საკმარისია დამტკიცდეს, რომ n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს ორივე სხვაობა:

$$w_0+w_1+\cdots+w_{2n}-(u_0+u_1+\cdots+u_n)(v_0+v_1+\cdots+v_n),$$

$$w_0+w_1+\cdots+w_{2n+1}-(u_0+u_1+\cdots+u_{n+1})(v_0+v_1+\cdots+v_{n+1})$$

მიისწრაფის ნულისაკენ. ვინაიდან დამტკიცება ორივე შემთხვევაში ერთნაირია, ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ პირველ სხვაობას. დავალაგებთ რა მას u_i-ს მიხედვით, ჩვენ შეგვიძლიან წარმოვადგინოთ ის შემდეგი სახით:

$$\begin{gathered}\delta=u_0(v_{n+1}+\cdots+v_{2n})+u_1(v_{n+1}+\cdots+v_{2n-1})+\cdots+u_{n-1}v_{n+1}+\\+u_{n+1}(v_0+\cdots+v_{n-1})+u_{n+2}(v_0+\cdots+v_{n-2})+\cdots+u_{2n}v_0.\end{gathered}$$

ვინაიდან (23) წკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ ჯამი:

$$U_0+U_1+\cdots+U_n$$

[1] Grellés Journal, ტ. 79.

ყოველი n-ისათვის რჩება ნაკლები ვიდრე გარკვეული დადებითი A რიცხვი; სრულიად ასევე, იმის გამო რომ (24) წკრივი კრებადია, $v_0+v_1+\ldots+v_n$ ჯამის მოდული ყოველ n-ისათვის ნაკლებია ვიდრე გარკვეული დადებითი B რიცხვი. ვთქვათ ε არის რაიმე წინასწარ მოცემული დადებითი რიცხვი; ჩვენ შეგვიძლიან ვიპოვოთ იმდენად დიდი დადებითი m რიცხვი, რომ ყოველი n-თვის, რომელიც მეტია m-ზე, გვქონდეს:

$$U_{n+1}+\cdots+U_{n+p}<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$|v_{n+1}+\cdots+v_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

როგორიც არ უნდა იყოს p რიცხვი. თუ ავიღებთ n რიცხვს ასეთი პირობით და δ სხვაობის გამოსახვაში შევცვლით $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ სიდიდეებს შესაბამისად $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ სიდიდეებით, შემდეგ $v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+p}$ სიდიდეებს $\frac{\varepsilon}{A+B}$-ით და, ბოლოს, $v_0+\cdots+v_{n-1}$, $v_0+\cdots+v_{n-2}, \ldots, v_0$ სიდიდეებს B-თი, მივიღებთ, რა თქმა უნდა, δ სხვაობის ზედა ზღვარს. ამ ჩასმის შემდეგ, გვექნება:

$$|\delta|<U_0\frac{\varepsilon}{A+B}+U_1\frac{\varepsilon}{A+B}+\cdots+U_{n-1}\frac{\varepsilon}{A+B}+U_{n+1}B+U_{n+2}B+\cdots+U_{2n}B,$$

ანუ

$$|\delta|<\frac{\varepsilon}{A+B}(U_0+U_1+\ldots+U_{n-1})+B(U_{n+1}+\cdots+U_{2n})<\frac{\varepsilon A}{A+B}+\frac{\varepsilon B}{A+B},$$

ანდა, ბოლოს, $|\delta|<\varepsilon$. ამნაირად δ სხვაობას აქვს ზღვრად ნული.

161. ორმაგი წკრივები. განვიხილოთ მართკუთხოვანი არე შემოსაზღვრული ზევიდან და მარცხნიდან და უსაზღვროდ გავრცელებული მარჯვნივ და ქვევით. დავანაწილოთ ეს არე შვეული და თარაზული წრფეებით კვადრატებად ჭადრაკის ფირფიტის მაგვარად. ასეთი არე შეიცავს შვეულ სვეტების უსასრულო სიმრავლეს, რომლებსაც ჩვენ დავნომრავთ დაწყებული 0-დან ∞-მდე, და თარაზულ სტრიქონების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც ასეთნაირადვე დაინომრება 0-დან ∞-მდე. დავუშვათ, რომ ამ არის ყოველ უჯრედს შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ჩვენ ჩავწერთ ამ უჯრედში. a_{ik} იყოს რიცხვი, რომელიც შეესაბამება იმ უჯრედს, რომელიც მოთავსებულია i-ურ სტრიქონში და k-ურ სვეტში. ასეთნაირად ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს[1].

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right. \tag{26}$$

[1] ასეთ ცხრილს ეწოდება აგრეთვე, ცხრილი ო რ მ ა გ ი შ ე ს ა ვ ა ლ ი თ.

ჩვენ ვიგულისხმებთ ჯერ, რომ ამ ცხრილის ყველა წევრი ნამდვილი და დადებითი რიცხვებია.

წარმოვიდგინოთ ახლა ისეთი $C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots$ წირთა მიმდევრობა, რომლებიც სულ უფრო და უფრო შორდება დასაბამს ყველა მიმართულებით და რომლებიც ცხრილის მსაზღვრავ ორ წრფესთან ერთად ქმნის კეტილ წირთა ისეთ მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი შეიცავს თავის შიგნით ყველა წინამავალ წევრს. ამ კეტილ წირთა შიგნით მყოფი ცხრილის წევრების ჯამები აღვნიშნოთ შესაბამად $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ნიშნებით.

თუ S_n ჯამი n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს მიისწრაფის S ზღვრისკენ, მაშინ ორმაგი წკრივი:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} \tag{27}$$

იწოდება კ რ ე ბ ა დ ი წკრივად და მისი ჯ ა მ ი არის S; რომ ეს განსაზღვრა გამართლებული იყოს საჭიროა დამტკიცდეს, რომ S ზღვარი დამოუკიდებელია C მრუდთა სახეზე. წარმოვიდგინოთ ახალი $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots,$ წირთა მიმდევრობა, რომლებიც აგრეთვე შორდება დასაბამს ყოველ მიმართულებით, და აღვნიშნოთ $S'_1, S'_2, \ldots, S'_m, \ldots$ სიმბოლოებით მათი შესაბამისი ჯამები. როდესაც მოცემულია m რიცხვი, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია ავარჩიოთ იმდენად დიდი n რიცხვი, რომ C_n წირი C'_m წირს თავის შიგნით შეიცავდეს; მაშასადამე, ჩვენ გვექნება $S'_m < S_n$, ხოლო აქედან ყოველი m-სათვის $S'_m < S$. მაგრამ ეს S'_m ჯამი იზრდება m მაჩვენებელთან ერთად; მაშასადამე, ის მიისწრაფის რაღაც S' ზღვარისაკენ და $S' \leqslant S$. ასეთნაირადვე ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ $S \leqslant S'$. ამიტომ დავასკვნით, რომ $S' = S$.

ჩვენ შეგვიძლიან, მაგალითად, მივიღოთ C წირად უსაზღვროდ ზრდად კვადრატის ორი გვერდი, ანდა არის ორივე გვერდის მიმართ ერთნაირად დახრილი წრფეები; პირველსა და მეორე შემთხვევაში ჯამები შესაბამისად იქნება:

$$a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \cdots + (a_{n0} + a_{n1} + \cdots + a_{nn} + a_{n-1,n} + \cdots + a_{0n}),$$

და

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}) + (a_{20} + a_{11} + a_{02}) + \cdots + (a_{n0} + a_{n-1,1} + \cdots + a_{0n}).$$

თუ n-ის უსაზღვრო ზრდის დროს ამ ჯამთა შორის ერთ-ერთი მიისწრაფის რაიმე ზღვარისაკენ, მაშინ მიისწრაფის ზღვარისაკენ აგრეთვე მეორეც და ეს ორი ზღვარი ურთიერთ ტოლი იქნება.

ცხრილის ჯამის შედგენა შეიძლება აგრეთვე სტრიქონებისა ანდა სვეტების მიხედვით. მართლაც, ვთქვათ, რომ ორმაგი (27) წკრივები არის კრებადი და მისი ჯამი არის S. ცხადია, რომ ცხრილის წევრთა ნებისმიერი რიცხვის ჯამი ნაკლებია ვიდრე S; აქედან გამომდინარეობს, რომ ყველა, შემდეგი სახის წკრივები.

$$a_{i0} + a_{i1} + \cdots + a_{in} + \cdots \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

რომლებიც მიიღება რომელიმე თარზულ სტრიქონის წევრებიდან, იქნება კრებადი, ვინაიდან

$$a_{i_0}+a_{i_1}+\ldots+a_{i_n}$$

ჯამი მუდამ ნაკლებია S სიდიდეზე და იმავე დროს იზრდება n-თან ერთად.

ვთქვათ, ასეთნაირად მიღებულ კრებად წკრივების ჯამები არის σ_0, $\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots$; მაშინ წკრივი:

$$\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_i+\ldots \tag{29}$$

აგრეთვე კრებადი იქნება. მართლაც, განვიხილოთ ცხრილის იმ წევრთა Σa_{ik} ჯამი, რომლების $i \leqslant p$, $k \leqslant r$. ეს ჯამი მუდამ ნაკლებია ვიდრე S; თუ ჩვენ დავტოვებთ p რიცხვს მუდმივად, ხოლო r რიცხვს უსაზღვროდ ვზრდით, ამ ჯამს ზღვრად ექნება

$$\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_p.$$

ამნაირად, მუდამ $\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_p<S$, ხოლო რადგანაც ეს ჯამი იზრდება p რიცხვთან ერთად, შეგვიძლიან დავასკვნათ, რომ (29) წკრივი არის კრებადი და მას აქვს ჯამად ისეთი Σ რიცხვი, რომ $\Sigma \leqslant S$. მეორე მხრით, თუ ყველა (28) წკრივი კრებადია და მათი ჯამებით შედგენილი ახალი (29) წკრივიც კრებადია და მას აქვს ჯამად Σ რიცხვი, მაშინ, ცხადია, რომ (26) ცხრილის წევრთა ნებისმიერ რიცხვის ჯამი ნაკლებია ვიდრე Σ. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს აგრეთვე $S \leqslant \Sigma$, ამიტომ $\Sigma=S$.

ყოველივე, რაც ითქვა წკრივებზე, რომლებიც მიიღება თარზულ სტრიქონებიდან, ცხადია, გამოიყენება აგრეთვე იმ წკრივებისათვისაც, რომლებიც მიიღება შვეულ სვეტებიდან. ამნაირად, დადებითწევრებიან ორმაგი წკრივის ჯამის მისაღებად შეიძლება გამოვთვალოთ ის სტრიქონების მიხედვით, ანდა სვეტების მიხედვით, ანდა, ბოლოს, ავიღოთ ნებისმიერი სახის შემომსაზღვრელი მრუდეები. კერძოდ, თუ წკრივი აღმოჩნდა კრებადი მისი ჯამის თარზულ სტრიქონების მიხედვით შედგენის დროს, მაშინ ის იქნება კრებადი აგრეთვე იმ შემთხვევაშიც, როდესაც მას გამოვთვლით სვეტების მიხედვით და მისი ჯამი ორივე შემთხვევაში ერთი და იგივეა.

დადებითწევრებიანი ორმაგი წკრივებისათვის შეიძლება დამტკიცდეს მთელი რიგი თეორემებისა, რომლებიც მარტივი წკრივებისათვის ზემოთ დამტკიცებულ თეორემის ანალოგიურია. მაგალითად, თუ დადებითწევრებიანი ორმაგი წკრივის წევრები შესაბამისად ნაკლებია სხვა ორმაგი კრებადი წკრივის წევრებზე, მაშინ პირველი წკრივიც აგრეთვე არის კრებადი, და ა. შ.

არა კრებადი დადებითწევრებიანი ორმაგი წკრივი იწოდება განშლადად. ასეთი წკრივის შესაბამ ცხრილის რომელიმე კეტილი მრუდის შიგნით მოთავსებულ ელემენტთა ჯამი უსაზღვროდ იზრდება როდესაც დასახელებული მრუდი ყოველი მიმართულებით უსაზღვროდ შორდება დასაბამს.

განვიხილოთ ახლა ცხრილი, რომელიც შეიცავს არადადებით ელემენტებსაც. ცხადია, რომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვრიცხოთ განხილვიდან ის შემთხვევები, როდესაც ცხრილის ყველა ელემენტი უარყოფითია, ან როდესაც დადებით ან

უარყოფით ელემენტთა რიცხვი არის სასრული, ვინაიდან ყველა ეს შემთხვევა უშუალოდ დაიყვანება წინამავალ შემთხვევაზე. ჩვენ ვგულისხმებთ ამიტომ, რომ განსახილავ T ცხრილში მონაწილეობს როგორც დადებით, ასევე უარყოფით ელემენტთა უსასრულო სიმრავლე. a_{ik}-თი აღვნიშნოთ T ცხრილის ზოგადი წევრი. წარმოვიდგინოთ ახლა დადებითელემენტებიანი T_1 ცხრილი, რომლის ყოველი ელემენტი უდრის T ცხრილის შესაბამ ელემენტის $|a_{ik}|$ აბსოლუტურ სიდიდეს. თუ T_1 ცხრილი არის კრებადი, მაშინ T ცხრილი იწოდება **აბსოლუტურად კრებადად**. აბსოლუტურად კრებად ცხრილს ახასიათებს დადებითწევრებიანი კრებად ცხრილის ყველა არსებითი თვისება.

ამ დებულების დამტკიცებისათვის განვიხილოთ შემდეგნაირად შედგენილი ორი დამხმარე T' და T'' ცხრილი. T' ცხრილი შედგენილია T ცხრილიდან იმნაირად, რომ ყოველი უარყოფითი ელემენტი შეცვლილია ნულით, ხოლო ყოველი დადებითი ელემენტი დატოვებულია თავის ადგილზე. ასეთნაირადვე T'' ცხრილი შედგენილია T ცხრილიდგან ისე, რომ უკანასკნელის ყოველივე დადებითი ელემენტი შეცვლილია ნულით, ხოლო ყოველ უარყოფით ელემენტს ნიშანი აქვს შეცვლილი. თუ T_1 ცხრილი კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე ორივე T' და T'' ცხრილი. მართლაც, მაგალითად, T' ცხრილის ყოველი ელემენტი არ აღემატება T_1 ცხრილის შესაბამ ელემენტს. T წკრივის იმ წევრთა ჯამი, რომლებიც მოთავსებულია რომელიმე კეტილ მრუდის შიგნით, უდრის იმავე კეტილ მრუდის შიგნით მოთავსებულ T' ცხრილის წევრების ჯამისა და T'' ცხრილის წევრების ჯამის სხვაობას. რადგანაც, ორი უკანასკნელი ჯამი, შემომსაზღვრავი მრუდის ყოველივე მიმართულებით უსაზღვროდ დაშორების დროს, გარკვეული ზღვრებისაკენ მიისწრაფის, ამიტომ პირველი ჯამიც მიისწრაფის გარკვეულ ზღვართან, რომელიც დამოუკიდებელია შემომსაზღვრავ მრუდის სახისაგან. ეს ზღვარი იწოდება **T ცხრილის ჯამად**. ასეთი T ცხრილის ჯამის გამოთვლა, როგორც ეს გამომდინარეობს დადებითელემენტებიან ცხრილების მიმართ მოყვანილ მსჯელობიდან, შეიძლება მოხდეს როგორც სტრიქონებით, ისე სვეტებით. ცხადია, ამნაირად, რომ თუ მოცემული ცხრილი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს მისი ელემენტების ნიშნები, მას შეიძლება მოვექცეთ ისევე, როგორც კრებად დადებითწევრებიან ცხრილს; მაგრამ აქ არსებითად აუცილებელია, რომ დადებითწევრებიანი T_1 წკრივი იყოს კრებადი.

თუ T_1 ცხრილი არის განშლადი, მაშინ განშლადი იქნება აგრეთვე T' და T'' ცხრილებს შორის ერთი მაინც. თუ ერთი მათგანი, მაგალითად T' განშლადია, ხოლო მეორე T''— კრებადი, მაშინ T ცხრილის იმ ელემენტთა ჯამი, რომლებიც მოთავსებულია რაიმე კეტილ C მრუდის შიგნით, უსაზღვროდ იზრდება ამ მრუდის სახეზე დამოუკიდებლად, როდესაც ეს მრუდი ყოველი მიმართულებით შორდება დასაბამს. იმ შემთხვევაში თუ ორივე T' და T'' ცხრილი განშლადია, წინა მსჯელობიდან გამომდინარეობს მხოლოდ ის, რომ T ცხრილის იმ ელემენტთა ჯამი, რომლებიც მოთავსებულია კეტილ C მრუდის შიგნით, უდრის ორ უსაზღვროდ ზრდად ჯამის სხვაობას, როდესაც C მრუდი უსაზღვროდ შორდება ყოველი მიმართულებით დასაბამს. აქ შეიძლება მოხდეს, რომ T ცხრილის იმ ელემენტთა ჯამი, რომლებიც მოთავსებულია C-ს შიგნით, მიისწრაფის სრულიად სხვადასხვა ზღვრებისაკენ იმისდა მიხედვით თუ რა სახისაა C მრუდი და თუ რანაირად შორდება ის დასაბამს, ე. ი. ამ ჯამის დადებითი და უარყოფითი წევრების რიცხვის ფარდობითი ზრდის მიხედვით; ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძ-

ლება ეს ჯამი უსასრულობისაკენაც კი მიისწრაფოდეს, ანდა არ უახლოვდებოდეს არავითარ ზღვარს. თუ კერძოდ, ცხრილი არ არის აბსოლუტურად კრებადი შესაძლებელია ჩვენ მივიღოთ სულ სხვადასხვა ჯამები მოვახდენთ რა გამოთვლას სტრიქონებით ან სვეტებით.

ა რ ნ დ ტ მ ა (Arndt) მოგვცა შემდეგი მაგალითი [1]. განვიხილოთ ცხრილი:

$$\begin{array}{|l}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right),\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right),\ldots,\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right),\ldots\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2,\ldots,\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2,\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n,\ldots,\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n,\ldots
\end{array}$$

ეს ცხრილი შეიცავს უსასრულო სიმრავლეს როგორც დადებითი ისე უარყოფითი წევრებისას. ყოველი ცალკე სტრიქონის ელემენტებიდგან ან და ყოველი ცალკე სვეტის ელემენტებიდგან შედგენილი წკრივი კრებადია. n-ური სტრიქონის ელემენტებიდგან შედგენილი წკრივის ჯამი, ცხადია, უდრის:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

ამნაირად, თუ ზემო ცხრილის ჯამს სტრიქონებით ვიანგარიშებთ, მივალთ შემდეგი კრებადი წკრივის ჯამის გამოანგარიშებამდე:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots,$$

რომლის ჯამი უდრის $\frac{1}{2}$. მეორეს მხრივ განვიხილოთ $(p-1)$ სვეტის წევრებით შედგენილი წკრივი, რომელიც არის:

$$\frac{1}{p}\left[\left(\frac{p-1}{p}\right)+\left(\frac{p-1}{p}\right)^2+\cdots+\left(\frac{p-1}{p}\right)^n+\cdots\right]-$$
$$-\frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{p}{p+1}\right)+\left(\frac{p}{p+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{p}{p+1}\right)^n+\cdots\right].$$

ეს წკრივი კრებადია და მისი ჯამი უდრის:

$$\frac{p-1}{p}-\frac{p}{p+1}=\frac{-1}{p(p+1)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}$$

მაშასადამე, თუ ვიანგარიშებთ ზემო ცხრილის ჯამს სვეტების მიხედვით, ჩვენ მივალთ შემდეგ კრებად წკრივზე:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\right)+\cdots,$$

რომლის ჯამი არის $-\frac{1}{2}$.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ გამოთვლებში ორმაგი წკრივებით სარგებლობა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ეს წკრივები არის აბსოლუტურად კრებადი.

---

[1] Grunert's Archiv, ტ. XI, გვ. 319.

გადავიდეთ ახლა წარმოსახვითწევრებიან ორმაგ წკრივებზე. თუ (26) ცხრილის ელემენტები წარმოსახვითია, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ ორი სხვა T' და T'' ცხრილი ისე, რომ T' ცხრილის თითოეული ელემენტი უდრიდეს T ცხრილის შესაბამ ელემენტის ნამდვილ ნაწილს და T'' ცხრილის თითოეული ელემენტი უდრიდეს T ცხრილის შესაბამ ელემენტის i-თან მდგომ კოეფიციენტს. თუ T_1 ცხრილი, რომლის თითოეული ელემენტი უდრის T ცხრილის შესაბამ ელემენტის მოდულს, კრებადია, მაშინ T' და T'' ცხრილებიც იქნება **აბსოლუტურად კრებადი**. ასეთი ცხრილის ელემენტთა ჯამი, რომლებიც მოქცეულია რომელიმე ცვლადი ჩაკეტილი მრუდის შიგნით, მიისწრაფის ზღვარისაკენ, როდესაც შემომსაზღვრავი მრუდი მიდის უსასრულოებში ყოველი მიმართულებით. ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული შემომსაზღვრელ მრუდზე და იწოდება მოცემულ ცხრილის **ჯამად**. აბსოლუტურად კრებად ცხრილის ჯამიც შეიძლება გამოვთვალოთ სტრიქონების ან და სვეტების მიხედვით.

აბსოლუტურად კრებადი ორმაგი წკრივი შეიძლება შევცვალოთ ჩვეულებრივი წკრივით, რომელიც შედგენილია ისეთივე ელემენტებით, როგორითაც მოცემული ორმაგი წკრივი. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველთვის შეიძლება (26) ველის უჯრედების დანომვრა ისე, რომ თითოეულ უჯრას ჰქონდეს გარკვეული ნომერი და არც ერთი უჯრა არ იქნეს გამოტოვებული. სხვანაირად, თუ ჩვენ განვიხილავთ, ერთი მხრით, ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ \ldots,$$

და მეორე მხრით, ყველა რიცხვის წყვილს (i, k), სადაც $i>0$, $k>0$, მაშინ შეიძლება თითოეული წყვილი დაუკავშიროთ ზემომიმდევრობის გარკვეულ რიცხვს ისე, რომ პირიქით, ყოველ n რიცხვს შეესაბამებოდეს რიცხვთა ერთი წყვილი. მართლაც დავწეროთ ყველა ეს წყვილი ერთი მეორის შემდეგ, შემდეგნაირად: პირველად ის წყვილები დავწეროთ, რომელთა რიცხვების ჯამი ნაკლებია $i+k$, ხოლო იმ წყვილებთაგან, რომელთა რიცხვების ჯამი ტოლია $i+k$ პირველად დავწეროთ ის, რომლის i მეტია. ამრიგად ჩვენ მივიღებთ წყვილების შემდეგ მიმდევრობას:

$$(0, 0);\ (1, 0),\ (0, 1);\ (2, 0),\ (1, 1),\ (0, 2);\ (3, 0),\ (2, 1),\ (1, 2),\ (0, 3);\ \ldots \qquad (30)$$

საერთოდ, დავსწერთ რა ყველა წყვილს, რომელთათვის $i+k<n$ შემდეგ დაიწერება ის წყვილები, რომელთათვის $i+k=n$, დაწყებული $(n, 0)$ წყვილიდან i-ის თანდათანობით შემცირებით თითო ერთეულით ნულამდე. ცხადია, რომ თითოეულ წყვილს წინ უძღვის დასრულებული რიცხვი წყვილებისა და, მაშასადამე, უჭერია გარკვეული ადგილი ზემო მიმდევრობაში. წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ ჩვენ დავწერეთ ორმაგი აბსოლუტურად კრებადი $\Sigma\Sigma a_{ik}$ წკრივის წევრები ზემო ნაჩვენები წესით; ჩვენ მივიღებთ უბრალო წკრივს:

$$a_{00}+a_{10}+a_{01}+a_{20}+a_{11}+a_{02}+\cdots+a_{n0}+a_{n-1,1}+\cdots; \qquad (31)$$

ამ უბრალო წკრივს ექნება იგივე წევრები, რაც ზემო განხილულ ორმაგ წკრივს, იგი იქნება აბსოლუტურად კრებადი და მას ექნება იგივე ჯამი, რაც ზემო ორმაგ წკრივს. ცხადია რომ ეს გარდაქმნის ხერხი არ არის ერთად ერთი, რადგან ჩვენ შეგვიძლია გარდავანაცვლოთ წკრივის წევრები ნებისმიერად. პირიქით, ყოველი აბსოლუტურად კრებადი წკრივი შეიძლება გარდაქმნილ იქნას ორმაგ წკრივათ უსასრულო მრავალი წესით. ამ გარდაქმნას დიდი გამოყენება აქვს ზოგიერთ იგივეობათა[1] გამოყვანის დროს.

[1] Tannery, lintroduction à la théorie des fonctions d'une variable, გვ. 67.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ორმაგ წკრივის ცნება არსებითად არ განსხვავდება ჩვეულებრივ წკრივის ცნებიდან. ზემოთ ჩვენ ვნახეთ, რომ აბსოლუტურად კრებად წკრივში შეიძლება რამოდენიმე მისი წევრი შევცვალოთ მათი ჯამით და დავალაგოთ წევრები ნებისმიერი რიგით, გავავრცელებთ რა ამ თვისებებს ჩვენ ბუნებრივად მივალთ ორმაგ წკრივებამდე.

162. ჯერადი წკრივები. ორმაგ წკრივის ცნება შეიძლება საკმაოდ გაფართოვებული იქნეს. ჯერ განვიხილოთ ისეთი წკრივები, რომელთა თითოეული a_{mn} წევრი დამოკიდებულია ორ მაჩვენებელზე, რომლებიც იცვლება $-\infty$-დან $+\infty$-დე. ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ ამ წკრივის წევრები მოთავსებულია იმ სწორკუთხოვან ველის უჯრებში, რომელიც უსაზღვროდ ვრცელდება ყოველ მიმართულებით; ცხადია, რომ ასეთი $\sum\sum a_{mn}$ ორმაგი წკრივი შეიძლება დავანაწილოთ ოთხ, ზემო განხილულ წკრივის მგზავს, წკრივად.

კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია წკრივის ცნების შემდეგი განზოგადოება. განვიხილოთ წკრივი, რომლის თითოეული $a_{m_1, m_2 \dots m_p}$ წევრი დამოკიდებულია p მაჩვენებელზე: $m_1, m_2 \dots m_p$, რომლებიც იცვლება 0-ან $+\infty$-მდე ან $-\infty$-დან $+\infty$-დე, გარდა ამისა შეიძლება კიდევ, რომ ეს მაჩვენებლები შეზღუდული იყოს რაიმე უტოლობებით. თუმცა არ შეგვიძლია ვისარგებლოთ გეომეტრიული წარმოდგენით, როდესაც მაჩვენებელთა რიცხვი სამს აჭარბებს, მაგრამ იმაში კი ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ დებულებები, რომელნიც მიიღება ორჯერად წკრივებისათვის, შეიძლება გავრცელებულ იქნას p ჯერადობის წკრივებზედაც.

ჯერ დავუშვათ რომ ყველა $a_{m_1, m_2, \dots, m_p}$ წევრი ნამდვილია და დადებითი. ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ ჯერ ავიღეთ ამ წკრივის რამოდენიმე წევრის ჯამი; შემდეგ შევადგინოთ კიდევ სხვა რამოდენიმე წევრიდან მეორე ჯამი და მივუმატოთ პირველს და ასე შემდეგ, ისე, რომ თითოეული წევრი მოცემულ წკრივისა შედიოდეს ერთერთ ამ ჯამთაგანში და, მაშასადამე, ყველა უკანასკნელში. ვთქვათ, $S_1, S_2, \dots S_n$ არის ასეთნაირად მიღებულ ჯამთა მიმდევრობა. თუ n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს S_n ჯამი მიისწრაფის გარკვეულ S ზღვარისაკენ, მაშინ მოცემული წკრივი იწოდება კრებადად და მისი ჯამი არის S რიცხვი. როგორც ორმაჩვენებლიან წკრივის შემთხვევაში, S ჯამი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ ჩვენ, რა კანონით ვზრდით უსაზღვროდ შესაკრებ წევრთა რიცხვს. წევრებს თუ აქვს სხვადასხვა ნიშანი ან თუ წევრები არის წარმოსახვითი, მაშინაც წკრივი იქნება კრებადი, იმ შემთხვევაში, თუ კრებადია მისი ცალკე წევრების მოდულებისაგან შედგენილი წკრივი.

163. კოშის თეორემის განზოგადოება. ჯერადი წკრივების კრებადობა-განშლადობის საკითხი ხშირად შეიძლება გადაწყვეტილი იქნას შემდეგი თეორემის დახმარებით, რომელიც წარმოადგენს კ ო შ ი ს (§ 153) თეორემის განზოგადოებას. ვთქვათ $f(x, y)$ არის ორი x, y ცვლადის ფუნქცია, რომელიც დადებითია ჩაკეტილ Γ მრუდის გარეთ მდებარე, ყველა (x, y) წერტილისათვის და კლებულობს როცა (x, y) წერტილი შორდება კოორდინატთა სათავეს. განვიხილოთ ერთი მხრით ორჯერადი ინტეგრალი $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$, გავრცელებული რგოლისებურ არეზე, რომელიც მოქცეულია Γ მრუდსა და რომელიმე მეორე მის გარეთ მდებარე ისეთ C მრუდს შორის, რომელიც უსაზღვროდ შორდება

სათავეს ყოველი მიმართულებით. მეორე მხრით ავიღოთ წკრივი $\Sigma f(m, n)$, სადაც ჩვენ m და n მაჩვენებლებს ვაძლევთ ისეთ მთელ დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებს, რომელთათვის (m, n) წერტილი მდებარეობს Γ მრუდის გარეთ.

ამ პირობებში ორმაგი წკრივი იქნება კრებადი, თუ ორჯერად ინტეგრალს აქვს ზღვარი და პირიქით.

C და Γ მრუდეებს შორის მოქცეული არე დავყოთ კვადრატებად ღერძების პარალელური წრფეებით: $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ და $y=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, თუ ჩვენ ავიღებთ თითოეულ კვადრატში სათავედან უდიდესად დაშორებულ წვეროს, მაშინ ცხადია, რომ შესაბამისი ჯამი $\Sigma f(m, n)$ იქნება ნაკლები, ვიდრე ორმაგი ინტეგრალი $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$, გავრცელებული C და Γ მრუდებს შორის მოქცეულ არეზე. დავუშვათ, რომ C მრუდი უსაზღვროდ შორდება Γ მრუდს; თუ ამ შემთხვევაში ორჯერადი ინტეგრალი მიისწრაფის S ზღვარისაკენ, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ წკრივის ნებისმიერი რიცხვის წევრთა ჯამი ნაკლებია ერთ გარკვეულ რიცხვზე; და, მაშასადამე, ეს წკრივი არის კრებადი. ასევე დავრწმუნდებით, რომ თუ ორმაგი წკრივი კრებადია, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი ნაკლებია ერთ გარკვეულ რიცხვზე; მაშასადამე, ეს ინტეგრალი მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ. შევინარჩუნებთ შესაბამ დაშვებებს თეორემა გავრცელდება აგრეთვე p მაჩვენებლიან ჯერად წკრივებზე; აქ საჭიროა იგი შედარებულ იქნას p ჯერად ინტეგრალებთან.

ასე, მაგალითად, ორმაგი წკრივი, რომლის ზოგადი წევრი არის $\frac{1}{(m^2+n^2)^{\mu}}$ სადაც m და n ღებულობენ ყველა მთელ მნიშვნელობას $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, გარდა $m=n=0$-სა, არის კრებადი, როცა $\mu>1$, და განშლადი, როცა $\mu \leqslant 1$. მართლაც ორჯერად ინტეგრალს:

$$\int\int \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2)^{\mu}}, \tag{32}$$

გავრცელებულს ისეთ წრის გარედმდებარე არეზე, რომლის ცენტრს კოორდინატთა სათავეზეა, აქვს სასრული მნიშვნელობა, როცა $\mu>1$ და იზრდება უსაზღვროთ, როცა $\mu \leqslant 1$ (§ 127).

როგორც უფრო ზოგადი მაგალითი, განვიხილოთ ჯერადი წკრივი, რომლის ზოგად წევრს აქვს სახე:

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_p^2)^{\mu}},$$

სადაც გამორიცხულია მნიშვნელობათა შემდეგი სისტემა $m_1=m_2=\ldots=m_p=0$; ეს წკრივი იქნება კრებადი, როცა $2\mu>p$[1].

[1] უფრო ზოგადი დებულებები იხ. Jordan, Traité d'Analyse. ტ. I გვერ. 163.

164. ჯერადი წკრივები ცვლადი წევრებით. ვთქვათ ჩვენ გვაქვს ორმაგი წკრივი, ან და ზოგადობისათვის p განზომილების ჯერადი წკრივი, რომლის წევრები m ნებისმიერ $x, y, z, \ldots$ ცვლადის ფუნქციებია და რომელიც აბსოლუტურად კრებადია D არეში. ამბობენ, რომ ამ არეში წკრივი არის თ ა ნ ა ბ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა: როგორიც არ უნდა იყოს წინასწარ მიცემული დადებითი ε რიცხვი, ყოველთვის შეიძლება ვიპოვოთ წკრივის წევრების ისეთი სასრულო რიცხვი N, რომ სხვაობა წკრივის S ჯამისა და მისი n წევრთა ჯამს შორის, სადაც n წევრში წკრივის N პირველი წევრი შედის, აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები იყოს ε-ზე, $x, y, z \ldots$ ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის D არეში.

§ 29 და 107-ის მსჯელობათა განმეორებით ამტკიცებენ, რომ ჯამი თანაბრად კრებადი წკრივისა, რომლის ყველა წევრი უწყვეტი ფუნქციებია D არეში, არის აგრეთვე უწყვეტი ფუნქცია ამ არეში; ასეთი წკრივი შეიძლება გაინტეგრებული იქნეს წევრობრივ ყოველ სასრულო δ არეში, რომელსაც აქვს q განზომილება ($q \leqslant m$) და მოთავსებულია D-ში. სრულიად ასეთნაირადვე შეიძლება ნებისმიერ რიცხვჯერ გავაწარმოოთ წევრობრივ აბსოლუტურად კრებადი წკრივი, თუ ყველა ასეთნაირად მიღებული წკრივი იკრიბება თანაბრად.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ ჯერადი წკრივები იკრიბება თანაბრად, თუ რომ მისი ნებისმიერი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება დადებითწევრებიან კრებად წკრივის შესაბამ წევრს (§ 29).

III. უსასრულო ნამრავლნი

165. განსაზღვრა და ზოგადი თვისებები. ვთქვათ მოცემულია ნამდვილი ან წარმოსახვითი წევრებიანი უსასრულო მიმდევრობა შემდეგი სახით:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots;$$

ანვიხილოთ ნამრავლთა მიმდევრობა:

$$P_0 = 1 + u_0,$$

$$P_1 = (1 + u_0)(1 + u_1),$$

$$P_2 = (1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n).$$

თუ P_n ნამრავლი მიისწრაფის რაიმე P ზღვარისაკენ, როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება, მაშინ უსასრულო ნამრავლს:

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n) \ldots \tag{33}$$

ეწოდება *კრებადი ნამრავლი* და P რიცხვი არის ამ ნამრავლის მნიშვნელობა.

ცხადია, რომ როდესაც ერთ-ერთი $1+u_m$ მამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ თვით P_n ნამრავლიც, სადაც $n \geqslant m$, აგრეთვე არის ნული, და მაშასადამე, $P=0$. მაგრამ შეიძლება უსასრულო ნამრავლი უახლოვდებოდეს ნულს მაშინაც, როცა არც ერთი $(1+u_m)$ მამრავლი არ არის ნული. ასეთია, მაგალითად, ნამრავლი:

$$P_n=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n};$$

ცხადია, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს ეს ნამრავლი მიისწრაფის ნულისაკენ. რადგან უსასრულო ნამრავლთა კრებადობის პირობები ყოველთვის არ გამოიყენება ასეთ განსაკუთრებულ შემთხვევაში, ამიტომ ჩვენ *კრებად ნამრავლს* ვუწოდებთ მხოლოდ ისეთ ნამრავლს, რომელთა P_n მიისწრაფის გარკვეული P ზღვარისაკენ, *რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან*. როცა P_n-ს აქვს ზღვარი ნული, ჩვენ ვიტყვით რომ *ნამრავლი არის ნული*. და თუ P_n-ს არავითარი ზღვარი არა აქვს ვიტყვით, რომ *ნამრავლი არის განშლადი*.

უსასრულო ნამრავლი რომ იყოს კრებადი და ნულისაგან განსხვავებული, აუცილებელია, რომ u_n მიისწრაფოდეს ნულისაკენ. მართლაც თუ P_n მიისწრაფის P ზღვარისაკენ, მაშინ $P_n-P_{n-1}=P_{n-1}u_n$ სხვაობა უნდა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ; რადგან P_{n-1} მამრავლს ზღვარად აქვს P, ნულისაგან განსხვავებული, ამიტომ, ცხადია, u_n მამრავლი მიისწრაფის ნულისაკენ. ეს მსჯელობა მიუღებელია, როცა ნამრავლი უდრის ნულს; ზემოთმოყვანილ მაგალითით ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ ასეთ შემთხვევაში შეიძლება u_n არ მიისწრაფოდეს ნულისაკენ.

ზემო (იხ. § 5) გაკეთებულ შენიშვნების საფუძველზე უსასრულო ნამრავლის კრებადობა განშლადობის გამოკვლევა დაიყვანება წკრივთათვის ამავე საკითხების შესწავლაზე.

მივიღოთ აღნიშვნები:

$$v_0=P_0=(1+u_0),\quad v_1=P_1-P_0=(1+u_0)\,u_1,\ldots,$$

და საზოგადოდ

$$v_n=P_n-P_{n-1}=(1+u_0)\,(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})\,u_n; \tag{34}$$

განვიხილოთ დამხმარე წკრივი:

$$v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots \tag{35}$$

$\Sigma_n=v_0+v_1\ldots v_n$, ჯამი, ცხადია, უდრის P_n; ამგვარად ეს წკრივი არის კრებადი ან განშლადი უსასრულო

$$\prod(1+u_n)$$

ნამრავლთან ერთად; ე. ი. Σ ჯამი უდრის უსასრულო ნამრავლის P მნიშვნელობას.

166. აბსოლუტურად კრებადი ნამრავლი. დავუშვათ ჯერ, რომ ყველა u_n ნამდვილი და დადებითი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში P_n ნამრავლი იზრდება n-თან

ერთად, და იმისათვის რომ დავამტკიცოთ მისი კრებადობა, საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ n რიცხვის ყველა მნიშვნელობისათვის P_n ნამრავლი ერთ გარკვეულ რიცხვზე ნაკლები რჩება. ჩვენ გვაქვს ერთის მხრივ:

$$P_n > 1 + u_0 + u_1, + \ldots + u_n;$$

მეორე მხრით, ყოველი დადებით x-ისათვის გვაქვს: $1 + x < e^x$ და, მაშასადამე:

$$P_n < e^{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}.$$

პირველი უტოლობიდან ჩანს, რომ თუ P_n ნამრავლი მიისწრაფის რომელიმე გარკვეულ P ზღვარისაკენ, მაშინ მუდამ $u_0 + u_1 + \ldots + u_n < P$. მაშასადამე, დადებითნიშნიანი წკრივი:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{36}$$

არის კრებადი. შებრუნებით, წარმოვიდგინოთ, რომ ეს წკრივი კრებადია და მისი ჯამი არის S; მაშინ მეორე უტოლობიდან გვაქვს $P_n < e^S$; მაშასადამე, P_n ნამრავლი მიისწრაფის ზღვარისაკენ. *ამრიგად უსასრულო* $\prod\limits_0^{+\infty} (1 + u_n)$ *ნამრავლი, რომელშიაც ყველა* u_n *სიდიდე ნამდვილი და დადებითი რიცხვებია, არის კრებადი ან განშლადი (36) წკრივთან ერთად.* განვიხილოთ ახლა უსასრულო ნამრავლი:

$$(1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_n) \ldots, \tag{37}$$

რომლის წევრები ნებისმიერი რიცხვებია.

ვთქვათ $U_i = |u_i|$. *თუ წკრივი:*

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots \tag{38}$$

არის კრებადი, მიშინ (37) უსასრულო ნამრავლი იქნება აგრეთვე კრებადი. მართლაც დავუშვათ როგორც ზემოთ:

$$v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots (1 + u_{n-1})\, u_n,$$

$$V_n = (1 + U_0)(1 + U_1) \ldots (1 + U_{n-1})\, U_n.$$

ისე როგორც ზემოთ, თუ დადებითნიშნიანი $\sum U_i$ წკრივი არის კრებადი, მაშინ კრებადი იქნება აგრეთვე უსასრულო ნამრავლი: $\prod (1 + U_i)$, და, მაშასადამე, წკრივიც:

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_n + \ldots \tag{39}$$

მაგრამ, ცხადია, რომ $|u_n| < V_n$: მაშასადამე, წკრივი:

$$v_0 + v_1 + \ldots v_n + \ldots \tag{40}$$

არის აბსოლუტურად კრებადი, და როგორც შემჩნეული იყო ამ წკრივის ჯამი არის შემდეგი ნამრავლის ზღვარი

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)$$

როცა n უსაზღვროდ იზრდება. ამ პირობებში $\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ ნამრავლს ეწოდება *აბსოლუტური კრებადი ნამრავლი.*

აბსოლუტურად კრებადი უსასრულო ნამრავლნი განსაკუთრებით საინტერესოა, ისე როგორც აბსოლუტურად კრებადი წკრივები, რომლებთანაც მათ ბევრი რამ აქვთ საერთო. ასე მაგალითად, აბსოლუტურ კრებად უსასრულო ნამრავლში შეიძლება მამრავლთა მიმდევრობა ნებისმიერად შევცვალოთ, ნამრავლის შეუცვლელად. დავამტკიცოთ ჯერ, რომ თუ მოცემულია აბსოლუტურად კრებადი უსასრულო ნამრავლი, მაშინ შეიძლება ყოველი დადებით ε რიცხვისათვის ვიპოვოთ ისეთი n რიცხვი, რომ ერთისა და ნებისმიერ რიცხვის მამრავლთა $(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)$ ნამრავლის სხვაობის მოდული იყოს ნაკლები ε-ზე, როცა ყველა $\alpha, \beta\ldots, \lambda$ მაჩვენებელი მეტი n-ზე. მართლაც, შევასრულებთ რა ორივე ნაწილში გამრავლებას, შეიძლება უშუალოდ დავრწმუნდეთ, რომ

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)-1|<(1+U_\alpha)(1+U_\beta)\ldots(1+U_\lambda)-1,$$

და მაშასადამე,

$$|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\ldots(1+u_\lambda)-1|<e^{U_\alpha+U_\beta+\cdots+U_\lambda}-1.$$

რადგანაც $\sum U_i$ წკრივი კრებადია, ამიტომ შეიძლება n რიცხვი ავიღოთ იმდენად დიდი, რომ ჯამი: $U_\alpha+U_\beta+\ldots+U_\lambda$ ნაკლები იყოს $\ln(1+\varepsilon)$-ზე, როცა ყველა $\alpha, \beta\ldots, \lambda$ მაჩვენებელი მეტია n-ზე. მაშასადამე, ავიღებთ რა n რიცხვს საკმარისად დიდს, შეიძლება წინა უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ყოველ დადებით ε რიცხვზე ნაკლები გავხადოთ.

ამასთან შევნიშნავთ, რომ აქედან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება: *აბსოლუტურად კრებადი ნამრავლი არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, თუ არც ერთი მამრავლთაგანი არ უდრის ნულს.* მართლაც დავუშვათ, რომ არც ერთი მამრავლი ნულს არ უდრის; ავირჩიოთ n რიცხვი იმდენად დიდი, რომ ყოველ დადებით p რიცხვისათვის ადგილი ქქნეს პირობას:

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p})-1|<\alpha,$$

სადაც α ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. ცხადია, რომ $\prod\limits_{\nu=0}^{+\infty}(1+u_{n+\nu})$ უსასრულო ნამრავლის მოდული მეტია $(1-\alpha)$-ზე და, მაშასადამე, P ნამრავლი, რომელიც უდრის წინა ნამრავლს გამრავლებულს P_n-ზე, არ შეიძლება უდრიდეს

ნულს. ამის შემდეგ განვიხილოთ აბსოლუტურად კრებადი უსასრულო ნამრავლი:

$$(1+u_0)\,(1+u_1)\dots(1+u_n)\dots, \tag{41}$$

და ვთქვათ, რომ

$$(1+u_0')\,(1+u_1')\dots(1+u_n')\dots, \tag{42}$$

არის მეორე უსასრულო ნამრავლი, რომელიც შედგენილია იმავე მამრავლებით, მხოლოდ აღებული სხვა მიმდევრობით. ეს მეორე ნამრავლიც აგრეთვე იქნება აბსოლუტურად კრებადი, რადგან $\sum U_i'$ წკრივი შედგება იმავე წევრებისაგან, რომლებიდანაც შედგება $\sum U_i$ წკრივი. აღვნიშნოთ (41) და (42) ნამრავლთა მნიშვნელობანი P და P'-ით, შესაბამად. ვთქვათ P_n არის (41) ნამრავლის პირველ n მამრავლთა ნამრავლი; ყველა ეს მამრავლი იმყოფება აგრეთვე (42) ნამრავლში, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ისეთი $m>n$ რიცხვი, რომ P_m' ნამრავლი შეიცავდეს P_n-ის ყველა მამრავლს. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{P_m'}{P_n}=(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\dots(1+u_\lambda).$$

სადაც ყველა $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ მამრავლი მეტია n-ზე; წინას საფუძველზე n რიცხვი შეიძლება ავიღოთ იმდენად დიდი, რომ:

$$\left|\frac{P_m'}{P_n}-1\right|<\varepsilon,$$

რა გინდ მცირე არ უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი. მაგრამ n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს m რიცხვიც უსასრულოდ იზრდება და $\frac{P_m'}{P_n}$ ფარდობას ზღვარად აქვს $\frac{P'}{P}$. მაშასადამე $P'=P$.

167. თანაბრადკრებადი ნამრავლნი. განვიხილოთ (33) უსასრულო ნამრავლი, სადაც $u_0, u_1, u_2 \dots u_n \dots$ არის უწყვეტი ფუნქციები, ნამდვილი ან წარმოსახვითი, ერთი ან რამოდენიმე $x, y, \dots t$ ცვლადების; ცხადია, რომ ეს წინადაშვება შეიცავს იმ შემთხვევასაც, როდესაც $u_0, u_1, u_2 \dots$ არის ერთ კომპლექსურ z ცვალებადის ფუნქციები. ეს ნამრავლი რომელიმე D არეში იწოდება თანაბრად კრებადად, როცა ზემოთ განზღვრული $\sum v_n$ წკრივი, რომლის ჯამი უდრის უსასრულო ნამრავლის მნიშვნელობას, არის თანაბრად კრებადი იმავე არეში. ამ შემთხვევაში P ნამრავლი არის დამოუკიდებელი ცვლადების უწყვეტი ფუნქცია.

უსასრულო ნამრავლი იქნება თანაბრად კრებადი, თუ თანაბრად კრებადია წკრივი:

$$U_0+U_1+\dots+U_n+\dots \tag{43}$$

მართლაც, დავუბრუნდეთ (35) წკრივს, ჩვენ გვაქვს:

$$v_{n+1}+\ldots+v_{n+p}=P_{n+p}-P_n=P_n[(1+u_{n+1})\ldots(1+u_{n+p})-1];$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ:

$$|P_n|<(1+U_0)(1+U_1)\ldots(1+U_n)<e^{U_0+U_1+\ldots+U_n},$$

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p})-1|<e^{U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}}-1.$$

მაგრამ რადგან (43) წკრივი თანაბრად კრებადია D არეში, ამიტომ იგი წარმოადგენს აღნიშნულ არეში უწყვეტ ფუნქციას, რომელიც გარკვეულ M საზღვარზე ნაკლები რჩება; (43) წკრივის თანაბრად კრებადობისა გამო, შეიძლება შევარჩიოთ N რიცხვი იმდენად დიდი, რომ ჯამი:

$$U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}$$

სადაც $n\geqslant N$, p რიცხვის ყოველი მნიშვნელობისათვის D არეში დარჩეს ნაკლები გარკვეულ დადებით α რიცხვზე. მაშასადამე, n-ის ასეთნაირად არჩევის შემდეგ, გვაქვს:

$$|v_{n+1}+\ldots+v_{n+p}|<e^M(e^\alpha-1).$$

რადგან α რიცხვი შეიძლება არჩეულ იქნას ისე, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას: $e^M(e^\alpha-1)<\varepsilon$, როგორიც არ უნდა იყოს მცირე ε რიცხვი, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ $\sum v_n$ წკრივი არის თანაბრად კრებადი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემო ყველა თვისება ვრცელდება აგრეთვე შემდეგი სახის უსასრულო ნამრავლზე $\Pi\,(1+u_{mn})$, სადაც თითოეულ მამრავლს აქვს ორი სხვადასხვა m, n ინდექსი, რომლებიც დამოუკიდებლად იცვლება 0-ან $+\infty$-მდე. თუ ორმაგი ჯამი $\sum U_{mn}$ არის კრებადი, მაშინ ზემო ნამრავლს აქვს გარკვეული მნიშვნელობა, რომელიც არ არის დამოკიდებული იმაზე თუ როგორი წესით იზრდება მამრავლთა რიცხვი. აბსოლუტურად კრებადი ორმაგი წკრივი უამრავი ხერხებით დაიყვანება უბრალო წკრივამდე; ასევე აბსოლუტურად კრებადი ორმაგი უსასრულო ნამრავლი უამრავი ხერხებით დაიყვანება მარტივ აგრეთვე აბსოლუტურად კრებად უსასრულო ნამრავლამდე. თუ ყველა u_{mn} წევრი x, y... ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია და $\sum U_{mn}$ თანაბრად კრებადია რაიმე D არეში, მაშინ უსასრულო ნამრავლი: $\Pi\,(1+u_{mn})$ თანაბრად იკრიბება და იგი D არეში წარმოადგენს x, y... ცვლადების უწყვეტ ფუნქციას.

168. ნამდვილი უსასრულო ნამრავლნი. დავუბრუნდეთ, ნამდვილ მამრავლთა უსასრულო ნამრავლს:

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$$

და განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც u_0, u_1, u_2, ... მიმდევრობა შეიცავს უარყოფით წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. თუ ყველა ეს წევრი რომელიმე რიგიდან მოყოლებული,

მოთავსებულია -1 და 0 შორის, მაშინ ამოცანა დადის შემდეგი სახის უსასრულო ნამრავლის შესწავლამდე:

$$(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)\ldots, \tag{44}$$

სადაც $v_0, v_1, v_2 \ldots v_n, \ldots$ არის დადებითი და ნაკლები ერთზე. ცხადია, რომ n რიცხვი ზრდასთან $(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)$ ნამრავლი კლებულობს, მაგრამ მუდამ რჩება დადებითი; მაშასადამე, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს ეს ნამრავლი მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ, რომელიც ან ნულია ან რაიმე დადებითი რიცხვი. თუ Σv_i წკრივი კრებადია, მაშინ (44) უსასრულო ნამრავლი იკრიბება აბსოლუტურად; მაშასადამე $(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)$ ნამრავლს აქვს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი (§ 166).

რომ იქნეს შესწავლილი შემთხვევა, როცა Σv_i წკრივი არის განშლადი, შევნიშნოთ, რომ x-ის ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის გვაქვს:

$$1+x<e^x,$$

ფუნქციას e^x-x-1 აქვს მინიმუმი, როცა $x=0$. ამიტომ

$$1-v_0<e^{-v_0},\ 1-v_1<e^{-v_1}, \ldots,\ 1-v_n<e^{-v_n},$$

და მაშასადამე

$$(1-v_0)(1-v_1)\ldots(1-v_n)<e^{-(v_0+v_1+\cdots+v_n)}.$$

რადგან $v_0+v_1+\ldots+v_n$ ჯამი უსაზღვროდ იზრდება n-თან ერთად, ამიტომ უსასრულო ნამრავლი არის ნული. ამრიგად, როცა Σv_i წკრივი არის განშლადი, მაშინ უსასრულო $\Pi(1-v_i)$ ნამრავლი ტოლია ნულის.

თუ $u_0, u_1, \ldots, u_n \ldots$ მიმდევრობა შეიცავს უსასრულო რაოდენობას როგორც დადებითი ისე უარყოფითი წევრებისას, მაშინ უსასრულო ნამრავლი იქნება კრებადი და ნულისაგან განსხვავებული მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა u_n ზოგადი წევრი ნულისაკენ მიისწრაფის (§ 165) მივიღოთ, რომ ამას აქვს ადგილი; ვინაიდან ყოველთვის შეიძლება უყურადღებოთ დავტოვოთ პირველ მამრავლთა სასრულო რიცხვი, ამიტომ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა $1+u_n$ მამრავლი არის დადებითი. ასეთ შემთხვევაში P_n ნამრავლში შევა გარკვეული რიცხვი ერთზე მეტი და გარკვეული რიცხვი ერთზე ნაკლები მამრავლები. ცხადია, ერთადერთი საეჭვო შემთხვევა იქნება ის, როდესაც n-ს უსაზღვრო ზრდის დროს ერთზე მეტი მამრავლთა ნამრავლი უსაზღვროდ იზრდება, ხოლო ერთზე ნაკლები მამრავლთა ნამრავლი ნულისაკენ მიისწრაფის. ამ შემთხვევაში ნამრავლის ბუნების მიხედვით, იგი შეიძლება იყოს კრებადი ან განშლადი; მაგრამ არ არის ძნელი დამტკიცდეს, თუ ჩავატარებთ მსჯელობას, რომელიც ანალოგიურია ნახევრად კრებადი წკრივების შემთხვევაში მოყვანილ მსჯელობისა (§ 157), რომ მსგავს ნამრავლში ყოველთვის შეიძლება მამრავლთა ისეთი დალაგება, რომ P_n ნამრავლს ჰქონდეს ზღვრად ნებისმიერი მოცემული დადებითი რიცხვი.

როცა Σu_n წკრივი არის კრებადი, ჩვენ გვაქვს ზუსტი პირობა. *P_n ნამრავლი უახლოვდება დადებითი ზღვარს ან ნულს, იმისდამიხედვით იქნება კრებადი თუ განშლადი Σu_n^2 წკრივი.*

ამ წინადადების დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ ფარდობას:

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2},$$

როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ, აქვს ზღვარად $-\dfrac{1}{2}$; მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}(1+\alpha),$$

სადაც α სიდიდის აბსოლუტური მნიშვნელობა რჩება ნაკლები $\frac{1}{2}$-ზე, როცა x-ს აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია გარკვეულ სიდიდეზე. რადგან n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს u_n მიისწრაფის ნულისაკენ, და უსასრულო ნამრავლი შეიძლება დაიწყოს ნებისმიერი მამრავლიდან, ამიტომ შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$\ln(1+u_0)=u_0-\frac{u_0^3}{2}(1+\theta_0),$$

$$\ln(1+u_1)=u_1-\frac{u_1^2}{2}(1+\theta_1),$$

$$\ln(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}(1+\theta_n),$$

სადაც ყველა $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ რიცხვი მოთავსებულია $-\frac{1}{2}$ და $+\frac{1}{2}$ შორის. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\ln P_n=u_0+u_1+\ldots+u_n-\frac{1}{2}u_0^2(1+\theta_0)-\ldots-\frac{1}{2}u_n^2(1+\theta_n); \qquad (45)$$

თუ ორივე Σu_n და Σu_n^2 წკრივი არის კრებადი, მაშინ n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს მარჯვენა მხარე მიისწრაფის სასრული სიდიდისაკენ, რადგან $u_n^2(1+\theta_n)$ მოთავსებულია $\frac{u_n^2}{2}$ და $\frac{3}{2}u_n^2$ შორის. მაშასადამე P_n ნამრავლი მიისწრაფის ნულისაგან განსხვავებულ ზღვრისაკენ. პირიქით, როცა Σu_n^2 წკრივი არის განშლადი, მაშინ (45) ფორმულის მარჯვენა მხარე არის უარყოფითი და აბსოლუტური სიდიდით უსაზღვროდ იზრდება, მაშასადამე P_n მიისწრაფის ნულისაკენ.

იმავე (45) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ უსასრულო ნამრავლი არის განშლადი ან უდრის ნულს, თუ Σu_n წკრივი არის განშლადი, ხოლო Σu_n^2 კი კრებადი. მაგრამ უნდა აღვნიშნოთ, რომ უსასრულო ნამრავლი შეიძლება იყოს კრებადი იმ შემთხვევაშიაც, როცა Σu_n და Σu_n^2 წკრივები განშლადია. მაგალითად, ავიღოთ წკრივი, სადაც:

$$u_0=u_1=u_2=0$$

და

$$u_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad u_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (n>1);$$

Σu_n წკრივი არის განშლადი, რადგან S_{2n} ჯამი ტოლია $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$-ზე; იგივე მიზეზით განშლადია აგრეთვე Σu_n^2 წკრივიც. მაგრამ უსასრულო ნამრავლი:

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\cdots$$

არის კრებადი, ვინაიდან მისი $2n$ მამრავლთა ნამრავლი ტოლია

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\text{-ის},$$

იმ დროს როცა მისი $2n+1$ მამრავლთა ნამრავლი უდრის წინა ნამრავლს გამრავლებულს $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ მამრავლზე, რომლის ზღვარი არის ერთი[1].

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1. წკრივი:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\cdots$$

არის კრებადი; წკრივი, რომელიც მიიღება მოყვანილ წკრივის წევრთა კვადრატებისაგან, აგრეთვე კრებადია. მაშასადამე, შესაბამი უსასრულო ნამრავლი:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

არის კრებადი; ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ იგი უდრის $\frac{2}{\pi}$-ს. რომ იგი გარდავქმნათ აბსოლუტურად კრებად ნამრავლად, საკმარისია გავამრავლოთ მიმდევრობით წყვილ-წყვილად მამრავლები; ამრიგად მივიღებთ:

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

2. ვთქვათ $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ არის დადებითწევრებიანი წკრივი, რომლის ორი მიმდევნო წევრთა ფარდობა არის n-ის რაციონალური ფუნქცია, რომელიც მიისწრაფის ერთისაკენ როცა n უსაზღვროდ იზრდება, ე. ი.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\ldots}{n^p+b_1n^{p-1}+\ldots}.$$

გამოვრიცხოთ განხილვიდან შემთხვევა, როცა აღნიშნული წკრივის რომელიმე წევრი არის ნული ან უსასრულო, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ:

$$u_{n+1}=u_1\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{a_1-b_1}{\nu}+\frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right),$$

სადაც $\varphi(\nu)$ არის ν-ს რაციონალური ფუნქცია, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა რჩება ნაკლები გარკვეული დადებითი რიცხვზე. როდესაც $a_1-b_1>0$, მაშინ შემდეგი წკრივის:

$$\sum\left(\frac{a_1-b_1}{\nu}+\frac{\varphi(\nu)}{\nu^2}\right). \tag{46}$$

ყველა წევრი, მოყოლებული გარკვეულიდან, არის დადებითი და ეს წკრივი განშლადია; მაშასადამე, ჩვენი პირველი წკრივის u_{n+1} ზოგადი წევრი აბსოლუტური სიდიდით იზრდება უსაზღვროდ. როდესაც $a_1-b_1=0$, მაშინ (46) წკრივი აბსოლუტურად იკრიბება და u_{n+1} მიის-

[1] იხ. Cauchy, Cours d'Analyse ან Oeuvres complètes ტ. II. სერია 2, შენიშვნა IX; Pringsheim, Mathematische Annalen, ტ. 22, 33, 42.

წრაფის ნულისაგან განსხვავებულ სასრულო ზღვარისაკენ. უკანასკნელად როდესაც $a_1-b_1<0$, მაშინ (46) წკრივის ყველა წევრი, მოყოლებული გარკვეულიდან, უარყოფითია, და წკრივი არის განშლადი; მაშასადამე, n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, u_{n+1} მიისწრაფის ნულისაკენ. ეს შედეგები ეკუთვნის გ ა უ ს ს (§ 155).

169. უსასრულო რიგის დეტერმინანტი. ვთქვათ $\sum\limits_{i,k} a_{ik}$ არის აბსოლუტურად კრებადი ორმაგი წკრივი, რომლის i, k ინდექსები იცვლება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. განვიხილოთ დეტერმინანტი:

$$D_m=\begin{vmatrix} 1+a_{-m,-m} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{-m,m} \\ a_{-m+1,-m} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{-m+1,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0,-m} & \cdots & 1+a_{0,0} & \cdots & a_{0,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,-m} & \cdots & \cdots & \cdots & 1+a_{m,m} \end{vmatrix}$$

ნამრავლი $\Pi_m=\prod\limits_{i,k}(1+|a_{ik}|)$, სადაც ორივე i, k ინდექსი იცვლება $-m$-დან $+m$-მდე, მეტია $|D_m|$-ზე, ვინაიდან D_m-ს ყოველ წევრს მოდულად აქვს Π_m-ის ერთერთი წევრი, ხოლო უკანასკნელი ნამრავლი შეიცავს აგრეთვე სხვა მამრავლებსაც, რომლებიც ყველა დადებითია. სრულიად ასევე დავრწმუნდებით, რომ $D_{m+p}-D_m$ სხვაობის ყოველ წევრს აქვს მოდულად $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ სხვაობის ერთერთი წევრი, მაგრამ $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ სხვაობა შეიცავს აგრეთვე სხვა მამრავლებსაც, რომლებიც ყველა დადებითია, ამიტომ გვექნება:

$$|D_{m+p}-D_m|<\Pi_{m+p}-\Pi_m.$$

მაგრამ, რადგან $\sum|a_{ik}|$ წკრივი არის კრებადი, ამიტომ Π_m ნამრავლს აქვს ზღვარი, როცა m უსაზღვროდ იზრდება; მაშასადამე $\Pi_{m+p}-\Pi_m$ — სხვაობა და აგრეთვე $D_{m+p}-D_m$ სხვაობაც მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა m და $m+p$ უსაზღვროდ იზრდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ D_m დეტერმინანტი აგრეთვე მიისწრაფის გარკვეულ ზღვრისაკენ (§ 5).

სავარჯიშო მაგალითები.

1. უსასრულო ნამრავლი რომ იყოს კრებადი და არა ნული, აუცილებელია და საკმარისი, ყოველ დადებით ε რიცხვს მოეძებნოს შესაბამისი n რიცხვი ისე, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას:

$$|(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\dots(1+u_{n+p})-1|<\varepsilon,$$

როგორიც არ უნდა იყოს დადებითი p რიცხვი.

2. დადებითი $u_0+u_1+\dots+u_n+\dots$ წკრივი არის კრებადი ან განშლადი შემდეგი წკრივთან ერთად:

$$\frac{u_0}{s_0}+\frac{u_1}{s_1}+\dots+\frac{u_n}{s_n}+\dots$$

[შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{s_0}{s_n}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{s_i}\right),$$

და გამოყენებული იქნას § 168 თეორემა].

3. გამოთვალეთ ორი სხვადასხვა გზით ორმაგი ცხრილის ჯამი და დაამტკიცეთ ფორმულები:

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}+\ldots=\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^2}{1-q^4}+\frac{q^3}{1-q^6}+\ldots+\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\ldots=\frac{1}{1-q}-\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}-\ldots,$$

$$\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\ldots=\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\ldots,$$

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^6}+\frac{5q^5}{1-q^{10}}+\ldots=\frac{q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3(1+q^6)}{(1-q^6)^2}+\frac{q^5(1+q^{10})}{(1-q^{10})^2}+\ldots,$$

$$\frac{\sqrt{q}}{1+q}-\frac{\sqrt{q^3}}{3(1+q^3)}+\frac{\sqrt{q^5}}{5(1+q^5)}-\ldots=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{q}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{q^3}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{q^5}-\ldots;$$

სადაც ნაგულისხმევია, რომ $|q|<1$.

4. ვთქვათ q არის დადებითი რიცხვი ნაკლები ერთზე. აღვნიშნეთ:

$$Q_1=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n}),\quad Q_2=\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}),\quad Q_3=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1});$$

და დაამტკიცეთ ფორმულა $Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3=1$.

თ ა ვ ი IX

I. მთელი წკრივები. ტრიგონომეტრიული წკრივები.

I. ტეილორის წკრივი. ზოგადი შენიშვნები.

170. ტეილორის წკრივი. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $(a, a+h)$ შუალედში წარმოებულთა უსასრულო რიცხვი, მაშინ მე-18 §-ის ფორმულაში შემავალი n რიცხვი შეგვიძლია ავიღოთ რაგინდ დიდი. თუ n რიცხვის უსასრულოდ ზრდისას R_n ნაშთი მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ ჩვენ ვღებულობთ ფორმულას:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\cdots, \qquad (1)$$

რომელიც გამოსახავს, რომ წკრივი:

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\cdots$$

არის კრებადი და ჯამად აქვს $f(a+h)$. (1) ფორმულა არის ტეილორის ფორმულა ვიწრო მნიშვნელობით, მაგრამ იგი სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა R_n ნაშთი მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ როცა მე-18 §-ის მე-(7) ფორმულა გულისხმობს წარმოებულების არსებობას მხოლოდ $(n+1)$ რიგამდე. შევცვლით რა a რიცხვს x-ით, ჩვენ შეგვიძლია (1) ფორმულა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x)+\cdots;$$

თუ დავუშვებთ $a=0$, ხოლო h-ს შევცვლით x-ით, მივიღებთ:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(0)+\cdots, \qquad (2)$$

უკანასკნელ ფორმულას ეწოდება აგრეთვე მ ა კ ლ ო რ ე ნ ი ს (Maclaurin) ფ ო რ მ უ ლ ა; მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ ყველა ეს სხვადასხვა ფორმულა არსებითად ერთი მეორის ეკვივალენტურია. მაშინ როცა მე-(2) ფორმულა გვაძლევს x-ის ფუნქციის გამწკრივებას x-ის ხარისხებად, (1) ფორმულა იძლევა h-ის ფუნქციის გამწკრივებას h-ის ხარისხებად: საკმარისია აღნიშვნათა უბრალო შეცვლა, რომ ერთი ფორმულიდან გადავიდეთ მეორეზე.

არის ერთი ფრიად ზოგადი შემთხვევა, როცა შეიძლება ვიყოთ დარწმუნებული იმით, რომ n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს R_n ნაშთი უეჭველად ნულისაკენ მიისწრაფის; ეს ის შემთხვევაა, როცა $(a, a+h)$ შუალედში x-ის ცვლილების დროს ნებითი რიგის წარმოებულის აბსოლუტური სიდიდე გარკვეულ M რიცხვზე ნაკლები რჩება. მართლაც, თუ ნაშთს ავიღებთ ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს მიერ მოცემული სახით, გვაქვს:

$$|R_n| < M\frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)},$$

და ცხადია, რომ ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი არის კრებადი წკრივის ზოგადი წევრი. ასე იქნება, მაგალითად, e^x, $\sin x$, $\cos x$ ფუნქციებისათვის. e^x-ის ყველა წარმოებული ტოლია e^x-ის და, მაშასადამე, მოცემულ შუალედში ყველას ერთი და იგივე მაქსიმუმი აქვს; რაც შეეხება $\sin x$ და $\cos x$-ის წარმოებულებს, მათი აბსოლუტური სიდიდეები არასოდეს არ აღემატება ერთს. ამიტომ (1) ფორმულა გამოიყენება ამ ფუნქციებისათვის a და h-ის ყოველი მნიშვნელობისსათვის. შევჩერდეთ მე-(2) ფორმულაზე; თუ $f(x)=e^x$, მაშინ

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\ldots,\quad f^{(n)}(0)=1,\ldots,$$

და ჩვენ მივიღებთ ფორმულას:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots,\tag{3}$$

რომელიც გამოიყენება x-ის ყველა დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობისათვის. თუ a რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ $a^x=e^{x\ln a}$, და მაშასადამე,

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1}+\frac{(x\ln a)^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots\tag{4}$$

დავუშვათ $f(x)=\sin x$; აქ უმაღლესი წარმოებულები ქმნიან პერიოდულ მიმდევრობას შემდეგი ოთხი წევრისაგან: $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$, და ამ წარმოებულთა მნიშვნელობანი როცა $x=0$ აგრეთვე ქმნიან პერიოდულ მიმდევრობას: $1, 0, -1, 0$. ამგვარად x-ის ყოველი დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობითვის ჩვენ გვაქვს:

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}+\ldots,\tag{5}$$

და სრულიად ამგვარადვე $\cos x$-სათვის მივიღებთ:

$$\cos x=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}+\ldots\tag{6}$$

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. R_n ნაშთის გამოკვლევა არც ისე მარტივია, როგორც წინა მაგალითებში; მაგრამ ეს გამოკვლევა შეიძლება გავაადვილოთ თუ შევნიშნავთ, რომ როცა ნაშთი ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშინ წკრივი:

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)$$

უეჭველად კრებადია. საერთოდ, ვიდრე ნაშთს გამოვიკვლევდეთ, ხელსაყრელია დავრწმუნდეთ წკრივის კრებადობაში; თუ a და h-ის მოცემულ მნიშვნელობა-

თათვის წკრივი განშლადია, მაშინ გამოკვლევის გაგრძელება უსარგებლოა: შეიძლება დამტკიცება, რომ R_n ნაშთი არ მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა a უსასრულოდ იზრდება.

შებრუნებული დებულება არ არის სწორი. წკრივი:

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots$$

შეიძლება იყოს კრებადი, მაგრამ იგი არ გვაძლევდეს იმ $f(x)$ ფუნქციას, რომლისგანაც იგი იყო შედგენილი; ამაში ადვილად დავრწმუნდებით თუ განვიხილავთ კოშის მიერ აღებულ შემდეგ მაგალითს. ვთქვათ:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}};$$

ჩვენ გვაქვს:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}};$$

საზოგადოდ, n-ური რიგის წარმოებულს აქვს შემდეგი სახე:

$$f^{(n)}(x)=\frac{P}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

სადაც P არის რაიმე მრავალწევრი. ყველა ეს წარმოებული $x=0$ მნიშვნელობისათვის ნულის ტოლია, ვინაიდან $e^{-\frac{1}{x}}$-ის ფარდობა x-ის ნებისმიერი დადებით ხარისხთან მიისწრაფის ნულისაკენ x-თან ერთად; მართლაც, თუ დავუშვებთ $x=\frac{1}{\zeta}$, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{\zeta^m}{e^{\zeta^2}}.$$

მაგრამ $\frac{e^{\zeta^2}}{\zeta^m}$ გამოსახვა, როგორც ცნობილია, უსასრულოდ იზრდება ζ-თან ერთად, რაგინდ დიდიც არ უნდა იყოს m. მეორე მხრით, ვთქვათ $\varphi(x)$ არის ფუნქცია, რომლისთვისაც ადგილი აქვს მე-(2) ფორმულას:

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\ldots$$

აღვნიშნოთ:

$$F(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}:$$

ჩვენ გვაქვს:

$$F(0)=\varphi(0),\quad F'(0)=\varphi'(0),\ldots,F^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(0),\ldots,$$

ასე რომ $F(x)$-ის მაკლორენის ფორმულით გაშლა იქნებოდა წინა წკრივის იგივური. ამგვარად მიღებული წკრივი წარმოადგენს მისი წარმომშობი ფუნქციისაგან სრულებით განსხვავებულ ფუნქციას.

საზოგადოდ, თუ ორი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქცია ტოლია ერთიმეორის, ისე როგორც მათი ყველა წარმოებული, $x=0$ მნიშვნელობისათვის თუმცა ისინი არ არიან რა იგივურად ტოლი, ცხადია, რომ ისინი ორივე ერთდროულად არ შეიძლება განწკრივებულ იქნეს მაკლორენის ფორმულით, რადგანაც ორივე ფუნქციისათვის გაშლის კოეფიციენტები იქნებოდა ერთნაირი.

171. წკრივები $\ln(1+x)$ და $(1+x)^m$—სათვის. $\ln(1+x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია და აქვს წარმოებულთა უსასრულო რიცხვი, როცა x მეტია -1-ზე. მის წარმოებულებს შემდეგი გამოსახვები აქვს:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x)=\frac{1.2}{(1+x)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\,\frac{1.2\ldots(n-1)}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\,\frac{1.2\ldots n}{(1+x)^{n+1}}.$$

გამოვარკვიოთ, თუ x-ის რა მნიშვნელობებისათვის არის შესაძლებელი ამ ფუნქციისათვის მაკლორენის მე-(2) ფორმულის გამოყენება. პირველად დავწეროთ ზოგადი სახის ფორმულა დამატებითი წევრით:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n.$$

R_n ნაშთი ნულისაკენ მიისწრაფის მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა წკრივი:

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

იქნება კრებადი: ამას ექნება ადგილი -1 და $+1$-ს შორის მოთავსებულ x-ის მნიშვნელობებისათვის, ზედა საზღვრის $+1$-ის ჩათვლით. ვიგულისხმებთ რა, რომ x ცვლადი მოთავსებულია ამ საზღვრებს შორის, ავიღოთ ნაშთი კოშის მიერ მოცემული სახით:

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{(-1)^n 1.2\ldots n}{(1+\theta x)^{n+1}}=(-1)^n\frac{x^{n+1}(-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

ან

$$R_n=(-1)^n x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{1}{1+\theta x},$$

პირველად დავუშვათ, რომ $|x|<1$. მაშინ პირველი მამრავლი x^{n+1} ნულისაკენ მიისწრაფის; მეორე მამრავლი $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი x-სათვის ნაკლებია ერთზე, რადგან მრიცხველი ნაკლებია მნიშვნელზე:

უკანასკნელი მამრავლი რჩება სასრული, ვინაიდან იგი ნაკლებია ვიდრე $\frac{1}{1-|x|}$. ამნაირად n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს R_n ნაშთი ნულისაკენ მიისწრაფის. $x=1$ მნიშვნელობისათვის ზემოთაღებული სახის ნაშთიდან ვერ გამოვიყვანთ ვერავითარ დასკვნას, მაგრამ თუ ნაშთს ავიღებთ ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს მიერ მოცემული სახით, მაშინ $x=1$ მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$R_n=(-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

და, ცხადია, რომ n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს, R_n ნულისაკენ მიისწრაფის. ნაშთის გამოკვლევა $x=-1$ მნიშვნელობისათვის უსარგებლოა, ვინაიდან ამ შემთხვევაში წკრივი, ცხადია, არის განშლადი. ამნაირად $+1$ და -1 შორის მოთავსებულ x-ის მნიშვნელობებისათვის, ჩვენ გვაქვს:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \tag{7}$$

ფორმულა გამოიყენება აგრეთვე $x=1$ მნიშვნელობისთვისაც; ეს გვაძლევს საინტერესო დამოკიდებულებას:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

ვინაიდან მე-(7) ფორმულა გამოსადეგია მხოლოდ $x\leqslant 1$ მნიშვნელობისათვის, ამიტომ იგი არ გვაძლევს საშუალებას გამოვითვალოთ მთელი რიცხვების ლოგარითმები. თუ ამ ფორმულაში x-ს შევცვლით $-x$-ით, მაშინ ახალი ფორმულა:

$$\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots$$

გამოსადეგია -1 და $+1$ შორის მოთავსებულ x-ის მნიშვნელობებისათვის; მე-(7) ფორმულიდან უკანასკნელი ფორმულის წევრობრივ გამოკლებით, ვღებულობთ:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right).$$

x-ის 0-დან 1-მდე ცვლილების დროს $\frac{1+x}{1-x}$ რაციონალური წილადი მუდამ მატულობს $+1$-დან $+\infty$-მდე; ამნაირად შეიძლება გამოვთვალოთ ყველა მთელი რიცხვის ლოგარითმი. მაგრამ შეიძლება მივიღოთ უფრო სწრაფად კრებადი წკრივი, თუ გამოვთვლით ორ მომდევნო მთელ რიცხვის ლოგარითმების სხვაობას; ამისათვის დავუშვათ:

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}, \text{ ანუ } x=\frac{1}{2N+1},$$

მაშინ წინა ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\ln(N+1)-\ln N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\cdots\right],$$

და მეორე ნაწილში ჩვენ გვაქვს ძალიან სწრაფად კრებადი წკრივი, თუ კი N რიცხვი საკმაოდ დიდია.

შენიშვნა. $\ln(1+x)$ ფუნქციისათვის გამოვიყენოთ ტეილორის ზოგადი ფორმულა, რომელშიც დავუშვათ, რომ $a=0$, $h=x$, $n=1$; თუ ნაშთს ავიღებთ ლაგრანჟის მიერ მოცემული სახით, მივიღებთ:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

უკანასკნელ ფორმულაში x-ს შევცვლით რა $\frac{1}{n}$-ით, გვექნება:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

სადაც θ_n ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. აქედან შეიძლება რამოდენიმე საინტერესო შედეგი გამოვიყვანოთ.

1. რადგანაც ჰარმონიული წკრივი განშლადია, ამიტომ ჯამი:

$$\Sigma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

იზრდება n-თან ერთად, მაგრამ $\Sigma_n-\ln n$ სხვაობა მიისწრაფის სასრული ზღვარისაკენ. მართლაც, ეს სხვაობა დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(1-\ln\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p}-\ln\frac{p+1}{p}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)+\ln\frac{n+1}{n}.$$

მაგრამ $\frac{1}{p}-\ln\frac{p+1}{p}$ არის კრებადი წკრივის ზოგადი წევრი, ვინაიდან წინა ფორმულის თანახმად ჩვენ გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{1}{p}-\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{\theta_p}{2p^2},$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ ეს წევრი ნაკლებია კრებადი $\sum\frac{1}{p^2}$ წკრივის ზოგად წევრზე. n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს სიდიდე:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ნულისაკენ მიისწრაფის. ამნაირად განსახილავი სხვაობა სასრული ზღვარისაკენ მიისწრაფის და მას ეილერის მუდმივი ეწოდება. მისი მნიშვნელობა, ოცამდე ათწილადი ნიშნის სიზუსტით, არის $C=0{,}57721566490153286060$.

2. განვიხილოთ გამოსახვა:

$$\Sigma=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

სადაც n და p უსაზღვროდ ზრდადი მთელი რიცხვებია. ეს გამოსახვა შეიძლება შემდეგი სახით დავწეროთ:

$$\Sigma=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right);$$

მაგრამ

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}=\ln(n+p)+\rho_{n+p},$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\rho_n,$$

მასთან ρ_{n+p} და ρ_n მიისწრაფის ერთიდაიმავე C ზღვარისაკენ, როცა n და p უსაზღვროდ იზრდება. მაშასადამე, გვაქვს:

$$\Sigma=\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)+\rho_{n+p}-\rho_n,$$

მაგრამ $\rho_{n+p}-\rho_n$ სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფის, ეს კი იმას გვიჩვენებს, რომ Σ ჯამს აქვს ზღვარი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ თვით $\frac{p}{n}$ ფარდობას აქვს ზღვარი. თუ ამ ფარდობას ზღვრად აქვს α, მაშინ Σ ჯამს ზღვრად ექნება $\ln(1+\alpha)$.

მაგალითად, თუ დავუშვებთ $p=n$, ვიპოვით, რომ ჯამს:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

ზღვრად აქვს $\ln 2$.

$(1+x)^m$ ფუნქციას m-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის აქვს სრულიად გარკვეული აზრი, თუ კი $1+x$ დადებითია; მას აქვს წარმოებულთა უსასრულო მიმდევრობა, რომლებიც $1+x$-ის დადებითი მნიშვნელობისათვის არის x-ის უწყვეტი ფუნქციები, ვინაიდან ყველა მათი გამოსახვა იქნება ერთნაირი სახის:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=m(1+x)^{m-1},\\
f''(x)&=m(m-1)(1+x)^{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x)&=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\\
f^{(n+1)}(x)&=m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

ტეილორის ზოგადი ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n+R_n.$$

იმისათვის, რომ n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს R_n ნაშთი ნულისაკენ მიისწრაფოდეს, უწინარეს ყოვლისა აუცილებელია, რომ მწკრივი, რომლის ზოგად წევრს აქვს გამოსახვა:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n,$$

იყოს კრებადი.

მაგრამ უკანასკნელ წკრივში თითოეული წევრის ფარდობა მის წინა წევრთან ტოლია $\frac{m-n+1}{n}$ x-ის და n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს ეს ფარდობა მიისწრაფის—x-საკენ. ამგვარად წკრივი შეიძლება იყოს კრებადი მხოლოდ მაშინ, როცა $|x| \leqslant 1$. იგულისხმება, რომ აქ გამორიცხულია ის შემთხვევა, როცა m მთელი დადებითი რიცხვია; მაშინ ჩვენ გვაქვს ბინომის ელემენტარული ფორმულა. დავკმაყოფილდეთ იმ შემთხვევით, როცა $|x| < 1$. რომ დავამტკიცოთ ნაშთის ნულისაკენ მისწრაფება, ამისათვის იგი დავწეროთ კ ო შ ი ს მიერ მოცემული სახით:

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} x^{n+1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1}.$$

პირველი მამრავლი $\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n} x^{n+1}$ ნულისაკენ მიისწრაფის, როგორც კრებადი წკრივის ზოგადი წევრი; $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ მამრავლი ერთზე ნაკლებია; დაბოლოს, უკანასკნელი $(1+\theta x)^{m-1}$ მამრავლი ნაკლებია რაიმე გარკვეული ზღვარისა. მართლაც, თუ $m-1>0$, მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$(1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1};$$

ხოლო თუ $m-1<1$, მაშინ $(1+\theta x)^{m-1} < (1-|x|)^{m-1}$. ამნაირად -1 და $+1$ შორის მოთავსებულ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, ჩვენ გვაქვს გაშლა:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^n + \dots \tag{8}$$

იმ შემთხვევას, როცა $x = \pm 1$ ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ.

II. ერთ ცვლადის მთელი წკრივები.

ახლა ჩვენ გადავდივართ ერთი ან რამოდენიმე ცვლადის მთელი წკრივების გამოკვლევაზე, რომლებისკენაც სრულიად ბუნებრივად მივყევართ ჩვენ ტეილორის ფორმულას.

თუმცა ჩვენ აქ განვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ ცვლადებს, მაგრამ მსჯელობანი, რომლითაც ჩვენ ვისარგებლებთ მთელი წკრივების შესწავლის დროს, უშუალოდ გავრცელდება წარმოსახვითი ცვლადების შემთხვევაზედაც, თუ ჩვენ სიტყვას ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ს ი დ ი დ ე ს ყველგან შევცვლით სიტყვა მ ო დ უ ლ ი თ.

172. კრებადობის არე. განვიხილოთ წკრივი:

$$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \dots + A_n X^n + \dots \tag{9}$$

ვიგულისხმოთ, პირველად, რომ ყველა $A_0, A_1, A_2, \dots$ კოეფიციენტი დადებითია, და რომ დამოუკიდებელ X ცვლადს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობები.

ყველა დადებითი რიცხვი ჩვენ შეგვიძლია დავყოთ ორ კლასად; ვიტყვით, რომ X დადებითი რიცხვი ეკუთვნის (α) კლასს, თუ მე-(9) წკრივი კრებადია, ხოლო იგი ეკუთვნის (β) კლასს, თუ ეს წკრივი განშლადია. დავუშვათ პირველადი, რომ არსებობს ორივე კლასის დადებითი რიცხვები. ვინაიდან მე-(9) წკრივის ყოველი წევრი ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტით იზრდება X-თან ერთად, ამიტომ ცხადია, რომ (α) კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია (β) კლასის ყოველ რიცხვზე. მაშასადამე, არსებობს ისეთი $R>0$ (§ 2) რიცხვი, რომ ყოველი R-ზე მეტი X-ის მნიშვნელობისათვის მე-(9) წკრივი განშლადია, ხოლო R-ზე ნაკლები X-ის მნიშვნელობისათვის წკრივი კრებადია. თუ X-ის მაგიერ თვით R რიცხვს ჩავსვამთ, მაშინ წკრივი შეიძლება იყოს როგორც კრებადი, ისე განშლადი.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ერთერთი (α) ან (β) კლასებიდან არ არსებობს.

1. თუ (β) კლასში არც ერთი წევრი არ არსებობს, მაშინ მე-(9) წკრივი X ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის კრებადია; ასეთია, მაგალითად, წკრივი:

$$1+\frac{X}{1}+\frac{X^2}{1.2}+\ldots+\frac{X^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

2. თუ (α) კლასში არ არსებობს არავითარი დადებითი რიცხვი, მაშინ მე-(9) წკრივი განშლადია, გარდა $X=0$ მნიშვნელობისათვის, და ჩვენ ვღებულობთ $R=0$.

ასეთია, მაგალითად, წკრივი:

$$1+X+1.2X^2+\ldots+1\cdot2\cdot3\ldots nX^n+\ldots$$

განვიხილოთ ახლა მთელი წკრივი:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{10}$$

რომელშიაც a_i კოეფიციენტებს და x ცვლადს შეიძლება ჰქონდეთ ნებისმიერი ნიშანი. შემდეგში ჩვენ აღვნიშნავთ: $|a_i|=A_i$, $|x|=X$ ასე რომ მე-(9) წკრივი შედგენილი იქნება მე-(10) წკრივის წევრთა აბსოლუტურ სიდიდეებისაგან. ვთქვათ R არის რიცხვი, განსაზღვრული მე-(9) წკრივისათვის. R რიცხვის თვით განსაზღვრიდან, ცხადია, რომ მე-(10) წკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება $-R$ და $+R$ შორის მოთავსებულ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის. გვრჩება დასამტკიცებელი, რომ მე-(10) წკრივი არის განშლადი, როცა x ცვლადის აბსოლუტური სიდიდე მეტია R-ზე. ეს გამომდინარეობს აბელის შემდევი ძირითადი დებულებიდან[1]:

თუ რაიმე კერძო x_0 მნიშვნელობისათვის მე-(10) წკრივი კრებადია, მაშინ ის იქნება აბსოლუტურად კრებადი x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $|x_0|$-ზე.

---

[1] „Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$"

მართლაც, დავუშვათ, რომ მე-(10) მწკრივი $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის კრებადია და ვთქვათ M არის დადებითი რიცხვი, რომელიც მეტია ამ მწკრივის ნებისმიერი წევრის აბსოლუტურ სიდიდეზე ცვლადის $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის; მაშინ n რიცხვის ყოველი მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$A_n |x_0|^n < M.$$

მაგრამ ცხადია, რომ

$$A_n X^n = A_n |x_0|^n \left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n < M \left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n.$$

მაშასადამე, მე-(9) მწკრივი იქნება კრებადი, როცა $X < |x_0|$; ამგვარად დებულება დამტკიცებულია. აბელის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის მე-(10) მწკრივი კრებადია, მაშინ მე-(9) მწკრივი, რომელიც მე-(10) მწკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდეებისაგან არის შედგენილი, იქნება აგრეთვე კრებადი ყოველთვის, როცა X ნაკლები გახდება $|x_0|$-ზე. ამის გამო არ შეიძლება რომ $|x_0| > R$, ვინაიდან ამ შემთხვევაში R რიცხვი არ იქნებოდა ზედა საზღვარი X-ის იმ მნიშვნელობებისა, რომლებიც მე-(9) მწკრივს გახდის კრებადად.

ამგვარად, თუ მოცემულია მე-(10) მთელი მწკრივი, რომლის კოეფიციენტებსაც აქვს ნებისმიერი ნიშნები, მაშინ არსებობს გარკვეული დადებითი R რიცხვი, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: მე-(10) მწკრივი იქნება აბსოლუტურად კრებადი $-R$ და $+R$-ს შორის მოთავსებულ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, და განშლადი x ცვლადის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთა აბსოლუტური სიდიდეც აღემატება R-ს. $(-R, +R)$ შუალედს მწკრივის კრებადობის არე ეწოდება. ზღვარულ შემთხვევაში, როცა $R=\infty$, კრებადობის არე გავრცელდება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე; ხოლო როცა $R=0$, მაშინ იგი იქცევა მხოლოდ კოორდინატთა სათავედ. ამ უკანასკნელ შემთხვევას შემდეგში ჩვენ არ განვიხილავთ.

მოყვანილი დამტკიცება არ იძლევა არავითარ მითითებას მწკრივის ხასიათის შესახებ ცვლადის $x=R$ და $x=-R$ ზღვარულ მნიშვნელობათათვის; ამ მნიშვნელობებისათვის მე-(10) მწკრივი შეიძლება იყოს აბსოლუტურად კრებადი, უბრალოდ კრებადი ან განშლადი.

განვიხილოთ, მაგალითად, სამი მწკრივი:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots,$$

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots,$$

რადგანაც თითოეულში ამ სამი მწკრივიდან ნებისმიერ წევრის ფარდობა მის წინა წევრთან ტოლია x-ის, ამიტომ მათთვის $R=1$. პირველი მწკრივი იქნება განშლადი

როცა $x = \pm 1$, მეორე წკრივი იქნება განშლადი როცა $x=1$ და კრებადი $x=-1$ მნიშვნელობებისათვის; მესამე წკრივი აბსოლუტურად კრებადია $x=\pm 1$ მნიშვნელობებისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. აბელის თეორემას შეიძლება მივცეთ უფრო ზოგადი გამოსახვა. მართლაც, მის დასამტკიცებლად აუცილებელი არ არის ვიგულისხმოთ, რომ მე-(10) წკრივი x_0 მნიშვნელობისათვის არის კრებადი; საკმარისია მხოლოდ ვიგულისხმოთ, რომ შემდეგი წკრივის:

$$a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

ნებისითი წევრის აბსოლუტური სიდიდე, რჩება ნაკლები რაიმე გარკვეულ რიცხვზე. თუ ეს პირობა კმაყოფილდება, მაშინ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობაც ნაკლებია $|x_0|$-ზე, მე-(10) წკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება.

R რიცხვი დაკავშირებულია მეტად უბრალო თანაფარდობით ω (§ 152) რიცხვთან, რომელიც წარმოადგენს ზ ღ ვ ა რ თ ა შ ო რ ი ს უ დ ი დ ე ს ს შემდეგი მიმდევრობისას:

$$A_1, \sqrt{A_2}, \sqrt[3]{A_3}, \ldots, \sqrt[n]{A_n}, \ldots$$

მართლაც, განვიხილოთ ანალოგიური მიმდევრობა:

$$A_1 X, \sqrt{A_2 X^2}, \ldots, \sqrt[n]{A_n X^n}, \ldots;$$

ცხადია, რომ ამ მეორე მიმდევრობის წევრების ზღვართა შორის უდიდესი იქნება ωX. მაშასადამე, მე-(9) წკრივი იქნება კრებადი, როცა $X < \frac{1}{\omega}$, ხოლო განშლადი, როცა $X > \frac{1}{\omega}$. ამრიგად $R = \frac{1}{\omega}$[1].

173. მთელი წკრივი როგორც ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია. აღვნიშნოთ $f(x)$-ით $(-R, +R)$ შუალედში კრებადი მთელი წკრივის ჯამი, ე. ი.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots; \tag{11}$$

ვთქვათ R' არის R-ზე ნაკლები რაიმე დადებითი რიცხვი. დავამტკიცოთ პირველად, რომ მე-(11) წკრივი არის თანაბრად კრებადი $(-R', +R')$ შუალედში. მართლაც, x ცვლადის იმ მნიშვნელობისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია R'-ზე, ნაშთი:

$$R_n = a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p} + \ldots$$

აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია შემდეგი კრებადი წკრივის შესაბამი ნაშთისა:

$$A_{n+1} R'^{n+1} + A_{n+2} R'^{n+2} + \ldots$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $-R$-სა და $+R$-ს შ ო რ ი ს მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ x ც ვ ლ ა დ ი ს ყ ო ვ ე ლ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს წ კ რ ი ვ ი ს $f(x)$ ჯ ა მ ი ა რ ი ს x-ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა. მართლაც, თუ მოცემულია, რომელიმე x_0 რიცხვი, რომლის აბსოლუტური სიდიდე არის R-ზე ნაკლები, მაშინ შეიძ-

[1] ეს თეორემა დამტკიცებული იყო კ ო შ ი ს მიერ მის „Cours d'Analyse"-ში. ა დ ა მ ა რ მ ა (Hadamard) ის კვლავ მიიღო თავის დისერტაციაში.

ლება ვიპოვოთ მეორე დადებითი R' რიცხვი, რომელიც ნაკლებია R რიცხვზე და მეტი $|x_0|$-ზე. ისე როგორც ზემოთ, მოცემული წკრივი იქნება თანაბრად კრებადი $(-R', +R')$ შუალედში; მაშასადამე, მისი $f(x)$ ჯამი იქნება ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია x_0 მნიშვნელობისათვის, რომელიც ამ შუალედს ეკუთვნის (§ 30).

ეს დამტკიცება გამოუსადეგარია კრებადობის არის $+R$ და $-R$ ზღვრებისათვის. მიუხედავად ამისა წკრივის უწყვეტობა შენარჩუნებულია ამ ზღვარითი მნიშვნელობებისათვის ყოველთვის, როცა წკრივი ამ მნიშვნელობებისათვის კრებადი რჩება. სახელდობრ, *აბელმა* დაამტკიცა, რომ *თუ $x=R$ მნიშვნელობისათვის მე-(11) წკრივი რჩება კრებადი, მაშინ მე-(11) წკრივის ჯამი $x=R$ მნიშვნელობისათვის ტოლია ზღვარის, რომლისკენაც მიისწრაფის ამ წკრივის $f(x)$ ჯამი, როცა x მიისწრაფის R-საკენ ისე, რომ რჩება მასზე ნაკლები.*

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ მე-(11) წკრივი თანაბრად კრებადია მთელ $(0, R)$ შუალედში, $x=R$ საზღვრის ჩათვლით. მართლაც, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის შევარჩიოთ იმდენად დიდი n, რომ ყოველი p-სათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left| a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p} \right| < \varepsilon;$$

ეს შესაძლებელია, ვინაიდან, დაშვების თანახმად მე-(10) წკრივი კრებადია, როცა $x=R$. ვთქვათ x არის R-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვი; შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n$$

და გამოვიყენოთ აბელის ლემა (§ 74), შევნიშნავთ რა, რომ $\frac{x}{R}$ გამოსახვის მიმდევნო ხარისხები შეადგენენ კლებად მიმდევრობას. მაშასადამე, ნებისმიერი p-სათვის ჩვენ აგრეთვე გვაქვს:

$$\left| a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p} \right| < \varepsilon \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} < \varepsilon.$$

ამ უტოლობას თუ შევადარებთ წინა უტოლობასთან, დავრწმუნდებით, რომ მე-(10) წკრივი თანაბრად კრებადია მთელ $(0, R)$ შუალედში. მაშასადამე, ამ წკრივის ჯამი ამ შუალედის მარჯვენა ბოლოში უწყვეტია, ვინაიდან წინად მოცემული დამტკიცება (§ 29, 30) გამოსადეგია აგრეთვე კრებადობის შუალედის ბოლოებისათვისაც, თუ წკრივი თანაბრად კრებადია მთელ შუალედში მისი ბოლოების ჩათვლით.

ასევე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ მე-(11) წკრივი კრებადია $x=-R$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ ამ წკრივის ჯამი, როცა $x=-R$ არის ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფის $f(x)$ ჯამი, როცა x მიისწრაფის $-R$-საკენ. რომ ეს შემთხვევა მივიყვანოთ წინა სახეზე, საჭიროა მხოლოდ x შევცვალოთ $-x$-ით.

გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ა. ეს დებულება საშუალებას გვაძლევს შევავსოთ წკრივების გამრავლების შესახებ ზემოთ დამტკიცებული (§ 160) თეორემა.

ვთქვათ შემდეგი ორი წკრივი:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

კრებადია, მაგრამ არა აბსოლუტურად, არამედ მხოლოდ პირობით. წკრივთა გამრავლების წესით შედგენილი წკრივი:

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \ldots + (u_0v_n + \ldots + u_nv_0) + \ldots$$

შეიძლება კრებადი ან განშლადი იყოს; მაგრამ თუ იგი კრებადია, მაშინ მისი Σ ჯამი ეტოლება პირველი ორი წკრივის ჯამთა ნამრავლს: ე. ი. $\Sigma = SS'$. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი სამი მთელი წკრივი:

$$f(x) = u_0 + u_1x + \ldots + u_nx^n + \ldots,$$

$$\varphi(x) = v_0 + v_1x + \ldots + v_nx^n + \ldots,$$

$$\psi(x) = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)x + \ldots + (u_0v_n + u_nv_0)x^n + .$$

პირობის ძალით, $x=1$ მნიშვნელობისათვის ეს წკრივები კრებადია; მაშასადამე, -1 და $+1$ შორის მოთავსებული x-ის ყოველ მნიშვნელობისათვის ეს წკრივები აბსოლუტურად კრებადია და მათზე გამოიყენება კ ო შ ი ს თეორემა წკრივების გამრავლების შესახებ; ამგვარად ვღებულობთ დამოკიდებულებას:

$$f(x)\,\varphi(x) = \psi(x).$$

ა ბ ე ლ ი ს თეორემის თანახმად, თუ x ერთისაკენ მიისწრაფის, მაშინ $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ მიისწრაფის შესაბამად S, S', Σ—საკენ და ვინაიდან (1) ფორმულის ორივე ნაწილი რჩება ერთიერთ ტოლი, ამიტომ ზღვარში გვაქვს $\Sigma = SS'$.

ეს თეორემა სამართლიანი რჩება წარმოსახვითწევრებიანი წკრივებისათვისაც და იგი ამგვარადვე შეიძლება დამტკიცდეს.

174. მთელი წკრივის წარმოებულები. თუ მთელ წკრივს:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

რომელიც კრებადია $(-R, +R)$ შუალედში, გავაწარმოებთ წევრობრივ, მივიღებთ ახალ მთელ წკრივს:

$$a_1 + 2a_2x + \ldots + n\,a_nx^{n-1} + \ldots, \tag{13}$$

კრებადს იმავე შუალედში. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ მე-(13) წკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდეთაგან შედგენილი წკრივი:

$$A_1 + 2A_2X + \ldots + nA_nX^{n-1} + \ldots \tag{14}$$

იქნება კრებადი, როცა $X < R$, და განშლადი, როცა $X > R$.

დებულების პირველი ნაწილის დასამტკიცებლად, დავუშვათ, რომ $X < R$, და ვთქვათ R' არის X და R-ს შორის მოთავსებული რიცხვი, ე. ი. $X < R' < R$. განვიხილოთ დამხმარე წკრივი:

$$\frac{1}{R'} + \frac{2}{R'}\,\frac{X}{R'} + \frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2 + \ldots + \frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1} + \ldots$$

რომელიც კრებადია, ვინაიდან თითოეული წევრის წინაწევრთან ფარდობას აქვს ზღვრად ერთზე ნაკლები $\frac{X}{R'}$ რიცხვი. ამ წკრივის წევრების გამრავლებით შესაბამად შემდეგ მამრავლებზე:

$$A_1R',\ A_2R'^2,\ \ldots,\ A_nR'^n,\ \ldots,$$

რომლებიც ნაკლებია რაიმე გარკვეულ რიცხვზე, რადგან $R'<R$, მივიღებთ ახალ წკრივს:

$$A_1+2A_2X+\ldots+nA_nX^{n-1}+\ldots,$$

რომელიც, ცხადია, არის აგრეთვე კრებადი.

ასევე მტკიცდება დებულების მეორე ნაწილიც. რომ წკრივი:

$$A_1+2A_2X_1+\ldots+A_nX_1^{n-1}+\ldots,$$

სადაც $X_1>R$, ყოფილიყო კრებადი, მაშინ კრებადი იქნებოდა აგრეთვე წკრივიც:

$$A_1X_1+2A_2X_1^2+\ldots+nA_nX_1^n+\ldots,$$

და, მაშასადამე, კრებადი იქნებოდა $\sum\limits_{1}^{+\infty}A_nX_1^n$ წკრივიც. რომლის ყველა წევრი ნაკლებია წინა წკრივის წევრებზე; მაგრამ მაშინ R რიცხვი არ იქნებოდა X-ის მნიშვნელობათა ზედა საზღვარი, რომლებიც მე-(9) წკრივს ხდის კრებადად.

მე-(13) მთელი წკრივის $f_1(x)$ ჯამი არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია $(-R,\ +R)$ შუალედში. ვინაიდან $f_1(x)$ წკრივი თანაბრად კრებადია მთელ $(-R',\ +R')$ შუალედში, სადაც $R'<R$, ამიტომ $f_1(x)$ წკრივი ამ შუალედში $f(x)$-ის წარმოებულს წარმოადგენს (§ 30). მაგრამ R' რიცხვი შეიძლება აღებულ იქნეს R-თან რაგინდ მახლობლობაში; აქედან გამომდინარეობს, რომ $-R$ და $+R$-ს შორის მოთავსებულ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, და ეს წარმოებული წარმოდგენილი იქნება $f'(x)$ წკრივით, რომლის წევრებიც მოცემული $f(x)$ წკრივის წევრთა წარმოებულებია, ე. ი.

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \tag{15}$$

გამოვიყენებთ რა მე-(15) წკრივზე იმავე მსჯელობებს, ჩვენ ვხედავთ, რომ $f(x)$ წკრივს აქვს მეორე წარმოებული:

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\ldots+n(n+1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$

და ა. შ. ამნაირად $f(x)$ ფუნქციას $(-R,\ +R)$ შუალედში აქვს წარმოებულთა უსასრულო სიმრავლე და ყველა ეს წარმოებული მე-(11) წკრივის წევრობრივ გაწარმოებით მიღებული წკრივებით გამოისახება:

$$f^{(n)}(x)=1.2\ldots na_n+2.3\ldots n(n+1)a_{n+1}x+\ldots \tag{16}$$

თუ ამ ფორმულაში მივიღებთ $x=0$, მაშინ გვექნება:

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2},\ \ldots,$$

და საზოგადოდ,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n},$$

ასე რომ $f(x)$-ის გაშლა იგივურია მაკლორენის ფორმულით გაშლისა:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots$$

ვინაიდან $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ კოეფიციენტები განსხვავდებიან $f(x)$ ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობებისაგან, $x=0$-სათვის, მხოლოდ რიცხვითი მამრავლებით, ამიტომ ცხადია, რომ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი სხვადასხვა გაშლა ხარისხოვან წკრივად.

სრულიად ასევე, მთელი წკრივის წევრობრივ ინტეგრობით, მივიღებთ ახალ მთელ წკრივს ნებისმიერი მუდმივი წევრით. ამ წკრივს აქვს კრებადობის იგივე არე, რაც მოცემულ წკრივს, და უკანასკნელი წკრივი აქვს თავის წარმოებულად. მეორე წკრივის ინტეგრობით ჩვენ მივიღებთ მესამე წკრივს, რომლის პირველი ორი კოეფიციენტი ნებისმიერია, და ა. შ.

მაგალითები. 1. გეომეტრიული პროგრესია—x მნიშვნელით:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

კრებადია -1 და $+1$ შორის მოთავსებულ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, და მისი ჯამი $\frac{1}{1+x}$-ის ტოლია. მისი 0 და x საზღვრებს შორის წევრობრივ ინტეგრობით, სადაც $|x|<1$, ჩვენ მივიღებთ უკვე ცნობილ (§ 171) $\ln(1+x)$-ის გაშლას:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

ეს ფორმულა სამართლიანია $x=1$ მნიშვნელობისთვისაც; ვინაიდან x-ის ამ მნიშვნელობათათვის მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული წკრივი რჩება კრებადი.

2. -1 და $+1$-ს შორის მოთავსებულ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, გვაქვს:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots$$

ამ ტოლობის წევრობრივ ინტეგრობით 0 და x საზღვრებს შორის, სადაც $|x|<1$, მივიღებთ:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

ვინაიდან წკრივის მარჯვენა ნაწილი $x=1$ მნიშვნელობისათვის კრებადი რჩება, ამიტომ აქედან გვაქვს:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

3. ვთქვათ $F(x)$ არის შემდეგი კრებადი წკრივის ჯამი:

$$F(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\dots$$

$$\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}x^p+\dots,$$

სადაც m ნებისმიერი რიცხვია, და $|x|<1$. გავაწარმოებთ რა, მივიღებთ:

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\dots+\frac{(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots(p-1)}x^{p-1}+\dots\right].$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(1+x)$-ზე და შევაჯგუფოთ x ცვლადის ერთნაირ ხარისხის წევრები. თუ ვისარგებლებთ იგივეობით:

$$\frac{(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots(p-1)}+\frac{(m-1)\dots(m-p)}{1.2\dots p}=\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p},$$

რომელსაც ადვილად შევამოწმებთ, მივიღებთ ფორმულას:

$$(1+x)F'(x)=m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\dots\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}x^p+\dots\right],$$

ანუ

$$(1+x)F'(x)=mF(x).$$

აქედან მიმდევრობით ვღებულობთ:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m}{1+x},$$

$$\ln[F(x)]=m\ln(1+x)+\ln C,$$

ე. ი.

$$F(x)=C(1+x)^m.$$

C მუდმივის განსაზღვრისათვის შევნიშნოთ, რომ $F(0)=1$; აქედან გვაქვს $C=1$, და ჩვენ ვღებულობთ მე-171 პარაგრაფში მიღებულ $(1+x)^m$-ის გამწკრივებას:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}x^p+\dots$$

4. წინა ფორმულაში თუ x-ს შევცვლით $-x^2$-ით, m-ს $-\frac{1}{2}$-ით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}x^{2n}+\dots$$

ეს ფორმულა სამართლიანია -1 და $+1$-ს შორის მოთავსებული x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. ორივე ნაწილის 0 და x საზღვრებში ინტეგრობით, სადაც $|x|<1$, მივიღებთ $\arcsin x$-ის გამწკრივებას:

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\dots2n(2n+1)}+\dots$$

175. მეორე დამტკიცება. მთელი წკრივებით წარმოდგენილი ფუნქციების თვისებები შეიძლება იქნეს გამოყვანილი უფრო ელემენტარული ხერხით. ვთქვათ x_0 არის $-R$ და $+R$-ს შორის მოთავსებული რიცხვი, და x_1—იმავე შუალედში მოთავსებული მახლობელი რიცხვი. იმის დასამტკიცებლად, რომ $f(x_1)-f(x_0)$ სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფის როცა x_0 მუდმივია და x_1 მიისწრაფის x_0-საკენ, გამოვაკლოთ წევრობრივ წკრივები, რომლებიც წარმოადგენენ $f(x_1)$ და $f(x_0)$-ის გამწკრივებას; მივიღებთ:

$$f(x_1)-f(x_0)=a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1^2-x_0^2)+\dots+a_n(x_1^n-x_0^n)+\dots$$

ამ ახალი წკრივის ზოგადი წევრი შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$a_n(x_1-x_0)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1}).$$

ამ წევრის აბსოლუტური სიდიდის ზედა საზღვარი რომ ვიპოვოთ, აღვნიშნოთ l-ით, R-ზე ნაკლები და $|x_0|$-ზე მეტი რაიმე დადებითი რიცხვი; ვინაიდან შემდეგში x_1 მიისწრაფის x_0-საკენ, ამიტომ ჩვენ აგრეთვე დავუშვებთ რომ $l>|x_1|$. მაშინ $x_1^{n-1}, x_1^{n-2}x_0, \dots$ ნამრავლებიდან ნებისმიერის აბსოლუტური სიდიდე l^{n-1}-ზე ნაკლები იქნება, მაშასადამე, განსახილავი ზოგადი წევრის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება $nA_nl^{n-1}|x_1-x_0|$-ზე. ამრიგად ჩვენ გვაქვს:

$$|f(x_1)-f(x_0)|<|x_1-x_0|(A_1+2A_2l+\dots+nA_nl^{n-1}+\dots);$$

მაგრამ ფრჩხილებში მოთავსებული წკრივი კრებადია, რადგან $l<R$ (§ 174). მაშასადამე, $f(x_1)-f(x_0)$ სხვაობა მართლაც, x_1-x_0-თან ერთდროულად, ნულისაკენ მიისწრაფის და $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $-R$ და $+R$-ს შორის მოთავსებულ ყოველ წერტილში.

იმის დასამტკიცებლად, რომ $f_1(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, საკმარისია დავრწმუნდეთ იმაში, რომ სხვაობა:

$$D=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-f_1(x)$$

ნულისაკენ მიისწრაფის, როცა x_1 მიისწრაფის x_0-საკენ. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ფარდობა, როგორც ახლა ვნახეთ შემდეგი კრებადი წკრივის ჯამის ტოლია:

$$a_1+a_2(x_1+x_0)+\dots+a_n(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1})+\dots$$

თუ ამ წკრივიდან გამოვაკლებთ წევრობრივ წკრივს, რომელიც წარმოადგენს $f_1(x_0)$-ს, მივიღებთ D-სათვის გამოსახვას წკრივის სახით, რომლის ზოგადი წევრი შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$a_n[(x_1^{n-1}-x_0^{n-1})+(x_1^{n-2}x_0-x_0^{n-1})+\dots+(x_1x_0^{n-2}-x_0^{n-1})];$$

თითოეულ $x_1^{n-1}-x_0^{n-1}$, $x_1^{n-2}x_0-x_0^{n-1}$, ... სხვაობებიდან წარმოადგენს ნამრავლს x_1-x_0 სხვაობისა და $x_0^p x_1^q$ სახის ნამრავლის, სადაც p და q ორი მთელი რიცხვია, რომელთაგანაც არც ერთი არ არის უარყოფითი და რომელთა ჯამი $n-2$-ის ტოლია. ამ მამრავლთა საერთო რიცხვი არის $(n-1)+(n-2)+\dots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$-ის ტოლი, და თითოეული მათგანის აბსოლუტური სიდიდე l^{n-2}-ზე ნაკლებია, სადაც l-ს იგივე მნიშვნელობა აქვს რაც ზემოთ. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს:

$$|D| < \frac{|x_1-x_0|}{2}\left[2A_2+6A_3 l+\dots+n(n-1)A_n l^{n-2}+\dots\right],$$

და ფრჩხილებში მოთავსებული წკრივი კრებადია, როცა l არის R-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვი, ვინაიდან ეს არის იმ მთელი $f_2(x)$ წკრივის წევრთა მოდულებისაგან შედგენილი წკრივი, რომელსაც $f_1(x)$-ის წევრობრივ გაწარმოებით ვღებულობთ. მაშასადამე, D-ს ზღვრად ნული აქვს, როცა x_1 მიისწრაფის x_0-საკენ.

176. ტეილორის ფორმულის გავრცელება. ვთქვათ $f(x)$ არის $(-R, +R)$ შუალედში კრებადი მთელი წკრივის ჯამი, x_0 ამ შუალედის წერტილი და (x_0+h) იმავე შუალედის მეორე წერტილი იმ პირობით, რომ: $|x_0|+|h|<R$. წკრივი:

$$a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+\dots+a_n(x_0+h)^n+\dots,$$

რომელსაც აქვს ჯამად $f(x_0+h)$, შეიძლება შეიცვალოს ორმაგი წკრივით, რომელიც მიიღება წინა წკრივიდან, თუ (x_0+h)-ის სხვადასხვა ხარისხს გავშლით და h-ის ერთნაირ ხარისხებს ერთდაიმავე სტრიქონზე დავალაგებთ:

$$\left.\begin{array}{l}
a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n+\dots \\
\quad +a_1h+2a_2x_0h+\dots+na_nx_0^{n-1}h+\dots \\
\qquad \dots+a_2h^2+\dots+\frac{n(n-1)}{1.2}a_nx_0^{n-2}h^2+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (17)$$

ეს ორმაგი წკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება. მართლაც, თუ ამ წკრივის თითოეულ წევრს მისი აბსოლუტური მნიშვნელობით შევცვლით, მივიღებთ ახალ ორმაგ წკრივს დადებითი წევრებით:

$$\left.\begin{array}{l}
A_0+A_1|x_0|+A_2|x_0|^2+\dots+A_n|x_0|^n+\dots \\
\quad \dots+A_1|h|+2A_2|x_0||h|+\dots+nA_n|x_0|^{n-1}|h|+\dots \\
\qquad \dots+A_2|h|^2+\dots+\frac{n(n-1)}{1.2}A_n|x_0|^{n-2}|h|^2+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \quad (18)$$

თუ ამ ცხრილის ელემენტების ჯამს ვერტიკალური სვეტების მიხედვით შევადგენთ, მივიღებთ წკრივს:

$$A_0+A_1[|x_0|+|h|]+\ldots+A_n[|x_0|+|h|]^n+\ldots;$$

რომელიც იქნება კრებადი, ვინაიდან, დაშვების თანახმად, $|x|+|h|<R$.

რადგანაც მე-(17) ორმაგი წკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მე-(17) ცხრილის ელემენტების შეჯამება ან სტრიქონების ან სვეტების მიხედვით. თუ შევაჯამებთ სვეტების მიხედვით, მივიღებთ $f(x_0+h)$-ს. იმავე ჯამს თუ სტრიქონების მიხედვით გამოვთვლით, მივიღებთ h-ის ხარისხის მიხედვით დალაგებულ წკრივს, რომელშიც $h, h^2, \ldots$-ის კოეფიციენტები იქნება შესაბამისად $f''(x_0), \frac{f''(x_0)}{1.2}, \ldots$

ამრიგად, თუ დავუშვებთ: $|h|<R-|x_0|$, გვაქვს:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+\ldots \tag{19}$$

მე-(19) ფორმულა, უეჭველად გამოიყენება $(x_0-R+|x_0|, x_0+R-|x|)$ შუალედში, მაგრამ მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული წკრივი ზოგჯერ შეიძლება იყოს კრებადი უფრო ფართე საზღვრებშიც. განვიხილოთ, მაგალითად, $(1+x)^m$ ფუნქცია, სადაც m არ არის მთელი დადებითი რიცხვი. ამ ფუნქციის გამწკრივება x-ის ხარისხებად შესაძლებელია შუალედში $x=-1$-დან $x=+1$-მდე. ვთქვათ x_0 არის ამ შუალედში მოთავსებული x ცვლადის მნიშვნელობა. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(1+x)^m=(1+x_0+x-x_0)^m=(1+x_0)^m(1+z)^m,$$

სადაც

$$z=\frac{x-x_0}{1+x_0}.$$

თუ $|z|<1$, ე. ი. თუ x ცვლადის მნიშვნელობები მოთავსებულია შუალედში -1-დან $+2x_0$-მდე, მაშინ $(1+z)^m$ ფუნქცია შეიძლება გამწკრივებულ იქნეს z-ის ხარისხებად[1]. ამნაირად, თუ x_0 დადებითია, მაშინ ახალი შუალედი წინანდელ $(-1,+1)$-ზე უფრო ფართო იქნება, და მაშასადამე, ახალი ფორმულა საშუალებას მოგვცემს გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობა ცვლადის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც პირვანდელი შუალედის გარე მდებარეობს. ამ შენიშვნას თუ განვავითარებთ, ჩვენ მივალთ მეტის-მეტად მნიშვნელოვან ცნებამდე, ა ნ ა ლ ი ზ უ რ გ ა გ რ ძ ე ლ ე ბ ა მ დ ე, რომლის განხილვასაც შემდეგი ტომისათვის გადავდებთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ცხადია, რომ x ცვლადის ხარისხებად დალაგებული წკრივებისათვის აქ დამტკიცებული თეორემები ადვილად გავრცელდება $x-a$ დადებით ხარისხებად დალაგებულ წკრივებზე, და, საზოგადოდ, ნებსითი $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციის დადებით ხარისხებად დალაგე-

[1] თუ დავუშვებთ $x=x_0+h$, მივიღებთ: $z=\frac{h}{1+x_0}$. მაშასადამე, z-ის ხარისხებად დაშლა არის იმავე დროს დაშლა h-ის ხარისხებად, ე. ი. მე-(19) ფორმულა.

ბულ წკრივებზე. ამისათვის საჭიროა მხოლოდ ეს წკრივები განვიხილოთ როგორც x-ის რთული ფუნქციები, სადაც ამ წკრივებსა და x ცვლადს შორის დამოკიდებულება მყარდება $\varphi(x)$ ფუნქციის საშუალებით. ასე, მაგალითად, წკრივი, რომელიც დალაგებულია $\frac{1}{x}$-ის დადებით ხარისხებად, იქნება კრებადი x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე აღემატება რომელიმე ზღვარს, და ცვლადის ამ მნიშვნელობათათვის იგი წარმოადგენს x-ის უწყვეტ ფუნქციას. განვიხილოთ, მაგალითად, $\sqrt{x^2-a}$ ფუნქცია, რომელიც ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ ასეთი სახით: $\pm x\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. x ცვლადის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთა აბსოლუტური სიდიდე მეტია ვიდრე $\sqrt{a}$, გამოსახვა: $\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ შეიძლება გამწკრივდეს $\frac{1}{x^2}$-ის ხარისხებად; მასთან ჩვენ მივიღებთ ფორმულას:

$$\sqrt{x^2-a}=x-\frac{1}{2}\,\frac{a}{x}-\frac{1}{2\,.\,4}\,\frac{a^2}{x^3}-\ldots-\frac{1\,.\,3\ldots(2p-3)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2p}\,\frac{a^p}{x^{2p-1}}-\ldots$$

რომელიც $\sqrt{x^2-a}$ ფუნქციის დაშლას იძლევა, როცა $x>\sqrt{a}$. როდესაც $x<-\sqrt{a}$, მაშინ წინა წკრივი იქნება აგრეთვე კრებადი, და მისი ჯამი $-\sqrt{x^2-a}$-ის ტოლია. ეს ფორმულა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მთელი რიცხვიდან კვადრატული ფესვის გასაშლელად, თუ ცნობილია უახლოესი უდიდესი ზუსტი კვადრატი.

177. მაჟორანტული ფუნქციები. ზემოთ გამოყვანილი მთელი წკრივის თვისებები დიდ ანალოგიას ამყარებს ამ წკრივებსა და მრავალწევრებს შორის. ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია რამდენიმე მთელი წკრივი. $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$, დავუშვათ რომ $(-r, +r)$ არის მათი კრებადობის არეთა შორის უმცირესი. მაშინ როცა $|x|<r$ ყველა ეს წკრივი აბსოლუტურად კრებადია და შეგვიძლია მათი შეკრება ან გამრავლება სრულიად ისე, როგორც ამას მრავალწევრებზე ვასრულებთ; საზოგადოდ, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$-ის მიმართ ყოველი მთელი მრავალწევრი შეიძლება იმავე $(-r, +r)$ შუალედში გაიშალოს მთელ კრებად წკრივად.

ამ ანალოგიის გაფართოებისათვის წინასწარ მოვიყვანთ განსაზღვრას ზოგიერთი გამოსახვებისას, რომლებითაც შემდეგში ვისარგებლებთ. ვთქვათ $f(x)$ არის მთელი წკრივი:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots;$$

და $\varphi(x)$ მეორე დადებით კოეფიციენტებიანი მთელი წკრივი:

$$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n+\ldots,$$

რომელიც კრებადია გარკვეულ შუალედში. თუ $\varphi(x)$ წკრივში თითოეული α_n კოეფიციენტებიდან ტოლია ან მეტი $f(x)$ წკრივის შესაბამ კოეფიციენტის აბსოლუტურ სიდიდეზე, ე. ი.

$$\alpha_0\geqslant|a_0|,\ \alpha_1\geqslant|a_1|,\ \ldots,\ \alpha_n\geqslant|a_n|,\ \ldots,$$

მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$-ის მიმართ *მაჟორანტული* ფუნქცია (*გამაძლიერებული ფუნქცია*), ანუ *მაჟორანტი* (fonction majorante).

$f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციათა შორის ასეთი თანაფარდობის გამოსახვისათვის პ უ ა ნ-კ ა რ ე მ (Poincaré) შემოიღო შემდეგი აღნიშვნა:

$$f(x) \ll \varphi(x).$$

მაჟორანტული ფუნქციები თურმე სასარგებლოა მთელი წკრივების განხილვის დროს მათი შემდეგი თვისების მეოხებით, რომელიც უშუალოდ მათი განსაზღვრიდან გამომდინარეობს. ვთქვათ $P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ნამდვილი და დადებით კოეფიციენტებიანი მრავალწევრია, რომელიც დამოკიდებულია $f(x)$ წკრივის პირველ $n+1$ კოეფიციენტზე. თუ ამ მრავალწევრში $a_0, a_1, \ldots, a_n$-ს შევცვლით $\varphi(x)$ წკრივის შესაბამი კოეფიციენტებით, მაშინ ცხადია, გვექნება:

$$|P(a_0, a_1, \ldots a_n)| \leqslant P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

მაგალითად, თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)$-ის მაჟორანტი, მაშინ $[\varphi(x)]^2$ იქნება $[f(x)]^2$-ის მაჟორანტი ...., და საზოგადოდ, $[\varphi(x)]^n$ იქნება მაჟორანტი $[f(x)]^n$-სათვის. სრულიად ასევე, თუ φ და φ_1 არის შესაბამად f და f_1-ის მაჟორანტები, მაშინ $\varphi\varphi_1$ ნამრავლი იქნება მაჟორანტი ff_1 ნამრავლისათვის და ა. შ.

თუ მოცემულია $(-R, +R)$ შუალედში კრებადი $f(x)$ მთელი წკრივი, მაშინ ამ წკრივისათვის მაჟორანტული წკრივის მოძებნა არის მეტად გამოურკვეველი ამოცანა. მაგრამ შემდეგში მსჯელობათა გამარტივებისათვის ხელსაყრელია მაჟორანტი რაც შეიძლება უფრო მარტივი სახის შევარჩიოთ. ვთქვათ r არის R-ზე ნაკლები, მაგრამ მასთან რაგინდ მახლობელი დადებითი რიცხვი. ასე რომ როცა $x=r$ $f(x)$ წკრივი იქნება აბსოლუტურად კრებადი, ამიტომ მის წევრთა აბსოლუტურ სიდიდეებს აქვთ ზედა საზღვარი, რომელსაც ჩვენ M-ით აღვნიშნავთ. მაშასადამე, n რიცხვის ყოველი მნიშვნელობისათვის ჩვენ გვაქვს:

$$|a_n| = A_n \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ წკრივი:

$$M + M\frac{x}{r} + \ldots + M\frac{x^n}{r^n} \ldots = \frac{M}{1-\frac{x}{r}},$$

რომლის ზოგადი წევრი არის $M\frac{x^n}{r^n}$, იქნება $f(x)$-ის მაჟორანტი. მაჟორანტის ეს სახე ყველაზე მეტად იხმარება; იგი წარმოადგენს კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას. თუ $f(x)$ წკრივს მუდმივი წევრი არ აქვს, მაშინ წინა მაჟორანტული ფუნქციის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ფუნქცია:

$$\frac{M}{1-\frac{x}{r}} - M$$

r რიცხვად შეიძლება ავიღოთ R-ზე ნაკლები ნებისმიერი რიცხვი, და აშკარაა, რომ შესაბამი M რიცხვი, საზოგადოდ, კლებულობს r-თან ერთად, მაგრამ A_0-ზე ნაკლები არასოდეს არ გახდება. თუ A_0 განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი დადებითი რიცხვი $\rho<R$, რომ $\dfrac{A_0}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ ფუნქცია იყოს $f(x)$-ის მაჟორანტი, ე. ი. შეიძლება დავუშვათ $M=A_0$.

მართლაც, ვთქვათ

$$M+M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\ldots+M\frac{x^n}{r^n}+\ldots,$$

არის პირველი მაჟორანტული ფუნქცია, მასთან $M>A_0$. ავიღოთ ρ რიცხვი $r\dfrac{A_0}{M}$-ზე ნაკლები; როცა $n\geqq 1$, გვაქვს:

$$|a_n\rho^n|=|a_n r^n|\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^n<M\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1};$$

აქედან ვპოულობთ: $|a_n\rho^n|<A_0$. მაგრამ $|a_0|=A_0$; მაშასადამე, წკრივი:

$$A_0+A_0\frac{x}{\rho}+A_0\frac{x^2}{\rho^2}+\ldots+A_0\frac{x^n}{\rho^n}+\ldots$$

იქნება $f(x)$-ის მაჟორანტი. ამრიგად, საზოგადოდ, M რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ A_0-ზე მეტი ან მისი ტოლი ნებისმიერი რიცხვი. ამ თვისებით ჩვენ ქვემოთ ვისარგებლებთ.

სრულიად ასევე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ $a_0=0$, მაშინ მაჟორანტად შეიძლება ავიღოთ გამოთქმა:

$$\frac{\mu}{1-\dfrac{x}{\rho}}-\mu=\frac{\mu}{1-\dfrac{x}{\rho}}\frac{x}{\rho},$$

სადაც μ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.[1]

შენიშვნა. თუ მოცემული მთელი წკრივისათვის ჩვენ ვიცით მაჟორანტი კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის სახით, მაშინ შეგვიძლია აგრეთვე ვიმსჯელოთ ცთომილების ხარისხზე, რომელიც მიიღება მოცემული წკრივის $f(x)$ ჯამის შეცვლით მისი პირველი $n+1$ წევრის ჯამით (იხ. § 151, შენიშვნა II).

178. წკრივის წკრივში ჩასმა. ვთქვათ

$$z=f(y)=a_0+a_1y+\ldots+a_ny^n+\ldots \tag{20}$$

არის y ცვლადის მიხედვით ხარისხებად დალაგებული წკრივი, რომელიც კრებადია $(-R, +R)$ შუალედში. მეორე მხრით, დავუშვათ, რომ

$$y=\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots \tag{21}$$

---

[1] ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $\rho<r\dfrac{\mu}{M}$.

არის $(-r, +r)$ შუალედში კრებადი მეორე წკრივი. თუ მე-(20) წკრივში შევცვლით $y, y^2\ y^3, \ldots$-ს მათი x-ის ხარისხებად გამწკრივებით, რომლებიც მე-(21) ფორმულით მიიღება, მაშინ გვექნება ორმაგი წკრივი:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1b_0\ \ +a_2b_0^2 \qquad\qquad +\ldots+a_nb_0^n+\ldots \\ \quad +a_1b_1x+2a_2\,b_0\,b_1\,x \qquad +\ldots+na_nb_0^{n-1}\,b_1x+\ldots \\ \quad +a_1b_2x^2+a_2\,(b_1^2+2b_0b_2)\,x^2+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (22)$$

გამოვარკვიოთ, თუ რა პირობებში იქნება ეს ორმაგი წკრივი რომელიმე შუალედში აბსოლუტურად კრებადი. პირველ ყოვლისა აუცილებელია, რომ პირველ სტრიქონში მყოფი წკრივი:

$$a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\ldots+a_nb_0^n+\ldots$$

იყოს აბსოლუტურად კრებადი, ე. ი. რომ შესრულებული იქნეს უტოლობა: $b_0|<R$. ეს პირობა ამასთანავე არის საკმარისიც. მართლაც, თუ ეს პირობა კმაყოფილდება, მაშინ $\varphi(x)$-ის მაჟორანტად ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$ სახის გამოსახვა, სადაც m არის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი, მეტი ვიდრე $|b_0|$, ხოლო $\rho<r$ (იხ. გვ. 448). ცხადია ამასთანავე ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ x-ის მხოლოდ ის მნიშვნელობები, რომლებიც მოთავსებულია $(-\rho, +\rho)$ შუალედში. მაშასადამე, შეგვიძლია დავუშვათ $m<R$. ვთქვათ R' არის m და R-ს შორის მოთავსებული დადებითი რიცხვი. $f(y)$-სათვის მაჟორანტად შეგვიძლია ავიღოთ შემდეგი სახის გამოსახვა:

$$\frac{M}{1-\dfrac{y}{R}}=M+M\frac{y}{R'}+M\frac{y^2}{R'^2}+\ldots$$

თუ ამ გამოსახვაში y-ს შევცვლით $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$-ით, ხოლო y ცვლადის ხარისხებს გავამწკრივებთ x ცვლადის ზრდად ხარისხებად ბინომის ფორმულით, მაშინ მივიღებთ ახალ ორმაგ წკრივს:

$$\left.\begin{array}{l} M+M\left(\dfrac{m}{R'}\right)+\ldots+M\left(\dfrac{m}{R'}\right)^n+\ldots \\ \ldots+M\left(\dfrac{m}{R'}\right)\dfrac{x}{\rho}+\ldots+nM\left(\dfrac{m}{R'}\right)^n\dfrac{x}{\rho}+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (23)$$

უკანასკნელი წკრივის ყველა კოეფიციენტი დადებითია და (22) წკრივის შესაბამი კოეფიციენტების აბსოლუტურ სიდიდეებზე მეტი, ვინაიდან (22) ცხრი-

ლის ყოველი კოეფიციენტი მიიღება $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ კოეფიციენტებისაგან მხოლოდ შეკრებისა და გამრავლების საშუალებით. მაშასადამე, თუ (23) ორმაგი წკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (22) ორმაგი წკრივიც მით უმეტეს კრებადი იქნება. თუ (23) წკრივში x-ს მისი აბსოლუტური სიდიდით შევცვლით, მაშინ იმისთვის რომ მიღებული წკრივი იყოს კრებადი, აუცილებელია იყოს კრებადი (23) ცხრილის ყოველი სვეტის წევრებისაგან შედგენილი წკრივები, ე. ი. შესრულებული იყოს უტოლობა: $|x|<\rho$. თუ ეს პირობა დაცულია, მაშინ $(n+1)$ სვეტის წევრთა ჯამი x-ის შეცვლით $|x|$-ით, ტოლი იქნება:

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ (23) წკრივის აბსოლუტური კრებადობისათვის ამას გარდა უნდა იყოს:

$$m<R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right),$$

ე. ი.

$$|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \tag{24}$$

რადგანაც (24) უტოლობიდან გამომდინარეობს წინა $|x|<\rho$ უტოლობა, ამიტომ იგი წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომლის დროსაც (23) ორმაგი წკრივი აბსოლუტურად კრებადია. მაშასადამე, (22) ორმაგი წკრივი აგრეთვე აბსოლუტურად კრებადი იქნება x ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც (24) უტოლობას აკმაყოფილებს. შევნიშნოთ, რომ x ცვლადის ამ მნიშვნელობათათვის $\varphi(x)$ წკრივი აგრეთვე კრებადი იქნება, და y ცვლადის შესაბამი მნიშვნელობა აბსოლუტური სიდიდით იქნება R'-ზე ნაკლები, ვინაიდან შემდეგი უტოლობებიდან:

$$|\varphi(x)|<\frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}}, \quad \frac{|x|}{\rho}<1-\frac{m}{R'}$$

გამომდინარეობს უტოლობა: $|\varphi(x)|<R'$.

შევაჯამებთ რა (22) წკრივს სვეტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$a_0+a_1\varphi(x)+a_2[\varphi(x)]^2+\ldots+a_n[\varphi(x)]^n+\ldots,$$

ე. ი. $f[\varphi(x)]$-ს. მეორე მხრით, შევაჯამებთ რა სტრიქონების მიხედვით, მივიღებთ x-ის ზრდად ხარისხებად დალაგებულ წკრივს; მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს:

$$f[\varphi(x)]=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{25}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $c_0, c_1, c_2, \ldots$ კოეფიციენტები მე-(20) და (21) წკრივების კოეფიციენტების საშუალებით გამოისახებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \dots + a_n b_0^n + \dots, \\ c_1 &= a_1 b_1 + 2a_2 b_1 b_0 + \dots + n a_n b_0^{n-1} b_1 + \dots, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2 (b_1^2 + 2b_0 b_2) + \dots, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

(25) ფორმულა ჩვენ გამოვიყვანეთ x-ის მხოლოდ იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც (24) უტოლობას აკმაყოფელებენ; მაგრამ ეს უტოლობა იძლევა მხოლოდ ქვედა საზღვარს იმ შუალედისას, რომელშიაც ეს ფორმულა გამოიყენება. შესაძლებელია, რომ ამ ფორმულას ადგილი ექნეს უფრო ფართო შუალედშიაც. ამ საკითხის სრული ამოხსნა თხოულობს წარმოსახვითი ცვლადის ფუნქციების შესწავლას; ჩვენ მას შემდეგში დავუბრუნდებით.

კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ე ბ ი. 1. ვინაიდან (24) უტოლობაში R' რიცხვი შესაძლოა ვიგულისხმოთ R რიცხვის რაგინდ მახლობლობაში, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ (25) ფორმულა გამოიყენება x-ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას: $|x| < \rho\left(1 - \frac{m}{R}\right)$. ამიტომ, თუ მე-(20) წკრივი y ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის იქნება კრებადი, მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ R რიცხვი უსასრულოდ დიდი, m კი რაგინდ დიდი, და მაშასადამე, ρ შეგვიძლია ავიღოთ რაგინდ ახლოს r რიცხვთან; აქედან გამომდინარეობს, რომ (25) ფორმულა გამოიყენება, როცა $|x| < r$, ე. ი. ის გამოიყენება იმავე შუალედში, რომელშიაც (21) წკრივი იქნება კრებადი. კერძოდ, თუ ორივე $f(y)$ და $\varphi(x)$ წკრივი x და y-ის ყველა მნიშვნელობისათვის კრებადია, მაშინ r რიცხვი შეიძლება ავიღოთ რაგინდ დიდი, და (25) ფორმულა x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გამოიყენება.

2. თუ (21) წკრივში b_0 მუდმივი წევრი ტოლია ნულის, მაშინ $\varphi(x)$-ის მაჟორანტად შეიძლება მივიღოთ შემდეგი გამოსახვა:

$$\frac{m}{1-\frac{x}{\rho}} - m = \frac{m}{1-\frac{x}{\rho}} \cdot \frac{x}{\rho},$$

სადაც $\rho < r$, და m ნაბსითი დადებითი რიცხვია. სრულიად ისევე, როგორც ზოგად შემთხვევაში, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ (25) ფორმულა გამოიყენება ამ შემთხვევაშიაც, თუ კი

$$|x| < \rho \frac{R'}{R'+m}, \tag{27}$$

მასთან R' შეიძლება აღებული იქნეს R-ის საკმაო მახლობლობაში. (27) უტოლობით განსაზღვრული შუალედი იმ შუალედზე უფრო ფართოა, რომელიც (24) უტოლობით არის განსაზღვრული.

უკანასკნელი კერძო შემთხვევა განსაკუთრებით ხშირად გვხვდება. აქ უტოლობა $|b_0| < R$ თავისთავად კმაყოფილდება, და c_n კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$-საგან:

$$c_0=a_0,\quad c_1=a_1b_1,\quad c_2=a_1b_2+a_2b_1^2,\ldots,c_n=a_1b_n+\ldots+a_nb_1^n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. კ ო შ ი მ დაამტკიცა, რომ ბინომის ფორმულა შეიძლება გამოყვანილი იქნეს $\ln(1+x)$-ის გამწკრივებიდან. მართლაც, თუ დავუშვებთ:

$$y=\mu\ln(1+x)=\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right),$$

გვექნება:

$$(1+x)^\mu=e^{\mu\ln(1+x)}=e^y=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots;$$

პირველ დაშლას თუ ჩავსვამთ მეორეში, მივიღებთ:

$$(1+x)^\mu=1+\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)+\frac{\mu^2}{1.2}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)^2+\ldots$$

ცხადია, რომ თუ მარჯვენა ნაწილს დავალაგებთ x-ის ხარისხებად, მაშინ x^n-ის კოეფიციენტად გვექნება μ-ის n ხარისხის რაიმე მრავალწევრი; აღვნიშნოთ იგი $P_n(\mu)$-ით. ეს მრავალწევრი ნული უნდა გახდეს, როცა $\mu=0, 1, 2,\ldots n-1$ და ტოლი ერთის, როცა $\mu=n$; ეს პირობები საკმარისია მისი განსაზღვრისათვის

$$P_n=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

2. ვთქვათ $z=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, სადაც x არის მოთავსებული -1 და $+1$ შორის. თუ დავუშვებთ:

$$y=\frac{1}{x}\ln(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n+1}+\ldots,$$

გვექნება:

$$e^y=1+\frac{y}{1}+\frac{y^3}{1.2}+\ldots$$

მეორე დაშლა შესაძლებელია y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, პირველი კი მხოლოდ მაშინ, როცა $|x|<1$. თუ პირველ დაშლას ჩავსვამთ მეორეში, მივიღებთ ფორმულას, რომელიც გამოიყენება -1 და $+1$-ს შორის მოთავსებულ x-ის ყოველ მნიშვნელობებისათვის. თუ პირველი ორი წევრით დავკმაყოფილდებით, გვექნება:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{x}{2}\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots\right)+\ldots=e-\frac{e}{2}x+\ldots$$

ეს გვიჩვენებს, რომ როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ, რჩება რა დადებითი, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ფუნქცია იზრდება და მიისწრაფის e რიცხვისაკენ.

179. მთელი წკრივების გაყოფა. განვიხილოთ პირველად ფუნქცია:

$$f(x)=\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots},$$

სადაც მნიშვნელში მოთავსებული წკრივი იწყება ერთიდან და კრებადია $(-r,+r)$ შუალედში. აღვნიშნავთ რა

$$y=b_1x+b_2x^2+\ldots,$$

გვაქვს:

$$f(x)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\dots$$

პირველ გაშლას თუ მეორეში ჩავსვამთ, $f(x)$—სათვის მივიღებთ შემდეგი სახის გაშლას მთელ წკრივად:

$$f(x)=1-b_1x+(b_1^2-b_2)x^2+\dots,$$

რომელსაც ადგილი ექნება რომელიმე შუალედში. ასეთივე ხერხით ჩვენ შევძლო მივველო ისეთი ნებისმიერი მთელი წკრივის შებრუნებული სიდიდის გაშლაც, რომლის მუდმივი წევრი ნულისაგან განსხვავდება.

ვთქვათ ახლა საჭიროა ორი კრებადი მთელი წკრივის ფარდობის გამწკრივება:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots}.$$

თუ b_0 განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ეს ფარდობა შეიძლება დავწეროთ ასეთი სახით:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)\cdot\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots}.$$

ისე როგორც ზემოთ, მარჯვენა ნაწილი შეგვიძლია შევცვალოთ ორი მთელი წკრივის ნამრავლით. მაშ, მოცემული ფარდობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მთელი წკრივის სახით, რომელიც კრებადია ნულთან საკმაო მახლობლობაში მყოფ x-ის ყოველ მნიშვნელობებისათვის:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$$

თუ მნიშვნელისაგან განვთავისუფლდებით და ორივე ნაწილში x-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტებს შევადარებთ, მივიღებთ ფორმულებს:

$$a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\dots+b_nc_0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\dots);$$

აქედან შეიძლება მიმდევრობით განისაზღვროს $c_0, c_1, \dots, c_n$ კოეფიციენტები. შესანიშნავია ის, რომ ეს კოეფიციენტები იქნება იგივე, რომლებსაც ჩვენ მივიღებდით, თუ პირველ წკრივს გავყოფდით მეორეზე x-ის ზრდადი ხარისხებით დალაგებული მრავალწევრის ჩვეულებრივი გაყოფის წესით.

თუ $b_0=0$, მაშინ მივიღებთ სხვაგვარ შედეგს. უფრო ზოგადობისათვის დავუშვათ, რომ $\psi(x)=x^k\psi_1(x)$, სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო $\psi_1(x)$ არის მთელი წკრივი, რომლის მუდმივი წევრი განსხვავდება ნულისაგან. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x^k}\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}.$$

ისე როგორც ზემოთ გვაქვს:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}=c_0+c_1x+\dots+c_{k-1}x^{k-1}+c_kx^k+c_{k+1}x^{k+1}+\dots;$$

აქედან:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{c_0}{x^k}+\frac{c_1}{x^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{k-1}}{x}+c_k+c_{k+1}x+\ldots \tag{28}$$

ამგვარად ამ ორი წკრივის ფარდობა ტოლია რაციონალური წილადის ჯამისა, რომელიც იქცევა უსასრულოდ მხოლოდ $x=0$ მნიშვნელობისათვის, და მთელი წკრივისა, რომელიც კრებადია რომელიმე შუალედში $x=0$ მნიშვნელობის მახლობლად.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მთელი წკრივის სხვადასხვა ხარისხის გამოთვლის დროს ხელსაყრელია მოვიქცეთ შემდეგნაირად. ავიღებთ ლოგარითმულ წარმოებულებს შემდეგი იგივეობის ორივე ნაწილიდან

$$(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)^m=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

და განვთავისუფლდებით რა მნიშვნელისაგან, მივიღებთ ახალ იგივეობას:

$$\left.\begin{aligned}&m(a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots)=\\&=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)(c_1+2c_2x+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ადვილად ვიპოვით წინა იგივეობის ორივე ნაწილში x-ის სხვადასხვა ხარისხის კოეფიციენტებს; შევადარებთ რა ერთმანეთთან x-ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტებს, მივიღებთ ტოლობათა წკრივს, რომლებიდანაც შეიძლება მიმდევრობით განვსაზღვროთ $c_1, c_2, \ldots, \ldots c_n \ldots$ კოეფიციენტები, თუ ცნობილია პირველი c_0 კოეფიციენტი. მაგრამ, ცხადია, $c_0=a_0^m$.

180. $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$**-ის გამწკრივება.** ვიპოვით $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$-ის დაშლას z-ის ხარისხებად. თუ დავუშვებთ $y=2xz-z^2$, მაშინ y-ის ისეთი მნიშვნელობებისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $|y|<1$, გვაქვს:

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=(1-y)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}y^2+\ldots,$$

ანუ

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=1+\frac{2xz-z^2}{2}+\frac{3}{8}(2xz-z^2)^2+\ldots \tag{30}$$

თუ z-ის ერთნაირხარისხებიან წევრებს შევაჯგუფებთ, მივიღებთ შემდეგი სახის დაშლას:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=P_0+P_1z+P_2z^2+\ldots P_nz^n+\ldots, \tag{31}$$

სადაც

$$P_0=1,\quad P_1=x,\quad P_2=\frac{3x^2-1}{2},\ldots$$

P_n არის x-ის მიმართ n-ური ხარისხის მრავალწევრი. ეს მრავალწევრები მიმდევრობით შეიძლება განსაზღვრული იქნეს რეკურენტული ფორმულიდან. მართლაც, თუ (31) ფორმულას გავაწარმოებთ z-ით, გვექნება:

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1+2P_2z+\ldots+nP_nz^{n-1}+\ldots;$$

(31) ფორმულის თანახმად უკანასკნელი ტოლობა შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$(x-z)(P_0+P_1z+\ldots+P_nz^n+\ldots)=(1-2xz+z^2)(P_1+2P_2z+\ldots).$$

თუ შევადარებთ ორივე ნაწილში z^n-ის კოეფიციენტებს, მივიღებთ რეკურენტულ ფორმულას:

$$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}.$$

ეს ფორმულა იმ ფორმულის იგივურია, რომელიც ამყარებს დამოკიდებულებას ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს სამ მიმდევნო პოლინომს შორის (§ 86); გარდა ამისა, ჩვენ ვნახეთ, რომ $P_0=X_0$, $P_1=X_1$, $P_2=X_2$. ამნაირად ყოველი n-სთვის გვაქვს: $P_n=X_n$, და (31) ფორმულა გადაიწერება ასე:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=1+X_1z+X_2z^2+\ldots+X_nz^n+\ldots, \tag{32}$$

სადაც X_n არის ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს n-ური პოლინომი:

$$X_n=\frac{1}{2.4.6\ldots2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

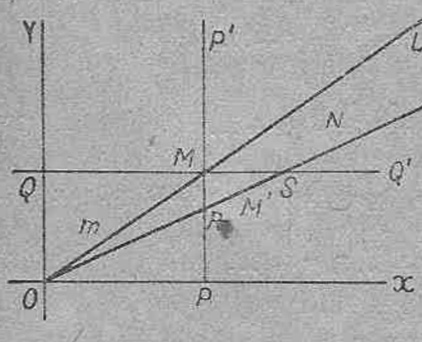
ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, თუ რომელ შუალედში გამოიყენება (32) ფორმულა.

III. მრავალი ცვლადის მთელი წკრივები

181. კრებადობის არე. განვიხილოთ პირველად მთელი წკრივი:

$$\sum A_{mn}X^mY^n, \tag{33}$$

რომლის ყველა A_{mn} კოეფიციენტი დადებითია და სადაც თვით X და Y ცვლადებს დადებითი მნიშვნელობები აქვს. ცხადია, რომ თუ ეს წკრივი კრებადია X_0, Y_0 დადებით მნიშვნელობათა სისტემისათვის, მაშინ ის კრებადი იქნება ყოველი (X, Y) სისტემისათვის, რომლისთვისაც $X\leqslant X_0$, $Y\leqslant Y_0$. შებრუნებით, თუ (33) წკრივი განშლადია X_0, Y_0 მნიშვნელობებისათვის, მაშინ იგი მით უფრო განშლადი იქნება, როცა ერთდროულად $X\geqslant X_0$, $Y\geqslant Y_0$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ (33) წკრივი კრებადია M წერტილში, რომელიც იმყოფება XOY კუთხის ფარგლებში, მაშინ იგი კრებადია $OPMQ$ სწორკუთხედის ყოველ წერტილში, რომელიც მოთავსებული იქნება როგორც მის შიგნით, ისე მის გვერდებზე



ნახ. 30.

(ნახ. 30); შებრუნებით, თუ წკრივი განშლადია M წერტილში, მაშინ ის განშლადი იქნება ყოველ წერტილში, რომელიც $P'MQ'$ მართი კუთხის შიგნით ან მის გვერდებზე იქნება დალაგებული.

განვიხილოთ ახლა OL უსასრულო ნახევარწრფე, რომელიც XOY კუთხის ფარგლებშია მოთავსებული, და m წერტილი, რომელიც აღწერს ამ ნახევარ წრფეს და გამოდის კოორდინატთა სათავიდან. ამ m წერტილის კოორდი-

ნატები, და მაშასადამე, (33) წკრივის ყველა წევრი, რომელთათვის A_{mn} ნული არ არის, იზრდება, როცა m წერტილი შორდება სათავეს. ამრიგად, ამ OL წრფეზე არის ისეთი მოსაზღვრე M წერტილი, რომ (33) წკრივი კრებადია კოორდინატთა სათავისა და M წერტილს შორის მოთავსებულ OM მონაკვეთის ყოველ წერტილში, და განშლადია ML ნახევარწრფის M-ის გარე მდებარე ყოველ წერტილში[1].

კერძოდ, შეიძლება მოხდეს, რომ M წერტილი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს; მაშინ (33) წკრივი განშლადია ყოველი წერტილისათვის, რომელიც არ მდებარეობს ან OX ან OY ღერძზე. თუ M წერტილი იმყოფება უსასრულობაში, მაშინ შებრუნებით, (33) წკრივი კრებადია როგორიც არ უნდა იყოს X და Y, ე. ი. მთელი XOY კუთხის ფარგლებში.

თუ ამ უკიდურეს შემთხვევებს უყურადღებოდ დავტოვებთ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ XOY კუთხის ფარგლებში დალაგებულ ყოველ OL ნახევარწრფეზე იმყოფება M წერტილი, რომლის მანძილიც კოორდინატთა სათავიდან იცვლება განუწყვეტლად ამ წრფის λ საკუთხო კოეფიციენტთან ერთად. მართლაც, ვთქვათ OL' არის OL-ის მახლობელი ნახევარწრფე (ნახ. 30). (33) წკრივი, რომელიც კრებადია OM მონაკვეთის ყოველ წერტილში, კრებადი იქნება აგრეთვე $OPMQ$ მართკუთხედის შიგნით მდებარე ნებისმიერ წერტილში, და მაშასადამე, OR მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილში. შებრუნებით, ვინაიდან (33) წკრივი განშლადია ML-ის ყოველ წერტილში, ამიტომ იგი აგრეთვე განშლადი იქნება SL'-ის ყოველ წერტილში. OL' ნახევარწრფის მოსაზღვრე M' წერტილი არის, მაშასადამე, RS მონაკვეთის ერთ-ერთი წერტილი, და აქედან დავასკვნით, რომ ეს M' წერტილი მიისწრაფის M წერტილისაკენ, როცა OL' მიისწრაფის OL-საკენ. როცა OL ნახევარწრფე, O წერტილის გარშემო ბრუნვისას, აღწერს XOY კუთხეს, მაშინ M წერტილი შემოხაზავს რაიმე Γ მრუდს, რომელიც ამ XOY კუთხეს ჰყოფს ორ სხვადასხვა არედ: შიგა I და გარე E არეებად. m წერტილი ეკუთვნის I არეს, თუ იგი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავესა და Om წრფის M საზღვარწერტილს შორის, წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი ეკუთვნის E არეს. ამ Γ მრუდის თვით განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ (33) წკრივი კრებადია I არის ყოველ წერტილში და განშლადი E არის ყოველ წერტილში. Γ საზღვარწირის წერტილში წკრივი შეიძლება იყოს კრებადი ან განშლადი.

ამ Γ საზღვარწირს შეიძლება ჰქონდეს მეტად სხვადასხვა ფორმა, რომელიც (33) წკრივზეა დამოკიდებული. ზემოთმოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ამ წირის წერტილის ორდინატა არ შეიძლება იზრდებოდეს აბსცისის ზრდის დროს, და შებრუნებით. რომ ვნახოთ თუ რა ხდება, როცა OL მიისწრაფის OX-საკენ, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ M წერტილის აბსცისი

[1] თუ λ არის OL წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, მაშინ M წერტილის აბსცისი ტოლია $\sqrt[n]{A_{pq}\lambda^q}$ რიცხვთა სიმრავლის ზღვართა შორის უდიდესის შებრუნებული სიდიდისა, სადაც $n=p+q$ (Lemaire, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1896, გვ. 286).

ამ შემთხვევაში არ შეიძლება კლებულობდეს, ხოლო ან წერტილის ორდინატი მატულობდეს; მაშასადამე, y მიისწრაფის რაიმე ზღვარისაკენ, იმ დროს როცა x-ს შეიძლება ან მიისწრაფოდეს ზღვარისაკენ, ან უსასრულოდ იზრდებოდეს. მაშასადამე, Γ მრუდი ეკვრის OX ღერძს რომელიმე A წერტილში ან OX-ის პარალელური ასიმპტოტი აქვს; ამ ასიმპტოტად შეიძლება იყოს თვით OX ღერძიც. შევნიშნოთ, რომ თუ Γ მრუდი OX ღერძს A წერტილს ეკვრის, მაშინ (33) წკრივი არ იქნება განშლადი OX ღერძის ყოველ წერტილში, რომელიც A წერტილის მარჯვნით მდებარეობს. ცხადია, რომ ყველა ეს გამოიყენება აგრეთვე OY ღერძისთვისაც.

მაგალითები. 1. წკრივი $\sum M \frac{X^m}{a^m}\frac{Y^n}{b^n}$ კრებადია მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია $X<a$, $Y<b$ უტოლობები და მხოლოდ ამ შემთხვევაში; მისი ჯამი ტოლია

$$\frac{M}{\left(1-\frac{X}{a}\right)\left(1-\frac{Y}{b}\right)}.$$

აქ Γ მრუდი შედგება მართკუთხედის ორი გვერდისაგან, რომლებიც კოორდინატთა ღერძების პარალელურია.

2. ორმაგი წკრივი:

$$\sum M \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\frac{X^m}{a^m}\frac{Y^n}{b^n}=\frac{M}{1-\left(\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}\right)}$$

კრებადია, თუ $\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}<1$. ამ შემთხვევაში Γ მრუდი OX და OY ღერძებს შორის მოთავსებული წრფის მონაკვეთია.

3. ორმაგი წკრივი: $\sum A_{mn} X^m Y^n$, სადაც $A_{mm}=1$, ხოლო $A_{mn}=0$ (როცა $(m\neq n)$, კრებადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $XY<1$. Γ მრუდი წარმოდგენილია იმ ჰიპერბოლის შტოთი, რომელსაც ასიმპტოტებად აქვს კოორდინატთა ღერძები.

4. წკრივი

$$\sum{}' M\left(\frac{X}{a}\right)^m\left(\frac{Y}{b}\right)^n,$$

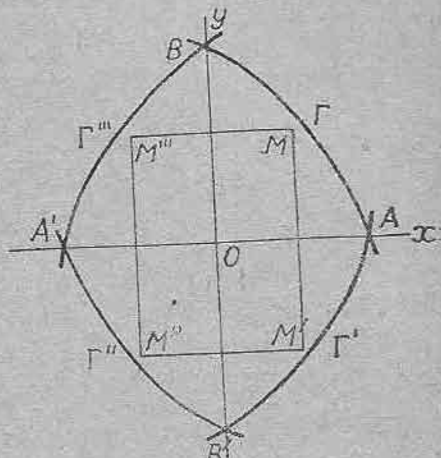
სადაც m და n ინდექსები იცვლება $+1$-დან $+\infty$-მდე, კრებადია იმავე მართკუთხედის შიგნით, როგორც პირველ მაგალითში მოყვანილი წკრივი, და, გარდა ამისა, OX და OY ღერძების ყველა წერტილში. როცა OL ნახევარწრფე მიისწრაფის OX-საკენ, მაშინ OL წრფის M წერტილი მიისწრაფის OX ღერძზე მდებარე a აბსცისის მქონე წერტილისაკენ, იმ დროს როცა OX-ის საზღვარწერტილი უსასრულობაში იმყოფება.

5. წკრივი: $\sum n!\, X^n Y^n$ განშლადია ყველა იმ წერტილში, რომლებიც კოორდინატთა ღერძებს არ ეკუთვნის.

182. მთელი წკრივების თვისებები. ავიღოთ ახლა მთელი წკრივი ნებისმიერი კოეფიციენტებით:

$$F(x,\ y)=\sum_{m,\ n} a_{mn}\, x^m y^n, \tag{34}$$

და ვთქვათ $A_{mn}=|a_{mn}|$, $X=|x|$, $Y=|y|$. (33) წკრივი, რომელიც შესდგება (34) წკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდეებისაგან, არის კრებადი, თუ წერტილი X, Y კოორდინატებით იმ I არეში იმყოფება, რომელიც ჩვენ ზემოთ განვსაზღვრეთ, და მხოლოდ ამ შემთხვევისათვის. მაშასადამე, (34) წკრივი აბსოლუტურად კრებადია, თუ წერტილი (x, y) კოორდინატებით იმ D არეს ეკუთვნის, რომელიც შემოსაზღვრულია Γ საზღვარწირის ტოლ ოთხი წირით, მასთან ერთი მათგანი არის თვით Γ მრუდი, ხოლო დანარჩენი კი მისი სიმეტრიული კოორდინატთა ღერძების მიმართ (ნახ. 31).



ნახ. 31.

იმ წერტილში, რომელიც D არის მიმართ არის გარე წერტილი და რომელიც ამავე დროს არ მდებარეობს ღერძებზე, (34) წკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი. ჩვენ არ შეგვიძლია გარდავქმნათ ეს წკრივი ისე, რომ იგი გახდეს კრებადი, რანაირადაც არ უნდა დავალაგოთ მისი წევრები. მართლაც, ვთქვათ x_0, y_0 არის იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც გარე წერტილია D-ს მიმართ და რომელიც ღერძებზე არ ძევს; $\sum a_{mn} x_0^m y_0^n$ წკრივის ზოგადი წევრის აბსოლუტური სიდიდე არ შეიძლება იყოს შემოსაზღვრული. მართლაც, რომ იყოს

$$|a_{mn} x_0^m y_0^n| < M,$$

ყოველი m და n-თვის, სადაც M მუდმივი რიცხვია, მაშინ (33) წკრივის ზოგადი წევრი იქნებოდა ნაკლები, ვიდრე

$$M \frac{X^m Y^n}{|x_0|^m |y_0|^n},$$

ე. ი. ნაკლები ისეთი წკრივის ზოგადი წევრისა, რომელიც კრებადია, როცა $X<|x_0|$, $Y<|y_0|$. ამგვარად წერტილი $|x_0|$, $|y_0|$ კოორდინატებით არ შეიძლება იყოს გარე წერტილი Γ მრუდის მიმართ, და მაშასადამე, (x_0, y_0) წერტილი არ შეიძლება იყოს გარე წერტილი P არის მიმართ. ამ არის შემომსაზღვრელი მრუდის წერტილებში (34) წკრივი შეიძლება იყოს კრებადი ან განშლადი, მსგავსად (33) წკრივისა.

ვთქვათ a და b არის D არის ისეთი წერტილის კოორდინატები, რომელიც xOy-ის კუთხის მიმართ არის შიგა წერტილი. (34) წკრივი თანაბრად კრებადია იმ $MM'M''M'''$ მართკუთხედს შიგნით, რომელიც შედგენილია ოთხი $x=\pm a$, $y=\pm b$ წრფით, და მაშასადამე, $F(x, y)$ არის x და y-ის უწყვეტი ფუნქცია ამ მართკუთხედში. აქედან გამომდინარეობს, რომ $F(x, y)$ არის უწყვეტი ფუნქცია D არის ნებისმიერ წერტილში; მართლაც, აშკარაა, რომ სადაც არ უნ-

და ავიღოთ m წერტილი ამ არეში, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ მეორე ისეთი M წერტილი, რომ m აღმოჩნდება იმ მართკუთხედის შიგნით, რომელიც $MM'\,M''\,M'''$ მართკუთხედის ანალოგიურია.

(34) წკრივის წევრობრივ გაწარმოებით x ან y ცვლადების მიმართ, ჩვენ მივიღებთ ორ ხალა წკრივს:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{m,n} m a_{mn}\, x^{m-1}\, y^n, \\ F_2(x, y) &= \sum_{m,n} n a_{mn}\, x^m\, y^{n-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

რომლებსაც აქვთ იგივე კრებადობის არე, რაც (34) წკრივს. რომ დავრწმუნდეთ ამაში, საკმარისია დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ წკრივს:

$$\sum_{m,n} m A_{mn} X^{m-1} Y^n,$$

აქვს იგივე Γ საზღვარწირი, რაც (33) წკრივს.

დამტკიცება, რომელიც § 174 დამტკიცების სრულიად ანალოგიურია შედგება ორი ნაწილისაგან:

1. თუ $\sum m A_{mn} X^{m-1} Y^n$ წკრივი კრებადია, მაშინ ამას ადგილი ექნება $\sum A_{mn} X^{m-1} Y^n$ წკრივისათვისაც, და მაშასადამე, (33) წკრივის მიმართაც.

2. შებრუნებით, თუ $\sum A_{mn} X_0^m Y_0^n$ წკრივი კრებადია, მაშინ $\sum m A_{mn} X^{m-1} Y^n$ წკრივი კრებადია, როცა $X<X_0$, $Y<Y_0$.

მართლაც, დავუშვათ, რომ ყოველი m და n-თვის გვაქვს უტოლობა:

$$A_{mn} X_0^m Y_0^n < M:$$

აქედან ვღებულობთ უტოლობას:

$$m A_{mn} X^{m-1} Y^n < \frac{Mm}{X_0}\left(\frac{X}{X_0}\right)^{m-1}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^n,$$

და მარჯვენა ნაწილი ისეთი კრებადი ორმაგი წკრივის ზოგადი წევრია, რომლის ჯამი ტოლია:

$$\frac{M}{X_0}\,\frac{1}{\left(1-\frac{X}{X_0}\right)^2\left(1-\frac{Y}{Y_0}\right)}.$$

თუ $F(x, y)$-სა და $F_1(x, y)$ წკრივებს დავალაგებთ x-ის ზრდადი ხარისხის მიხედვით, მაშინ, განვიხილავთ რა y-ს როგორც მუდმივს, მივიღებთ ორ წკრივს, რომლებიც მთელია x-ის მიმართ, და იმ წესის ძალით, რომლითაც მეორე წკრივი მიღებულია პირველისაგან, გვაქვს:

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

ამგვარადვე ვღებულობთ:

$$F_2(x, y)=\frac{\partial F}{\partial y}\,.$$

და, საზოგადოდ, (34) წკრივი შეიძლება ნებისმიერ რიცხვჯერ გავაწარმოვოთ წევრობრივ D არეში. ამგვარად, $\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}$ კერძო წარმოებული ტოლია ისეთი ორმაგი წკრივის ჯამის, რომლის მუდმივი წევრებია: $m!\, n!\, a_{mn}$; a_{mn} კოეფიციენტები წარმოადგენენ, მაშასადამე, რიცხვითი მამრავლამდე სიზუსტით $F(x, y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულთა მნიშვნელობებს, როცა $x=y=0$, და (34) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$F(x, y)=\sum \frac{\left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_0}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\, x^m y^n, \tag{34'}$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ ორი ცვლადის ფუნქცია შეიძლება გაშლილ იქნეს მთელ წკრივად მხოლოდ ერთად-ერთი წესით. თუ ჩვენ დავაჯგუფებთ ერთად ორმაგი წკრივის x და y-ის მიმართ ერთნაირ ხარისხებიან ყველა წევრს, მაშინ მივიღებთ ჩვეულებრივ წკრივს:

$$F(x, y)=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n+\cdots \tag{34''}$$

სადაც φ_n არის x და y-ის მიმართ n ხარისხის ერთგვაროვანი მრავალწევრი, რომელიც სიმბოლურად შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\varphi_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)};$$

მაშასადამე, ეს დაშლა იგივურია ისეთი დაშლისა, რომელსაც ტეილორის ფორმულა (§ 27) იძლევა.

ვთქვათ (x_0, y_0) არის D არის წერტილის კოორდინატები, ხოლო r, ρ კი Γ წირის ისეთი წერტილის კოორდინატები, რომ $|x_0|<r$, $|y_0|<\rho$. ავიღოთ D-ში (x_0, y_0) წერტილის მახლობელი (x_0+h, y_0+k) წერტილი, რომლისთვისაც

$$|x_0|+|h|<r, \quad |y_0|+|k|<\rho.$$

იმ მრავალკუთხედის შიგნით, რომელიც შედგენილია შემდეგი ოთხი წრფით:

$$x=x_0\pm[r-|x_0|], \; y=y_0\pm[\rho-|y_0|],$$

$F(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება დაიშალოს $x-x_0$ და $y-y_0$-ის ხარისხებად დალაგებულ მთელ წკრივად:

$$F(x_0+h, y_0+k)=\sum\left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \frac{h^m k^n}{m!\, n!} \tag{36}$$

ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ, თუ შემდეგი ორმაგი წკრივის:

$$\Sigma a_{mn}(x_0+h)^m (y_0+k)^n$$

ყოველ წევრს შევცვლით მისი გაშლით h და k-ს ხარისხებად და შევნიშნავთ რა, რომ ახალი ჯერადი წკრივი აბსოლუტურად კრებადია იმ დაშვებებში, რომლებიც იყო გაკეთებული ზემოთ. თუ ამ ახალ წკრივს h და k-ს ხარისხებად დავალაგებთ, მივალთ (36) ფორმულამდე.

წინა მსჯელობები და თეორემები ადვილად გავრცელდება მთელ წკრივებზე ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვით. ვთქვათ გვაქვს მთელი წკრივი n ცვლადისა: $x_1, x_2, \ldots x_n$; არსებობს, საზოგადოდ, უსასრულო სიმრავლე პ რ ი ზ მ ა ტ ო ი დ ე ბ ი ს ა, რომლებიც განისაზღვრება, მაგალითად, შემდეგი პირობებით:

$$-x_1^0 < x_1 < x_1^0, \ -x_2^0 < x_2 < x_2^0, \ldots, \ -x_n^0 < x_n < x_n^0,$$

და რომელთა შიგნით $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მთელი წკრივი აბსოლუტურად კრებადია. იგი წარმოადგენს ამ არეში უწყვეტ ფუნქციას და შეიძლება მისი წევრობრივ გაწარმოება ნებისმიერ რიცხვჯერ.

183. მაჟორანტული ფუნქციები. ვთქვათ მოცემულია n ცვლადის რაიმე $f(x, y, z, \ldots)$ მთელი წკრივი. n ცვლადის $\varphi(x, y, z, \ldots)$ წკრივს ეწოდება პირველის მიმართ მ ა ჟ ო რ ა ნ ტ ი, თუ $\varphi(x, y, z, \ldots)$ წკრივის ყოველი კოეფიციენტი არის დადებითი და მეტია $f(x, y, z, \ldots)$ წკრივის შესაბამი კოეფიციენტის აბსოლუტურ სიდიდეზე. § 182-ის თეორემის დამტკიცება არსებითად დამყარებული იყო მაჟორანტული ფუნქციის გამოყენებაზე. მართლაც, თუ $\Sigma\,|a_{mn} x^m y^n|$ წკრივი კრებადია, როცა $x = r$, $y = \rho$, მაშინ ფუნქცია:

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} = M \sum \left(\frac{x}{r}\right)^m \left(\frac{y}{\rho}\right)^n,$$

სადაც M მეტია $\Sigma\,|a_{mn} x^m y^n|$ წკრივის ყოველ კოეფიციენტზე, არის მაჟორანტული ფუნქცია $\Sigma\, a_{mn} x^m y^n$—წკრივისათვის. ფუნქცია:

$$\psi(x, y) = \frac{M}{1 - \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)}$$

შეიძლება აგრეთვე მივიღოთ მოცემული ორმაგი წკრივის მაჟორანტულ ფუნქციად; მართლაც, $\psi(x, y)$ ფუნქციაში $x^m y^n$-ის კოეფიციენტი უდრის $M\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$-ში $x^m y^n$-ის კოეფიციენტს, და მაშასადამე, იგი არავითარ შემთხვევაში არ იქნება ნაკლები $\varphi(x, y)$-ში შესაბამი კოეფიციენტზე.

სრულიად ასევე, თუ მოცემულია სამჯერადი წკრივი:

$$f(x, y, z) = \Sigma\, a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

რომელიც აბსოლუტურად კრებადია, როცა $x = r$, $y = r'$, $z = r''$, სადაც r, r', r'' დადებითი რიცხვია, მაშინ ამ სამჯერადი წკრივის მაჟორანტული ფუნქცია იქნება შემდეგი გამოსახვა:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)\left(1 - \frac{z}{r''}\right)},$$

რომელიც შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერით შემდეგი გამოსახვებიდან:

$$\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)},\quad \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left[1-\left(\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)\right]},\ldots$$

თუ $f(x, y, z)$ წკრივი მუდმივ წევრს არ შეიცავს, მაშინ მის მაჟორანტულ ფუნქციად შეიძლება ავიღოთ აგრეთვე ნებისმიერი ფუნქცია წინა ფუნქციებიდან, შემცირებული M-ით.

მთელი წკრივის მეორე მთელ წკრივში ჩასმის თეორემა (§ 178) შეიძლება გავრცელებულ იქნეს აგრეთვე მრავალი ცვლადის წკრივებზე. თუ $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ცვლადებიან კრებად მთელ წკრივში ამ ცვლადებს შევცვლით მათი დაშლით $x_1, x_2, \ldots, x_q$ ცვლადების კრებად მთელ წკრივებით, რომლებიც არ შეიცავენ მუდმივ წევრებს, მაშინ ასეთი ჩასმის შედეგი შეიძლება წარმოვადგინოთ $x_1, x_2, \ldots, x_q$ ცვლადების ხარისხებად დალაგებული მთელი კრებადი წკრივის სახით, თუ კი ამ ცვლადთა აბსოლუტური სიდიდეები ნაკლები იქნება გარკვეულ ზღვრებზე.

ვინაიდან დამტკიცების მსვლელობა არ არის დამოკიდებული ცვლადების რიცხვზე, ამიტომ ჩვენ დავკმაყოფილდებით შემდეგი კერძო შემთხვევის განხილვით. ვთქვათ

$$F(y, z)=\sum a_{mn} y^m z^n \tag{37}$$

არის მთელი წკრივი, კრებადი, როცა $|y| \leqslant R$, $|z| \leqslant R'$. მეორე მხრით, ვთქვათ

$$\left.\begin{aligned} y&=b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots,\\ z&=c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

არის ორი წკრივი, რომლებიც არ შეიცავს მუდმივ წევრებს და კრებადია, როცა x ცვლადის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება ρ-ს. (37) წკრივში y და z-ის მაგიერ ჩავსვათ მათი (38) დაშლა. რადგანაც ეს წკრივები კრებადია, როცა $|x| < \rho$, ამიტომ (37) წკრივის ყოველი $y^m z^n$ ნამრავლი შეიძლება დაშლილი იქნეს მთელ წკრივად x-ის მიხედვით, რომელიც აგრეთვე კრებადი იქნება, როცა $|x|<\rho$. ამგვარად, თუ (37) წკრივში ყოველს $y^m z^n$ ნამრავლიდან შევცვლით მისი x-ის მიხედვით მთელ წკრივად დაშლით, მაშინ მივიღებთ სამჯერად წკრივს, რომლის ყველა კოეფიციენტი მიიღება a_{mn}, b_n, c_n კოეფიციენტებიდან მხოლოდ შეკრებისა და გამრავლებით. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ x ცვლადი არ აღემატება რაიმე ზღვარს, მაშინ ეს სამჯერადი წკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება, და, მაშასადამე, მისი დალაგება შეიძლება x ცვლადის ზრდადი ხარისხების მიხედვით. პირველ ყოვლისა ცხადია, რომ $F(y, z)$-ის მაჟორანტულ ფუნქციად შეიძლება ავიღოთ ფუნქცია:

$$\Phi(y, z)=\frac{M}{\left(1-\frac{y}{R}\right)\left(1-\frac{z}{R'}\right)}=\sum M\left(\frac{y}{R}\right)^m\left(\frac{z}{R'}\right)^n, \tag{39}$$

ხოლო ორივე (38) წკრივის მაჟორანტულ ფუნქციად კი შემდეგი გამოსახვები:

$$\frac{N\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}},\ \frac{N'\frac{x}{r'}}{1-\frac{x}{r'}}. \tag{40}$$

განსახილავი სამმაგი წკრივის ნებისმიერი წევრის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია იმ სამმაგი წკრივის შესაბამ წევრზე, რომელიც არის მიღებული ასეთივე წესით შემდეგი ორმაგი წკრივიდან:

$$\sum\frac{M}{R^m\,R'^n}\left(\frac{NX}{r}+\frac{NX^2}{r^2}+\cdot\ \cdot\right)^m\left(\frac{N'X}{r'}+\frac{N'X^2}{r'^2}+\cdots\right)^n,$$

სადაც $X=|x|$. ამ სამმაგი წკრივის კრებადობისათვის საკმარისია, რომ კრებადი იყოს ორმაგი წკრივი:

$$M\sum\left[\frac{N\frac{X}{r}}{R\left(1-\frac{X}{r}\right)}\right]^m\left[\frac{N'\frac{X}{r'}}{R'\left(1-\frac{X}{r'}\right)}\right]^n,$$

ე. ი. შესრულებული იყოს ერთდროულად:

$$X<r\frac{R}{R+N},\qquad X<r'\frac{R'}{R'+N'}.$$

შენიშვნა. თუ (38) წკრივები შეიცავენ b_0 და c_0 მუდმივ წევრებს, მაშინ თეორემა ამ შემთხვევაშიც სამართლიანი იქნება, თუ $|b_0|<R$, $|c_0|<R'$. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია (37) დაშლა შევცვალოთ $y-b_0$ და $z-c_0$-ის ხარისხებად დაშლით (§ 18) და ამგვარად მივალთ წინა შემთხვევაზე.

IV. უცხადო ფუნქციები. ანალიზური წირები და ფართეულები.

184. ერთ ცვლადის უცხადო ფუნქცია. ჩვენ უკვე დავამყარეთ (თავი III, § 32) უცხადო ფუნქციის არსებობა გარკვეულ პირობებში უწყვეტობის მიმართ. იმ შემთხვევებში, როცა მოცემულ განტოლებათა მარცხენა მხარეები იშლება მთელ წკრივად, შეგვიძლია მივიდეთ უფრო გარკვეულ დასკვნამდე.

ვთქვათ $F(x, y)=0$ არის განტოლება, რომლის მარცხენა მხარე შეიძლება დაიშალოს კრებად ხირისხოვან წკრივად, რომელიც დალაგებულია $x-x_0$, $y-y_0$-ის ხარისხებად, მასთან ეს წკრივი არ შეიცავს მუდმივ წევრს და $y-y_0$-ის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავდება. ამ პირობებში $F(x, y)=0$ განტოლებას აქვს *ერთი და მხოლოდ ერთი* ფესვი, რომელიც მიისწრაფის y_0-საკენ, როცა x მიისწრაფის x_0-საკენ, და ეს ფესვი შეიძლება დაიშალოს მთელ წკრივად, რომელიც დალაგებულია $x-x_0$-ის სხვაობის ხარისხებად.

გამოთვლების გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ $x_0=y_0=0$, რაც ტოლფასია კოორდინატთა სათავის გადატანისა (x_0, y_0) წერტილში.

თუ გამოვყოფთ წევრს y-ის პირველი ხარისხით და მას მეორე მხარეზე გადავიტანთ, მოცემული განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$y=f(x, y)=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\ldots, \tag{41}$$

მასთან შემდგომი წევრების ხარისხი იქნება მეორეზე მაღალი. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ჩვენ შეგვიძლია ფ ო რ მ ა ლ უ რ ა დ დავაკმაყოფილოთ (41) განტოლება, თუ y-ს შევცვლით წკრივით:

$$y=c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{42}$$

და ამ წკრივს მოვექცევით ისე, თითქოს ის იყოს კრებადი. მართლაც, თუ განტოლების ორივე მხარეში მოვახდენთ ჩასმას და შევადარებთ x-ის კოეფიციენტებს, მივიღებთ პირობებს:

$$c_1=a_{10}, \quad c_2=a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2, +\ldots;$$

საზოგადოდ, c_n გამოისახება a_{ik} კოეფიციენტებით მხოლოდ შეკრებათა და გამრავლებათა საშუალებით, სადაც $i+k\leqslant n$, და წინა $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ კოეფიციენტების საშუალებით. ამრიგად, გვექნება:

$$c_n=P_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \ldots, a_{0n}), \tag{43}$$

სადაც P_n არის მრავალწევრი, რომლის ყველა კოეფიციენტი მთელი დადებითი რიცხვებია. რომ ყველა წინა მოქმედება იყოს შესაძლებელი, ჩვენ გვრჩება დასამტკიცებელი, რომ ამგვარად მიღებული (42) წკრივი არის კრებადი x ცვლადის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობისათვის. ამის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ ერთი ფრიად ზოგადი ხერხით, რომლის ძირითადი აზრი კ ო შ ი ს ეკუთვნის; ეს ხერხი ემყარება მაჟორანტული ფუნქციის გამოყენებაზე.

ვთქვათ

$$\varphi(x, Y)=\sum b_{mn}x^mY^n$$

არის $f(x, y)$ ფუნქციის მაჟორანტული ფუნქცია, მასთან $b_{00}=b_{01}=0$, და ყოველი დანარჩენი b_{mn} კოეფიციენტებიდან არის დადებითი და არა ნაკლები ვიდრე $|a_{mn}|$. განვიხილოთ დამხმარე განტოლება:

$$Y=\varphi(x, Y)=\sum b_{mn}x^mY^n \tag{41'}$$

და შევეცადოთ დავაკმაყოფილოთ ეს განტოლება, მივიღებთ რა Y-ს x-ის მთელ წკრივად:

$$Y=C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots \tag{42'}$$

როგორც ზემოთ, $C_1, C_2, \ldots$ კოეფიციენტებისათვის ჩვენ მოვძებნით მნიშვნელობებს:

$$C_1=b_{10}, \quad C_2=b_{20}+b_{11}C_1+b_{02}C_1^2, \ldots,$$

და, საზოგადოდ,

$$C_n = P_n(b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{0n}). \tag{43'}$$

ვინაიდან P_n მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი დადებითია, და $|a_{mn}| \leqslant b_{mn}$, ამიტომ (43) და (43') დამოკიდებულებებიდან უშუალოდ ჩანს, რომ $|c_n| < C_n$. მაშასადამე, თუ (42') წკრივი კრებადია, მაშინ (42) წკრივიც აგრეთვე კრებადი იქნება. მაგრამ $\varphi(x, Y)$-ის მაჟორანტულ ფუნქციად ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ შემდეგი გამოსახვა:

$$\varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho},$$

სადაც M, r, ρ—დადებითი რიცხვებია. მაშინ დამხმარე (41') განტოლება მნიშვნელისაგან განთავისუფლების შემდეგ, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$Y^2 - \frac{\rho^2 Y}{\rho+M} + \frac{M\rho^2}{\rho+M}\,\frac{x}{r-x} = 0.$$

ამ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი, რომელიც ნულის ტოლია, როცა $x=0$, სახელდობრ:

$$Y^2 = \frac{\rho^2}{2(\rho+M)} - \frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\sqrt{1 - \frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\,\frac{x}{r-x}}.$$

ავღნიშნავთ რა

$$\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho+2M}\right)^2,$$

ფესქვეშა გამოსახვა შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1},$$

და მაშინ მივიღებთ:

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1 - \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

აქედან ჩანს, რომ ეს Y ამონახსნი $(-\alpha, +\alpha)$ შუალედში იშლება კრებად წკრივად. ეს დაშლა იგივური უნდა იყოს იმ დაშლისა, რომელიც მიიღება უშუალო ჩასმის საშუალებით, ე. ი. (42') დაშლისა; მაშასადამე (42) წკრივი მით უფრო კრებადია $(-\alpha, +\alpha)$ შუალედში. საჭიროა, მაინც, შევნიშნოთ, რომ ეს შუალედი არის კრებადობის შუალედის მხოლოდ ქვედა საზღვარი, რომელიც სინამდვილეში შეიძლება იყოს გაცილებით უფრო ფართო.

c_n კოეფიციენტების მიღების თვით ხერხიდან ცხადია, რომ (42) წკრივის y ჯამი აკმაყოფილებს (41) განტოლებას. $F(x, y)=0$ განტოლება წარმოვადგინოთ $F(x, y)=y-f(x, y)=0$ სახით; ვთქვათ $y=P(x)$ არის ფესვი, რომელიც ჩვენ ზემოთ მივიღეთ. $F(x, y)$-ში მოვახდინოთ ჩასმა $y=P(x)+z$ და შემდეგი დავალაგოთ x და z-ის ხარისხებად. ყველა წევრი უნდა გაიყოს z-ზე,

ვინაიდან ეს შედეგი ნულს უნდა ეტოლებოდეს, როცა $z=0$, როგორიც არ უნდა იყოს x ცვლადის მნიშვნელობა; მაშასადამე, გვექნება იგივურად:

$$F[x,\ P(x)+z]=zQ(x,\ z),$$

მასთან $Q(x,\ z)$ არის x და z-ის მთელი წკრივი. ახლა თუ $Q(x,\ z)$-ში x ცვლადს შევცვლით $y-P(x)$-ით, მივიღებთ იგივეობას:

$$F(x,\ y)=[y-P(x)]Q_1(x,\ y).$$

რადგანაც $F(x,\ y)$-ში y-ის კოეფიციენტი ტოლია ერთის, ამიტომ $Q_1(x,\ y)$-ში მუდმივი წევრი აგრეთვე ერთის ტოლი უნდა იყოს, და წინა იგივეობა ჩვენ შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$F(x,\ y)=[y-P(x)]\,[1+\alpha x+\beta y+\ldots]. \tag{44}$$

$F(x,\ y)$-ის ორ მამრავლად ეს დაშლა მოცემული იყო ვ ე ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს მიერ. ეს დაშლა გამოყოფს $F(x,\ y)=0$ განტოლების $y=P(x)$ ფესვს და ამას გარდა იგი გვიჩვენებს, რომ $F(x,\ y)=0$ განტოლებას არ აქვს სხვა ფესვი, რომელიც x-თან ერთად ნულისაკენ მიისწრაფის, ვინაიდან მეორე მამრავლი ნულისაკენ არ მიისწრაფის, როცა x და y ნულს უახლოვდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (42) დაშლის კოეფიციენტები თანმიმდევრობით რომ განვსაზღვროთ, მოცემული განტოლება შემდეგი სახით დავწეროთ:

$$y=Ax^n+xy\Phi(x,\ y)+Cx^{n+1}+\ldots+Dy^2+\ldots,\quad (A\neq 0), \tag{41''}$$

სადაც $\Phi(x,\ y)$ წარმოადგენს x და y-ის მთელ წკრივს, და სადაც დაუწერელი წევრები ქმნიან შესაბამად x და y-ის მთელ წკრივებს, რომელთაგანაც ერთი იყოფა x^{n+1}-ზე, ხოლო მეორე y^2-ზე. საძიებელი წკრივის პირველი წევრი არის Ax^n; თუ დავუშვებთ $y=x^n(A+z)$, ჩვენ მივიღებთ, გავყოფთ რა (41'') განტოლების ორივე მხარის x^n-ზე, იმავე სახის განტოლებას:

$$z=A_1x^{n_1}+xz\Phi_1(x,\ z)+\ldots;$$

z-ისათვის დაშლის პირველი წევრი არის $A_1x^{n_1}$, მაშასადამე, y-ის დაშლაში მეორე წევრი არის $A_1x^{n+n_1}$: აშკარაა, რომ ეს პროცესი შეიძლება გავაგრძელოთ უსაზღვროდ[1].

185. ზოგადი თეორემა. განვიხილოთ ახლა $p+q$ ცვლადის p განტოლების სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_q;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_p)=0,\\ &F_2(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_q;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_p)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_p(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_q;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_p)=0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

დავუშვათ, რომ $F_1,\ F_2,\ldots,\ F_p$ ფუნქციები არის ნულის ტოლი, როცა $x_i=y_k=0\ (i=1,\ldots,\ q;\ k=1,\ldots,\ p)$, და რომ ისინი ამ ცვლადების მნიშვნე-

[1] მივიღებთ რა წევრთა გარკვეულ რიცხვს, შეიძლება წევრთა რიცხვის გაორკეცება გაყოფის საშუალებით [იხ. შრომა „Sur le développement en série entière d'une branche de fonction implicite“ (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1904)].

ლობათა მახლობლობაში იშლებიან მთელ წკრივებად; გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ ნულს არ ეტოლება, როცა $x_i = y_k = 0$. ამ პირობებში (45) განტოლებებს აქვთ ერთი და მხოლოდ ერთი სისტემა ამონახსნებისა:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), \ldots, y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

სადაც $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ არიან $x_1, x_2, \ldots, x_q$-ის მთელი წკრივები, რომლებიც ნულად იქცევა, როცა $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$.

სიმარტივისათვის ჩვენ დავკმაყოფილდებით იმ შემთხვევით, როცა მოცემულია ორი განტოლება ორი u და v ფუნქციასა და სამ დამოუკიდებელ x, y, z ცვლადს შორის:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= au + bv + cx + dy + ez + \ldots = 0, \\ F_2 &= a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

ვინაიდან $ab' - ba'$ დეტერმინანტი, დაშვების თანახმად, ნულს არ ეტოლება, ამიტომ (46) განტოლებები შეიძლება შემდეგი სახის ორი განტოლებით შეიცვალოს:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum a_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v &= \sum b_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

სადაც მარჯვენა ნაწილები არ შეიცავენ არც მუდმივ წევრებს და არც პირველი ხარისხის წევრებს u და v-ს მიმართ. ისე, როგორც ზემოთ, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ეს განტოლებები შეგვიძლია ფორმალურად დავაკმაყოფილოთ, თუ u და v-ს მაგიერ ავიღებთ, x, y, z-ის მთელ წკრივებს:

$$u = \sum c_{ikl} x^i y^k z^l, \quad v = \sum c'_{ikl} x^i y^k z^l, \tag{48}$$

მასთან c_{ikl}, c'_{ikl} კოეფიციენტები გამოისახებიან a_{mnpqr}, b_{mnpqr} კოეფიციენტებით მხოლოდ შეკრებისა და გამრავლების საშუალებით. ამ გაშწკრივებათა კრებადობის დასამტკიცებლად, საჭიროა აქაც შევადაროთ ისინი ანალოგიურ გამწკრივებებს, რომლებიც შემდეგი ორი დამხმარე განტოლების ამოხსნის დროს მიიღება:

$$U = V = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y+z}{r}\right)\left(1 - \frac{U+V}{\rho}\right)} - M\left(1 + \frac{U+V}{\rho}\right),$$

სადაც M, r, ρ დადებითი რიცხვებია, რომელთა მნიშვნელობანიც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ეს ორი დამხმარე განტოლება მიიყვანება მეორე ხარისხის ერთ განტოლებაზე:

$$U^2 - \frac{\rho^2 U}{2\rho + 4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho + 4M} \frac{\frac{x+y+z}{r}}{1 - \frac{x+y+z}{r}} = 0.$$

ამ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი, რომელიც ნულად იქცევა, როცა $x=y=z=0$, სახელდობრ:

$$U=\frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}-\frac{\rho^2}{4(\rho+2M)}\sqrt{\frac{1-\frac{x+y+z}{\alpha}}{1-\frac{x+y+z}{r}}},$$

სადაც

$$\alpha=r\left(\frac{\rho}{\rho+4M}\right)^2.$$

თუ x, y, z ცვლადების აბსოლუტური სიდიდეები არ აღემატება $\frac{\alpha}{3}$-ს, მაშინ ეს ფესვი დაიშლება კრებად მთელ წკრივად. მაშასადამე, (48) წკრივებიც კრებადი იქნება ამ საზღვრებს შორის.

ვთქვათ u_1 და v_1 არის (47) განტოლებათა ამოხსნები, რომლებიც x, y, z-ის მიმართ მთელ წკრივებად იშლება. აღვნიშნავთ რა $u=u_1+u'$, $v=v_1+v'$, ჩავსვათ u და v-ს ეს მნიშვნელობები (47)-ში და შედეგი დავალაგოთ x, y, z, u' v'-ის ხარისხებად. მასთან ყველა წევრს უნდა ჰქონდეს თანამამრავლი u' და v'; მაშასადამე, თუ დავუბრუნდებით x, y, z, u, v ცვლადებს, შეგვიძლია ჩვენი განტოლებები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned}(u-u_1)\,f+(v-v_1)\,\varphi&=0,\\ (u-u_1)\,f_1+(v-v_1)\,\varphi_1&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(47')$$

სადაც f, φ, f_1, φ_1 არიან x, y, z, u, v-ს მთელი წკრივები. ამნაირად ამოხსნები $u=u_1$, $v=v_1$ გამოყოფილია; მაგრამ, გარდა ამისა, ცხადია, რომ $F_1=0$, $F_2=0$ განტოლებებს არ აქვს სხვა ამოხსნები, რომელიც ნულად იქცევა, როცა $x=y=z=0$. მართლაც, (47′) განტოლებათა ყოველი სხვა ამოხსნა ნულად უნდა აქცევდეს $f\varphi_1-\varphi f_1$-ს; მაგრამ, შევადარებთ რა (47) და (47′) განტოლებებს, ჩვენ ვხედავთ, რომ მუდმივი წევრი f და φ_1-ში ტოლია ერთის, ხოლო f_1 და φ-ში — ნულის. მაშასადამე, ჩვენ არ შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ $f_1\varphi-f\varphi_1=0$ განტოლება, თუ u და v-სათვის ავიღებთ ისეთ ფუნქციებს, რომლებიც ნულად იქცევა როცა $x=y=z=0$.

186. ლაგრანჟის თეორემა. განვიხილოთ განტოლება:

$$y=a+x\,\varphi(y)\qquad(49)$$

და დავუშვათ, რომ $\varphi(y)$ ფუნქცია შეიძლება გამწკრივებული იქნეს $y-a$-ს ზრდად ხარისხებად:

$$\varphi(y)=\varphi(a)+(y-a)\varphi'(a)+\frac{(y-a)^3}{1.2}\varphi''(a)+\ldots$$

და ვიგულისხმოთ, რომ იგი კრებადია როცა $y-a$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება რაიმე ზღვარს.

ზოგადი თეორემის თანახმად (§ 184) (49) განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი, რომელც a-საკენ მიისწრაფის, როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ. x-ის საკმაოდ მცირე მნი-

შვნელობებისათვის ეს ფესვი შეიძლება წარმოვადგინოთ კრებადი მთელი წკრივის ჯამის სახით:

$$y=a+a_1x+a_2x^2+\dots$$

საზოგადოდ, ვთქვათ $f(y)$ არის y-ის ფუნქცია, რომლის დაშლა შეიძლება წკრივად $y-a$ სხვაობის დადებით ხარისხებად. თუ ამ ფუნქციაში y-ს შევცვლით წინა დაშლით, მივიღებთ $f(y)$-ის დაშლას x-ის ხარისხებად, რომელიც კრებადია რომელიმე საზღვრებში მოთავსებულ x-ის მნიშვნელობათათვის:

$$f(y)=f(a)+A_1x+A_2x^2+\dots+A_nx^n+\dots \tag{50}$$

ლაგრანჟის ფორმულა იძლევა $A_1, A_2 \dots A_n, \dots$ კოეფიციენტების გამოსახვებს a-ს ფუნქციებში. შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა არის მხოლოდ ზოგადი ამოცანის შემთხვევა. A_n კოეფიციენტი ტოლია $f(y)$-ის n-ური წარმოებულისა $x=0$ მნიშვნელობისათვის, გაყოფილი $n!$-ზე, მასთან y განისაზღვრება (49) განტოლებით; ცხადია, რომ ეს წარმოებული შეიძლება გამოვთვალოთ ჩვენთვის ცნობილი წესის საშუალებით. გამოთვლა რთულად გვეჩვენება, მაგრამ შეიძლება იგი მნიშვნელოვნად შევკვეცოთ, თუ ვისარგებლებთ ლაპლასის შემდეგი მითითებებით (იხ. ვარჯ. 8, თავი. III). გავაწარმოებთ რა (49) განტოლებას x-ით და a-თი ჩვენ მივიღებთ y-ის კერძო წარმოებულებისათვის შემდეგ ფორმულებს:

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y);\ [1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1;$$

თუ აღვნიშნავთ $u=f(y)$, წინა ფორმულებიდან გვექნება:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{51}$$

მეორე მხრით, ვთქვათ $F(y)$ არის y-ის რაიმე ფუნქცია. უშუალო გაწარმოებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]; \tag{51'}$$

მართლაც, თუ გავაწარმოებთ მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებს ორივე შემთხვევაში მივიღებთ:

$$F'(y)f'(y)\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial x}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial x}.$$

დავამტკიცოთ, რომ ყოველი მთელი n რიცხვისათვის ადგილი აქვს ფორმულას:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1}}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

(51) ტოლობის თანახმად, ეს ფორმულა სამართლიანია, როცა $n=1$. მისი ზოგადობის დასამტკიცებლად, დავუშვათ, რომ ის სამართლიანია n რიცხვის რომელიმე კერძო მნიშვნელობისათვის. მაშინ ჩვენ გვექნება:

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^{n-1}\,\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

მაგრამ (51) და (51′) განტოლებათა ძალით ვღებულობთ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right];$$

მაშასადამე,

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

ამრიგად ეს ფორმულა სამართლიანია n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

ახლა დავუშვათ, რომ $x=0$, მაშინ y გადაიქცევა a-თ, u კი $f(a)$-თ, ხოლო u-ს n-ური წარმოებული x ცვლადის მიმართ იქნება:

$$\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right]_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(a)^n f'(a)\right].$$

ამგვარად $f(y)$-ის დაშლას ტეილორის ფორმულით ექნება შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned}f(y)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{da}\left[\varphi(a)^2 f'(a)\right]+\ldots\\ \ldots+\frac{x^n}{n}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(a)^n f'(a)\right]+\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(52)$$

ეს არის ლაგრანჟის ცნობილი ფორმულა. იგი იძლევა დაშლას y ფესვისას, რომელიც a-საკენ მიისწრაფის, როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ. ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, თუ რა ფარგლებში გამოიყენება ეს ფორმულა.

შენიშვნა. ზოგადი თეორემიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ y ფესვი, რომელიც განიხილება როგორც x და a-ს ფუნქცია, შეიძლება წარმოვადგინოთ x და a-ს ხარისხებად დალაგებულ ორმაგ წკრივად. ეს წკრივი შეიძლება მივიღოთ, თუ ყოველს A_n კოეფიციენტებიდან შევცვლით მისი დაშლით a-ს ხარისხებად. აქედან გამომდინარეობს, რომ (52) წკრივი შეიძლება გავაწარმოოთ წევრობრივ a პარამეტრის მიმართ.

მაგალითები. 1. განტოლებას:

$$y=a+\frac{x}{2}\left(y^2-1\right)\qquad(53)$$

აქვს ფესვი, რომელიც უდრის a-ს, როცა $x=0$. ამ ფესვის დაშლა ლაგრანჟის ფორმულით იქნება:

$$\left.\begin{aligned}y=a+\frac{x}{2}\left(a^2-1\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{d(a^2-1)^2}{da}+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}}+\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

მეორე მხრით, თუ ამოვხსნით (53) განტოლებას, ჩვენ მოვძებნით მისი ფესვებისათვის შემდეგ მნიშვნელობას:

$$y=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2}.$$

რომ მივიღოთ ფესვი, რომელიც a-ს ტოლია $x=0$ მნიშვნელობისათვის, საჭიროა ავიღოთ ნიშანი მინუსი. (54) განტოლების ორივე მხარის გაწარმოებით a ცვლადის მიმართ მივიღებთ ფორმულას, რომელიც განსხვავდება ზემოთმიღებულ (32) ფორმულისაგან (§ 180) მხოლოდ აღნიშვნებით.

2. ასტრონომიაში ექსცენტრულ u ანომალიისათვის ცნობილ კეპლერის (Kepler) განტოლებას:

$$u=a+\varepsilon\sin u\qquad(55)$$

აქვს ფესვი u, რომელიც a-ს ტოლია, როცა $e=0$. ამ ფესვის გამწკრივებას ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით, როცა e არის ნულთან ახლოს, ექნება შემდეგი სახე:

$$u=a+e\sin a+\frac{e^2}{1.2}\frac{d}{da}(\sin^2 a)+\ldots+\frac{e^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}(\sin^n a)}{da^{n-1}}+\ldots \tag{56}$$

ლ ა პ ლ ა ს მ ა პირველმა მეტად ხელოვნური ხერხით დაამტკიცა, რომ წინა წკრივი კრებადია, თუ e ნაკლებია ვიდრე 0,662743 . . .

187. ფუნქციის შექცევა. ვთქვათ წკრივი:

$$y=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{57}$$

კრებადია $(-r, +r)$ შუალედში, ამასთანავე პირველი a_1 კოეფიციენტი ნულს არ უდრის. (57) განტოლებაში y განვიხილოთ როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო x—როგორც y-ის ფუნქცია. ზოგადი თეორემის (§ 184) თანახმად ამ განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ფესვი x, რომელიც y-თან ერთად ნულისაკენ მიისწრაფის, და ეს ფესვი იშლება მწკრივად, დალაგებული y-ის ხარისხების მიხედვით:

$$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\ldots+b_ny^n+\ldots \tag{58}$$

კოეფიციენტები $b_1, b_2, b_3, \ldots$ შეიძლება განვსაზღვროთ თანმიმდევრობით, თუ (57) ფორმულაში x-ს შევცვლით მისი (58) დაშლით და ერთმანეთს გავუტოლებთ კოეფიციენტებს, რომლებიც დგანან y-ის ერთნაირი ხარისხების წინ. ამრიგად მივიღებთ:

$$b_1=\frac{1}{a_1},\quad b_2=-\frac{a_2}{a_1^3},\quad b_3=\frac{2a_2^2-a_1a_3}{a_1^5},\ldots,$$

b_n კოეფიციენტების ზოგადი გამოსახვა ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ აგრეთვე ლაგრანჟის ფორმულის საშუალებით. მართლაც, მივიღებთ რა

$$\psi(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots,$$

(57) განტოლება ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x=y\frac{1}{\psi(x)}.$$

აქედან ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით მივიღებთ x ფესვის დაშლას, რომელიც y-თან ერთად ნულად იქცევა:

$$x=y\frac{1}{\psi(0)}+\ldots+\frac{y^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)^n\right]_0+\ldots,$$

ამასთანავე 0 მაჩვენებელი გვიჩვენებს. რომ გაწარმოების შემდეგ x ნულით უნდა შეიცვალოს.

წინა ამოცანა ცნობილია აგრეთვე როგორც წ კ რ ი ვ ე ბ ი ს შ ე ქ ც ე ვ ი ს ამოცანა.

188. ანალიზური ფუნქციები. შემდეგში ჩვენ ვუწოდებთ ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ყოველ ფუნქციას ნებისმიერი რიცხვი $x, y, z, \ldots,$ ცვლადებისას, რომელიც $x_0, y_0, z_0, \ldots$ მნიშვნელობათა მახლობლობაში შეიძლება დაიშალოს მთელ წკრივად, დალაგებული $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0, \ldots$-ის ხარისხებად, და რომელიც კრებადია, როცა ამ სხვაობათა აბსოლუტური სიდიდეები არ აღემატება რომელიმე ზღვარს. ამასთანავე x_0, y_0, z_0 მნიშვნელობები შესაძლებელია იყონ გარკვეული სახით შეზღუდულნი, რომლებზედაც ჩვენ აქ არ შევჩერდებით. ამ

თავში ყველა გადმოცემულიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ფუნქციები, ასე ვთქვათ, წარმოიშობიან ერთი მეორისაგან. თუ მოცემულია ერთი ან რამდენიმე ანალიზური ფუნქცია, მაშინ ინტეგრობა ან გაწარმოება, ალგებრული მოქმედებები გამრავლება, გაყოფა, ერთი ფუნქციის მეორეში ჩასმა და ა. შ. მიგვიყვანს ახალ ანალიზურ ფუნქციამდე. სრულიად ასევე იმ განტოლებათა ამოხსნა, რომელთა მარცხენა ნაწილები არის ანალიზური ფუნქციები, მიგვიყვანს ანალიზურ ფუნქციებზე. ვინაიდან უმარტივესი ფუნქციები—მრავალწევრები, მაჩვენებლიანი და წრიული ფუნქციები—არიან ანალიზური ფუნქციები, ამიტომ გასაგებია თუ რატომ პირველი ფუნქციები, რომელთა შესწავლასაც მათემატიკოსები აწარმოებდნენ უნდა ყოფილიყო ანალიზური. ამ ფუნქციათა უაღრესად დიდი მნიშვნელობა კიდევ უფრო აშკარა გახდება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციებისა და დიფერენციალურ განტოლებათა შესწავლის დროს. მიუხედავად ანალიზურ ფუნქციათა ძირითადი მნიშვნელობისა არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ისინი შეადგენენ ძალიან კერძო ჯგუფს ყველა უწყვეტ ფუნქციათა შორის [1].

---

[1] ვთქვათ $f(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც (a, b) შუალედში შეიძლება ჰქონდეს ყველა რიგის უწყვეტი წარმოებულები. თუ ეს წარმოებულები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{Mn!}{\rho^n}, \tag{A}$$

სადაც M და ρ არის x-საგან დამოუკიდებელი ორი დადებითი რიცხვი, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ანალიზურია. მართლაც, ვთქვათ x_0 და x არის (a, b) შუალედის ორი ნებისმიერი წერტილი; თუ $f(x)-f(x_0)$ სხვაობას დავშლით $x-x_0$-ის ხარისხებად, ტეილორის ფორმულის მიხედვით (§ 18), მაშინ R_m ნაშთი იქნება (A) პირობის ძალით აბსოლუტური სიდიდით ნაკლები ვიდრე $M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{\rho^{n+1}}$, და მაშასადამე, ნულისაკენ მიისწრაფის n-ის უსაზღვროდ ზრდის დროს, თუ x მოთავსებულია $x_0-\rho$ და $x_0+\rho$-ის შორის.

შებრუნებით, მე-II ტომში დამტკიცებული იქნება, რომ (A) პირობა აუცილებელია ფუნქციის ანალიზურობისათვის.

დიდი ხანი არ არის რაც ს. ბერშტეინმა (Maht. Ann., ტ, 75, 1914, *S.* 449) შემდეგი შესანიშნავი თეორემა დაამტკიცა.

თუ უსასრულოდ წარმოებადი $\varphi(x)$ ფუნქციის ყველა წარმოებული დადებითია (a, b) შუალედში, მაშინ ფუნქცია ამ შუალედში ანალიზურია.

დავუშვათ, რომ $a<b$; ვთქვათ x_0 და $x>x_0$ არის ორი ნებსითი მნიშვნელობა ამ შუალედში. ვინაიდან $\varphi(x)$ ფუნქციის ყველა წარმოებული დადებითია, ამიტომ თვით ფუნქცია და მისი ყველა წარმოებული იზრდება. ამიტომ ვღებულობთ მიმდევრობით შემდეგი უტოლებებს:

$$\varphi^{(n-1)}(x) > \varphi^{(n)}(x_0)(x-x_0),\quad \varphi^{(n-2)}(x) > \varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}, \ldots$$

$$\ldots, \varphi'(x) > \varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!},\quad \varphi(x) > \varphi(x_0)+\varphi^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!};$$

აქედან, თუ დავუშვებთ $x=b$, შებრუნებით, მივიღებთ:

$$\varphi^{(n)}(x_0) < \frac{Mn!}{(p-x_0)^n},$$

189. ანალიზური წირები. § 13-ში ჩვენ განვსაზღვრეთ წირი როგორც გეომეტრიული ადგილი, აღწერილი ისეთი M წერტილის მიერ, რომლის კოორდინატები: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ არის t პარამეტრის უწყვეტი ფუნქციები, ამ პარამეტრის ცვლილების დროს. თუ $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ არის t-ს ანალიზური ფუნქციები, ე. ი. თუ ეს ფუნქციები t ცვლადის ნებისმიერ t_0 მნიშვნელობის მახლობლობაში, რომელიც აღებულია რაიმე (a, b) შუალედში ტეილორის ფორმულით დაიშლება $t-t_0$-ის ხარისხებად, მაშინ წირის შესაბამ რკალს ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი წ ი რ ი ს რკალი ეწოდება. ის წირები, რომლებიც ყველაზე მეტად გვხვდება გამოყენებებში, არის ანალიზური წირები ან შედგენილია ს ა ს რ უ ლ ო რიცხვი ანალიზურ წირთა რკალებისაგან, რომლებიც თავიანთი ბოლოებით არიან შეერთებული.

ვთქვათ x_0, y_0, z_0 რომელიმე ანალიზური წირის M_0 წერტილის კოორდინატებია, ხოლო x, y, z იმავე წირის, M_0-ის მახლობელი, მეორე M წერტილის კოორდინატები. M_0 წერტილს ეწოდება, ჩ ვ ე უ ლ ე ბ რ ი ვ ი წ ე რ ტ ი ლ ი თუ $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ სამი სხვაობიდან ორი შეიძლება დაიშალოს ისეთ მთელ წკრივებად, რომლებიც დალაგებული იქნება მესამე სხვაობის ხარისხებად, ამასთანავე ორივე წკრივი არის კრებადი, თუ ამ სხვაობათა აბსოლუტური სიდიდეები რჩება რომელიმე $h>0$ საზღვარზე ნაკლები. წინააღმდეგ შემთხვევაში M_0 წერტილს გ ა ნ კ უ თ რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება. ანალიზური წირის რკალს, რომელსაც განკუთრი წერტილები არ აქვს, წ ე ს ი ე რ ი ეწოდება.

ანალიზური წირების თვით განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ M_0 (x_0, y_0, z_0) წერტილის მახლობელი M წერტილის x, y, z კოორდინატები წარმოიდგინება მთელი წკრივებით:

$$
\begin{aligned}
x&=x_0+a_1(t-t_0)+\ldots+a_n(t-t_0)^n+\ldots,\\
y&=y_0+b_1(t-t_0)+\ldots+b_n(t-t_0)^n+\ldots,\\
z&=z_0+c_1(t-t_0)+\ldots+c_n(t-t_0)^n+\ldots,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

მასთან ეს სამი წკრივი არის კრებადი, თუ $|t-t_0|$ რომელიმე დადებით r რიცხვზე ნაკლებია.

იმისთვის, რომ M წერტილი იყოს ჩვეულებრივი, ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა (59) ფ ო რ მ უ ლ ე ბ შ ი ს ა მ ი a_1, b_1, c_1 კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი დ ა ნ ე რ თ - ე რ თ ი ნ უ ლ ი ა რ ი ყ ო ს. მაგალითად, თუ a_1 ნულს არ უდრის, მაშინ პირველი (59) განტოლებებიდან ვიპოვით $t-t_0$-ს დაშლას $x-x_0$-ის ხარისხებად (§ 184) და

სადაც M აღნიშნავს $\varphi(b)-\varphi(a)$ დადებით რიცხვს. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ დავწერთ, ტეილორის ფორმულის თანახმად, $\varphi(x)$-ის დაშლას $x-x_0=h$-ის ხარისხებად, მაშინ R_{n+1} ნაშთის აბსოლუტური სიდიდე აღმოჩნდება ნაკლები, ვიდრე

$$\frac{M|h|^{n+1}}{(b-x_0-\theta h)^{n+1}},$$

და ეს ნაშთი თანაბრად მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა

$$|h|<\frac{b-x_0}{2}.$$

ჩავსვამთ რა $t-t_0$-ის ამ მნიშვნელობას დანარჩენ ორ ფორმულაში, მივიღებთ $y-y_0$ და $z-z_0$-ის დაშლას $x-x_0$-ის მთელ ხარისხებად. შებრუნებით, ჩვეულებრივი M_0 წერტილის მახლობლობაში ანალიზური წირის გამსაზღვრელი განტოლებანი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს (59) სახით, სადაც a_1, b_1, c_1 კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც ნულს არ უდრის. მართლაც, თუ, მაგალითად, $y-y_0$, $z-z_0$ არიან ტოლი მთელი წკრივებისა $x-x_0$-ის ხარისხების მიმართ, მაშინ საკმარისია დავუშვათ $x-x_0=t$, რომ მივიღოთ (59) სახის ფორმულა, სადაც გვექნება $a_1=1$. ამ შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვეულებრივი წერტილის განსაზღვრა არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა ღერძების შერჩევაზე. მართლაც, თუ განვიხილავთ Γ წირს, რომელიც მიიღება C წირიდან ჰომოგრაფიული გარდაქმნის შემდეგ ფორმულებით:

$$X=lx+my+nz+p,$$

$$Y=l'x+m'y+n'z+p',$$

$$Z=l''x+m''y+n''z+p'',$$

რომელთა დეტერმინანტი არ უნდრის ნულს, ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{dX}{dt}=l\frac{dx}{dt}+m\frac{dy}{dt}+n\frac{dz}{dt},\quad \frac{dY}{dt}=l'\frac{dx}{dt}+\ldots,\ \frac{dZ}{dt}=l''\frac{dx}{dt}+\ldots,$$

და $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ წარმოებულებს არ შეუძლია ერთდროულად გახდეს ნული t ცვლადის t_0 მნიშვნელობისათვის, თუ t-ს ამ მნიშვნელობისათვის სამივე $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ წარმოებული აგრეთვე არ ეტოლება ნულს [1].

თუ სამივე a_1, b_1, c_1 კოეფიციენტი ერთდროულად ნულის ტოლია, მაშინ M_0 წერტილი, საზოგადოდ, განკუთრი წერტილია. ავიღოთ, მაგალითად, ბრტყელი წირი, რომელიც განსაზღვრულია $x=t^2$, $y=t^3$ განტოლებებით. როცა $t=0$, ჩვენ გვაქვს $a_1=b_1=0$. კოორდინატთა სათავე მოცემულ შემთხვევაში არის განკუთრი წერტილი, ვინაიდან წინა განტოლებებიდან ჩვენ ვღებულობთ: $y=x^{\frac{3}{2}}$, და, უკუღმა, $x=y^{\frac{3}{2}}$, და თითოეული ამ კოორდინატებიდან არის მეორე კოორდინატის წილად—მაჩვენებლიანი ხარისხი.

ავიღოთ, შებრუნებით, ბრტყელი წირი, რომელიც განსაზღვრულია $x=t^2$, $y=t^6$ განტოლებებით. როცა $t=0$ ჩვენ გვაქვს ისე, როგორც ზემოთ $a_1=b_1=0$, მაგრამ კოორდინატთა სათავე არ არის უკვე განკუთრი წერტილი, რადგან ჩვენ გვაქვს: $y=x^3$. ადვილათ შევნიშნავთ, რომ ამ უკანასკნელ მაგალითში წირის წერტილს შეესაბამება პარამეტრის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობა $(\pm t)$.

ვთქვათ x_0, y_0 არის იმ ბრტყელი C მრუდის M_0 წერტილის კოორდინატები, რომელიც წარმოდგენილია $F(x, y)=0$ განტოლებით, რომლის მარცხენა ნაწილი შეიძლება დაიშალოს $x-x_0$ და $y-y_0$-ის ხარისხებად დალაგებულ მთელ წკრივებად. თუ ორივე კერძო $\frac{\partial F}{\partial x}$ და $\frac{\partial F}{\partial y}$ წარმოებული ერთდროულად ნულს არ უდრის,

[1] ადვილად დავინახავთ, რომ ეს თვისება ვრცელდება ყოველ შექცევად გარდაქმნაზე, რომელიც ანალიზური ფორმულებით განისაზღვრება.

როცა $x=0$, $y=y_0$, მაშინ M_0 ჩვეულებრივი წერტილია. მართლაც, თუ, მაგალითად, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$ არ უდრის ნულს, მაშინ $F=0$ განტოლებიდან ვპოულობთ $y-y_0$-ის დაშლას $x-x_0$-ის ხარისხებად (§ 184).

სრულიად ასევე დავუშვათ, რომ x_0, y_0, z_0 ისეთი Γ ვრეხილი წირის M_0 წერტილის კოორდინატებია, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებათა სისტემით:

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0, \tag{60}$$

სადაც მარცხენა ნაწილები არის $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$-ის მიმართ მთელი წკრივები. ეს M_0 წერტილი ჩვეულებრივი წერტილია, თუ ფუნქციონალური დეტერმინანტები:

$$\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(y, z)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(z, x)}$$

ერთდროულად ნულს არ უდრის $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ მნიშვნელობებისათვის.

თუ, მაგალითად, $\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}$ დეტერმინანტი M_0 წერტილში ნულს არ უდრის, მაშინ (60) განტოლებებიდან შეიძლება ვიპოვოთ $x-x_0$ და $y-y_0$ სხვაობათა მთელ წკრივად დაშლა, რომელიც დალაგებულია $z-z_0$-ის ხარისხებად (§ 185).

ზემოხსენებული ანალოგიურია იმისა, რაც ჩვენ § 37 და 43-ში გვქონდა, მაგრამ აქ მიღებული შედეგები არის უფრო ზუსტი, ვინაიდან ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ უცხადო ფუნქციები, რომელთა შესახებაც ლაპარაკია, არის დამოუკიდებელი ცვლადის ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა I. განვიხილოთ, კერძოდ, ბრტყელი C წირი, რისთვისაც უკანასკნელს (59) განტოლებებიდან შევცვლით $z=0$ განტოლებით. რომ ვიქონიოთ წარმოდგენა წირის სახეზე M_0 წერტილის მახლობლად, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $t-t_0$-ის უსასრულო მცირე მნიშვნელობათათვის, $x-x_0$ და $y-y_0$ სხვაობებს აქვთ, შესაბამად, ნიშნები $a_m(t-t_0)^m$ და $b_n(t-t_0)^n$-ის მარჯვენა ნაწილების პირველი წევრებისა.

დავუშვათ, რომ $m<n$. თუ m კენტია (რასაც ადგილი აქვს მუდამ ჩვეულებრივი წერტილისათვის), მაშინ წირს აქვს ჩვეულებრივი სახე ან გადაღუნვის წერტილს წარმოადგენს. თუ m ლუწია, მაშინ წირს პირველი ან მეორე რიგის უკუქცევის წერტილი აქვს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა II. ვთქვათ M_0 არის ბრტყელი ანალიზური C წირის ჩვეულებრივი წერტილი; დავუშვათ, მაგალითად, რომ $y-y_0$ გაშლილია $x-x_0$-ის ხარისხებად:

$$y-y_0=c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots$$

თუ მხები არ არის, Ox ღერძის პარალელური მაშინ c_1 კოეფიციენტი ნულს არ უდრის, და ჩვენ შეგვიძლია, პირიქით, წინა დამოკიდებულებიდან გამოვიყვანოთ $x-x_0$-ის დაშლა $y-y_0$-ის ხარისხებად. მაგრამ ეს უკვე ასე არ იქნება, როცა მხები M_0 წერტილში Ox-ის პარალელურია, ამ შემთხვევაში $c_1=0$, და $y-y_0$-ის დაშლა $x-x_0$-ის ხარისხებად იწყება პირველზე მაღალი ხარისხის წევრიდან; ჩვენ უკვე აღარ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზოგადი თეორემა § 184. გამოკვლევიდან, რომელიც შემდეგში (მე-II ტ.) იქნება მოყვანილი, გამომდინარეობს, რომ $x-x_0$ ამ შემთხვევაში შეიძლება დაიშალოს $y-y_0$-ის წ ი ლ ა დ - მ ა ჩ ვ ე ნ ე ბ ლ ი ა ნ ი ხარისხებად.

190. ორჯერადი წერტილები. შეუდგეთ კვლავ ბრტყელი ანალიზური C წირის გამოკვლევას ორჯერადი წერტილის მახლობლად. თუ ამ წერტილს ავიღებთ კოორდინატთა სათავედ, მაშინ წირის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$ax^2+2bxy+cy^2+\varphi_3(x, y)+\ldots=0, \tag{61}$$

სადაც a, b, c კოეფიციენტები ერთდროულად ნულს არ უდრის, ხოლო დაუწერელი წევრები ჰქმნიან x-ის და y-ის მიმართ მთელ წკრივს, რომელიც კრებადია $x=y=0$ წერტილის მახლობლობაში. დავუშვათ, შემდეგ, რომ კოორდინატთა ღერძები ისეა შერჩეული, რომ c ნულს არ ეტოლება. იმ შენიშვნის თანახმად, რომელიც ზემოთ (§ 42-ის შენიშვნა) იყო გაკეთებული, (61) განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი *ნამდვილი* ფესვი, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფოდეს x-თან ერთად; შემდეგში ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ მას აქვს ორი და მხოლოდ ორი ფესვი, ნამდვილი ან წარმოსახვითი, რომლებიც ნულისაკენ მიისწრაფიან x-თან ერთად. ამ ორი ფესვის გამოსახვას ჩვენ ადვილად ვიპოვით, როცა b^2-ac ნულისაგან განსხვავდება.

1. ვთქვათ $b^2-ac>0$. თუ წინა განტოლებას გავყოფთ c-ზე; ჩვენ შეგვიძლია ის გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F(x, y)=(y-\alpha x)(y-\beta x)+\varphi_3(x, y)+\ldots=0, \tag{62}$$

სადაც α და β არის ორი *სხვადასხვა* ნამდვილი რიცხვი. მივიღებთ რა

$$y=x(\alpha+u),$$

ჩვენ შეგვიძლია $F[x, x(\alpha+u)]$ დავალაგოთ x და u-ს ხარისხებად (§ 177); თუ გავყოფთ x^2-ზე, მივიღებთ განტოლებას:

$$u(u+\alpha-\beta)+\ldots=0, \tag{63}$$

რომლის ყველა დაუწერელი წევრი ნულს უდრის, როცა $x=0$. ზოგადი თეორემის (§ 184) ძალით ამ განტოლებას აქვს u_1 ფესვი, რომელიც ნულად იქცევა x-თან ერთად და იშლება x-ის ხარისხებად:

$$u_1=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots$$

მაშასადამე, (62) განტოლებას აქვს აგრეთვე y_1 ფესვი:

$$y_1=\alpha x+\alpha_1 x^2+\alpha_2 x^3+\ldots, \tag{64}$$

და ამნაირადვე შეიძლებოდა დავრწმუნებულიყავით იმაში, რომ ამ განტოლებას აქვს მეორე ფესვიც:

$$y_2=\beta x+\beta_1 x^2+\beta_2 x^3+\ldots \tag{65}$$

მაშასადამე, კოორდინატთა სათავეზე წირის ორი შტო გადის, და ცალ-ცალკე აღებული თითოეული მათგანისათვის, კოორდინატთა სათავე ჩვეულებრივ წერტილს წარმოადგენს.

184 პარაგრაფის ბოლოს მოყვანილ მსჯელობებს თუ გავიმეორებთ, ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ $F(x, y)$ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს სამი თანამამრავლის ნამრავლის სახით:

$$F(x, y)=(y-y_1)(y-y_2)(1+c_1x+c_2y+\ldots); \tag{66}$$

ეს დაშლა გამოამჟღავნებს (62) განტოლების ორივე y_1 და y_2 ფესვს, და გარდა ამისა, გვიჩვენებს, რომ ამ განტოლებას არ აქვს სხვა ფესვი, რომელიც x-თან ერთდროულად ნულისაკენ მიისწრაფის.

2. ვთქვათ $b^2-ac<0$. ჩვენ ვიცით, რომ კოორდინატთა სათავე არის ორჯერადი განმხოლოებული წერტილი. მაგრამ გამოთვლები, რომლებიც ზემოთ ჩვენ მიერ იყო მოყვანილი, შეიძლება გამოყენებული ყოფილიყო ამ შემთხვევაშიც და ჩვენ მივიდოდით ორ (64) და (65) კრებად წკრივამდე, რომელიც ფორმალურად დააკმაყოფილებდა (62) განტოლებას, წარმოსახვითი კოეფიციენტებით. მაშასადამე, (62) განტოლებას ამ შემთხვევაში ორი წარმოსახვითი შეუღლებული ფესვი აქვს, რომლებიც x-თან ერთად უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

წინა მეთოდი ადვილად გამოიყენება აგრეთვე ანალიზური წირის გამოკვლევისას ისეთ p რიგის ჯერადი წერტილების მახლობლად, რომლებსაც სხვადასხვა მხებები აქვთ.

3. ვთქვათ $b^2-ac=0$. თუ x ღერძად აღებულია მხები ორჯერად წერტილში, მაშინ განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$y^2=Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+\ldots \tag{67}$$

ვთქვათ $u+\sqrt{v}$ და $u-\sqrt{v}$ არის ორი უსასრულოდ მცირე ფესვი. თუ y-ს შევცვლით $u+\sqrt{v}$-ით, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$u^2+2u\sqrt{v}+v=Ax^3+Bx^2(u+\sqrt{v})+Cx(u+\sqrt{v})^2+D(u+\sqrt{v})^3+\ldots$$

გავუტოლებთ რა ნულს წკრივს, შედგენილს v-ს მიმართ რაციონალურ წევრებისაგან, და $\sqrt{v}$-ს კოეფიციენტს, მაშინ u და v-ს განსაზღვრისათვის მივიღებთ შემდეგ ორ განტოლებას:

$$\left.\begin{aligned} v&=-u^2+Ax^3+Bx^2u+Cxu^2+Cxv+Du^3+3Duv+\ldots,\\ 2u-Dv&=Bx^2+2Cxu+3Du^2+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

ამ სისტემისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგადი თეორემა (§ 185), და ამგვარად მოვძებნით u-და v-ს გამწკრივებებს:

$$\left.\begin{aligned} v&=Ax^3+\ldots,\\ u&=\frac{B}{2}x^2+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

რომლებიც იწყება შესაბამად მესამე და მეორე რიგის წევრებიდან. ზოგად შემთხვევაში ვთქვათ

$$u=ax^p+\ldots,\ v=bx^q\ldots\ (ab\neq 0,\ p\geqslant 2,\ q\geqslant 3)$$

არიან მწკრივები, რომლებსაც ჩვენ ამგვარად ვღებულობთ. (67) განტოლებას აქვს ორი უსასრულოდ მცირე ფესვი:

$$y=ax^p+\ldots\pm\sqrt{bx^q+\ldots}$$

წირის სახე დამოკიდებულია, უპირველესად იმაზე, q ლუწია თუ კენტი.

პ ი რ ვ ე ლ ი შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ $q=2r+1 (r\geqslant 1)$. ამას გარდა დავუშვათ, რომ $b>0$; x-ის იმ მნიშვნელობათათვის, რომლებიც ნულთან მახლობელია, რადიკალის ქვეშ მყოფ წკრივს იგივე ნიშანი აქვს, რაც bx^q-ს. რომ y ნამდვილი იყოს, საჭიროა ვიგულისხმოთ $x>0$, და y-ის ორივე მნიშვნელობა წარმოიდგინება წკრივით, რომელიც დალაგებულია $\sqrt{x}$-ის ხარისხებად. თუ $r+\frac{1}{2}>p$, მაშინ დაბალი ხარისხის წევრი იქნება ის, რომელიც შეიცავს $x^{r+\frac{1}{2}}$, და ჩვენ გვექნება პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი. თუ $r+\frac{1}{2}>p$, მაშინ ჩვენ გვაქვს მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი.

მ ე ო რ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. ვთქვათ $q=2r$ $(r>1)$. y-ის მნიშვნელობები x-ის უსასრულო მცირე მნიშვნელობებისათვის იქნება ნამდვილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა b დადებითია. თუ ამას ადგილი აქვს, მაშინ ჩვენ გვაქვს წირის ორი შტო, რომლებიც ეხება Ox ღერძს კოორდინატთა სათავეზე, და კოორდინატთა სათავე თითოეული მათგანისათვის ჩვეულებრივი წერტილია, ვინაიდან ეს ორი ფესვი შეგვიძლია შემდეგნაირად დავწეროთ:

$$y=ax^p+\ldots\pm x^r\sqrt{b+b_1x+\ldots}$$

თუ b უარყოფითია, მაშინ კოორდინატთა სათავე განმხოლოებული ორჯერადი წერტილია.

191. ანალიზური ფართეულები. S ფართეულის ნაწილს ეწოდება ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი, თუ ამ ფართეულის ყოველი M_0 წერტილის მახლობლად ცვლადი M წერტილის x, y, z კოორდინატები შეიძლება დაიშალოს მთელ ორმაგ წკრივებად, რომლებიც დალაგებულია $t-t_0$ და $u-u_0$ პარამეტრების ხარისხებად:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=a_{10}(t-t_0)+a_{01}(u-u_0)+\cdots,\\ y-y_0&=b_{10}(t-t_0)+b_{01}(u-u_0)+\cdots,\\ z-z_0&=c_{10}(t-t_0)+c_{01}(u-u_0)+\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

რომლებიც კრებადია, როცა $t-t_0$ და $u-u_0$ სხვაობათა აბსოლუტური სიდიდეები არ აღემატება რომელიმე ზღვარს. S ფართეულის M_0 წერტილს ეწოდება **ჩ ვ ე უ ლ ე ბ რ ი ვ ი წ ე რ ტ ი ლ ი**, თუ ამ წერტილის მახლობლად ერთ-ერთი $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ სხვაობებიდან შეიძლება დაიშალოს ორი დანარჩენი სხვაობის ხარისხების მიხედვით დალაგებულ ორმაგ მთელ წკრივად. ყოველი M_0 წერტილი, რომლისთვისაც დეტერმინანტები:

$$\frac{D(y,z)}{D(t,u)},\ \frac{D(z,x)}{D(t,u)},\ \frac{D(x,y)}{D(t,u)}$$

ერთდროულად ნულს არ უდრის, არის ფართეულის ჩვეულებრივი წერტილი. მაგალითად, თუ პირველი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, მაშინ (70)-ის ორი უკანასკნელი განტოლებიდან ჩვენ მივიღებთ $t-t_0$, $u-u_0$-ის დაშლას $y-y_0$, $z-z_0$-ის ხარისხებად, და თუ ამ დაშლებს პირველ განტოლებაში ჩავსვამთ, მივიღებთ $x-x_0$-ის დაშლას $y-y_0$ და $z-z_0$-ის ხარისხებად.

დავუშვათ, რომ S ფართეული მოცემულია უცხადო $F(x, y, z)=0$ განტოლებით; ვთქვათ x_0, y_0, z_0 ამ ფართეულის რომელიმე M_0 წერტილის კოორდინატებია. თუ $F(x, y, z)$ ფუნქცია შეიძლება დაიშალოს სამჯერად მთელ წკრივად $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$-ის ხარისხების მიხედვით, და თუ ამასთანავე კერ-

ძო წარმოებულები: $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ არ უდრის ნულს ერთდროულად, მაშინ ზოგადი თეორემიდან (§ 184) გამომდინარეობს, რომ M_0 წერტილი ჩვეულებრივი წერტილია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოთ მოცემული განსაზღვრა წირისა და ფართეულის ჩვეულებრივი წერტილებისა, არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა შერჩევაზე. დავუშვათ, მაგალითად, რომ M_0 (x_0, y_0, z_0) წერტილი არის S ფართეულის ჩვეულებრივი წერტილი. მაშინ მეზობელი წერტისის კოორდინატები გამოისახნბიან (70) ფორმულებით, მასთან $\frac{D(y,z)}{D(t,u)}$, $\frac{D(x,y)}{D(t,u)}$, $\frac{D(z,x)}{D(t,u)}$ ერთდროულად არ უდრის ნულს, როცა $t=t_0$, $u=u_0$. კოორდინატთა გარდაქმნა x, y, z ცვლადებს სცვლის სამი ახალი X, Y, Z ცვლადებით, რომლებიც წარმოადგენს ძველი ცვლადების წრფივ ფუნქციებს:

$$
\begin{aligned}
X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, \\
Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, \\
Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3,
\end{aligned}
$$

მასთან $\Delta = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება. თუ x, y, z შევცვლით მათი (70) დაშლებით, მაშინ ჩვენ მივიღებთ X, Y, Z-სათვის წინა სახის სამ ახალ დაშლას, მასთან $t=t_0$ და $u=u_0$ მნიშვნელობებისათვის არ შეიძლება ერთდროულად იყოს:

$$
\frac{D(X, Y)}{D(t, u)} = \frac{D(Y, Z)}{D(t, u)} = \frac{D(Z, X)}{D(t, u)} = 0.
$$

მართლაც, გარდაქმნის ფორმულებისაგან, ჩვენ მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
x &= A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1. \\
y &= A_2 X + B_2 Y + C_2 Z + D_2. \\
z &= A_3 X + B_3 Y + C_3 Z + D_3.
\end{aligned}
$$

და ადვილად დავინახავთ, რომ ზემოთმოყვანილი X, Y, Z-ის სამი ფუნქციონალური დეტერმინანტი შეიძლება ერთდროულად ნულს ეტოლებოდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ x, y, z ცვლადების სამი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

V. ტრიგონომეტრიული წკრივები. პოლინომთა წკრივები.

192. ფურიეს წკრივები. აქ ჩვენ განვიხილავთ წკრივებს სრულიად სხვა ხასიათისას, ვიდრე წკრივები, რომლებიც ზემოთ შევისწავლეთ. პირველად ტრიგონომეტრიული წკრივები განიხილა დანიელ ბ ე რ ნ უ ლ ი მ (Daniel Bernoulli) სიმის რხევის ამოცანაში. კოეფიციენტების განსაზღვრის ის ხერხი, რომელსაც ჩვენ აქ მოვიყვანთ, ე ი ლ ე რ ს ეკუთვნის.

ვთქვათ $f(x)$ არის x ცვლადის შემოსაზღვრული და ინტეგრადი ფუნქცია (a, b) შუალედში. ჯერ ჩვენ დავუშვათ, რომ a და b შესაბამად ეტოლება $-\pi$ და $+\pi$-ს; ამის მიღწევა ყოველთვის შეიძლება, თუ ავიღებთ ახალ x' ცვლადს, რომელიც შებმულია x-თან შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$
x' = \frac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a}.
$$

ვიგულისხმოთ, რომ $-\pi$ და $+\pi$-ს შორის მოთავსებულ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} &+ (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots \\ \dots &+ (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \dots, \end{aligned} \tag{71}$$

სადაც $a_0, a_1, b_1 \dots, a_m, b_m \dots$, უცნობი მუდმივი კოეფიციენტებია. ეს კოეფიციენტები შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი თავისთავად მარტივი ხერხით. პირველად გავიხსენოთ შემდეგი ცხადი ფორმულები, რომლებშიც იგულისხმება, რომ m და n მთელი დადებითი რიცხვებია:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx\, dx = 0; \\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, dx = 0, \text{ თუ } m \neq 0; \\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2}\, dx = 0, \text{ თუ } m \neq n; \\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}\, dx = \pi, \quad \text{თუ } m \neq 0; \\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2}\, dx = 0, \quad \text{თუ } m \neq n; \\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2}\, dx = \pi, \quad \text{თუ } m \neq 0; \\
&\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}\, dx = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

(71) ტოლობის ორივე ნაწილი ვაინტეგროთ $-\pi$ და $+\pi$ საზღვრებს შორის, მასთან მარჯვენა მხარეში მოვახდინოთ ინტეგრობა წევრობრივ, ჩვენ მივიღებთ:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \pi a_0;$$

აქედან მოვძებნოთ a_0-ის მნიშვნელობას. (71) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $\cos mx$ ან $\sin mx$-ზე და მოვახდინოთ ინტეგრობა $-\pi$ და $+\pi$ საზღვრებს შორის. მარჯვენა ნაწილში ერთადერთი წევრი, რომლის ინტეგრალიც $-\pi$ და $+\pi$ საზღვრებს შორის განსხვავდება ნულისაგან, იქნება წევრი $\cos^2 mx$-ით ან $\sin^2 mx$-ით; ამნაირად ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin mx\,dx = \pi b_m.$$

მაშასადამე, ყველა კოეფიციენტის მნიშვნელობები განისაზღვრება ფორმულებით[1]:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha, \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha, \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

ფ უ რ ი ე ს წ კ რ ი ვ ი ეწოდება ყოველ ტრიგონომეტრიულ წკრივს:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_m\cos mx + b_m\sin mx + \ldots,$$

რომლის კოეფიციენტები მიღებულია რომელიმე $f(x)$ ინტეგრადი ფუნქციიდან (73) ფორმულებით. $(-\pi, +\pi)$ შუალედში ინტეგრად ყოველ $f(x)$ ფუნქციას ეთანადება ფურიეს გარკვეული წკრივი, მაგრამ არასაიდან არ ჩანს, რომ ფურიეს ეს წკრივი კრებადია, და რომ მისი ჯამი არის $f(x)$-ის ტოლი, სრულიად ისე როგორც არ არის ცხადი კრებადობა მოცემულ უსასრულოდ წარმოებად ფუნქციასთან მისგან შედგენილი ტეილორის (§ 170) წკრივის. ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ კიდევაც, რომ ფურიეს წკრივი ყოველთვის არ წარმოადგენს იმ ფუნქციას, რომლისთვისაც ის აგებულია. მართლაც, ვთქვათ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ არის ორი ფუნქცია, რომლებიც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან $(-\pi, +\pi)$ შუალედში მოთავსებულ x-ის მხოლოდ ს ა ს რ უ ლ ო მნიშვნელობებზე; ფურიეს წკრივი ორივე ფუნქციისათვის იქნება ერთი და იგივე (§ 71). მაშასადამე, ყოველ შემთხვევაში, ამ ფუნქციებიდან ერთი მაინც არ წარმოიდგინება თავის ფურიეს წკრივით x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. მაგრამ კოეფიციენტების თვით (73) გამოსახვების სახიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება თავის ფურიეს წკრივებით, მაშინ იგივე თვისება აქვს $Af(x)+B\varphi(x)$ ფუნქციასაც, A და B მუდმივების ყოველი მნიშვნელობებისათვის.

აქ ჩვენ მოვიყვანთ ს ა კ მ ა რ ი ს პირობათა სისტემას იმისთვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იშლებოდეს $(-\pi, +\pi)$ შუალედში ფურიეს წკრივად. ეს პირო-

---

[1] აქ მოყვანილი კოეფიციენტების გამოთვლა ფორმალურად არის შესრულებული (რედ.).

ბები, რომლებსაც სიმოკლისათვის დირიხლეს პირობებს უწოდებენ, ასეთია:

1. განსახილავი $(-\pi, +\pi)$ შუალედი შეიძლება დავყოთ სასრულო რიცხვი ისეთ ნაწილობრივ შუალედებად, რომ თითოეულ მათგანში ფუნქცია იყოს მონოტონური.

2. ფუნქციის წყვეტის ყველა წერტილი წესიერია. თუ a_i, b_i კოეფიციენტებს შევცვლით მათი (73) მნიშვნელობებით და მოვახდენთ დაყვანას, ჩვენ მოვძებნით ფურიეს წკრივის პირველი $2m+1$ წევრის ჯამისათვის შემდეგ გამოსახვას:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+\ldots+\cos m(\alpha-x)\right]d\alpha.$$

მაგრამ ცნობილი ტრიგონომეტრიული ფორმულით, გვაქვს:

$$\frac{1}{2}+\cos a+\cos 2a+\ldots+\cos ma=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}a}{2\sin\frac{a}{2}},$$

და მაშასადამე,

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha,$$

ან, აღვნიშნავთ რა $\alpha=x+2y$, მივიღებთ:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy. \tag{74}$$

193. $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ **ინტეგრალის გამოკვლევა.** გამოსახვას, რომელიც ჩვენ S_{2m+1} ჯამისათვის მივიღეთ, მივყევართ $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ განსაზღვრული ინტეგრალის ზღვარის მოძებნამდე, როდესაც n უსასრულოდ იზრდება. ამ საკითხის პირველი სრულიად მკაცრი გამოკვლევა დირიხლეს (Lejeune-Dirichlet) ეკუთვნის[1]; ის ემყარება ზოგიერთ, ჩვენს მიერ უკვე დამტკიცებულ დებულებებს, რომლებსაც ჩვენ აქ გავიხსენებთ.

---

[1] *Crelle's Journal.* ტ. IV, 1829.

განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_0^h \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

სადაც h დადებითი რიცხვია, არის დადებითი და არ აღემატება ინტეგრალს:

$$A=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$$

(§ 88); მისი ზღვარი, როცა h უსასრულოდ იზრდება ტოლია $\frac{\pi}{2}$-ის (§ 96).

განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

სადაც $h>0$, ხოლო n—მთელი დადებითი რიცხვი, $nx=y$-ის ჩასმით მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\int_0^{nh} \frac{\sin y}{y}\, dy;$$

მაშასადამე, იგი დადებითია და არ აღემატება A-ს, როგორიც არ უნდა იყოს n და h, და ზღვრად აქვს $\frac{\pi}{2}$, როცა n უსასრულოდ იზრდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

სადაც a და b ორი ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ნულისაკენ მიისწრაფის როცა n უსასრულოდ იზრდება, რადგანაც იგი ტოლია ორი შემდეგი ინტეგრალის სხვაობისა:

$$\int_0^b \frac{\sin nx}{x}\, dx, \quad \int_0^a \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

რომლებიც ორივე $\frac{\pi}{2}$-საკენ მიისწრაფის. შეიძლება ეს უშუალოდ დავამტკიცოთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენებით; თუ $a<b$, მაშინ $\frac{1}{x}$ ფუნქცია დადებითია და კლებულობს a და b-ს შორის, და ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\, dx=\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin nx\, dx=\frac{1}{a}\,\frac{\cos na-\cos n\xi}{n}.$$

მაშასადამე, ამ ინტეგრალის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ვიდრე $\frac{2}{na}$, აქედან დავასკვნით, რომ ის თ ა ნ ა ბ რ ა დ მიისწრაფის ნულისაკენ b-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც a-ს აღემატება.

განვიხილოთ ახლა განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$J=\int_0^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

სადაც $h>0$, ხოლო $\varphi(x)$ არის $(0, h)$ შუალედში დადებითი და კლებადი ფუნქცია. იგივე ინტეგრალი, აღებული ნებისმიერ დადებით საზღვრებს შორის, იმავე შუალედში, ნულისაკენ მიისწრაფის. მართლაც, დავუშვათ, რომ $a<b$; საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის თანახმად, ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

და, მაშასადამე, ინტეგრალის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ვიდრე $\frac{2\varphi(a)}{na}$. მაგრამ ეს გამოთვლა არაფერს არ გვეუბნება თვით J ინტეგრალის ზღვარის შესახებ.

ეს ზღვარი რომ ვიპოვოთ, აღვნიშნოთ c-თი საკმაოდ მცირე დადებითი რიცხვი; შეგვიძლია დავწეროთ:

$$J=\int_0^c \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_c^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

მეორე ინტეგრალი, როგორც ახლა ვნახეთ, როცა n უსასრულოდ იზრდება, ნულისაკენ მიისწრაფის. ხოლო რაც შეეხება პირველს, თუ c რიცხვი საკმაოდ მცირეა, $\varphi(x)$ ფუნქცია ძალიან მცირედ განსხვავდება $\varphi(+0)$-საგან, $(0, c)$ შუალედში, და უფრო მოსალოდნელია, რომ ამ ინტეგრალს აქვს იგივე ზღვარი, რაც ინტეგრალს:

$$\int_0^c \varphi(+0)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

ე. ი. $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$. რომ ეს დავამტკიცოთ, ამისათვის $J-\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$ სხვაობა დავწეროთ ასე:

$$J-\frac{\pi}{2}\varphi(+0)=\varphi(+0)\left(\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\int_0^c [\varphi(x)-\varphi(+0)]\,\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_c^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

ვინაიდან $\varphi(x)-\varphi(+0)$ ფუნქცია $(0, c)$ შუალედში კლებულობს, ამიტომ მეორე ინტეგრალი დავწეროთ ასე:

$$\int_0^c [\varphi(c)-\varphi(+0)] \frac{\sin nx}{x} dx + \int_0^c [\varphi(x)-\varphi(c)] \frac{\sin nx}{x} dx;$$

რადგანაც $\varphi(x)-\varphi(c)$ ფუნქცია არის დადებითი და კლებადი, ამიტომ უკანასკნელი ინტეგრალისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა, და ჩვენ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\left| \int_0^c [\varphi(x)-\varphi(+0)] \frac{\sin nx}{x} dx \right| < 2A[\varphi(+0)-\varphi(c)].$$

სრულიად ასევე გვაქვს:

$$\left| \int_c^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx \right| < \frac{2\varphi(c)}{nc}.$$

ახლა ვთქვათ, რომ ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ვინაიდან $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვრად $\varphi(+0)$, როცა x მიისწრაფის ნულისაკენ, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დადებითი c რიცხვი ავიღოთ იმდენად მცირე, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას

$$2A[\varphi(+0)-\varphi(c)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

შევარჩევთ რა c რიცხვს აღნიშნული წესით, შევარჩიოთ მთელი N რიცხვი ისე, რომ $\frac{2\varphi(c)}{Nc}$ იყოს $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე ნაკლები და რომ, გარდა ამისა, ყოველი $n \geqslant N$ მნიშვნელობისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\varphi(+0) \left| \int_0^c \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ამრიგად n-ის ყველა ამ მნიშვნელობისათვის ჩვენ მით უმეტეს გვექნება:

$$\left| I - \frac{\pi}{2} \varphi(+0) \right| < \varepsilon,$$

და მაშასადამე, ჩვენ მართლაც გვაქვს:

$$\lim_{n=\infty} I = \frac{\pi}{2} \varphi(+0). \tag{75}$$

წინადებულების დამტკიცების დროს $\varphi(x)$ ფუნქცია ჩვენ დაუქვემდებარეთ გარკვეულ შეზღუდვებს, რომლებიდან ჩვენ შეგვიძლია განვთავისუფლდეთ. თუ $\varphi(x)$ კლებულობს 0-დან h-მდე და არ რჩება მუდმივად დადებითი, მაშინ ჩვენ მუდამ შეგვიძლია მივუმატოთ მას ისეთი დადებითი მუდმივი C რიცხვი, რომ ჯამი $\psi(x)=\varphi(x)+C$ იყოს 0-დან h-მდე დადებითი და კლებადი. დამტკი-

ცებული დებულება გამოიყენება ამ $\psi(x)$ ფუნქციისათვის, და ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^h \psi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx - C\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx;$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს აქვს ზღვრად $\frac{\pi}{2}\psi(+0) - \frac{\pi}{2}C$, ე. ი. $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია იზრდება $(0, h)$ შუალედში, მაშინ $-\varphi(x)$ კლებულობს, და ჩვენ გვაქვს:

$$\int_0^h \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = -\int_0^h -\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx;$$

ინტეგრალს აქვს ზღვრად $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

ამნაირადვე შეგვეძლო დაგვემტკიცებია, რომ ინტეგრალი:

$$\int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

სადაც a და b ორი ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ხოლო $\varphi(x)$—მონოტონური ფუნქცია (a, b) შუალედში, მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა n უსასრულოდ იზრდება.

დაბოლოს ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ არის შემოსაზღვრული და რომ $(0, h)$ შუალედი შეიძლება დავყოთ სასრულო რიცხვი ისეთ შუალედებად: $(0, a)$, (a, b), (b, c), $\ldots$, (l, h), რომ თითოეულში $\varphi(x)$ ფუნქცია იყოს მონოტონური. ინტეგრალს 0-დან a-მდე აქვს ზღვრად $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$, ხოლო ყველა დანარჩენს, როგორც მაგალითად,

$$\int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

ზღვრად აქვს ნული. მაშასადამე (75) ფორმულა გამოიყენება ამ ფუნქციაზედაც. ინტეგრალი

$$I = \int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx, \tag{76}$$

სადაც h არის π-ზე ნ ა კ ლ ე ბ ი დადებითი რიცხვი, შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$I = \int_0^h f(x)\,\frac{x}{\sin x}\,\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია დადებითია და იზრდება 0-დან h-მდე, მაშინ ამას ადგილი აქვს $\varphi(x)=f(x)\frac{x}{\sin x}$ ფუნქციის მიმართაც, და მაშასადამე, გვაქვს:

$$\lim_{n=\infty} I=\frac{\pi}{2}\varphi(+0)=\frac{\pi}{2}f(+0). \tag{77}$$

იმ მსჯელობის ანალოგიურად, რომელიც ზემოთ იყო მოყვანილი, ჩვენ შეგვიძლია მიმდევრობით დავამტკიცოთ:

1) რომ (77) ფორმულა გამოიყენება ყოველი ფუნქციისათვის, რომელიც მონოტონურია $(0, h)$ შუალედში;

2) რომ ინტეგრალი:

$$\int_a^b f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx,$$

სადაც a და b არის π-ზე ნაკლები ორი დადებითი რიცხვი, ხოლო $f(x)$ მონოტონური ფუნქცია (a, b) შუალედში, ნულისაკენ მიისწრაფის;

3) დასასრულ, რომ

$$\lim \int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}f(+0) \qquad (0<h<\pi), \tag{78}$$

იმ პირობით, რომ $(0, h)$ შუალედი შეიძლება დაიყოს სასრული რიცხვი ისეთ ნაწილობით შუალედებად, რომ თითოეულში $f(x)$ ფუნქცია იყოს მონოტონური.

194. ფუნქციები, რომლებიც დაიშლება ფურიეს წკრივად. ვთქვათ $f(x)$ არის $(-\pi, +\pi)$ შუალედში შემოსაზღვრული და ინტეგრადი ფუნქცია.

ზემოთ ჩვენ ვნახეთ ფურიეს წკრივის პირველი $2m+1$ წევრის S_{2m+1} ჯამის გამოსახვა [(74) ფორმულა]. დავშალოთ ეს ინტეგრალი ორ ისეთ ინტეგრალად, რომლებსაც ზღვრიდ აქვს შესაბამად 0 და $\frac{\pi-x}{2}$, $-\frac{\pi+x}{2}$ და 0, და მეორე ინტეგრალში მივიღოთ $y=-z$; ჩვენ გვაქვს:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}dz. \tag{79}$$

თუ x მოთავსებულია $-\pi$ და $+\pi$-ს შორის, მაშინ $\frac{\pi-x}{2}$, $\frac{\pi+x}{2}$ მნიშვნელობები იმყოფებიან 0 და π-ს შორის, და ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის თეორემა, თუ კი $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს პ ი რ ვ ე ლ პირობას, ე. ი. თუ $(-\pi, +\pi)$ შუალედი შეიძლება დაიყოს სასრული რიცხვი ინტერვალებად, სადაც თითოეულ მათგანში ფუნქცია მონოტონურია. მაშინ ეს პირობა შესრულებული იქნება y ცვლადის $f(x+2y)$ ფუნქციისთვისაც $\left(0, \frac{\pi-x}{2}\right)$ შუალედში, და პირველ ინტეგრალს აქვს ზღვრად გამოთქმა:

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} f(x+0)\right]=\frac{1}{2} f(x+0).$$

სრულიად ასევე მეორე ინტეგრალს ზღვრად აქვს $\frac{1}{2} f(x-0)$, და მაშასადამე, S_{2m+1}-ს აქვს ზღვრად $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

დავუშვათ შემდეგ, რომ x უდრის ერთ-ერთ ზღვარს, მაგალითად, $-\pi$-ს. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$S_{2m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy.$$

მარჯვენა ნაწილის პირველ ინტეგრალს აქვს ზღვრად $\frac{1}{2} f(-\pi+0)$; მეორე ინტეგრალი, თუ y-ს შევცვლით $\pi-z$-ით, მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}dz,$$

და აქვს ზღვრად $\frac{1}{2} f(\pi-0)$. მაშასადამე, ფურიეს წკრივის ჯამი, როცა $x=-\pi$, ეტოლება $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$-ს; ცხადია, რომ ჯამი იგივე იქნება $x=\pi$ მნიშვნელობისთვისაც.

ამგვარად, თუ $(-\pi, +\pi)$ შ უ ა ლ ე დ ი შ ე ი ძ ლ ე ბ ა დ ა ი ყ ო ს ს ა ს რ უ ლ ო რ ი ც ხ ვ ი ი ს ე თ შ უ ა ლ ე დ ე ბ ა დ, რ ო მ ყ ო ვ ე ლ მ ა თ გ ა ნ შ ი $f(x)$ მ ო ნ ო ტ ო ნ უ რ ი ა, მ ა შ ი ნ ფ უ რ ი ე ს შ ე ს ა ბ ა მ ი წ კ რ ი ვ ი კ რ ე-

ბადია და აქვს $\frac{f(x+0)+f(x+0)}{2}$ ჯამი, როცა x მოთავსებულია $-\pi$ და $+\pi$-ს შორის, და აქვს $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ ჯამი, როცა $x=\pm\pi$.

გარდა ამისა დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მხოლოდ წყვეტის წესიერი წერტილები; x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია $-\pi$ და $+\pi$ შორის, ჩვენ გვაქვს:

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

და ფურიეს წკრივის ჯამი ტოლია $f(x)$-ის. მაშასადამე, ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $(-\pi, +\pi)$ შუალედში და რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს, შეიძლება დაიშალოს ამ შუალედში ფურიეს წკრივად. ამ დასკვნაში იგულისხმება, რომ

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2},$$

მაგრამ ეს დაშვება არ არის ლოღიკური შედეგი იმისა, რომელიც გაკეთებული იყო წყვეტის წერტილების ბუნების მიმართ. მართლაც, თუ x-ს ჩვენ გამოვსახავთ არა მონაკვეთით, არამედ წრეწირზე აღებული რკალით, რომლის რადიუსი ტოლია ერთის, მაშინ წკრივის ჯამი წრეწირის რომელიმე m წერტილში ტოლი იქნება ორი ისეთი ზღვრის საშუალო არითმეტიკულის, რომლისკენაც წკრივის ჯამები მიისწრაფიან წრეწირის ორ m' და m'' წერტილში, რომლებიც აღებულია m წერტილის ორივე მხრიდან, როცა ეს m', m'' წერტილები უსასრულოდ უახლოვდებიან m წერტილს. თუ ზღვარული $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$ მნიშვნელობები არის სხვადასხვა, მაშინ წრეწირის წერტილი, რომელიც რკალის ათვლის წერტილის დიამეტრულად მოპირდაპირეა, არის წყვეტის წერტილი, და ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა არის აგრეთვე ორივე $f(-\pi+0)$ და $f(\pi-0)$ ზღვარის საშუალო არითმეტიკული.

საზოგადოდ, ვთქვათ $f(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რომელიმე $(\alpha, \alpha+2\pi)$ შუალედში, რომლის სიგრძე 2π-ს ტოლია, და ამ შუალედში დირიხლეს პირობებს აკმაყოფილებს. ცხადია, რომ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს 2π პერიოდი და რომელიც $(\alpha, \alpha+2\pi)$ შუალედში ემთხვევა $f(x)$-ს; x-ის ყოველ მნიშვნელობისათვის ეს $f(x)$ ფუნქცია წარმოიდგინება ტრიგონომეტრიული წკრივის ჯამით, რომლის a_m და b_m კოეფიციენტები (73) ფორმულებით განისაზღვრებიან, ე. ი.

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos mx\,dx,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin mx\,dx.$$

a_m კოეფიციენტის გამოსახვა ჩვენ შეგვიძლია აგრეთვე შემდეგნაირად დავწეროთ:

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\pi}F(x)\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\alpha}F(x)\cos mx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\pi}F(x)\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\alpha+2\pi}F(x)\cos mx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi}F(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos mx\,dx.$$

სრულიად ასევე მოვძებნოთ:

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\sin mx\,dx.$$

ამგვარად, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რომელიმე შუალედში, რომლის სიგრძე 2π-ის ტოლია, მაშინ წინა ფორმულები გვაძლევენ საშუალებას გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის ფურიეს წკრივად დაშლის კოეფიციენტები, შუალედის საზღვრების დაუყვანლად $-\pi$ და $+\pi$ საზღვრებზე.

195. მაგალითები. 1. ვთქვათ საძიებელია ფურიეს წკრივი, რომლის ჯამი -1-ის ტოლია, როცა $-\pi<x<0$ და $+1$-ის, როცა $0<x<\pi$. (73) ფორმულებიდან გვაქვს:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}-dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}dx=0,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}-\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos mx\,dx=0,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}-\sin mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin mx\,dx=\frac{2-\cos m\pi-\cos(-m\pi)}{m\pi}$$

თუ m რიცხვი ლუწია, მაშინ b_m ნულის ტოლია, ხოლო თუ კი m არის კენტი, მაშინ b_m ტოლია $\frac{4}{m\pi}$-ის. ყველა კოეფიციენტს თუ $\frac{\pi}{4}$ ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ წკრივს:

$$y=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}+\ldots \qquad (80)$$

როდესაც $-\pi<x<0$, მაშინ ამ წკრივის ჯამი $-\frac{\pi}{4}$-ის ტოლია, ხოლო თუ კი $0<x<\pi$, მაშინ მისი ჯამი $\frac{\pi}{4}$-ის ტოლია. $x=0$ წერტილი წყვეტის წერტილია, და როცა $x=0$ წკრივის

ჯამი ნულის ტოლია, რაც ასედაც უნდა იყოს. საერთოდ, (80) წკრივის ჯამი ტოლია $\frac{\pi}{4}$-ის, როცა $\sin x$ დადებითია, იგი ტოლია $-\frac{\pi}{4}$-ის, როცა $\sin x$ უარყოფითია და უდრის ნულს, როცა $\sin x=0$.

(80) განტოლებით გამოსახული წირი შედგება უსასრულო სიმრავლე წრფეწირთა მონაკვეთებისაგან, რომელთა სიგრძე π-ს ტოლია და რომლებიც Ox ღერძის პარალელურ $y=\pm\frac{\pi}{4}$ წრფეზე მდებარეობენ, და Ox ღერძზე მდებარე უსასრულო სიმრავლე განმხოლოებული ($y=0$, $x=k\pi$) წერტილებისაგან.

2. ვთქვათ საძიებელია x ცვლადის დაშლა ფურიეს წკრივად (0 და 2π) შუალედში. ჩვენ გვაქვს:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx=2\pi,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos mx\,dx=\left[\frac{x\cos mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi}\sin mx\,dx=0,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin mx\,dx=-\left[\frac{x\sin mx}{m\pi}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx=-\frac{2}{m}.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\ldots \qquad (81)$$

(81) ფორმულა სამართლიანია 0-სა და 2π-ს შორის მოთავსებულ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. თუ ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილს გავუტოლებთ y ცვლადს, მივიღებთ, ისეთი წირის განტოლებას, რომელიც შედგენილია უსასრულო სიმრავლე წრფის მონაკვეთებისაგან, რომლებიც პარალელურია $y=\frac{x}{2}$ წრფისა, და უსასრულო სიმრავლე განმხოლოებულ წერტილებისაგან.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ე ბ ი. 1. თუ $(-\pi, +\pi)$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქცია ლუწია, ე. ი. თუ $f(-x)=f(x)$, მაშინ ყველა b_m კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ვინაიდან, ცხადია, ადგილი აქვს:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\,dx=-\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

პირიქით, თუ $f(x)$ ფუნქცია კენტია, ე. ი. თუ $f(-x)=-f(x)$, მაშინ ყველა a_m კოეფიციენტი a_0-ის ჩათვლით ნულის ტოლია. თუ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ $(0, \pi)$ შუალედში, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გავაგრძელოთ იგი შუალედში $-\pi$-დან O-მდე, დავუშვებთ რა

$$f(-x)=f(x)$$

ან

$$f(-x)=-f(x).$$

ამგვარად შუალედში 0-დან π-მდე $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება აგრეთვე მხოლოდ სინუსების ან მხოლოდ კოსინუსების წკრივით გამოვსახოთ.

2. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია დაიშლება ფურიეს წკრივად $(-\pi, +\pi)$ შუალედში, ე. ი.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\ldots+(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\ldots, \tag{82}$$

სადაც კოეფიციენტები გამოთვლილია (73) ფორმულებით.

თუ ამ ტოლობაში x-ს შევცვლით $-x$-ით, გვექნება:

$$f(-x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x-b_1\sin x)+\ldots+(a_m\cos mx-b_m\sin mx)+\ldots. \tag{83}$$

ამ ორი ტოლობიდან ჩვენ დავასკვნით, რომ ორი ტრიგონომეტრიული წკრივი:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\ldots+a_m\cos mx+\ldots,$$

$$b_1\sin x+\ldots+b_m\sin mx+\ldots,$$

კრებადია $(-\pi, +\pi)$ შუალედში და წარმოადგენენ, შესაბამად, ფუნქციებს:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2};$$

რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით.

196. სხვადასხვა განზოგადოებები. დირიხლეს პირობები საკმარისია იმისთვის, რომ ფუნქცია იშლებოდეს ფურიეს წკრივად, მაგრამ ეს პირობები არ არის აუცილებელი. § 193—194 დასკვნები გვაძლევს საშუალებას შევცვალოთ ეს პირობები სხვა, უფრო ზოგადი პირობებით.

ვთქვათ $f(x)$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ცვლილებით $(-\pi, +\pi)$ შუალედში; ჩვენ ვიცით, რომ იგი ტოლია ორი მონოტონური $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციის ჯამისა იმავე შუალედში (§ 11). დავუშვათ, რომ $S(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ არის ფურიეს წკრივები, რომლებიც გამოყვანილია სამი შემდეგი ფუნქციისათვის: $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$. ზემოხსენებულის საფუძველზე ორივე $S_1(x)$ და $S_2(x)$ წკრივი კრებადია $(-\pi, +\pi)$ შუალედში, და ამ შუალედის შიგნით ნებისმიერი წერტილისათვის ჩვენ გვაქვს:

$$S_1(x)=\frac{f_1(x+0)+f_1(x-0)}{2}, \quad S_2(x)=\frac{f_2(x+0)+f_2(x-0)}{2};$$

მეორე მხრით, $S(x)$ წკრივის ნებისმიერი წევრი არის S_1 და S_2 წკრივების შესაბამ წევრთა ჯამი. მაშასადამე, $S(x)$ წკრივი აგრეთვე კრებადია და აქვს ჯამად $S_1(x)+S_2(x)$, ე. ი.

$$\frac{f_1(x+0)+f_2(x+0)+f_1(x-0)+f_2(x-0)}{2}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

ამგვარად ყოველ $f(x)$ ფუნქციას შემოსაზღვრული ცვლილებით $(-\pi, +\pi)$ შუალედში ეთანადება ფურიეს კრებადი წკრივი, რომლის ჯამი ეტოლება:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$-\pi$ და $+\pi$-ს შორის მოთავსებული x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამგვარადვე დავრწმუნდებით იმაშიც, რომ $x=\pm\pi$ მნიშვნელობისათვის წკრივის ჯამი უდრის

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}.$$

თუ, ამას გარდა, $f(x)$ ფუნქციას ამ შუალედში აქვს მხოლოდ წესიერი წყვეტის წერტილები, მაშინ ფურიეს წკრივს ჯამად აქვს $f(x)$ ფუნქცია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია $-\pi$ და $+\pi$-ს შორის.

(§ 192)-ში ფურიეს წკრივის კოეფიციენტების გამოსათვლელად გამოყენებული მეთოდი შეიძლება განვაზოგადოთ. განვიხილოთ (a, b) შუალედში ო რ ტ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ფუნქციათა წკრივი:

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

ე. ი. ისეთი, რომ

$$\int_a^b \varphi_m \varphi_n \, dx = 0,$$

როგორიც არ უნდა იყოს m და n ინდექსები, რომლებიც ერთმანეთისაგან არიან განსხვავებული. თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია (a, b) შუალედში იშლება შემდეგი სახის თანაბარ კრებად წკრივად:

$$f(x) = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + \ldots + A_n\varphi_n + \ldots,$$

მაშინ A_i მუდმივი კოეფიციენტები ადვილად განისაზღვრებიან. მართლაც, წინა თანაფარდობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ φ_n-ზე და ვაინტეგროთ a და b საზღვრებს შორის; თუ მივიღებთ მხედველობაში ორტოგონალობის პირობებს, გვექნება:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx = A_n \int_a^b \varphi_n^2 \, dx,$$

საიდანაც მოვძებნით A_n კოეფიციენტის მნიშვნელობას. ყოველ კერძო შემთხვევაში ჩვენ კიდევ გვრჩება გამოსაკვლევი, ამნაირად მიღებული წკრივი მართლაც არის თუ არა კრებადი და ჯამად აქვს $f(x)$ ფუნქცია.

ლეჟანდრის პოლინომები (§ 86) შეადგენენ ფუნქციათა მიმდევრობას, რომლებიც ორტოგონალურია $(-1, +1)$ შუალედში. რომ გვქნეს საშუალება გამოვითვალოთ რომელიმე ფუნქციის ამ მრავალწევრების მიხედვით დაშლის კოეფიციენტები, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ კიდევ რიცხვითი მნიშვნელობები შემდეგი ინტეგრალებისა:

$$K_n = \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx.$$

ვთქვათ a_n არის x^n-ის კოეფიციენტი X_n მრავალწევრში; თუ მხედველობაში მივიღებთ (27) და (28) დამოკიდებულებებს (§ 86), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \int_{-1}^{+1} a_n x^n X_n \, dx = \int_{-1}^{+1} a_n x^{n-1} \frac{(n+1) X_{n+1} + n X_{n-1}}{2n+1} \, dx = \frac{na^n}{2n+1} \int_{-1}^{+1} x^{n-1} X_{n-1} \, dx.$$

მაგრამ ჩვენ გვაქვს აგრეთვე:

$$\int_{-1}^{+1} X_{n-1}^2 \, dx = a_{n-1} \int_{-1}^{+1} x^{n-1} X_{n-1} \, dx,$$

მაშასადამე, $\dfrac{K_n}{K_{n-1}}$ ფარდობა ტოლია $\dfrac{na_n}{(2n+1)\, a_{n-1}}$-ის, ე. ი. $\dfrac{2n-1}{2n+1}$-ის. აქედან დავასკვნით რომ $(2n+1)\, K_n$ ნამრავლი არ არის დამოკიდებული n-ზე. $n=0$ მნიშვნელობისათვის ჩვენ ვპოულობთ $K_0 = 2$; მაშასადამე, K_n კოეფიციენტი უდრის $\dfrac{2}{2n+1}$.

197. უწყვეტი ფუნქციის გამწკრივება. ვეიერშტრასის თეორემა. ვთქვათ $y=f(x)$ არის (a, b) შუალედში უწყვეტი ფუნქცია. ვეიერშტრასმა შემდეგი შესანიშნავი დებულება დაამტკიცა. ვთქვათ ε ნებისმიერად მოცემული დადებითი რიცხვია. შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი $P(x)$ მრავალწევრი, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის (a, b) შუალედში $f(x)-P(x)$ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იყოს ε-ზე.

ამ თეორემის მრავალ დამტკიცებიდან უფრო მარტივი ლებეგს (Lebesgue) ეკუთვნის[1]. განვიხილოთ ჯერ შემდეგი კერძო შესთხვევა. ვთქვათ $\psi(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია $(-1, +1)$ შუალედში განსაზღვრული შემდეგნაირად: $\psi(x)=0$, როცა $-1\leqslant x\leqslant 0$, და $\psi(x)=2kx$, როცა $0\leqslant x\leqslant 1$, სადაც k მოცემული მუდმივია. ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\psi(x)$ შემდეგნაირად: $\psi(x)=k[x+|x|]$. მეორეს მხრით, x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია -1 და $+1$-ს შორის, გვაქვს:

$$|x|=\sqrt{1-(1-x^2)}.$$

x-ის ამ მნიშვნელობათათვის რადიკალი შეიძლება გაიშალოს $(1-x^2)$-ის ხარისხებად დალაგებულ თანაბარ კრებად წკრივად. ამნაირად $|x|$, და მაშასადამე $\psi(x)$-იც შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ამ შუალედში მრავალწევრით მიახლოების ნებისმიერი სიზუსტით. განვიხილოთ ახლა (a, b) შუალედში ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია. ეს შუალედი დავყოთ n ნაწილობითი: (a_0, a_1), $(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$ შუალედებად, მასთან $a=a_0<a_1<a_2<\ldots a_{n-1}<$ $<a_n=b$, ისე, რომ $f(x)$ ფუნქციის რყევა თითოეულ მათგანში იყოს ნაკლები ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}$.

ვთქვათ L არის ტეხილი წირი, შედგენილი წრფის ნაკვეთებისაგან, რომლებიც აერთებენ მიმდევრობით $y=f(x)$ მრუდის წერტილებს, აბსცისებით $a_0, a_1, a_2, \ldots, b$. ამ ტეხილი წირის ნებსითი წერტილის ორდინატი, ცხადია, არის აბსცისის უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქცია, და $f(x)-\varphi(x)$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია $\frac{\varepsilon}{2}$-ზე. მართლაც, როცა $a_{\mu-1}<x<a_\mu$, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქცია იმყოფება $f(a_{\mu-1})$ და $f(a_\mu)$-ს შორის, და მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi(x)=f(a_{\mu-1})+\theta[f(a_\mu)-f(a_{\mu-1})]=f(a_{\mu-1})(1-\theta)+f(a_\mu)\theta,$$

სადაც θ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. აქედან გვაქვს:

$$f(x)-\varphi(x)=[f(x)-f(a_{\mu-1})](1-\theta)+[f(x)-f(a_\mu)]\theta.$$

ვინაიდან θ მამრავლი დადებითია და ერთზე ნაკლები, ამიტომ $f-\varphi$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე ნაკლებია ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta+\theta)=\frac{\varepsilon}{2}$. ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\varphi(x)$ ფუნქცია, როგორც ჯამი n ფუნქციისა, რომლებიც ანალოგიურია ზემოთ ნაჩვენები $\psi(x)$ ფუნქციისა. მართლაც, ვთქვათ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ტეხილი L წირის წვეროებია, რომლებიც აღებულია მათი თანამიმდევნო რიგით. $\varphi(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს როგორც ჯამი ორი ψ_1 და φ_1 ფუნქციისა; ψ_1 ფუნქცია წარმოადგენს (a, b) შუალედში იმ წრფეს, რომელზედაც ძევს $A_0 A_1$ გვერდი, ხოლო φ_1 წარმოადგენს რაიმე მრავალკუთხა $A'_0 A'_1 \ldots A'_n$ წირს, რომლის პირველი $A'_0 A'_1$ გვერდი Ox ღერძზე ძევს, რადგანაც (a_0, a_1) შუალედში ჩვენ უნდა გვექნეს: $\varphi(x)=\psi_1(x)$. $\varphi_1(x)$ ფუნქცია თავის მხრით უდრის ჯამს ორი ψ_2 და φ_2 ფუნქციისას; ψ_2 ფუნქცია (a, a_1) შუალედში ნულის ტოლია, ხოლო (a_1, b) შუალედში წარმოადგენს წრფეს, რომელზედაც ძევს $A'_1 A'_2$ გვერდი, მაშინ როცა φ_2 წარმოადგენს რომელიმე მრავალკუთხა $A''_0 A''_1 A''_2 \ldots A''_n$ წირს, რომლის სამი A''_0, A''_1, A''_2 წვერო Ox ღერძზე მდებარეობს, და ა. შ. ამნაირად ჩვენ შეგ-

[1]. Bulletin das Sciences mathématiques, გვ. 278, 1898.

ვიძლია წარმოვადგინოთ $\varphi(x)$ ფუნქცია როგორც ჯამი n ფუნქციისა: $\varphi(x)=\psi_1+\psi_2+\ldots\psi_n$ სადაც ψ_i არის უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც a და a_{i-1}-ს შორის უდრის ნულს და რომელიც (a_{i-1}, b) შუალედში წარმოიდგინება რაიმე წრფის მონაკვეთით. თუ მოვახდენთ ცვლადის შეც-ვლას $X=mx+n$ და შევარჩევთ შესაბამად m და n რიცხვებს, მაშინ შეგვიძლია $\psi_i(x)$ ფუნქცია, $(-1, +1)$ შუალედში წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობით:

$$\psi_i(x)=k[X+|X|].$$

ეს გვიჩვენებს, რომ $\psi_i(x)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ მრავალწევრით მიახლოების ნებისმიერი სიზუსტით. ვინაიდან ყოველი ψ_i ფუნქციიდან შეიძლება წარმოდგენილი იყოს (a, b) შუალედში მიახლოვებით მრავალწევრით, ნაკლები ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2n}$, ამიტომ ცხადია, რომ ამ მრავალწევრთა ჯამი განსხვავდება $f(x)$ ფუნქციისაგან ε-ზე ნაკლები სიდიდით.

წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ფუნქცია. უწყვეტი (a, b) შუალედში, შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ამ შუალედში მრავალ-წევრთა თანაბრად კრებად წკრივად. მართლაც, ავიღოთ მიმდევრობა დადებითი კლებადი რიცხვებისა: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, რომლის ზოგადი წევრი ε_n მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა n უსასრულოდ იზრდება. წინა დებულების საფუძველზე, ამ მიმდევრობის ყოველი ε რიცხვისა-თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $P_i(x)$ მრავალწევრი, რომ $f(x)-P_i(x)$ სხვაობის აბსოლუ-ტური სიდიდე მთელ (a, b) შუალედში ნაკლები იყოს ვიდრე ε. განვიხილოთ წკრივი:

$$P_1(x)+[P_2(x)-P_1(x)]+\ldots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\ldots$$

თუ x იმყოფება (a, b) შუალედში, მაშინ ეს წკრივი კრებადია, და მისი ჯამი $f(x)$-ის ტოლია. მართლაც, ცხადია, რომ მისი პირველი n წევრის S_n ჯამი ტოლია $P_n(x)$-ის; მაშასადამე, $f(x)-S_n$ სხვაობა, რომლის აბსოლუტური სიდიდე რჩება ნაკლები ε_n-ზე, n-ის უსასრულოდ ზრდის დროს ნულისაკენ მიისწრაფის. გარდა ამისა, წკრივი იქნება თანაბრად კრებადი ვინაიდან, თუ n-ს ავიღებთ საკმაოდ დიდს, $f(x)-S_n$ სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე შეიძლე-ბა გავხადოთ ნებისმიერ მცირე დადებით რიცხვზე ნაკლები (a, b) შუალედში მოთავსებული x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

სავარჯიშო მაგალითები.

1. გამოიყენეთ ლაგრანჟის ფორმულა $y^2=ay+x$ განტოლების იმ ფესვის გამწკრივები-სათვის x-ის ხარისხებად, რომელიც a-თ იქცევა $x=0$ მნიშვნელობისათვის.

2. ამოხსენით იგივე ამოცანა $y-a+xy^{m+1}=0$ განტოლებისათვის. შემდეგი გამოიყენეთ $a-bx+cx^2=0$ კვადრატული განტოლებისათვის, გაამწკრივეთ c-ს ხარისხებად ფესვი, რომელიც $\frac{a}{b}$-საკენ მიისწრაფის, როცა c მიისწრაფის ნულისაკენ.

3. გამოიყვანეთ ფორმულა:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4\ldots$$

4. თუ x მეტია ვიდრე $-\frac{1}{2}$, მაშინ

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots$$

5. თუ $|x|<1$, მაშინ

$$x=\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2\cdot4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots$$

რას უდრის წკრივის ჯამი, თუ $|x|>1$?

6. გამოიყვანეთ ფორმულა:

$$(a+x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\left[1-\frac{nx}{a+x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\dots\right].$$

7. დაამტკიცეთ, რომ $\sin mx$ და $\cos mx$-ის მნიშვნელობები, რომლებიც $\sin x=0$ მნიშვნელობისათვის შესაბამად 0-ისა და 1-ის ტოლია, გაიშლებიან წკრივად $\sin x$-ის ხარისხების მიხედვით:

$$\sin mx=m\left[\sin x-\frac{m^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5 x-\dots\right],$$

$$\cos mx=1-\frac{m^2}{1\cdot 2}\sin^2 x+\frac{m^2(m^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x-\dots$$

[შეიძლება ისარგებლოთ დიფერენციალური განტოლებით:

$$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2}-y\frac{du}{dy}+m^2u=0,$$

რომელსაც აკმაყოფილებენ $\cos mx$ და $\sin mx$, განხილული როგორც $y=\sin x$-ის ფუნქციები].

8. წინა ფორმულებიდან გამოიყვანეთ

$\cos(n\arccos x)$ და $\sin(n\arccos x)$-ის გამწკრივებები.

9. დაამტკიცეთ ფორმულები:

$$\ln(x+2)=2\ln(x+1)-2\ln(x-1)+\ln(x-2)+$$
$$+2\left[\frac{2}{x^3-3x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5+\dots\right]$$

[ბორდის წკრივი];

$$\ln(x+5)=\ln(x+4)+\ln(x+3)-2\ln x+\ln(x-3)+\ln(x-4)-\ln(x-5)-$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\dots\right]$$

[აროს (Haro) წკრივი]

10. (a, b) შუალედში უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\int_a^b f(x)\,x^n\,dx=0,$$

როცა $n=0, 1, 2\dots$, იგივურად ნულის ტოლია.

მითითება. გულისხმობენ, რომ $f(x)$ გაშლილია მრავალწევრების თანაბარ კრებად წკრივად, და აქედან გამოყავთ, რომ $\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ ნულის ტოლია.

[მური (Moore)].

11. ნულისაგან განსხვავებულ უწყვეტ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს ფურიეს წკრივი, იგივურად ნულის ტოლი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. დავუშვათ, რომ (a, b) შუალედში $f(x) > m > 0$, მასთან a და b მოთავსებულია 0 და 2π-ს შორის, და ვთქვათ:

$$\psi = 1 + \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \cos\frac{a-b}{2}.$$

ვამტკიცებთ რა, რომ ინტეგრალი: $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\psi^n\,dx$ არ შეიძლება ნული იყოს n-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (იხ. L e b e s g u e, Leçons sur les séries trigonométriques, გვ. 37); აქედან დავასკვნით, რომ ორი სხვადასხვა უწყვეტ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს ფურიეს ერთი და იგივე წკრივი. მაშასადამე, თუ ფურიეს წკრივი $f(x)$ ფუნქციისათვის თანაბრად კრებადია, მაშინ ამ წკრივის ჯამი $f(x)$-ის ტოლია.

12. გამოთვალეთ ფურიეს კოეფიციენტები 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც წარმოდგენილია ტეხილი წირით. ამ წკრივის თანაბრად კრებადობისაგან გამოიყვანეთ ვ ე ი ე რ შ ტ რ ა ს ი ს დებულების (§ 197) ახალი დამტკიცება.

თ ა ვ ი X.

მომვლებთა თეორია. თანახება.

დიფერენციალურ გეომეტრიაში ჩვეულებრივად მხოლოდ ანალიზური წირები და ფართეულები განიხილება. მაგრამ იმ გეომეტრიული ელემენტების არსებობისათვის, რომელთა განსაზღვრაზე ახლა გადავდივართ, საჭიროა, რომ ფუნქციებს ჰქონდეს წარმოებული მხოლოდ რომელიმე სასრულო რიგამდე. ასე, მაგალითად, ბრტყელ წირს, რომელიც მოცემულია განტოლებით $y=f(x)$, ექნება მხები, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $f'(x)$ წარმოებული, აქვს სიმრუდის რადიუსი, თუ $f'(x)$ წარმოებულს თავის მხრით აქვს $f''(x)$ წარმოებული და ა. შ.

I. მომვლები წირები და ფართეულები.

198. მომვლებთა მოძებნა. ვთქვათ მოცემულია ბრტყელი C წირის განტოლება:

$$f(x, y, a)=0, \tag{1}$$

რომელიც დამოკიდებულია ცვლად a პარამეტრზე. ამ პარამეტრის ცვლილების დროს C წირი, საზოგადოდ, უწყვეტად იცვლება როგორც თავის სახით, ისე მდებარეობით. თუ ყველა C წირი ეხება რაიმე გარკვეულ E წირს, მაშინ ამ უკანასკნელს ეწოდება C წირთა *მომვლები*; C წირებს კი E წირით *მოვლებული*. განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა მონაცემი C წირების მიხედვით შესაძლოა გავიგოთ, აქვთ თუ არა ამ წირებს მომვლები, და როგორ შეიძლება ვიპოვოთ იგი.

დავუშვათ, რომ მომვლები არსებობს. ვთქვათ x, y არის შეხების M წერტილის კოორდინატები E წირისა C-თან, რომელიც ეთანადება პარამეტრის აღებულ a მნიშვნელობას. ეს x, y კოორდინატები არიან a პარამეტრის უცნობი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას. მათ მოსაძებნად საჭიროა ვისარგებლოთ პირობით, რომ a პარამეტრის ცვლილებით M წერტილის მიერ მოხაზული წირის მხები ემთხვევა C წირის მხებს. აღვნიშნოთ δx და δy-ით C წირის მხების მიმართულების კოსინუსების პროპორციული სიდიდეები, ხოლო $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$-ით უცნობი $x=\varphi(a)$ და $y=\psi(a)$ ფუნქციების წარმოებულები. მაშინ უნდა გვქონდეს:

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\delta x}=\frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}. \tag{2}$$

ვინაიდან C წირი წარმოდგენილია (1) განტოლებით, რომელშიც a პარამეტრს აქვს მუდმივი მნიშვნელობა, ამიტომ C წირის მხების განსაზღვრისათვის ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y=0. \tag{3}$$

მეორე მხრით, უცნობი $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$ ფუნქციები აგრეთვე უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებას:

$$f(x, y, a)=0,$$

მაგრამ აქ a აღნიშნავს უკვე არა მუდმივს, როგორც ზემოთ, არამედ დამოუკიდებელ ცვლადს; ამიტომ ჩვენ აგრეთვე გვექნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{4}$$

მე-(2) ტოლობა მე-(3) და მე-(4) ტოლობებთან ერთად გვაძლევს:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{5}$$

მე-(5) და (1) განტოლებები განსაზღვრავენ უცნობ $x=\varphi(a)$ და $y=\psi(a)$ ფუნქციებს. მაშასადამე, მომვლების არსებობის შემთხვევაში, მისი განტოლების მისაღებად საჭიროა გამოვრიცხოთ a პარამეტრი შემდეგი განტოლებებიდან:

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{da}=0.$$

ვთქვათ $R(x, y)=0$ არის (1) და მე-(5) განტოლებებიდან a პარამეტრის გამორიცხვის შედეგი. გამოვარკვიოთ, თუ რა პირობებში წარმოადგენს ეს წირი მომვლებს. ვთქვათ C_0 არის (1) წირთა ოჯახის ერთერთი წირი, რომელიც ეთანადება პარამეტრის a_0 მნიშვნელობას; (x_0, y_0) იყოს შემდეგი წირთა გადაკვეთის M_0 წერტილის კოორდინატები:

$$f(x, y, a_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_0}=0. \tag{6}$$

(1) და მე-(5) განტოლებები განსაზღვრავენ ორ $x=\varphi(a)$ და $y=\psi(a)$ ფუნქციას, რომლებიც შესაბამად გახდებიან x_0 და y_0, როცა $a=a_0$. მაშასადამე, როცა $a=a_0$ ჩვენ გვექნება:

$$\frac{\partial f}{dx_0}\left(\frac{dx}{da}\right)_0+\frac{\partial f}{dy_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0=0.$$

ამ ტოლობიდან და მე-(3) ტოლობიდან ჩანს, რომ C_0 წირის მხები (x_0, y_0) წერტილში ემთხვევა (x, y) წერტილით შემოწერილ $R(x, y)=0$ წირის მხებს, თუ კი მხოლოდ ადგილი არ ექნება ერთდროულად $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, ე. ი. თუ (x_0, y_0) წერტილი არ იქნება C_0 წირის განკუთრი წერტილი. ამნაირად, $R(x, y)=0$ განტოლება წარმოადგენს ან C წირთა მომვლებს, ანდა ამ წირთა განკუთრი წერტილების გეომეტრიულ ადგილს.

ეს შედეგი შეიძლება შევავსოთ. თუ თითოეულს C წირებიდან აქვს ერთი ან რამდენიმე განკუთრი წერტილი, მაშინ ამ განკუთრ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი უეჭველად შედის $R(x, y)=0$ წირში როგორც ნაწილი. მართლაც, ვთქვათ (x, y) არის ერთ-ერთი განკუთრი წერტილის კოორდინატები. (x, y) კოორდინატები არიან a-ს ფუნქციები, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ შემდეგ სამ განტოლებას:

$$f(x, y, a)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

და, მაშასადამე, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ განტოლებასაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ (x, y) კოორდინატები აკმაყოფილებენ $R=0$ განტოლებას, რომელიც $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ განტოლებებიდან a-ს გამორიცხვით მიიღება. თვით ზოგად შემთხვევაში $R(x, y)=0$ წირი შედგება ორ ანალიზურად სხვადასხვა ნაწილისაგან, რომელთაგან ერთი არის მომვლები, ხოლო მეორე მოცემულ წირთა ოჯახის განკუთრ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი.

მაგალითი. განვიხილოთ წირთა ოჯახი:

$$f(x, y, a)=y^4-y^2+(x-a)^2=0.$$

ჩვენ გვაქვს $\frac{\partial f}{\partial a}=-2(x-a)$, და თუ გამოვრიცხავთ a-ს $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ განტოლებებიდან, მივიღებთ განტოლებას: $y^4-y^2=0$, რომელიც წარმოადგენს სამ წრფეს: $y=0$, $y=+1$, $y=-1$. ადვილად შევნიშნავთ, რომ მოცემული ოჯახის ყველა წირი მიიღება $y^4-y^2+x^2=0$ წირიდან, თუ მას გადავაადგილებთ Ox-ის პარალელურად. მაგრამ ამ უკანასკნელ წირს კოორდინატთა სათავეზე აქვს ორჯერადი განკუთრი წერტილი და ეხება $y=\pm 1$ წრფეებს მათი Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილში. მაშასადამე, $y=0$ წრფე არის ორჯერად განკუთრი წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, ხოლო $y=\pm 1$ წრფეები წარმოადგენენ მომვლებს ამ სიტყვის ნამდვილი მნიშვნელობით.

თუ C წირებს აქვთ E მომვლები მაშინ *ამ მომვლების თითოეული წერტილი არის განსახილავი ოჯახის ისეთი ორი წირის გადაკვეთის წერტილის ზღვარული მდებარეობა, რომლებიც ეთანადება პარამეტრის ორ უსასრულოდ მახლობელ მნიშვნელობას.* მართლაც, ვთქვათ

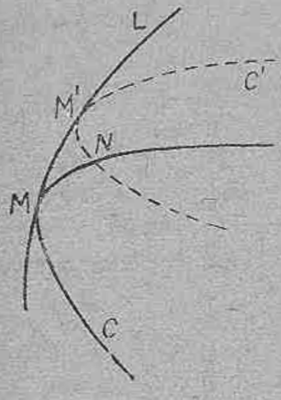
$$f(x, y, a)=0, \; f(x, y, a+h)=0 \tag{7}$$

არის ოჯახის ორი, ერთმანეთის მახლობელი, წირის განტოლება. მე-(7) განტოლებები, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ წირთა გადაკვეთის წერტილებს, ცხადია, შეიძლება შეიცვალოს ტოლფასი ორი განტოლებით:

$$f(x, y, a)=0, \; \frac{f(x, y, a+h)-f(x, y, a)}{h}=0. \tag{7'}$$

როცა h უახლოვდება ნულს, ე. ი. როდესაც მეორე წირი უსასრულოდ უახლოვდება პირველს, მეორე ამ განტოლებათა შორის გახდება: $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, საიდანაც

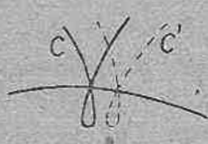
ჩანს, რომ ეს გადაკვეთის წერტილები ზღვარში გახდებიან წირის მომვლების წერტილებად[1]. გეომეტრიულად ეს თვისება თითქმის ცხადია. მართლაც, $32a$ ნახაზიდან ჩანს, რომ ორი ურთიერთ მახლობელი C და C' წირთა გადაკვეთის N წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება შეხების M წერტილს, როცა C' წირი მიისწრაფის დაემთხვეს C წირს. სრულიად ასევე $32b$ ნახაზიდან ჩანს, რომ თუ (1) წირებს აქვს ორჯერადი წერტილები, მაშინ ორი ურთიერთ მახლობელი C და C' წირების გადაკვეთის ორი წერტილი, მიისწრაფის დაემთხვეს ამ ორჯერად წერტილს, როცა C წირი უსასრულოდ უახლოვდება C წირს.



ნახ. $32a$.

წინა შენიშვნიდან გასაგებია, თუ რატომ ვღებულობთ მომვლებთან ერთად განკუთრ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილსაც. დავუშვათ, მაგალითად, რომ $f(x, y, a)$ არის a-ს მიმართ m-ური ხარისხის მრავალწევრი. სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი M_0 (x_0, y_0) წერტილის კოორდინატებისათვის განტოლება:

$$f(x_0, y_0, a)=0 \tag{8}$$



ნახ. $32b$.

საერთოდ, იძლევა, a-ს მიმართ m სხვადასხვა ამონახსნს; მაშასადამე, M_0 წერტილზე გაივლის განსახილავი ოჯახის m სხვადასხვა წირი. მაგრამ თუ M_0 წერტილი ძევს $R(x, y)=0$ წირზე, მაშინ გვაქვს ერთდროულად:

$$f(x_0, y_0, a)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

და მე-(8) განტოლებას a-ს მიმართ აქვს ორჯერადი ამონახსნი. ამნაირად ვხედავთ, რომ $R(x, y)=0$ მრუდი არის სიბრტყის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებისთვისაც ერთმანეთს უერთდება ამ წერტილებიდან ერთ-ერთზე გამავალი (1) ოჯახის ორი წირი. მაგრამ $32a$ და $32b$ ნახაზებიდან ჩანს, რომ უახლოვდება თუ არა N წერტილი უსაზღვროდ მომვლებს ან წირს, რომელიც წარმოადგენს განკუთრი წერტილების გეომეტრიულ ადგილს,—ორივე შემთხვევაში N-ზე გამავალი ოჯახის ორი წირი, მეტად ახლოა ერთი-მეორესთან და ზღვარში მიისწრაფიან დაემთხვენ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ხშირად საჭიროა ვიპოვოთ მომვლები შემდეგი წირთა ოჯახის:

---

[1] დამტკიცება იქნება უფრო მკაცრი, თუ მე-(7') განტოლებებიდან მეორეს დავწერთ შემდეგი სახით: $f'_a(x, y, a+\theta h)=0$. თუ (x, y) წერტილი მიისწრაფის (x_1, y_1) ზღვრულ წერტილისაკენ, როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ და f'_a წარმოებული არის უწყვეტი, მაშინ ზღვრული წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორ შემდეგ განტოლებას: $f(x_1, y_1, a)=0$ და $f'_a(x_1, y_1, a)$.

რომლის განტოლებაც შეიცავს ორ ცვლად a და b პარამეტრს, რომლებიც ურთიერთ შებმულია $\varphi(a, b)=0$ დამოკიდებულებით. ეს შემთხვევა არსებითად არ განირჩევა ზოგადი შემთხვევისაგან, რადგან ჩვენ შეგვიძლია b განვიხილოთ როგორც a-ს ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება $\varphi=0$ განტოლებით. ზემოთ გამოყვანილი წესის თანახმად მე-(9) განტოლებას ჩვენ უნდა დავუმატოთ მეორე განტოლება, რომელიც მიიღება თუ გაუტოლებთ ნულს მე-(9) განტოლების მარცხენა მხარის წარმოებულს a-ს მიხედვით, ე. ი. განტოლება:

$$F(x, y, a, b)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial a}\frac{db}{da}=0.$$

მაგრამ $\varphi(a, b)=0$ დამოკიდებულებიდან, გვაქვს:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

თუ ორი უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ $\frac{db}{da}$-ს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0. \tag{10}$$

ამგვარად ჩვენ მივიღებთ მომვლების განტოლებას თუ a და b-ს გამოვრიცხავთ $F=0$, $\varphi=0$ მე-(10) განტოლებიდან.

199. წრფეთა ოჯახის მომვლები. ავიღოთ D წრფის ნორმალური სახის განტოლება:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-f(\alpha)=0, \tag{11}$$

α იყოს ცვლადი პარამეტრი. თუ ავიღებთ α პარამეტრის მიმართ წარმოებულს, მივიღებთ:

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha)=0. \tag{12}$$

მე-(11) და მე-(12) განტოლებებიდან ჩვენ ვიპოვით მოძრავი D წრფის მომვლებთან თანახების წერტილის კოორდინატებს:

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha,\\ y&=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (x, y) წერტილის მიერ შემოწერილ E წირის მხები არის D წრფე; მართლაც, მე-(13) განტოლებებიდან გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} dx&=-[f(\alpha)+f''(\alpha)]\sin\alpha\, d\alpha,\\ dy&=[f(\alpha)+f''(\alpha)]\cos\alpha\, d\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

მაგრამ $\operatorname{ctg}\alpha$ არის D წრფის საკუთხო კოეფიციენტი.

თუ მომვლების რკალის სიგრძეს s-თი აღვნიშნავთ, მაშინ მე-(14) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm[f(\alpha)+f''(\alpha)]\,d\alpha,$$

და მაშასადამე,

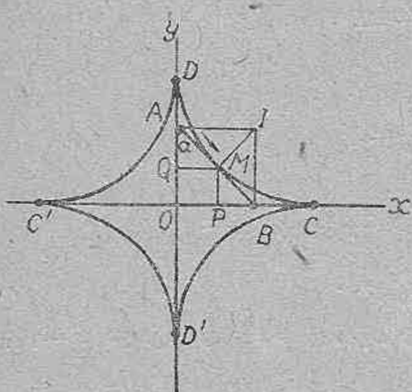
$$s=\pm\left[\int f(\alpha)\,d\alpha+f'(\alpha)\right].$$

აქედან ჩანს, რომ, თუ ავიღებთ $f(\alpha)$-თი წინასწარ აღებული ცნობილი ფუნქციის წარმოებულს ჩვენ მივიღებთ გამწრფევად წირს [1].

მივიღოთ, მაგალითად, $f(\alpha)=l\sin\alpha\cos\alpha$. მე-(11) განტოლებაში თუ დავუშვებთ მიმდევრობით $y=0$, $x=0$, მივიღებთ (ნახ. 33): $OA=l\sin\alpha$, $OB=l\cos\alpha$, და მაშასადამე, $AB=l$. ჩვენ ვხედავთ, რომ საძიებელი წირი არის იმ წრფეთა მონაკვეთების მომვლები, რომლებსაც აქვთ მუდმივი l სიგრძე და რომელთა ბოლოები სრიალებენ ორი ურთიერთ მართობულ წრფეზე. მე-(13) ფორმულები იძლევა:

$$x=l\sin^3\alpha,\quad y=l\cos^3\alpha,$$

და მომვლების განტოლება იქნება:



ნახ. 33.

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

ეს არის ჰიპოციკლოიდის განტოლება, რომელსაც ოთხი უკუქცევის წერტილი აქვს; მას მე-33 ნახაზზე წარმოდგენილი სახე აქვს. როცა α იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ თანახების M წერტილი შემოსწერს DC რკალს. ამ რკალის სიგრძე, ათვლილი D წერტილიდან იქნება:

$$s=\int_0^{\alpha}3\,l\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha=\frac{3l}{2}\sin^2\alpha.$$

ვთქვათ I არის OA და OB-ზე აგებული მართკუთხის წვერო, ხოლო M კი I-დან AB-ზე დაშვებული მართობის ფუძე. AMI და AMP სამკუთხედებიდან გვაქვს:

$$AM=AI\cos\alpha=l\cos^2\alpha,\quad AP=AM\sin\alpha=l\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

მაშასადამე, $OP=OA-AP=l\sin^3\alpha$, და M წერტილი წარმოადგენს AB წრფის მომვლებთან თანახების წერტილს. აქედან ვღებულობთ:

$$BM=l-AM=l\sin^2\alpha;$$

ამნაირად რკალის სიგრძე $DM=\frac{3}{2}BM$.

200. წრეწირთა მომვლები.

ვთქვათ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\rho^2=0 \tag{15}$$

---

[1] s-ის შემდეგი ფორმულაში შემავალ ყველა სიდიდეს:

$$s=\pm\left[f'(\alpha)+\int f(\alpha)\,d\alpha\right].$$

აქვს გეომეტრიული მნიშვნელობა. ასე, მაგალითად, α არის Ox-სა და კოორდინატთა სათავიდან მოძრავ წრფეზე დაშვებულ ON მართობს შორის მოთავსებული კუთხე, $f(\alpha)$—მანძილი კოორდინატთა სათავიდან ამ წრფემდე, $f'(\alpha)$ აბსოლუტური სიდიდით ტოლია მოძრავი წრფის მის მომვლებთან თანახების M წერტილსა და კოორდინატთა სათავიდან მოძრავ წრფეზე დაშვებული მართობის N ფუძეს შორის MN მანძილის. ეს გამწრფევადობის ფორმულა ზოგჯერ ლაგრანჟის ფორმულად იწოდება.

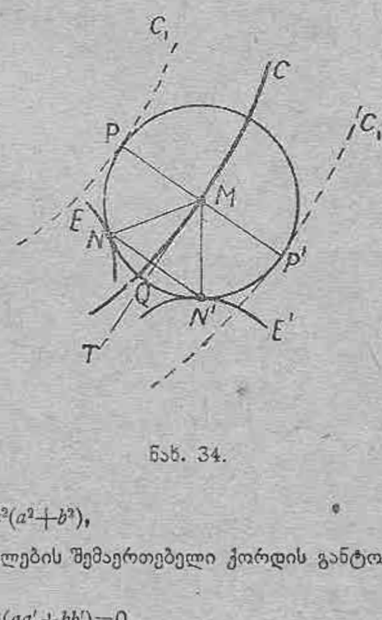
არის წრეწირის განტოლება, სადაც a, b, ρ ცვლადი t პარამეტრის ფუნქციებია. ჩვენ ვიცით, რომ წერტილები, რომლებშიც მე-(15) წრეწირი ეხება მომვლებს, არის ამ წრეწირის

$$(x-a)\,a' + (y-b)\,b' + \rho\rho' = 0 \tag{16}$$

წრფესთან გადაკვეთის წერტილები. მე-(16) წრფე არის მართობული t პარამეტრის ცვლილებისას წრეწირის $(a,\ b)$ ცენტრით შემოხაზული წირის მხებისა; ამ წრფის მანძილი ცენტრამდე ტოლია $\rho\,\frac{d\rho}{ds}$, სადაც s არის C წირის რკალის სიგძე ათვლილი მის რამე გარკვეულ წერტილიდან. მე-(16) წრფე გადაკვეთს წრეწირს ორ, MT (ნახ. 34) მხების მიმართ სიმეტრიულ მდებარე, N და N' წერტილში; მაშასადამე, მომვლები შედგენილი იქნება ორ E და E' შტოსაგან, რომლებიც, საზოგადოდ, ანალიზურად სხვადასხვაა. განვიხილოთ რამოდენიმე კერძო შემთხვევა.

1. თუ ρ არის მუდმივი, მაშინ თანახების NN' ქორდა C წირის PP' ნორმალად გარდაიქცევა, და მომვლები შესდგება ორ პარალელურ C_1 და C_1' წირისაგან. ამ წირებს ჩვენ მივიღებთ თუ C წირის ნორმალზე M წერტილის ორივე მხრით გადავზომავთ მუდმივ ρ სიგრძეს.

2. თუ $\rho = s + C$, მაშინ $\rho\,\frac{d\rho}{ds} = \rho$, და NN' ქორდა გადაიქცევა წრეწირის მხებად Q წერტილში. ამ შემთხვევაში მომვლების ორივე შტო ემთხვევა ერთ Γ წირს და ამ მომვლებს ნორმალებად აქვს C წირის მხებები. C წირს ამ შემთხვევაში Γ წირის შლადი (ევოლუტი) ეწოდება; შებრუნებით, Γ წირს კი C წირის შლილი (ევოლვენტი) ეწოდება. (იხ. § 225).



ნახ. 34.

თუ $d\rho > ds$, მაშინ მე-(16) წრფე არ გადაკვეთს წრეწირს, და მომვლები იქნება წარმოსახვითი.

მეორადი კაუსტიკები. დავუშვათ, რომ ცვლადი წრეწირის რადიუსი ტოლფარდია ამ წრეწირის ცენტრსა და რაიმე მუდმივ O წერტილს შორის მანძილის. მივიღოთ ეს O წერტილი კოორდინატთა სათავედ. მაშინ წრეწირის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2(a^2 + b^2),$$

სადაც k მუდმივი მამრავლია. შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება იქნება:

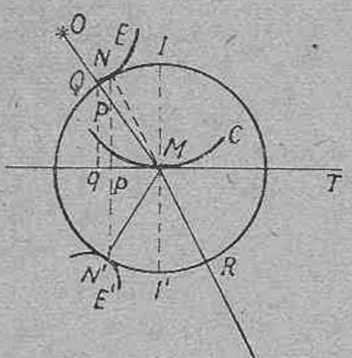
$$(x-a)\,a' + (y-b)\,b' + k^2(aa' + bb') = 0$$

ვთქვათ δ და δ' არიან წრეწირის $M(a, b)$ ცენტრიდან აღნიშნულ NN' ქორდამდე და კოორდინატთა სათავეზე გავლებულ მის პარალელურ წრფემდე მანძილები (ნახ. 35). წინა განტოლებებიდან გვაქვს: $\delta = k^2\,\delta'$. მაშასადამე, ჩვენ მივიღებთ აღნიშნულ ქორდას, ავიღებთ რა MO რადიუსზე ისეთ P წერტილს, რომ $MP = k_2 MO$, და დავუშვებთ P წერტილიდან მართობს მოცემულ წრეწირთა ოჯახის C ცენტრის გეომეტრიულ ადგილის MT მხებზე. დავუშვათ, რომ $k < 1$, და ვთქვათ E არის მომვლები წირის შტო, რომელიც O წერტილთან ერთად დალაგებულია C წირის მხების მიმართ ერთ მხარეზე. აღვნიშნოთ i და r-ით კუთხეები, შედგენილი MO და MN წრფეებით MI ნორმალთან. გვექნება:

$$\sin i = \frac{Mq}{MQ},\quad \sin r = \frac{Mp}{MN}.$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{Mq}{Mp} = \frac{MQ}{MP} = \frac{1}{k}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ O-ში მოთავსებულია მნათი წერტილი, და რომ C წირი წარმოადგენს გამყოფ წირს იმ არესი, რომელშიაც O წერტილი იმყოფება, და მეორე არესაგან, რომლის გარდატეხის მაჩვენებელი პირველი არეს მიმართ არის $\frac{1}{k}$. გარდატეხის შემდეგ დაცემის OM სხივი გადაიქცევა გარდატეხის MR სხივად, რომელიც გარდატეხის კანონის თანახმად იქნება მოთავსებული MN წრფის გაგრძელებაზე. ამრიგად, ყველა გარდატეხილი MR სხივი იქნება ნორმალები E მომვლებისა, რომელსაც გარდატეხის შემდეგ მეორადი კაუსტიკები ეწოდება. კაუსტიკა ან რაც იგივეა გარდატეხილი სხივების მომვლები არის მეორადი კაუსტიკის შლადი.



ნახ. 35.

E' მომვლების მეორე შტოს არ აქვს არავითარი ფიზიკური მნიშვნელობა; ის შეესაბამება გარდატეხის უარყოფით მაჩვენებელს. თუ დავუშვებთ $k=1$, მაშინ E მომვლები გადაიქცევა თვით O წერტილად, ხოლო E' მომვლები იქნება O წერტილის C მრუდის მხების მიმართ სიმეტრიულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. ამასთანავე ეს წირი იქნება აგრეთვე მეორადი კაუსტიკა ანარეკლის შემდეგ იმ სხივებისათვის, რომლებიც გამოდიან O წერტილიდან და აირეკლებიან C წირიდან. ამნაირადვე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ თუ C წირის თითოეული წერტილიდან შემოვხაზავთ წრეწირს, რომლის რადიუსი ამ წერტილის უძრავ წრფემდე დაშორების პროპორციულია, მაშინ ამ წრეწირთა მომვლები იქნება მეორადი კაუსტიკები იმ სხივებისათვის, რომლებიც უსასრულოდ დაშორებული მნათი წერტილისაგან გამოდიან.

201. ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ფართეულები. ვთქვათ ნებისმიერ a პარამეტრზე დამოკიდებული S ფართეულის განტოლება არის:

$$f(x, y, z, a)=0 \tag{17}$$

თუ არსებობს რაიმე E ფართეული, რომელიც ეხება თითოეულს S ფართეულს რომელიმე C წირის გასწვრივ, მაშინ ამ E ფართეულს S ფართეულთა მომვლები ეწოდება, ხოლო S და E ფართეულების თანახების C წირს — დამახასიათებელი წირი.

ამნაირად, რომ გავიგოთ, აქვს თუ არა მოცემულ S ფართეულებს მომვლები, უნდა გამოვარკვიოთ, შეიძლება თუ არა თითოეულ S ფართეულზე განვსაზღვროთ ისეთი C წირი, რომ გეომეტრიული ადგილი ყველა ასეთ წირთა, რომლებიც პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებს შეესაბამება, ეხებოდეს თითოეულ S ფართეულს შესაბამ C წირის გასწვრივ. ვთქვათ x, y, z დამახასიათებელი წირის რაიმე M წერტილის კოორდინატებია. თუ ეს წერტილი არ არის S ფართეულის განკუთრი წერტილი, მაშინ ამ ფართეულის M წერტილში მხები სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0.$$

მეორე მხრით, E ფართეულის მომვლების გასწვრივ x, y, z, a სიდიდეები იქნება იმ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილე-

ბენ მე-(17) განტოლებას, და მათ დიფერენციალებს შორის ადგილი ექნება შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial a} da = 0. \qquad (17')$$

რომ E ფართეულის მხები სიბრტყე S ფართეულის მხები სიბრტყის იგივური იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ dx, dy, dz დიფერენციალებს შორის არსებობდეს დამოკიდებულება:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

თუ ამ პირობას შევადარებთ მე-(17')-ს, მივიღებთ:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0. \qquad (18)$$

ისე, როგორც ბრტყელ წირის შემთხვევაში (§ 198), შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ, შებრუნებით, განტოლება $R(x, y, z) = 0$, რომელიც მიიღება ორი მე-(17) და მე-(18) განტოლებისაგან a პარამეტრის გამორიცხვით, წარმოადგენს ან S ფართეულთა მომვლებს, ან და ამ ფართეულთა განკუთრ წერტილების გეომეტრიულ ადგილს. დამახასიათებელი C წირი, რომელიც მე-(17) და მე-(18) განტოლებებითაა წარმოდგენილი, არის აგრეთვე S ფართეულისა ამავე ოჯახის S-ის უსასრულოდ მახლობელ ფართეულთან გადაკვეთის წირის ზღვრული მდებარეობა.

202. ორ პარამეტრზე დამოკიდებული ფართეულები. განვიხილოთ ახლა განტოლება:

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad (19)$$

რომელიც წარმოადგენს ორ a და b პარამეტრზე დამოკიდებულ S ფართეულებს. საერთოდ, არ არსებობს ისეთი ფართეული, რომელიც ეხებოდეს განსახილავი ოჯახის თითოეულ ფართეულს რაიმე წირის განგრძივ. მართლაც, თუ ჩვენ a და b-ს შორის დავამყარებთ რაიმე დამოკიდებულებას: $b = \varphi(a)$, მაშინ მე-(19) ფართეულთა ოჯახი გადაიქცევა ისეთ ფართეულთა ოჯახად, რომლებიც დამოკიდებულია უკვე მხოლოდ ერთ პარამეტრზე, და ამ ოჯახის დამახასიათებელი წირი წარმოდგენილი იქნება მე-(19) და შემდეგი განტოლებებით:

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \varphi'(a) = 0, \qquad (20)$$

სადაც b შეცვლილია a-სთან დამოკიდებულებით: $b = \varphi(a)$. ეს დამახასიათებელი დამოკიდებულია, საზოგადოდ, ნებისმიერი $\varphi(a)$ ფუნქციაზე, ასე რომ თითოეულ S ფართეულზე არსებობს დამახასიათებლის უამრავი რიცხვი; მაშასადამე, a და b-ს ცვლილების დროს ეს დამახასიათებლები არ შეადგენენ, საერთოდ, ერთ ფართეულს. ახლა ვეძებოთ, არსებობს თუ არა ისეთი E ფართეული, რომელიც ეხება თითოეულ S ფართეულს არა წირის გასწვრივ, არამედ ერთ ან რამოდენიმე წერტილში. თუ ასეთი ფართეული არსებობს, მაშინ S

ფართეულის E მომვლებთან შეხების წერტილის (x, y, z) კოორდინატები იქნება ორი ცვლადი a და b პარამეტრის ფუნქციები, სადაც ეს პარამეტრები აკმაყოფილებენ მე-(19) დამოკიდებულებას; მაშასადამე, E ფართეულზე გადაადგილებისას dx, dy, dz დიფერენციალები აკმაყოფილებენ დამოკიდებულებას:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0. \tag{21}$$

რომ E ფართეული, რომელიც წარმოადგენს (x, y, z) წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, ეხებოდეს S ფართეულს, აუცილებელია, გარდა ამისა, გვექნეს:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (21) დამოკიდებულებას, გვექნება:

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0.$$

ვინაიდან a და b არიან დამოუკიდებელი ცვლადები, ამიტომ თანახების წერტილის (x, y, z) კოორდინატები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდენ განტოლებებს:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0. \tag{22}$$

მაშასადამე, ჩვენ მივიღებთ ფართეულის მომვლების განტოლებას თუ სამ მე-(19) და (22) განტოლებიდან გამოვრიცხავთ a და b-ს პარამეტრებს. მართლაც, მოყვანილი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ ამგვარად მიღებული ფართეული ეხება S ფართეულს, თუ (x, y, z)-ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მე-(19) და (22) განტოლებებს, არ აკმაყოფილებენ ერთდროულად ტოლობებს:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

ამრიგად, მიღებული ფართეული იქნება ან S ფართეულთა მომვლები, ანდა მათი განკუთრი წერტილთა გეომეტრიული ადგილი.

ამნაირად ჩვენ გვაქვს ორი სხვადასხვა სახის მომვლები ფართეულები, იმისდამიხედვით მოვლებული ფართეულები დამოკიდებულია ერთი თუ ორი პარამეტრისაგან. მაგალითად, სფეროს ან ჰიპერბოლოიდის მხები სიბრტყე დამოკიდებულია ორ პარამეტრზე, და ის ეხება ფართეულს მხოლოდ ერთ წერტილში. პირიქით, კონუსის ან ცილინდრის მხები სიბრტყე დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლად პარამეტრზე, მაგრამ, სამაგიეროდ იგი ეხება თავის მომვლებ ფართეულს მთელი მსახველის გასწვრივ.

203. განფენადი ფართეულები. თუ გვაქვს ერთ ცვლად პარამეტრზე დამოკიდებულ სიბრტყეთა ოჯახი, მაშინ ამ ოჯახის სიბრტყეთა მომვლებ ფართეულს, განფენადი ფართეული ეწოდება. ვთქვათ

$$z=\alpha x+yf(\alpha)+\varphi(\alpha) \tag{23}$$

არის ცვლადი P სიბრტყის განტოლება, α — ცვლადი პარამეტრი, $f(\alpha)$ და $\varphi(\alpha)$ კი ამ პარამეტრის რაიმე ფუნქციები. P სიბრტყის დამახასიათებელი მიიღება (23) და შემდეგი განტოლებით:

$$x+yf'(\alpha)+\varphi'(\alpha)=0, \tag{24}$$

რომელსაც (23) განტოლების α-ს მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ. აქედან ჩანს, რომ ჩვენ შემთხვევაში დამახასიათებელი არის რაიმე G წრფე; მაშასადამე, განფენადი ფართეული წრფოვანი ფართეულია. დავამტკიცოთ, რომ ყველა G წრფე ეხება რომელიმე ორმაგი სიმრუდის წირს. ამისათვის გავაწარმოოთ (24) α-ს მიმართ; მიღებული განტოლება:

$$yf''(\alpha)+\varphi''(\alpha)=0 \tag{25}$$

განსაზღვრავს G დამახასიათებელზე რაიმე M წერტილს. როცა α პარამეტრი იცვლება, მაშინ M წერტილთა ადგილი იქნება ორმაგი სიმრუდის რომელიმე Γ წირი, რომლის მხებიც არის G წრფე. მართლაც, Γ წირი მიიღება სამი (23), (24) და (25) განტოლებით, რომლებიდანაც ჩვენ შეგვიძლია x, y, z კოორდინატები α პარამეტრის ფუნქციებით გამოვსახოთ. თუ ამ განტოლებებიდან პირველ ორს გავაწარმოებთ და მხედველობაში მივიღებთ უკანასკნელს, გვექნება:

$$dz=\alpha\, dx+f(\alpha)\, dy, \quad dx+f'(\alpha)\, dy=0. \tag{26}$$

მაგრამ ამავე (26) განტოლებებს ჩვენ მივიღებთ G დამახასიათებლისთვისაც, თუ გავაწარმოებთ (23) და (24) განტოლებებს, მივიღებთ რა α-ს მუდმივად. აქედან გამომდინარეობს, რომ Γ წირის მხები არის G დამახასიათებლის პარალელური; გარდა ამისა, ორივე ამ წრფეს აქვს საერთო M წერტილი; მაშასადამე, ისინი არიან იგივური.

ზემოხსენებულიდან გამომდინარეობს, რომ *ყოველი განფენადი ფართეული შეიძლება განსაზღვრული იქნეს როგორც რაიმე ორმაგი სიმრუდის Γ წირის მხებათ გეომეტრიული ადგილი.* გამონაკლისის სახით, ეს Γ წირი შეიძლება გადაიქცეს წერტილად მდებარე სასრულო ან უსასრულო მანძილზე; მაშინ განფენადი ფართეული გადაიქცევა კონუსად ან ცილინდრად. ეს მოხდება თუ $f''(\alpha)=0$.

პირიქით, ყოველი ორმაგი სიმრუდის Γ წირის მხებთა გეომეტრიული ადგილი წარმოადგენს განფენად ფართეულს. ვთქვათ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

Γ წირის განტოლებებია. ამ წირის მიმხები სიბრტყე (იხ. ქვემოთ § 214) არის:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{27}$$

სადაც A, B და C კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ დამოკიდებულებას:

$$A\, dx+B\, dy+C\, dz=0, \quad A\, d^2x+B\, d^2y+C\, d^2z=0, \tag{28}$$

რომელნიც დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ t პარამეტრზე. დავამტკიცოთ, რომ ამ ფართეულის დამახასიათებელი არის Γ წირის მხები წრფე. ეს დამახასიათებელი არის მიმხები სიბრტყის თანაკვეთა შემდეგი სიბრტყესთან.

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0,$$

რომელიც აგრეთვე გადის $(x,\ y,\ z)$ წერტილზე. რომ დავამტკიცოთ, რომ ეს წირი ემთხვევა Γ წირის მხებ წრფეს, საკმარისია უჩვენოთ, რომ:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$
$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0.$$

პირველი ამ ტოლობებიდან არის ერთ-ერთი (28) განტოლებებიდან, რომელიც განსაზღვრავს A, B და C კოეფიციენტებს; მეორეს კი ჩვენ მივიღებთ, თუ პირველს გავაწარმოებთ და მხედველობაში მივიღებთ (28) ფორმულებიდან მეორეს:

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

ფართეულების მიღების ეს ხერხი იძლევა საკმაოდ ნათელ წარმოდგენას ამ ფართეულთა ფორმაზე. ვთქვათ AB ორმაგი სიმრუდის წირის რკალია. გავავლოთ AB რკალის ყოველ M წერტილზე მხები და განვიხილოთ მხების ორი ნაწილიდან მხოლოდ ის, რომელიც აითვლება შეხების წერტილიდან და რომელიც ეთანადება მხებზე გარკვეულ მიმართულებას, მაგალითად A-დან B-მდე. ამ ნახევარწრფეთა გეომეტრიული ადგილი არის ფართეულის ნაწილი ან S_1 კალთა, რომელიც შემოსაზღვრულია AB რკალით და ორი მხებით A და B წერტილებზე, რომელნიც ერთი მხრით მიდიან უსასრულეთში. თუ ჩვენ ავიღებთ ამნაირადვე მხებთა დანარჩენ ნაწილებს, მაშინ მივიღებთ მეორე S_2 კალთას, რომელიც შეერთებულია S_1-თან AB რკალის გასწვრივ. დამკვირვებლისათვის, რომელიც წირზე იმყოფება, განფენადი ფართეულის ორივე კალთა გამოჩნდება ნაწილობრივ ერთი მეორეთი დაფარული. აშკარაა, რომ ყოველი სიბრტყე, გამავალი AB რკალის რომელიმე O წერტილზე, გადაკვეთს, განფენადი ფართეულის ორივე S_1 და S_2 კალთას წირის ორ შტოზედ, რომლებიც ერთდებიან O წერტილში და აქ ჰქმნიან უკუქცევის წერტილს. ამის გამო ორმაგი სიმრუდის Γ წირს განფენადი ფართეულის უ კ უ ქ ც ე ვ ი ს წ ი ბ ო ეწოდება.

ამ თვისებაში აგრეთვე ადვილად დავრწმუნდებით გამოთვლით. მივიღოთ O წერტილი კოორდინატთა დასაბამად, გამკვეთი სიბრტყე $-xOy$ სიბრტყედ, მხები წრფე $-Oz$ ღერძად და მიმხები სიბრტყე $-xOz$ სიბრტყედ. თუ z-ს მივიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადად, მაშინ Γ წირის წერტილის x, y კოორდინატების დაშლას ექნება ასეთი სახე:

$$x=a_2z^2+x_3z^3+\cdots,\quad y=b_3z^3+\cdots,$$

ვინაიდან კოორდინატთა სათავეზე უნდა იყოს:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=\frac{d^2y}{dy^2}=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ კოორდინატთა სათავის მახლობელ წერტილ-Γ წირის მხები წრფის განტოლება იქნება:

$$\frac{X-a_2z^2-a_3z^3-\dots}{2a_2z+\dots}=\frac{Y-b_3z^3-\dots}{3b_3z^2+\dots}=Z-z.$$

თუ დავუშვებთ $Z=0$, მივიღებთ მხები წრფის გამკვეთ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის X, Y კოორდინატებს. ამ კოორდინატების გამწკრივება იწყება შესაბამისად z^2 და z^3 წევრებიდან. მაშასადამე, Γ მრუდს კოორდინატთა სათავეზე აქვს უკუქცევის წერტილი.

მაგალითი. მივიღოთ უკუქცევის წიბოდ მესამე რიგის ორმაგი სიმრუდის წირი: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. ამ წირის მიმხები სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$t^3-3t^2X+3tY-Z=0. \qquad (A)$$

მოძვლები ფართეულების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვენ მივიღებთ განფენადი ფართეულის განტოლებას, თუ გამოვთქვამთ, რომ (27) განტოლებას, რომელიც განხილულია როგორც განტოლება t-ს მიმართ, აქვს ორჯერადი ფესვი, ე. ი. თუ გამოვრიცხავთ t-ს შემდეგი ორი განტოლებიდან:

$$\left.\begin{aligned} t^2-2tX+Y=0 \\ Xt^2-2tY+Z=0.\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

გამორიცხვის შემდეგ გვექნება:

$$(XY-Z)^2-4(X^2-Y)(Y^2-XZ)=0:$$

ამნაირად, საძიებელი განფენადი ფართეული არის მეოთხე რიგის ფართეული.

შევნიშნოთ, რომ (E) განტოლება მოცემული მესამე რიგის წირის მხებს წარმოადგენს.

204. განფენადი ფართეულების დიფერენციალური განტოლება. ვთქვათ $z=F(x,y)$ არის განფენადი ფართეულის განტოლება. $F(x,y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $s^2-rt=0$ განტოლებას, სადაც r, s, t წარმოადგენენ, ჩვეულებრივად, $F(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებს (§ 26).

მართლაც, ამ ფართეულის მხები სიბრტყე, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებით:

$$Z=pX+qY+z-px-qy,$$

უნდა იყოს დამოკიდებული მხოლოდ ერთ ცვლად პარამეტრზე; მაშასადამე, სამი: p, q, $z-px-qy$ სიდიდიდან ნებისმიერია მხოლოდ ერთი, და, კერძოდ, p და q სიდიდეთა შორის უნდა არსებობდეს რაიმე დამოკიდებულება: $f(p,q)=0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ იაკობის დეტერმინანტი:

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)}=rt-s^2$$

უნდა იყოს იგივურად ნულის ტოლი.

პირიქით, თუ გვაქვს $rt-s^2=0$, მაშინ p და q შებმულია ერთი დამოკიდებულებით მაინც. თუ ასეთი დამოკიდებულება იქნება ორი, მაშინ p და q მუდმივებია: $p=a$, $q=b$, და $F(y,x)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე: $ax+bx+c$; მაშასადამე, საძიებელი ფართეული წარმოადგენს სიბრტყეს. თუ p და q-ს შორის არის

მხოლოდ ერთი დამოკიდებულება, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე: $q=\varphi(p)$, სადაც p არ არის მუდმივი. მაგრამ ჩვენ გვაქვს აგრეთვე:

$$\frac{D(z-px-qy, p)}{D(x, y)}=y(rt-s^2),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ თუ $rt-s^2=0$, მაშინ $z-px-qy$ აგრეთვე არის რაიმე $\psi(p)$ ფუნქცია p-სი. ამნაირად უცნობი $z=F(x,y)$ ფუნქცია და მისი კერძო p და q წარმოებულები აკმაყოფილებენ ორ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$q=\varphi(p), \quad z-px-\varphi(p)y=\psi(p).$$

მეორე მათგანს თუ გავაწარმოებთ x და y-ით, მივიღებთ:

$$[x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad [x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

რადგან p არ არის მუდმივი, ამიტომ ადგილი უნდა ექნეს:

$$x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

მაშასადამე, ჩვენ მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას, თუ გამოვრიცხავთ p-ს შემდეგი ტოლობებიდან:

$$z=px+y\varphi(p)+\psi(p), \quad x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0$$

მაგრამ ეს გამორიცხვა იძლევა იმ სიბრტყის მომვლებ ფართეულს, რომელიც მიიღება წინა პირველი განტოლებებიდან, თუ p-ს განვიხილავთ როგორც ცვლად პარამეტრს.

205. ორმაგი სიმრუდის წირთა ოჯახის მომვლები. ერთ ცვლად პარამეტრზე დამოკიდებულ ორმაგი სიმრუდის წირთა ოჯახს, საზოგადოდ არ აქვს მომვლები. ჯერ განვიხილოთ წრფეთა ოჯახი:

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \tag{29}$$

სადაც a, b, p და q მოცემული ფუნქციებია ცვლადი α პარამეტრის. გამოვარკვიოთ თუ რა პირობებში შეეხება ამ ოჯახის თითოეული წრფე რაიმე ორმაგი სიმრუდის Γ წირს. ვთქვათ $z=\varphi(\alpha)$ არის M წერტილის z კოორდინატი, რომელშიც განსახილველი ოჯახის D წრფე ეხება Γ მომვლებს. ეს წირი წარმოდგენილი იქნება (29) განტოლებებით და $z=\varphi(\alpha)$ განტოლებით, და ამ წირის მხების მიმართულების კოეფიციენტებს ექნებათ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\varphi'(\alpha)+a'\varphi(\alpha)+p', \quad \frac{dy}{d\alpha}=b\varphi'(\alpha)+b'\varphi(\alpha)+q', \quad \frac{dz}{d\alpha}=\varphi'(\alpha),$$

სადაც a', b', p' და q' არიან a, b, p და q-სი წარმოებულები α-ს მიმართ. იმისათვის, რომ ამ მხებად იყოს თვით D წრფე, აუცილებელია და საკმარისი, ადგილი ექნეს:

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\frac{dz}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha}=b\frac{dz}{d\alpha},$$

ე. ი.

$$a'\varphi(\alpha)+p'=0, \qquad b'\varphi(\alpha)+q'=0.$$

ამგვარად უცნობი $\varphi(\alpha)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ორ სხვადასხვა დამოკიდებულებას; მაშასადამე, წრფეთა განსახილავ ოჯახს ექნება მომვლები მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ეს დამოკიდებულებები თავსებადია, ე. ი. თუ

$$a'q'-b'p'=0.$$

როცა ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ ჩვენ მივიღებთ მომვლებს, თუ ავიღებთ:

$$\varphi(\alpha)=-\frac{p'}{a'}=-\frac{a'}{b'}.$$

ადვილად შეიძლება ამ მსჯელობის განზოგადოება. განვიხილოთ ორმაგი სიმრუდის წირთა C ოჯახი, რომელიც დამოკიდებულია ცვლად α პარამეტრზე; ვთქვათ

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \quad \Phi(x, y, z, \alpha)=0 \tag{30}$$

არის ამ ოჯახის განტოლებები. თუ C წირები ეხება რაიმე Γ წირს, მაშინ (x, y, z) კოორდინატები M წერტილისა, რომელშიც Γ მომვლები ეხება C ოჯახის ერთ-ერთ წირს, რომელიც ეთანადება α პარამეტრის რაიმე გარკვეულ მნიშვნელობას, იქნება α-ს ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (30) ორ განტოლებას, და გარდა ამისა, კიდევ ორ სხვა განტოლებას. ვთქვათ dx, dy და dz არიან M წერტილის C წირის განგრძივ გადაადგილების შესაბამი დიფერენციალები; რადგანაც C წირზე α პარამეტრი რჩება მუდმივი, ამიტომ ამ დიფერენციალებს შორის ადგილი ექნება შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

მეორე მხრით, ვთქვათ δx, δy, δz და $\delta\alpha$ არიან M წერტილის Γ წირის განგრძივ გადაადგილების შესაბამი დიფერენციალები. ეს დიფერენციალები აკმაყოფილებენ შემდეგ ტოლობებს:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\delta\alpha=0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z+\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\delta\alpha=0,\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ C და Γ წირები ეხებოდენ ერთმანეთს, იქნება:

$$\frac{dx}{\delta x}=\frac{dy}{\delta y}=\frac{dz}{\delta z};$$

აქედან თუ მივიღებთ მხედველობაში (31) და (32) ტოლობებს, გვექნება:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}\delta\alpha=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\delta\alpha=0.$$

მაშასადამე, თანახების წერტილის (x, y, z) კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდენ განტოლებებს:

$$F=0, \ \Phi=0, \ \frac{\partial F}{\partial \alpha}=0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=0. \tag{33}$$

ამგვარად იმისათვის, რომ C წირებს ჰქონდეთ მომვლები, აუცილებელია, რომ α პარამეტრის ყოველგვარი მნიშვნელობისათვის ოთხი წინა განტოლება იყოს თავსებადი. შებრუნებით, თუ (33) განტოლებებს α-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის აქვთ x, y, z-ის მიმართ საერთო ამოხსნა, მაშინ ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ (x, y, z) წერტილით მოხაზული Γ წირი ეხება C წირს თითოეულ შესაბამ წერტილში. მასთან, იგულისხმება, რომ წერტილი (x, y, z) კოორდინატებით არ არის C წირის განკუთრი წერტილი, ე. ი., რომ dx, dy და dz დიფერენციალთა ფარდობები მართლაც განისაზღვრებიან (31) განტოლებებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა I. თუ C წირები ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ $F(x, y, z, \alpha)=0$ ფართეულთა ოჯახის დამახასიათებლებს წარმოადგენენ, მაშინ (33) ოთხი განტოლება დაიყვანება მხოლოდ სამ სხვადასხვა განტოლებამდე:

$$F=0, \ \frac{\partial F}{\partial \alpha}=0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=0. \tag{34}$$

და,მაშასადამე, ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ფართეულთა ოჯახის დამახასიათებლებს მუდამ აქვთ მომვლები, რომელიც წარმოდგენილია (34) განტოლებებით. ეს დებულება არის იმ თეორემის განზოგადოება, რომელიც დამტკიცებული იყო განფენადი ფართეულების შემქნელისათვის (§ 203).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა II. (33) სისტემის პირველი და მესამე განტოლებები წარმოადგენენ ერთპარამეტრიან $F(x, y, z, \alpha)=0$ ფართეულთა ოჯახის დამახასიათებელს. სრულიად ასევე მეორე და მეოთხე განტოლებები წარმოადგენენ $\Phi(x, y, z, \alpha)=0$ ფართეულის დამახასიათებელს. თუ C წირებს აქვთ მომვლები, მაშინ C წირის მომვლებთან თანახების ყოველი წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის ორ დამახასიათებელს. C წირთა მომვლები შეადგენს ორივე ფართეულის მომვლებთა თანაკვეთთა გეომეტრიული ადგილის ნაწილს.

ცვლადი წრფის განტოლება ზოგჯერ წარმოიდგინება ასე:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{35}$$

სადაც x_0, y_0, z_0, a, b, c ცვლადი α პარამეტრის ფუნქციებია. ადვილად ვიპოვით პირდაპირი გზით, თუ რა პირობებში ექნება ამ წრფეს მომვლები. ხემო ფარდობათა საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ l-ით; ამ წრფის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$x=x_0+la, \quad y=y_0+lb, \quad z=z_0+lc.$$

ვნახოთ, ხომ არ შეიძლება l-ად მივიღოთ α-ს ისეთი ფუნქცია, რომ მოძრავი (35) წრფე რჩებოდეს (x, y, z) წერტილის მიერ შემოხაზული წირის მხებად ყოველ წერტილში. ამისათვის შესრულებული უნდა იყოს:

$$\frac{x_0' + a'l}{a} = \frac{y_0' + b'l}{b} = \frac{z_0' + c'l}{c}. \tag{36}$$

თუ m-ით აღვნიშნავთ (36) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას და მიღებული სამი წრფივი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ l და m-ს, მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0. \tag{37}$$

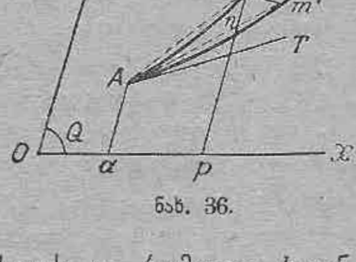
როცა (37) პირობა შესრულებულია, მაშინ (36) განტოლებები განსაზღვრავენ l-ს, და მაშასადამე, მომვლებსაც.

II. ორი წირის, წირისა და ფართეულის თანახება.

206. ბრტყელი წირების თანახება. ვთქვათ C და C' ორი ბრტყელი წირია, რომლებიც ეხებიან ერთმანეთს A წერტილში. ორივე წირის წერტილთა შორის A წერტილის მახლობლობაში დავამყაროთ ისეთი თანადობა, რომ როცა C წირის m წერტილი გადაადგილებით მივა A-ში, მასთან ერთად მივიდეს A-ში მისი შესაბამი C' წირის m' წერტილიც. მივიღოთ მთავარ უსასრულო მცირედ Am რკალი, ან მისი ტოლფასი Am ქორდა, და განვსაზღვროთ ჯერ, თუ როგორი თანადობა უნდა დავამყაროთ m და m' წერტილებს შორის, რომ mm' მონაკვეთის რიგი Am-ის მიმართ იყოს რაც შეიძლება მაღალი [1]. ავიღოთ მართკუთხა ან ბლაგვკუთხა კოორდინატთა სისტემა, ისე, რომ Oy ღერძი არ იყოს საერთო AT მხების პარალელური.

ვთქვათ

$$y = f(x), \qquad (c)$$
$$Y = F(x) \qquad (c')$$



ნახ. 36.

არის ორივე წირის განტოლებები, ხოლო (x_0, y_0) კი A წერტილის კოორდინატები. m წერტილის კოორდინატები იქნება: x_0+h და $f(x_0+h)$, ხოლო m'-ის: x_0+k და $F(x_0+k)$, მასთან k არის h-ის რაიმე ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრავს ორივე წირის წერტილთა თანადობის ხასიათს და, რომელიც h-თან ერთად მიისწრაფის ნულისაკენ. შევნიშნავთ, რომ Oy-ის ასეთი შერჩევის დროს ჩვენ

---

[1] ცხადია, რომ ეს რიგი შეგვიძლია მივიღოთ, თუ m წერტილს შევუსაბამებთ C' წირის ისეთ m' წერტილს, რომელიც m-საგან მინიმალური მანძილით არის დაშორებული. მაგრამ ჩვენ ვნახავთ, რომ თანადობის ეს ხერხი შეიძლება შეიცვალოს უამრავი სხვა ხერხით.

შეგვიძლია შევცვალოთ Am მთავარი უსასრულოდ მცირე $h=ap$-თი (ნახ. 36), ვინაიდან m წერტილის A წერტილთან უსასრულოდ მიახლოვებისას $\frac{ap}{Am}$ ფარდობა მიისწრაფის რაიმე ნულისაგან განსხვავებულ სასრული ზღვარისაკენ.

დავუშვათ, რომ როცა m და m' წერტილებს შორის გარკვეული თანადობის დროს mm' მონაკვეთი იქნება $(r+1)$ რიგის უსასრულო მცირე h-ის მიმართ, მაშინ $\overline{mm'}^2$ იქნება $(2r+2)$ რიგის უსასრულოდ მცირე. თუ ღერძებს შორის კუთხეს ავღნიშნავთ θ-თ, მივიღებთ:

$$\overline{mm'}^2=[F(x_0+k)-f(x_0+h)+(k-h)\cos\theta]^2+(k-h)^2\sin^2\theta;$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თითოეული $k-h$ და $F(x_0+k)-f(x_0+h)$ სხვაობებიდან უნდა იყოს $(r+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე მაინც, ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს:

$$k=h+\alpha h^{r+1},\quad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{r+1},$$

მასთან α და β არის h-ის ფუნქციები, რომლებიც რჩებიან სასრული, როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ. უკანასკნელი ფორმულა ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასეთი სახით:

$$F(x_0+h+\alpha h^{r+1})-f(x_0+h)=\beta h^{r+1}.$$

თუ გავშლით $F(x_0+h+\alpha h^{r+1})$ გამოსახვას α-ს ხარისხებად, მაშინ α-ზე დამოკიდებული ნაწილი იქნება $(r+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე მაინც. აქედან გამომდინარეობს, რომ სხვაობა:

$$\Delta=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

არის უსასრულოდ მცირე $(r+1)$ რიგის მაინც, მაგრამ მისი რიგი შეიძლება უფრო მაღალიც იყოს. ეს Δ სხვაობა წარმოადგენს C და C' წირების ისეთ ორ წერტილს შორის მანძილს, რომელნიც Oy ღერძის პარალელურ წრფეზე მდებარეობენ. ვინაიდან m' წერტილის n-ით შეცვლით შეიძლება მხოლოდ გავზარდოთ mm' მონაკვეთის რიგი, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ ორივე წირის შესაბამ წერტილთა შორის მანძილის რიგი იქნება ყველაზე უფრო მაღალი იმ შემთხვევაში, როცა შესაბამი m და m' წერტილები Oy ღერძის პარალელურ წრფეზე მდებარეობენ. თუ ეს რიგი $r+1$-ის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ ორივე წირს A წერტილში n-ური რიგის თანახება აქვს.

შენიშვნა. ამ განსაზღვრის მიხედვით შეიძლება შევნიშნოთ შემდეგი. ცხადია, რომ Oy ღერძად შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერი წრფე, რომელიც არ იქნება საერთო AT მხების პარალელური. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორი წირის თანახების რიგის გამოთვლის დროს შეიძლება შესაბამ წერტილებად ჩავთვალოთ ორივე წირის ის წერტილები, რომლებიც მდებარეობენ ერთ, ნებისმიერ D წრფის პარალელურ წრფეზე, საჭიროა მხოლოდ, რომ ამ D წრფის მიმართულება განსხვავდებოდეს AT მხების მიმართულებისაგან. წინა დამტკიცებიდან ჩანს, რომ მიღებული რიგი არ არის დამოკიდებული D წრფის მიმართულებაზე. ამ უკანასკნელში ადვილად დავრწმუნდებით უშუალოდ. მართლაც, დავუშვათ, რომ C წირის m წერტილზე გავ-

ლებულია mm' და mn წრფეები (ნახ. 36) ორი გარკვეული მიმართულებით, რომელნიც არ არის AT-ს პარალელური. $mm'n$-სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$\frac{mm'}{mn}=\frac{\sin\angle mnm'}{\sin\angle mm'n}.$$

როცა m წერტილი უახლოვდება A-ს, მაშინ mnm', $mm'n$ კუთხეებს აქვთ 0 და π-საგან განსხვავებული ზღვრები, ვინაიდან $m'n$ ქორდას ზღვრად აქვს AT მხები; მაშასადამე, mm' მონაკვეთის რიგი იგივეა რაც mn-ის. აქედან აგრეთვე გამოდის, რომ როგორიც არ უნდა იყოს m' და m წერტილებს შორის თანადობა, mm' არ შეიძლება იყოს უსასრულოდ მცირე უფრო მაღალი რიგის, ვიდრე mn უსასრულოდ მცირის რიგი, ვინაიდან $\sin\angle mnm'$ მრიცხველს აქვს ნულისაგან განსხვავებული სასრული ზღვარი.

მთავარ უსასრულო მცირედ ჩვენ ვღებულობდით Am რკალს ან Am ქორდას; მაგრამ ვენ მივიღებთ იმავე შედეგს, თუ მთავარ უსასრულო მცირედ ავიღებთ C' წირის An რკალს, რადგან Am და An ქორდები ერთი და იგივე რიგის უსასრულო მცირეებია.

თუ C და C' წირებს r-ური რიგის თანახება აქვთ, მაშინ m, m' წერტილთა შორის შეიძლება დავამყაროთ უამრავი ხერხით თანადობა ისე, რომ mm' იყოს $(r+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე; ამისათვის საჭიროა მხოლოდ ავიღოთ: $k=h+\alpha h^{s+1}$, სადაც $s\geqslant r$, და α არის h-ის ფუნქცია, რომელიც ინარჩუნებს სასრულო მნიშვნელობას როცა $h=0$. თუ კი $s<r$, მაშინ mm' იქნება მხოლოდ $(s+1)$ რიგის.

207. თანახების რიგი. როგორც წინა ნათქვამიდან ჩანს იმისათვის, რომ მივიღოთ C და C' წირების თანახების რიგი, უნდა გამოვთვალოთ h-ის მიმართ რიგი შემდეგი სხვაობის:

$$Y-y=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

ვინაიდან წირები ეხებიან ერთმანეთს A წერტილში, ამიტომ გვაქვს:

$$F(x_0)=f(x_0), \qquad F'(x_0)=f'(x_0);$$

მაგრამ შეიძლება მოხდეს, რომ როცა $x=x_0$ ერთმანეთის ტოლია აგრეთვე ორივე ფუნქციის უმაღლესი რიგის ზოგიერთი წარმოებულებიც. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. დავუშვათ, რომ გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} &F(x_0)=f(x_0), && F'(x_0)=f'(x_0),\\ &F''(x_0)=f''(x_0)\ldots, && F^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

და ვთქვათ შემდეგი უახლოესი წარმოებულები: $F^{(n+1)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0)$ არ არის თანატოლი. $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებზე ტეილორის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$Y=F(x_0)+\frac{h}{1}F'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(x_0)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon],$$
$$y=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon'],$$

სადაც ε, ε' უსასრულოდ მცირეებია; გამოკლება გვაძლევს:

$$Y-y=\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left[F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon-\varepsilon'\right]. \tag{39}$$

ამნაირად ორივე წირის თანახების რიგი უდრის $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქციების იმ უმაღლეს წარმოებულთა რიგს, რომლებიც ყველა წინა წარმოებულთან ერთად $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის წყვილ-წყვილად არიან თანატოლი.

(38) პირობებიდან, რომლებიც ლაგრანჟის მიერ იყო მოცემული, ჩანს აგრეთვე, რომ $x=x_0$ არის $F(x)=f(x)$ განტოლების $(n+1)$ რიგის ჯერადი ფესვი. მაგრამ ამ განტოლების ფესვები განსაზღვრავენ ორივე C და C' წირების საერთო წერტილების აბსცისებს; მაშასადამე, შეიძლება ითქვას, რომ წირებს, რომლებსაც n რიგის თანახება აქვს, მათი გადაკვეთის $n+1$ წერტილი ერთდებიან ერთ წერტილში.

(39) ფორმულიდან ჩანს, რომ $Y-y$ სხვაობა იცვლის ნიშანს h-თან ერთად როცა n ლუწია, ხოლო არ იცვლის ნიშანს როცა n კენტია. ამგვარად წირები, რომლებსაც თანახების კენტი რიგი აქვთ, არ გადაჯვარედინდებიან თანახების წერტილში, ხოლო კენტი რიგის თანახების მქონე წირები თანახების წერტილში გადაჯვარედინდებიან. ადვილად ვნახავთ, თუ რატომ არის ეს ასე. განვიხილოთ, მაგალითად, C' წირი, რომელიც C წირს გადაკვეთს A წერტილის მახლობელ სამ წერტილში; თუ ჩვენ უწყვეტად ვცვლით C' წირს ისე, რომ ყველა სამი გადაკვეთის წერტილი დაემთხვევა A წერტილს, მაშინ C' წირს თავის ზღვარულ მდებარეობაში C წირთან ექნება მეორე რიგის თანახება და ნახაზის აგებით ადვილად ვნახავთ, რომ ორივე წირი გადაჯვარედინდება A წერტილში. ცხადია, რომ ასეთივე მსჯელობა გამოიყენება ყველა დანარჩენ შემთხვევაშიაც.

თუ ორივე წირის განტოლება არ არის ამოხსნილი y და Y-ის მიმართ, როგორც ეს ზოგად შემთხვევაში იყო, მაშინ ვისარგებლებთ რა უცხადო ფუნქციის წარმოებულთა გამოთვლის წესებით, შეიძლება შევადგინოთ აუცილებელი პირობები, რომლის დროსაც ორ წირს ექნება n-ური რიგის თანახება; ამნაირად ეს ამოცანა არ წარმოადგენს არავითარ განსაკუთრებულ სიძნელეებს. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ რამოდენიმე კერძო შემთხვევას, რომლებიც უფრო ხშირად გვხვდებიან. დავუშვათ, რომ ორივე მოცემული წირის წერტილების კოორდინატები გამოსახულია ცვლადი პარამეტრის ფუნქციებში:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= \varphi(t), \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= f(u), \\ Y &= \psi(u), \end{aligned}\right\} \tag{C'}$$

სადაც x და X არის t და u-ს ერთნაირი ფუნქციები. ვთქვათ რაიმე კერძო t_0 მნიშვნელობისათვის ჩვენ გვაქვს:

$$\psi(t_0)=\varphi(t_0), \qquad \psi'(t_0)=\varphi'(t_0),$$

ასე, რომ ორივე წირი ეხება ერთიმეორეს A წერტილში, რომლის კოორდინატებია: $f(t_0)$, $\varphi(t_0)$. ვთქვათ, რომ აქ $f'(t_0)$ არ უდრის ნულს, მაშინ ორი წირის საერთო მხები A წერტილში არ იქნება Oy-ის პარალელური, და ჩვენ მივიღებთ ორივე წირის წერტილებს, რომელთაც ერთიდაიგივე აბსცისი აქვთ, თუ დავუშვებთ რომ $u=t$. მეორე მხრით, ვინაიდან $x-x_0$ სხვაობა არის $t-t_0$-ს მიმართ პირველი რიგის, ამიტომ წინამავლის მსგავსად ამოცანა დაიყვანება $\psi(t)-\varphi(t)$ სხვაობის სიმცირის რიგის გამოთვლაზე $t-t_0$-ის მიმართ. მაშასადამე, რომ C და C' წირებს ჰქონდეთ თანახება არა ნაკლები n-ური რიგისა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ გვექნეს:

$$\psi(t_0)=\varphi(t_0), \quad \psi'(t_0)=\varphi'(t_0), \ldots, \psi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0); \tag{40}$$

თუ, ამასთან $\psi^{(n+1)}(t_0)$ და $\varphi^{(n+1)}(t_0)$ წარმოებულები არ არიან ურთიერთ ტოლნი მაშინ თანახება სწორედ n-ური რიგის იქნება.

განვიხილოთ კიდევ ის შემთხვევა, როცა C წირი წარმოდგენილია ორი განტოლებით:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= \varphi(t), \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

მაშინ როცა C' მოცემულია $F(x,y)=0$ განტოლებით. ეს შემთხვევა შეიძლება დავიყვანოთ წინა შემთხვევაზე. შევცვალოთ $F(x,y)$-ში x ცვლადი $f(t)$-ით; ვთქვათ $y=\psi(t)$ არის უცხადო ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$F[f(t), \quad \psi(t)]=0. \tag{42}$$

როგორც ჩანს, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ C' წირი წარმოდგენილია ორი განტოლების სისტემით:

$$x=f(t), \quad y=\psi(t). \tag{43}$$

რომ C და C' წირებს პარამეტრის t_0 მნიშვნელობის შესაბამ A წერტილში ჰქონდეს n-ური რიგის თანახება, აუცილებელია, რომ შესრულებული იყოს ზემოთ მიღებული მე-(40) განტოლება. მაგრამ $\psi(t)$ უცხადო ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულები მიიღება შემდეგი განტოლებებიდან:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} f'(t)+\frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t)=0, \\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[f'(t)]^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'(t)\psi'(t)+ \\ &\qquad +\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[\psi'(t)]^2+\frac{\partial F}{\partial x} f''(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\psi''(t)=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial^n F}{\partial x^n}[f'(t)]^n+\cdots\cdots+\frac{\partial F}{\partial y}\psi^{(n)}(t)=0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

თუ ამ ფორმულებში დავუშვებთ: $t=t_0$, $x=f\ (t_0)$, $\psi(t_0)=\varphi(t_0)$, $\psi'\ (t_0)=\varphi'\ (t_0)\ldots,$ $\psi^{(n)}\ (t_0)=\varphi^{(n)}(t_0)$, ჩვენ გვექნება აუცილებელი პირობები იმისა, რომ C და C' წირებს ექნეს n-ური რიგის თანახება. ეს პირობები შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

დავუშვათ:

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t), \varphi(t)].$$

რომ მოცემულ წირებს $t=t_0$ წერტილში ჰქონდეთ თანახება არა ნაკლები n-ური რიგის, აუცილებელია და საკმარისი, შესრულებული იყოს:

$$\mathfrak{F}(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0)=0, \ldots, \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0. \tag{45}$$

$\mathfrak{F}(t_0)=0$ განტოლების ფესვები იქნება ორივე წირთა თანაკვეთის წერტილების შესაბამი t პარამეტრის მნიშვნელობები. ამიტომ წინა (45) პირობები გვიჩვენებს, რომ $t=t_0$ მნიშვნელობა $\mathfrak{F}(t_0)=0$ განტოლების $(n+1)$ ჯერადი ფესვია, ე. ი. რომ განსახილავი წირთა გადაკვეთის $n+1$ წერტილი თავს იყრის ერთ წერტილში.

208. მიმხები წირები. თუ მოცემულია რაიმე გარკვეული C წირი და მეორე $n+1$: $a, b, c, \ldots, l$ პარამეტრზე დამოკიდებული C' წირი, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგი განტოლებით:

$$F(x,\ y,\ a,\ b,\ c, \ldots l)=0, \tag{46}$$

აშინ, საზოგადოდ, შეიძლება შევარჩიოთ ამ $n+1$ პარამეტრის მნიშვნელობები ისე, რომ C წირის წინასწარ მონაცემ რაიმე წერტილში C' წირს ექნეს C წირთან n-ური რიგის თანახება. ვთქვათ $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ არის C წირის განტოლება. რომ C და C' წირებს $t=t_0$ წერტილში ჰქონდეთ n-ური რიგის თანახება, შესრულებული უნდა იყოს (45) პირობები, სადაც

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t), \varphi(t),\ a,\ b,\ c, \ldots,\ l].$$

ოცა მოცემულია პარამეტრის t_0 მნიშვნელობა, მაშინ (45) $n+1$ განტოლებიდან შეიძლება განვსაზღვროთ $n+1$ პარამეტრის: $a, b, c, \ldots, l$ მნიშვნელობანი. ამგვარად მიღებულ C' წირს C წირის მ ი მ ხ ე ბ ი წირი ეწოდება.

გამოვიყენოთ ეს თეორია მარტივ წირებზე. წრფის განტოლება: $y=ax+b$ დამოკიდებულია ორ a და b პარამეტრზე; მაშასადამე, მიმხებ წრფეს მოცემულ C წირთან, საერთოდ, პირველი რიგის თანახება აქვს. თუ $y=f(x)$ არის C წირის განტოლება, მაშინ a და b პარამეტრებმა უნდა დააკმაყოფილონ განტოლებები:

$$f(x_0)=ax_0+b, \quad f'(x_0)=a;$$

a და b მიღებულ მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ წრფის განტოლებაში, მივიღებთ მხების განტოლებას, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო. წრეწირის განტოლება:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \tag{47}$$

დამოკიდებულია სამ a, b, R პარამეტრზე; მაშასადამე, მიმხებ წრეწირს აქვს, საზოგადოდ, მეორე რიგის თანახება. ვთქვათ $y=f(x)$ არის მოცემული წირის განტოლება; a, b, R-ის მნიშვნელობებს ჩვენ მივიღებთ იმ პირობებიდან, რომლებიც გამოსახავენ, რომ წრეწირი ამ წირს სამ შეთავსებულ წერტილში ხვდება. ეს პირობები (47) განტოლებასთან ერთად იძლევა კიდევ ორ განტოლებას:

$$x-a+(y-b)y'=0,\quad 1+y'^2+(y-b)y''=0. \tag{48}$$

(48) განტოლებებიდან მიღებული a და b-ს მნიშვნელობები სიმრუდის ცენტრის კოორდინატების იგივურია; ამნაირად მიმხები წრეწირი ამასთანავე არის სიმრუდის წრეწირიც. ვინაიდან თანახება იქნება მეორე რიგის, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ ბრტყელი წირის სიმრუდის წრეწირს თანახების წერტილში გადაკვეთს.

ყველა ეს შედეგი შეიძლებოდა გაგვეთვალისწინებია. მართლაც, რადგანაც სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები დამოკიდებული არიან მხოლოდ x, y, y' y'' კოორდინატებზე, ამიტომ ორ წირს, რომელთაც მეორე რიგის თანახება აქვთ, აგრეთვე საერთო სიმრუდის ცენტრიც ექნებათ. მაგრამ თანამხები წრის სიმრუდის ცენტრი არის, ცხადია, თვით წრის ცენტრი; მაშასადამე, სიმრუდის წრე მიმხები წრის იგივურია, ვინაიდან ამ უკანასკნელს წირთან მეორე რიგის თანახება აქვს. მეორე მხრით, განვიხილოთ ორი სიმრუდის წრეწირი მრუდის ორ მახლობელ წერტილისათვის; რადიუსების სხვაობა, რომელიც ტოლია შლილის რკალის სიგრძისა სიმრუდის ორ ცენტრს შორის, იქნება ცენტრებს შორის მანძილზე მეტი. მაშასადამე, ორი წრიდან ერთი მათგანი მოთავსებულია მეორის შიგნით, და ეს კი არ შეიძლებოდა, რომ თანახების წერტილის მახლობლად ეს წრეები ყოფილიყვნენ დალაგებული C წირის მიმართ ან ორივე შიგნით ან ორივე გარეთ. ამრიგად, ისინი უნდა კვეთდნენ C წირს.

ბრტყელ წირზე შეიძლება არსებობდეს ზოგიერთი განკუთრი წერტილები, რომლებშიაც მიმხები წრეწირი არ გადაკვეთს მრუდს; ეს შენიშვნა დაკავშირებულია თანამხებ წირთა ერთ საერთო თვისებასთან. თუ მოცემულია $n+1$ პარამეტრზე დამოკიდებული C' წირი, მაშინ (45) $n+1$ განტოლებას შეგვიძლია დაუმატოთ კიდევ ახალი განტოლება:

$$\mathfrak{F}^{(n+1)}(t_0)=0,$$

თუ, რასაკვირველია, t_0-ს განვიხილავთ როგორც ახალ უცნობს, რომელიც უნდა განისაზღვროს $a, b, c, \ldots, l$ პარამეტრებთან ერთად. აქედან ჩანს, რომ ბრტყელ C წირზე, საზოგადოდ, არსებობს ისეთი წერტილები, რომლებშიაც თანამხები C' წირის თანახება იქნება $(n+1)$ რიგის. ასე მაგალითად, არსებობს წერტილები, რომლებშიაც მხებს წირთან მეორე რიგის თანახება აქვს; ეს გადაღუნვის წერტილებია, რომლებისთვისაც $y''=0$.

იმისათვის, რომ მივიღოთ წირის ის წერტილები, რომლებშიაც თანამხებ წრეწირს აქვს მესამე რიგის თანახება, საჭიროა გავაწარმოოთ უკანასკნელი (48) განტოლებებიდან; რაც მოგვცემს:

$$3y'y''+(y-b)y'''=0;$$

ამ განტოლებიდან და (48)-დან თუ გამოვრიცხავთ $y-b$-ს, მივიღებთ:

$$(1+y'^2)\,y'''-3y'y''^2=0. \tag{49}$$

წერტილები, რომლებიც ამ პირობას აკმაყოფილებენ, აკმაყოფილებენ აგრეთ-ვე $\frac{dR}{dx}=0$ განტოლებასაც, ე. ი. ამ წერტილებში სიმრუდის რადიუსს აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი. მაგალითად, ელიფსისათვის ასეთი წერტილები იქნება მისი წვეროები, ციკლოიდისათვის—ის წერტილები, რომლებშიც მხები ფუძის პარალელურია.

209. თანამხებ წირთა თვისებები. თანამხები წირი შეიძლება წარმოვიდ-გინოთ როგორც იმ C' წირის ზღვარული მდებარეობა, რომელიც ხვდება C წირს $n+1$ უსასრულოდ მახლობელ წერტილში, როცა ყველა ეს წერტილი ერთმანეთს უახლოვდება. განვიხილოთ, მაგალითად, სამ a, b და c პარამეტრზე დამოკიდე-ბული წირთა ოჯახი; ვთქვათ t_0+h_1, t_0+h_2, t_0+h_3 არიან t პარამეტრის ისე-თი მნიშვნელობები, რომელნიც ძალიან ახლოა t_0-თან. a, b, c პარამეტრების მნიშვნელობები C' წირისათვის, რომელიც C წირს ხვდება t პარამეტრის ამ მნიშვ-ნელობათა შესაბამ სამ წერტილში, განისაზღვრება შემდეგი სამი განტოლებით:

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0,\quad \mathfrak{F}(t_0+h_2)=0,\quad \mathfrak{F}(t_0+h_3)=0. \tag{50}$$

თუ გამოვაკლებთ პირველ განტოლებას დანარჩენი ორიდან და სხვაობებზე გამოვიყენებთ სასრული ნაზრდის ფორმულას, მივიღებთ მათ ტოლფას სის-ტემას:

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0,\quad \mathfrak{F}(t_0+k_1)=0,\quad \mathfrak{F}'(t_0+k_2)=0 \tag{51}$$

სადაც k_1 მოთავსებულია h_1 და h_2-ს შორის, ხოლო k_2 კი h_1 და h_3-ს შორის შემდეგ, თუ მეორე განტოლებას მესამედან გამოვაკლებთ და სხვაობაზე გამო-ვიყენებთ სასრული ნაზრდთა ფორმულას, მივიღებთ ახალ სისტემას:

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0,\quad \mathfrak{F}'(t_0+k_1)=0,\quad \mathfrak{F}''(t_0+l_1)=0, \tag{52}$$

სადაც l_1 მოთავსებულია k_1 და k_2-ს შორის. როცა h_1 h_2, h_3 მიისწრაფის ნული-საკენ, მაშინ ნულისაკენ მიისწრაფის აგრეთვე k_1, k_2 და l_1-იც, და (52) გან-ტოლება ზღვარში მოგვცემს:

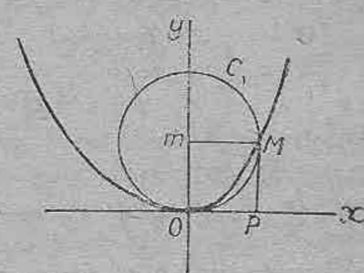
$$\mathfrak{F}(t_0)=0,\quad \mathfrak{F}'(t_0)=0,\quad \mathfrak{F}''(t_0)=0,$$

ესენი კი ის განტოლებებია, რომლებიც თანამხებ წირს განსაზღვრავენ. დამტკი-ცება რჩება იგივე პარამეტრების ყოველგვარი რიცხვისათვის. ჩვენ შეგვიძლია აგრეთვე განვსაზღვროთ თანამხები წირი როგორც ზღვარული მდებარეობა C' წირისა, რომელიც C წირს ეხება p წერტილში და რომელიც გადაჰკვეთს ამ წირს სხვა q წერტილში (სადაც $2p+q=n+1$), როდესაც ეს $p+q$ წერტილი ერთმანეთს უახლოვდება.

მაგალითად, თანამხები წრე არის ზღვარული მდებარეობა იმ წრისა, რო-მელიც გაივლის C წირის თანახების წერტილის უსასრულოდ მახლობელ სამ

წერტილზე; მასთან თანამხები წრე არის ზღვარული მდებარეობა იმ წრისა, რომელიც ეხება C წირს მოცემულ წერტილში და გაივლის ამავე წირის აღნიშნულ წერტილის უსასრულოდ მახლობელ მეორე წერტილზე. შევჩერდეთ ცოტა ამ უკანასკნელ თვისებაზე, რომელიც ადვილად შემოწმდება. კოორდინატთა სათავედ მივიღოთ წირის მოცემული წერტილი, Ox—ღერძად წირის მხები, ხოლო Oy-ის დადებით მიმართულებად ნორმალის ის მიმართულება, რომელიც მიმართულია სიმრუდის ცენტრისაკენ. კოორდინატთა სათავეში გვექნება: $y'=0$; მაშასადამე, $R=\frac{1}{y''}$, და ტეილორის ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$y=x^2\left(\frac{1}{2R}+\varepsilon\right),$$



ნახ. 37.

სადაც ε უსასრულოდ მცირეა x-თან ერთად. აქედან გამომდინარეობს, რომ R არის ზღვარი $\frac{x^2}{2y}=\frac{\overline{OP}^2}{2MP}$ გამოსახვის, როცა M წერტილი უახლოვდება O წერტილს. მეორე მხრით, ვთქვათ R_1 არის იმ C_1 წრის რადიუსი, რომელიც ეხება Ox ღერძს კოორდინატთა სათავეში და გაივლის M წერტილში. გვაქვს:

$$\overline{OP}^2=\overline{Mm}^2=MP(2R_1-MP),$$

ანუ

$$\frac{\overline{OP}^2}{2MP}=R_1-\frac{MP}{2},$$

მაშასადამე R_1 რადიუსის ზღვარი მართლაც სიმრუდის R რადიუსის ტოლია.

210. ორმაგი სიმრუდის ორი წირის თანახება. ორმაგი სიმრუდის წირთა თანახების რიგი განისაზღვრება ისევე, როგორც თანახების რიგი ბრტყელი წირებისათვის. განვიხილოთ ორმაგი სიმრუდის ორი Γ და Γ' წირი, რომლებიც ეხებიან ერთმანეთს A წერტილში. ვთქვათ M არის Γ წირის A წერტილის მახლობელი წერტილი, და Γ წირის M წერტილს ეთანადება Γ' წირის რაიმე M' წერტილი ისეთნაირად, რომ M და M' წერტილები ერთად უახლოვდებიან A-ს. ვიპოვოთ შესაძლო უმაღლესი რიგი უსასრულოდ მცირე MM' მანძილისა AM რკალის მიმართ, რომელიც განიხილება როგორც მთავარი უსასრულოდ მცირე. თუ ეს უმაღლესი რიგი ეტოლება $n+1$-ს, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ Γ და Γ' წირებს n-ური რიგის თანახება აქვს.

ორივე წირი შევუფარდოთ ღერძთა მართკუთხოვან სისტემას[1], მასთან ავიღოთ yz სიბრტყე ისე, რომ ის არ იყოს პარალელური ორივე წირის

[1] თუ ვისარგებლებთ ფორმულით ორ წერტილს შორის მანძილისათვის ბლაგვკუთხა კოორდინატებში, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ აქ ეს წინასწარდაშვება არ არის აუცილებელი.

საერთო მხებისა A წერტილში, და ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ ამ წირთა განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x), \\ z &= \varphi(x), \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= F(x), \\ Z &= \Phi(x). \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma')$$

ვთქვათ x_0, y_0, z_0 არიან თანახების A წერტილის კოორდინატები. M, M' წერტილების კოორდინატები სათანადოდ იყოს:

$$M[x_0+h,\ f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)],$$

$$M'[x_0+k,\ F(x_0+k),\ \Phi(x_0+k)],$$

სადაც k არის h-ის რაიმე ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია Γ და Γ' წირების წერტილებს შორის თანადობის შესახებ მიღებულ კანონზე, და რომელიც ნულად იქცევა h-თან ერთად. როგორც ბრტყელი წირის შემთხვევაში (§ 206), მთავარი უსასრულო მცირედ AM რკალის სიგრძის ნაცვლად შეიძლება მივიღოთ h. იმისათვის რომ MM' მანძილი იყოს $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე, აუცილებელია, რომ თითოეული სხვაობებიდან:

$$k-h, \quad F(x_0+k)-f(x_0+h), \quad \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)$$

იყოს უსასრულოდ მცირე, $(n+1)$-ური რიგის მაინც. ამრიგად უნდა გვექნეს:

$$k-h=\alpha h^{n+1}, \qquad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$

$$\Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1},$$

სადაც, როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ α, β, γ სიდიდეები რჩებიან სასრულოა [6]. ორ უკანასკნელ განტოლებაში k-ს თუ შევცვლით მის $h+\alpha h^{n+1}$ მნიშვნელობით, რომელიც მიღებულია პირველი განტოლებიდან, გვექნება:

$$F(x_0+h+\alpha h^{n+1})-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$

$$\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1},$$

თუ $F(x_0+h+\alpha h^{n+1})$ და $\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})$-ს გავამწკრივებთ ტეილორის ფორმულის მიხედვით, ვნახავთ რომ ყველა წევრს, რომელნიც შეიცავს α-ს, აქვს მამრავლად k^{n+1}; მაშასადამე, იმისათვის, რომ MM' მანძილი იყოს $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე, აუცილებელია, თითოეული სხვაობებიდან:

$$F(x_0+h)-f(x_0+h),$$

$$\Phi(x_0+h)-\varphi(x_0+h)$$

იყოს უსასრულოდ მცირე $(n+1)$ რიგის მაინც. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ MM' მანძილი $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე იქნება, მაშინ

[6] ე. ი. არ იქცევიან უსასრულობად; თუმცა ორი მათგანი შეიძლება გახდეს ნული.

ორივე წირის საერთო $x+h$ აბსცისიან M და N წერტილთა შორის MN მანძილი იქნება $(n+1)$ რიგზე ნაკლები უსასრულოდ მცირე. მაშასადამე, ჩვენ მივიღებთ სიმცირის უმაღლეს რიგს, თუ ვიანგარიშებთ შესაბამ წერტილებად ორივე წირის ერთიდაიმავე აბსცისის მქონე წერტილებს.

ადვილად ვიპოვით თანხების ამ უმაღლესი რიგს. ვინაიდან A წერტილში წირები ერთმანეთს ეხებიან, ამიტომ ჩვენ გვაქვს:

$$f(x_0)=F(x_0), \quad f'(x_0)=F'(x_0),$$

$$\varphi(x_0)=\Phi(x_0), \quad \varphi'(x_0)=\Phi'(x_0),$$

ამას გარდა, ზოგადობისათვის დავუშვათ, რომ

$$f''(x_0)=F''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)=F^{(n)}(x_0),$$

$$\varphi''(x_0)=\Phi''(x_0), \ldots, \varphi^{(n)}(x_0)=\Phi^{(n)}(x_0),$$

მაგრამ, უკიდურეს შემთხვევაში, ერთი მაინც შემდეგი სხვაობებიდან:

$$F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0),$$

$$\Phi^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)$$

არ ეტოლებოდეს ნულს. ამ შემთხვევაში MM' მანძილი იქნება $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე, და თანხება იქნება n-ური რიგის. ეს შედეგი შეიძლება გამოვთქვათ შემდეგნაირად.

რომ ვიპოვოთ Γ და Γ' წირების თანხების რიგი, ამისათვის უნდა განვიხილოთ ამ წირთა (C, C') და (C_1, C_1') გეგმილები xOy და xOz სიბრტყეებზე გამოვთვალოთ C და C', C_1 და C_1' წირების თანხებათა რიგი და ავიღოთ ამ ორ რიცხვს შორის უმცირესი.

თუ Γ, Γ' წირები წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \qquad (\Gamma)$$

$$X=f(u), \quad Y=\Phi(u), \quad Z=\Psi(u), \qquad (\Gamma')$$

მაშინ ეს წირები, რომ ეხებოდენ ერთმანეთს $u=t=t_0$ წერტილში, ადგილი უნდა ექნეს ტოლობებს:

$$\Phi(t_0)=\varphi(t_0), \quad \Phi'(t_0)=\varphi'(t_0); \quad \Psi(t_0)=\psi(t_0), \quad \Psi'(t_0)=\psi'(t_0).$$

თუ ჩვენ წინასწარ დავუშვებთ, რომ $f'(t_0)$ ნულს არ ეტოლება, მაშინ მხები თანხების წერტილში არ იქნება yOz სიბრტყის პარალელური, და ორივე წირის საერთო აბსცისის მქონე წერტილები ეთანადებიან t პარამეტრის ერთიდაიმავე მნიშვნელობას. მაშასადამე, რომ თანხება იყოს n-ური რიგის, აუცი-

ლებელია და საკმარისი, რომ $\Phi(t)-\varphi(t)$ და $\Psi(t)-\psi(t)$ სხვაობები იყვნენ $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირენი $t-t_0$-ის მიმართ, ე. ი. შესრულებული იყოს:

$$\Phi'(t_0)=\varphi'(t_0), \ldots, \quad \Phi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0),$$

$$\Psi'(t_0)=\psi'(t_0), \ldots, \quad \Psi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0),$$

მაგრამ ერთი მაინც სხვაობებიდან:

$$\Phi^{(n+1)}(t_0)-\varphi^{(n+1)}(t_0), \quad \Psi^{(n+1)}(t_0)-\psi^{(n+1)}(t_0)$$

არ უნდა იყოს ნულის ტოლი.

ის შემთხვევა, როცა Γ წირი წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \tag{53}$$

ხოლო Γ' წირი შემდეგი ამოუხსნელი განტოლებებით:

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0,$$

ადვილად დაიყვანება წინამავალზე. თუ გავიმეორებთ (§ 207)-ის მსჯელობებს, არ არის ძნელი იმის დამტკიცება, რომ პარამეტრის t_0 მნიშვნელობის შესაბამ Γ წირის რაიმე წერტილში, განსახილავ წირებს რომ ჰქონდეს n-ური რიგის თანამხები, უნდა იყოს შესრულებული:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{F}(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0)=0, \ldots, \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0, \\ &\mathfrak{F}_1(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}_1'(t_0)=0, \ldots, \mathfrak{F}_1^{(n)}(t_0)=0, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

სადაც:

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \quad \mathfrak{F}_1(t)=F_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)].$$

211. მიმხები წირები. ვთქვათ Γ არის მოცემული წირი, რომლის განტოლებას აქვს (53) სახე; მეორე მხრით, განვიხილოთ $2n+2$, $a, b, c, \ldots, l$ პარამეტრზე დამოკიდებული Γ' წირთა ოჯახი, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$F(x, y, z, a, b, c, \ldots, l)=0, \quad F_1(x, y, z, a, b, c, \ldots, l)=0. \tag{55}$$

საზოგადოდ, შეიძლება შევარჩიოთ ამ $2n+2$ პარამეტრის მნიშვნელობები ისე, რომ ამ ოჯახის შესაბამ Γ' წირს ექნეს Γ წირთან მოცემულ წერტილში n-ური რიგის თანახება. ამგვარად მიღებულ წირს Γ წირის მ ი მ ხ ე ბ ი წირი ეწოდება. განტოლებები, რომელთა საშუალებითაც განისაზღვრებიან $a, b, c, \ldots, l$ პარამეტრების მნიშვნელობები, არიან იგივე ზემოთმოცემული (54) განტოლებები. მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლებები თავსებადი იქნება იმ შემთხვევაში, თუ F და F_1 ფუნქციებიდან თითოეული $n+1$ პარამეტრს მაინც შეიცავს.

მაგალითად, თუ Γ' წირები ბრტყელი იქნება, მაშინ (55) განტოლებიდან ერთი შეიცავს მხოლოდ სამ პარამეტრს; მაშასადამე, ორმაგი სიმრუდის წირზე აღებულ ნებითი წერტილში, ბრტყელ წირს ორმაგი სიმრუდის წირთან არ შეიძლება ჰქონდეს თანახება მეორე რიგზე მეტი.

გამოვიყენოთ ეს თეორია უმარტივეს წირებზე: წრფესა და წრეწირზე. წრფის განტოლება ოთხ პარამეტრს შეიცავს; მაშასადამე, მიმხებ წრფეს აქვს, საზოგადოდ, წირთან მხოლოდ პირველი რიგის თანახება. ადვილათ დავამტკიცებთ, რომ მიმხები წრფე ემთხვევა Γ' წირის მხებს. მართლაც, წრფის განტოლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$x=az+p, \quad y=bz+q;$$

Γ წირთან თანახების (x_0, y_0, z_0) წერტილისათვის (54) განტოლებები გადაიქცევა შემდეგი სახის განტოლებებად:

$$x_0=az_0+p, \quad x_0'=az_0', \quad y_0=bz_0+q, \quad y_0'=bz_0',$$

საიდანაც გვაქვს:

$$a=\frac{x_0'}{z_0'}; \quad b=\frac{y_0'}{z_0'}, \quad p=x_0-\frac{x_0'}{z_0'}z_0, \quad q=y_0-\frac{y_0'}{z_0'}z_0,$$

და ჩვენ ვღებულობთ მხების განტოლებას. იმისთვის, რომ მხებს წირთან მეორე რიგის თანახება ჰქონდეს, ადგილი უნდა ექნეს: $x_0''=az_0''$, $y_0''=bz_0''$, და მაშასადამე,

$$\frac{x_0''}{x_0'}=\frac{y_0''}{y_0'}=\frac{z_0''}{z_0'};$$

ის წერტილები, რომლებშიც ამას აქვს ადგილი, ჩვენს მიერ ქვემოთ იქნება განხილული (§ 216).

წრეწირის განტოლება სივრცეში ექვს პარამეტრს შეიცავს; ამრიგად, მ ი მ ხ ე ბ წ რ ე წ ი რ ს Γ წირთან მეორე რიგის თანახება აქვს. წრეწირის განტოლება დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F(x, y, z)=A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$

$$F_1(x, y, z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

ამასთან, ცვლადი პარამეტრები არიან: a, b, c, R და A, B, C კოეფიციენტებიდან ორის ფარდობა მესამესთან. ამ პარამეტრების მნიშვნელობებს განსაზღვრავს განტოლებები :

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,$$

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

$$(x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=0,$$

$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=0,$$

სადაც x, y, z შეცვლილი უნდა იყოს შესაბამად $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$-ით. ამ განტოლებებიდან მეორე და მესამე გვიჩვენებს, რომ მიმხები წრის სიბრტყე ემთხვევა Γ წირის მიმხებ სიბრტყეს (§ 214). რაც შეეხება ორ უკანასკნელ განტოლებას, განვიხილავთ რა მათში a, b და c-ს როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, ვნახავთ, რომ ისინი წარმოადგენენ გადაკვეთის წირს Γ წირის (x, y, z) წერტილში ნორმალ სიბრტყისა და ამ წერტილის უსასრულოდ მახლობელ წერტილში ნორმალ სიბრტყის (იხ. შემდგომ § 220).

212. წირის ფართეულთან თანხება. განვიხილოთ S ფართეული და Γ წირი, რომელიც ამ ფართეულს რომელიმე A წერტილში ეხება. ვთქვათ, ამ წირის A-ს მახლობელ M წერტილს ეთანადება ფართეულის რაიმე M' წერტილი იმგვარად, რომ ორივე M და M' წერტილი ერთად უახლოვდება A წერტილს. გამოვარკვიოთ, თუ როგორ უნდა შევარჩიოთ M და M' წერტილები, რომ MM' მანძილის რიგი AM რკალის სიგრძის მიმართ იყოს რაც შეიძლება მაღალი. შევარჩიოთ მართკუთხა კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომ Γ წირის მხები A წერტილში არ იყოს პარალელური yOz სიბრტყისა, და რომ S ფართეულის მხები სიბრტყე A წერტილში არ იყოს Oz ღერძის პარალელური. ვთქვათ x_0, y_0, z_0 არის A წერტილის კოორდინატები, $Z=F(x, y)-S$ ფართეულის განტოლება, ხოლო $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ კი Γ წირის განტოლებები, და ვიგულისხმოთ, რომ M და M' წერტილთა შორის თანადობის რაიმე კანონით MM' მანძილი არის $(n+1)$ რიგის უსასრულო მცირე. M წერტილის x, y, z კოორდინატები იქნება:

$$x_0+h, \quad f(x_0+h), \quad \varphi(x_0+h);$$

აღვნიშნოთ X, Y, $Z=F(X, Y)$-ით M წერტილის კოორდინატები. იმისათვის რომ MM' მანძილი იყოს $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე, AM რკალის სიგრძის მიმართ, ანუ რაც იგივეა, h-ის მიმართ, აუცილებელია, რომ თითოეული $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ სხვაობებიდან იყოს უსასრულოდ მცირე $(n+1)$ რიგის მაინც. ამრიგად, ადგილი უნდა ექნეს:

$$X-x=\alpha h^{n+1}, \quad Y-y=\beta h^{n+1}, \quad Z-z=\gamma h^{n+1},$$

სადაც α, β, γ რჩებიან სასრული როცა $h=0$. აქედან გვაქვს,

$$F(x+\alpha h^{n+1}, \quad y+\beta h^{n+1})-z=\gamma h^{n+1}.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $F(x, y)-z$ თვითონ უნდა იყოს უსასრულოდ მცირე $(n+1)$ რიგის მაინც. ეს გვიჩვენებს, რომ თუ Γ წირის M წერტილის სათანადო წერტილად ჩავთვლით S ფართეულის იმ N წერტილს, რომელშიც M წერტილზე გამავალი და Oz ღერძის პარალელური წრფე გადაჰკვეთს ამ ფართეულს, მაშინ MN მანძილის სიმცირის რიგი არ იქნება MM' მანძილის სიმცირის რიგზე ნაკლები. მაშასადამე, ჩვენ მივიღებთ წირისა და ფართეულის თანახების რიგს, თუ ვიპოვით MN მანძილის რიგს AM რკალის სიგრძის მიმართ, ანუ რაც იგივეა, h-ის მიმართ. სხვანაირად, წირისა და ფართეულის თანახების რიგი არის თ ა ნ ა ხ ე ბ ი ს რ ი გ ი Γ წ ი რ ი ს ა Γ'-თ ა ნ, რ ო მ ე ლ ი ც წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს S ფ ა რ თ ე უ ლ ი ს ც ი ლ ი ნ დ რ თ ა ნ გ ა დ ა კ ვ ე თ ი ს წ ი რ ს, დ ა რ ო მ ე ლ ი ც Γ წ ი რ ს xOy ს ი ბ რ ტ ყ ე ზ ე Oz ღ ე რ ძ ი ს პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ა დ ა გ ე გ მ ი ლ ე ბ ს (მასთან ცხადია, რომ Oz ღერძის მიმართულებად ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ ნებითი მიმართულება, რომელიც არ იქნება მხები სიბრტყის პარალელური).

Γ' წირის განტოლებები იქნება:

$$y=f(x),\quad Z=F[x, f(x)]=\Phi(x);$$

პირობის თანახმად, გვაქვს:

$$\Phi(x_0)=\varphi(x_0),\quad \Phi'(x_0)=\varphi'(x_0);$$

თუ, გარდა ამისა, ადგილი აქვს:

$$\Phi''(x_0)=\varphi''(x_0),\ldots,\ \Phi^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0),\ \Phi^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0),$$

მაშინ წირსა და ფართეულს ექნებათ n-ური რიგის თანახება. ვინაიდან $\Phi(x)=\varphi(x)$ განტოლება წირის ფართეულთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისებს იძლევა, ამიტომ n-ური რიგის თანახების წინა პირობა გვიჩვენებს აგრეთვე, რომ წირის ფართეულთან გადაკვეთის $n+1$ წერტილი თავს იყრის ერთ A წერტილში.

განვიხილოთ კიდევ ის შემთხვევა, როცა Γ წირი მოცემულია განტოლებებით: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, ხოლო S ფართეული $F(x, y, z)=0$ განტოლებით. აქ ზემოთ განსაზღვრული Γ' წირი მიიღება შემდეგი განტოლებებით: $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\pi(t)$, სადაც $\pi(t)$ ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით:

$$F[f(t),\ \varphi(t),\ \pi(t)]=0.$$

რომ Γ და Γ' წირებს ჰქონდეთ n ური რიგის თანახება, აუცილებელია, $\pi(t)-\psi(t)$ სხვაობა იყოს $(n+1)$ რიგის უსასრულოდ მცირე $t-t_0$-ის მიმართ, ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს:

$$\pi(t_0)=\psi(t_0),\ \pi'(t_0)=\psi'(t_0),\ldots,\ \pi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0),$$

თუ შემოვიყვანთ, როგორც ზემოთ (§ 210), $\mathfrak{F}(t)$ ფუნქციას, მაშინ ეს პირობა შეიძლება ასეთი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\mathfrak{F}(t_0)=0,\ \mathfrak{F}'(t_0)=0,\ldots,\ \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0;$$

ეს პირობები გამოთქვამენ, რომ ფართეულის წირთან გადაკვეთის $n+1$ წერტილი ერთდება ერთ თანახების წერტილში.

თუ S ფართეულის განტოლება დამოკიდებულია $n+1$ პარამეტრზე: $a, b, c, \ldots l$, მაშინ ამ პარამეტრების მნიშვნელობა შეიძლება შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ ამ ფართეულს მოცემულ წირთან მოცემულ წერტილში ჰქონდეს n-ური რიგის თანახება. ამნაირად მიღებულ ფართეულს მ ი მ ხ ე ბ ი ფ ა რ თ ე უ ლ ი ეწოდება.

სიბრტყის შემთხვევაში ჩვენ სამი პარამეტრი გვაქვს; ეს პარამეტრები განისაზღვრებიან განტოლებებით:

$$\begin{aligned} Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D&=0,\\ Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)&=0,\\ Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)&=0. \end{aligned}$$

ჩვენ მივიღეთ იგივე განტოლებები, რომლებითაც განისაზღვრა მიმხები სიბრტყე (§ 203); ცხადია, რომ თანახება იქნება, საზოგადოდ, მეორე რიგის. რომ თანახების რიგი იყოს ორზე მაღალი, უნდა გვქონდეს:

$$Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)=0,$$

ე. ი. მიმხები სიბრტყე უნდა იყოს სტაციონალური (იხ. ქვემოთ, § 215).

სფეროს განტოლება ოთხ პარამეტრზე არის დამოკიდებული; მაშასადამე, მიმხებ სფეროს Γ წირთან აქვს მესამე რიგის თანახება. გამოთვლები ქვემოთ იქნება მოყვანილი (§ 228).

213. მოცემულ ფართეულის მიმხები წრფეები. თუ C წირის განტოლება დამოკიდებულია $n+2$ ცვლად პარამეტრზე, მაშინ შეიძლება შევარჩიოთ ამ პარამეტრების მნიშვნელობა იმგვარად, რომ ამ წირს მოცემულ S ფართეულთან გარკვეულ M წერტილში ჰქონდეს n-ური რიგის თანახება. მართლაც, თუ გამოვთქვამთ, რომ C წირი გადის M წერტილზე და ამ წერტილში S სიბრტყეს ხვდება $n+1$ შერწყმულ წერტილში, მაშინ ამ პარამეტრების მნიშვნელობათა განსაზღვრისათვის ჩვენ მივიღებთ სულ $n+2$ განტოლებას. მაგალითად, წრფის განტოლება დამოკიდებულია ოთხ პარამეტრზე, მაშასადამე, ფართეულის თითოეულ წერტილზე გაივლის ერთი ან რამოდენიმე წრფე, რომლებსაც ფართეულთან მეორე რიგის თანახება ექნება. რომ ვიპოვოთ ეს წრფეები, ამისათვის S ფართეულის განსახილავი M წერტილი მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ და დავუშვათ, რომ Oz ღერძი არ ძევს S ფართეულის M წერტილში მხებ სიბრტყეზე. ვთქვათ $z=F(x, y)$ არის S ფართეულის განტოლება ღერძთა ამ სისტე-

მის მიმართ. ვინაიდან საძიებელი წრფე, ცხადია, გადის კოორდინატთა სათავეზე, ამიტომ მის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\rho;$$

$c\rho=F(a\rho, b\rho)$ განტოლებას უნდა ექნეს $\rho=0$ სამჯერად ფესვად. მაშასადამე, ადგილი უნდა ექნეს:

$$c=ap+bq,$$

$$0=a^2r+2abs+b^2t,$$

სადაც p, q, r, s, t წარმოადგენენ $F(x, y)$ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობებს როცა $x=y=0$. ამ დამოკიდებულებებს შორის პირველი გვიჩვენებს, რომ საძიებელი წრფე ფართეულის მხებ სიბრტყეზე ძევს, რაც a priori ცხადია. შემდეგ ჩვენ ვხედავთ, რომ $\frac{b}{a}$ ფარდობა მეორე ხარისხის იმ განტოლებისაგან განისაზღვრება, რომლის ამონახსნი ნამდვილია, როცა $s^2-rt>0$. ამნაირად ფართეულის თითოეულ წერტილზე გადის ორი და მხოლოდ ორი წრფე, რომლებსაც ფართეულთან მეორე რიგის თანახება აქვს; ეს წრფეები იქნება ნამდვილი ან წარმოსახვითი s^2-rt-ის ნიშნის მიხედვით. ამ წრფეებს ჩვენ შევხვდებით შემდეგ თავში ფართეულთა სიმრუდის განხილვის დროს.

ᲡᲐᲕᲐᲠᲯᲘᲨᲝ ᲛᲐᲒᲐᲚᲘᲗᲔᲑᲘ.

1. ვთქვათ C მესამე რიგის წირია, რომელსაც O წერტილში აქვს ორჯერადი წერტილი გვერდები MON მართი კუთხისა, რომელიც O წერტილის გარშემო ბრუნავენ, C წირს ხვდება სათანადოდ M და N წერტილებში. იპოვეთ MN წრფეთა მომვლები. განიხილეთ, კერძოდ ის შემთხვევები, როცა C წირის განტოლება არის: $\lambda y^2=x^3$, და $x^3+y^3=\mu xy$.

2. იპოვეთ ის წერტილები, რომლებშიც შემდეგი განტოლებებით წარმოდგენილ წირს:

$$x=a\,(n\omega-\sin\omega),\quad y=a\,(n-\cos\omega),$$

კიმხებ წრესთან აქვს ორზე მეტი რიგის თანახება.

3. ვთქვათ m, m_1, m_2 რაიმე ბრტყელი წირის სამი მეზობელი წერტილია. იპოვეთ იმ წრის რადიუსის ზღვარული მნიშვნელობა, რომელიც შეხაწერილია m, m_1, m_2 წერტილებში მხებებით შედგენილი სამკუთხედის გარშემო, როცა ყველა ეს სამი წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა.

4. დაამტკიცეთ, რომ თუ შეკრულ წირს, რომელსაც არ აქვს გადაღუნის წერტილი, აქვს შეკრული შლილი, მაშინ ამ შლილის სრული სიგრძე ტოლია სიმრუდის რადიუსების მაქსიმუმების მნიშვნელობათა ჯამისა და სიმრუდის რადიუსების მინიმუმების მნიშვნელობათა ჯამის სხვაობის პირველი წირის ყველა წერტილისათვის.

5. მოცემულ წირის ყოველ წერტილიდან გავავლოთ მუდმივი სიგრძის მონაკვეთი, რომელიც წირის ნორმალთან შეადგენს მუდმივ კუთხეს. დაამტკიცეთ, რომ ამ მონაკვეთთა ბოლოების გეომეტრიულ ადგილის მიმართ გავლებული ყოველი ნორმალი გადის მოცემულ წირის სიმრუდის შესაბამ ცენტრში.

6. ვთქვათ r არის მოცემული პოლუსიდან ბრტყელი წირის ერთი რომელიმე წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი, და P—მანძილი პოლუსიდან წირის ამ წერტილში მხებამდე; დაამტკიცეთ, რომ სიმრუდის R რადიუსი გამოისახება ფორმულით: $R=\pm r\frac{dr}{dp}$.

7. დაამტკიცეთ, რომ ისეთ პარაბოლების ფოკუსების გეომეტრიული ადგილი, რომლებსაც მოცემულ წირთან მოცემულ წერტილში აქვს მეორე რიგის თანახება წარმოადგენს წრეწირს.

8. იპოვეთ ისეთ ელიფსთა ცენტრების გეომეტრიული ადგილი, რომელთა ღერძებს აქვთ მოცემული მიმართულება, და რომლებსაც მოცემულ წირთან მოცემულ წერტილში აქვთ მეორე რიგის თანახება.

9. ვთქვათ $F(X, Y; x, y)$ არის ორი (x, y) და (X, Y) წყვილი ცვლადის ფუნქცია. თუ $F=0$ განტოლებაში x და y-ს განვიხილავთ როგორც გარკვეულ m წერტილის კოორდინატებს, ხოლო X და Y-ს როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, მაშინ ეს განტოლება ამყარებს გარკვეულ თანადობას სიბრტყის ყოველ m წერტილსა და ბრტყელ c წირს შორის. თუ m წერტილი მოხაზავს C წირს, მაშინ შესაბამი c წირები ევლება L წირს, რომელიც განსაზღვრულია ორი განტოლებით:

$$F(X, Y; x, y)=0;\quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0.$$

ეს Γ წირი გამოიყვანება C წირიდან მხები გარდაქმნის დახმარებით; შებრუნებული გარდაქმნა მიიღება, თუ (x, y) და (X, Y) ცვლადებს შევუცვლით როლებს. ფართეულებზე განზოგადოება იხ. § 59.

გამოყენება:

$$F=X^2+Y^2-Xx-Yy.$$

10. იმისთვის რომ $F(x, y, a)=0$ განტოლებით წარმოდგენილ წირს თავის მომვლებთან n-ური რიგის თანახება ჰქონდეს, აუცილებელია და საკმარისი, თანახების წერტილში ადგილი ექნეს ტოლობებს:

$$F=0,\ \frac{\partial F}{\partial a}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}=0,\ \ldots,\frac{\partial^n F}{\partial a^n}=0.$$

გამოყენება იმ შემთხვევაში, როცა C წარმოადგენს წრეწირს.

11. ყოველ $F(x, y, z, a)$ ფართეულს აქვს მეორე რიგის თანახება მომვლები ფართეულის უკუქცევის წიბოსთან, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სამი განტოლებით:

$$F=0,\ \frac{\partial F}{\partial a}=0.\quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}=0.$$

12. განსაზღვრეთ გეომეტრიული ადგილი იმ სფეროთა ცენტრებისა, რომლებსაც მოცემულ წირთან მოცემულ წერტილში აქვს მეორე რიგის თანახება.

13. თუ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ცვლადი სფეროს მომვლები გადაიქცევა Γ წირად, მაშინ ამ წირს სფეროსთან ექნება მეორე რიგის თანახება.

14. ვთქვათ მოცემულია S ფართეული; თუ S-ის ყოველი წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვწერთ R ცვლადი რადიუსით Σ სფეროს, მაშინ ეს სფერო, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ეხება თავის მომვლებს ორ ისეთ M და M' წერტილში, რომ MM' წრფე S ფართეულის m წერტილში მხების სიბრტყის მართობია. გამოთვალეთ ხ მანძილი m წერტილიდან MM' წრფემდე.

თუ ფართეული აღებულია მრუდწირულ მართკუთხა (u, v) კოორდინატთა სისტემის მიმართ, ისე რომ $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, მაშინ

$$\delta^2 = R^2\left[\frac{1}{E}\left(\frac{\partial R}{du}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial R}{dv}\right)^2\right].$$

15. თუ S ფართეული ეხება P სიბრტყეს ამ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე C წირის ყველა წერტილში, მაშინ ამ წირის მხებს ნებისმიერ წერტილში S ფართეულთან აქვს მესამე რიგის თანახება.

16[1]. S ფართეულის ყოველი M წერტილისათვის არსებობს, საზოგადოდ, ∞^1 წრეწირი, რომლებსაც S-თან აქვთ მესამე რიგის თანახება. ფართეულის M წერტილში ყოველ მხები წრფეზე გადის აღნიშნულ წრეების ერთი და მხოლოდ ერთი სიბრტყე. თუ M არ არის მორგვალების წერტილი, მაშინ არსებობს ა თ ი წრეწირი, რომლებსაც M წერტილში ფართეულთან მეოთხე რიგის თანახება აქვს.

---

[1] Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques*, ტ. IV, მე-2 სერია 1880, გვ. 348—384]

თ ა ვ ი XI

ორმაგი სიმრუდის წირები

I. მიმხები სიბრტყე

214. განსაზღვრა და განტოლება. ჩვენ რამოდენიმეჯერ გვქონდა საუბარი (§ 203, 211, 212) მიმხები სიბრტყისა და ორმაგი სიმრუდის წირის შესახებ. ამ სიბრტყის უშუალო განსაზღვრა მხების განსაზღვრის ანალოგიურია. ვთქვათ M არის ორმაგი სიმრუდის Γ წირის წერტილი, და MT მხები ამ წერტილში. გავავლოთ სიბრტყე MT წრფეზე და Γ წირის M წერტილის უსასრულოდ მახლობელ რაიმე M' წერტილზე. როცა M' წერტილი უსასრულოდ უახლოვდება M წერტილს, მაშინ ეს სიბრტყე, საზოგადოდ მიისწრაფის რაიმე გარკვეულ მდებარეობისაკენ; ამ ზღვარულ სიბრტყეს ეწოდება Γ წირის მ ი მ ხ ე ბ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე M წერტილში.

გამოვიყვანოთ მიმხები სიბრტყის განტოლება. ვთქვათ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \tag{1}$$

გამოსახავს Γ წირის წერტილთა კოორდინატებს t პარამეტრის ფუნქციებში; ვთქვათ M და M' წერტილებს შეესაბამება ამ პარამეტრის t და $t+h$ მნიშვნელობები. MTM' სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

მასთან A, B, C კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0, \tag{2}$$

$$A[f(t+h)-f(t)]+B[\varphi(t+h)-\varphi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)]=0. \tag{3}$$

თუ მე-(3) განტოლებებში $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ გამოსახვებს გავშლით ტეილორის ფორმულის მიხედვით, გვექნება:

$$A\left\{hf'(t)+\frac{h^2}{1.2}[f''(t)+\varepsilon_1]\right\}+B\left\{h\varphi'(t)+\frac{h^2}{1.2}[\varphi''(t)+\varepsilon_2]\right\}+\ldots=0;$$

თუ აქედან გამოვაკლებთ მე-(2) განტოლებას გამრავლებულს h-ზე და შედეგს

$\frac{h^2}{2}$-ზე გავყოფთ, მივიღებთ მე-(2) და მე-(3) განტოლებათა სისტემას ტოლფასს სისტემას:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0,$$

$$A[f''(t)+\varepsilon_1]+B[\varphi''(t)+\varepsilon_2]+C[\psi''(t)+\varepsilon_3]=0,$$

სადაც ε_1, ε_2, ε_3 უსასრულოდ მცირეებია h-თან ერთად. როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ უკანასკნელი ტოლობა ღებულობს სახეს:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0. \tag{4}$$

მაშასადამე, მიმხები სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{5}$$

მასთან A, B, C კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$\left.\begin{aligned} A\,dx+B\,dy+C\,dz&=0,\\ A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z&=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

თუ გამოვრიცხავთ მე-(5) და მე-(6) განტოლებებიდან A, B, C კოეფიციენტებს, მაშინ მიმხები სიბრტყის განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

წირის მხებზე გამავალ ყველა სიბრტყიდან, **მიმხები სიბრტყე** არის ის, **რომელსაც წირი ყველაზე უფრო მჭიდროდ ეკვრის** (§ 212). ჯერ განვიხილოთ რომელიმე სხვა, მხებ წრფეზე გამავალი სიბრტყე; ეს სიბრტყე წარმოგვიდგება მე-(5) განტოლებით, რომელშიც A, B, C კოეფიციენტები უკვე არ აკმაყოფილებენ მე-(4) განტოლებას. ვთქვათ $F(t)$ არის მე-(5) განტოლების მარცხენა მხარეში X, Y, Z მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ გამოსახვათა ჩასმის შედეგი; გვექნება:

$$F(t)=\frac{h^2}{1.2}[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)+\eta],$$

სადაც η უსასრულოდ მცირეა h-თან ერთად. მაშასადამე, M წერტილის მახლობელი Γ წირის რომელიმე წერტილის მანძილი განსახილავ სიბრტყემდე **მეორე რიგის** უსასრულოდ მცირეა; გარდა ამისა, ვინაიდან h-ის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობათათვის $F(t)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, ამიტომ აქედან ნათელია, რომ თანახების წერტილის მახლობლად Γ წირი მთლიანად ძევს მხები სიბრტყის ერთ მხარეზე.

სულ სხვა იქნება მიმხები სიბრტყისათვის. მისთვის ჩვენ გვაქვს: $Af''+$ $+B\varphi''+C\psi''=0$, და რომ მივიღოთ გამოსახვა $F(t)$-სათვის, უნდა გავაგრძელოთ

Γ წირის წერტილთა კოორდინატების გამწკრივება მესამე რიგის წევრამდე h-ის მიმართ. ჩასმის შემდეგ გვექნება:

$$F(t)=\frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z}{dt^3}+\eta\right).$$

აქედან ჩანს, რომ Γ წირის წერტილიდან მიმხებ სიბრტყემდე მანძილი მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეა; გარდა ამისა, რადგანაც $F(t)$ იცვლის ნიშანს h-თან ერთად, ამიტომ აქედან ვღებულობთ, რომ ორმაგი სიმრუდის წირი ჰკვეთს მიმხებ სიბრტყეს თანახების წერტილში. ეს თვისება მიმხებ სიბრტყეს გამოყოფს ყველა დანარჩენ მხებ წრფეზე გამავალ სიბრტყეებიდან.

215. სტაციონარული მიმხები სიბრტყე. წინა დასკვნები კარგავენ ძალას იმ შემთხვევაში, როცა მიმხები სიბრტყის A, B, C კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z=0. \tag{7}$$

ამ შემთხვევაში საჭიროა გავაგრძელოთ კოორდინატთა გამწკრივება მეოთხე რიგის წევრებამდე, და ჩვენ შემდეგი სახის შედეგს მივიღებთ:

$$F(t)=\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{Ad^4x+Bd^4y+Cd^4z}{dt^4}+\eta\right).$$

იმ წერტილებში, რომლებიც მე-(7) განტოლებას აკმაყოფილებენ, მიმხებ სიბრტყეს სტაციონარული მიმხები სიბრტყე ეწოდება. თუ $Ad^4x+Bd^4y+Cd^4z$ განსხვავდება ნულისაგან, რასაც საზოგადოდ ექნება ადგილი, მაშინ $F(t)$ არ იცვლის ნიშანს h-თან ერთად, და წირი არ ჰკვეთს სტაციონარულ მიმხებ სიბრტყეს. ამას გარდა, მანძილი წირის წერტილიდან სტაციონარულ მიმხებ სიბრტყემდე იქნება უსასრულოდ მცირე უკვე არა მესამე, არემედ მეოთხე რიგის. ჩვენ რომ გვქონოდა $Ad^4x+Bd^4y+Cd^4z=0$, მაშინ გამწკრივება უნდა გაგვევგრძელებია მეხუთე რიგის წევრებამდე, და ა. შ.

მე-(6) და მე-(7) ტოლობებიდან A, B, C გამორიცხვით, მივიღებთ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^7y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

ამ განტოლების ფესვები იქნება t-ს ის მნიშვნელობები, რომლებიც ეთანადებიან Γ წირის იმ წერტილებს, სადაც მიმხები სიბრტყე სტაციონარულია. ამნაირად ყოველ ორმაგი სიმრუდის წირზე არის, საზოგადოდ, წერტილები, რომლებსაც ეს თვისება ახასიათებს.

ვნახოთ, არსებობს თუ არა ისეთი წირები, რომლებისთვის მიმხები სიბრტყეები იყოს სტაციონარული. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, ვიპოვოთ t ცვლადის ყველა x, y, z ფუნქცია, რომლებიც მათ წარმოებულებთან ერთად უწყვეტია

მესამე რიგამდე, იმ პირობით, რომ როცა t იცვლება a-ან b-მდე ($a<b$) წინა Δ დეტერმინანტი იყოს იგივურად ნულის ტოლი.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ Δ დეტერმინანტის მესამე სტრიქონის ერთი მინორთაგანი, მაგალითად, $dx\,d^2y-dy\,d^2x$ არ იქცევა ნულად (a, b) შუალედში. შემდეგი დამოკიდებულებებიდან:

$$\left.\begin{aligned} dz&=C_1\,dx+C_2\,dy\,, \\ d^2z&=C_1\,d^2x+C_2\,d^2y \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ჩვენ ვიპოვით C_1 და C_2-სათვის ამ შუალედში უწყვეტ t-ს ფუნქციებს. ვინაიდან $\Delta=0$, ამიტომ ეს ფუნქციები აგრეთვე დააკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$d^3z=C_1d^3x+C_2d^3y. \tag{10}$$

თუ მე-(9) განტოლებებს გავაწარმოებთ და მხედველობაში მივიღებთ მე-(10) ფორმულას, მივიღებთ ახალ განტოლებებს:

$$dC_1\,dx+dC_2\,dy=0, \quad dC_1\,d^2x+dC_2\,d^2y=0,$$

საიდანაც გვექნება: $dC_1=dC_2=0$, მაშასადამე, C_1, C_2 კოეფიციენტები მუდმივებია, და მე-(9) განტოლებებიდან პირველის ინტეგრობა, გვაძლევს:

$$z=C_1x+C_2y+C_3,$$

სადაც C_3 ახალი მუდმივია. აქედან გამოდის, რომ Γ წირი ბრტყელია.

თუ a და b-ს შორის მოთავსებულ t პარამეტრის რაიმე c მნიშვნელობისათვის $dx\,d^2y-dy\,d^2x$ დეტერმინანტი გახდება ნული. მაშინ წინა მსჯელობა არ გამოდგება, ვინაიდან პარამეტრის ამ c მნიშვნელობისათვის C_1 და C_2-ის გამოსახვები გადაიქცევა უსასრულობად ან განუსაზღვრელი გახდება. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ (a, b) შუალედში $dx\,d^2y-dy\,d^2x$ დეტერმინანტი ნული გახდება მხოლოდ ერთხელ. როცა $t=c$, და რომ პარამეტრის ამ მნიშვნელობისათვის ანალოგიური $dx\,d^2z-dz\,d^2x$ დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან. წინა მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ Γ წირის, t პარამეტრის მნიშვნელობათა შესაბამი, ყველა წერტილი, შუალედში a-დან c-მდე, მდებარეობენ ერთდაიმავე P სიბრტყეზე, და რომ c და b-ს შორის მოთავსებულ პარამეტრის მნიშვნელობათა შესაბამი წირის ყველა წერტილი, მდებარეობენ ერთდაიმავე Q სიბრტყეზე. მეორე მხრივ, ვინაიდან $t=c$ მნიშვნელობისათვის $dx\,d^2z-dz\,d^2x$ მინორი არ უდრის ნულს, ამიტომ შეგვიძლია შევარჩიოთ იმდენად მცირე h რიცხვი, რომ ეს მინორი არ იყოს ნული t-ს მნიშვნელობებისათვის $c-h$-სა და $c+h$-ს შორის. ამრიგად, Γ წირის ყველა წერტილი, რომლებიც ეთანადებიან $(c-h,\ c+h)$ შუალედში მოთავსებულ t პარამეტრის მნიშვნელობებს ერთდაიმავე R სიბრტყეში მდებარეობენ. ვინაიდან ამ R სიბრტყეს P და Q სიბრტყეებთან უნდა ჰქონდეს საერთო წერტილთა უსასრულო სიმრავლე, ამიტომ ეს სამი სიბრტყე ერთმანეთს ემთხვევა.

განვაზოგადებთ რა ამ მსჯელობას, ვიპოვით რომ, თუ დეტერმინანტები:

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x, \quad dx\,d^2z-dz\,d^2x, \quad dy\,d^2z-dz\,d^2y$$

$(a,\ b)$ შუალედში, ერთდროულად არ იქცევა ნულად, მაშინ Γ წირის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. თუ კი ეს დეტერმინანტები გადაიქცევიან ერთდროულად ნულად, მაშინ შეიძლება მოხდეს, რომ Γ წირი ისეთ ბრტყელ წირთა რამოდენიმე რკალისაგან შედგება,

რომლებიც სხვადასხვა სიბრტყეში მდებარეობენ და ერთდებიან იმ წერტილებში, რომლებშიც მიმხები სიბრტყის განტოლება ღებულობს განუსაზღვრელ სახეს[1].

თუ წინა სამი მინორი რომელიმე შუალედში იგივურად ნულის ტოლია, მაშინ Γ წირი არის წრფე ან შედგენილია წრფეწირის მონაკვეთებისაგან. მაგალითად, თუ $\frac{dx}{dt}$ წარმოებული (a, b) შუალედში არ გადაიქცევა ნულად, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{d^2y\,dx-dy\,d^2x}{(dx)^2}=0,\quad \frac{d^2z\,dx-dz\,d^2x}{(dx)^2}=0,$$

საიდანაც

$$dy=C_1\,dx,\quad dz=C_3\,dx,$$

სადაც C_1 და C_3 მუდმივებია. კვლავ ინტეგრობით, მივიღებთ:

$$y=C_1x+C_1',\quad z=C_3x+C_3';$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ Γ ამ შემთხვევაში წრფეწირს წარმოადგენს.

216. სტაციონარული მხებები. წინა გამოკვლევებს ჩვენ მივყევართ ორმაგი სიმრუდის წირზე ზოგიერთ ისეთ განსაკუთრებულ წერტილების შესწავლამდე, რომლებიც ჩვენ ჯერ არ განგვიხილავს. ეს ის წერტილებია, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\frac{d^3x}{dx}=\frac{d^3y}{dy}=\frac{d^3z}{dz}. \tag{11}$$

ასეთ წერტილში წირის მხებს ს ტ ა ც ი ო ნ ა რ უ ლ ი მხები ეწოდება. თუ ვისარგებლებთ წერტილიდან წრფემდე მანძილის გამოსახვით, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ მანძილი Γ წირის რომელიმე წერტილიდან მის უსასრულოდ მახლობელ წერტილში მხებამდე, რომელიც არის, საზოგადოდ, მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე, სტაციონარულ მხებისათვის მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეა. თუ Γ წირი ბრტყელ წირად გადაიქცევა, მაშინ სტაციონარულ მხებებად იქნება მხებები გადაღუნვის წერტილებში. წინა პარაგრაფების მსჯელობიდან გამოდის, რომ ერთადერთი წირი, რომლის ყველა მხები სტაციონარულია, არის წრფე.

ყოველ წერტილში, რომელშიც მხები სტაციონარულია, ჩვენ გვაქვს $\Delta=0$, და მიმხები სიბრტყის განტოლება ღებულობს განუსაზღვრელ სახეს. მაგრამ ეს განუსაზღვრელობა—მხოლოდ მოჩვენებითია. თუ ჩვენ ამ შემთხვევისათვის გავიმეორებთ იმავე გამოანგარიშებას, რაც § 214-ის დასაწყისში გავაკეთეთ, გავაგრძელებთ რა M' წერტილის კოორდინატთა გამწკრივებას მესამე რიგის წევრამდე და ვისარგებლებთ მე-(11) დამოკიდებულებებით, მაშინ ვიპოვით, რომ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გაივლის მხებზე M წერტილში და უსასრულოდ მახლობელ M' წერტილზე, შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი სახით:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t)+\varepsilon_1 & \varphi'''(t)+\varepsilon_2 & \psi'''(t)+\varepsilon_3 \end{vmatrix}=0,$$

სადაც ε_1, ε_2, ε_3 მიისწრაფიან ნულისაკენ h-თან ერთად. ამგვარად ეს სიბრტყე სრულიად გარკვეულ ზღვარულ მდებარეობისაკენ მიისწრაფის, და ჩვენ მიმხები სიბრტყის განტოლებას მივიღებთ, თუ მე-(6) პირობებიდან მეორეს შევცვლით შემდეგით:

$$A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z=0.$$

---

[1] პირველად ეს განსაკუთრებული შემთხვევა ნაჩვენები იყო პ ე ა ნ ო ს (Peano) მიერ. ცხადია, რომ მას აქვს მხოლოდ ანალიზური ინტერესი.

თუ ადგილი აქვს აგრეთვე

$$\frac{d^2x}{dx}=\frac{d^3y}{dy}=\frac{d^3z}{dz},$$

მაშინ მეორე მე-(6) პირობებიდან უნდა შეიცვალოს შემდეგით:

$$A\,d^q x+B\,d^q y+C\,d^q z=0,$$

სადაც q უმცირესი მთელი რიცხვია, რომლისათვისაც წინა დამოკიდებულება განსხვავდება $A\,dx+B\,dy+C\,dz=0$ დამოკიდებულებისაგან. მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს ეს დებულება და ამ შემთხვევისათვის გამოიკვლიოს წირის მდებარეობა მიმხები სიბრტყის მიმართ.

ზოგად შემთხვევაში სტაციონარულ მხებისათვის არ აქვს ადგილი პირობას:

$$A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z=0;$$

ასეთ განსაკუთრებულ წერტილში ყოველი მხები სიბრტყე, გარდა მიმხები სიბრტყისა, გადიკვეთება წირთან, ხოლო მიმხები სიბრტყე წირთან არ გადიკვეთება.

ზოგიერთ წირებზე გამოყენება. განვიხილოთ ორმაგი სიმრუდის Γ წირები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგი სახის დამოკიდებულებას:

$$x\,dy-y\,dx=K\,dz, \tag{12}$$

სადაც K მოცემული მუდმივია. ამ პირობიდან მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x\,d^2y-y\,d^2x&=K\,d^2z,\\ x\,d^3y-y\,d^3x+dx\,d^2y-dy\,d^2x&=K\,d^3z. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ვიპოვოთ Γ წირის მიმხები სიბრტყე, რომელიც გაივლის სივრცის მოცემულ $(a,\ b,\ c)$ წერტილზე. თანახების წერტილის $(x,\ y,\ z)$ კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდენ განტოლებას:

$$\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z\\ dx & dy & dz\\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

მე-(12) და მე-(13) ტოლობების საფუძველზე ეს განტოლება გადაიქცევა განტოლებად:

$$ay-bx+K(c-z)=0. \tag{14}$$

მაშასადამე, Γ წირთან მიმხები სიბრტყის თანახების წერტილები წარმოადგენენ ამ წირის გადაკვეთის წერტილებს იმ სიბრტყესთან, რომელიც გაივლის $(a,\ b,\ c)$ წერტილზე და რომელიც მე-(14) განტოლებით არის წარმოდგენილი.

თუ dz d^2z, d^3z-ს შევცვლით მათი მნიშვნელობებით მე-(12) და მე-(13)-დან, შეგვიძლია $\Delta=0$ განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს წირის იმ წერტილებს, სადაც მიმხები სიბრტყე სტაციონარულია, დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Delta=\frac{1}{K}(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^3=0;$$

ამრიგად, ამ წერტილებისათვის გვაქვს:

$$\frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{y\,dx-x\,dy}=\frac{d^2z}{dz};$$

აქედან ჩანს, რომ მხები ამ წერტილებში აგრეთვე სტაციონარულია

ადვილად მიიღება რამდენიმე ორმაგი სიმრუდის წირი, რომელიც მე-(12) განტოლებას დააკმაყოფილებს. მაგალითად, შეიძლება დავუშვათ:

$$x=At^{m}, \qquad y=Bt^{n}, \qquad z=Ct^{m+n},$$

სადაც A, B, C, m, n მუდმივებია. ამ სახის უმარტივესი წირები იქნება მესამე რიგის ორმაგი სიმრუდის წირი $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ და მეოთხე რიგის ორმაგი სიმრუდის წირი $x=t$, $y=t^3$, $z=t^4$. წრიული ხრახნწირი.

$$x=a\cos t, \qquad y=a\sin t, \qquad z=Kt$$

აგრეთვე აკმაყოფილებს იმავე პირობას.

რომ მივიღოთ ორმაგი სიმრუდის ყველა წირი, რომლებიც აკმაყოფილებენ მე-(12) პირობას, ამისათვის ეს ტოლობა დავწეროთ ასე:

$$d(xy-Kz)=2y\,dx.$$

თუ აღვნიშნავთ:

$$x=f(t), \qquad xy-Kz=\varphi(t).$$

წინა ტოლობიდან მივიღებთ: $2yf'(t)=\varphi'(t)$. ამოვხსნით რა ამ სამ განტოლებას x, y, z-ის მიმართ, გვექნება კოორდინატთა ზოგადი გამოსახვანი ცვლადი პარამეტრის ფუნქციებში:

$$x=f(t), \quad y=\frac{\varphi'(t)}{2f'(t)}, \quad Kz=\frac{f(t)\varphi'(t)}{2f'(t)}-\varphi(t). \tag{15}$$

ეს ფორმულები დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ f და φ ფუნქციაზე; მაგრამ ცხადია, რომ, ზოგადობის დაურღვევლად, შეგვიძლია ერთ-ერთს ამ ფუნქციებიდან მივცეთ ნებისმიერი კერძო სახე, მაგალითად დავუშვათ $f(t)=t$.

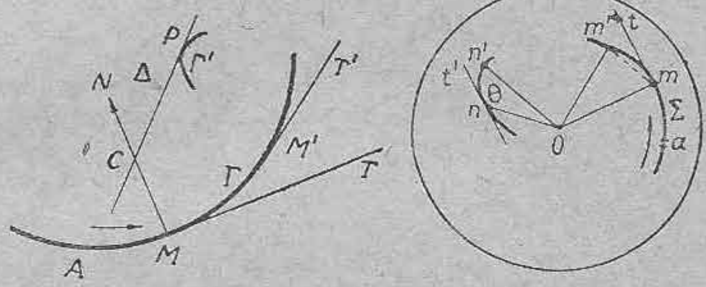
II. სიმრუდე და გრეხა. ფლადები.

217. მხებთა სფერული ინდიკატრისი. ორმაგი სიმრუდის Γ წირზე შევარჩიოთ მოძრაობის რაიმე გარკვეული მიმართულება, რომელიც მივიღოთ დადებითად, და აღვნიშნოთ წირის AM რკალის სიგრძე s-ით, რომელიც ათვლილია რაიმე A საწყის წერტილიდან რომელიმე M წერტილამდე და აღებულია $+$ ნიშნით ან $-$ ნიშნით იმისდა მიხედვით, მიმართულება A-დან M-მდე ემთხვევა დადებით მიმართულებას, თუ არა. ვთქვათ MT არის M წერტილში მხები წრფის დადებითი მიმართულება, ე. ი. მიმართულია რკალის ზრდადობის მხრით. თუ სივრცის რომელიმე O წერტილზე ჩვენ გავავლებთ ამ მხებთა პარალელურ წრფეებს, ამით მივიღებთ S კონუსს, რომელიც იქნება განფენადი ფართეულის მიმმართველი კონუსი და რომელიც მიღებულია Γ წირის მხებებით. O წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვხაზოთ ერთეული რადიუსის ტოლი სფერო, და ვთქვათ Σ ამ სფეროს მიმმართველ კონუსთან გადაკვეთის წირია. Σ წირს Γ წირის მხებთა სფერული ინდიკატრისი ეწოდება. ამ წირთა წერტილები ცალსახა თანადობაში იმყოფებიან: Γ წირის თითოეულ M წერტილს ეთანადება Σ წირზე გარკვეული m წერტილი, რომელშიც MT მიმართულების პარალელური წრფე ჰკვეთს სფეროს.

როცა M წერტილი მოხაზავს Γ წირის დადებით მიმართულებით, მაშინ m წერტილი მოხაზავს Σ წირს რომელიმე მიმართულებით, რომელსაც ჩვენ მივი-

ლეპით Σ წირზე დადებით მიმართულებად, ისე რომ ორივე წირის სათანადო s და σ რკალები იზრდებოდენ ერთდროულად (ნახ. 38).

ცხადია, რომ სფეროს O ცენტრის გადაადგილებით მთელი Σ წირი გადაადგილდება იმგვარადვე; ამიტომ შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ცენტრი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა. სრულიად ასევე, თუ Γ წირზე შევცვლით დადებით მიმართულებას, მაშინ Σ წირი შეიცვლება ახალი წირით, რომელიც წინანდელთან სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ; მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ Σ წირის mt მხები წრფის დადებითი მიმართულება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ Γ წირზე ორ მიმართულებას შორის რომელი არის მიღებული დადებითად.



ნახ. 38.

დავამტკიცოთ რომ კონუსის მხები სიბრტყე, Om მდგენელის გასწვრივ, Γ წირის M წერტილში მიმხები სიბრტყის პარალელურია.

მართლაც, ვთქვათ

$$AX+BY+CZ=0$$

არის Omm' სიბრტყის განტოლება, მასთან სფეროს O ცენტრი მიღებულია კოორდინატთა სათავედ. ეს სიბრტყე პარალელურია Γ წირის M და M' წერტილებში მხებების; მაშასადამე, თუ M და M' წერტილებს ეთანადება პარამეტრის t და $t+h$ მნიშვნელობები, მაშინ ადგილი უნდა ექნეს:

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0, \tag{16}$$

$$Af'(t+h)+B\varphi'(t+h)+C\psi'(t+h)=0. \tag{17}$$

მე-(17) განტოლება შეიძლება შეიცვალოს შემდეგით:

$$A\,\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}+B\,\frac{\varphi'(t+h)-\varphi'(t)}{h}+C\,\frac{\psi'(t+h)-\psi'}{h}=0;$$

მაგრამ როცა h მიისწრაფის ნულისაკენ უკანასკნელი განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0. \tag{18}$$

ჩვენს მიერ მიღებული მე-(16) და მე-(18) განტოლებები ისეთივეა, როგორიც განტოლებები, რომლებიდან განისაზღვრება მხები სიბრტყის განტოლებაში შემავალი A, B და C კოეფიციენტები.

218. სიმრუდის რადიუსი. ვთქვათ ω არის Γ წირის ორ ერთმანეთთან მახლობელ M და M' წერტილში MT და $M'T'$ მხებთა დადებით მიმართულებებს შორის მოთავსებული კუთხე. ზღვარს, რომლისაკენაც მიისწრაფის $\frac{\omega}{\text{arc}\, MM'}$ ფარდობა, როცა M' უსასრულოდ უახლოვდება M წერტილს, როგორც ბრტყელი წირების შემთხვევაში, ეწოდება Γ წირის სიმრუდე M წერტილში. სიმრუდის შებრუნებულ სიდიდეს, ე. ი. $\frac{\text{arc}\, MM'}{\omega}$ ფარდობის ზღვრის ტოლ სიდიდეს, სიმრუდის რადიუსი ეწოდება. სიმრუდის რადიუსი სხვანაირად შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც ზღვარი უსასრულოდ მცირე MM' და mm' რკალების ფარდობისა; მართლაც, გვაქვს:

$$\frac{\text{arc}\, MM'}{\omega}=\frac{\text{arc}\, MM'}{\text{arc}\, mm'}\cdot\frac{\text{arc}\, mm'}{\overline{mm'}}\cdot\frac{\overline{mm'}}{\omega},$$

ხოლო როცა m' მიისწრაფის m-საკენ თითოეულს $\frac{\text{arc}\, mm'}{\overline{mm'}}$ და $\frac{\overline{mm'}}{\omega}$ ფარდობებიდან ზღვრად აქვს ერთი. ვინაიდან $s=MM'$ და $\sigma=mm'$ რკალები იცვლებიან ერთი და იმავე მიმართულებით ამიტომ გვაქვს:

$$R=\frac{ds}{d\sigma}. \tag{19}$$

ვთქვათ

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t) \tag{20}$$

არის Γ წირის განტოლებები, მასთან O წერტილი აღებულია კოორდინატთა სათავედ. მაშინ m წერტილის (α, β, γ) კოორდინატები იქნება MT მხების მიმმართველი კოსინუსები; ე. ი.

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds}.$$

აქედან გვაქვს:

$$d\alpha=\frac{ds\, d^2x-dx\, d^2s}{ds^2},\quad d\beta=\frac{ds\, d^2y-dy\, d^2s}{ds^2},\quad d\gamma=\frac{ds\, d^2z-dz\, d^2s}{ds^2},$$

$$d\sigma^2=d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=\frac{(ds\, d^2x-dx\, d^2s)^2+(ds\, d^2y-dy\, d^2s)^2+(ds\, d^2z-dz\, d^2s)^2}{ds^4}.$$

ავიყვანთ რა კვადრატებში და მხედველობაში მივიღებთ ds^2-ის და $ds d^2s$-ის გამოსახვებს, მივიღებთ:

$$d\sigma^2=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dx\, d^2x+dy\, d^2y+dz\, d^2z)^2}{ds^4}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$A=dy\, d^2z-dz\, d^2y,\quad B=dz\, d^2x-dx\, d^2z,\quad C=dx\, d^2y-dy\, d^2x, \tag{21}$$

რომლებითაც ვისარგებლებთ შემდეგში, და გამოვიყენებთ რა ლაგრანჟის იგივეობას, წინა გამოსახვა შემდეგი სახით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$d\sigma^2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{ds^4}.$$

მასთან სიმრუდის რადიუსის მე-(19) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$R^2 = \frac{ds^6}{A^2+B^2+C^2}. \tag{22}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ R^2 არის x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''-ის რაციონალური ფუნქცია. თვით სიმრუდის რადიუსს ირაციონალური გამოსახვა აქვს, მაგრამ იგი განიხილება როგორც არსებითად დადებითი სიდიდე.

შენიშვნა. თუ დამოუკიდებელ ცვალადად აღებულია Γ წირის s რკალის სიგრძე, მაშინ $f(s)$, $\varphi(s)$ და $\psi(s)$ ფუნქციები დააკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$f'^2(s)+\varphi'^2(s)+\psi'^2(s)=1.$$

შემდეგ, ჩვენ გვაქვს:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=f'(s), \quad \beta=\varphi'(s), \quad \gamma=\psi'(s) \\ &d\alpha=f''(s)\,ds,\ d\beta=\varphi''(s)\,ds,\ d\gamma=\psi''(s)\,ds, \\ &d\sigma^2=\{[f''(s)]^2+[\varphi''(s)]^2+[\psi''(s)]^2\}\,ds^2, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

და სიმრუდის რადიუსისათვის გამოსახვა ღებულობს განსაკუთრებულ მარტივ სახეს:

$$\frac{1}{R^2}=[f''(s)]^2+[\varphi''(s)]^2+[\psi''(s)]^2. \tag{24}$$

219. მთავარი ნორმალი. სიმრუდის ცენტრი. გავავლოთ Γ წირის M წერტილში წრფე Σ წირის m წერტილში mt მხები წრფის პარალელური, და ამ წრფეზე განვიხილოთ mt-ს დადებითი მიმართულების პარალელური MN მიმართულება. ამგვარად მიღებულ წრფეს Γ წირის მთავარი ნორმალი ეწოდება; ეს ის ნორმალია, რომელიც მიმხებ სიბრტყეში ძევს, ვინაიდან mt მართობულია Om-ის და Omt სიბრტყე მიმხები სიბრტყის პარალელურია (§ 217). MN მიმართულებას მთავარი ნორმალის დადებითი მიმართულება ეწოდება. ეს არის სრულიად გარკვეული მიმართულება, ვინაიდან mt მხების მიმართულება არ არის დამოკიდებული Γ წირზე შერჩეული მიმართულებისაგან. ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, თუ როგორ შეიძლება ამ მიმართულების განსაზღვრა ისე, რომ არ ვისარგებლოთ ინდიკატრისით.

MN მიმართულებაზე M წერტილიდან გადავზომოთ სიმრუდის რადიუსის ტოლი MC სიგრძე; ამგვარად მიღებულ C წერტილს ეწოდება სიმრუდის ცენტრი Γ წირისა M წერტილში, ხოლო მიმხებ სიბრტყეში C წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, MC-ს ტოლი რადიუსით შემოწერილ წრეს — სიმრუდის წრე. ვთქვათ α', β', γ' მთავარი ნორმალის მიმმართულების კოსინუსებია. სიმრუდის ცენტრის x_1, y_1, z_1 კოორდინატები ტოლი იქნება:

$$x_1=x+R\alpha', \quad y_1=y+R\beta', \quad z_1=z+R\gamma'.$$

მაგრამ ჩვენ გვაქვს:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = R\frac{d\alpha}{ds} = R\frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3},$$

და ასეთივე ფორმულებს აქვს ადგილი β', და γ'-თვისაც. თუ შევცვლით x_1-ის ფორმულაში α' სიდიდეს მისი მნიშვნელობით, მივიღებთ:

$$x_1 = x + R^2 \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3}.$$

R^2-ის კოეფიციენტი შეიძლება სხვანაირად შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{ds^2 d^2x - dx\, ds\, d^2s}{ds^4} = \frac{d^2x\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dx\,(dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)}{ds^4},$$

ანუ, თუ შემოვიყვანთ A, B, C კოეფიციენტებს:

$$\frac{B dz - C dy}{ds^4}.$$

y_1-ის და z_1-ის მნიშვნელობები მიიღება x_1-ის მნიშვნელობიდან წრიული ჩასმით, და ამნაირად გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + R^2 \frac{B\, dz - C\, dy}{ds^4}, \\ y_1 &= y + R^2 \frac{C\, dx - A\, dz}{ds^4}, \\ z_1 &= z + R^2 \frac{A\, dy - B\, dx}{ds^4}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

x_1, y_1, z_1-ის ეს გამოსახულებები არიან რაციონალური x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''-ის მიმართ.

გავავლოთ M წერტილში MN-ის მართობი Q სიბრტყე; ეს სიბრტყე გაივლის MT მხებზე და არ გადაკვეთს Γ წირს M წერტილში (§ 214). დავამტკიცოთ, რომ სიმრუდის ცენტრი და M წერტილის მახლობელი Γ წირის ყველა წერტილი მოთავსებულია Q სიბრტყის ერთ მხარეზე. რომ ეს დავამტკიცოთ, ამისათვის მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადად Γ წირის s რკალის სიგრძე, რომელიც ვიანგარიშოთ M წერტილიდან. M-ის მახლობელი M' წერტილის X, Y, Z კოორდინატებისათვის, გვექნება:

$$X = x + \frac{s}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon\right),$$

და შესაბამი გამოსახულებები Y და Z კოორდინატებისათვის. მაგრამ ვინაიდან დამოუკიდებელ ცვლადად მიღებულია s, ამიტომ

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R}\alpha',$$

და X-ის მნიშვნელობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$X=x+\alpha s+\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon\right)\frac{s^2}{1.2}.$$

თუ შევცვლით Q სიბრტყის განტოლების:

$$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)=0$$

მარცხენა მხარეში მიმდინარე X, Y, Z კოორდინატებს ზემოთგამოყვანილი M' წერტილის კოორდინატების გამწკრივებით, მივიღებთ:

$$\frac{s}{1}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')+\frac{s^2}{1.2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right)=\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right),$$

სადაც η უსასრულოდ მცირეა s-თან ერთად. მაგრამ ეს სიდიდე დადებითია ნულის მახლობელი s-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. სრულიად ასევე, თუ X, Y, Z-ს შევცვლით სიმრუდის ცენტრის $x+R\alpha'$, $y+R\beta'$, $z+R\gamma'$ კოორდინატებით, ვნახავთ, რომ ჩასმის შედეგი ტოლი იქნება R-ის, ე. ი. არსებითად დადებითი სიდიდის. ამნაირად Γ წირის M-ის მახლობელი ყველა წერტილი, და აგრეთვე სიმრუდის ცენტრიც, მდებარეობენ მხები სიბრტყის ერთ მხარეზე, და ამრიგად, დებულება დამტკიცებულია.

220. პოლარი წრფე. პოლარი ფართეული. სიმრუდის ცენტრში გავლებულ მიმხები სიბრტყის Δ მართობს პოლარი წრფე ეწოდება. ეს წრფე არის Γ წირის ნორმალური სიბრტყის დამახასიათებელი. მართლაც, ცხადია, რომ Γ წირის ორ მახლობელ M და M' წერტილზე გამავალი ორი ნორმალური სიბრტყის თანაკვეთის წირი არის MT და $M'T'$ მხებების მართობი D წრფე, და მაშასადამე, ის mOm' სიბრტყის მართობია. როდესაც M' წერტილი M-ს უახლოვდება, მაშინ, mOm' სიბრტყე ზღვარში მიმხები სიბრტყის პარალელური ხდება, და ამრიგად D წრფე ზღვარში მიმხები სიბრტყის მართობი იქნება. იმის დასამტკიცებლად, რომ ეს წრფე სიმრუდის ცენტრში გაივლის, მივიღოთ დამოუკიდებელ ცვლადად Γ წირის s რკალის სიგრძე. ნორმალური სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0 \tag{26}$$

ნორმალური სიბრტყის დამახასიათებელი წირი განისაზღვრება (26) განტოლებით:

$$\frac{\alpha'}{R}(X-x)+\frac{\beta'}{R}(Y-y)+\frac{\gamma'}{R}(Z-z)-1=0. \tag{27}$$

(27) განტოლება წარმოადგენს მთავარი ნორმალის მართობ და სიმრუდის ცენტრზე გამავალ სიბრტყეს. მაშასადამე, ამ ორი სიბრტყის გადაკვეთის წირი არის პოლარი წრფე.

აქედან ჩანს, რომ სიმრუდის ცენტრი მიმხები წრის (§ 211) ცენტრს ემთხვევა, და მაშასადამე სიმრუდის წრე მიმხები წრის იგივურია. ეს შედეგი შეიძ-

ლებოდა წინასწარ შევგვენიშნა, ვინაიდან ორ წირს, როცა მათ მეორე რიგის თანახება აქვთ, ექნებათ ერთი და იგივე სიმრუდის წრე, რადგანაც ორივე ამ წირისთვის y', z', y'', z''-ს აქვთ ერთნაირი მნიშვნელობები.

პოლარ წრფეებით მიღებულ წრფოვან ფართეულს *პოლარი ფართეული* ეწოდება. როგორც ზემოხსენებულიდან ჩანს, პოლარი ფართეული არის იმავე დროს განფენადი ფართეულიც, რომელიც Γ წირის ნორმალურ სიბრტყეთა მომვლებია. თუ Γ წირი ბრტყელია, მაშინ პოლარი ფართეული არის ცილინდრი, რომელსაც თავის მართობ კვეთად აქვს Γ წირის შლილი. ამ კერძო შემთხვევაში ყველა ზემოხსენებული თვისება სავსებით ცხადია.

221. გრეხა. სიმრუდის განსაზღვრაში მხებ წრფეს თუ მიმხები სიბრტყით შევცვლით, მივალთ ახალ გეომეტრიულ ელემენტამდე, რომელიც იქნება ზომა იმ სისწრაფისა, რითაც მიმხები სიბრტყე ბრუნავს, როცა M წერტილი Γ წირზედ ძრაობს. ვთქვათ ω' არის ორ უსასრულოდ მახლობელ M და M' წერტილში მიმხებ სიბრტყეთა შორის მოთავსებული კუთხე. $\frac{\omega'}{\operatorname{arc} MM'}$ ფარდობის ზღვარს, როცა M' წერტილი უსასრულოდ უახლოვდება M-ს, ეწოდება წირის *გრეხა* M წერტილში. გრეხის შებრუნებულ სიდიდეს *გრეხის რადიუსი* ეწოდება.

M წერტილში გამავალ და მიმხები სიბრტყის მართობ წრფეს *გარემართივა (ბინორმალი)* ეწოდება. შევარჩიოთ გარემართივაზე დადებითი გეზი (ორ მიმართულებას შორის თუ რომელს მივიღებთ დადებითად, ამას ჩვენ ქვემოთ დავაწესებთ) და მისი შესაბამი მიმართულების კოსინუსები აღვნიშნოთ α'', β'', γ''-ით. კოორდინატთა სათავეზე გამავალი და ამ მიმართულების პარალელური წრფე ერთეულ რადიუსის ტოლ სფეროს გადაკვეთს რაიმე n წერტილში, რომელსაც ჩვენ ჩავთვლით Γ წირის M წერტილის შესაბამ წერტილად. n წერტილთა გეომეტრიული ადგილი იქნება რომელიმე სფერული θ წირი, და, როგორც ზემოთ ადვილად დავამტკიცებთ, რომ გრეხის რადიუსი შეიძლება აგრეთვე განვსაზღვროთ, როგორც ზღვარი Γ და θ წირების შესაბამ უსასრულოდ მცირე $\operatorname{arc} MM'$ და $\operatorname{arc} nn'$ რკალების ფარდობისა. ამნაირად ჩვენ გვაქვს:

$$T^2 = \frac{ds^2}{d\tau^2},$$

სადაც τ აღნიშნავს θ წირის რკალის სიგრძეს.

n წერტილის კოორდინატები იქნება: α'', β'', γ'', ე. ი.

$$\alpha'' = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta'' = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma'' = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

მასთან ყველა ფორმულაში რადიკალი უნდა ავიღოთ ერთი და იგივე ნიშნით. ამ ფორმულებიდან მივიღებთ $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$-ს; მაგალითად,

$$d\alpha'' = \pm\frac{(A^2+B^2+C^2)\,dA - A\,(A\,dA + B\,dB + C\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

რადგანაც $d\tau^2 = d\alpha''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2$, ამიტომ ზემოთქმულიდან გვექნება:

$$d\tau^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2)-(A\,dA+B\,dB+C\,dC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2},$$

ან, ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს იგივეობის მიხედვით:

$$d\tau^2 = \frac{(B\,dC-C\,dB)^2+(C\,dA-A\,dC)^2+(A\,dB-B\,dA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

ამ გამოსახვის მრიცხველი შეიძლება გავამარტივოთ, თუ ვისარგებლებთ დამოკიდებულებებით:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0,$$

საიდანაც გვაქვს:

$$\frac{dx}{B\,dC-C\,dB} = \frac{dy}{C\,dA-A\,dC} = \frac{dz}{A\,dB-B\,dA} = \frac{1}{K}, \tag{28}$$

სადაც $\frac{1}{K}$-ით აღნიშნულია ამ ფარდობათა საერთო მნიშვნელობა. აქედან ვღებულობთ:

$$d\tau^2 = \frac{K^2\,ds^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

რაც შეეხება K-ს, თუ ჩვენ მას გავშლით, მივიღებთ:

$$K = \frac{(dz\,d^2x-dx\,d^2z)(dx\,d^3y-dy\,d^3x)-(dx\,d^2y-dy\,d^2x)(dz\,d^3x-dx\,d^3z)}{dx} =$$

$$= dz\,d^2x\,d^3y-dx\,d^2z\,d^3y+dx\,d^2y\,d^3z-dy\,d^2x\,d^3z+dy\,d^2z\,d^3x-dz\,d^2y\,d^3x.$$

ამ გამოსახვის პირველი ნაწილი არის გაშლილი Δ დეტერმინანტი [§ 215, (8)]. ამნაირად გვაქვს:

$$d\tau = \pm\frac{\Delta\,ds}{A^2+B^2+C^2},$$

და, მაშასადამე,

$$T = \pm\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}. \tag{29}$$

თუ გრეხის T რადიუსს ჩვენ განვიხილავთ, სიმრუდის R რადიუსის მსგავსად, როგორც არსებითად დადებით სიდიდეს, მაშინ T-სათვის (29) გამოსახვის მარჯვენა ნაწილის აბსოლუტური სიდიდე უნდა ავიღოთ. მაგრამ მიღებული (29) გამოსახვა რაციონალურია x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''-ის მიმართ, რისთვისაც ბუნებრივია (29) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში მუდამ ავიღოთ ერთი და იგივე ნიშანი, ე. ი. გრეხის რადიუსი განვიხილოთ როგორც გარკვეული ნიშნით აღებული სიგრძე. ამასთან ჩანს, რომ იმის მიხედვით M წერტილისათვის გრეხის რადიუსს ექნება დადებითი თუ უარყოფითი მნიშვნელობა, Γ წირს M წერტილის მახლობლად ორნაირი დალაგება ექნება.

ვინაიდან ახლა T-ს ნიშანი დამოკიდებულია მხოლოდ Δ-ს ნიშანზე, ამიტომ განვიხილოთ, თუ როგორ იცვლება Γ წირის სახე M წერტილის მახლობლად Δ დეტერმინანტის ნიშნის მიხედვით. დავუშვათ, რომ სამწახნაგა $Oxyz$ კუთხე დალაგებულია იმგვარად, რომ დამკვირებლისათვის, რომელიც დგას xOy სიბრტყეზე O წერტილში Z-ის დადებითი მხრით, ბრუნვა Ox ღერძის დადებითი მიმართულებიდან Oy ღერძის დადებითი მიმართულებისაკენ ხდება 90^0-ით მარჯვნიდან მარცხნით.

შევარჩიოთ ახლა გარე ნორმალზედ დადებითი MN_b მიმართულება იმგვარად, რომ სამწახნაგა MT, MN, MN_b კუთხეს წიბოების იგივე წყობა ჰქონდეს, როგორც სამწახნაგა $Oxyz$ კუთხეს[1]. მაშინ, თუ ჩვენ Γ წირს უწყვეტად გადავანაცვლებთ ისე, რომ M წერტილი მივიდეს O-ში, MT მხები დაემთხვეს Ox ღერძის დადებით მიმართულებას და MN მთავარი ნორმალი Oy ღერძის დადებით მიმართულებას, მაშინ MN_b ღერძის დადებითი მიმართულებას დაემთხვევა Oz. ამ ძრაობის დროს T გრეხის რადიუსის აბსოლუტური სიდიდე რჩება უცვლელი, ამიტომ Δ დეტერმინანტი არ შეიძლება ნული გახდეს, და მაშასადამე, არ იცვლის ნიშანს[2]. დავუშვათ, რომ Γ წირი აღებულია ამ ახალი კოორდინატთა თანწყობის მიმართ, და რომ პარამეტრის $t=0$ მნიშვნელობა ეთანადება კოორდინატთა სათავეს. სათავესთან მახლობელი წერტილის კოორდინატების გამოსახულებები, იქნება:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + t^2 (a_2 + \varepsilon), \\ y &= b_2 t^2 + t^3 (b_3 + \varepsilon'), \\ z &= t^3 (c_3 + \varepsilon''). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

სადაც ε, ε', ε'' უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია t-სთან ერთად; მართლაც, $t=0$ მნიშვნელობისათვის ღერძთა ასეთი შერჩევის დროს ადგილი უნდა ექნეს: $dy=dz=d^2z=0$. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $a_1>0$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში საკმარისია t შევცვალოთ $-t$-თი, რომ a_1 შეიცვალოს $-a_1$-ით; b_2 სიდიდე დადებითია, რადგანაც t-ს ნულთან მახლობელი მნიშვნელობისათვის y უნდა იყოს დადებითი; დასასრულ, c_3 შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. მაგრამ როცა $t=0$ გვაქვს: $\Delta=12a_1b_2c_3dt^6$, ასე რომ Δ დეტერმინანტის ნიშანი იგივეა რაც c_3 სიდიდის ნიშანი. ამიტომ c_3-ის ნიშნის მიხედვით უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა. თუ $c_3>0$, მაშინ x და z უარყოფითია, როცა t იცვლება $-h$-დან 0-მდე, და დადებითი როცა t იცვლება 0-დან $+h$-მდე, სადაც h დადებითი მცირე რიცხვია. ასეთ შემთხვევაში დამკვირვებელი, რომელიც მიმხები სიბრტყის M წერტილში იმყოფება და პირით P სიმრუდის ცენტრისა-

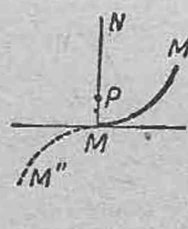
---

[1] სამწახნაგა კუთხეს, შედგენილს მხებით, ნორმალით და გარე ნორმალით ეწოდება ძირითადი სამწახნაგა კუთხე (ტრიედრი) წირის მოცემული წერტილისათვის.

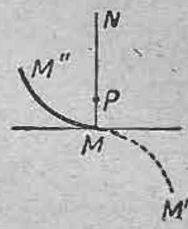
[2] თუმცა, უშუალო გამოთვლით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ღერძთა მართკუთხა ერთი თანწყობიდან მეორე მართკუთხა თანწყობაზე გადასვლისას ღერძების იმავე განლაგებით Δ დეტერმინანტის ნიშანი არ იცვლება.

ქენა არის მიქცეული, MM' რკალს დაინახავდა თავის მარჯვნივ მიმხები სიბრტყის ზემოთ, ხოლო MM'' რკალს მარცხნივ მიმხები სიბრტყის ქვემოთ (ნახ. 39ა), მაშასადამე, ეს მარჯვენა წირია (dextrorsum). რომ ადგილი ჰქონოდა $c_3<0$, მაშინ წირის დალაგება იქნებოდა შებრუნებით (ნახ. 39b), და წირი იქნებოდა მარცხენა (sinistrorsum). მასთან სულერთია, მიმხები-სიბრტყის რომელ მხარეში იმყოფება დამკვირვებელი.

მარჯვენა წირის სახე აქვს კორპსაძრობს (ბურღოს); ხვევადი მცენარეებიდან, ლობიოს აქვს მარჯვენა წირის სახე, ხოლო სვიას—მარცხენასი. წირის ეს ორი განლაგება არსებითად სხვადასხვაა. მაგალითად, ორი ხრახნწირი ერთნაირი სვლით, რომლებიც მოხაზულია ორ წრიულ ტოლ რარიუსთან ცილინდრზე, ერთი მეორეზე დაფენადია, თუ ისინი ორივე მარჯვენაა ან ორივე მარცხენა; თუ კი ერთი მარჯვენაა, ხოლო მეორე მარცხენა, მაშინ ერთი მათგანი დაეფინება ისეთ ხრახნწირზე, რომელიც მეორეს სიმეტრიულია ნებითი სიბრტყის მიმართ.



ნახ. 39a.



ნახ. 39b.

შემდეგში გრეხის T რადიუსის ფორმულას ჩვენ დავწერთ შემდეგი სახით:

$$T=-\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}. \tag{31}$$

წირი მარცხენა იქნება იმ წერტილებში, სადაც T დადებითია, და მარჯვენა, სადაც T უარყოფითი. თუ სამწახნაგა კუთხეს ექნება შებრუნებული დალაგება, მაშინ წინა წესიც შებრუნებულით უნდა შეიცვალოს.

222. ფრენეს ფორმულები. Γ წირის ყოველი M წერტილი წარმოადგენს ისეთი სამწახნაგა მართი კუთხის წვეროს, რომელიც შედგენილია მხებით, მთავარი ნორმალით და გარე ნორმალით და დალაგებულია სამწახნაგა $Oxyz$ კუთხის მაგვარად. მთავარი ნორმალის დადებითი მიმართულება სავსებით გარკვეულია; პირიქით, მხების დადებითი მიმართულება შეიძლება აღებული იქნეს ნებისმიერად და, თავის მხრივ, თვით განსაზღვრავს გარე ნორმალის მიმართულებას. ამ სამი წრფის ცხრა მიმმართველი კოსინუსების: (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ დიფერენციალები ფრენეს (Frenet) მიერ მოცემული ფორმულებით მეტად მარტივად გამოისახებიან R-ისა და T-ს საშუალებით და თვით ამ კოსინუსებით[1]. ჩვენ უკვე გამოვიყვანეთ ფორმულები $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$-სათვის:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}. \tag{32}$$

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, გვ. 284, 1864.

გარენორმალის დადებითი მიმართულების მიმმართველი კოსინუსები იქნება:

$$\alpha''=\varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\beta''=\varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma''=\varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

სადაც $\varepsilon=\pm1$.

ვინაიდან სამწახნაგა (MT, MN, MN_b) კუთხე დალაგებულია $Oxyz$ კუთხის მაგვარად, ამიტომ უნდა გვექნეს:

$$\alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma'',$$

ან

$$\alpha'=\varepsilon\frac{B\gamma-C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

მეორე მხრით, $d\alpha''$-სათვის ფორმულა შეიძლება დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$d\alpha''=\varepsilon\frac{B(B\,dA-A\,dB)+C(C\,dA-A\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ანუ, თუ მივიღებთ მხედველობაში (28) ტოლობას და K-ს მნიშვნელობას:

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\varepsilon\Delta\frac{C\beta-B\gamma}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\alpha'\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

α'-ის კოეფიციენტი წარმოადგენს $\frac{1}{T}$-ს [ფორმულა (31)]; ამნაირადვე თუ გამოვიანგარიშებთ $\frac{d\beta''}{ds}$, $\frac{d\gamma''}{ds}$-ს, მივიღებთ[1]:

$$\frac{d\alpha''}{ds}=-\frac{\alpha'}{T},\quad \frac{d\beta''}{ds}=-\frac{\beta'}{T},\quad \frac{d\gamma''}{ds}=-\frac{\gamma'}{T}; \tag{33}$$

ეს ფორმულები (32) ფორმულების მაგვარია.

რომ მივიღოთ $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, გავაწარმოვოთ ცნობილი ტოლობები:

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,$$

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0;$$

---

[1] ჩვენ რომ აგვეღო გრეხის ფორმულა ასეთი სახით: $\frac{1}{T}=\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}$, მაშინ ფ რ ე ნ ე ს ფორმულები უნდა დაგვეწერა შემდეგი სახით: $d\alpha''=-\frac{\alpha'\,ds}{T},\ldots$

შევცვლით რა $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$ მათი მნიშვნელობებით (32) და (33)-დან, გვექნება:

$$\alpha' d\alpha' + \beta' d\beta' + \gamma' d\gamma' = 0,$$

$$\alpha\, d\alpha' + \beta\, d\beta' + \gamma\, d\gamma' + \frac{ds}{R} = 0,$$

$$\alpha'' d\alpha' + \beta'' d\beta' + \gamma'' d\gamma' + \frac{ds}{T} = 0.$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებებს $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}. \tag{34}$$

(32), (33) და (34) ფორმულები საძიებელი ფ რ ე ნ ე ს ფორმულებია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (33) ფორმულიდან ჩანს, რომ α'', β'', γ'' კოორდინატებით n წერტილის მიერ შემოწერილი Θ სფერული წირის მხები მთავარი ნორმალის პარალელურია. ეს შეიძლება დავამტკიცოთ გეომეტრიულადაც. მართლაც, განვიხილოთ S' კონუსი, რომლის წვერო მოთავსებულია O წერტილში, ხოლო მიმმართველი წირი არის Θ წირი. ამ კონუსის Om მსახველი მართობია იმ სიბრტყის, რომელიც ეხება S კონუსს Om მსახველის გასწვრივ (§ 221), და მაშასადამე, S' კონუსი არის S-ის დამატებითი კონუსი. მაგრამ, როგორც ვიცით, დამატებითი კონუსების თვისებები არის ურთიერთი, ასე რომ შებრუნებით, S კონუსის Om მსახველი მართობია იმ სიბრტყისა, რომელიც ეხება S' კონუსს On-ის გასწვრივ. ვინაიდან Σ წირის mt მხები მართობია Om და On წრფეებისა, ამიტომ ის mOn სიბრტყის მართობია. იმავე მიზეზით Θ წირის nt' მხები მართობია mOn სიბრტყის. მაშ, mt და nt წრფეები არიან პარალელური.

223. x, y, z კოორდინატების გამწკრივება s-ის ხარისხებად. თუ მოცემულია დამოუკიდებელი s ცვლადის ორი ფუნქცია: $R=\varphi(s)$, $T=\psi(s)$, რომელთაგანაც პირველი დადებითია, მაშინ არსებობს ფორმით სრულიად გარკვეული ორმაგი სიმრუდის Γ წირი, გაურკვეველი მხოლოდ მდებარეობით სივრცეში, რომლის სიმრუდისა და გრეხის რადიუსები გამოისახებიან ზემო ორი ფორმულით, ამ წირის რაიმე წერტილიდან ათვლილი რკალის სიგრძის ფუნქციაში. ამ დებულების მკაცრი დამტკიცება შეიძლება მოცემული იქნეს მხოლოდ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის გავლის შემდეგ. აქ ჩვენ მხოლოდ ვაჩვენებთ, თუ როგორ შეიძლება ვიპოვოთ საძიებელი წირის წერტილის კოორდინატების გამწკრივება s-ის ხარისხებად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ეს გამწკრივება საერთოდ შესაძლებელია.

მივიღოთ კოორდინატთა ღერძებად O წერტილში მხები, მთავარი ნორმალი და გარენორმალი და ამ წირის რკალის სიგრძე ვიანგარიშოთ O წერტილიდან. კოორდინატთა სათავის მახლობელი წირის წერტილის კოორდინატები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{s}{1}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \cdots,\\
y &= \frac{s}{1}\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \cdots,\\
z &= \frac{s}{1}\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{ds^3}\right)_0 + \frac{s^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 + \cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

მაგრამ ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{dx}{ds}=\alpha, \quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R},$$

და, კიდევ გაწარმოებით:

$$\frac{d^3x}{ds^3}=-\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds}-\frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right).$$

საზოგადოდ, ფ რ ე ნ ე ს ფორმულების მიმდევრობითი გამოყენება მოგვცემს $\frac{d^nx}{ds^n}$-სათვის შემდეგ გამოსახვას:

$$\frac{d^nx}{ds^n}=L_n\alpha+M_n\alpha'+P_n\alpha'',$$

სადაც L_n, M_n და P_n არიან R-ის, T-ს და მათი s-ის მიმართ სხვადასხვა რიგის წარმოებულების ცნობილი ფუნქციები. ამნაირადვე, თუ α, α', α''-ს შევცვლით სათანადოდ β, β', β'' და γ, γ', γ''-ით, მივიღებთ წარმოებულებს y-ით და z-ით. მაგრამ კოორდინატთა სათავეზე უნდა იყოს: $\alpha_0=1, \beta_0=0, \gamma_0=0, \alpha_0'=0, \beta_0'=1,$ $\gamma_0'=0, \quad \alpha_0''=0, \quad \beta_0''=0, \quad \gamma_0''=1$, ამიტომ, თუ (35) ფორმულებში ვიკმარისებთ პირველი სამი წევრით, გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{s}{1}-\frac{s^3}{6R^2}+\ldots,\\ y&=\frac{s^2}{2R}-\frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds}+\ldots,\\ z&=-\frac{s^3}{6RT}+\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

მასთან შემდეგი წევრების ხარისხი სამზე მაღალი იქნება. ცხადია, რომ (36) ფორმულებში R, T, $\frac{dR}{ds}$, ... უნდა შეიცვალონ მათი მნიშვნელობებით, როცა $s=0$.

ამ ფორმულების საშუალებით ადვილად გამოვიანგარიშებთ ზოგიერთ უსასრულოდ მცირეთა მთავარ ნაწილებს. ასე, მაგალითად, მანძილი წირის რომელიმე წერტილიდან წირის ამავე წერტილის უსასრულოდ მახლობელ წერტილზე გავლებულ მიმხებ სიბრტყემდე არის მესამე რიგის უსასრულოდ მცირე, და მისი მთავარი ნაწილი ტოლია $-\frac{s^3}{6RT}$-ის. მანძილი წირის წერტილიდან Ox ღერძამდე, ე. ი. მხებამდე, არის მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე, და მისი მთავარი ნაწილი ტოლია $\frac{s^2}{2R}$-ის (§ 209). გამოვიანგარიშოთ კიდევ უსასრულოდ მცირე c ქორდის სიგრძე. ჩვენ გვაქვს:

$$c^2=x^2+y^2+z^2=s^2-\frac{s^4}{12R^2}+\ldots,$$

მასთან შემდეგი წევრები იქნება მეოთხეზე მაღალი ხარისხის. აქედან გამოდის:

$$c=s\left(1-\frac{s^2}{12R^2}+\ldots\right)^{\frac{1}{2}}=s\left(1-\frac{s^2}{24R^2}+\ldots\right);$$

ამგვარად $s-c$ სხვაობა მ ე ს ა მ ე რ ი გ ი ს უსასრულოდ მცირეა, და მისი მთავარი ნაწილი $\frac{s^3}{24R^2}$-ის ტოლია.

სრულიად ასევე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ უმოკლესი მინძილი წირის ორ უსასრულოდ მახლობელ წერტილში მხებთა შორის მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეა, რომლის მთავარი ნაწილი $\frac{s^3}{12RT}$-ის ტოლია. ეს თეორემა ბ უ კ ე ს (Bouquet) ეკუთვნის.

224. წირის ბუნებრივი (შინაგანი) განტოლება. თუ წირის გრეხის T რადიუსი უდრის უსასრულობას, მაშინ წირი ბრტყელია, ვინაიდან Δ უნდა უდრიდეს ნულს (§ 215), და ამ შემთხვევაში წირის განმსაზღვრელი დიფერენციალური განტოლებები ამოიხსნებიან კვადრატურებში.

წარმოვიდგინოთ, რომ დამოუკიდებელ ცვლადად აღებულია s რკალი, მართკუთხა x და y კოორდინატები, როგორც s-ის ფუნქციები, აკმაყოფილებენ ორ განტოლებას (§ 218, შენიშვნა):

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \quad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\left[\frac{1}{\varphi(s)}\right]^2. \tag{37}$$

პირველი ამ განტოლებათაგანი შეიძლება დავაკმაყოფილოთ, თუ დავუშვებთ: $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$, სადაც α-თი აღნიშნულია კუთხე, რომელსაც მხების დადებითი მიმართულება შეადგენს x ღერძთან; ამ შემთხვევაში (37)-დან მეორე განტოლება გვაძლევს:

$$d\alpha=\pm\frac{ds}{\varphi(s)};$$

ეს ფორმულა შეიძლებოდა დაგვეწერა უშუალოდ, სიმრუდის რადიუსის განსაზღვრიდან.

ინტეგრობის შემდეგ, გვექნება:

$$\alpha=\alpha_0\pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)},$$

და შემდეგ ვპოულობთ x და y-ს ახალი ორი კვადრატურის საშუალებით:

$$x=x_0+\int_{s_0}^{s}\cos\alpha\, ds, \quad y=y_0+\int_{s_0}^{s}\sin\alpha\, ds.$$

მიღებული წირები დამოკიდებულია შემდეგ სამ მუდმივზე: x_0, y_0, α_0; მაგრამ თუ ყურადღებას მივაქცევთ წირის მხოლოდ ფორმას, და არა მის მდებარეობას, მაშინ მივიღებთ, არსებითად

მხოლოდ ერთ წირს. მართლაც, განვიხილოთ კერძო C წირი, რომელიც მოცემულია განტოლებებით:

$$X = \int_{s_0}^{s} \cos \left[\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s)} \right] ds, \quad Y = \int_{s_0}^{s} \sin \left[\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s)} \right] ds.$$

თუ α-ს გამოსახვაში ჩვენ ავიღებთ დადებით ნიშანს, მაშინ ზოგადი ფორმულები შეიძლება შემდეგნაირად დავწეროთ:

$$x = x_0 + X \cos \alpha_0 + Y \sin \alpha_0,$$

$$y = y_0 + X \sin \alpha_0 + Y \cos \alpha_0.$$

მაშასადამე, ისინი იმავე C წირს წარმოადგენენ, მაგრამ სხვაგვარად დალაგებულს კოორდინატთა ღერძების მიმართ. სრულიად ასევე, თუ ჩვენ $\varphi(s)$-სთან ავიღებთ მინუს ნიშანს, მაშინ მივიღებთ წირს, რომელიც C მრუდის სიმეტრიულია X ღერძის მიმართ. ამრიგად, ბრტყელი წირი მთლიანად განსაზღვრული იქნება თავის ფორმით, თუ ცნობილია წირის სიმრუდის რადიუსი როგორც რკალის სიგრძის ფუნქცია. $R = \varphi(s)$ განტოლებას წირის ბ უ ნ ე ბ რ ი ვ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა (équation intrinsèque) ეწოდება. საზოგადოდ, თუ მოცემულია R, s, α სიდიდეებიდან ორ მათგანს შორის დამოკიდებულება, მაშინ წირი თავის ფორმით სრულიად გარკვეულია, და მისი წერტილთა კოორდინატები შეიძლება მივიღოთ კვადრატურების საშუალებით. ასე, მაგალითად, თუ ცნობილია სიმრუდის R რადიუსი α კუთხის ფუნქციაში, ე. ი. $R = f(\alpha)$, მაშინ გვექნება: $ds = f(\alpha)\, d\alpha$ და შემდეგ

$$dx = \cos \alpha\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$dy = \sin \alpha\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

და x და y მიიღება ორი კვადრატურის საშუალებით. თუ, მაგალითად, R მუდმივია, მაშინ წინა ფორმულებიდან გვაქვს:

$$x = x_0 + R \sin \alpha, \qquad y = y_0 - R \cos \alpha;$$

მაშასადამე, საძიებელი წირი წარმოადგენს R რადიუსიან წრეწირს. ეს შედეგი აგრეთვე უშუალოდ გამომდინარეობს შლადის თვისებებიდან; ვინაიდან საძიებელი წირის შლადის რკალის სიგრძე უნდა ეტოლებოდეს ნულს, ამიტომ განსახილავი წირის შლადი უნდა შეთავსდეს წერტილში.

ვიპოვოთ კიდევ ბრტყელი წირი, რომლის სიმრუდის რადიუსი რკალის სიგრძის უკუპროპორციულია, $R = \dfrac{a^2}{S}$. ჩვენ გვაქვს:

$$\alpha = \int_0^s \frac{s\, ds}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2};$$

შემდეგ

$$x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2}\, ds, \quad y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2a^2}\, ds.$$

თუმცა ეს ინტეგრალები არ გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციებით, მაგრამ არ არის ძნელი ვიქონიოთ წარმოდგენა ამ წირის ფორმაზე. როცა s იცვლება 0-დან $+\infty$-მდე, მაშინ x და y-ის მაქსიმუმებისა და მინიმუმების უსასრულო სიმრავლეზე გავლით, მიისწრა-

ფიან რაიმე საერთო სასრულო ზღვარისაკენ (§ 87); მაშასადამე, წირს სპირალის ფორმა აქვს და ასიმპტოტურად უახლოვდება $y=x$ წრფეზე გარკვეულ წერტილს [1].

225. შლილი და შლადი. Γ_1 წირს ეწოდება Γ წირის ევოლვენტი (შლილი), თუ Γ წირის მხებები შედიან Γ_1 წირის ნორმალთა შემადგენლობაში; შებრუნებით, Γ წირს Γ_1 წირის ევოლუტი (შლადი) ეწოდება. ცხადია, რომ ყველა Γ შლილი მდებარეობს განფენად ფართეულზე, რომლის უკუქცევის წიბოს როლს ასრულებს Γ წირი და ამ ფართეულის მსახველებს კვეთენ ორტოგონალურად.

ვთქვათ x, y, z არიან Γ წირის რომელიმე M წერტილის კოორდინატები; α, β, γ კი Γ წირის მხების მიმართულების კოსინუსები, ხოლო l MM_1 მონაკვეთის სიგრძე M-სა და ისეთ M_1-ს შორის, რომელშიაც შლილი ჰკვეთს შლადის M წერტილში მხებს. M_1 წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$x_1=x+l\alpha,\quad y_1=y+l\beta,\quad z_1=z+l\gamma,$$

საიდანაც

$$dx_1=dx+l\,d\alpha+\alpha\,dl,\quad dy_1=dy+l\,d\beta+\beta\,dl,\quad dz_1=dz+l\,d\gamma+\gamma\,dl.$$

M_1 წერტილით მოხაზული წირი რომ MM_1-ის მართობი იყოს, ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, ადგილი ექნეს პირობას:

$$\alpha\,dx_1+\beta\,dy_1+\gamma\,dz_1=0,$$

ე. ი.

$$\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz+dl+l(\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta+\gamma\,d\gamma)=0.$$

ანუ $ds+dl=0$.

მაშასადამე, ორმაგი სიმრუდის Γ წირის შლილები მიიღება ისეთივე აგებით, როგორც ბრტყელი წირის შლილები.

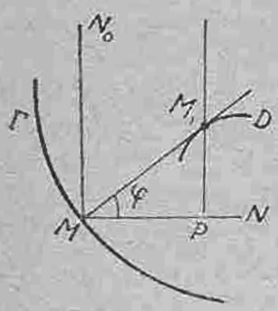
ვიპოვოთ ახლა ორმაგი სიმრუდის მოცემული Γ წირის ყველა სხვადასხვა შლადი. ამისათვის, ცხადია, Γ წირის ყველა ნორმალი უნდა შევაერთოთ ისეთ ოჯახებში, რომ თითოეული ოჯახის ნორმალები ადგენდენ განფენად ფართეულს (ნახ. 40). ყოველი MM_1 ნორმალი განისაზღვრება როგორც გადაკვეთა ნორმალ-სიბრტყისა ერთერთთან, Γ წირის მხებზე გამავალი სიბრტყეებიდან. თუ MM_1 ნორმალთა ოჯახს აქვს მომვლები, მაშინ ამ წრფის მომვლებთან შეხების M_1 წერტილი ძევს ნორმალ-სიბრტყის უსასრულოდ მახლობელ ნორმალ-სიბრტყესთან გადაკვეთაზე (§ 205, შენიშვნა II), ე. ი. პოლარ წრფეზე. მაშასადამე, ყველა შლადი პოლარ ფართეულზე მდებარეობს.

ვთქვათ D არის ერთი ამ შლადთაგანი, φ კუთხე MM_1-ის მიმართულებასა და მთავარ ნორმალის დადებით მიმართულებას შორის, ათვლილი როგორც ტრიგონომეტრიაში, ნორმალურ სიბრტყეში ბრუნვის დადებით მიმართულებად არის მიღებული მიმართულება, რომელიც $\frac{\pi}{2}$ კუთხით ბრუნვით მთავარი ნორმალის დადებით მიმართულებას დაამთხვევს გარენორმალის დადებით მიმართულებასთან (ნახ. 40). თუ λ, μ, ν ამ მიმართულების მიმმართველი კოსინუსებია, მაშინ იმის–

---

[1] ცხადია, რომ ეს წირი სათავის მიმართ სიმეტრიულად არის დალაგებული, და რომ $s=-\infty$ მნიშვნელობას ეთანადება პირველი წერტილის სიმეტრიული წირის მეორე ასიმპტოტიური წერტილი.

თვის, რომ MM_1 წრფემ შეადგინოს განფენადი ფართეული, აუცილებელია და საკმარისი, შესრულებული იყოს პირობა (§ 205):



ნახ. 40.

$$H=\begin{vmatrix}\frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds}\\ \lambda & \mu & \nu\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=0. \tag{38}$$

შემდეგი დამოკიდებულებებიდან:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0,\ \lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=\cos\varphi,$$
$$\lambda\alpha''+\mu\beta''+\nu\gamma''=\sin\varphi$$

ვღებულობთ:

$$\lambda=\alpha'\cos\varphi+\alpha''\sin\varphi,\quad \mu=\beta'\cos\varphi+\beta''\sin\varphi,$$
$$\nu=\gamma'\cos\varphi+\gamma''\sin\varphi.$$

და მაშასადამე, ფ რ ე ნ ე ს ფორმულების მიხედვით:

$$\frac{d\lambda}{ds}=-\alpha\frac{\cos\varphi}{R}+\alpha'\sin\varphi\left(\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}\right)-\alpha''\cos\varphi\left(\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}\right),$$

ხოლო $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$ მიიღებიან ამ ფორმულიდან თუ α, α', α''-ს შევცვლით შესაბამად β, β', β'' და γ, γ', γ''-ით. თუ ჩავსვამთ მიღებულ λ, μ, ν, $\frac{d\lambda}{ds}$, $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$-ს მნიშვნელობებს დეტერმინანტში, ის წარმოგვიდგება როგორც ექვსი დეტერმინანტის ჯამი; ამათგან თუ არ მივიღებთ მხედველობაში ისეთებს, რომლებიც ნულად იქცევა, ვინაიდან აქვთ ორი თანატოლი სტრიქონი, მივიღებთ:

$$\frac{1}{T}-\frac{d\varphi}{ds}=\begin{vmatrix}\frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds}\\ \lambda & \mu & \nu\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}. \tag{39}$$

თუ მარცხენა ნაწილს ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ განტოლებას[1], რომლისგან φ კუთხე განისაზღვრება შემდეგი კვადრატურის საშუალებით:

[1] ეს მარტივი შედეგი შეიძლება მივიღოთ გეომეტრიული მოსაზრებებიდან. უყურადღებოდ დავტოვებთ რა მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეებს, შეიძლება დავუშვათ, რომ M-ის მეზობელი Γ წირის M' წერტილი მოთავსებულია Γ წირის M წერტილში სიმრუდის წრეზე, ისე რომ მხები M' წერტილში არის წრეწირის მხებიც. რომ ორი ნორმალი M და M' წერტილებში ერთმანეთს ჰკვეთდეს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ეს ორი წრფე M წერტილში მიმხებ სიბრტყესთან ერთნაირ კუთხეს ადგენდეს. მაგრამ M და M'-ში ორ მიმხებ სიბრტყეს შორის მოთავსებული კუთხე გრეხის თვით განსაზღვრის ძალით $\frac{ds}{T}$-ის ტოლია. მაშასადამე, M წერტილიდან უსასრულოდ მახლობელ M' წერტილზე გადასვლის დროს კუთხე ნორმალსა და შესაბამ მიმხებ სიბრტყეს შორის იზრდება $d\varphi=\frac{ds}{T}$-ით. ამრიგად მივედით ხემოთ მიღებულ შედეგამდე.

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^s \frac{ds}{T}\,. \tag{40}$$

თუ განვიხილავთ φ_0 მუდმივის ორ სხვადასხვა მნიშვნელობის შესაბამ φ კუთხის ორ სსვადასხვა მნიშვნელობას, მაშინ φ კუთხის ამ ორ მნიშვნელობის სხვაობა Γ წირის გასწვრივ რჩება მუდმივი. აქედან გამომდინარეობს, რომ Γ წირის ორი სხვადასხვა ნორმალი, რომლებიც ეხება ორ სხვადასხვა შლადს მუდმივი კუთხით გადიკვეთება. როცა ცნობილია ერთი რომელიმე განფენადი ფართეული, მიღებულ Γ წირის ნორმალების მიერ, მაშინ ჩვენ მივიღებთ Γ წირის ნორმალებით შექმნილ ყველა სხვა განფენად ფართეულს, თუ პირველი ოჯახის ყველა ნორმალს მოვაბრუნებთ ნებისმიერი, მაგრამ მუდმივი კუთხით იმ წერტილთა გარშემო, რომლებშიც ისინი Γ წირს ჰკვეთენ.

შენიშვნა I. თუ Γ წირი ბრტყელია, მაშინ T უდრის უსასრულობას, და მე-(40) ფორმულა იძლევა $\varphi=\varphi_0$. $\varphi_0=0$ მნიშველობის შესაბამი შლადი არის ჩვეულებრივი ბრტყელი შლადი, რომელიც ამავე დროს წარმოადგენს Γ წირის სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიულ ადგილს. ამ შლადის გარდა არის კიდევ სხვა შლადების უსასრულო სიმრავლე; ყველა ისინი, დალაგებულია ცილინდრზე, რომლის მართობულ კვეთას წარმოადგენს ჩვეულებრივი შლადი და ისინი წარმოადგენენ ორმაგი სიმრუდის წირებს, მათ ხრახნწირები ეწოდება; ეს წირები ჩვენ მიერ განხილული იქნება შემდეგ პარაგრაფში. ეს ერთადერთი შემთხვევაა, როცა წირის სიმრუდის ცენტრთა ადგილი იმავე დროს მისი შლადიცაა. მართლაც, ამისათვის საჭიროა $\varphi=0$-ს; მაგრამ იმისთვის, რომ მე-(40) განტოლება კმაყოფილდებოდეს როცა $\varphi=0$, აუცილებელია T იყოს უსასრულოდ დიდი, ე. ი. რომ იყოს $\Delta=0$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში Γ წირი უნდა იყოს ბრტყელი (§ 215).

შენიშვნა II. თუ D წირი არის Γ წირის შლადი, მაშინ, შებრუნებით, Γ წირი არის D-ს შლილი წირი. მაშასადამე, თუ შლადის რკალს s_1-ით ავღნიშნავთ, რომელიც ათვლილია სათანადო მიმართულებით, გვაქვს:

$$ds_1=d\,(MM_1);$$

ამნაირად წირის ყველა შლადი გამწრფევადი წირებია.

226. ხრახნწირები. ვთქვათ C არის რაიმე ბრტყელი წირი; თუ მოვზომავთ ამ წირის ყოველი m წერტილიდან C წირის სიბრტყის მართობზე mM სიგრძეს, პროპორციულს C წირის რკალის სიგრძისა, რომელიც აითვლება რაიმე მუდმივ A წერტილიდან, ამით მივიღებთ ორმაგი სიმრუდის Γ წირს, რომელიც M წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს. ამ ორმაგი სიმრუდის Γ წირს ხრახნწირი ეწოდება. მივიღოთ C წირის სიბრტყე xOy სიბრტყედ და ვთქვათ რომ

$$x=f(\sigma),\qquad y=\varphi\,(\sigma)$$

არის C წირის რაიმე m წერტილის კოორდინატების გამოსახვა σ რკალის სიგრძის ფუნქციებში. შესაბამი Γ წირის M წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$x=f\,(\sigma),\qquad y=\varphi f\,(\sigma),\qquad z=K\sigma, \tag{41}$$

სადაც K მუდმივი მამრავლია, მასთან f და φ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ დამოკიდებულებას: $f'^2+\varphi'^2=1$. თუ Γ წირის რკალის სიგრძეს ავღნიშნავთ s-ით, (41) ფორმულიდან გვაქვს:

$$ds^2=(f'^2+\varphi'^2+K^2)\,d\sigma^2=(1+K^2)\,d\sigma^2,$$

და, მაშასადამე, $s=\sigma\sqrt{1+K^2}+H$, სადაც H მუდმივია. თუ ჩვენ შევთანხმდებით s რკალთა

სიგრძე ავთვალოთ C წირის ერთი და იმავე A წერტილიდან, მაშინ გვექნება: $H=0$ და $s=\sigma\sqrt{1+K^2}$. Γ წირის მხების მიმმართველი კოსინუსები იქნება:

$$\alpha=\frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}}, \qquad \beta=\frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}}, \qquad \gamma=\frac{K}{\sqrt{1+K^2}} \tag{42}$$

ვინაიდან γ არ არის დამოკიდებული σ-ზე, ამიტომ ხრახნწირის მხები Oz ღერძთან მუდმივ კუთხეს შეადგენს. ეს თვისება დამახასიათებელია ხრახნწირისათვის. ყოველი წირი, რომლის მხებებიც რაიმე გარკვეულ მიმართულებასთან შეადგენენ მუდმივ კუთხეს, ხრახნწირია. დებულების დასამტკიცებლად Oz ღერძად ამ მიმართულების პარალელური წრფე მივიღოთ, და ვთქვათ C არის საძიებელი Γ წირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე. Γ წირის განტოლება მუდამ შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$x=f(\sigma), \quad y=\varphi(\sigma), \quad z=\psi(\sigma), \tag{43}$$

სადაც f და φ ფუნქციები აკმაყოფილებენ $f'^2+\varphi'^2=1$ განტოლებას; ამისათვის საჭიროა მხოლოდ დამოუკიდებელ ცვლადად C წირის σ რკალი მივიღოთ. აქედან გვაქვს:

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}}=\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}}.$$

იმისათვის, რომ γ იყოს მუდმივი, აუცილებელია და საკმარისი რომ ψ' იყოს მუდმივი, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\psi(\sigma)$ უნდა იყოს შემდეგი სახის: $K\sigma+z_0$. თუ ჩვენ კოორდინატთა სათავეს გადავიტანთ $x=0$, $y=0$, $z=z_0$ წერტილში, მაშინ Γ წირისათვის მივიღებთ (41) განტოლებას.

ვინაიდან ხრახნწირისათვის γ არის მუდმივი, ამიტომ $\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}$ ფორმულიდან გამოდის $\gamma'=0$. მაშასადამე, ხრახნწირის მთავარი ნორმალი მართობია ცილინდრის მსახველისა. გარდა ამისა, ვინაიდან მთავარი ნორმალი ხრახნწირის მხების მართობია, ამიტომ ის ემთხვევა ცილინდრის ნორმალს და მიმხები სიბრტყე იქნება ცილინდრის ზედაპირის ნორმალური. ხრახნწირის გარენორმალი ცილინდრის მხებ სიბრტყეში დევს და ხრახნწირის მხების მართობია; აქედან გამოდის, რომ გარენორმალიც აგრეთვე შეადგენს Oz-თან მუდმივ კუთხეს.

რადგანაც $\gamma'=0$, ამიტომ $\frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}$ ფორმულიდან გვაქვს: $\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}=0$, ამგვარად ხრახნწირისათვის $\frac{T}{R}$ ფარდობა მუდმივია.

ყოველი ამ თვისებათაგანი ახასიათებს ხრახნწირს. მაგალითად, დავამტკიცოთ, რომ ყოველი წირი, რომლისათვისაც $\frac{T}{R}$ ფარდობა მუდმივია, არის ხრახნწირი. (ბერტრანი).

ფრენეს ფორმულებიდან გვაქვს:

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''}=\frac{d\beta}{d\beta''}=\frac{d\gamma}{d\gamma''}=\frac{T}{R}=\frac{1}{H};$$

თუ H მუდმივია, მაშინ ინტეგრობით მივიღებთ:

$$\alpha''=H\alpha-A, \quad \beta''=H\beta-B, \quad \gamma''=H\gamma-C,$$

სადაც A, B, C ახალი მუდმივებია. თუ ამ განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამად α, β, γ-ზე და შემდეგ შევკრებთ, მივიღებთ:

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=H;$$

ეს განტოლება შეიძლება სხვანაირად წარმოვადგინოთ:

$$\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{H}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

მაგრამ $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ არიან რაიმე Δ წრფის მიმმართველი კოსინუსები, და წინა დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ საძიებელი წირის მხები ამ მიმართულებასთან მუდმივ კუთხეს შეადგენს; მაშასადამე, საძიებელი წირი არის ხრახნწირი.

გამოვთვალოთ კიდევ ხრახნწირის სიმრუდის რადიუსი. თუ მხედველობაში მივიღებთ α და β-ს ზემოთმიღებულ (42) მნიშვნელობებს, გვაქვს:

$$\frac{\alpha'}{K}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{1+K^2}f''(\sigma),\quad \frac{\beta'}{R}=\frac{1}{1+K^2}\varphi''(\sigma),$$

და რადგანაც $\gamma'=0$, ამიტომ

$$\frac{1}{K^2}=\frac{1}{(1+K^2)^2}\left[f''^2(\sigma)+\varphi''^2(\sigma)\right]. \tag{44}$$

მაშასადამე, $\frac{1+K^2}{R}$ ფარდობა არა არის დამოკიდებული K-ზე. მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ, როცა $K=0$, ეს ფარდობა უდრის მართობული C კვეთის სიმრუდის რადიუსის შებრუნებული $\frac{1}{r}$ მნიშვნელობას. (§ 218) ამგვარად (44) ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით: $R=r(1+K^2)$; აქედან ჩანს, რომ ხრახნწირის სიმრუდის რადიუსი C წირის სიმრუდის რადიუსთან მუდმივ ფარდობაში იმყოფება.

აქედან ადვილად მივიღებთ ყველა წირს, რომლებისთვისაც R და T მუდმივებია. მართლაც, ვინაიდან $\frac{T}{R}$ მუდმივია, ამიტომ ბ ე რ ტ რ ა ნ ი ს თეორემის თანახმად, საძიებელი წირები ხრახნწირებს წარმოადგენენ შემდეგ, რადგან R მუდმივია, ამიტომ მუდმივია აგრეთვე C წირის სიმრუდის r რადიუსიც. მაშასადამე, ეს C წირი წრეწირია, და ს ა ძ ი ე ბ ე ლ ი წ ი რ ი არის რ გ ვ ა ლ ც ი ლ ი ნ დ რ ზ ე გ ა ვ ლ ე ბ უ ლ ი ხ რ ა ხ ნ წ ი რ ი. ეს დებულება ეკუთვნის პ ი უ ზ ო ს (*Puiseux*)[1].

227. ბერტრანის წირები. ყოველი ბრტყელი წირის მთავარი ნორმალები არის ამასთანავე მთავარი ნორმალები უსასრულო მრავალი სხვა ბრტყელი წირებისა, რომლებიც არიან პირველის პარალელური. ბ ე რ ტ რ ა ნ მ ა დასვა ამოცანა იმის შესახებ, რომ მოიძებნოს ორმაგი სიმრუდის ყველა ისეთი წირი, რომ თითოეულის მთავარი ნორმალი იყოს იმავე დროს რაიმე სხვა ორმაგი სიმრუდის წირის მთავარი ნორმალი. ვიგულისხმოთ, რომ საძიებელი Γ წირის წერტილების x, y, z კოორდინატები გამოსახული არიან მისი s რკალის სიგრძის ფუნქციის სახით. გადავზომოთ Γ წირის ყოველ მთავარ ნორმალზე l სიგრძის მონაკვეთი, და ვთქვათ X, Y, Z ამ მონაკვეთის ბოლო წერტილის კოორდინატებია; ჩვენ გვექნება:

$$X=x+l\alpha',\ Y=y+l\beta',\ Z=z+l\gamma'. \tag{45}$$

იმისათვის რომ Γ წირის მთავარი ნორმალი იყოს იმავე დროს მთავარი ნორმალი Γ' წირისა,

---

[1] ამ დამტკიცებაში ნაგულისხმევია, რომ საქმე გვაქვს ნამდვილ წირებთან, ვინაიდან ზემოთ ვგულისხმობდით, რომ $A^2+B^2+C^2$ ნულს არ ეტოლება (იხ. ლ ი ო ნ ი ს (Lyon) დისერტაცია „Sur les courbes à torsion constante". 1890].

რომელიც აღწერილია (X, Y, Z) წერტილით, ცხადია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონეს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\alpha' dX+\beta'\, dY+\gamma' dZ=0,$$

$$\alpha'(dY\,d^2Z-dZ\,d^2Y)+\beta'\,(dZ\,d^2X-dX\,d^2Z)+\gamma'\,(dX\,d^2Y-dY\,d^2X)=0$$

პირველი დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს: $dl=0$; ეს გვიჩვენებს, რომ l სიგრძე უნდა იყოს მუდმივი. თუ შემდგომ, მეორე დამოკიდებულებაში $dX, d^2X, dY, \ldots$ შევცვლით მათი მნიშვნელობებით ფრენეს ფორმულებიდან და მათი გაწარმოებით მიღებული ფორმულებიდან, ზოგიერთი გამარტივების შემდეგ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{T}\, d\left(1-\frac{l}{R}\right)=\left(1-\frac{l}{R}\right) d\left(\frac{1}{T}\right);$$

ამ განტოლების ინტეგრობით, გვექნება:

$$\frac{l}{R}+\frac{l'}{T}=1, \tag{46}$$

სადაც l' ახალი მუდმივია. ამრიგად საძიებელი წირები არიან ისეთები, რომლებისათვისაც არსებობს წრფივი დამოკიდებულება სიმრუდესა და გრეხას შორის. ცხადია, რომ ეს პირობა არის აგრეთვე საკმარისიც, მასთან l-ის სიგრძეს თვით (46) დამოკიდებულება იძლევა.

ამ წირების ერთი შესანიშნავი კერძო შემთხვევა, სახელდობრ, ის როცა სიმრუდის რადიუსი მუდმივია, განხილული იყო წინათ მონჟის მიერ. ამ შემთხვევაში (46) დამოკიდებულება გვაძლევს $l=R$ და მაშასადამე, (45) განტოლებით წარმოდგენილი Γ' წირი, არის Γ წირის სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიული ადგილი. თუ დავუშვებთ $l=R=$მუდმივს, (45) განტოლებიდან გვაქვს:

$$dX=-\frac{R}{T}\,\alpha''\,ds,\quad dY=-\frac{R}{T}\,\beta''ds,\quad dZ=-\frac{R}{T}\,\gamma''ds \tag{47}$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ Γ' წირის მხები არის Γ წირის პოლარი წრფე. Γ' წირის სიმრუდის R' რადიუსი ეტოლება:

$$R'^2=\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2}=R^2.$$

მაშასადამე, Γ' წირის სიმრუდის R' რადიუსი აგრეთვე მუდმივია და ტოლია R-ის. გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ Γ და Γ' წირებს შორის კავშირი არის ურთიერთი; თითოეული მათგანი არის მეორის პოლარი ზედაპირის უკუქცევის წიბო. ყველა ეს თვისება ადვილად შემოწმდება უშუალოდ ხრახნწირის კერძო შემთხვევაზე.

შენიშვნა. ადვილად მივიღებთ ზოგად ფორმულებს, რომლებიც წარმოადგენენ მუდმივი მნიშვნელობის მქონე სიმრუდის რადიუსიან ორმაგი სიმრუდის ყველა წირს. ვთქვათ R არის მოცემული მუდმივი რადიუსი, და დავუშვათ, რომ α, β, γ არიან ცვლადი პარამეტრის რაიმე ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ დამოკიდებულებას: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. განტოლებები:

$$X=R\int\alpha\, d\sigma,\qquad Y=R\int\beta\, d\sigma,\qquad Z=R\int\gamma\, d\sigma, \tag{48}$$

სადაც $d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}$, წარმოადგენს საძიებელ წირს, და ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ჩვენ ამგვარად ვღებულობთ მოთხოვნილი თვისების მქონე ყველა წირს. მართლაც, α, β, γ არიან მხოლოდ (48) განტოლებით წარმოდგენილი წირის მხების მიმმართველი კოსინუსები, ხოლო σ სფერული ინტიკატრისის რკალის სიგრძე (§ 217).

228. მიმხები სფერო. ჩვენ კიდევ გამოვიყენებთ ფ რ ე ნ ე ს ფორმულებს მიმხები სფეროს განსაზღვრისათვის. გამოთვლების გამარტივებისათვის ვიგულისხმოთ, რომ Γ წირის x, y, z კოორდინატები გამოსახულია მისი რკალის s სიგრძის ფუნქციების სახით. იმისთვის, რომ ρ რადიუსიანი სფეროს, ცენტრით (a, b, c) წერტილში, ჰქონდეს Γ წირთან ამ წირის მოცემულ წერტილში მესამე რიგის თანახება, საჭიროა:

$$\mathfrak{F}(s)=0, \quad \mathfrak{F}'(s)=0, \quad \mathfrak{F}''(0)=0, \quad \mathfrak{F}'''(S)=0, \tag{49}$$

სადაც

$$\mathfrak{F}(s)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\rho^2, \tag{50}$$

მასთან ნაგულისხმევია, რომ x, y, z გამოსახულია როგორც s-ის ფუნქციები: სამი უკანასკნელი განტოლების გახსნით და ფრენეს ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\mathfrak{F}'(s)=(x-a)\,\alpha+(y-b)\,\beta+(z-c)\,\gamma=0,$$

$$\mathfrak{F}''(s)=(x-a)\frac{\alpha'}{R}+(y-b)\frac{\beta'}{R}+(z-c)\frac{\gamma''}{R}+1=0,$$

$$\mathfrak{F}'''(s)=-\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-\frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\left[(x-a)\,\alpha'+(y-b)\,\beta'+(z-c)\,\gamma'\right]=0.$$

ეს განტოლებები განსაზღვრავენ a, b, c-ს. თუ პირველ მათგანში a, b, c-ს განვიხილავთ როგორც მიმდინარე კოორდინატებს, ვნახავთ, რომ პირველი განტოლება წარმოადგენს Γ წირის ნორმალ სიბრტყეს (x, y, z) წერტილში, ხოლო ორი უკანასკნელი განტოლება მიიღება პირველის გაწარმოებით ცვლადი s პარამეტრის მიმართ. მაშასადამე, მიმხები სფეროს ცენტრი ემთხვევა იმ წერტილს, სადაც პოლარი წრფე ეხება თავის მომვლებს. რომ ამოვხსნათ ეს სამი განტოლება, შევნიშნოთ, რომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ პირველ ორ განტოლებას, შეგვიძლია უკანასკნელი განტოლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$(x-a)\,\alpha''+(y-b)\,\beta''+(z-c)\,\gamma''=T\frac{dR}{ds}. \tag{51}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} a&=x+R\alpha'-T\frac{dR}{ds}\,\alpha'',\\ b&=y+R\beta'-T\frac{dR}{ds}\,\beta'',\\ c&=z+R\gamma'-T\frac{dR}{ds}\,\gamma''. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

მიმხები სფეროს რადიუსი მოცემულია ფორმულით:

$$\rho^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2. \tag{53}$$

თუ R მუდმივია, მაშინ მიმხები სფეროს ცენტრი სიმრუდის ცენტრს ემთხვევა, რაც ზემოთ (§ 227) მიღებულ შედეგს ეთანხმება.

III. წრფე წირთა ოჯახები

წრფის მდებარეობა სივრცეში დამოკიდებულია ოთხ ცვლად პარამეტრზე. მაშასადამე, ამ ოთხ პარამეტრს შორის მოცემულ დამოკიდებულებათა მიხედვით შეიძლება განხილული იქნეს ერთ, ორ ან სამ ცვლად პარამეტრზე დამოკიდებული წრფე წირთა ერთობლიობა. ერთ ცვლად პარამეტრზე დამოკიდებული ცვლადი წრფე წრფოვან ფართეულს წარმოშობს. ორ სხვადასხვა ცვლად პარამეტრზე დამოკიდებული წრფეთა ოჯახს წრფეთა კონგრუენცია ეწოდება. დასასრულ, წრფეთა კომპლექსი ეწოდება სამ პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ყოველ ოჯახს.

229. წრფოვანი ფართეულები. ვთქვათ მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემაში

$$x=az+p, \qquad y=bz+q \tag{54}$$

არის ცვლადი G წრფის განტოლებები, სადაც a, b, p, q, ერთი ცვლადი u პარამეტრის ფუნქციებია. ვნახოთ, თუ როგორ იცვლება ცვლადი G წრფის მიერ შედგენილი S ფართეულის მხები სიბრტყის მდებარეობა, როცა თანახების M წერტილი გადაადგილდება G-ს წრფივი მსახველის განგრძივ. (54) განტოლებები $z=z$ განტოლებასთან ერთად იძლევა S ფართეულის წერტილთა კოორდინატებს დამოუკიდებელ z და u პარამეტრების ფუნქციებში; მაშასადამე, § 61-ის თანახმად S ფართეულის M (x, y, z) წერტილში მხები p სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ a & b & 1 \\ a'z+p' & b'z+q' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

სადაც a', b', p', q' აღნიშნავენ a, b, p, q-ს წარმოებულებს u-ს მიმართ. თუ x-ს შევცვლით $az+p$-თი, y-ს $bz+q$-თი და გავშლით დეტერმინანტს, მივიღებთ:

$$(b'z+q')(X-aZ-p)-(a'z+p')(Y-bZ-q)=0. \tag{55}$$

(55) განტოლებიდან პირველად ყოვლისა ჩანს, რომ ფართეულის მხები სიბრტყე მუდამ გადის მსახველზე, რაც შეიძლებოდა ადრევე შეგვემჩნია; გარდა ამისა, აქედან ჩანს, რომ როცა ხდება თანახების M წერტილის გადაადგილება მსახველის გასწვრივ, მხები სიბრტყე ბრუნავს ამ მსახველის გარშემო, იმ შემთხვევის გარდა, როცა $\frac{a'z+p'}{b'z+q'}$ ფარდობა არ არის დამოკიდებული z-ზე, ე. ი. როცა

$a'q'-b'p'=0$; ამ კერძო შემთხვევას ჩვენ ჯერ არ განვიხილავთ. ვინაიდან უკანასკნელი ფარდობა z-ის მიმართ არის პირველი ხარისხის, ამიტომ ყოველ მსახველზე გამავალი სიბრტყე ეხება ფართეულს ამ მსახველის ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილში. როცა თანახების წერტილი მიდის უსასრულობაში მსახველის გასწვრივ, მაშინ მხები P სიბრტყე მიისწრაფის რაიმე P' ზღვარულ მდებარეობისაკენ, რომელსაც ეწოდება მხები სიბრტყე მსახველის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. P' სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$b'(X-aZ-p)-a'(Y-aZ-q)=0. \tag{56}$$

ვთქვათ ω არის ამ P' სიბრტყესა და ფართეულის იმავე მსახველზე მყოფ M (x, y, z) წერტილში მხებ P სიბრტყეს შორის მოთავსებული კუთხე. P და P' სიბრტყეების ნორმალთა მიმმართველი (α, β, γ) და $(\alpha', \beta', \gamma')$ კოსინუსები შესაბამად პროპორციულია შემდეგი სიდიდეებისა:

$$b'z+q',\ -(a'z+p'),\quad b(a'z+p')-a(b'z+q')$$

$$b',\quad -a';\quad a'b-ab';$$

მაშასადამე,

$$\cos\omega=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\frac{Az+B}{\sqrt{A}\,\sqrt{Az^2+2Bz+C}},$$

სადაც

$$A=a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2,$$

$$B=a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp'),$$

$$C=p'^2+q'^2+(aq'-bp')^2.$$

გამოვიანგარიშებთ რა $\operatorname{tg}\omega$-ს და გამოვიყენებთ ლაგრანჟის იგივეობას, გამარტივების შემდეგ გვექნება:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{Az+B}=\frac{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}{Az+B}. \tag{57}$$

(57) ფორმულიდან ჩანს, რომ ზღვარული მხები P' სიბრტყე მართობია მხებ P_1 სიბრტყისა G მსახველზე მდებარე რაიმე O_1 წერტილში; ამ წერტილის z_1 კოორდინატი ტოლია:

$$z_1=-\frac{B}{A}=-\frac{a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp')}{a'^2+b'^2-(ab'-ba')^2}. \tag{58}$$

O_1 წერტილს G მსახველის ცენტრალური წერტილი ეწოდება, ხოლო O_1 წერტილში მხებ P_1 სიბრტყეს ცენტრალური სიბრტყე. ვინაიდან მსახველის რომელიმე M წერტილში მხებ სიბრტყესა და ცენტრალურ P_1 სიბრტყეს შორის მოთავსებული θ კუთხე ეტოლება $\frac{\pi}{2}-\omega$-ს, ამიტომ (57) ფორმულა შეიძლება შეიცვალოს შემდეგით:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{A(z-z_1)}{\sqrt{AC-B^2}}=\frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2](z-z_1)}{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

ვთქვათ ρ არის მხები სიბრტყის თანახებ M წერტილიდან ცენტრალურ O_1 წერტილამდე მანძილი, რომელიც აღებულია პლიუს ან მინუსი ნიშნით იმისდამიხედვით, ადგენს თუ არა OM ვექტორი Oz ღერძთან მახვილ თუ ბლაგვ კუთხეს. ჩვენ გვექნება: $\rho=(z-z_1)\sqrt{1+a^2+b^2}$, და წინა ფორმულა შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$\operatorname{tg}\theta=k\rho, \tag{59}$$

სადაც

$$k=\frac{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2}{(a'q'-b'p')(1+a^2+b^2)}; \tag{60}$$

k მამრავლს წრფოვანი ფართეულის *განრიგების პარამეტრი* ეწოდება. (59) ფორმულით ძალიან მარტივად გამოისახება კანონი მხები სიბრტყის ბრუნვისა მსახველის გარშემო; ამ ფორმულაში შედის მხოლოდ გეომეტრიული მნიშვნელობის ელემენტები; მართლაც, ქვემოთ ვნახავთ, თუ როგორ შეიძლება k პარამეტრის გეომეტრიულად განსაზღვრა.

ეს ფორმულა, მაინც, ერთგვარ განუსაზღვრელობას წარმოადგენს, ვინაიდან უშუალოდ არ ჩანს, რომელ მიმართულებით უნდა ვიანგარიშოთ θ კუთხე; სხვანაირად რომ ვთქვათ, არ არის ცნობილი თუ რომელ მიმართულებით ბრუნავს მხები სიბრტყე მსახველის გარშემო, როცა თანახების წერტილი ამ მსახველის გასწვრივ გადაადგილდება.

ბრუნვის ეს მიმართულება სავსებით განისაზღვრება k პარამეტრის ნიშნით. რომ ეს გავარკვიოთ, ამისათვის წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომელიც წევს G მსახველის გასწვრივ. თანახების M წერტილის გადაადგილებისას მსახველის გასწვრივ დამკვირვებლის ფეხებიდან თავისაკენ უკანასკნელი დაინახავს, რომ მხები სიბრტყე ბრუნავს ან მარცხნიდან მარჯვნივ, ან კიდევ მარჯვნიდან მარცხნივ. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ამგვარად განსაზღვრული ბრუნვის მიმართულება დაცული იქნება იმ შემთხვევაშიაც, როცა დამკვირვებელი შეიცვლის მდებარეობას ისე, რომ მისი ფეხები მოთავსდება იმ ადგილას, სადაც უწინ თავი იყო, და შებრუნებით. ორი ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი, რომლებსაც საერთო მსახველი აქვთ და სიმეტრიული არიან ამ მსახველზე გამავალი სიბრტყის მიმართ, იძლევა ნათელ წარმოდგენას ამ ორ სხვადასხვა მდებარეობაზე. გადავაადგილოთ კოორდინატთა ღერძები უწყვეტი მოძრაობით იმგვარად, რომ კოორდინატთა სათავე მოხვდეს ცენტრალურ O_1 წერტილში, Oz ღერძი დაემთხვეს G მსახველს, და xOz სიბრტყე ცენტრალურ P_1 სიბრტყეს. ცხადია, რომ პარამეტრის განრიგების მე-(60) გამოსახვა ინარჩუნებს ამ შემთხვევაში თავის მნიშვნელობას [1], და (59) ფორმულა ახალი თანწყობისათვის გადაიქცევა ფორმულად:

$$\operatorname{tg}\theta=kz, \tag{59'}$$

[1] ეს ჩანს (59) ფორმულიდან, სადაც θ და ρ-ს კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე დამოუკიდებელი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ.

სადაც θ აღნიშნავს მხებ სიბრტყესა და $y=0$ სიბრტყეს შორის მოთავსებულ კუთხეს, რომელიც ათვლილია სათანადო მიმართულებით. Oz ღერძის შესაბამ პარამეტრის u_0 მნიშვნელობისათვის, ჩვენ უნდა გვექნეს: $a=b=p=q=0$; ამ შემთხვევაში მხები სიბრტყის (55) განტოლება გადაიქცევა განტოლებად:

$$(b'z+q')X-(a'z+p')Y=0.$$

რომ კოორდინატთა სათავე იყოს ცენტრალური წერტილი, ხოლო xOz სიბრტყე —ცენტრალური სიბრტყე, ამისათვის საჭიროა $a'=0$, $q'=0$; მაშასადამე, მხები სიბრტყის განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს: $Y=\frac{b'z}{p'}X$, მასთან მე-(60) ფორმულა იძლევა $k=-\frac{b'}{p'}$. აქედან ჩანს, რომ (59') ფორმულაში θ კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად უნდა მივიღოთ Oy ღერძის Ox-საკენ ბრუნვის მიმართულება. თუ კოორდინატთა ღერძებს ისეთივე მიმართულება აქვთ როგორც ზემოთ § 221-ში, მაშინ Oz ღერძის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელი დაინახავს, რომ მხები სიბრტყე მობრუნდება მარცხნიდან მარჯვნივ, როცა k დადებითია, და მარჯვნიდან მარცხნივ, როცა k უარყოფითია.

წრფოვან ფართეულთა ყველა მსახველის ცენტრალურ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს კუმშვის წირი (ligne de striction) ანუ ყელური წირი ეწოდება. ამ წირის წერტილთა კოორდინატები გამოისახებიან u პარამეტრის ფუნქციებში (54) და (58) განტოლებებით.

შენიშვნა. თუ მოცემულ მსახველისათვის გვაქვს: $a'q'=b'p'$, მაშინ ფართეულის მხები სიბრტყეები ამ მსახველის ყოველ წერტილში ერთმანეთს ემთხვევა. თუ უკანასკნელ თანაფარდობას ადგილი აქვს ყველა მსახველისათვის, ე. ი. u პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის, მაშინ წრფოვანი ფართეული განფენადი ფართეულია (§ 205). უკანასკნელ შემთხვევაში ადვილად მივალთ § 205-ში მიღებულ შედეგებამდე. მართლაც, თუ a' და b' ერთდროულად ნულს არ უდრის, მაშინ G მსახველის ყველა წერტილში ფართეულის მხები სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევა. მაგრამ $z=-\frac{p'}{p'}=-\frac{q'}{b'}$ წერტილში, ე. ი. მსახველის მომვლებთან შეხების წერტილში, მხები სიბრტყის განტოლება ხდება განუზღვრელი. თუ მივიღებთ მხედველობაში $a'q'=b'p'$ თანაფარდობას, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ (58) ფორმულით განსაზღვრული z_1-ის მნიშვნელობა $z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$ მნიშვნელობის იგივურია. მაშასადამე, განფენადი ფართეულისათვის კუმშვის წირი ემთხვევა უკუქცევის წიბოს. რაც შეეხება განრიგების პარამეტრს, ის განფენადი ფართეულისათვის უსასრულობის ტოლია. თუ ყოველი მსახველისათვის $a'=b'=0$, მაშინ ფართეული არის ცილინდრი; ამ შემთხვევაში ცენტრალური წერტილი განუზღვრელია.

ცენტრალური წერტილი და განრიგების პარამეტრი შეიძლება განისაზღვრონ კიდევ შემდეგნაირად. განვიხილოთ G-სთან ერთად მახლობელი $u+h$ პარამეტრის მნიშვნელობის შესაბამი G_1 მსახველი. G_1 მსახველის განტოლება იქნება:

$$x=(a+\Delta a)z+p+\Delta p, \qquad y=(b+\Delta b)z+q+\Delta q. \tag{61}$$

ვთქვათ δ არის ორივე G და G_1 წრფეს შორის უმოკლესი მანძილი, α—კუთხე ამ წრფეებს შორის, ხოლო X, Y, Z კი კოორდინატები G მსახველის გადაკვეთის წერტილისა ორივე მსახველის საერთო მართობთან. ანალიზური გეომეტრიის ცნობილი ფორმულებიდან, გვაქვს:

$$Z=-\frac{\Delta a\,\Delta q+\Delta b\,\Delta p+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)\,[(a+\Delta a)\,\Delta q-(b+\Delta b)\,\Delta p]}{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)^2},$$

$$\text{ზ}=\frac{\Delta a\,\Delta q-\Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2+(\Delta b)+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{(a+\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2+1}}.$$

როდესაც h ნულს უახლოვდება Z ზღვარში გადაიქცევა ზემოთ ნაპოვნ (58) z_1-ის გამოსახვად, ხოლო $\frac{\sin\alpha}{\text{ზ}}$ ზღვარში k-ს იძლევა. მაშასადამე, ცენტრალური წერტილი G და G_1 მომვლებთა საერთო მართობის ფუძის ზღვარული მდებარეობაა, ხოლო განრიგების პარამეტრი $\frac{\sin\alpha}{\text{ზ}}$ ფარდობის ზღვარის ტოლია.

ზ-ს გამოსახვაში Δa, Δb, Δp, Δq სიდიდეები შევცვალოთ მათი გამწკრივებით h-ის ხარისხებად:

$$\Delta a=ha'+\frac{h^2}{1\,.\,2}a''+\ldots,$$

და ამის მსგავსად Δb, Δp, Δq-სათვის. მაშინ ზ-ს გამოსახვის მრიცხველი იქნება:

$$\Delta a\,\Delta q-\Delta b\,\Delta p=h^2(a'q'-b'p')+\frac{h^3}{2}(a''q'+a'q''-b''p'-b'p'')+\cdots,$$

ამავე დროს მნიშვნელი h-ის მიმართ მუდამ პირველი ხარისხის იქნება. ჩვენ ვხედავთ, რომ ზ, საერთოდ, პირველი რიგის უსასრულოდ მცირეა, განფენადი ფართეულის შემთხვევის გამოკლებით, როცა $a'q'-b'p'=0$. მაგრამ $\frac{h^3}{2}$-ის კოეფიციენტი არის $a'q'-b'p'$-ის წარმოებული; ამრიგად, განფენადი ფართეულების შემთხვევაში ეს კოეფიციენტი აგრეთვე ნულის ტოლია, და ამიტომ განფენადი ფართეულებისათვის უმოკლესი მანძილი ორ უსასრულოდ მახლობელ მსახველს შორის იქნება არა მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე, არამედ მესამე რიგის (§ 223). ეს შენიშვნა ეკუთვნის ბ უ კ ე ს, რომელმაც, გარდა ამისა, დაამტკიცა, რომ თუ რომელიმე ფართეულისათვის ეს მანძილი მეოთხე რიგის უსასრულოდ მცირეს წარმოადგენს, მაშინ ის ნულს უნდა ეტოლებოდეს; ეს იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა განსახილავი წრფეწირები ან ეხებიან ბრტყელ წირებს ან შეადგენენ კონუსურ ფართეულს. რომ ამაში დავრწმუნდეთ საჭიროა მხოლოდ გავაგრძელოთ $\Delta a\,\Delta q-\Delta b\,\Delta p$ გამოსახვის გამწკრივება მეოთხე რიგის წევრებამდე.

230. კონგრუენციები. ფოკალური ფართეულები. ყოველ ერთობლიობას წირებისას:

$$x=az+p,\qquad y=bz+q, \tag{62}$$

სადაც a, b, q დამოკიდებული არიან ორ α და β ცვლად პარამეტრზე წ რ ფ ე თ ა კ ო ნ გ რ უ ე ნ ც ი ა ეწოდება. საზოგადოდ, სივრცის ყოველ წერტილში რამდენიმე კონგრუენციის წირი გადის, ვინაიდან მოცემულ x, y, z მნიშვნელობათათვის α და β-ს განსაზღვრისათვის ჩვენ გვაქვს ორი (62) განტოლება. თუ α და β პარამეტრებს შორის დავამყარებთ რაიმე თანაფარდობას, მაშინ ცვლადი G წრფე, რომელიც (62) განტოლებებით არის წარმოდგენილი, ჰქმნის წრფოვან ფართეულს, რომელიც, საზოგადოდ, არ იქნება განფენადი. იმისათვის, რომ ეს ფართეული იყოს განფენადი, საჭიროა როგორც ვიცით:

$$da\,dq-db\,dp=0;$$

თუ აქ da-ს შევცვლით $\frac{\partial a}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial a}{\partial\beta}d\beta\ldots$,-ით, მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta} d\beta\right) - \left(\frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta} d\beta\right) = 0. \quad (63)$$

ამ $\frac{d\beta}{d\alpha}$-ის მიმართ მეორე ხარისხის განტოლებიდან ჩვენ მივიღებთ საზოგადოდ $\frac{d\beta}{d\alpha}$-სათვის ორ სხვადასხვა ამოხსნას:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_1(\alpha, \beta), \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_2(\alpha, \beta). \quad (64)$$

ზოგიერთ მეტად ზოგად პირობებში, რომლებსაც ჩვენ შემდეგში მოვიყვანთ და რომლებსაც აქ შესრულებულად ვიგულისხმებთ, ყოველი (64) განტოლებებიდან შეიძლება დავაკმაყოფილოთ, თუ β-ად მივიღებთ ერთ-ერთს α-ს რაიმე გარკვეული ფუნქციის უსასრულო სიმრავლიდან; ამასთან ყოველ ამ განტოლებათაგანს ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალი აქვს, რომელიც ღებულობს მოცემულ β_0 მნიშვნელობას როცა $\alpha=\alpha_0$. მაშასადამე, G კონგრუენციის ყოველი წრფე ეკუთვნის ორ განფენად ფართეულს, რომელთა ყველა მსახველი ამავე კონგრუენციის წრფეებია. ვთქვათ Γ და Γ' არის ამ ორი განფენადი ფართეულის უკუქცევის წიბოები, A და A' კი თანახების წერტილები G წრფისა Γ და Γ'-სთან. ამ A და A' წერტილებს მსახველის ფოკალური წერტილები ეწოდება. მათი ძიება (63) განტოლებათა ინტეგრობის გარეშე, რომელიც განსაზღვრავს კონგრუენციის განფენად ფართეულებს, შეიძლება შემდეგნაირად. ყოველი ამ წერტილთა ζ კოორდინატი უნდა აკმაყოფილებდეს ორ თანაფარდობას:

$$\zeta\, da + dp = 0, \qquad \zeta\, db + dq = 0;$$

აქ da, db, dp, dq-ს თუ მათი გამოსახვებით შევცვლით, მივიღებთ:

$$\zeta\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta\right) + \frac{\partial p}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

$$\zeta\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta\right) + \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

ამ განტოლებებიდან ζ-ის გამორიცხვით მივალთ (63) განტოლებამდე; ხოლო თუ მათგან გამოვრიცხავთ $\frac{d\beta}{d\alpha}$-სს, მაშინ მივიღებთ მეორე ხარისხის შემდეგ განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს ორივე ფოკალურ წერტილს:

$$\left(\zeta \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)\left(\zeta \frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\right) - \left(\zeta \frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\right)\left(\zeta \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) = 0. \quad (65)$$

A და A' ფოკალურ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი ადგენს ორ Σ და Σ' ფართეულს, რომელთა განტოლებასაც მივიღებთ თუ α და β-ს გამოვრიცხავთ (62) და (65) განტოლებებიდან. ეს ფართეულები არ იქნება, საზოგადოდ, ანალიზურად განსხვავებული, არამედ შეადგენენ ერთი და იმავე ფართეულის ორ კალთას; ამ ფართეულს ფოკალური ფართეული ეწოდება. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ფოკალური ფართეული არის კონგრუენციის განფენადი ფართეულების უკუქცევის წიბოების გეომეტრიული ადგილი. მართლაც, თვით Γ წირის განსაზღვრიდან ცხადია, რომ ამ წირის მის რომელიმე A წერტილში მხები წრფე ეკუთვნის კონგრუენციას; მაშასადამე, A წერტილი ამ წფრის ერთ-ერთი ფოკალური წერტილთაგანია. ცხადია, კონგრუენციის ყოველი წრფე ეხება ფოკალური ფართეულის ორივე Σ და Σ' კალთას, ვინაიდან ასეთი წრფე ეხება ამ კალთებზე დალაგებულ ორ Γ და Γ' წირს.

ფოკალური ფართეულის Σ და Σ' კალთების მხები სიბრტყეები A და A' წერტილებში მოიძებნება შემდეგნაირად (იხ. ნახ. 41 გვ. 541). ვიგულისხმოთ, მაგალითად, რომ G წრფე თავის

გადაადგილებისას, რჩება Γ წირის მხებად; მასთან ის რჩება აგრეთვე Σ' კალთის მხებადაც, და მისი Σ'-თან თანაზების წერტილი მოხაზავს რაიმე γ' წირს, რომელიც უეჭველად განსხვავებულია Γ' წირისაგან. ამრიგად, G წრფით შექმნილი განფენადი ფართეული Σ' კალთას A' წერტილში ეხება; მართლაც, ვინაიდან ორივე ფართეულის მხებ სიბრტყეებს აქვთ საერთო G წრფე და საერთო γ' წირის მხები, ამიტომ ეს მხები სიბრტყეები თანამთხვეულია. მაშასადამე, Σ' კალთის A' წერტილში მხები სიბრტყე იქნება Γ წირის A წერტილში მიმხები სიბრტყე. სრულიად ასევე შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ Σ კალთის A წერტილში მხები სიბრტყე იქნება Γ' წირის მიმხები სიბრტყე A' წერტილში. ამ ორ სიბრტყეს კონგრუენციის ფ ო კ ა ლ უ რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე ე ბ ი ეწოდება.

ფოკალური სიბრტყეების განსაზღვრა უშუალოდ შეიძლება შემდეგი გზით. ვთქვათ

$$x-az-p+\lambda(y-bz-q)=0$$

არის ფოკალური სიბრტყის განტოლება, რომელიც კონგრუენციის G წრფეზე გადის. როცა ეს წრფე გადაადგილებისას მოხაზავს კონგრუენციის განფენად ფართეულთაგან ერთერთს, მაშინ α, β და γ არიან ცვლადი პარამეტრის ფუნქციები, ასე რომ ამ სიბრტყის დამახასიათებელი თვით G წრფე არის. მაგრამ ეს დამახასიათებელი არის ცვლადი სიბრტყის გადაკვეთა იმ სიბრტყესთან, რომლის განტოლებაც არის:

$$-z\,da-dp+d\lambda\,(y-bz-q)-\lambda\,(z\,db+dq)=0.$$

რომ ეს მეორე სიბრტყე G წრფეზე გადიოდეს, აუცილებელია:

$$da+\lambda\,db=0, \qquad dp+\lambda\,dq=0.$$

თუ გამოვრიცხავთ λ-ს, მივიღებთ (63) სახის განტოლებას; მაგრამ, თუ გამოვრიცხავთ $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ფარდობას მივიღებთ λ-ს მიმართ შემდეგი მეორე რიგის განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს ორ ფოკალურ სიბრტყეს:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial b}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \beta}+\lambda\frac{\partial q}{\partial \beta}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial \beta}+\lambda\frac{\partial b}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)=0. \tag{66}$$

მოსალოდნელია, რომ ფოკალური ფართეულის ორ კალთიდან ერთ-ერთი C წირად გადაიქცეს. ამ შემთხვევაში კონგრუენციის წრფეები რჩებიან Σ კალთას მხებად და გადიკვეთებიან C წირთან; განფენად ფართეულთა ოჯახებიდან ერთ-ერთი შედგენილი იქნება Σ ფართეულის გარშემო შემოხაზული კონუსებისაგან, რომელთა წვეროები იქნება C წირის წერტილებში. თუ ფოკალური ფართეულის ორივე კალთა გადაიქცევა შესაბამად C და C' წირებად, მაშინ განფენად ფართეულთა ორივე ოჯახი შედგება კონუსებისაგან, რომლებსაც აქვთ წვეროები ერთერთში C და C' მრუდეებიდან და რომლებიც გაივლიან მეორეზე. თუ C და C' წირები წრფეებს წარმოადგენენ, მაშინ კონგრუენციას წ ი რ უ ლ ი კ ო ნ გ რ უ ე ნ ც ი ა ეწოდება.

231. ნორმალთა კონგრუენცია. ცხადია, რომ ყოველი ფართეულის ნორმალები შეადგენენ კონგრუენციას, მაგრამ შებრუნებული დებულება არ არის სამართლიანი; ყოველთვის არ არსებობს ისეთი ფართეული, რომელიც მუდამ იყოს ნორმალი მოცემული კონგრუენციის ყველა წრფისა. მართლაც, გამოვარკვიოთ, თუ რა პირობებში იქნება (62) განტოლებით წარმოდგენილი ყველა წრფე რაიმე ფართეულის ნორმალი. ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს ისეთი $f(\alpha, \beta)$ ფუნქცია, რომ S ფართეულს, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$x=az+p, \qquad y=bz+q, \qquad z=f(\alpha, \beta), \tag{67}$$

ნორმალებად სწორედ G წრფეები ჰქონდეს. მაშასადამე, ჩვენ უნდა გვექნეს:

$$a\,dx+b\,dy+dz=0,$$

ან

$$a\frac{\partial x}{\partial \alpha}+b\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}=0,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial \beta}+b\frac{\partial y}{\partial \beta}+\frac{\partial z}{\partial \beta}=0;$$

შევცვლით რა ამ განტოლებებში x-ს $az+p$-თი, ხოლო y-ს $bz+q$-თი და მათ გავყოფთ $\sqrt{a^2+b^2+1}$-ზე, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)+\frac{a\frac{\partial p}{\partial \alpha}+b\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0,\\&\frac{\partial}{\partial \beta}\left(z\sqrt{a^2+b^2+1}\right)+\frac{a\frac{\partial p}{\partial \beta}+b\frac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0.\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

იმისთვის რომ ეს განტოლებები იყვნენ თავსებადი, აუცილებელია და საკმარისი რომ იყოს:

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{a\frac{\partial p}{\partial \alpha}+b\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{a\frac{\partial p}{\partial \beta}+b\frac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right).\tag{69}$$

თუ (69) პირობა შესრულებულია, მაშინ (68) განტოლებებიდან შეიძლება განვსაზღვროთ z კვადრატურით. ფართეულები, რომლებსაც მივიღებთ, იქნებიან დამოკიდებული ერთ ნებისმიერ მუდმივზე (ინტეგრობის მუდმივი) და შეადგენენ პარალელურ ფართეულთა ოჯახს.

რომ გამოვარკვიოთ (69) პირობის გეომეტრიული მნიშვნელობა, შევნიშნოთ, რომ კონგრუენციის რომელიმე წრფეზე გამავალი ორი ფოკალური სიბრტყის მართობობის პირობა არის:

$$1+\lambda_1\lambda_2+(a+b\lambda_1)(a+b\lambda_2)=0,$$

სადაც λ_1 და λ_2 არიან (66) განტოლების ამონახსნები. თუ $\lambda_1+\lambda_2$ და $\lambda_1\lambda_2$-ს მათი მნიშვნელობებით შევცვლით, მაშინ ეს პირობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$(1+a^2)\frac{D(b,q)}{D(\alpha,\beta)}+(1+b^2)\frac{D(a,p)}{D(\alpha,\beta)}=ab\left[\frac{D(a,q)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{D(b,p)}{D(\alpha,\beta)}\right],$$

და ის (67) პირობის იგივურია.

ამრიგად ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან დებულებას:

იმისათვის, რომ კონგრუენციის წრფეები რაიმე სიბრტყის ნორმალები იყვნენ, აუცილებელია და საკმარისი, კონგრუენციის თითოეულ წრფეზე გამავალი ფოკალური სიბრტყეები იყვნენ ურთიერთ მართობული.

შენიშვნა 1. თუ ჩვენ მივიღებთ ცვლად პარამეტრებად α და β-ს, რომლებიც წარმოადგენენ იმ კუთხის კოსინუსებს, რომლებსაც წრფე ადგენს Ox და Oy ღერძებთან, მაშინ გვექნება:

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\qquad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$

და (68) განტოლება გადაიქცევა შემდეგი სახის განტოლებად:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0, \\ \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial\beta}+\beta\frac{\partial q}{\partial\beta}=0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

(69)-ის ინტეგრობის პირობა ღებულობს სახეს: $\frac{\partial q}{\partial\alpha}=\frac{\partial p}{\partial\beta}$, აქედან გამოდის, რომ p და q არიან რაიმე $F(\alpha, \beta)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები:

$$p=\frac{\partial F}{\partial\alpha}, \qquad q=\frac{\partial F}{\partial\beta},$$

მასთან $F(\alpha, \beta)$ ფუნქცია მიიღება კვადრატურის საშუალებით. მოვძებნით რა F ფუნქციას, შემდეგ ჩვენ მივიღებთ z-ს ,თუ მოვახდენთ ინტეგრობას შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისას სრულ დიფერენციალებში:

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)=-\left(\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)d\alpha-\left(\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\right)d\beta;$$

საიდანაც გვაქვს:

$$z=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C+F-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\right),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა II. რაიმე Γ წირის ნორმალები არიან აგრეთვე ნორმალები მილისებრი ფართეულისა, რომელიც არის მომვლები მუდმივ რადიუსიანი ისეთ სფეროთა ოჯახის, რომელთა ცენტრები Γ წირზე მდებარეობენ; მაშასადამე, ისინი შეადგენენ ნორმალთა კონგრუენციას. ფოკალური ფართეულის ერთ-ერთი კალთა Γ წირად გადაიქცევა, ხოლო მეორე არის Γ წირის კიდური ფართეული. ერთ-ერთი MN ნორმალზე გამავალი ფოკალური სიბრტყეთაგანი Γ წირის ნორმალ სიბრტყეს წარმოადგენს, ხოლო მეორე ფოკალური სიბრტყე Γ წირის MT მხებზე გაივლის; ცხადია, რომ ისინი არიან ორტოგონალური.

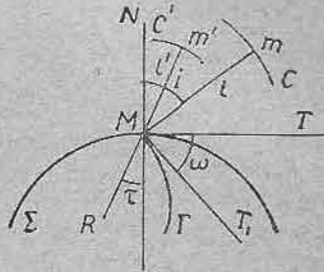
ტორის ნორმალები შეადგენენ კონგრუენციას, რომლის ორივე ფოკალური ფართეული იქცევა ორ წირად—ტორის ღერძად და წრეწირად, რომელიც მერიდიანების ცენტრთა ადგილს წარმოადგენს.

231 ა. მალიუსის თეორემა. თუ რომელიმე წერტილიდან გამომავალი შუქსხივები აირეკლებიან ან გარდატყდებიან რაიმე ფართეულით, მაშინ არეკლვის ან გარდატეხის შემდეგ ისინი იქნება ნორმალები, რომელიმე პარალელურ ფართეულთა ოჯახისა. ეს დებულება, რომელიც მ ა ლ ი უ ს ს (Malus) ეკუთვნის, განზოგადოებული იყო კ ო შ ი ს, დ ი უ პ ე ნ ი ს (Dupin), ჟ ე რ გ ო ნ ი ს (Gergonne) და კ ე ტ ლ ე ს (Quételet) მიერ რამდენიმე მიმდევრობითი ანარეკლის შემთხვევაზე ან გარდატეხაზე, და ჩვენ გვაქვს შემდეგი უფრო ზოგადი თეორემა:

თ უ შ უ ქ ს ხ ი ვ ე ბ ი რ ო მ ე ლ ი მ ე ფ ა რ თ ე უ ლ ი ს მ ა რ თ ო ბ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი რ ი ც ხ ვ ი ა რ ე კ ლ ვ ი ს ა დ ა გ ა რ დ ა ტ ე ხ ი ს შ ე მ დ ე გ ი ს ი ნ ი ა გ რ ე თ ვ ე რ ჩ ე ბ ი ა ნ რ ა ი მ ე ფ ა რ თ ე უ ლ ი ს მ ა რ თ ო ბ უ ლ ი.

ვინაიდან სხივთა არეკვლა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გარდატეხა -1 მაჩვენებლით, ამიტომ საკმარისია ეს თეორემა დავამტკიცოთ მარტივი გარდატეხის შემთხვევისათვის. ვთქვათ S შუქსხივების მართობული ფართეულია, mM—ვარდნილი სხივი, რომელიც ორი არეს გამყოფი Σ ფართეულს ხვდება M წერტილში, ხოლო MR გარდატეხის სხივი. დეკარტის კანონის თანახმად Mm სხივი, გარდატეხის MR სხივი და MN ნორმალი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, და i და τ კუთხეებს (ნახ. 40 ა) შორის შემდეგი დამოკიდებულება არსებობს: $n \sin i=\sin\tau$.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ $n<1$, როგორც ეს მე-40ა ნახაზზეა მიღებული. Mm მანძილი აღვნიშნოთ l-ით და გარდატეხილი სხივის გაგრძელებაზე გადავზომოთ $l'=Mm'$ სიგრძე, რომელიც l-ის k-ჯერად სიგრძეს უდრის, სადაც k აღნიშნავს რაიმე მუდმივ მამრავლს, რომელსაც ჩვენ ქვემოთ განვსაზღვრავთ. სხვადასხვა სხივზე მდებარე ყველა m' წერტილის გეომეტრიული ადგილი იქნება რაიმე S' ფართეული. დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება შევარჩიოთ k მამრავლი იმნაირად, რომ გარდატეხილი Mm' სხივი S' ფართეულის მართობი იყოს. მართლაც, ვთქვათ C არის რომელიმე S ფართეულზე მდებარე წირი. როცა m წერტილი მოხაზავს C წირს, მაშინ M წერტილი Σ ფართეულზე მოხაზავს რაიმე Γ წირს, ხოლო შესაბამი m' წერტილი კი S' ფართეულზე მოხაზავს რაიმე სხვა C' წირს. ვთქვათ s, σ, s' არიან C, Γ, C' წირების რკალები, რომლებიც ათვლილია ამავე წირთა რაიმე შესაბამ მუდმივი წერტილებიდან, და ω იყოს კუთხე მოთავსებული Γ წირის MT_1 მხებსა და Σ ფართეულის M წერტილში მხები სიბრტყის ამ ფართეულის იმ ნორმალი სიბრტყის MT გადაკვეთას შორის, რომელიც გადის ვარდნილ Mm სხივზე; შემდეგ, ვთქვათ φ და φ' არიან MT_1 მხებსა და Mm_1, Mm' წრფეებს შორის მოთავსებული კუთხეები. რომ გამოვთვალოთ, მაგალითად, $\cos\varphi$, გადავზომოთ Mm-ზე ერთეულის ტოლი სიგრძე და დავაგეგმილოთ იგი MT_1 წრფეზე, ამისათვის ჩვენ ჯერ შეგვიძლია ეს სიგრძე დავაგეგმილოთ



ნახ. 40ა.

MT-ზე და შემდეგ მიღებული გეგმილი დავაგეგმილოთ MT_1-ზე. თუ მოვიქცევით სრულიად ასევე Mm'-ზე მოზომილი ერთეულ სიგრძისათვის, მივიღებთ დამოკიდებულებებს:

$$\cos\varphi=\sin i\cos\omega,\quad \cos\varphi'=\sin\tau\cos\omega.$$

გამოვიყენებთ რა Mm და mM' მონაკვეთებზე მე-(16) პარაგრაფის (81) ფორმულას, წრფის მონაკვეთის დიფერენციალისათვის, მივიღებთ.

$$dl=-d\sigma\cos\omega\sin i,$$

$$dl'=-d\sigma\cos\omega\sin\tau-ds'\cos\theta,$$

სადაც θ არის $m'M$ წრფესა და C' წირის მხებს შორის მოთავსებული კუთხე. თუ dl-ს შევცვლით kdl'-ით, წინა განტოლებებიდან გვექნება:

$$\cos\omega\, d\sigma\,(k\sin i-\sin\tau)+ds'\cos\theta.$$

თუ ჩვენ დავუშვებთ $k=n$, მაშინ მივიღებთ:

$$ds'\cos\theta=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $k=n$, მაშინ Mm' სხივი იქნება C' წირის მართობი, ხოლო ვინაიდან C' წირი S' ფართეულზე მდებარე ნებისმიერი წირია, ამიტომ იგი მართობი იქნება თვით S' ფართეულისაც. ამ S' ფართეულს *ანტიკაუსტიკა* ანუ *მეორადი კაუსტიკა* ეწოდება. ცხადია, რომ S' ფართეული არის მომვლები იმ სფეროთა, რომლებიც შემოხაზულია M წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, რადიუსებით, ტოლი n-ჯერადი Mm სიგრძისა. ამრიგად ჩვენ შემდეგ დებულებას ვღებულობთ:

ვთქვათ, ვარდნილი სხივები რაიმე S ფართეულის მართობია; ეს ფართეული განვიხილოთ როგორც მომვლები იმ სფეროთა ოჯახის, რომელთა ცენტრებიც გამყოფი Σ ფართეულზე მდებარეობენ. მაშინ გარდატეხილი სხივებისათვის ანტიკაუსტიკა იქნება იმ სფეროთა ოჯახის მომვლები, რომლებსაც იგივე ცენტრები აქვთ და რომელთა რ დიუსებიც ისე შეეფარდებიან პირველი ოჯახის შესაბამ

სფეროთა რადიუსებს, როგორც ერთი შეეფარდება გარდატეხის მაჩვენებელს.

ეს მომვლები ფართეული შედგება ორი კალთისაგან, რომლებიც ეთანადებიან ტოლ და მოპირდაპირე ნიშნის გარდატეხის მაჩვენებლებს. საზოგადოდ, ეს ორი კალთა არ იქნება ანალიზურად განსხვავებული და წარმოადგენს დაუშლადი განტოლებით წარმოდგენილი ფართეულის ორ კალთას.

232. კომპლექსები. სამ ცვლად პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ერთობლიობას *წრფეთა კომპლექსი* ეწოდება.

ვთქვათ

$$x=az+p, \qquad y=bz+q \tag{71}$$

არის რაიმე წრფის განტოლებები. a, b, p, q-ს შორის ყოველი დამოკიდებულება:

$$F(a, b, p, q)=0 \tag{72}$$

განსაზღვრავს წრფეთა რაიმე კომპლექს, და შებრუნებით. თუ F არის a, b, p, q-ს მთელი მრავალწევრი, მაშინ კომპლექსს *ალგებრული* ეწოდება. (x_0, y_0, z_0) წერტილზე გამავალი კომპლექსის წრფეები ქმნიან კონუსს, რომლის წვერო იქნება (x_0, y_0, z_0) წერტილში. ამ კონუსის განტოლებას ჩვენ მივიღებთ, თუ a, b, p, q-ს გამოვრიცხავთ (71), (72) და შემდეგი დამოკიდებულებებიდან:

$$x_0=az+p, \qquad y_0=bz_0+q; \tag{73}$$

მაშასადამე, ამ კონუსის განტოლება იქნება:

$$F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \ \frac{y-y_0}{z-z_0}, \ \frac{x_0z-xz_0}{z-z_0}, \ \frac{y_0z-yz_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{74}$$

ყოველ სიბრტყეში ძევს უსასრულო სიმრავლე წრფეებისა, რომლებიც მოცემულ კომპლექსს ეკუთვნიან; ეს წრფეები ევლებიან რაიმე წირს, რომელსაც *კომპლექსის წირი* ეწოდება. თუ კომპლექსი ალგებრულია, მაშინ *კომპლექსის კონუსის რიგი კომპლექსის წირის კლასის ტოლია.* მართლაც, დავუშვათ, რომ საჭიროა ვიპოვოთ კომპლექსის იმ წრფეთა რიცხვი, რომლებიც მოცემულ A წერტილზე გადიან და რომლებიც მდებარეობენ ამ წერტილზე გამავალი რაიმე სიბრტყეში. ამისათვის შეიძლება მოვიქცეთ ორნაირად: შეიძლება ან გადავკვეთოთ P სიბრტყით კომპლექსის ის კონუსი, რომლის წვეროც A წერტილშია მოთავსებული, ანდა A წერტილზე გავავლოთ P სიბრტყეში მოთავსებული კომპლექსის წირის მხები წრფეები. ვინაიდან ორივე შემთხვევაში ჩვენ უნდა მივიღოთ ერთი და იგივე რიცხვი, ამიტომ დებულება დამტკიცებულია.

თუ კომპლექსის კონუსი გადაიქცევა სიბრტყედ, მაშინ კომპლექსს წრფივი ეწოდება; ამ შემთხვევაში (72) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$Aa+Bb+Cp+Dq+E(aq-bq)+F=0. \tag{75}$$

კომპლექსის იმ წრფეთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც მოცემულ (x_0, y_0, z_0) წერტილზე გადიან იქნება სიბრტყე, წარმოდგენილი შემდეგი განტოლებით:

$$\begin{gathered}A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(x_0z-z_0x)+\\+D(y_0z-z_0y)+E(y_0x-x_0y)+F(z-z_0)=0.\end{gathered} \tag{76}$$

ვინაიდან წრფივი კომპლექსის წირი უნდა იყოს პირველი კლასის, ამიტომ იგი იქცევა წერტილად, ე. ი. მოცემულ სიბრტყეში მდებარე კომპლექსის ყველა წრფე გაივლის ამ სიბრტყის რომელიმე წერტილზე; ამ წერტილს *პოლუსი* ან *ფოკუსი* ეწოდება. მაშასადამე, წრფივი კომპლექსი ამყარებს თანადობას წერტილებსა და სივრცის სიბრტყეებს შორის იმგვარად, რომ სივრცის ყოველ წერტილს ეთანადება ამ წერტილზე გამავალი გარკვეული სიბრტყე, და ყოველ

ჯიბრტყეს ეთანადება ამ სიბრტყეზე მდებარე გარკვეული წერტილი. სრულებით ასევე წრფივი კომპლექსით მყარდება თანადობა სივრცეში წრფეთა შორის. მართლაც, ვთქვათ D არის წრფე, რომელიც კომპლექსს არ ეკუთვნის; შემდეგ, ვთქვათ F და F' ამ წრფეზე გამავალი ორი სიბრტყის ფოკუსებია, და Δ არის FF' წრფე. Δ წრფეზე გამავალ ყოველ სიბრტყეს აქვს ფოკუსი ამ სიბრტყის D წრფესთან გადაკვეთის φ წერტილში, ვინაიდან φF, $\varphi F'$ წრფეები, ცხადია, ეკუთვნიან კომპლექსს, რადგანაც გადიან F და F' ფოკუსებში და მდებარეობენ სიბრტყეებზე, რომლებსაც ეს ფოკუსები შეესაბამებიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი წრფე, რომელიც გადაჰკვეთს D და Δ წრფეებს, ეკუთვნის კომპლექსს და რომ D წრფეზე გამავალი ყოველი სიბრტყის ფოკუსი ამ სიბრტყის Δ წრფესთან გადაკვეთის წერტილია. D და Δ წრფეებს *შეუღლებული წრფეები* ეწოდება. ყოველი მათგანი მეორეში გამავალ სიბრტყეთა ფოკუსების გეომეტრიულ ადგილს წარმოადგენს.

თუ D წრფე გადაიქცევა უსასრულოდ დაშორებულ წრფედ, მაშინ D-ზე გამავალი სიბრტყეები ურთიერთ პარალელურია, და ზემოთქმულიდან ჩანს, რომ რომელიმე მოცემულ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეთა ფოკუსების გეომეტრიული ადგილი წრფე წირს წარმოადგენს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მუდამ არსებობს სიბრტყე, რომელსაც აქვს ის თვისება, რომ მის პარალელურ სიბრტყეთა ფოკუსების გეომეტრიული ადგილი მისი მართობი წრფეწირია. თუ ამ წრფეს Oz—ღერძად მივიღებთ, მაშინ ყოველი სიბრტყე, რომლის ფოკუსიც Oz ღერძზე ძევს, უნდა იყოს xOy სიბრტყის პარალელური. (76) განტოლების თანახმად ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება: $A=B=C=D=0$, და კომპლექსის განტოლება მიიღებს შემდეგ მარტივ სახეს:

$$aq-bp+K=0; \tag{77}$$

მასთან სიბრტყე, რომლის ფოკუსი (x, y, z) წერტილში ძევს, წარმოგვიდგება განტოლებით:

$$Xy-Yx+K\,(Z-z)=0, \tag{78}$$

სადაც X, Y, Z მიმდინარე კოორდინატებია.

მაგალითის სახით ვიპოვოთ წირები, რომელთა მხები ეკუთვნის წინა კომპლექსს. განვიხილოთ ერთი ასეთი წირთაგანი. დავუშვათ, რომ მის წერტილთა x, y, z კოორდინატები გამოსახული არიან ცვლადი პარამეტრის ფუნქციებში; ამ წირის რომელიმე წერტილში მხების განტოლება წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.$$

იმისთვის რომ ეს მხები კომპლექსს ეკუთვნოდეს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის მდებარეობდეს (78) სიბრტყეზე, რომელსაც ფოკუსად (x, y, z) წერტილი აქვს, ე. ი. შესრულებული იყოს პირობა:

$$x\,dy-y\,dx=K\,dz. \tag{79}$$

ზემოთ (§ 216) ჩვენ ვნახეთ, თუ როგორ შეიძლება მივიღოთ ცვლადი პარამეტრის ყველა x, y, z ფუნქცია, რომლებიც დააკმაყოფილებენ ამ პირობას; მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ყველა წირი, რომლებსაც აქვთ მოთხოვნილი თვისება.

§ 216-ში მიღებული დასკვნები სრულიად მარტივად გამოისახება კომპლექსთა თეორიის თვალსაზრისით. ასე, მაგალითად, (79) განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$x\,d^2y-y\,d^2x=K\,d^3z; \tag{80}$$

(79) და (80) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ *მიმხები სიბრტყე* (x, y, z) წერტილში არის (78) სიბრტყე. ამრიგად ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ თეორემას:

თუ ორმაგი სიმრუდის წირის მხები წრფეები ეკუთვნიან წრფივ კომპლექსს, მაშინ ამ წირის ყოველ წერტილში მიმხები სიბრტყე იქნება ის სიბრტყე, რომლისთვისაც ეს წერტილი ფოკუსს წარმოადგენს. [აპელი (Appell)].

დავუშვათ, რომ საჭიროა სივრცის O წერტილზე გავავლოთ მიმხები სიბრტყეები ორმაგი სიმრუდის რაიმე Γ წირისა, რომლის მხებებიც წრფივ კომპლექსს ეკუთვნიან. ვთქვათ M ერთი ამ სიბრტყეთაგანის თანახების წერტილია. წინა თეორემის თანახმად MO წრფე კომპლექსის წრფეა, და, მაშასადამე, M წერტილი ძევს სიბრტყეზე, რომელსაც ფოკუსად O წერტილი აქვს. შებრუნებით, თუ Γ წირის M წერტილი ძევს იმ სიბრტყეზე, რომელსაც ფოკუსად O წერტილი აქვს, მაშინ OM წრფე, რომელიც კომპლექსს ეკუთვნის, წირის M წერტილში მიმხებ სიბრტყეზე მდებარეობს, და ეს მიმხები სიბრტყე O წერტილზე გადის. მაშასადამე, საძიებელი თანახების წერტილები იქნება გადაკვეთის წერტილები Γ წირისა სიბრტყესთან, რომელსაც ფოკუსად O წერტილი აქვს (§ 216).

წრფივი კომპლექსები გვხვდება გეომეტრიის და მექანიკის მრავალ თეორიაში (იხ. მაგალითად, აპელის და პიკარის სადოქტორო დისერტაციები[1].

სავარჯიშო მაგალითები.

1. იპოვეთ სასრული სახით განტოლება წირის შლადებისა, რომლებიც მუდმივი კუთხით გადაკვეთენ მართ რგვალ კონუსის წრფივ მსახველებს. გამოიკვლიეთ მიღებული ამოხსნები.

2. არსებობენ თუ არა ორმაგი სიმრუდის ისეთი Γ წირები, რომ გადაკვეთის წერტილები მოცემული P სიბრტყისა ამ წირის ყოველ წერტილში მხებთან, მთავარ ნორმალთან და ვარენორმალთან იყოს ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროები?

3. ვთქვათ Γ არის იმ ფართეულის უკუქცევის წიბო, რომელიც მომვლებია სფეროთა ოჯახის (ე. ი. Γ ამ ოჯახის დამახასიათებელი წრეწირთა მომვლებია). დაამტკიცეთ, რომ ცვლადი სფეროს ცენტრთა გეომეტრიული ადგილით წარმოდგენილი წირი ძევს Γ წირის პოლარულ ფართეულზე. შებრუნებული დებულება.

4. ვთქვათ Γ ორმაგი სიმრუდის მოცემული წირია, M არის Γ წირის წერტილი, ხოლო O—სივრცის მოცემული წერტილი. გავავლოთ O წერტილზე Γ წირის M წერტილისათვის პოლარი წრფის პარალელური წრფე, და გადავზომოთ მასზე ON სიგრძე, რომელიც Γ წირის M წერტილში სიმრუდის რადიუსის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ N წერტილით მოხაზული Γ' წირისა და Γ წირის სიმრუდის ცენტრთა Γ'' გეომეტრიული ადგილის შესაბამი წრფივი ელემენტები არიან ტოლი და ურთიერთ მართობი; გარდა ამისა, სიმრუდის რადიუსები Γ' და Γ'' წირებისა შესაბ წერტილებში არიან თანატოლი [რუკე (Rouquet)].

5. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორმაგი სიმრუდის Γ წირის თანამხები სფეროს რადიუსს აქვს მუდმივი a სიგრძე, მაშინ ან Γ წირი ძევს a რადიუსიან სფეროზე ან სიმრუდის Γ წირის რადიუსი არის მუდმივი და ტოლია a-სი.

6. დაამტკიცეთ, რომ იმისთვის, რომ რაიმე ცილინდრზე გავლებული ხრახნწირის სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიული ადგილი იყოს მეორე ხრახნწირი, რომელიც გავლებული იქნება ცილინდრზე, რომლის მსახველიც პირველი ცილინდრის მსახველის პარალელურია, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მართობული კვეთა ამ მეორე ცილინდრისა იყოს წრეწირული.

[ტისსო (Tissot, Nauvelles Amales) ტ. XI, 1852].

7*. თუ ორ ორმაგი სიმრუდის წირს აქვს საერთო მთავარი ნორმალები, მაშინ ამ წირების ერთიდაიმავე ნორმალთან გადაკვეთის წერტილებში მიმხები სიბრტყეები შეადგენენ მუდმივ კუთხეს. ეს ორი წერტილი და ორივე წირის სიმრუდის ცენტრები შეადგენენ სისტემას ოთხი წერტილისას, რომელთა ანჰარმონიული ფარდობა მუდმივია. ორივე წირის გრეხის რადიუსების ნამრავლი შესაბამ წერტილებში აგრეთვე მუდმივია.

[პ. სერე, მანგჰეიმი (Mannheim), შელი (Schell)].

[1] Annales scientifiques de l'École Nouшale supèrieure, 1876 და 1877.

8 *. ვთქვათ x, y, z ორმაგი სიმრუდის წირის, წერტილთა მართკუთხოვანი კოორდინატებია და s ამ წირის რკალის სიგრძე. Γ_0 წირს, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$x_0 = \int \alpha'' \, ds, \quad y_0 = \int \beta'' \, ds, \quad z_0 = \int \gamma'' \, ds,$$

სადაც x_0, y_0, z_0 მიმდინარე კოორდინატებია, ეწოდება დამატებითი წირი (courbe adointe), ხოლო შემდეგი განტოლებებით წარმოდგენილ წირებს:

$$X = x \cos\theta + x_0 \sin\theta, \quad Y = y \cos\theta + y_0 \sin\theta, \quad Z = z \cos\theta + z_0 \sin\theta,$$

სადაც X, Y, Z მიმდინარე კოორდინატებია, ხოლო θ—მუდმივი კუთხე, მიკუთნილი წირები (courdes associées) ეწოდება. მოძებნეთ ამ წირებისათვის ძირითადი სამწახნაგა კუთხის (§ 221) დალაგება, აგრეთვე სიმრუდის რადიუსები და გრეხა.

თუ Γ წირის სიმრუდე მუდმივია, მაშინ Γ_0 წირს მუდმივი გრეხა აქვს, და მიკუთნილი წირები ბერტრანის წირები იქნებიან, (§ 227). გამოიყვანეთ აქედან ამ უკანასკნელთა ზოგადი განტოლებები.

[კოში]

9 *. მოძებნეთ მეორე რიგის ბრუნვის S ფართეულზე დალაგებული Γ წირები, რომელთა მხებებიც ყოველ წერტილში შეადგენენ მუდმივ კუთხეს ამ წერტილში ბრუნვის ღერძის პარალელურად გავლებულ წრფესთან. გამოიკვლიეთ ამ წირთა სხვადასხვა ფორმები ფართეულის ხასიათის მიხედვით. უჩვენეთ, რომ ეს წირები მუდმივი კუთხით გადაკვეთენ კონუსთა მსახველებს, რომელთა მიმმართველიც Γ წირია და რომელთა წვეროები არის ღერძზე დალაგებული საშუალო კვეთის ფოკუსები. თუ S ფართეული წრიულ კონუსს წარმოადგენს, მაშინ გვაქვს ჩვეულებრივი ცილინდრულ-კონუსური ხრახნწირი (იხ. Pirondini, *Journ. de Crelle*, 118, 1897, *p.* 61; *G. Scheffers Leipzig. Berichte*, 1902, *p.* 369; *E. Cesaro, Rendiconti di Napoli*, 1903, *p.* 73).

თუ ორი კონუსის, რომელთა წვეროებიც S და S'-შია მოთავსებული, გადაკვეთის Γ წირი ამ ორი კონუსის მსახველებს მუდმივი კუთხით ჰკვეთს, მაშინ იგი გადაკვეთს აგრეთვე მუდმივი კუთხით მსახველებს მესამე კონუსისა, რომლის წვეროც SS' წრფეზე მდებარე S'' წერტილში იმყოფება. Γ წირი დალაგებულია ბრუნვის ფართეულზე, რომლის საშუალო კვეთა დეკარტის ოვალს წარმოადგენს, ხოლო S, S', S'' ამ წირის ფოკუსებია (Cesaro, ib).

10. იმისთვის, რომ წრფე, რომელიც უცვლელად არის შებმული ორმაგი სიმრუდის Γ წირის ძირითად სამწახნაგა კუთხესთან და რომელიც გაივლის ამ კუთხის წვეროზე, შეადგენდეს განფენად ფართეულს, აუცილებელია, რომ წრფე ემთხვეოდეს მხებს, იმ შემთხვევის გამოკლებით, როცა Γ წარმოადგენს ხრახნწირს. უკანასკნელ შემთხვევაში არსებობს უსასრულო სიმრავლე წრფეებისა, რომლებსაც აქვთ მოთხოვნილი თვისება.

ბერტრანის წირისათვის არსებობს ორი ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი, რომლებიც უცვლელად დაკავშირებულია ძირითად სამწახნაგა კუთხესთან, რომელთა ყველა წრფივი მსახველები განფენად ფართეულებს ქმნიან.

[Cesaro, *Rivista di Matematica*, ტ. II, გვ. 155, 1892].

11 *. იმისთვის, რომ ორმაგი სიმრუდის წირის მთავარი ნორმალები იყვნენ მეორე ორმაგი სიმრუდის გარენორმალები, საჭიროა სიმრუდის რადიუსსა და პირველი წირის გრეხის რადიუსს შორის არსებობდეს შემდეგი სახის დამოკიდებულება:

$$A\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}\right) = \frac{B}{R},$$

სადაც A და B მუდმივებია. [Mannheim, *Comptes rendus*, 1877.]

[ის შემთხვევა, როცა ორმაგი სიმრუდის წერტილში გამავალი წრფე არის უწყვეტლად დაკავშირებული სამწახნაგა კუთხესთან და რჩება მთელი მოძრაობის დროს მთავარნორმალად ან ბინორმალად მეორე ორმაგი სიმრუდის წირისა შესწავლილი იყო პელეს (Pellet) მიერ (*Comptes rendus*, მაისი, 1887), ჩეზაროს (*Nouvelles Annales*, 1888, გვ. 147) და ბალიტრანოის მიერ (*Balitrand Mathesis*, 1894, გვ. 159)].

12. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორმაგი სიმრუდის Γ წირის მიმხები სიბრტყე ეხება ერთდაიმავე სფეროს O ცენტრით, მაშინ: 1) სიბრტყე, რომელიც გაივლის Γ წირის მხებზე და მართობია მთავარი ნორმალის, გაივლის აგრეთვე O წერტილზე, 2) ფარდობა სიმრუდის რადიუსისა გრეხის რადიუსთან არის Γ წირის რკალის სიგრძის წრფივი ფუნქცია. შებრუნებული თეორემები.

13. ორმაგი სიმრუდის Γ წირის ამ წირის M წერტილზე გავლებული მხების პარალელურად გეგმილს P სიბრტყეზე, აქვს უკუქცევის m წერტილი, რომელიც წარმოადგენს წირის M წერტილის გეგმილს; და უკუქცევის წერტილში მხები არის Γ წირის M-ში მიმხები სიბრტყის კვალი P სიბრტყეზე. გამოიკვლიეთ შემთხვევა სტაციონარული მიმხები სიბრტყისა M-ში.

14*. Γ წირის ყოველ M წერტილზე გავავლოთ ნორმალი, რომელიც მთავარ ნორმალთან შეადგენს ცვლად φ კუთხეს, და მასზე გადავზომოთ მუდმივი სიგრძე: $MM'=l$. M' წერტილით მოხაზული C' წირი მართობია, იმავე $M'M$ წრფისა. განსაზღვრეთ φ კუთხე ისე, რომ C და C' წირების მხებები შესაბამ M და M' წერტილებში მუდმივ V კუთხეს შეადგენდენ. კერძო შემთხვევა: $V=\frac{\pi}{2}$.

ჩათვლით რა უცნობად $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$-ს, მიიღებთ რიკკატის განტოლებას.

[Darboux, *Camptes rendus*, ტ. 146, 1908, გვ. 881].

15. მოძებნეთ ორი უსასრულოდ მახლობელ მთავარ ნორმალებს შორის უმოკლესი მანძილის მთავარი ნაწილი და საერთო მართობის ფუძის ზღვარული მდებარეობა.

თ ა ვ ი XII

ფართეულები

I. ფართეულზე მდებარე წირთა სიმრუდე

233. ძირითადი ფორმულა. მენიეს თეორემა. ყოველი S ფართეული შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს სამი განტოლებათა სისტემით:

$$x=f(u, v) \quad y=\varphi(u, v) \quad z=\psi(u, v), \tag{1}$$

სადაც x, y, z ამ ფართეულის მართკუთხა კოორდინატებია, ხოლო u და v ორი ცვლადი პარამეტრი.

სამი f, φ და ψ ფუნქცია არ არის სავალდებულო იყოს ანალიზური, ჩვენ დავუშვათ მხოლოდ, რომ ისინი უწყვეტია და აქვთ ფართეულის ნებისმიერ წერტილზე პირველი ორი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, განკუთრი წერტილთა გამოკლებით. თუ სამი დეტერმინანტი:

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

რომელიმე u, v მნიშვნელობათათვის ერთდროულად არ იქცევა ნულად, მაშინ ფართეულის შესაბამი M წერტილი ჩვეულებრივი წერტილია (§ 61), მის მახლობლობაში ერთ-ერთი x, y, z კოორდინატებიდან არის ორი დანარჩენის უწყვეტი ფუნქცია, რომელთაც აქვთ პირველი ორი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები.

გამოვიკვლიოთ ფართეულზე მდებარე სხვადასხვა წირის სიმრუდე მის რომელიმე ჩვეულებრივ წერტილში. შეგვეძლო გვეფიქრა, რომ ამ წერტილის მახლობლობაში ფართეული წარმოდგენილია განტოლებით: $z=F(x, y)$, მაგრამ ფორმულები, რომლებსაც ჩვენ მივიღებთ, მიიღებენ უფრო სიმეტრიულ სახეს და უფრო ზოგად გამოსახვას, თუ შევინარჩუნებთ (1) განტოლებებს.

დავწეროთ ფართეულის მხები სიბრტყის განტოლება (x, y, z) წერტილში.

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0; \tag{2}$$

A, B, C კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ ორ განტოლებას:

$$\mathbf{S}\, A\frac{\partial x}{\partial u}=0, \quad \mathbf{S}\, A\frac{\partial x}{\partial v}=0. \tag{3}$$

აქ S-ის მნიშვნელობა სავსებით ცხადია. ამ განტოლებებიდან გამომდინარე:

$$A=K\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \qquad B=K\cdot\frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \qquad C=K\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \tag{4}$$

სადაც K მუდმივი ან ცვლადი მამრავლია, რომელიც შეიძლება შერჩეულ იქნეს სრულიად ნებისმიერად[1]. მაგალითად, თუ ფართეული წარმოდგენილია $z=F(x, y)$ განტოლებით, მაშინ დავუშვებთ რა: $x=u$, $y=v$, $K=-1$, მივიღებთ:

$$A=p, \quad B=q, \quad C=-1,$$

სადაც p და q-თი ჩვეულებრივ აღნიშნავენ z-ის პირველ რიგის კერძო წარმოებულებს.

(1) განტოლებებში u და v შეიძლება იყვნენ ერთი α ცვლადის ფუნქციები; ამ შემთხვევაში (x, y, z) წერტილი S ფართეულზე მოხაზავს რაიმე Γ წირს. ამ წირის მხების მიმართულების კოსინუსები პროპორციულია შემდეგი დიფერენციალებისა:

$$dx=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv, \quad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv, \quad dz=\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

$\frac{dv}{du}$ ფარდობის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება ფართეულის გარკვეული მხები (u, v) წერტილში; შესაბამი მიმართულების კოსინუსების მნიშვნელობები ადვილად გამოითვლება.

Γ წირის გასწვრივ dx, dy, dz დიფერენციალები აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$A\,dx+B\,dv+C\,dz=0 \tag{5}$$

რომელიც, ცხადია, გამოსახავს, რომ Γ წირის მხები ფართეულის მხებ სიბრტყეზე ძევს. ამ განტოლების სრულ დიფერენციალს თუ გავუტოლებთ ნულს (§ 37), მივიღებთ x, y, z-ის მეორე რიგის დიფერენციალებს შორის დამოკიდებულებას:

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,a^2z+dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0, \tag{6}$$

რომელსაც ადვილად მივცემთ საკმაოდ მარტივ გეომეტრიულ განმარტებას.

პირველ ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ $dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz$ არის du და dv-ს მიმართ რაიმე კვადრატული ფორმა:

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=D\,du^2+2D'\,du\,dv+C''\,dv^2; \tag{7}$$

მისი D, D', D'' კოეფიციენტები გამოიყვანება x, y, z, A, B, C გამოსახვების გაწარმოებით.

[1] აშკარაა, რომ შეიძლება ერთხელ და სამუდამოდ ავარჩიოთ K მამრავლის სიდიდე, მაგალითად, დავუშვათ, $K=\pm 1$. მაგრამ გამოყენებისათვის ხელსაყრელია დავტოვოთ ეს მამრავლი განუსაზღვრელი, რომ იგი ყოველ კერძო შემთხვევაში ავარჩიოთ ისეთნაირად, თუ ეს შესაძლებელია, რომ A, B, C კოეფიციენტებმა მიიღონ უფრო მარტივი სახე.

$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z$ გამოთქმა, გარკვეულ მამრავლამდე სიზუსტით, წარმოადგენს იმ ორ წრფეს შორის კუთხის კოსინუსს, რომელთა მიმმართველი კოსინუსები პროპორციულია შესაბამად (A, B, C) და (d^2x, d^2y, d^2z)-ს. A, B, C პარამეტრების შესაბამი წრფე არის ფართეულის ნორმალი; შევარჩიოთ მასზე დადებით მიმართულებად ის, რომელსაც შემდეგი მიმმართველი კოსინუსები აქვს:

$$\left.\begin{aligned} \lambda=\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \mu=\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \nu=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

თუ მივიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადად Γ წირის რკალის s სიგრძეს, გვექნება:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\gamma'}{R},$$

სადაც α', β', γ' და R-ის აღნიშვნებია, რომლებიც მიღებული იყო § 222-ში. მე-(6) განტოლების ორივე მხარეს თუ გავყოფთ ds^2-ზე, გვექნება:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}(\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma')=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{F\,du^2+2E\,du\,dv+G\,dv^2},$$

აქ E, F, G არის გ ა უ ს ი ს აღნიშვნები შემდეგი პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისათვის (§ 124):

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

თუ აღვნიშნავთ θ-ით Γ წირის მთავარ ნორმალსა და ფართეულის ნორმალის დადებით მიმართულებას შორის შედგენილ კუთხეს, მივიღებთ:

$$\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=\cos\theta;$$

ამ ტოლობის საშუალებით წინა გამოსახვას მივყევართ შემდეგ მეტად მნიშვნელოვან ფორმულამდე:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}\cos\theta=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}; \tag{9}$$

რომელიც, ცხადია, მე-(6) ფორმულის ტოლფასია. ამ დამოკიდებულებაში $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ რადიკალი და სიმრუდის R რადიუსი არსებითად დადებითი სიდიდეებია, მაშასადამე, $\cos\theta$-ის ნიშანი მარჯვენა მხარის ნიშანს ემთხვევა. u, v სიდიდეთა მოცემულ მნიშვნელობისათვის მე-(9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი დამოკიდებულია მხოლოდ $\frac{dv}{du}$ ფარდობაზე, ე. ი. Γ წირის M წერტილში მხების მიმართულებაზე. ვთქვათ Γ' არის ფართეულის რომელიმე სხვა წირი, რომელიც პირველს M წერტილში ეხება, R'—მისი სიმრუდის რადიუსი, θ'—მთავარ ნორმალსა და ფართეულის ნორმალის დადებითი მიმართულებას შორის მოთავ-

სებული კუთხე. მე-(9) ფორმულის მარჯვენა მხარეს ორივე წირისათვის აქვს
ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაშასადამე,

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{\cos\theta'}{R'}. \tag{10}$$

განვიხილოთ, კერძოდ, ორი Γ და Γ' წირი, რომლებსაც M წერტილში აქვთ სა-
ერთო მიმხები სიბრტყე (განსხვავებული ფართეულის მხები სიბრტყისაგან). ცხა-
დია; ორივე ამ წირს M წერტილში აქვს საერთო მხებად ფართეულის მხები
სიბრტყისა და წირის მიმხები სიბრტყის გადაკვეთის წრფე. მაშასადამე, მათზე
გამოიყენება მე-(10) ფორმულა. ორი მთავარი ნორმალის მიმართულება შეიძლება
იყვნენ ან თანამთხვეული, ან ურთიერთ მოპირდაპირე, ე. ი. შესაძლოა $\theta=\theta'$ ან
$\theta=\pi-\theta'$. მაგრამ უკანასკნელი შემთხვევა უნდა უკუვაგდოთ იმის გამო, რომ
$\cos\theta$ და $\cos\theta'$-ს ერთი და იგივე ნიშანი აქვს. ამგვარად $\theta'=\theta$ და $R'=R$. ორ Γ-და
Γ' წირს, რომელთა მთავარი ნორმალების მიმართულება თანამთხვეულია და
აქვთ თანატოლი სიმრუდის რადიუსები, ცხადია, ექნებათ საერთო სიმრუდის
ცენტრიც. ამის გამო, რაიმე ფართეულის რომელიმე M წერტილ-
ზე გამავალ ყველა წირს, რომლებსაც ამ წერტილში აქვთ
საერთო მიმხები სიბრტყე (განსხვავებული ფართეულის
მხები სიბრტყისაგან), აქვთ აგრეთვე საერთო სიმრუდის
ცენტრიც. კერძოდ, ყველა ამ წირს იგივე სიმრუდის ცენტრი აქვს, რაც ფარ-
თეულის ბრტყელ კვეთას მათ საერთო მიმხებ სიბრტყესთან.

ამგვარად ჩანს, რომ სავსებით საკმარისია გამოვიკვლიოთ M წერტილზე
გამავალი ფართეულის მხოლოდ ბრტყელი კვეთა. ჯერ ჩვენ განვიხილავთ, თუ
როგორ იცვლება სხვადასხვა ბრტყელ კვეთის სიმრუდე, როდესაც მკვეთ სიბ-
რტყეებს აქვთ საერთო MT მხები.

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ამ მხებისათვის

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2>0,$$

ვინაიდან A, B, C სიდიდეთა ნიშნების შეცვლა გულისხმობს ნორმალის და-
დებითი მიმართულების შეცვლას, ამიტომ, ცხადია, შეიცვლება აგრეთვე D, D',
D'' კოეფიციენტების ნიშნებიც.

ყველა მკვეთი სიბრტყისათვის $\cos\theta$ დადებითია და θ კუთხე მახვილი,
კერძოდ, MT-ზე გამავალ ნორმალ კვეთისათვის θ' კუთხე ნულის ტოლია. ვთქვათ,
R' ამ კვეთის სიმრუდის რადიუსია; ასეთ შემთხვევაში მე-(10) ტოლობა დაიყვა-
ნება შემდეგ სახეზე:

$$R=R'\cos\theta.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფართეულის ნებსითი დახრილი
ბრტყელი კვეთის სიმრუდის ცენტრი არის ისეთ ნორმალური
კვეთის სიმრუდის ცენტრის ორთოგონალური გეგმილი დახ-
რილი კვეთის სიბრტყეზე, რომელსაც პირველთან აქვს საერ-
თო მხები (მენიეს თეორემა).

ამ თეორემის საშუალებით ბრტყელი კვეთის სიმრუდის გამოკვლევა დაიყვანება მხოლოდ ნორმალურ კვეთის სიმრუდის გამოკვლევაზე. შედეგი, რომელიც შეეხება ამ უკანასკნელ საკითხს მიღებული იყო ეილერის მიერ.

უპირველესად ყოვლისა შევნიშნავთ, რომ ნორმალური კვეთებისათვის მე-(9) ტოლობა ღებულობს ორ სხვადასხვა სახეს შემდეგი გამოსახვის ნიშნის მიხედვით:

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2.$$

რომ ავიცილოთ ეს უხერხულობა, ჩვენ ნორმალური კვეთის სიმრუდის R რადიუსს მივაკუთვნებთ დადებით ნიშანს, როცა მიმართულება M წერტილიდან სიმრუდის ცენტრისაკენ ემთხვევა ფართეულის ნორმალის დადებით მიმართულებას, და უარყოფით ნიშანს, წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ პირობებში R ყველა შემთხვევაში შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება:

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{R}=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}, \tag{11}$$

რომელიც ეხლა უკვე ცალსახად გვიჩვენებს სიმრუდის ცენტრის მდებარეობას.

მე-(11) ფორმულის მიხედვით ადვილად გამოვიყვანთ დასკვნას ფართეულის დალაგების ხასიათის შესახებ მხებ სიბრტყესთან შეფარდებით თანახების წერტილის მახლობლად. თუ $D'^2-DD''>0$, მაშინ სამწევრი: $D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$ არ იცვლის ნიშანს მკვეთი სიბრტყის მობრუნებით ნორმალის გარშემო, ყველა ნორმალკვეთის სიმრუდის ცენტრები დალაგებულია მხები სიბრტყის ერთ მხარეზე, იმავე მხარეზე არის დალაგებული აგრეთვე თანახები წერტილის მახლობელი ფართეულის ყველა წერტილი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფართეული ამოზნექილია მოცემულ წერტილში, ხოლო თვით M წერტილს ელიფსური წერტილი ეწოდება.

პირიქით, თუ $D'^2-DD''<0$, სამწევრი: $D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$ ნულად იქცევა მკვეთი სიბრტყის ორი მდებარეობისათვის, შესაბამი ნორმალკვეთისათვის M წერტილი გადაღუნვის წერტილია. თუ მკვეთი სიბრტყე, ნორმალის გარშემო ბრუნავს, რჩება რა ამ ორი სიბრტყით შედგენილ ერთ-ერთ ორწახნაგა კუთხეში, მაშინ R არ იცვლის ნიშანს, და M წერტილის მოსაზღვრე ფართეულის შესაბამი კვეთები მოთავსებული იქნება მხები სიბრტყის ერთ მხარეზე. მკვეთის გადასვლისას მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხეში R შეიცვლის ნიშანს, და შესაბამი კვეთები დალაგდება მეორე მხარეს. მაშასადამე, ფართეული ჰკვეთს მხებ სიბრტყეს თანახების წერტილის მახლობლად. ასეთ წერტილს ჰიპერბოლური წერტილი ეწოდება.

დასასრულ, თუ განსახილავ წერტილში $D'^2-DD''=0$, მაშინ ყველა ნორმალკვეთა მხები სიბრტყის ცალ მხარეს არის დალაგებული ერთის გარდა, რომელსაც უსასრულოდ დიდი სიმრუდის რადიუსი აქვს და, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ამ სიბრტყეს ჰკვეთს. ამ შემთხვევაში M წერტილს პარაბოლური წერტილი ეწოდება.

განვიხილოთ S ფართეული, რომელიც განსაზღვრულია $z=F(x, y)$ განტოლებით; თუ მივიღებთ: $A=p$, $B=q$, $C=-1$, გვექნება: $D=r$, $D'=s$, $D''=t$,

სადაც p, q, r, s, t მონჟის ჩვეულებრივი აღნიშვნებია, ხოლო $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$.

ნორმალის დადებით მიმართულებას აქვს მიმართულების კოსინუსები:

$$\lambda=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mu=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{12}$$

და იგი Oz-თან შეადგენს მახვილ კუთხეს. ვთქვათ α, β, γ არის M-ში ნორმალკვეთის მხების მიმართულების კოსინუსები. ვინაიდან du და dv α და β-ს პროპორციულია, ამიტომ მე-(11) ფორმულა შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{(1+p^2)\alpha^2+2pq\,\alpha\beta+(1+q^2)\beta^2}, \tag{13}$$

ანუ, თუ მხედველობაში მივიღებთ დამოკიდებულებას:

$$\gamma=p\alpha+q\beta, \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

უფრო მარტივი სახით:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}=r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\alpha^2. \tag{13'}$$

$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\alpha^2$ სამწევრის ნიშნის მიხედვით შეიძლება ვიმსჯელოთ იმაზე, თუ როგორ არის დალაგებული ფართეული მხები სიბრტყის მიმართ თანახების წერტილის მახლობლად: ამ სიბრტყის ზემოთ, თუ ქვემოთ. თანახების წერტილი იქნება ელიფსური. როცა $s^2-rt<0$, ჰიპერბოლური, როცა $s^2-rt>0$, და პარაბოლური, როცა $s^2-rt=0$.

ეს შედეგი ადვილად შემოწმდება $\delta=z-z'$ სხვაობის გამოკვლევით, სადაც z და z' არიან შემდეგი ორი წერტილის აპლიკატი: ფართეულის (x, y, z) წერტილისა და მხები სიბრტყის (x, y, z') წერტილის. ვთქვათ (x_0, y_0) თანახების წერტილის კოორდინატებია და p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 ამ წერტილში $F(x, y)$-ის წარმოებულთა მნიშვნელობები. მაშინ გვაქვს:

$$\delta=F(x, y)-p_0(x-x_0)-q_0(y-y_0),$$

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\right)_0=0, \quad \left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)_0=0, \quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right)_0=r_0, \quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)_0=s_0, \quad \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)_0=t_0,$$

თუ $s_0^2-r_0t_0<0$, მაშინ δ-ს M წერტილში აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი (§ 45), და ვინაიდან δ ამ წერტილში ნულად იქცევა, ამიტომ იგი ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს M-ის რაიმე მცირე მახლობლობაში.

პირიქით, თუ $s_0^2-r_0t_0>0$, მაშინ δ-სათვის არ არსებობს არც მაქსიმუმი, და არც მინიმუმი, მაშასადამე, M-ის მეზობლად δ იცვლის ნიშანს.

234. ორი ძირითადი კვადრატული ფორმა.

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

ფორმასთან ერთად ჩვენ გამოვიკვლევთ შემდეგი კვადრატულ ფორმას:

$$D\,du^2+2D'du\,dv+D''dv^2.$$

თვით მისი განსაზღვრის თანახმად D, D' და D'' კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$D=\mathbf{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad D''=\mathbf{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad 2D'=\mathbf{S}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\mathbf{S}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}. \tag{14}$$

D' გამოსახვა შეიძლება გავამარტივოთ თუ ვისარგებლებთ მე-(3) ტოლობებით; მართლაც, თუ პირველს ამ ტოლობებიდან გავაწარმოებთ v ს მიმართ, ხოლო მეორე კი u-ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\mathbf{S}\, A\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\mathbf{S}\,\frac{\partial A}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}=0,\quad \mathbf{S}\, A\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\mathbf{S}\,\frac{\partial A}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}=0.$$

მაშასადამე,

$$\mathbf{S}\,\frac{\partial A}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}=\mathbf{S}\,\frac{\partial A}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v},$$

საიდანაც

$$D'=\mathbf{S}\,\frac{\partial A}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}=\mathbf{S}\,\frac{\partial A}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{14'}$$

D, D' და D'' კოეფიციენტებისათვის შეიძლება მივიღოთ გამოსახვები, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ x, y, z-ის წარმოებულებს u და v-ს მიმართ.

მე-(6) იგივეობას თუ დავწერთ შემდეგნაირად:

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2=-(A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z),$$

და შევადარებთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს, ვიპოვით:

$$D=-\left(A\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

თუ ამ ტოლობაში A, B, C-ს შევცვლით მათი მე-(4) მნიშვნელობებით, ჩვენ შევნიშნავთ, რომ K-ს კოეფიციენტი არის შემდეგი დეტერმინანტის გაშლა, და ჩვენ ვღებულობთ:

$$D=-K\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\end{vmatrix} \tag{15}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება:

$$\left.\begin{aligned} D'&=-K\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\end{vmatrix}\\ &\text{და}\\ D''&=-K\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

D, D', D'' კოეფიციენტები, ისე როგორც A, B, C, განისაზღვრებიან მხოლოდ სიზუსტით ნებისმიერი K მამრავლამდე, მაშინ როცა კვადრატული ფორმა:

$$\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{17}$$

K-საგან დამოუკიდებლად განსაზღვრულია ნიშნამდე სიზუსტით. მე-(17) ფორმას მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს. აღვნიშნოთ δ-თი მანძილი, აღებული სათანადო ნიშნით, ზედაპირის წერტილსა, გაუსის $(u+du,\ v+dv)$ კოორდინატებით, (u, v) წერტილში მხებ სიბრტყემდე. თუ δ-ს გავამწკრივებთ du და dv-ს ხარისხებად, მაშინ მე-(3) ტოლობების ძალით პირველი რიგის წევრები ნულად იქცევა, ხოლო მეორე რიგის წევრები:

$$\frac{1}{2}\,\frac{A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$-\frac{1}{2}$ მამრავლამდე სიზუსტით წარმოადგენენ მე-(17) ფორმას. ამრიგად ზოგადი მე-(11) ფორმულა, რომელიც განსაზღვრავს ნორმალკვეთის სიმრუდის რადიუსს, შეიძლება დაიწეროს ასეთი სახით:

$$\frac{1}{R}=2\lim\frac{\delta}{ds^2},$$

რაც სავსებით ეთანხმება უკვე მე-(§ 209)-ში ნაჩვენებ შედეგს.

235. ეილერის თეორემები. ინდიკატრისი. რომ გამოვიკვლიოთ ნორმალკვეთის სიმრუდის რადიუსის ცვლილება, მივიღოთ ზედაპირის განსახილველი წერტილი კოორდინატთა სათავედ და ამ წერტილში ზედაპირის მხები სიბრტყე xOy სიბრტყედ. ღერძთა ასეთი შერჩევით ჩვენ გვაქვს: $p=q=0$, და მე-(13) ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi, \tag{18}$$

სადაც φ არის Ox ღერძსა და მკვეთი სიბრტყის xOy სიბრტყესთან გადაკვეთის წირს შორის მოთავსებული კუთხე. თუ გავუტოლებთ ნულს მე-(18) განტოლების მარჯვენა ნაწილის წარმოებულს, ვიპოვით, რომ R-ს ექნება მაქსიმუმი ან მინიმუმი ორ ურთიერთ მართობული მიმართულებისათვის. სიმრუდის R რადიუსის ცვლილების უფრო დაწვრილებით გამოკვლევისათვის ყოველ შესაძლო კერძო შემთხვევაში ხელსაყრელია ვისარგებლოთ შემდეგი გეომეტრიული წარმოდგენით. გადავზომოთ მკვეთის სიბრტყის xOy სიბრტყესთან გადაკვეთის წირზე Om სიგრძე, რომელიც სათანადო სიმრუდის რადიუსის სიდიდის აბსოლუტური მნიშვნელობიდან კვადრატული ფესვის ტოლია. მკვეთი სიბრტყის ნორმალის გარშემო ბრუნვის დროს m წერტილი შემოსწერს გარკვეულ წირს, რომელსაც ი ნ დ ი კ ა ტ რ ი ს ი ეწოდება, და ცხადია, რომ ამ წირის განხილვით ჩვენ მივიღებთ თვალსაჩინო წარმოდგენას ნორმალ-კვეთის სიმრუდის რადიუსის ცვლილების მსვლელობაზე.

განვიხილოთ სამი შესაძლო შემთხვევა.

1) $s^2-rt<0$. ამ შემთხვევაში სიმრუდის R რადიუსი ინარჩუნებს ერთდაიმავე ნიშანს; დავუშვათ, რომ R დადებითია. m წერტილის კოორდინატები იქნება: $\xi=\sqrt{R}\cos\varphi$, $\eta=\sqrt{R}\sin\varphi$ და, მაშასადამე, ინდიკატრისის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1. \tag{19}$$

ეს არის ელიფსის განტოლება, ცენტრით კოორდინატთა სათავეზე. აქედან ჩანს რომ R-ს ექნება მაქსიმუმი, როცა მკვეთი სიბრტყის კვალი ემთხვევა ელიფსის დიდ ღერძს, ხოლო მინიმუმი, როცა მკვეთი სიბრტყის კვალი ემთხვევა მცირე ღერძს, და რომ ორი მკვეთი სიბრტყე, რომელთა კვალები ერთნაირად არიან დახრილი ინდიკატრისის ღერძთან, იძლევა სიმრუდის R რადიუსისათვის ტოლ მნიშვნელობებს. ინდიკატრისის ღერძზე გამავალ ნორმალ კვეთებს მთავარი ნორმალი კვეთები ეწოდება, ხოლო შესაბამ სიმრუდის რადიუსებს— სიმრუდის მთავარი რადიუსები. თუ Ox და Oy ღერძებად მივიღებთ ინდიკატრისის ღერძებს, გვექნება: $s=0$, და მე-(18) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi.$$

სიმრუდის მთავარი R_1 და R_2 რადიუსები მიიღება, თუ დავუშვებთ $\varphi=0$ ან $\varphi=\frac{\pi}{2}$; აქედან ვღებულობთ: $\frac{1}{R_1}=r$, $\frac{1}{R_2}=t$ და, ამრიგად:

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{20}$$

2) $s^2-rt>0$. ამ შემთხვევაში იმ φ კუთხეების შესაბამი ნორმალ-კვეთებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi=0,$$

აქვთ უსასრულოდ დიდი სიმრუდის რადიუსები. ვთქვათ $L_1'OL_1$, $L_2'OL_2$ ამ ნორმალ კვეთების კვალებია xOy სიბრტყეზე. დავუშვათ, რომ როცა მკვეთი სიბრტყის კვალი გაივლის L_1OL_2 კუთხეში, მაშინ წინა სამწევრი დადებითია. თუ აღვნიშნავთ, როგორც პირველ შემთხვევაში, m წერტილის კოორდინატებს ξ და η-ით მივიღებთ, რომ ინდიკატრისის სათანადო ნაწილი წარმოიდგინება განტოლებით:

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1.$$

ეს არის ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ასიმპტოტები არიან $L_1'OL_1$ და $L_2'OL_2$ წრფეები; მაგრამ თუ მკვეთი სიბრტყის კვალი გაივლის $L_2'OL_1$ კუთხეში, მაშინ ჩვენ გვექნება: $R<0$, და ინდიკატრისის სათანადო ნაწილი რომ მივიღოთ, უნდა დავუშვათ:

$$\xi=\sqrt{-R}\cos\varphi,\quad \eta=\sqrt{-R}\sin\varphi.$$

მივიღებთ ჰიპერბოლის განტოლებას:

$$r\,\xi^2+2s\,\xi\,\eta+t\,\eta^2=-1,$$

რომელიც შეუღლებულია პირველთან. ამ ორი შეუღლებული ჰიპერბოლის საშუალებით შეიძლება ვიქონიოთ წარმოდგენა ნორმალ-კვეთის სიმრუდის რადიუსის ცვლილების მსვლელობაზე. თუ კოორდინატთა ღერძებად მივიღებთ ჰიპერბოლის ორივე მთავარ ღერძს, ვიპოვით, რომ მე-(18) ზოგადი ფორმულა ამ შემთხვევაშიც შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს მე-(20) სახით, სადაც R_1 და R_2 აღნიშნავენ სიმრუდის მთავარ ღერძებს, რომელთაგან ერთი დადებითია, ხოლო მეორე უარყოფითი.

3) $s^2-rt=0$. ამ შემთხვევაში სიმრუდის R რადიუსი ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, მაგალითად, პლიუს ნიშანს. ამ შემთხვევაში ინდიკატრისი წარმოგვიდგება მე-(19) განტოლებით, მაგრამ ვინაიდან აქ ეს წირი ეკუთვნის პარაბოლთა ჯგუფს და ამასთანავე ცენტრი აქვს კოორდინატთა სათავეში, ამიტომ ის შეიძლება იყოს მხოლოდ პარალელური წრფეთა წყვილი. თუ Oy ღერძად ავიღებთ ამ ორივე წრფის პარალელურ წრფეს, მაშინ ჩვენ გვექნება: $s=0$, $t=0$, და მე-(18) ზოგადი ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi,$$

ან

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

ეს ფორმულა შეიძლება აგრეთვე განვიხილოთ როგორც მე-(20) ფორმულის ზღვარული შემთხვევა, როცა სიმრუდის მთავარ რადიუსთა შორის ერთი, მაგალითად, R_2 იქცევა უსასრულოდ.

ე ი ლ ე რ ი ს ფორმულები შეიძლება აგრეთვე გამოვიყვანოთ მე-(13) ფორმულის დახმარებლად. თუ ფართეულის განსახილავ წერტილს მივიღებთ კოორდინატთა სათავედ, ხოლო მხებ სიბრტყეს xOy სიბრტყედ და გავაგრძელებთ z-ის გამწკრივებას ტეილორის ფორმულით მესამე რიგის წევრებამდე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$z=\frac{rx^2+2s\,xy+ty^2}{1.2}+\ldots,$$

სადაც დაუწერავი წევრები არიან არა ნაკლები მესამე რიგისა. რომ მივიღოთ $y=x\operatorname{tg}\varphi$ სიბრტყით მიღებული კვეთის სიმრუდის რადიუსი, ჯერ მოვახდინოთ კოორდინატთა გარდაქმნა:

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\qquad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$$

და შემდეგ დავუშვათ: $y'=0$; ჩვენ მივიღებთ z-ის გამწკრივებას x'-ის ხარისხებად:

$$z=\frac{r\cos^2\varphi+2s\sin\varphi\cos\varphi+t\sin^2\varphi}{1.2}x'^2+\ldots,$$

და, თუ ვისარგებლებთ § 209-ის შენიშვნით, მივალთ მე-(18) ფორმულამდე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ფართეულისა და მისი მხები სიბრტყის გადაკვეთის წირი გამოისახება განტოლებით:

$$0=rx^2+2s\,xy+ty^2+\varphi_3(x,\ y)+\ldots$$

ამ წირს კოორდინატთა სათავეში აქვს ორჯერადი წერტილი, და მხებები ამ ორჯერად წერტილში არიან ასიმპტოტური მხებები. საზოგადოდ, თუ ორი S და S_1 ფართეული კოორდინატთა სათავეში ეხებიან xOy სიბრტყეს, მაშინ ამ ფართეულთა გადაკვეთის წირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე წარმოგვიდგება შემდეგი განტოლებით:

$$0=(r-r_1)\,x^2+2\,(s-s_1)\,xy+(t-t_1)\,y^2+\ldots,$$

სადაც r_1, s_1, t_1, ეკუთვნიან S_1 ფართეულს, ხოლო r, s, t კი S ფართეულს. ორჯერადი წერტილის ხასიათი დამოკიდებულია $(s-s_1)^2-(r-r_1)\,(t-t_1)$ გამოსახვის ნიშანზე. თუ ეს სიდიდე ნულის ტოლია, მაშინ გადაკვეთის წირს, საზოგადოდ, კოორდინატთა სათავეზე აქვს უკუქცევის წერტილი.

ამრიგად ფართეულის ყოველ წერტილში არსებობს მხები წრფის ოთხი შესანიშნავი მდებარეობა: ორი ურთიერთ მართობული მხებები, რომლებისთვისაც სიმრუდის R რადიუსს ექნება მაქსიმუმი ან მინიმუმი, და ორი ასიმპტოტური ანუ მთავარი მხები, რომლებისთვისაც R ტოლია უსასრულობის. უკანასკნელ მხებებს ჩვენ მივიღებთ, თუ გავუტოლებთ ნულს სამწევრს: $r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2$ (§ 213)[1].

ახლა ჩვენ უჩვენებთ, თუ როგორ განისაზღვრება მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემაში მთავარი ნორმალური კვეთები და სიმრუდის მთავარი რადიუსები.

236. სიმრუდის მთავარი რადიუსები. ინდიკატრისის გამოკვლევისას ადვილად შევნიშნავთ, რომ R-ის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება, საზოგადოდ, ორი ნორმალ-კვეთა, ნამდვილი ან წარმოსახვითი, რომელთა სიმრუდის რადიუსები R-ის ტოლია. გამონაკლისს წარმოადგენს ის შემთხვევა, როცა R ტოლია სიმრუდის მთავარი რადიუსებიდან ერთ-ერთის; მაშინ არსებობს მხოლოდ ერთი ნორმალ-კვეთა, სახელდობრ, მთავარი, რომელსაც აქვს თავის სიმრუდის რადიუსად R.

ნორმალ-კვეთათა განსაზღვრისათვის, რომლებსაც R სიმრუდის რადიუსი აქვთ, გვემსახურება მე-(11) ზოგადი ფორმულა, რომელსაც ჩვენ დავწერთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}, \tag{21}$$

სადაც ნაგულისხმევია: $R=\rho.\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. ρ-ის მოცემული მნიშვნელობისათვის. (21) განტოლება $\frac{dv}{du}$-ის მიმართ არის მეორე რიგის განტოლება:

$$(\rho D-E)\,du^2+2\,(\rho D'-F)\,du\,dv+(\rho D''-G)\,dv^2=0, \tag{22}$$

რომლის ფესვებიც განსაზღვრავენ ნორმალ-კვეთის მხების მიმართულებას, როცა კვეთის სიმრუდის რადიუსი R-ის ტოლია.

---

[1]. საჭიროა მიექცეს ყურადღება ფართეულის წერტილზე განსხვავებას მთავარ მიმართულებებსა და მთავარ მხებებს შორის, მთავარი მიმართულებები არის ინდიკატრისის ღერძთა მიმართულებები; მათთვის R-ს აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი. მთავარი მხებები— ინდიკატრისის ასიმპტოტებია; მათთვის $R=\infty$.

თუ R არის ერთ-ერთი სიმრუდის მთავარი რადიუსი, მაშინ (22) განტოლებას აქვს ორჯერადი ამონახსნი და $\frac{dv}{du}$ ფარდობა უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ ორ პირობას:

$$\left.\begin{aligned}(\rho D - E)\,du + (\rho D' - F)\,dv = 0,\\(\rho D' - F)\,du + (\rho D'' - G)\,dv = 0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

განტოლებათა ეს სისტემა ერთი და იმავე დროს განსაზღვრავს, როგორც სიმრუდის მთავარ რადიუსებს, აგრეთვე მთავარ ნორმალურ-კვეთებსაც. თუ გამოვრიცხავთ $\frac{dv}{du}$-ს, მივიღებთ ρ-ს მიმართ მეორე ხარისხის განტოლებას:

$$(\rho D' - F)^2 - (\rho D - E)(\rho D'' - G) = 0. \tag{24}$$

რომ მივიღოთ სიმრუდის მთავარი R და R' რადიუსების განმსაზღვრელი განტოლება, საჭიროა (24)-ში ρ შევცვალოთ $\frac{R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$-ით. შემდეგ, (23) განტოლებებიდან ρ-ს გამორიცხვით მივიღებთ $\frac{dv}{du}$-ს მიმართ მეორე ხარისხის განტოლებას:

$$(D\,du + D'\,dv)(F\,du + G\,dv) - (D'\,du + D''\,dv)(E\,du + F\,dv) = 0, \tag{25}$$

რომლის ამონახსნებიც განსაზღვრავენ მთავარი ნორმალური კვეთის მხების მიმართულებას.

თვით საკითხის ბუნების მიხედვით (24) განტოლების ამონახსნები მუდამ ნამდვილია. თუ R და R' სიმრუდის მთავარი რადიუსებია, მაშინ RR' ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\frac{1}{RR'} = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)(A^2 + B^2 + C^2)}, \tag{26}$$

რომლის საშუალებითაც შეიძლება მოვახდინოთ უკვე ცნობილი შედეგების შემოწმება. ვინაიდან $EG - F^2$ მუდამ დადებითია, ამიტომ RR'-ს იგივე ნიშანი აქვს რაც $DD'' - D'^2$-ს. პარაბოლურ წერტილში სიმრუდის ერთი მთავარ რადიუსთაგანი უდრის უსასრულობას და $\frac{1}{RR'}$ ნულის ტოლია.

იმისათვის, რომ (24) განტოლებას ჰქონდეს ტოლი ფესვები, აუცილებელია ინდიკატრისი იყოს წრე. ამ შემთხვევაში ყველა ნორმალ-კვეთას აქვს სიმრუდის ერთი და იგივე რადიუსი, და მე-(11) ფორმულის მარჯვენა მხარე უნდა იყოს $\frac{dv}{du}$-საგან დამოუკიდებელი; ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობა არის:

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G}. \tag{27}$$

წერტილს, რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობებს ო მ ბ ი ლ უ რ ი წერტილი ეწოდება. ამ წერტილში (25) განტოლება კმაყოფილდება იგივურად, ვინაიდან წრის ყველა დიამეტრი მისი სიმეტრიის ღერძებს წარმოადგენს.

როცა ფართეული განსაზღვრულია $z=F(x, y)$ განტოლებით, და დავუშვებთ $u=x$, $v=y$, მაშინ, (24), (25) და (27) განტოლებები დაიყვანება სათანადოთ შემდეგი სახის განტოლებებამდე:

$$(rt-s^2)R^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)\,t-2pqs+(1+q^2)\,r]R+(1+p^2+q^2)=0, \qquad (24')$$

$$\alpha^2\,[1+p^2]\,s-pqr]+\alpha\beta\,[(1+p^2)\,t-(1+q^2)\,r]+\beta^2\,[pqt-(1+q^2)\,s]=0, \qquad (25')$$

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}. \qquad (27')$$

მათი გამოყვანა შეიძლება აგრეთვე ზოგადი ფორმულებიდან როგორც კერძო შემთხვევები, ან უშუალოდ მე-(13) ფორმულისაგან.

ზოგიერთ შემთხვევაში ფართეულის მთავარი ნორმალ-კვეთა შეიძლება განვსაზღვროთ გეომეტრიული მოსაზრებებიდან. მაგალითად, თუ S ფართეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, რომელიც გადის ამ ფართეულის M წერტილზე, მაშინ ამ სიბრტყის გადაკვეთა M წერტილზე მხებ სიბრტყესთან, ცხადია, არის ინდიკატრისი, და ფართეულის სიმეტრიის სიბრტყესთან კვეთა ერთი მთავარი ნორმალ კვეთთაგანია. ასე, მაგალითად, ბრუნვის ფართეულის ყოველ წერტილში მერიდიანი ერთი მთავარი ნორმალ კვეთათაგანია; მაშასადამე, მეორე მთავარი ნორმალ-კვეთის სიბრტყე გაივლის ფართეულის ნორმალზე და ეხება პარალელებს. აქედან მ ე ნ ი ე ს დებულების თანახმად გამომდინარეობს, რომ მეორე მთავარი კვეთის სიმრუდის ცენტრი ძევს ნორმალის ფართეულის ღერძთან გადაკვეთის წერტილში.

განფენადი ფართეულის ყოველ წერტილში ჩვენ გვაქვს: $s^2-rt=0$, და ინდიკატრისი შედგება წრფეთა პარალელური წყვილისაგან. ამ შემთხვევაში მთავარ კვეთებიდან ერთი ემთხვევა მსახველს, და სათანადო სიმრუდის რადიუსი უსასრულოდ დიდია. მეორე მთავარი კვეთის სიბრტყე მართობია მსახველის. განფენადი ფართეულის ყველა წერტილი პ ა რ ა ბ ო ლ უ რ ი ა, და ეს ერთადერთი ფართეულია, რომელსაც ეს თვისება აქვს (§ 204).

თუ არაგანფენადი ფართეული ზოგ წერტილში ამოზნექილია, ხოლო სხვებში უნაგირისებური, მაშინ ამ ფართეულს აქვს, საზოგადოდ, მთელი წირი პარაბოლური წერტილებისა, რომელიც გამოყოფს არეს, სადაც s^2-rt დადებითია, იმ არეებისაგან, სადაც s^2-rt არის უარყოფითი. მაგალითად ტორზე ასეთი წირები იქნება ორი კიდური პარალელი.

ამოზნექილ ფართეულზე არსებობს, საზოგადოდ, მხოლოდ რამოდენიმე ომბილური წერტილი. დავამტკიცოთ, რომ ერთადერთი ნამდვილი ფართეული, რომლის ყველა წერტილი არის ომბილური არის სფერო. აღვნიშნოთ λ, μ, ν-ით ფართეულის ნორმალის მიმართულების კოსინუსები; მე-(12) ფორმულების გაწარმოებით, მივიღებთ:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{pqs-(1+q^2)\,r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{pqt-(1+q^2)\,s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{pqr-(1+p^2)\,s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{pqs-(1+p^2)\,t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ან (27′) ფორმულების მიხედვით:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

პირველი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ λ დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე. მეორე, რომ μ დამოკიდებულია მხოლოდ y-ზე; ამრიგად, $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ წარმოებულთა ზოგადი მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული არც x-სა და არც y-ზე, ე. ი. რაიმე $\frac{1}{a}$ მუდმივის ტოლია. აქედან გამოდის:

$$\lambda=\frac{x-x_0}{a}, \qquad \mu=\frac{y-y_0}{a}, \qquad \nu=\frac{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{a},$$

$$p=-\frac{\lambda}{\nu}=-\frac{x-x_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},$$

$$q=-\frac{\mu}{\nu}=-\frac{y-y_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

ორი უკანასკნელი განტოლების ინტეგრობა გვაძლევს:

$$z=z_0+\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

ეს კი არის სფეროს განტოლება. სრულიად ასევე შეგვეძლო დავამტკიცოთ, რომ თუ $\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, მაშინ ფართეული წარმოადგენს სიბრტყეს. ამ ამოხსნათა გარდა, (27′) განტოლებებს აქვთ კიდევ უსასრულო სიმრავლე წარმოსახვით ამოხსნათა, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას: $1+p^2+q^2=0$; ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ, თუ ამ უკანასკნელ ტოლობას გავაწარმოებთ x-ისა და y-ის მიმართ.

II. ასიმპტოტური წირები. სიმრუდის წირები

237. ასიმპტოტური წირები. ფართეულის ყოველ ჰიპერბოლურ წერტილში არსებობს ორი მხები, რომლებისთვისაც სათანადო ნორმალ-კვეთებს აქვთ უსასრულოდ დიდი სიმრუდის რადიუსები. ეს ინდიკატრისის ასიმპტოტებია. წირები, რომლებიც მდებარეობენ მოცემულ ფართეულზე და ეხებიან ყოველ თავის წერტილში ერთ-ერთს ამ ასიმპტოტებიდან, ეწოდება ასიმპტოტური წირები. ამ წირებიდან ერთერთზე გადაადგილებისას u და v პარამეტრები წარმოადგენენ ერთ რაიმე ცვლადის ფუნქციებს. რომ წირის მხები ემთხვეოდეს ინდიკატრისის ასიმპტოტს, du და dv უნდა აკმაყოფილებდენ ტოლობას:

$$D\,du^2-2D'du\,dv+D''dv^2=0. \tag{28}$$

თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით $\frac{dv}{du}$-ს მიმართ და შევნიშნავთ, რომ D, D' D'' კოეფიციენტები u და v-ს ფუნქციებია, მივიღებთ:

$$\frac{dv}{du}=\varphi_1(u, v), \quad \frac{dv}{du}=\varphi_2(u, v). \tag{29}$$

ქვემოთ ჩვენ უჩვენებთ, რომ ყოველ ამ განტოლებას აქვს ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე და რომ ყოველი (u_0, v_0) წყვილი მნიშვნელობა განსაზღვრავს, საზოგადოდ, ერთსა და მხოლოდ ერთ ინტეგრალს. მაშასადამე, ფართეულის ყოველ წერტილზე გაივლის, საზოგადოდ, ორი და მხოლოდ ორი ასიმპტოტური წირი. (28) დიფერენციალური განტოლება შეიძლება კიდევ დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0, \tag{30}$$

რომელიც ჩვეულებრივად უფრო მოსახერხებელია გამოყენებებში. იმ შემთხვევაში, თუ ფართეული განსაზღვრულია $z=F(x, y)$ განტოლებით, წინა დიფერენციალური განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$dp\,dx+dq\,dy=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0. \tag{31}$$

ასიმპტოტური წირები შეიძლება კიდევ განვსაზღვროთ მათი შემდეგი თვისების საფუძველზე, რომელსაც სრულებით არ შემოყავს მეტრიული დამოკიდებულება: *ფართეულის ასიმპტოტური წირები ისეთი წირებია, რომელთა ყოველ წერტილში მიმხები სიბრტყე ემთხვევა ფართეულის მხებ სიბრტყეს*. მართლაც, იმისთვის, რომ მიმხები სიბრტყე ემთხვეოდეს მხებ სიბრტყეს, აუცილებელია და საკმარისი ერთდროულად ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ტოლობებს:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,\ \ A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

პირველი განტოლება სამართლიანია ფართეულზე მდებარე ყოველი წირისათვის იმ დროს როცა მეორე, მე-(6) იგივეობის შედეგად, (30) განტოლებას ემთხვევა.

ადვილად ვნახავთ, თუ რატომ ასიმპტოტური წირების ეს ორი განსაზღვრა არის ერთიმეორეს ტოლფასი. ვინაიდან სიმრუდის რადიუსი ნორმალი კვეთისა, რომელსაც ეხება ინდიკატრისის ასიმპტოტები, ტოლია უსასრულობის, ამიტომ *მენიეს* თეორემის თანახმად, ასიმპტოტური წირის სიმრუდის რადიუსიც უდრის უსასრულობას, თუ მხოლოდ მიმხები სიბრტყე არ იქნება მართობული ფართეულის ნორმალისა; უკანასკნელ შემთხვევაში *მენიეს* ფორმულა ღებულობს განუზღვრელ სახეს. მაშასადამე, ასიმპტოტური წირის მიმხები წირი ყოველთვის უნდა ემთხვეოდეს ფართეულის მხებ სიბრტყეს, თუ მისი სიმრუდის რადიუსი არ უდრის მუდამ უსასრულობას; მაგრამ უკანასკნელ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებდით წრფეწირს, რომლის მიმხები სიბრტყე განუზღვრელია. ასიმპტოტური წირის ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ასიმპტოტური წირები ინარჩუნებენ ფორმას ყოველგვარი პროეგრაფიული გარდაქმნის დროს. ცხადია აგრეთვე, რომ ასიმპტოტური წირების დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ერთნაირი სახე მართკუთხა და ირიბკუთხა ღერძთა კოორდინატებში, ვინაიდან მიმხები სიბრტყის განტოლება ორივე შემთხვევაში ერთნაირია.

ასიმპტოტური წირები არსებობენ, რასაკვირველია, მხოლოდ უნაგირისებურ ფართეულებზე. მაგრამ თუ ფართეული ანალიზურია, მაშინ, რანაირიც არ უნდა იყოს s^2-rt სიდიდის ნიშანი, (28) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს

მუდამ უამრავი ინტეგრალი, ნამდვილი ან წარმოსახვითი. ამიტომ ვამბობთ, რომ ანალიზურ ამოზნექილ ფართეულს აქვს წარმოსახვით ასიმპტოტურ წირთა ორი სისტემა. ასე, მაგალითად, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ასიმპტოტური წირები იქნება წრფივი მსახველთა ორი სისტემა; ელიფსოიდის ან სფეროსათვის ეს მსახველები წარმოსახვითია, მაგრამ ისინი აგრეთვე აკმაყოფილებენ ასიმპტოტური წირების დიფერენციალურის განტოლებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. ვიპოვოთ შემდეგი ფართეულის:

$$z=x^m y^n$$

ასიმპტოტური წირები. ჩვენ გვაქვს:

$$r=m\,(m-1)\ x^{m-2}\ y^n,\ s=mnx^{m-1}y^{n-1}\ t=n\ (n-1)\ x^m\ y^{n-2},$$

და (31) დიფერენციალური განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$m\ (m-1)\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)^2+2mn\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)+n\,(n-1)=0.$$

თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით, მივიღებთ $\frac{y\,dx}{x\,dy}$ ფარდობისათვის ორ მნიშვნელობას: h_1 და h_2. მაშასადამე, ასიმპტოტური წირები იქნებიან ფართეულის ის წირები, რომლებიც xOy სიბრტყეზე გეგმილდებიან შემდეგი წირებით:

$$y^{h_1}=C_1x,\ y^{h_2}=C_2x.$$

2. განვიხილოთ, მაგალითად, $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ კონოიდი. $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ განტოლება ტოლფასია შემდეგი განტოლებების: $x=u$, $y=uv$, $z=\varphi\ (v)$, და (3) განტოლობა მიიღებს სახეს:

$$A+Bv=0,\ Bu+C\varphi'(v)=0.$$

ეს განტოლებები დაკმაყოფილდება თუ მივიღებთ: $C=-u$, $A=-v\varphi'(v)$, $B=\varphi'(v)$, და (30) დიფერენციალური განტოლება ღებულობს ასეთ სახეს:

$$u\varphi''(v)\,dv^2-2\varphi'\ (v)\ du\ dv=0.$$

ამ განტოლების ერთ-ერთი ამოხსნა არის: $v=\text{const.}$; მისგან მივიღებთ წრფივ მსახველებს. განტოლებას თუ გავყოფთ dv-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\varphi''(v)\,dv}{\varphi'(v)}=\frac{2\,du}{u};$$

აქედან გვაქვს:

$$u^2=C\varphi'(v).$$

ამრიგად, მეორე სისტემის ასიმპტოტური წირები xOy სიბრტყეზე გეგმილდებიან შემდეგი წირით:

$$x^2=C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. მოვიყვანოთ კიდევ ფართეული, განხილული ჟ ა მ ე ს (*Janet*) მიერ, რომლის განტოლება შეიძლება მოვიყვანოთ შემდეგი სახით:

$$xf\left(\frac{y}{x}\right)=F\ (z).$$

თუ მივიღებთ დამოუკიდებელ ცვალებად z და $\frac{y}{x}=u$-ს, მაშინ ასიმპტოტური წირის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}\,dz=\pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}\,du,$$

და, ცხადია, ინტეგრობა შესრულდება კვადრატურებში.

4. ჰელიკოიდი არის ფართეული, წარმოდგენილი განტოლებებით:

$$x=\rho\cos\omega,\ y=\sin\omega,\ z=f(\rho)+h\omega.$$

მკითხველს ვანდობთ დაამტკიცოს, რომ ჰელიკოიდის ასიმპტოტური წირების დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$\rho f''(\rho)\,d\rho^2-2\,h\,d\omega\,d\rho+\rho^2 f'(\rho)\,d\omega^2=0,$$

საიდანაც ω მიიღება კვადრატურის საშუალებით.

238. წრფოვან ფართეულთა ასიმპტოტური წირები. ყოველი წრფოვანი ფართეულის განტოლება შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი სახით:

$$x=x_0+\alpha u,\quad y=y_0+\beta u,\quad z=z_0+\gamma u,$$

სადაც x_0, y_0, z_0, α, β, γ არიან მეორე ცვლადი v პარამეტრის ფუნქციები. როცა $u=0$, ხოლო v იცვლება, (x_0, y_0, z_0) წერტილი მოხაზავს ფართეულის რაიმე Γ წირს; მეორე მხრით, როცა v მუდმივია და u იცვლება, (x, y, z) წერტილი მოხაზავს ფართეულის წრფივ მსახველს, და u ცვლადი პროპორციულია მანძილის (x, y, z) წერტილისა (x_0, y_0, z_0) წერტილიდან, რომელშიც განსახილავი მსახველი ჰკვეთს Γ წირს.

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მე-(4) ფორმულებში $K=\pm 1$; მე-(15) და მე-(16) გამოსახულებები უშუალოდ გვიჩვენებენ, რომ $D=0$, რომ D' არ არის დამოკიდებული u-ზე, და რომ D'' არის მრავალწევრი u-ს მიმართ არაუმეტეს მეორე ხარისხისა.

თუ (28) განტოლების მარცხენა მხარეს გავყოფთ წრფივი მსახველის სათანადო dv მამრავლზე, მივიღებთ ასიმპტოტურ წირთა მეორე სისტემის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{du}{dv}+Lu^2+Mu+N=0, \tag{32}$$

სადაც L, M, N არის v ცვლადის ფუნქციები. ამ სახის განტოლებებს ახასიათებს შესანიშნავი თვისებები, რომლებიც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები. ასე, მაგალითად, ჩვენ ვნახავთ, რომ (32) *განტოლების რომელიმე ოთხი ინტეგრალის ანჰარმონიული ფარდობა არის მუდმივი*. აქედან გამოდის, რომ ანჰარმონიული ფარდობა წრფივი მსახველის გადაკვეთის ოთხი წერტილისა მეორე ხარისხის ოთხ ასიმპტოტურ წირთან არის მუდმივი; ეს იძლევა საშუალებას ვიპოვოთ მეორე სისტემის ყველა ასიმპტოტური წირი, თუ ცნობილია სამი მათგანი. ჩვენ ვნახავთ აგრეთვე, რომ თუ ცნობილია (32) გან-

ტოლების ერთი ან ორი ინტეგრალი, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ ყველა დანარჩენი ინტეგრალი, შესაბამად, ორი ან ერთი კვადრატურით. თუ ფართეულის ყველა წრფივი მსახველი ხვდება რაიმე წირს, მაშინ ეს წირი მეორე სისტემის ერთ-ერთი ასიმპტოტური წირთაგანია, და, ამრიგად, მეორე სისტემის ყველა სხვა ასიმპტოტური წირი შეიძლება ვიპოვოთ ორი კვადრატურით. თუ ფართეულს აქვს ორი წრფივი მიმმართველი, მაშინ ცნობილია მეორე სისტემის ორი ასიმპტოტური წირი და დანარჩენების განსაზღვრისათვის საჭირო იქნება შევასრულოთ ერთი კვადრატურა. მაგრამ ამ შემთხვევაში ამოხსნა კიდევ უფრო მარტივდება. მართლაც, თუ მოცემული გვაქვს წრფოვანი ფართეული, რომელსაც ორი წრფივი მიმმართველი აქვს, მაშინ ეს ფართეული შეიძლება გარდავქმნათ ჰომოგრაფიულად იმგვარად, რომ ამ მიმმართველებიდან ერთი გახდეს უსასრულოდ დაშორებულ წრფედ; მაშინ განსახილავი ფართეული გადაიქცევა კონოიდად, ხოლო ჩვენ ზემოთ (§ 237) ვნახეთ, რომ კონოიდის ასიმპტოტური წირები მიიღება კვადრატურების გარეშე.[1]

239. შეუღლებული წირები. S ფართეულის აღებულ წერტილზე გამავალ ორ წრფეს, რომლებიც მდებარეობენ მხებ სიბრტყეზე და წარმოადგენენ ამ წერტილში ინდიკატრისის ორ შეუღლებულ დიამეტრს, ფართეულის შეუღლებული მხებები ეწოდება. ცხადია, რომ ფართეულის ყოველ მხებ წრფეს ეთანადება შეუღლებული მხები წრფე, რომელიც პირველს ემთხვევა, თუ ეს ასიმპტოტური მხებია, და ამასთან მხოლოდ ამ შემთხვევაში. ვთქვათ du და dv ფართეულის რომელიმე მხების მიმმართველი პარამეტრებია, მოცემულ მრუდწირულ კოორდინატებში; ამ მხების გეგმილს x, y სიბრტყეზე აქვს საკუთხო კოეფიციენტი:

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} du + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} dv}{\dfrac{\partial f}{\partial u} du + \dfrac{\partial f}{\partial v} dv},$$

ისე, რომ ანჰარმონიული ფარდობა ფართეულის $M(u, v)$ წერტილში ოთხი მხებისა ტოლია $\frac{da}{du}$-ის ოთხ სათანადო მნიშვნელობათა შორის ანჰარმონიულ ფარდობის. ვთქვათ (du, dv) და $(\delta u, \delta v)$ ორი MT და MT' მხების მიმმართველი პარამეტრებია, c და c' კი ფესვები შემდეგი განტოლებისა:

$$D + 2D'm + D''m^2 = 0,$$

რომელიც განსაზღვრავს ასიმპტოტურ მხებს M წერტილში. იმისთვის, რომ MT და MT' იყვნენ შეუღლებულნი, აუცილებელია და საკმარისი შესრულებული იყოს ტოლობა:

$$\frac{dv - c\,du}{dv - c'du} + \frac{\delta v - c\,\delta u}{\delta v - c'\delta u} = 0.$$

[1] § 237-ში განხილულ კონოიდის წრფივი მიმმართველი (კონოიდის ღერძი) მსახველის მართობული იყო; მაგრამ ადვილად ვნახავთ, რომ ასიმპტოტური წირის განტოლებას ექნება ასეთივე სახე იმ შემთხვევაშიც, როცა წრფივი მიმმართველი დახრილი იქნება მსახველებთან ნებისმიერი კუთხით.

თუ გავანთავისუფლებთ მნიშვნელებისაგან და cc', $c+c'$-ს შევცვლით მათ გამოსახვებით D, D', D''-ს საშუალებით, მივიღებთ:

$$D\,du\,\delta u+D'(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D''\,dv\,\delta v=0 \tag{33}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში D, D', D'' კოეფიციენტების გამოსახვებს, ეს პირობა შეიძლება გადავწეროთ კიდევ შემდეგი ტოლფასი სახით:

$$dA\,\delta x+dB\,\delta y+dC\,\delta z=0, \quad \delta A\,dx+\delta B\,dy+\delta C\,dz=0, \tag{34}$$

აღვნიშნავთ რა საზოგადოდ,

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u}\,du+\frac{\partial F}{\partial v}\,dv, \quad \delta F=\frac{\partial F}{\partial u}\,\delta u+\frac{\partial F}{\partial v}\,\delta v.$$

თუ S ფართეულზე მოცემულია რაიმე Γ წირი, მაშინ S ფართეულის Γ წირის წერტილებში მხებ სიბრტყეთა მომვლები არის განფენადი ფართეული, რომელიც S ფართეულს ეხება Γ წირით. Γ წირის ყოველ M წერტილში ამ განფენადი ფართეულის მსახველი არის S ფართეულის მხები წრფე, რომელიც Γ წირის მხების შეუღლებულია.

მართლაც, Γ წირის გასწვრივ x, y, z, A, B, C სიდიდეები რომელიმე ცვლად α პარამეტრის ფუნქციებია; მხები სიბრტყის დამახასიათებელი განისაზღვრება შემდეგი ორი განტოლებით:

$$\left.\begin{aligned} A\,(X-x)+B\,(Y-y)+C\,(Z-z)=0, \\ dA\,(X-x)+dB\,(Y-y)+dC\,(Z-z)=0, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-(15) ტოლობას (ასო d აღნიშნავს დიფერენციალს α-ს მიმართ). თუ ამ დამახასიათებლის მიმმართველ პარამეტრებს აღვნიშნავთ δx, δy, δz-თი, მაშინ (35)-ის მეორე ფორმულა დაიყვანება სახემდე:

$$dA\;\delta x+dB\,\delta y+dC\,\delta z=0,$$

რომელიც (34) ტოლობის იგივურია; აქედან გამომდინარეობს ჩვენ მიერ გამოთქმული დებულების სამართლიანობა. კერძოდ, თუ Γ წირი ასიმპტოტურია, მაშინ დამახასიათებლები ემთხვევა მხებს Γ წირისა, რომელიც ამ შემთხვევაში განფენადი ფართეულის უკუქცევის წიბოს წარმოადგენს (§ 238).

ამბობენ, რომ ფართეულზე წირთა ორი ოჯახი, რომელთაგანაც ყოველი დამოკიდებულია ერთ ცვლად პარამეტრზე, ქმნის შეუღლებულ ქსელს, თუ ორივე ოჯახის ორი წირის მხებები, რომლებიც ფართეულის ერთ და იმავე წერტილზე გაივლიან, იქნება ყოველ წერტილში შეუღლებული. ცხადია, რომ ყოველ ფართეულზე შეუღლებულ ქსელთა უსასრულო სიმრავლე არსებობს, ამასთან წირთა ერთი ოჯახი შეიძლება აღებულ იქნას ნებისმიერად, მაშინ მეორე ოჯახი განისაზღვრება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებიდან. მართლაც, ვთქვათ $F(u, v)=K$ არის წირთა ერთი ოჯახის განტოლება,

ერთ ცვლად K პარამეტრზე დამოკიდებულ $dF=0$ განტოლებისაგან შეიძლება მივიღოთ:

$$\frac{dv}{du}=G(u,\ v),$$

და მაშინ (33)-დან $\frac{\delta v}{\delta u}$ სიდიდე განისაზღვრება u და v-ს ფუნქციაში, ე. ი. მიიღება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება.

მაგალითისათვის, ვიპოვოთ პირობები, რომლის დროს $u=\text{const.}$ და $v=\text{const.}$ შეადგენენ შეუღლებულ ქსელს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავუშვათ: $du=0$, $\delta v=0$, და (33) პირობა გადაიქცევა $D'=0$ განტოლებად, ანუ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0.$$

ეს პირობები გვიჩვენებს, რომ x, y, z წარმოადგენენ შემდეგი სახის განტოლების სამ ინტეგრალს:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v}=M\frac{\partial \theta}{\partial u}+N\frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{36}$$

სადაც M და N u და v-ს ნებისმიერი ფუნქციები. მაშასადამე, საკმარისია ვიცოდეთ (36) სახის რომელიმე განტოლების სამი სხვადასხვა ინტეგრალი, რომ გვქნეს შეუღლებულ თანწყობასთან შეფარდებული ფართეულის განტოლება. მაგალითად, თუ მივიღებთ $M=N=0$, მაშინ (36) განტოლების ყოველი ინტეგრალი ტოლი იქნება u-სა და v-ს ფუნქციათა ჯამის; ამრიგად, ყოველ ფართეულზე, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$x=f(u)+f_1(v),\quad y=\varphi(u)+\varphi_1(v),\quad z=\psi(u)+\psi_1(v) \tag{37}$$

u და v წირები ქმნიან შეუღლებულ ქსელს.

(37) სახის ფართეულებს გ ა დ ა ტ ა ნ ი ს ფ ა რ თ ე უ ლ ი ეწოდება. ყოველი ასეთი ფართეული ორი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება მიღებული იქნეს ისეთი რაიმე უცვლადი Γ წირის გადატანითი ძრაობით, რომლის ერთი წერტილი მოხაზავს რომელიმე მეორე Γ' წირს. მართლაც, განვიხილოთ u და v პარამეტრების (u_0, v_0), (u, v_0), (u_0, v), (u, v) მნიშვნელობების შესაბამი ოთხი წერტილი: M_0, M_1, M_2, M. (37) ფორმულების თანახმად ეს წერტილები იქნება პარალელოგრამის წვეროები[1], თუ v_0-ს უცვლელად დავტოვებთ, ხოლო u-ს ვცვლით, მაშინ M_1 წერტილი შემოწერს ფართეულის რომელიმე Γ წირს; სრულიად ასევე თუ u_0 მუდმივია და შეიცვლება v, მაშინ M_2 წერტილი შემოწერს ფართეულის რომელიმე მეორე Γ' წირს. მაშასადამე, ეს ფართეული შეიძლება მიღებული იქნეს Γ წირის გადატანითი ძრაობით, მასთან M_2 წერტილი აღწერს Γ' წირს, ასევე Γ' წირის გადატანითი ძრაობით, როცა M_1 წერტილი აღწერს Γ წირს. ასეთ ფართეულთა თვითმიღებიდან, ცხადია, რომ წირთა ორივე ოჯახი არის შეუღლებული; მართლაც, მაგალითად, მხები წრფეები, რომლებიც გავლებულია Γ' წირის სხვადასხვა მდებარეობისათვის, იმ წერტილებში, სადაც იგი გადაკვეთს Γ წირს, ჰქმნიან ცილინდრს, ფართეულის ირგვლივ Γ წირის განგრძივ; მაშასადამე, Γ და Γ' წირების მხებები შეუღლებულია.

1. ამიტომ u_0-ის u-ში გადასვლისას $M_0 M_2$ მონაკვეთი გადაადგილდება გადატანით M_1M მდებარეობაში, და სრულიად ასევე v_0-ის v-ში გადასვლისას M_0M_1 მონაკვეთი გადატანით გადაადგილდება $M_2 M$ მდებარეობაში.

240. სიმრუდის წირები. S ფართეულზე მდებარე წირს ეწოდება ამ ფართეულის სიმრუდის წირი, თუ მის ყოველ წერტილში მხებებს აქვს ინდიკატრისის ერთ-ერთი ღერძის მიმართულება. ეს წირები, მაშასადამე, განისაზღვრება უკვე ჩვენ მიერ წინათ მიღებული დიფერენციალური განტოლებით:

$$(D\,du+D'\,dv)(F\,du+G\,dv)-(D'\,du+D''\,dv)(E\,du+F\,dv)=0, \tag{25}$$

რომელიც $\frac{dv}{du}$-სათვის ორ ნამდვილ მნიშვნელობას იძლევა. დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგადი თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ ფართეულის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზე (რომელიც არ წარმოადგენს ომბილიურ წერტილს) გაივლის ორი და მხოლოდ ორი სიმრუდის წირი, რომელთაგანაც თითოეული ეხება ინდიკატრისის ერთ-ერთ ღერძს. ყოველ ფართეულზე, რომელიც განსხვავდება სფეროსა და სიბრტყისაგან არსებობს სიმრუდის წირთა ორი ოჯახი, რომლებიც შეადგენენ ერთდროულად როგორც ორტოგონალურ, ისე შეუღლებულ ქსელს.

სიმრუდის წირები შეიძლება განსაზღვრული იქნეს კიდევ მათი შემდეგი თვისებით: ეს ისეთი, S ფართეულზე მდებარე, წირებია, რომელთა გაგრძივ S-ის ნორმალები ადგენენ განფენად ფართეულს.

მართლაც, დავწეროთ ნორმალის განტოლება:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C};$$

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ეს წრფე ჰქმნიდენ განფენად ფართეულს, არის შემდეგი (§ 205):

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}=0, \tag{38}$$

ან და გაწარმოების შემდეგ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv & \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \\ A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u}du+\frac{\partial A}{\partial v}dv & \frac{\partial B}{\partial u}du+\frac{\partial B}{\partial v}dv & \frac{\partial C}{\partial u}du+\frac{\partial C}{\partial v}dv \end{vmatrix}=0.$$

რომ დავამტკიცოთ ამ დიფერენციალური განტოლების იგივეობა (25) განტოლებასთან, გავამრავლოთ დეტერმინანტის პირველი სვეტის ელემენტები $\frac{\partial x}{\partial u}$- ზე, მეორის — $\frac{\partial y}{\partial n}$-ზე, ხოლო მესამის — $\frac{\partial z}{\partial u}$-ზე და პირველი სვეტის ელემენტები შევცვალოთ სათანადო ნამრავლთა ჯამით; ანალოგიური მოქმედებები შეიძლება შევასრულოთ v ცვლადისათვის. თუ ვისარგებლებთ E, F, G და D, D', D'' კოე-

ფიციენტების გამოსახვებით [მე-(14) და მე-(14') ფორმულები], შეიძლება საბოლოოდ დავწეროთ:

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv & \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \\ 0 & 0 & C \\ D\,du+D'\,dv & D'\,du+D''\,dv & \frac{\partial C}{\partial u}du+\frac{\partial C}{\partial v}dv \end{vmatrix}=0;$$

აქ უკვე ადვილად შევამჩნევთ ამ განტოლების იგივეობას (25) განტოლებასთან.

მიღებული შედეგი ადვილად მიიღება აგრეთვე სივრცის წირთა შლადების და შეუღლებულ მხებთა თვისებების საშუალებით.

ვთქვათ Γ არის S ფართეულზე რაიმე წირი, რომლის გასწვრივ S-ის ნორმალები ჰქმნიან განფენად ფართეულს. თუ მოვაბრუნებთ თითოეულს ამ ნორმალებიდან Γ-ს მართივ სიბრტყეში M წერტილის გარშემო მართი კუთხით, მაშინ ის დაემთხვევა MT' წრფეს, რომელიც მხებ სიბრტყეში ძევს და Γ წირის MT მხების მართობულია. MT' წრფეები ჰქმნიან აგრეთვე რაიმე განფენად ფართეულს, რომელიც ეხება S-ფართეულს Γ-ს გასწვრივ (§ 225). ამრიგად, MT და MT' წრფეები შეუღლებული წრფეებია და, თავის ორტოგონალობის შედეგად, არიან ინდიკატრისის ღერძები.

შებრუნებული დებულება ანალოგიური ხერხით მტკიცდება.

გამოყენების დროს ხელსაყრელია ავიღოთ სიმრუდის წირის დიფერენციალური განტოლება (38) სახით, ვინაიდან ამ შემთხვევაში არ არის საჭირო E, F, G, D, D', D'' კოეფიციენტების წინასწარი გამოთვლა. დავუშვათ, მაგალითად, რომ ფართეული განსაზღვრულია განტოლებით: $z=F(x, y)$; ამ შემთხვევაში ნორმალის განტოლებები არის:

$$\left.\begin{aligned} X&=-pZ+x+pz, \\ Y&=-qZ+y+qz. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

იმისთვის, რომ ეს წრფეები ჰქმნიდენ განფენად ფართეულებს აუცილებელია და საკმარისი, რომ შემდეგი ორი განტოლება (§ 205):

$$-Z\,dp+d(x+pz)=0, \qquad -Z\,dq+d(y+qz)=0 \tag{40}$$

დაკმაყოფილებული იყოს Z-ის ერთი და იმავე მნიშვნელობისათვის, ე. ი. რომ ადგილი ექნეს:

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq},$$

ან გამარტივების შემდეგ:

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}.$$

თუ dz, dp, dq-ს შევცვლით მათი გამოსახვებით, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}, \tag{41}$$

რომელიც (25') განტოლების იგივურია, თუ მასში dx და dy-ს შევცვლით შესაბამად α და β-თი.

1. ვიპოვოთ, მაგალითად, ჰელიკოიდის:

$$z=a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

სიმრუდის წირები. დავუშვებთ რა:

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta, \qquad z=a\theta,$$

A, B, C-ს განსაზღვრისათვის მივიღებთ ორ პირობას:

$$A\cos\theta+B\sin\theta=0, \qquad -A\rho\sin\theta+B\rho\cos\theta+Ca=0.$$

თუ მივიღებთ: $C=p$, მაშინ გვექნება:

$$A=a\sin\theta, \qquad B=-a\cos\theta.$$

(3Ӗ) დიფერენციალური განტოლება მსგავს წევრთა შეკრების შემდეგ მიიღებს ასეთ სახეს:

$$d\rho^2-(\rho^2+a^2)\,d\theta^2=0,$$

საიდანაც

$$d\theta=\pm\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^3+a^3}}.$$

ავილოთ რომელიმე გარკვეული ნიშანი, მაგალითად $+$ და მოვახდინოთ ინტეგრობა:

$$\rho+\sqrt{\rho^3+a_2}=ae^{\theta-\theta_0}$$

$$\rho=\frac{a}{2}\left[e^{\theta-\theta_0}-e^{-(\theta-\theta_0)}\right].$$

სიმრუდის წირთა გეგმილები xOy სიბრტყეზე ურთიერთ თანატოლი ხვიებია, რომლებიც ადვილად აიგება.

2 ვიპოვოთ $z=\frac{xy}{a}$ პარაბოლოიდის სიმრუდის წირები. გვაქვს:

$$p=\frac{y}{a}, \qquad q=\frac{x}{a}, \qquad r=t=0, \quad s=\frac{1}{a};$$

(41) დიფერენციალური განტოლება გადაიქცევა განტოლებად:

$$(a^2+y^2)\,dx^2=(a^2+x^2)\,dy^2.$$

აქედან:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\pm\frac{dx}{\sqrt{y^2+a^2}}=0.$$

თუ ავიღებთ, მაგალითად, ორივე ფესვის წინ პლიუს ნიშანს, მივიღებთ წინა დიფერენციალური განტოლების შემდეგ ზოგად ინტეგრალს:

$$(x+\sqrt{x^2+a^2})\ (y+\sqrt{y^2+a^2})=C;$$

ეს ინტეგრალი სიმრუდის წირთა ერთ-ერთ სისტემას იძლევა. თუ დავუშვებთ:

$$\lambda=x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2} \tag{42}$$

და ვისარგებლებთ იგივეობით:

$$(x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2})^2+a^4=[xy+\sqrt{(x^2+a^2)\ (y^2+a^2)}]^2,$$

წინა ინტეგრალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+a^4}=C.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სიმრუდის წირთა ორი სისტემიდან ერთის გეგმილები შეიძლება აგრეთვე წარმოდგენილ იქნეს (42) განტოლებით, სადაც λ აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს. სრულიად ასევე ვიპოვით, რომ სიმრუდის წირთა მეორე სისტემის განტოლება იქნება:

$$x\sqrt{y^2+a^2}-y\sqrt{x^2+a^2}=\mu. \tag{43}$$

თუ ვისარგებლებთ პარაბოლოიდის განტოლებით: $xy=az$, მაშინ (42) და (43) განტოლებანი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=C,\quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=C'.$$

მაგრამ $\sqrt{x^2+z^2}$ და $\sqrt{y^2+z^2}$ გამოსახვები წარმოადგენენ მანძილებს (x, y, z) წერტილისა შესაბამად Oy და Ox ღერძებიდან; მაშასადამე, *პარაბოლოიდის სიმრუდის წირები ისეთი წირებია, რომლებისთვისაც ჯამი ან სხვაობა მანძილთა მათი თითოეული წერტილისა Ox და Oy ღერძებიდან მუდმივი სიდიდეა.*

241. ფართეულის შლილი. ვოქვათ C არის S ფართეულის სიმრუდის წირი. როდესაც M წერტილი მოხაზავს C წირს, ფართეულის MN ნორმალი რჩება რაიმე Γ წირის მხებად. აღვნიშნოთ A-თი MN და Γ წირთა თანამხების წერტილი, და ვთქვათ X, Y, Z ამ წერტილის კოორდინატებია. Z კოორდინატი განისაზღვრება ნებისმიერით (40) განტოლებებიდან, მასთან ეს ორივე განტოლება დაიყვანება ერთზე, ვინაიდან C წარმოადგენს სიმრუდის წირს. ჩვენ შეგვიძლია (40) განტოლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

ორივე წილადის მნიშვნელებს თუ გავამრავლებთ შესაბამად dx-ზე და dy-ზე, მივიღებთ:

$$Z-z=\frac{dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}.$$

მაგრამ dx, dy, dz არიან პროპორციული სიმრუდის წირის მხების α, β, γ მიმმართველი კოსინუსებისა, და ჩვენ გვაქვს;

$$Z-z=\frac{1}{r\alpha^2+2s\,\alpha\beta+t\beta^2}.$$

თუ ამ ფორმულას შევადარებთ მე-(13) ფორმულას, რომელიც იძლევა იმ ნორმალ კვეთის სიმრუდის R რადიუსის ალგებრულ მნიშვნელობას, რომელიც სიმრუდის წირის მხებია, ვნახავთ, რომ წინა დამოკიდებულება შეიძლება დავწეროთ ასეთი სახით:

$$Z-z=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=R\nu, \tag{44}$$

სადაც ν არის იმ მახვილი კუთხის კოსინუსი, რომელსაც ფართეულის ნორმალის დადებითი მიმართულება ადგენს Oz ღერძთან. მაგრამ, მეორე მხრით, $z+R\nu$ წარმოადგენს აღნიშნული ნორმალური კვეთის სიმრუდის ცენტრის z_1 კოორდინატს. ამრიგად (44) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ MN ნორმალის მის Γ მომვლებთან თანახების A წერტილი ემთხვევა იმ მთავარი ნორმალური კვეთის სიმრუდის ცენტრს, რომელიც ეხება C წირს M წერტილში.

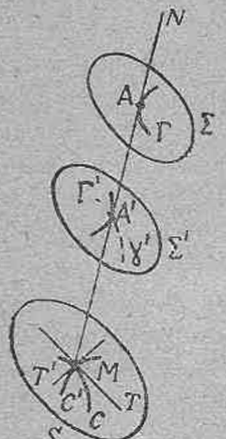
მაშასადამე, Γ წირი წარმოადგენს აღნიშნულ სიმრუდის ცენტრი გეომეტრიულ ადგილს. თუ განვიხილავთ ერთი და იგივე ოჯახის ყველა სიმრუდის წირს, მაშინ შესაბამი Γ წირების გეომეტრიული ადგილი იქნება რაიმე Σ ფართეული, რომლისათვის S ფართეულის ყველა ნორმალი იქნება მხებები. მართლაც, ყოველი ნორმალი, მაგალითად, MN ნორმალი ეხება ერთ-ერთ Γ წირს A წერტილში, ხოლო ყველა Γ წირი მდებარეობს Σ ფართეულზე.

განვიხილოთ ახლა სხვა ისეთ ოჯახის სიმრუდის C' წირი, რომელიც გადის M წერტილზე და პირველ C წირს ჰკვეთს ორტოგონალურად. S ფართეულის ნორმალები C' წირის გასწვრივ აგრეთვე იქნება მხებები რაიმე Γ' წირისა, რომელიც წარმოადგენს S ფართეულის იმ ნორმალურ კვეთათა სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიულ ადგილს, რომლებიც ეხება C' წირს. გეომეტრიული ადგილი ყველა Γ' წირისა, რომლებიც ეთანადება ერთ და იგივე ოჯახის (ოჯახი, რომელსაც ეკუთვნის C წირი) ყველა სიმრუდის წირს, იქნება რაიმე Σ' ფართეული, რომლისათვის, ისე როგორც Σ-სათვის, S ფართეულის ყველა ნორმალი იქნება მხებები. საზოგადოდ Σ და Σ' ფართეულები არ არიან ანალიზურად სხვადასხვა და წარმოადგენენ ერთ ისეთ ფართეულის ორ კალთას რომელიც მოცემულია დაუშლელი განტოლებით.

S ფართეულის MN ნორმალი ეხება Σ და Σ' კალთებს, S ფართეულის M წერტილზე სიმრუდის ორ მთავარ A და A' ცენტრში. ადვილი მოსაძებნია აღნიშნული კალთების მხები სიბრტყეები A და A' წერტილებში (ნახ. 41). როდესაც M წერტილი აღწერს C წირს, მაშინ MN ნორმალი შემოწერს განფენად D ფართეულს, რომლისათვის Γ წირი წარმოადგენს უკუქცევის წიბოს. მეორე მხრით ამ MN ნორმალის Σ' ფართეულთან შეხების A' წერტილი შემოწერს გარკვეულ γ' წირს, განსხვავებულს Γ'-საგან, ვინაიდან MN წრფემ არ შეუძლია ერთდროულად შეეხოს Γ და Γ' წირებს.

მაშასადამე, განფენადი D ფართეული და Σ' ფართეული ეხებიან ერთმანეთს A' წერტილში, და, მაშასადამე, Σ' ფართეულს მხები სიბრტყე A' წერტილზე ეხება განფენადი D ფართეულს MN წრფეს განგრძივ; ამრიგად, საძიებელ მხებ სიბრტყედ იქნება MNT სიბრტყე, რომელიც გადის MN ნორმალზე

და C წირის მხებ წრფეზე. სრულიად ასევე შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ Σ ფართეულის A წერტილზე მხებ სიბრტყედ იქნება MNT' სიბრტყე, რომელიც გადის მეორე სიმრუდის წირის მხებზე.



ნახ. 41.

ეს ამოწმებს წინათ მიღებულ შედეგებს (§ 231) და მივყევართ განფენადი ფართეულის შემდეგი საგულისხმო თვისებამდე. გავავლოთ სივრცის რაიმე O წერტილიდან S ფართეულისადმი OM ნორმალი, და ვთქვათ A და A' არიან S ფართეულის მთავარი სიმრუდის ცენტრები, მდებარე ამ ნორმალზე. ორივე Σ და Σ' კალთას მხები სიბრტყეები A და A' წერტილებში ურთიერ თანამართობია. ვინაიდან ეს სიბრტყეები გადიან O წერტილზე, ამიტომ, ცხადია, რომ დამკვირვებლისათვის, რომელიც დამზერს სივრცის ნებისმიერი O წერტილიდან, S ფართეულის ორივე კალთა გამოჩნდება მართობულად გადაკვეთილი. შებრუნებული დებულება წინათ იყო დამტკიცებული (§ 231).

242. როდრიგის ფორმულები. თუ λ, μ, ν არიან ფართეულის მხები წრფის მიმართულების კოსინუსები, ხოლო R — ერთ-ერთი მთავარი სიმრუდის რადიუსთაგანი, მაშინ, შესაბამი სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები იქნება:

$$X=x+R\lambda, \qquad Y=y+R\mu, \qquad Z=z+R\nu. \tag{45}$$

როდესაც (x, y, z) წერტილი აღწერს სიმრუდის წირს, რომელიც ეხება იმ ნორმალურ კვეთას, რომლის სიმრუდის რადიუსი არის R, მაშინ, როგორც ვნახეთ, შესაბამი სიმრუდის ცენტრი შემოწერს რაიმე Γ წირს, რომელიც ეხება S ფართეულის MN ნორმალს. მაშასადამე, ადგილი უნდა ექნეს ტოლობას:

$$\frac{dX}{\lambda}=\frac{dY}{\mu}=\frac{dZ}{\nu};$$

შევცვლით რა X, Y, Z სიდიდეებს მათი მნიშვნელობებით (45)-დან, გვექნება:

$$\frac{dx+R\,d\lambda}{\lambda}=\frac{dy+R\,d\mu}{\mu}=\frac{dz+R\,d\nu}{\nu}.$$

ამ ფარდობის საერთო მნიშვნელობა ტოლია ნულის; მართლაც, თუ გავამრავლებთ პირველ ფარდობის მრიცხველსა და მნიშვნელს λ-ზე, მეორეს — μ-ზე ხოლო მესამეს — ν-ზე და შევკრებთ მიღებულ ფარდობების მრიცხველებსა და მნიშვნელებს, მივიღებთ ისეთ ფარდობას, რომელიც წინას ტოლია და რომლის მნიშვნელი ტოლია ერთის, მაშინ როცა მრიცხველი:

$$\lambda\,dx+\mu\,dy+\nu\,dz+R(\lambda\,d\lambda+\mu\,d\mu+\nu\,d\nu)$$

იგივურად ტოლია ნულის. ამრიგად ჩვენ მივიღებთ როდრიგის (*Olinde Rodrigues*) შემდეგ ფორმულას:

$$dx+R\,d\lambda=0, \qquad dy+R\,d\mu=0, \qquad dz+R\,d\nu=0; \tag{46}$$

ამ ფორმულებს აქვთ დიდი მნიშვნელობა ფართეულთა თეორიაში. საჭიროა აღინიშნოს, რომ (46) ფორმულები გამოიყენება, მხოლოდ მაშინ, როდესაც (x, y, z) წერტილი გადაადგილდება სიმრუდის წირის განგრძივ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. რომ მივიღოთ განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს სიმრუდის მთავარ რადიუსებს, შეიძლება ვისარგებლოთ განფენადი ფართეულის თვისებებით. შევცვლით რა (45) ფორმულაში λ, μ და ν-ს მათი მნიშვნელობებით მე-(8)-დან, და ავღნიშნავთ:

$$R=\rho\sqrt{A^2+B^2+C^2};$$

მაშინ გვექნება:

$$X=x-\rho A, \qquad Y=y-\rho B, \qquad Z=z-\rho C.$$

ვინაიდან, როდესაც (x, y, z) წერტილი მოძრაობს სიმრუდის წირის განგრძივ, (X, Y, Z) წერტილი შემოწერს წირს, რომელიც ეხება S ფართეულის ნორმალს, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას:

$$\frac{dx-\rho\,dA-A\,d\rho}{A}=\frac{dy-\rho\,dB-B\,d\rho}{B}=\frac{dz-\rho\,dC-C\,d\rho}{C},$$

ან და თუ აღვნიშნავთ ამ ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას $-d\rho+K$-თი:

$$dx-\rho\,dA-AK=0, \qquad dy-\rho\,dB-BK=0, \qquad dz-\rho\,dC-CK=0. \tag{47}$$

თუ გამოვრიცხავთ ამ ტოლობებიდან ρ და K-ს, ჩვენ მივიღებთ სიმრუდის წირის (38) დიფერენციალური განტოლებას; მაგრამ თუ შევცვლით dx, dy, dz, dA, dB, dC სიდიდეებს შემდეგი გამოთქმებით:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \ldots, \frac{\partial C}{\partial u}\,du+\frac{\partial C}{\partial v}\,dv$$

და ამის შემდეგ გამოვრიცხავთ du, dv, dK სიდიდეებს, ამით მივალთ შემდეგი სახის განტოლებამდე, რომელიც განსაზღვრავს ρ-ს:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}-\rho\dfrac{\partial A}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}-\rho\dfrac{\partial A}{\partial v} & A \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}-\rho\dfrac{\partial B}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}-\rho\dfrac{\partial B}{\partial v} & B \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u}-\rho\dfrac{\partial C}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}-\rho\dfrac{\partial C}{\partial v} & C \end{vmatrix}=0. \tag{48}$$

გარდაქმნით, სრულიად ანალოგიური იმ გარდაქმნისა, რომელიც ჩვენ მოვიყვანეთ § 240-ში, ეს განტოლება შეიძლება დაყვანილი იქნას (24) სახემდე, მაგრამ (48) განტოლება უფრო მოსახერხებელია გამოყენებებში, რადგან იგი წინასწარ არ მოითხოვს E, F, G, D, D', D'' კოეფიციენტების გამოთვლას. მაგალითისათვის, ვიპოვოთ ჰელიკოიდის სიმრუდის მთავარი რადიუსები. ამ შემთხვევაში, თუ ცოტათი შევცვლით აღნიშვნებს, ჩვენ დავწერთ:

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v, \qquad z=av.$$

$$A=a\sin v, \qquad B=-a\cos v, \qquad C=u.$$

(48) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$-a^2\rho^2=a^2+u^2,$$

საიდანაც $R=\pm\frac{a^2+u^2}{a}$. ჰელიკოიდის სიმრუდის მთავარი რადიუსები აბსოლუტური მნიშვნელობებით არიან ტოლი და მოპირდაპირე ნიშნით.

243. იოახიმსტალის თეორემა. ზოგიერთ ფართეულისათვის სიმრუდის წირები შეიძლება განისაზღვროს გეომეტრიული მოსაზრებებიდან. ასე, მაგალითად, ცხადია, რომ ბრუნვითი ფართეულის სიმრუდის წირებად იქნებიან ამ ფართეულის მერიდიანები და პარალელები, ვინაიდან ეს წირები ყოველ თავის წერტილში ეხებიან ინდიკატრისის ერთ-ერთ ღერძს. ეს ადვილი შესამოწმებელია, თუ შევნიშნავთ, რომ ფართეულის ნორმალები მერიდიანის განგრძივ ჰქმნიან სიბრტყეს, ხოლო ფართეულის ნორმალები პარალელების განგრძივ ჰქმნიან წრიულ კონუსს, ე. ი. ორივე შემთხვევაში ნორმალები ადგენენ განფენად ფართეულს.

განფენადი ფართეულებისათვის სიმრუდის წირთა ერთი ოჯახი შედგება მსახველებისაგან. მეორე ოჯახი კი შედგება ამ მსახველებისადმი ორტოგონალური ტრაექტორიებისაგან, ე. ი. განფენადი უკუქცევის წიბოებისაგან (§ 225). ეს წირები შეიძლება მიღებული იქნან ერთი კვადრატურით.

თუ ცნობილია ერთ-ერთი განფენადი, მაშინ ამ ოჯახის ყველა დანარჩენი სიმრუდის წირი შეიძლება მიღებული იქნას მისგან ყოველგვარი კვადრატურის გარეშე. ყველა ეს შედეგი შეიძლება შემოწმებული იქნეს უშუალო გამოთვლებით.

განფენადობის თეორიამ იოახიმსტალი (Ioachimsthal) მიიყვანა საგულისხმო თეორემამდე, რომელსაც ამ თეორიაში აქვს ფართო გამოყენება.

ვთქვათ, ორი S და S' ფართეული იკვეთება რაიმე C წირზე, რომელიც წარმოადგენს თითოეულ ამ ფართეულისათვის სიმრუდის წირს. S და S' ფართეულების MN და MN' ნორმალები C წირის განგრძივ ადგენენ ორ განფენად ფართეულს. მაგრამ ყოველი MN და MN' წრფეთაგანი C წირის ნორმალურია. აქედან, § 225-ის მიხედვით, გამომდინარეობს, რომ თუ ორ ფართეულს აქვს საერთო სიმრუდის წირი, მაშინ ისინი ამ წირის განგრძივ იკვეთებიან მუდმივი კუთხით.

პირიქით, თუ ორი ფართეული იკვეთება მუდმივი კუთხით, და თუ გადაკვეთის წირი არის ერთ-ერთი ფართეულისათვის სიმრუდის წირი, მაშინ ეს გადაკვეთის წირი იქნება აგრეთვე სიმრუდის წირი მეორე ფართეულისათვისაც. მართლაც, ცნობილია, რომ თუ ორმაგი სიმრუდის C წირის ნორმალთა ოჯახი ადგენენ განფენად ფართეულს, მაშინ ნორმალთა ოჯახი, რომელიც მიიღება, თუ ყოველ ნორმალს მოვაბრუნებთ მუდმივი კუთხით C წირის ნორმალურ სიბრტყეში, აგრეთვე ადგენენ განფენად ფართეულს.

ყოველი ბრტყელი ან სფერული წირი არის სიბრტყისა ან სფეროს სიმრუდის წირი. აქედან იოახიმსტალის თეორემის ძალით გამომდინარეობს, რომ იმისათვის, რომ ბრტყელი ან სფერული წირი, მდებარე ფართეულზე, იყოს ამ ფართეულის სიმრუდის წირი აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფართეული კვეთდეს ამ წირით სიბრტყეს ან სფეროს მუდმივი კუთხით.

244. დიუპენის თეორემა. ჩვენ არა ერთხელ შევხედით ფართეულთა სამმაგ ორტოგონალურ სისტემას (§ 65, 140). ასეთი სისტემის თეორია გამოდის დიუპენის (Dupin) შესანიშნავ თეორემიდან, რომლის დამტკიცებაზედ ახლა გადავდივართ.

თუ მოცემულია სამი ოჯახი ფართეულთა, რომელნიც ადგენენ სამმაგ ორტოგონალურ სისტემას, მაშინ ყოველი ორი მათგანის გადაკვეთის წირი იქნება თითოეული მათგანისათვის სიმრუდის წირი.

ვთქვათ, რომ სივრცის მართკუთხოვანი x, y, z კოორდინატები გამოსახულია სამი u, v, w პარამეტრის ფუნქციებში; ისე, რომ (u), (v) და (w) ფართეულთა სამი ოჯახი ადგენენ სამმაგ ორტოგონალურ სისტემას. ორტოგონალობის პირობებად იქნება შემდეგი სამი ტოლობა:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=0,\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}=0,\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0,\tag{49}$$

გავაწარმოებთ რა ამ ტოლობებს, შესაბამად, u, v და w-ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=0,$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0,$$

საიდანაც, უბრალო გარდაქმნით, მივიღებთ:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\tag{50}$$

თუ გამოვრიცხავთ (49)-ს პირველი ორი განტოლებიდან და (50)-ის უკანასკნელი განტოლებიდან $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ წარმოებულებს, მივიღებთ პირობას:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0,$$

რომელიც გამოთქვამს, რომ (w) ფართეულზე $u=C$ და $v=C'$ წირები ადგენენ შეუღლებულ ქსელს. ეს ქსელი ერთდროულად არის როგორც ორტოგონალური, აგრეთვე შეუღლებულიც და შედგება, მაშასადამე, სიმრუდის წირებისაგან.

სამმაგ ორტოგონალური სისტემის მეტად საგულისხმო მაგალითს წარმოადგენს მეორე რიგის სოფოკალური ფართეულები (§ 41); ალბათ სწორედ ამ ფართეულთა განხილვამ მიიყვანა დიუპენი აღნიშნულ ზოგად თეორემამდე. დიუპენის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ელიფსოიდის ან ჰიპერბოლოიდის სიმრუდის წირები (რომლებიც უფრო ადრე მონჟის მიერ იყო განსაზღვრული)

არიან ამ ფართეულების მათ სოფოკალურ ფართეულებთან გადაკვეთის წირები.

პარაბოლოიდები, მოცემული განტოლებით:

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda,$$

სადაც λ ცვლადი პარამეტრია, აგრეთვე adგენენ სამმაგ ორტოგონალურ სისტემას; აქედან შეიძლება მივიღოთ პარაბოლოიდის სიმრუდის წირი. კიდევ აღვნიშნოთ აქ წინათ (§ 240) მოყვანილი სამმაგად ორტოგონალური სისტემა:

$$\frac{xy}{z}=\alpha, \sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=\beta, \quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=\gamma.$$

სამმაგად ორტოგონალური სისტემის მოძებნა არის დიფერენციალური გეომეტრიის ერთ-ერთი მეტად საინტერესო და ძნელი ამოცანა. ამ საკითხისადმი მიძღვნილია საკმაოდ ბევრი გამოკვლევა, რომელთა შედეგები დ ა რ ბ უ ს მიერ შეგროვილია მის წიგნში.[1] ყოველი S ფართეული შედის უსასრულოდ ბევრ სამმაგად ორტოგონალურ სისტემის შემადგენლობაში. ერთ-ერთი ამ სისტემათაგანი შედგება S ფართეულის პარალელურ ფართეულებისაგან და იმ განფენადი ფართეულთა ორ სისტემისაგან, რომელნიც მიღებულია S ფართეულის ნორმალებისაგან, გავლებული ამ ფართეულის სიმრუდის წირის განგრძივ. მართლაც, ვთქვათ, O არის რამე წერტილი MN ნორმალისა, გავლებული S ფართეულისადმი M წერტილზე, MT და MT'—მხები წრფეები სიმრუდის ორ C და C' წირებისადმი, რომლებიც გადიან M წერტილზე. მხები სიბრტყე ფართეულისა, რომელიც პარალელურია S ფართეულის და გადის O წერტილზე, იქნება პარალელური S ფართეულის მხები სიბრტყისა M წერტილში; მხებ სიბრტყეებად განფენადი ფართეულებისა, რომლებიც მიღებულია S ფართეულის ნორმალებისაგან C და C' წირების განგრძივ არიან, შესაბამად, NMT და NMT' სიბრტყეები. მაგრამ ეს სამი სიბრტყე წყვილ-წყვილად ურთიერთ მართობულია რაც ამტკიცებს, რომ განსახილავი სისტემა არის სამმაგად ორტოგონალური.

შებრუნებული რადიუს-ვექტორებით გარდაქმნის საშუალებით ყოველი სამმაგად ორტოგონალური სისტემიდან შეიძლება მიღებული იქნეს უსასრულო ბევრი სხვა ანალოგიური სისტემა, ვინაიდან ეს გარდაქმნები არ ცვლიან კუთხეებს. რადგან ჩვენ ახლა ვნახეთ, რომ ყოველი ფართეული არის რაიმე სამმაგად ორტოგონალურ სისტემის წევრი, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რ ო მ ყ ო ვ ე ლ ი შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი რ ა დ ი უ ს - ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ი თ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს დ რ ო ს გ ა რ დ ა ს ა ქ მ ნ ე ლ ი ფ ა რ თ ე უ ლ ი ს ს ი მ რ უ დ ი ს წ ი რ ე ბ ი გ ა რ დ ა ი ქ მ ნ ე ბ ი ა ნ ა ხ ა ლ ფ ა რ თ ე უ ლ ი ს ს ი მ რ უ დ ი ს წ ი რ ე ბ ა დ. ეს ადვილი შესამოწმებელია უშუალოდ.

[1] Leçons sur les systémes orthogonoux et les coordonnèes curvilignes, 1910.

245. გეოდეზიური გრეხა. სიმრუდის წირების თვისებებთან დაკავშირებულია გარკვეული საგულისხმო გეომეტრიული სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია მესამე რიგის წარმოებულზე. სივრცის წირის თეორიაში (§ 225) არსებობს დამოკიდებულება:

$$\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}=H=\begin{vmatrix}\frac{d\lambda}{ds} & \frac{d\mu}{ds} & \frac{d\nu}{ds}\\ \lambda & \mu & \nu\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}, \tag{51}$$

სადაც α, β, γ არის S ფართეულზე მდებარე რაიმე Γ წირის მხების მამართულების კოსინუსები, λ, μ, ν—ამავე ფართეულის ნორმალის მიმართულების კოსინუსები, θ—ფართეულის ნორმალსა და Γ წირის მთავარ ნორმალს შორის მოთავსებული კუთხე, ათვლილი, ისე როგორც § 225-ში, T კი Γ წირის სიმრუდის რადიუსი.

ვთქვათ S ფართეულის x, y, z კოორდინატები გამოსახულია u და v პარამეტრების საშუალებით; მაშინ λ, μ, ν იქნებიან აგრეთვე u და v-ს ფუნქციები; ამრიგად H დეტერმინანტის ყველა ელემენტი გამოსახულია u, v, $\frac{dv}{du}$ სიდიდეების საშუალებით. მაშასადამე, $\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}$ გამოთქმას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა ყველა წირისათვის, რომელნიც მდებარეობენ ფართეულზე და ეხებიან ერთმანეთს (u, v) წერტილში.

ო. ბონემ, რომელსაც ეკუთვნის ეს საგულისხმო შედეგი, H სიდიდეს უწოდა გეოდეზიური გრეხა. რომ შევისწავლოთ გეოდეზიური გრეხის ცვლილება მხების მდებარეობაზე დამოკიდებით, ამისათვის ავარჩიოთ X და Y ღერძებად ინდიკატრისის ღერძები; ასეთ შემთხვევაში ფართეული განისაზღვრება განტოლებით:

$$z=\frac{x^2}{2R}+\frac{y^2}{2R}+\dots$$

რაიმე Γ წირისათვის, რომელიც ფართეულზე გადის კოორდინატთა სათავეზე და რომლის მხები ადგენს ω კუთხეს x ღერძთან, გვექნება: $\alpha=\cos\omega$, $\beta=\sin\omega$, $\gamma=0$, $\lambda=\mu=0$, $\nu=1$ $\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\cos\omega}{R}$, $\frac{d\mu}{ds}=\frac{\sin\omega}{R'}$, და (51) ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\sin\omega\cos\omega. \tag{51 bis}$$

ამ ფორმულის თანახმად, რომელიც ითვლება ეილერის ფორმულის დამატებად, Γ წირის გეოდეზიური გრეხა გახდება ნული მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ წირი ეხება ინდიკატრისის რომელიმე ღერძს. მაშასადამე, სიმრუდის წირები შეიძლება განმარტებული იქნან, როგორც ფართეულზე მდებარე წირები, რომელთა ყოველ წერტილზე გეოდეზიური გრეხა არის ნული. სხვათაშორის ეს შედეგი გამომდინარეობს აგრეთვე (51) ფორმულიდანაც, ვინაიდან გაუტოლებთ რა ნულს აღნიშნულ განტოლების მარჯვენა მხარეს, მივიღებთ სიმრუდის წირების დიფერენციალურ განტოლებას. შევნიშნოთ კიდევ, რომ (51 bis) ფორმულაში ω-ს შეცვლა $\omega+\frac{\pi}{2}$-ით, მისი მარჯვენა მხარე იცვლის მხოლოდ ნიშანს; მაშასადამე, თუ ფართეულზე ორი წირი იკვეთება მართი კუთხით, მაშინ ორივე წირის გეოდეზიური გრეხათა ჯამი, მათი გადაკვეთის წერტილზე, უდრის ნულს.

თუ ორი S და S' ფართეული მართი კუთხით იკვეთება Γ წირზე, მაშინ $\theta-\theta'$ სხვაობა რჩება უცვლელი ამ წირის განგრძივ, და მაშასადამე, გეოდეზურ გრეხას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა ორივე ფართეულისათვის.

იოახიმსტალის თეორემა მიიღება როგორც ზემოთქმულის უშუალო შედეგი. გეოდეზური გრეხის თვისებების დახმარებით შეიძლება მეტად მარტივად დამტკიცდეს *დუპენის* თეორემა. ვთქვათ S_1, S_2, S_3 არის სამი ფართეული, რომელნიც გადიან M წერტილზე და ეკუთვნიან შესაბამად სამ სამმაგად ორტოგონალურ ოჯახს. Γ_1, Γ_2, Γ_3—იყო გადაკვეთის წირები შესაბამად S_2-სა და S_3-ის, S_3-ს და S_1-ის, S_1-სა და S_2-ის. S_2 და S_3 ფართეულები ორტოგონალურია Γ_1 წირის განგრძივ, მაშასადამე, Γ_1 წირის გეოდეზური გრეხა ერთი და იგივეა ორივე ფართეულისათვის; აღვნიშნოთ იგი τ_1-ით. Γ_2 და Γ_3 წირებისათვის კი შესაბამი მნიშვნელობები იყოს τ_2 და τ_3; აღნიშნული გეოდეზური გრეხანი M წერტილზე აკმაყოფილებენ დამოკიდებულებას:

$$\tau_1+\tau_3=0, \qquad \tau_2+\tau_3=0, \qquad \tau_3+\tau_1=0,$$

რადგან, მაგალითად, S_3 ფართეულზე Γ_1 და Γ_2 არიან ორტოგონალური. მაშასადამე, M წერტილზე ჩვენ გვაქვს:

$$\tau_1=\tau_2=\tau_3=0.$$

ვინაიდან M სივრცის ნებისმიერი წერტილია, ამიტომ Γ_i წირი მართლაც არის სიმრუდის წირი ორივე იმ S_k ფართეულისათვის, რომელთაც იგი ეკუთვნის[1].

246. ფართეულთა ზოგიერთ ოჯახზე გამოყენება. მოძებნილია ბევრი ფართეული, რომელთა სიმრუდის წირები აკმაყოფილებენ გარკვეულ გეომეტრიულ პირობებს. ჩვენ აქ მოვიყვანთ ამ გამოკვლევათა ზოგიერთ შედეგებს.

ვიპოვოთ ყველა ფართეული, რომელთათვის ერთ-ერთ სიმრუდის წირებად ითვლება წრეწირები. *იოახიმსტალის* თეორემის ძალით ყოველი ასეთი წრეწირის სიბრტყე უნდა ჰკვეთდეს ფართეულს მუდმივი კუთხით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფართეულის ყველა ნორმალმა C წრეწირის განგრძივ უნდა გადაჰკვეთოს წრეწირის ღერძი (ე. ი. მართობი გავლებული წრეწირის სიბრტყეში მის ცენტრიდან) ერთი O წერტილში. სფერო, შემოწერილი O წერტილის ირგვლივ, რომელიც გადის C წრეწირზე, ეხება ფართეულს C-ს განგრძივ; მაშასადამე, განსახილავი ფართეული არის ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული სფეროთა ოჯახის მომვლები. პირიქით, ყოველი ფართეული, რომელიც სფეროთა ოჯახის მომვლებია, წარმოადგენს ამოცანის ამოხსნას, ვინაიდან ამ ოჯახის დამახასიათებელი წირები, რომლებიც წრეწირებია, ადგენენ, ცხადია, ერთ-ერთ სიმრუდის წირთა ოჯახს.

---

[1] *მენიეს* და *ბონეს* თეორემები არ ითვლება ფართეულზე მდებარე წირების სპეციალურ თვისებებად. ეს თვისებები ვრცელდება Γ წირთა ყოველ სისტემაზე, რომელიც აკმაყოფილებს ერთი და იგივე დამოკიდებულებას:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

სადაც A, B, C არიან x, y, z-ს ფუნქციები. არსებობს აღნიშნული თვისებების უსასრულოდ ბევრი წირი, რომლებიც დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ ფუნქციაზე, ვინაიდან შეიძლება ნებისმიერად ავიღოთ, მაგალითად, y—როგორც x-ის ფუნქცია, ე. ი.

$$y=f(x)$$

და z განისაზღვრება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებიდან. Γ წირის მხებები, რომლებიც გადიან სივრცის მოცემულ წერტილზე, მდებარეობენ P სიბრტყეში, რომელიც მართობია Δ წრფისა A, B, C მიმმართველი პარამეტრებით. ყველა ასეთი წირისათვის, რომელთაც აქვთ მოცემულ წერტილზე საერთო მხები, შემდეგ ორ გამოთქმას: $\frac{\cos\theta}{R}$, $\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}$ *აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა*; აქ R და T-ს აქვს ჩვეულებრივი მნიშვნელობები, ხოლო θ არის კუთხე Δ წრფესა და Γ წირი მთავარ ნორმალს შორის.

ბრუნვითი ფართეული, ცხადია, წარმოადგენს ასეთი სახის ფირთეულის კერძო შემთხვევას. მეორე საინტერესო კერძო შემთხვევას წარმოადგენს აგრეთვე მილისებრი ფართეული (surfaces canaux), ე. ი. ფართეული, რომელიც არის იმ მუდმივ R რადიუსიან სფეროთა მომვლები, რომელთა ცენტრი აღწერს ნებისმიერ Γ წირს. ამ სფეროთა ოჯახის დამახასიათებელი წირები არიან R რადიუსის წრეწირები, რომელთა ცენტრი აღწერს Γ წირს და რომელთა სიბრტყე Γ წირის ნორმალურია. ფართეულის ნორმალები იქნება აგრეთვე Γ წირის ნორმალებიც; მაშასადამე, მეორე სისტემის სიმრუდის წირები იქნება ფართეულის იმ განფენად ფართეულთან გადაკვეთის წირები, რომლებიც მიღებულია Γ წირის ნორმალებისაგან.

თუ გარდა სიმრუდის წირთა პირველი სისტემისა, აგრეთვე სიმრუდის წირთა მეორე სისტემაც შედგება წრეწირებისაგან, მაშინ ზემოთქმულის თანახმად, ეს ფართეული შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერთ-ერთი იმ ორ სფეროთა ოჯახის მომვლებისა, რომელნიც დამოკიდებულია ერთ ცვლად პარამეტრზე. ვთქვათ, S_1, S_2, S_3 ერთი და იმავე ოჯახის სფეროებია, C_1, C_2, C_3—შესაბამი დამახასიათებელი წირები, ხოლო M_1, M_2, M_3—დამახასიათებელი წირების მეორე სისტემის სიმრუდის C' წირთან გადაკვეთის წერტილები. S' სფერო, რომელიც ეხება ფართეულს C' წირის ყოველ წერტილზე, ეხება აგრეთვე სამ S_1, S_2 და S_3 სფეროს, შესაბამად, M_1, M_2 და M_3 წერტილებში. მაშასადამე, საძიებელი ფართეული არის იმ ცვლადი სფეროების მომვლები, რომლებიც ეხება სამ მკვიდრ სფეროს. ეს ფართეული ცნობილია დუპენის ციკლიდის სახელწოდებით. მანგჰეიმმა მოგვცა მეტად მშვენიერი დამტკიცება იმისა, რომ დუპენის ციკლიდი შეიძლება მიღებული იქნეს ტორისაგან შებრუნებული რადიუს-ვექტორებით გარდაქმნის საშუალებით. ვთქვათ, γ არის წრეწირი, რომელიც სამ S_1, S_2, S_3 სფეროს მართობულია. შებრუნებული რადიუს-ვექტორებით გარდაქმნის შემდეგ, პოლუსით γ წრე-წირის რაიმე წერტილში, ეს წრეწირები გადაიქცევიან OO' წრფედ, ხოლო S_1, S_2, S_3 სფეროები გადაიქცევიან Σ_1, Σ_2, Σ_3 სფეროებად, რომელნიც OO' წრფის ორტოგონალურია; მაშასადამე, გარდაქმნილი სფეროების ცენტრები დალაგდებიან OO' წრფეზე. ვთქვათ, C'_1, C'_2, C'_3 არის ამ სფეროთა გადაკვეთა სიბრტყესთან, რომელიც გადის OO'-ზე, C' წრეწირი, რომელიც ეხება C'_1, C'_2, C'_3 წრეწირებს, ხოლო Σ'—სფერო, რომელსაც C' აქვს დიდ წრეხაზად. ცხადია, რომ ნაკვთის ბრუნვისას OO'-ის ირგვლივ Σ' სფერო დარჩება მხები სამ Σ_1, Σ_2, Σ_3 სფეროს და Σ' სფეროთა მომვლები ფართეული იქნება ტორი, რომელსაც მერიდიანად აქვს C' წრეწირი. განვსაზღვროთ ახლა ფართეული, რომლის ერთ-ერთი სიმრუდის წირთა ოჯახი იყოს ბრტყელი წირები, მდებარე პარალელურ სიბრტყეებში. მივიღოთ xOy სიბრტყედ სიმრუდის წირების სიბრტყეების პარალელური სიბრტყე და ვთქვათ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = F(\alpha, z)$$

არის მხების განტოლება კვეთის სიბრტყეში, რომელიც მიღებულია ფართეულზე xOy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით. $F(\alpha, z)$ არის ორი α და z ცვლადის ფუნქცია, რომლის სახე დამოკიდებულია განსახილავი ფართეულის სახეზე. ვინაიდან თვით კვეთი წარმოადგენს მის

მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ A, B და C ტოლია P სიბრტყის ნორმალის მიმართულების კოსინუსებისა. და, მაშასადამე, მე-(6) ფორმულაში წევრი: $\frac{dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz}{ds^2}$ და (51) ფორმულაში H დეტერმინანტი დამოკიდებულია მხოლოდ x, y, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ -ზე.

მხებთა მომვლებს, ამიტომ ჩვენ მივიღებთ ფართეულის წერტილთა x, y კოორდინატებს, თუ წინა განტოლებას დავუმატებთ შემდეგ განტოლებას:

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=\frac{\partial F}{\partial\alpha}.$$

მაშასადამე, x, y, z კოორდინატების გამოსახულებები იქნება:

$$x=F\cos\alpha-\frac{\partial F}{\partial\alpha}\sin\alpha,\quad y=F\sin\alpha+\frac{\partial F}{\partial\alpha}\cos\alpha,\quad z=z. \tag{52}$$

ავარჩევთ რა შესაბამად $F(\alpha, z)$ ფუნქციას, ჩვენ შეგვიძლია ყოველი ფართეული წარმოვადგინოთ (52) განტოლების სახით; გამონაკლისს წარმოადგენს მხოლოდ წრფოვანი ფართეულები, რომლებისათვის მიმმართველ სიბრტყედ ითვლება $z=0$ სიბრტყე.

ადვილი გამოსაყვანია, რომ ფართეულის მხებ სიბრტყის A, B, C კოეფიციენტები იქნება:

$$A=\cos\alpha,\quad B=\sin\alpha,\quad C=-\frac{\partial F}{\partial z};$$

მაშასადამე, იმ კუთხის კოსინუსი, რომელსაც ფართეულის ნორმალი ადგენს Oz ღერძთან, იქნება:

$$\nu=\frac{-F_z^{'2}}{\sqrt{1+F_z^{'2}}}.$$

იოახიმსტალის თეორემის ძალით, იმისათვის, რომ ფართეულის xOy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებით კვეთა, იყოს ამ ფართეულის სიმრუდის წირები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ აღნიშნული სიბრტყეები კვეთდენ ფართეულს მუდმივი კუთხით, ე. ი. რომ ν არ იყოს დამოკიდებული α-საგან. ამისათვის კი აუცილებელია და საკმარისი, რომ $F'_z(\alpha, z)$ იყოს მხოლოდ z-ის ფუნქცია; მაშასადამე, $F(\alpha, z)$-ის უნდა ჰქონდეს სახე:

$$F(\alpha, z)=\varphi(z)+\psi(\alpha),$$

მასთან φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია. შევიტანოთ რა $F(\alpha, z)$ ფუნქციის მოძებნილ მნიშვნელობას (52) განტოლებაში, ჩვენ მივიღებთ საძიებელი ფართეულის ზოგად გამოსახვას:

$$\left.\begin{aligned} x&=\psi(\alpha)\cos\alpha-\psi'(\alpha)\sin\alpha+\varphi(z)\cos\alpha,\\ y&=\psi(\alpha)\sin\alpha+\psi'(\alpha)\cos\alpha+\varphi(z)\sin\alpha,\\ z&=z. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

ეს ფართეულები შეიძლება მიღებული იქნეს შემდეგნაირად. თუ (53)-ის პირველ ორ განტოლებაში z-ს განვიხილავთ როგორც მუდმივს, ხოლო α-ს როგორც ცვლადს, მაშინ აღნიშნული განტოლებები განსაზღვრავენ მრუდთა ოჯახს, რომლებითაც გეგმილდება $z=0$ სიბრტყეზე xOy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებით ფართეულის კვეთები; მაგრამ ყველა ეს წირი, პარალელურია იმ წირისა, რომელიც მიიღება თუ (53)-ის პირველ ორ განტოლებაში მივიღებთ $\varphi(z)=0$. აქედან ვღებულობთ განსახილავი ფართეულისათვის შემდეგი აგების წესს: ავიღოთ $z=0$ სიბრტყეზე ნებისმიერი წირი და ამ სიბრტყეზე გავავლოთ აღნიშნული წირის პარალელური წირები; შემდეგ გადავაადგილოთ ყველა ეს წირი რაიმე კანონით Oz-ის პარალელურად სხვადასხვა მანძილზე: მაშინ ყველა ეს წირი ადგენენ თავის ახალ მდებარეობებში ფართეულს, რომელიც წარმოადგენს ამოცანის ყველაზე ზოგად ამოხსნას.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ აგების წინა წესი შეიძლება შეიცვალოს შემდეგნაირად: საძიებელი ფართეულები შეიძლება მიღებული იქნეს ნებისმიერი სახის ბრტყელი წირისაგან, რომლის სიბრტყე უსასრულოდ გორავს ნე-

ბისმიერ ფუძის ცილინდრულ ზედაპირზე. მაშასადამე, ის არის ძერწილი ფართეულები (surfaces moulures). ამაში ადვილად დავრწმუნდებით (53) ფორმულიდან, განვიხილავთ რა $\alpha=\text{const}$ მრუდეებს. აქ სიმრუდის წირთა ორივე ოჯახი შედგება ბრტყელი წირებისაგან:

$$z=\text{const} \text{ და } \alpha=\text{const}.$$

III. ორ ფართეულის წერტილებს შორის თანადობა

247. სფერული გარდასახვა. ვთქვათ Σ არის რაიმე ორმხრიანი ფართეული ან მისი ნაწილი (§ 131). ავირჩევთ რა ერთ-ერთ მხარეს, განვიხილოთ ყოველ M წერტილზე MN ნორმალის მიმართულება, რომელიც შეესაბამება ამ მხარეს. გავავლოთ ერთეულიანი რადიუსის S სფეროს O ცენტრზე ნახევარი წრფე, რომელიც Σ ფართეულის MN ნორმალის დადებითი მიმართულების პარალელურია. აღნიშნულ ნახევარ წრფის S სფეროსთან გადაკვეთის m წერტილს უწოდოთ M-ის შესაბამი წერტილი. ცხადია, Σ-ს ყოველ M წერტილს S-ზე შეესაბამება გარკვეული m წერტილი; Σ და S ფართეულთა მხები სიბრტყეები, შესაბამ წერტილებში, არიან პარალელური და თუ ავიღებთ სფეროს ნორმალის დადებით მიმართულებად, მიმართულებას მიმავალი O ცენტრიდან m-საკენ, მაშინ ორივე ფართეულის ნორმალის დადებითი მიმართულებებიც აგრეთვე დაემთხვევიან. Σ-ზე ყოველ C წირს შეესაბამება S-ზე გარკვეული c წირი, რომელიც არის C წირის სფერული გამოსახვა. M წერტილის შესაბამ m წერტილზე c წირის მხებები მართობულია მიმართულებისა, რომელიც შეუღლებულია Σ-ზე C წირის MT მხების.

მართლაც, ვთქვათ M და M' არის C წირზე ორი მეზობელი წერტილი, m და m' მათი შესაბამი წერტილები c-ზე, D იყოს Σ ფართეულის M და M' წერტილებზე გავლებულ მხებ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე, d კი S სფეროს m და m' წერტილებზე გავლებულ მხებ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე. ვინაიდან ეს სიბრტყეები წყვილწყვილად პარალელურია, ამიტომ, ცხადია, d პარალელურია D-სი. როდესაც M წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება M'-ს, D წრფე მიისწრაფის ზღვარულ მდებარეობისაკენ, MT' მხებისაკენ, რომელიც Σ ფართეულზე C წირის MT მხების შეუღლებულია (§ 239). სრულიად ასევე d უახლოვდება ზღვარულ mt' მდებარეობას, რომელიც სფეროზე mt მხების შეუღლებულია. მაგრამ mt' მართობია mt-სი, და რადგანაც mt' და MT'' პარალელურია, ამიტომ mt მართობია MT''-ის, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

იმისათვის, რომ mt და MT წრფეები იყოს პარალელური, აუცილებელია და საკმარისი, რომ MT იყოს მართობი მის შეუღლებულ მხებთან, ე. ი. MT იყოს Σ ფართეულის ინდიკატრისის ღერძი. აქედან გამომდინარეობს: Σ ფართეულის სიმრუდის წირებისა და მათი სფერული გამოსახულებათა მხებები, შესაბამ წერტილებში, არიან პარალელური. ცხადია, რომ Σ-ზე სიმრუდის წირები არიან ერთადერთი წირები, რომელთაც აქვთ აღნიშნული თვისება. ეს შედეგი შეიძლება გამოყვანილი იქნას აგრეთვე როდრიგის ფორმულიდან. მართლაც, თუ კოორდინატთა სათავედ ავიღებთ S სფეროს ცენტრს, მაშინ m წერტილის კოორდინატები იქნება ნორმალის დადებითი მიმართულების λ, μ, ν კოსინუსები. პირობა იმისა, რომ $M\,(x, y, z)$ და $m\,(\lambda, \mu, \nu)$ წერტილებით აღწერილ C და c წირებს ჰქონდეთ, შესაბამ წერტილებში, პარალელური მხებები, ე. ი. პირობა:

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{dy}{d\mu}=\frac{dz}{d\nu},$$

დაკმაყოფილებული იქნება, როცა ადგილი აქვს (46) ფორმულით გამოსახულ დამოკიდებულებას.

განვიხილოთ Σ ფართეულის M წერტილის irგვლივ ფართობის უსასრულოდ მცირე $d\sigma$ ელემენტი და S სფეროს შესაბამი $d\sigma'$ ელემენტი. რომ განვსაზღვროთ $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$ ფარდობა ჩვენ გამოვიყენებთ § 137-ის გამოთვლებს, შევნიშნავთ რა, რომ ჩვენს შემთხვევაში ორივე ფართე-

ულის ნორმალი არიან პარალელური, და $\frac{d\sigma'}{\sigma p}$ ფარდობა ტოლია xOy სიბრტყის ელემენტთა $\frac{d\omega'}{d\omega}$ ფარდობისა. ვიგულისხმოთ, რომ M წერტილის მახლობლობაში Σ განსაზღვრულია $z=f(x, y)$ განტოლებით, და ნორმალის დადებით მიმართულებად არჩეულია მიმართულება, რომელიც Oz ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს. მაშინ m წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$x'=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad y'=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad z'=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

საიდანაც

$$\frac{d\omega'}{d\omega}=\left|\frac{D(x', y')}{D(x, y)}\right|=\left|\frac{D(x'' y')}{D(p, q)}\right|\cdot\left|\frac{D(p, q)}{(D\, x, y)}\right|,$$

ანდა მეტად მარტივ გარდაქმნების შემდეგ:

$$\frac{d\omega'}{d\omega}=\frac{|rt-s^2|}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე არის Σ ფართეულის გაუსის $\frac{1}{RR'}$ სიმრუდის აბსოლუტური მნიშვნელობა. აქედან გამომდინარეობს, რომ გაუსის სიმრუდე შეიძლება განსაზღვრული იქნეს ანალოგიურად მრუდის სიმრუდისა (§ 218). მაგრამ მაშინ როცა წირის სიმრუდე გამოისახება რადიკალის საშუალებით, ფართეულის სრული სიმრუდე გამოისახება რაციონალურად z ფუნქციის კერძო წარმოებულების საშუალებით და აქვს $rt-s^2$ გამოთქმის ნიშანი. ეს ნიშანი შეიძლება განმარტებული იქნას სფერული გარდასახვის საშუალებით. წარმოვიდგინოთ ორი დამკვირვებელი, რომელთაგან ერთი დგას Σ ფართეულზე მის რომელიმე წერტილში, ხოლო მეორე—სფეროზე პირველის შესაბამ წერტილში; ვიგულისხმოთ ამას გარდა, რომ თითოეულ დამკვირვებელისათვის მიმართულება ფეხებიდან თავისაკენ ემთხვევა ფართეულის ნორმალის დადებით მიმართულებას. როდესაც პირველი დამკვირვებელი შემოწერს კონტურს $d\sigma$ ფართობით, ისე რომ აღნიშნული ფართობი რჩებოდეს მარცხნით, მაშინ მეორე დამკვირვებელი შემოწერს შესაბამ კონტურს $d\sigma'$ ფართობით, დატოვებს რა ამ ფართობს ან მარცხნივ ან მარჯვნივ; $rt-s^2$ და, მაშასადამე, $\frac{1}{RR'}$ დადებითია პირველ შემთხვევაში, ხოლო უარყოფითია მეორე შემთხვევაში (§ 236).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ Σ ფართეულის M წერტილი არ არის პარაბოლური, მაშინ $rt-s^2$ არ არის ნული, და უცხადო ფუნქციათა არსებობის თეორემის თანახმად (§ 38, 185) Σ ფართეულის წერტილები, M-ის მახლობლობაში, და სფეროს წერტილები, m-ის მახლობლობაში შეესაბამებიან ერთმანეთს ცალსახად. მაგრამ ამას, საზოგადოდ, არ აქვს ადგილი პარაბოლურ წერტილის მახლობლად, როგორც ამაში ადვილად დავრწმუნდებით მაგალითზე.

ვთქვათ, AMB არის ბრტყელი წირის რკალი, რომელსაც M წერტილში აქვს გადაღუნვა, ისე, რომ AM და MB-ს ჩაზნექილობებს მოპირდაპირე მიმართულება აქვთ.

ვაბრუნებთ რა AMB რკალს მის სიბრტყეზე მდებარე რაიმე ღერძის გარშემო, ჩვენ მივიღებთ ბრუნვის Σ ფართეულს, რომელზედაც p პარალელი, მიღებული M წერტილით, არის პარაბოლურ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. Σ_1 და Σ_2 ფართეულებს, მიღებულს AM და MB რკალებით, აქვთ თავის სფერულ გამოსახვად ორი არე, რომლებიც ნაწილობრივად ფარავენ ერთიმეორეს და ეხებიან P-ს შესაბამ პარალელს. Σ ფართეულის ასეთი სახის სფერული გარდასახვა შეიძლება წარმოვადგინოთ ქაღალდის ფურცელის საშუალებით, რომელიც დაკეცილია პარალელის განგრძივ და რომელიც ორჯერ ფარავს სფეროს იმ სარტყელის ნაწილს, რომლითაც შემოსაზღვრულია აღნიშნული პარალელი (§ 117-ის შენიშვნა).

განვიხილოთ კიდევ ტორი-ფართეული მიღებული ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე C წრეწირის ბრუნვით ამავე სიბრტყეში მდებარე OO' ვერტიკალის (რომელიც არ ჰკვეთს C-ს)

ირგვლივ. A და B არის C წრეწირის უმაღლესი და უმდაბლესი წერტილები და ისინი ჰყოფენ C-ს ორ C_1 და C_2 რკალად; ვთქვათ, C_2 არის ღერძთან უახლოესი რკალი. C_1 რკალი OO'-ის ირგვლივ ბრუნვით მოხაზავს ამოზნექილ Σ_1 ფართეულს, რომლის ყოველ წერტილს ცალსახად ეთანადება S სფეროს წერტილები, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ Σ ფართეულის განაპირა პარალელებს და S სფეროს ორ მოპირდაპირე პოლუსს. C_2 რკალი აღწერს Σ_2 ფართეულს, უარყოფითი სიმრუდით; ამ ფართეულის ყოველი წერტილი აგრეთვე ცალსახად ეთანადება S სფეროს წერტილებს. რაც შეეხება განაპირა პარალელებს, მიღებულს A და B წერტილებით, მათ შეესაბამება სფეროს მოპირდაპირე პოლუსები. ტორის ეს სფერული გადასახვა შეიძლება განვახორციელოდ თანატოლ ორ ერთმანეთში ჩასმულ სფეროს საშუალებით, ვიგულისხმებთ რა, რომ მათი გარე ზედაპირები შეერთებულია მხოლოდ ორ პოლუსში.

248. ფართეულთა დაფენა. სფერული გადასახვის დროს რაიმე ფართეულის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული წერტილი სფეროზე, და პირიქით. განვიხილოთ ახლა ორი ფართეულის წერტილოვანი თანადობის უფრო ზოგადი შემთხვევა.

ვთქვათ მოცემულია ორი რაიმე S და S' ფართეული; ვიგულისხმოთ, რომ S ფართეულის წერტილთა მართკუთხოვანი კოორდინატები გამოსახულია ორი ცვლადი u, v პარამეტრის საშუალებით, ხოლო S'-ის წერტილია მართკუთხოვანი კოორდინატები u' და v' პარამეტრების საშუალებით.

თუ (u, v) და $(u' \; v')$ ცვლად პარამეტრებს შორის დამყარებულია დამოკიდებულება:

$$u' = g(u, v), \qquad v' = h(u, v) \tag{54}$$

ისე, რომ $\frac{D(u', v')}{D(u, v)}$ იაკობიანი არ არის იგიურად ნულის ტოლი, მაშინ აღნიშნული დამოკიდებულებით ორივე ფართეულს შორის მყარდება წერტილოვანი თანადობა. ცხადია, ყოველი ასეთი თანადობა შეიძლება განსაზღვრული იყოს (54)-ის ანალოგიური ფორმულებით, თუ სათანადოდ შევარჩევთ g და h ფუნქციებს.

ფართეულთა წერტილოვან თანადობასთან დაკავშირებით შეიძლება დაისვას რამდენიმე მეტად მნიშვნელოვანი ამოცანა. ვიპოვოთ, მაგალითად, რა პირობებში ორი ნებისმიერი წირის რკალის სიგრძეები, შესაბამ წერტილებში, არის ერთნაირი.

ვთქვათ ორი ფართეულის ds^2 და ds'^2 წრფივი ელემენტები განსაზღვრულია ფორმულებით:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{55}$$

$$ds'^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2. \tag{56}$$

შევცვლით რა (54) ფორმულაში u', v'-ის მათი მნიშვნელობებით (54)-დან, მივიღებთ:

$$ds'^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2; \tag{56'}$$

აქ $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ და $\mathfrak{G}$ მარტივად გამოისახებიან g და h ფუნქციებით და მათი წარმოებულებით. თუ (54) ფორმულებით მოცემული თანადობის შემთხვევაში უც-

ვლელი რჩება რკალის სიგრძე, ჩვენ უნდა გვექნეს $ds'=ds$, როგორიც არ უნდა იყოს du, და dv, საიდანაც

$$\mathfrak{E}=E, \quad \mathfrak{F}=F, \quad \mathfrak{G}=G; \tag{57}$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ S და S' ფართეულები ეფინებიან ერთიმეორეს. იმისათვის, რომ ორი S და S' ფართეული, რომელთა წრფივი ელემენტი განსაზღვრულია (55) და (56) ფორმულებით შესაბამად, ეფინებოდენ ერთმანეთს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოიძებნოს ორი ისეთი g და h ფუნქცია, რომელნიც აკმაყოფილებენ (57) დამოკიდებულებას. მაშასადამე, ეს ორი ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილ სამ განტოლებათა სისტემას; თუ E, F, G, E', F', G' კოეფიციენტები არჩეულია ნებისმიერად, მაშინ ეს განტოლებები, საზოგადოდ, აღმოჩნდებიან უთავსადი და g და h ფუნქციები არ მოიძებნება. რომ განვსაზღვროთ დაფენადია თუ არა ორი ფართეული, ე. ი. რომ განვსაზღვროთ არიან თუ არა (57) განტოლებები თავსადი, საკმარისია შევასრულოთ მხოლოდ გაწარმოებისა და გამორიცხვის ოპერაციები. ამ დებულების დამტკიცებას ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ.

შეიძლება დავსვათ სხვა ამოცანა, განსხვავებული ზემოთგანხილულისაგან, სახელდობრ: განვსაზღვროთ ყველა ფართეული, რომლებიც ეფინება მოცემულ ფართეულს, ანუ, სხვანაირად, ვიპოვოთ ყველა ფართეული, რომელთაც ერთი და იგივე წრფივი ელემენტი აქვთ. ამ ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს შემდეგი სახის სამ კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას:

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E, \quad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=F, \quad \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=C; \tag{58}$$

აქ E, F და G არის u და v ცვლადების სამი მოცემული ფუნქცია; x, y, z კი საძიებელი სამი ფუნქცია. ამ სისტემის ბოლომდე ინტეგრობა შესაძლებელია მხოლოდ მცირე შემთხვევებში; მაგრამ იგი შეიძლება დაყვანილი იქნას ერთი მეორე რიგის კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრობამდე.

კერძოთ, განვიხილოთ S ჰელიკოიდი, განსაზღვრული განტოლებებით:

$$x=\rho\cos\omega, \qquad y=\rho\sin\omega, \qquad z=f(\rho)+a\omega, \tag{59}$$

სადაც $2\pi a$ არის ხრახნწირის ბიჯი. ds^2 კვადრატული ფორმა შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$ds^2=(\rho^2+a^2)\left[d\omega+\frac{af'(\rho)}{\rho^2+a^2}\,d\rho\right]^2+\frac{a^2+\rho^2+\rho^2 f'^2(\rho)}{\rho^2+a^2}\,d\rho^2. \tag{60}$$

მივიღოთ:

$$du=\sqrt{\frac{a^2+\rho^2+\rho^2 f'^2(\rho)}{\rho^2+a^2}}\,d\rho, \quad dv=d\omega+\frac{af'(\rho)}{\rho^2+a^2}\,d\rho;$$

აქედან u და v მოიძებნებიან კვადრატურებში; ρ^2+a^2 არის მხოლოდ ერთი u ცვლადის U ფუნქცია, ასე, რომ ყოველი ჰელიკოიდისათვის ds^2 შეიძლება დაყვანილი იქნას შემდეგ სახემდე:

$$ds^2=du^2+U\,dv^2. \tag{61}$$

შევნიშნოთ, რომ (u) და (v) წირები წარმოადგენენ, შესაბამად, ხრახნწირებს და მათ ორტოგონალურ ტრაექტორიებს; მაშასადამე, ეს ტრაექტორიები ყოველთვის მიიღება კვადრატურებში.

ვთქვათ S' არის მეორე რაიმე ჰელიკოიდი, განსაზღვრული განტოლებებით:

$$x'=r\cos\theta, \qquad y'=r\sin\theta, \qquad z'=\varphi(r)+b\theta, \tag{59'}$$

რომლისათვის

$$ds'^2=(r^2+b^2)\left[d\theta+\frac{b\varphi'(r)}{r^2+b^2}\,dr\right]^2+\frac{b^2+r^2+r^2\varphi'^2(r)}{b^2+r^2}\,dr^2. \tag{62}$$

იმისათვის რომ ორი ჰელიკოიდი იყოს დაფენადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოიძებნოს r ფუნქცია ρ-სი და θ ფუნქცია ω-სა და ρ-სი, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ სამ პირობას:

$$\left.\begin{aligned}\left[1+\frac{r^2\varphi'^2(r)}{r^2+b^2}\right]dr^2&=\left[1+\frac{\rho^2f'^2(\rho)}{\rho^2+a^2}\right]d\rho^2,\\ c^2(r^2+b^2)&=\rho^2+a^2,\\ d\theta+\frac{b\varphi'(r)}{r^2+b^2}\,dr&=c\left[d\omega+\frac{af'(\rho)}{\rho^2+a^2}\,d\rho\right]\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

სადაც c რაიმე მუდმივია, განსხვავებული ნულისაგან [1].

(63)-ის მეორე განტოლება მიიყვანება სახემდე:

$$\rho^2=c^2(r^2+b^2)-a^2;$$

თუ პირველ განტოლებაში ρ-ს შევცვლით ამ მნიშვნელობით, ჩვენ $\varphi(r)$-ს ვიპოვით კვადრატურით. შემდეგ კი:

$$\theta=c\omega+ca\int\frac{f'(\rho)}{\rho^2+a^2}\,d\rho-\int\frac{b\varphi'(r)}{r^2+b^2}\,dr.$$

მაშასადამე, არსებობს უსასრულო ბევრი რიცხვი ჰელიკოიდებისა, რომლებიც დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ b და c

---

[1] (63) სისტემის პირველი განტოლება გამოთქვამს, რომ ხრახნწირების ორტოგონალური ტრაექტორიები შეესაბამებიან ერთიმეორეს ორივე ფართეულზე და აქვთ თანატოლი წრფივი ელემენტი. ორი დანარჩენი განტოლება კი, რომელიც განსაზღვრავს θ-ს როგორც ფუნქციას ω და ρ-სას, არის ინტეგრადი.

მუდმივზე და რომლებიც ეფინება მოცემულ ჰელიკოიდს ხრახნწირთა შესაბამად.

b მუდმივი, სიზუსტით 2π მამრავლამდე, უდრის მეორე S' ჰელიკოიდის ბიჯს. თუ მივიღებთ $b=0$, მაშინ S' იქნება ბრუნვითი ფართეული; აქედან მიიღება *ბურის თეორემა: ყოველი ჰელიკოიდის ფართეული დაიფინება გარკვეულ ბრუნვითი ფართეულზე*, მასთან ერთი ფართეულის ხრახნწირები შეესაბამებიან მეორე ფართეულის პარალელებს. ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს ბრუნვის ფართეული დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ c მუდმივზე.

მაგალითები: 1. ვთქვათ $f(\rho)=0$. S ფართეული არის სწორი ჰელიკოიდი მიმმართველი სიბრტყით. თუ მივიღებთ $b=0$, $c=1$, (63) ფორმულები დაიყვანება განტოლებამდე:

$$\varphi(r)=a\ln\left\{\frac{r+\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right\}.$$

შესაბამი ბრუნვითი ფართეული არის ფართეული მიღებული ჯაჭვწირის ბრუნვით თავისი ფუძის ირგვლივ.

2. ვთქვათ $f(r)=r$. დავუშვათ $b=0$ $c=1$, მივიღებთ:

$$\varphi(r)=\sqrt{r^2-c^2}+C.$$

ჰელიკოიდის პროფილი არის წრფე, რომელიც Oz ღერძს კვეთს 45°-ით, ხოლო ბრუნვითი ფართეული—ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, რომლის მსახველი არის ტოლფერდა ჰიპერბოლი.

249. ფართეულები, რომლებიც დაეფინება სიბრტყეზე. სიბრტყისათვის ჩვენ გვაქვს:

$$ds^2=du^2+dv^2,$$

სადაც u და v წერტილის მართკუთხოვანი კოორდინატებია. მაშასადამე, ყველა ფართეული, რომლებიც დაეფინება სიბრტყეზე, განისაზღვრება შემდეგი სამი განტოლებით:

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=1,\qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0,\qquad \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=1.$$

მოვიყვანოთ დამტკიცება, რომელიც ეკუთვნის *ბონეს*, რომ ეს არის განფენადი ფართეული.

გავაწარმოებთ რა სამ წინა განტოლებას u და v-ს მიმართ, ჩვენ მივიღებთ ექვს ტოლობას:

$$\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,\qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,$$

$$\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0,\qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\qquad \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0.$$

ორ განტოლებისაგან, რომლებიც შეიცავენ $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ გამოსახვას, გამომდინარეობს, რომ ეს სამი წარმოებული არის შესაბამად პროპორციული

$\frac{D(x, z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ იაკობიანებისა. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს სამი იაკობიანი არ არის იგიურად ნული, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში (x, y, z) წერტილი აღწერდა არა ფართეულს, არამედ წირს. ადვილად შევნიშნავთ, რომ წარმოებულები: $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ და აგრეთვე წარმოებულები: $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^3}$ პროპორციულია იმავე იაკობიანებისა. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^3}}{\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}};$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ წარმოებულებიდან ყოველი ორისაგან შედგენილი იაკობიანი იგიურად ტოლია ნულის. მაშასადამე, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ არიან ერთი t პარამეტრის ფუნქციები. ასევე შეიძლება ჩვენება, რომ $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ არიან t' პარამეტრის ფუნქციები. მეორე მხრით დამოკიდებულებიდან:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

გამომდინარეობს, რომ ეს ორი t და t' ცვლადი დაიყვანება ერთზე. მაშასადამე, ყველა ექვსი პირველი რიგის წარმოებული არიან ერთ-ერთი მათგანის ფუნქციები; საკუთხო p და q კოეფიციენტები მხები სიბრტყისა, რომელიც მიიღება $dz = p\,dx + q\,dy$ განტოლებიდან, აგრეთვე დამოკიდებულია ერთ ცვლად პარამეტრზე და ამიტომ განსახილავი ფართეული არის განფენადი (§ 204)[1].

პირიქით, ვთქვათ S არის რაიმე განფენადი ფართეული, რომელიც მიღებულია რომელიმე Γ წირის მხებებისაგან; მივიღოთ ცვლად პარამეტრებად Γ წირის რკალი, ათვლილი ნებისმიერი წერტილიდან, და l მანძილი მსახველის წერტილიდან შეხების წერტილამდე.

S ფართეულის წერტილთა კოორდინატები გამოისახებიან განტოლებებით:

$$X = x + l\alpha, \quad Y = y + l\beta, \quad Z = z + l\gamma,$$

---

[1] ლ ე ბ ე გ მ ა (*Lebesgue*) თავის დისერტაციაში გვიჩვენა, რომ არსებობს არაწრფოვანი ფართეულები, ისეთები, რომ შესაძლოა დამყარდეს ცალსახა თანადობა ამ ფართეულის წერტილთა და სიბრტყის წერტილთა შორის, ისე რომ სიბრტყის ყოველ გამწრფევად წირს ეთანადებოდეს ფართეულის გამწრფევადი წირი, რომელსაც იგივე სიგრძე აქვს. ეს შედეგი არ ეწინააღმდეგება ტექსტში დამტკიცებულ თეორემას, ვინაიდან დამტკიცება არსებითად ეყრდნობა x, y, z ცვლადების პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულების არსებობას, რასაც ადგილი არა აქვს ლ ე ბ ე გ ი ს ფართეულებისათვის.

სადაც x, y, z არიან Γ წირის წერტილთა კოორდინატები, ხოლო α, β, γ — მხების მიმართულების კოსინუსები. ფრენეს ფორმულები იძლევა:

$$dX = \alpha(d\sigma + dl) + \frac{l\alpha' d\sigma}{R}, \quad dY = \beta(d\sigma + dl) + \frac{l\beta' d\sigma}{R}, \cdots,$$

მაშასადამე,

$$ds^2 = (d\sigma + dl)^2 + l^2 \frac{d\sigma^2}{R^2}, \tag{64}$$

სადაც R არის Γ წირის სიმრუდის რადიუსი. აქედან უშუალოდ კიდევ არ ჩანს ds^2 დაიყვანება თუ არა $du^2 + dv^2$-ის სახეზე. რომ უჩვენოთ, რომ ეს ყოველთვის არის შესაძლებელი, ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ds^2 დამოკიდებულია მხოლოდ $\frac{1}{R} = \varphi(\sigma)$ ფუნქციაზე, რომელიც განსაზღვრავს სიმრუდის R რადიუსის σ რკალთან დამოკიდებულებას. ვთქვათ Γ′ არის რაიმე სხვა წირი, რომლისათვის $\varphi(\sigma)$ ფუნქციას აქვს იგივე მნიშვნელობა; წრფივი ds^2 ელემენტი განფენადი ფართეულისა, რომელსაც Γ′ წირი აქვს უკუქცევის წიბოდ, გამოისახება, ცხადია, (64) განტოლებით. მაშასადამე, ორივე Γ და Γ′ ფართეული დაეფინება ერთმანეთზე მსახველების შესაბამად. მაგრამ Γ′ წირებს შორის, უეჭველად, არსებობს ბრტყელი წირი; განფენადი ფართეული, მიღებული მისი მხებებისაგან, არის სიბრტყე; აქედან კი გამომდინარეობს ის, რისიც დამტკიცება გვინდოდა. ამის შემდეგ ადვილია იმ ფორმულების მიღება, რომელნიც ამყარებს ფართეულსა და სიბრტყეს შორის შესაბამობას. C წირის ბუნებრივი განტოლებიდან:

$$\frac{1}{R} = \varphi(\sigma)$$

მიიღება მისი პარამეტრული განტოლებები (§224):

$$x_1 = \int \cos\theta \, d\sigma, \quad y_1 = \int \sin\theta \, d\sigma,$$

სადაც

$$\theta = \int \frac{d\sigma}{R};$$

გადავზომავთ რა მხებზე, შეხების წერტილიდან, l მონაკვეთს, მივიღებთ წერტილს კოორდინატებით:

$$u = x_1 + l\cos\theta, \quad v = y_1 + l\sin\theta$$

(64) ფორმულიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

ზემოდამტკიცებიდან გამომდინარეობს განფენადი S ფართეულსა და სიბრტყის წერტილებს შორის შესაბამობა. ბრტყელი C წირი, მოცემული ბუნებრივი განტოლებით:

$$\frac{1}{R} = \varphi(\sigma),$$

სავსებით განსაზღვრულია ფორმით (§ 224), და Γ და C წირებს შორის თანადობა განსაზღვრავს ორივე წირის მხების მიმართულებებს შორის თანადობას. ვთქვათ ახლა P არის S ფართეულის რაიმე წერტილი, რომელიც მდებარეობს Γ წირის M წერტილზე გავლებულ მხებზე (მანძილი $MP=l$). გადავზომოთ C წირის m წერტილზე (რომელიც M წერტილს შეესაბამება) გავლებულ მხებზე $mp=l$ მონაკვეთი იმ მიმართულებით, რომელიც შეესაბამება MP მიმართულებას; მიღებული p წერტილი იქნება S ფართეულის P წერტილის შესაბამისი წერტილი. ადვილად ვნახავთ, რომ S ფართეულის წერტილებს შეესაბამება სიბრტყის მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის C წირის გარეთ მდებარე Π არეს; და რომ ეს შესაბამისობა, საზოგადოდ, არ არის ცალსახა. განვიხილოთ, მაგალითად, ჩვეულებრივი ხრახნწირი; ვთქვათ მისი მუდმივი სიმრუდის რადიუსი არის R. განფენადი ფართეული, რომელიც მიღებულია ნახევარ მხებებით, რომლებიც გავლებულია გარკვეულ მიმართულებით ამ წირის ერთ ხვიაზედ, ცალსახად დაეფინება იმ ბრტყელ Π არეზე, რომელიც R რადიუსის წრის გარედ მდებარეობს; მაგრამ განფენადი ფართეული, მიღებული ხრახნწირის ყოველ წერტილზე გავლებულ მხებებისაგან, დაფარავენ Π არეს უსასრულოდ ბევრჯერ.

250. გეოდეზიური სიმრუდე. გეოდეზიური წირები. ვთქვათ Γ არის S ფართეულზე მდებარე რაიმე წირი, γ—მისი ორტოგონალური გეგმილი Γ წირის M წერტილზე გავლებული S ფართეულის მხებ სიბრტყეზე. ამ ბრტყელ წირის $\frac{1}{\rho_g}$ სიმრუდეს M წერტილზე ეწოდება Γ წირის *გეოდეზიური სიმრუდე*. უჩვენოთ ახლა ამ წირის შემდეგი საგულისხმო თვისება: *თუ მოცემულია ორი დაფენადი S და S' ფართეული და მათზე ორი შესაბამი Γ და Γ' წირი, მაშინ ამ წირების შესაბამ წერტილებში გეოდეზიური სიმრუდეები არიან ტოლი.*

ვიგულისხმოთ, რომ S ფართეულზე Γ წირი განსაზღვრულია მრუდწირულ კოორდინატებში $v=\Pi(u)$. გამოთქმული თეორემის დასამტკიცებლად, საკმარისია უჩვენოთ, რომ გეოდეზიური სიმრუდის ρ_g რადიუსი გამოისახება მხოლოდ E, F, G კოეფიციენტებით.

ავარჩიოთ S-ზე მრუდწირული კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომ Γ წირის განტოლება იყოს: $v=v_0$. Γ წირის გეოდეზიური სიმრუდის რადიუსის მოსაძებნად $M_0\,(u_0, v_0)$ წერტილზე, ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სათავე აღებულია M_0 წერტილში, მხები სიბრტყე ემთხვევა xOy სიბრტყეს, ხოლო Γ წირის მხები Ox ღერძს. კოორდინატთა ამ სისტემაში, გვექნება:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0=\sqrt{E_0},\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0=0.$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0=\sqrt{G_0},\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0=0.$$

Γ წირის xOy სიბრტყეზე γ გეგმილის სიმრუდის რადიუსს კოორდინატთა სათავეზე აქვს გამოსახვა:

$$\rho_g=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0-\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_0\right|}=\frac{E_0}{\left|\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|_0}.$$

შემდეგი ორი დამოკიდებულებიდან:

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=E,\quad \mathrm{S}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

მივიღებთ:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,$$

რომლესაც $u=u_0$, $v=v_0$ ეს ტოლობები ღებულობენ სახეს:

$$\sqrt{G_0}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)_0=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_0,$$

საიდანაც

$$\frac{1}{\rho_q}=\frac{1}{2}\frac{\left|\frac{\partial E}{\partial v}\right|_0}{E_0\sqrt{G_0}}, \tag{65}$$

რაც გვინდოდა დაგვემტკიცებია.

წირებს, რომლებიც მდებარეობენ რაიმე ფართეულზე და აქვთ თავის ყოველ წერტილზე ნულის ტოლი გეოდეზიური სიმრუდე ეწოდებათ ამ ფართეულის გეოდეზიური წირები. წინა თეორემით, თუ ორი S და S' ფართეული დაეფინება ერთმანეთზე, მაშინ გეოდეზიურ წირს ერთ მათგანზე შეესაბამება მეორეზე აგრეთვე გეოდეზიური წირი.

გეოდეზიური წირები შეიძლება აგრეთვე განსაზღვრული იქნენ როგორც ფართეულზე წირები, რომელთა მიმხები სიბრტყე ყოველ წერტილზე გადის ფართეულის ნორმალზე.

მართლაც, ვთქვათ Γ რაიმე წირია ფართეულზე და γ—მისი მხებ სიბრტყეზე ორტოგონალური გეგმილი, R და ρ_q იყოს Γ და γ წირების სიმრუდის რადიუსები, θ კი კუთხე Γ წირის მიმხებ სიბრტყესა და ფართეულის ნორმალს შორის. გამოვიყენოთ მენიეს დებულება ცილინდრზე, რომელიც Γ წირს აგეგმილებს მხებ სიბრტყეზედ; ამ თეორემით:

$$\frac{1}{\rho_q}=\frac{\cos\theta}{R}.$$

თუ Γ გეოდეზიური წირია, მაშინ $\frac{1}{\rho_q}$ ტოლია ნულის და, მაშასადამე, $\cos\theta=0$, ე. ი. მიმხები სიბრტყე შეიცავს ფართეულის ნორმალს. აქედან გამომდინარეობს, რომ გეოდეზიური წირის გასწვრივ x, y, z არიან ერთი ცვლადის ფუნქციები, რომელნიც აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0, \tag{66}$$

სადაც A, B, C—ფართეულის ნორმალის მიმართულების პარამეტრებია. x, y, z კოორდინატები გამოსახულია ორი u და v პარამეტრის ფუნქციებში; ავარჩევთ რა ერთ მათგანს, მაგალითად, u-ს დამოუკიდებელ ცვლადად, და გავშლით წინა განტოლებას, მივიღებთ მეორე რიგის შემდეგი დიფერენციალური განტოლებას:

$$\frac{d^2v}{du^2}=F\left(u, v, \frac{dv}{du}\right), \tag{67}$$

რომლის ინტეგრობა მოგვცემს გეოდეზიურ წირებს. ამ გამტოლების ინტეგრალი შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივს, მაშასადამე, ფართეულის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზედ გადის უსასრულოდ ბევრი გეოდეზიური წირი; მაგრამ თუ მოცემულია აღნიშნულ წერტილში მხებ სიბრტყეზე რაიმე გარკვეული მიმართულება, მაშინ ამ მიმართულებით გამოსული გეოდეზიური წირი სავსებით განისაზღვრება.

სიბრტყის გეოდეზიური წირები არიან მასზე მდებარე წრფეები, სფეროს—დიდი წრეხაზები, განფენადი ფართეულის—წირები, რომლებიც ფართეულის სიბრტყეზედ დაფენის დროს ესაბამება წრფეებს. როგორც მაგალითი განვიხილოთ რაიმე Γ წირი და მისი D შლადი (ნახ. 40, § 225). D წირის მიმხები სიბრტყე M_1 წერტილში შეიცავს M-ზე გავლებულ Γ წირის მხებს, და, მაშასადამე, Γ წირის პოლარ ფართეულის M_1 წერტილზე ნორმალსაც, სადაც ეს პოლარი არის Γ წირის ნორმალურ სიბრტყეთა მომვლები. აქედან გამომდინარეობს რომ წირის შლადები არიან პოლარი ფართეულის გეოდეზიური წირები. დავეყრდნობით რა გეომეტრიულ თვისებებს, შეიძლება ჩვენება, რომ პოლარი ფართეულის სიბრტყეზე დაფენის დროს Γ წირის შლადები გადაიქცევიან წრფეებად, რომლებიც გადიან ერთ წერტილზე.

სიბრტყეები, რომლებიც გადის სივრცის Γ წირის ყოველ M წერტილზე, მთავარი ნორმალის მართობულად, შემოევლებიან Γ-ზე გამავალ განფენად S ფართეულს.

ამ ფართეულზე Γ არის გეოდეზიური წირი, ვინაიდან S-ის ნორმალები ემთხვევა Γ წირის მთავარ ნორმალებს. S ფართეულის სიბრტყეზე გაშლისას Γ წირი გაიშლება წრფეზედ. ამიტომ სიბრტყეები, რომლებიც წირის მთავარ ნორმალის მართობია, იწოდება წირის გამწრფევადი სიბრტყეებად. [ლანკრე (Lancret)].

განვიხილოთ რაიმე S ფართეულის შლადის ორი Σ და Σ' კალთა. S ფართეულის სიმრუდის წირის განგრძივ MN ნორმალები ადგენენ განფენად ფართეულს, რომელსაც უკუქცევის წიბოდ აქვს Σ ფართეულს რამე Γ წირი; ამ წირის რაიმე A წერტილზე მიმხები სიბრტყე ეხება Σ' ფართეულს A' წერტილში (§ 241). მაშასადამე, იგი მართობია Σ-ს მხებ სიბრტყის A წერტილზე, ე. ი. Γ არის Σ ფართეულზე გეოდეზიური წირი. რაიმე S ფართეულის სიმრუდის წირების შლადები, რომლებიც მდებარეობენ აღნიშნულ ფართეულის შლილის ერთ-ერთ კალთაზე არიან შლადის კალთის გეოდეზიური წირები.

პირიქით, განვიხილოთ რამე Σ ფართეულზე გეოდეზიურ წირთა ოჯახი, რომელიც დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ პარამეტრზე, ვინაიდან ფართეულის ყოველ წერტილზე გადის ამ ოჯახის ერთი და მხოლოდ ერთი გეოდეზიური წირი. ამ გეოდეზიური წირების მხებები არიან პარალელური ფართეულთა გარკვეული ოჯახის ნორმალები.

დამტკიცებისათვის საკმარისია უჩვენოთ, რომ ამ ნორმალთა კონგრუენციის ფოკალური სიბრტყეები არიან ორტოგონალური (§ 231). ვთქვათ, Γ არის ერთ-ერთი გეოდეზიური წირებიდან, MT—მხები მის რაიმე წერტილზე. ერთერთი ფოკალური სიბრტყეებიდან, რომელიც MT-ზე გადის, არის, ცხადია, Γ წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილზე. რომ ვიპოვოთ მეორე ფოკალური სიბრტყე, საჭიროა ვიპოვოთ MT-ზე გამავალი კონგრუენციის მეორე განფენადი ფართეული. § 239-ან გამომდინარეობს, რომ აღნიშნული განფენადი ფართეული არის ფართეული, რომელიც შემოვლებულია Γ' წირის განგრძივ ფართეულის მხებ სიბრტყეებით, სადაც Γ' წირი არის ფართეულის II წერტილზედ გამავალი Γ წირის შეუღლებული წირი. მაშასადამე, მეორე ფოკალური სიბრტყე არის Σ ფართეულის M წერტილზე მხები სიბრტყე; ეს ორი სიბრტყე, ცხადია, ორტოგონალურია.

შენიშვნა. ds^2 ფორმა ღებულობს მეტად მარტივ სახეს, თუ მივიღებთ კოორდინატთა (v) წირებად გეოდეზიურ წირთა ოჯახს, ხოლო (v) წირებად—მათ ორტოგონალურ ტრაექტორიებს. ამ შემთხვევაში, $F=0$, და (65) ფორმულიდან, რომელიც განსაზღვრავს (v)წირის გეოდეზიურ სიმრუდეს, გვექნება: $\frac{\partial E}{\partial v}=0$; მაშასადამე, E კოეფიციენტი არის ერთი u ცვლადის რაიმე U ფუნქცია. შევცვლით რა u-ს $\int \sqrt{U}\, du$ გამოთქმით, ჩვენ ds^2 გამოთქმას მივცემთ სახეს:

$$ds^2=du^2+G\,dv^2;$$

აქ G კოეფიციენტი არის u და v ცვლადების ნებისმიერი ფუნქცია.

251. სრული სიმრუდე. გაუსის თეორემა. როგორც ჩვენთვის უკვე ცნობილია, ფართეულის **სრული სიმრუდე** ეწოდება $\frac{1}{RR'}$ სიდიდეს, სადაც R და R' მთავარი სიმრუდის რადიუსებია.

დავამტკიცოთ მეტად საგულისხმო **გაუსის** თეორემა.

თუ S და S' ორი დაფენადი ფართეულია, მაშინ მათი სრული სიმრუდე შესაბამ წერტილებში არის ტოლი.

დამტკიცებისათვის, როგორც ყოველთვის, ფართეულის ღუნვის მიმართ ინვარიანტულ თვისებების დამყარების შემთხვევებში, საკმარისია გამოვსახოთ ფართეულის სრული სიმრუდე E, F, G კოეფიციენტების საშუალებით.

შევარჩევთ რა მე-(4) ფორმულაში განსაზღვრელ K კოეფიციენტს—1-ის ტოლს; (26) დამოკიდებულება დაიყვანება სახემდე (§ 236):

$$\frac{1}{RR'}=\frac{DD''-D'^2}{(EG-F)^2};$$

რჩება მხოლოდ უჩვენოთ, რომ $DD''-D'^2$ გამოისახება E, F, G (და მათი წარმოებულების) საშუალებით. გამოთვლების გამარტივების მიზნით, ვიგულისხმოთ, რომ ფართეული აღებულია ისეთ მრუდწირულ კოორდინატების მიმართ, რომელნიც შედგენილია გეოდეზიურ წირთა ოჯახისაგან და მათ ორტოგონალურ ტრაექტორებისაგან; მაშინ გვექნება: $E=1$, $F=0$. (58) ზოგადი ფორმულებიდან თანდათანობითი გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0\\
&\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=0,\\
&\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

და, მაშასადამე:

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{69}$$

გავაწარმოვოთ ისევ (69) განტოლება u-ს მიმართ, ხოლო (68) სისტემის მეორე განტოლება v-ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\mathrm{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v}+\mathrm{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2=0,$$

და, საბოლოოდ:

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \tag{70}$$

რომ ვიპოვოთ DD'' ნამრავლი, გავამრავლოთ ერთმანეთზე ჩვეულებრივი წესით მე-(15) და მე-(16) ფორმულების დეტერმინანტები, ზემო დამოკიდებულებების ძალით აღნიშნული ნამრავლი მიიღებს სახეს:

$$G\,\mathrm{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

სრულიად ასევე D'^2 იქნება ტოლი

$$G\,\mathrm{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2,$$

საიდანაც

$$DD''-D'^2=G\,\mathrm{S}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right]=-\frac{G}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2};$$

და სრული სიმრუდე (u, v) წერტილზე განისაზღვრება ფორმულით:

$$\frac{1}{RR'}=-\frac{1}{2G}\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2},\tag{71}$$

რაც ამტკიცებს გ ა უ ს ი ს თეორემას. ამ თეორემიდან როგორც შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს, ზემოთდამტკიცებული შედეგები იმ ფართეულთა შესახებ, რომლებიც დაეფინება სიბრტყეზედ. მართლაც, ასეთ ფართეულთა ყოველ წერტილზე გ ა უ ს ი ს სიმრუდე უნდა იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. $rt-s^2=0$. მაშასადამე, ამ განტოლების ინტეგრალური ფართეულები არიან გაშლადი ფართეულები (§ 204).

გ ა უ ს ი ს თეორემა საშუალებას იძლევა აგრეთვე გავაფართოვოდ § 248-ის შედეგები ჰელიკოიდის შესახებ. თუ S და S' ორი ფართეულია, რომლებიც ერთი მეორეზე ეფინება და რ ო მ ე ლ თ ა ს რ უ ლ ი ს ი მ რ უ დ ე ა რ ა რ ი ს მ უ დ მ ი ვ ი ს ტ ო ლ ი, მაშინ წირები, რომლებზედაც გ ა უ ს ი ს სიმრუდე ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობებს, ადგენენ S და S'-ზე ორ ოჯახს, რომელნიც გაუსის თეორემით მოცემულ გარდაქმნისათვის უნდა ეთანადებოდენ ერთმანეთს. კერძოდ, თუ S და S' არის ორი ჰელიკოიდი, მაშინ წირები, რომელთა განგრძივ სრული სიმრუდე ტოლია მუდმივის, არიან, ცხადია, ხრახნწირები, და ამიტომ § 248-ის ფორმულები მოგვცემენ ყველა ჰელიკოიდს, რომელნიც დაეფინება მოცემულ ჰელიკოიდს, თუ მისი გ ა უ ს ი ს სამრუდე არ არის მუდმივი.

252. კონფორმული გარდასახვა. განვიხილოთ ახლა ორ ფართეულის წერტილთა შორის ისეთი შესაბამობა, რომლის დროს შენარჩუნებულია კუთხეები. ვთქვათ, (x, y, z) არის რაიმე S ფართეულის წერტილთა მართკუთხოვანი კოორდინატები, ხოლო (x', y', z') კი S' ფართეულის შესაბამი წერტილის კოორდინატები. ვიგულისხმოთ, რომ x, y, z, x', y', z' გამოსახული არიან ორ u და v პარამეტრის ფუნქციებში ისეთნაირად, რომ ორივე ფართეულის შესაბამი წერტილები განისაზღვრება u და v პარამეტრების ერთი და იგივე მნიშვნელობებით. ვთქვათ C და D არის S ფართეულის ორი წირი, რომლებიც გადიან ამ ფართეულის m წერტილზე, C' და D' კი S' ფართეულის შესაბამი წირები, რომლებიც გადიან m' წერტილზე (ნახ. 42). C წირის განგრძივ u და v პარამეტრები არიან ერთ t ცვლადის ფუნქციები; აღვნიშნოთ მათი დიფერენციალები du და dv-თი, შესაბამად. სრულიად ასევე D წირის განგრძივ u და v არიან სხვა t' ცვლადის ფუნქციები; აღვნიშნოთ მათი დიფერენციალები δu და δv-თი. საერთოდ, ჩვენ d და δ ასოებით აღვნიშნავთ დიფერენციალებს, რომლებიც ეკუთვნიან წერტილების C და D წირების განგრძივ გადაადგილებებს.

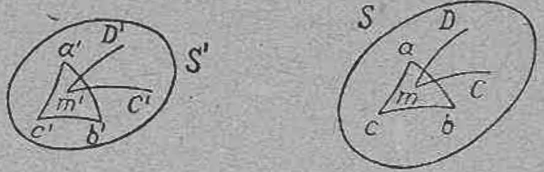
C წირის მხების მიმართულების პარამეტრები იქნება:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}\,du+\frac{\partial y}{\partial v}\,dv,\quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}\,du+\frac{\partial z}{\partial v}\,dv,$$

და შესაბამად, D წირისათვის:

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial u}\delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\delta v,\quad \delta y=\frac{\partial y}{\partial u}\delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\delta v,\quad \delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\delta v+\frac{\partial z}{\partial v}\delta v.$$

ვთქვათ ω არის C და D წირების მხებებს შორის მოთავსებული კუთხე; $\cos\omega$ გამოისახება შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 42.

$$\cos\omega=\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\;\sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2}},$$

რომელიც, თუ შემოვიყვანთ E, F, G კოეფიციენტებს, მიიღებს სახეს:

$$\cos\omega=\frac{E\,du\,\delta u+F\,(du\,\delta v+dv\,\delta u)+G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\;\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}. \tag{72}$$

სრულიად ასევე, თუ ω' არის C' და D' წირების მხებებს შორის მოთავსებული კუთხე, მაშინ

$$\cos\omega'=\frac{E'\,du\,\delta u+F'\,(du\,\delta v+\delta u\,dv)+G'\,dv\,\delta v}{\sqrt{E'\,du^2+2F'\,du\,dv+G'\,dv^2}\;\sqrt{E'\,\delta u^2+2F'\,\delta u\,\delta v+G'\,\delta v^2}}. \tag{73}$$

თუ მოცემულ გარდაქმნის დროს არ იცვლება კუთხეების მნიშვნელობები, მაშინ $\cos\omega=\cos\omega'$ როგორიც არ უნდა იყოს du, dv, δu, δv; $\cos^2\omega$ და $\cos\omega'$ არიან $\frac{\delta v}{\delta u}$, $\frac{dv}{du}$, ფარდობების რაციონალური ფუნქციები, რომელნიც აღნიშნულ სიდიდეთა ყოველი მნიშვნელობისათვის ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს. ამისათვის აუცილებელია, რომ (72) და (73) წილადების შესაბამი კოეფიციენტები იყონ პროპორციული, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს:

$$\frac{E'}{E}=\frac{F'}{F}=\frac{G'}{G}=\lambda^2, \tag{74}$$

სადაც λ არის u და v პარამეტრების რაიმე ფუნქცია. ეს პირობები, ცხადია, არის აგრეთვე საკმარისიც, ვინაიდან, მაგალითად, $\cos\omega$ არის ნულ რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია E, F, G-ს მიმართ.

(72) პირობები შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი ერთი პირობით:

$$ds'^2=\lambda^2\,ds^2,$$

ანდა

$$ds'=\lambda\,ds, \tag{75}$$

რომელიც გამოთქვამს, რომ ორი შესაბამი უსასრულოდ მცირე რკალის ფარდობა მიისწრაფის გარკვეულ ზღვარისაკენ du და dv-ს დამოუკიდებლად.

ეს შედეგი შეიძლება მიგველო უშუალოდაც. მართლაც, ავიღოთ პირველ ფართეულზე უსასრულოდ მცირე abc სამკუთხედი; ვთქვათ, $a'b'c'$ არის მეორე ფართეულზედ მისი შესაბამი სამკუთხედი. შევცვალოთ ეს მრუდწირული სამკუთხედები წრფივით; ვინაიდან $\frac{a'b'}{ab}$, $\frac{a'c'}{ac}$, $\frac{b'c'}{bc}$ ფარდობები მიისწრაფიან ერთ $\lambda\ (u,\ v)$ ზღვარისაკენ, ამიტომ აღნიშნული სამკუთხედები არიან მსგავსი, მაშასადამე, ზღვარზედ შესაბამი კუთხეები იქნებიან ტოლი.

ორი S და S' ფართეულის შესაბამი უსასრულოდ მცირე ფიგურები შეიძლება განხილული იყოს როგორც მსგავსები, რადგან მათ აქვთ პროპორციული რკალები და თანატოლი კუთხეები; ასეთ გარდაქმნას, რომლის დროს ინარჩუნება უსასრულოდ მცირე ფიგურათა სიმსგავსე, ეწოდება კონფორმული გარდაქმნა.

კერძოდ, თუ $\lambda = 1$, მაშინ შენარჩუნებულია არა მარტო კუთხეები, არამედ რკალის სიგრძეებიც, ე. ი. განსახილავი გარდაქმნა იქნება ღუნვა, რომელიც, ამრიგად, წარმოადგენს ზოგად კონფორმულ გარდაქმნის კერძო შემთხვევას.

თუ მოცემულია ორი S და S' ფართეული და მათ შორის დამყარებულია რაიმე წერტილოვანი თანადობა, მაშინ ყოველთვის შეიძლება გაგება დაკმაყოფილებულია თუ არა (71) პირობები, ე. ი. გაგება არის თუ არა აღნიშნული თანადობა კონფორმული. მაგრამ შეიძლება ამოვხსნათ აგრეთვე სხვა ამოცანებიც; მაგალითად, მოცემულია ორი S და S' ფართეული, ვიპოვოთ ამ ფართეულთა წერტილებს შორის ყველა თანადობა, რომლის დროს შენარჩუნებულია კუთხეები.

ვიგულისხმოთ, რომ S ფართეულის წერტილთა x, y, z კოორდინატები გამოსახული არიან ორ u და v პარამეტრის ფუნქციებში, S' ფართეულის წერტილთა x' y', z' კოორდინატები კი ორი სხვა u' და v' პარამეტრის ფუნქციებში. ვთქვათ:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad ds'^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2$$

არიან შესაბამი წრფივი ფორმების კვადრატები. ზემო ამოცანა შეიძლება გამოითქვას შემდეგი სახით: ვიპოვოთ ორი $u' = \Pi_1\,(u,\ v)$, $v' = \Pi_2\,(u,\ v)$ ფუნქცია ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს იგიურად დამოკიდებულებას:

$$E'\,d\Pi_1^2 + 2F'\,d\Pi_1\,d\Pi_2 + G'\,d\Pi_2^2 = \lambda^2\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2),$$

სადაც λ არის u და v ცვლადების უცნობი ფუნქცია.

დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგადი თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ ამ ამოცანას ყოველთვის აქვს უსასრულო ბევრი ამოხსნა. ჩვენ მოვიყვანთ დამტკიცებას მხოლოდ ერთ კერძო შემთხვევისათვის.

253. სიბრტყეებს შორის კონფორმული თანადობა. ყოველი თანადობა ორ სიბრტყის წერტილთა შორის განისაზღვრება ფორმულებით:

$$X=P(x,\ y),\qquad Y=Q(x,\ y), \tag{76}$$

სადაც X, Y და x, y არის მათი წერტილების მართკუთხოვანი კოორდინატები. ისე როგორც ზემოთ, რომ ეს გარდაქმნა იყოს კონფორმული, აუცილებელია და საკმარისი, ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$dX^2+dY^2=\lambda^2(dx^2+dy^2),$$

სადაც λ არის x, y ცვლადების რაიმე ფუნქცია, რომელიც დიფერენციალებზე არ არის დამოკიდებული. გავშლით რა dX და dY დიფერენციალებს და ორივე მხარეს გავუტოლებთ ერთმანეთს, ვნახავთ, რომ $P(x,\ y)$ და $Q(x,\ y)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდენ განტოლებებს:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2,\qquad \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x}=0. \tag{77}$$

$\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები ერთდროულად არ გახდება ნული, ვინაიდან, მაშინ (77)-ის პირველი განტოლებიდან მიიღება: $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}=0$, და P და Q ფუნქციები იქნება მუდმივები. ამიტომ (77)-ის მეორე განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mu\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\mu\frac{\partial P}{\partial y},$$

სადაც μ დამხმარე უცნობია. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (77)-ის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$(\mu^2-1)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right]=0,$$

საიდანაც $\mu=\pm1$. მაშასადამე, P და Q ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდენ ერთ-ერთს განტოლებათა შემდეგი ორი სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}&=\frac{\partial Q}{\partial y},\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=-\frac{\partial Q}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}&=-\frac{\partial Q}{\partial y},\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial Q}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{78'}$$

რომლებიდანაც მეორე იქცევა პირველად, როდესაც Q ს შევცვლით $-Q$-თი.

გარდაქმნებს (რომლებიც არსებობს უსასრულო ბევრი), რომლებიც განსაზღვრულია (78) და (78′) ფორმულებით, ეწოდება აგრეთვე იზოგონალური გარდაქმნები. ესენი მჭიდროდ არიან დაკავშირებული კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიასთან (იხ. II ტომი).

254. გეოგრაფიული რუქები. რაიმე ფართეულის რუქის აგება—ნიშნავს მის წერტილებს და სიბრტყის წერტილებს შორის ისეთ თანადობის დამყარებას, რომ შესაბამი კუთხეები იყონ ტოლი. ვიგულისხმოთ, რომ განსახილავ ფართეულის წერტილთა კოორდინატები გამოსახულია ორი u და v პარამეტრის ფუნქციებში, და ვთქვათ:

$$ds^2 = F\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

არის მისი წრფივი ელემენტის კვადრატი. ვთქვათ, შემდეგ, α და β არის რაიმე P სიბრტყის ისეთ წერტილთა მართკუთხოვანი კოორდინატები, რომელნიც ეთანადება u, v წერტილებს. საკითხი დადის ორ ისეთ

$$u = \pi_1(\alpha, \beta), \qquad v = \pi_2(\alpha, \beta)$$

ფუნქციის მოძებნამდე, რომ ადგილი ჰქონდეს იგივეობას:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \lambda^2\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

სადაც λ არის α და β-ს რაიმე ფუნქცია, რომელიც არ შეიცავს დიფერენციალებს. ამ ამოცანას აქვს უსასრულო ბევრი ამოხსნა, რომელნიც ყველა შეიძლება დაყვანილი იქნეს ერთზე ორი სიბრტყის კონფორმული თანადობის დახმარებით. მართლაც ვიგულისხმოთ, რომ ერთდროულად ადგილი აქვს:

$$ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad ds^2 = \lambda'\,(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

მაშინ

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{\lambda'}{\lambda}\,(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

და, მაშასადამე, ერთი გარდაქმნა დაიყვანება მეორეზე სიბრტყის იზოგონალური გარდაქმნის დახმარებით.

მაგალითები. 1. მერკატორის გეგმილი. ყოველთვის შეიძლება აგებული იქნეს ბრუნვითი ფართეულის რუქა ისე, რომ მერიდიანებსა და პარალელებს შეესაბამებოდეს კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები.

ვთქვათ $$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = f(\rho)$$

არის ბრუნვითი ფართეულის წერტილთა კოორდინატები. მაშინ წრფივი ელემენტი:

$$ds^2 = d\rho^2\,[1 + f'^2(\rho)] + \rho^2\,d\omega^2 = \rho^2\left[d\omega^2 + \frac{1 + f'^2(\rho)}{\rho^2}\,d\rho^2\right]$$

შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$ds^2 = \rho^2\,[dX^2 + dY^2],$$

სადაც მიღებულია აღნიშვნები:

$$X=\omega, \quad Y=\int \frac{\sqrt{1+f'^2(\rho)}}{\rho}\, d\rho.$$

R რადიუსის სფეროს შემთხვევაში, ჩვენ გვაქვს:

$$x=R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y=R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z=R\cos\theta,$$

$$ds^2=R^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)=R^2\sin^2\theta\left(d\varphi^2+\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta}\right),$$

და ჩვენ აღვნიშნავთ:

$$X=\varphi, \quad Y=\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

მიღებულ გეგმილს ეწოდება *მერკატორის გეგმილი*; მასში სფეროს მერიდიანებს ესაბამება Oy ღერძის პარალელური წრფეები, ხოლო პარალელებს—Ox ღერძის პარალელური მონაკვეთები. რომ გარდავსახოთ მთელი სფეროს ზედაპირი, საჭიროა φ ვცვალოთ 0-დან 2π-მდე, ხოლო θ-კი 0-დან π-მდე. ამ შემთხვევაში X იცვლება 0-დან 2π-მდე, ხოლო Y კი $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. რუქას 2π სიგანის უსასრულო ზოლის სახე აქვს.

წირებს, რომლებიც სფეროს ზედაპირზე მერიდიანებს ჰკვეთენ მუდმივი კუთხით, ეწოდებათ *ლოქსოდრომები*; ესენი სიბრტყეზე გადაისახებიან წრფეებად.

2. *სტერეოგრაფული გეგმილი*. სფეროს წირთა ელემენტი შეიძლება აგრეთვე დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$ds^2=4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{R^2\,d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\right)+R^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\,d\varphi^2,$$

ანდა

$$ds^2=4\cos^4\frac{\theta}{2}\,(d\rho^2+\rho^2\,d\omega^2),$$

სადაც მიღებულია აღნიშვნა:

$$\rho=R\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \quad \omega=\varphi.$$

მაგრამ $d\rho^2+\rho^2\,d\omega^2$ წარმოადგენს სიბრტყის ისეთ წრფივ ელემენტის კვადრატს, რომელიც აღებულია პოლარი (ρ, ω) კოორდინატთა სისტემის მიმართ. რომ დავამყაროთ სფეროს სიბრტყეზედ კონფორმულად გადასახვა, საკმარისია დავამყაროთ შესაბამობა სფეროს (θ, φ) წერტილსა და სიბრტყის წერტილებს შორის (ρ, ω პოლარი კოორდინატებით). ადვილი შესამჩნევია, რომ ρ, ω არიან სფეროს (θ, φ) წერტილთა სტერეოგრაფული გეგმილის კოორდინატები ეკვატორიალურ სიბრტყეზე.

3. *ტორის რუქა*. განვიხილოთ ტორი, რომელიც მიღებულია R რადიუსის წრეწირის ბრუნვით იმ ღერძის გარშემო, რომელიც მის სიბრტყეში ძევს და დაშორებულია ცენტრიდან a მანძილზე (ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $a>R$). მივიღოთ ბრუნვის ღერძი Oz ღერძად, სიბრტყე, რომელშიაც მოთავსებულია მბრუნავი წრეწირის ცენტრი,—xOy სიბრტყედ, მაშინ ტორის ზედაპირის წერტილთა კოორდინატები გამოისახებიან ფორმულებით:

$$x=(a+R\cos\theta)\cos\varphi, \qquad y=(a+R\cos\theta)\sin\varphi, \qquad z=R\sin\theta,$$

მასთან θ და φ იცვლებიან $-\pi$-დან $+\pi$-მდე. აქედან

$$ds^2=(a+R\cos\theta)^2\left[d\varphi^2+\frac{R^2d\theta^2}{(a+R\cos\theta)^2}\right].$$

რომ მივიღოთ ფართეულის რუქა, ავღნიშნოთ:

$$X=\varphi,\quad Y=e\int\limits_0^\theta\frac{d\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\ \text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\ \text{tg}\,\frac{\theta}{2}\right),$$

სადაც e-თი აღნიშნულია $\frac{R}{a}$ფარდობა, რომელიც ერთზე ნაკლებია. ამრიგად ტორის ზედაპირის წერტილებს შეესაბამება ისეთ მართკუთხედის წერტილები, რომლის გვერდები არის 2π და $\frac{2\pi e}{\sqrt{1-e^2}}$.

სავარჯიშო მაგალითები.

1. იპოვეთ ისეთი განფენადი ფართეულის სიმრუდის წირები, რომელიც ევლება სიბრტყეთა ოჯახს, რომლის განტოლება მართკუთხოვან კოორდინატებში არის:

$$z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+R\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)},$$

სადაც α ცვლადი პარამეტრია, $\varphi(\alpha)$ კი ამ პარამეტრის ნებისმიერი ფუნქცია, ხოლო R—მოცემული მუდმივი.

2. იპოვეთ, რა პირობებში წრფე: $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, სადაც a, b, α, β, არიან რაიმე ცვლადი პარამეტრის ფუნქციები, ადგენენ განფენად ფართეულს, რომლის სიმრუდის წირები, რომელნიც მსახველის მართობულია, მდებარეობენ კონცენტრულ სფეროებზე.

3. იპოვეთ სიმრუდის წირები ფართეულისა, რომელიც მართკუთხოვან კოორდინატებში მოცემულია შემდეგი განტოლებით: $e^z=\cos x\cos y$.

4. განვიხილოთ სამღერძა ელიფსოიდი, მოცემული განტოლებით:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

და მისი xOz სიბრტყით E კვეთა. მოთხოვნილია E ელიფსის ყოველი M წერტილისათვის ვიპოვოთ: 1) ელიფსოიდის მთავარი სიმრუდის R_1 და R_2 რადიუსების მნიშვნელობები; 2) დამოკიდებულება R_1 და R_2-ს შორის; 3) სიმრუდის მთავარ კვეთათა ცენტრების გეომეტრიული ადგილი, როდესაც M წერტილი გადაადგილდება E ელიფსის განგრძივ.

5. შეადგინეთ მეორე ხარისხის განტოლება, საიდანაც მოიძებნება:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,$$

განტოლებით წარმოდგენილი პარაბოლოიდის ყოველი წერტილისათვის მთავარი სიმრუდის რადიუსები, და გამოსახეთ t-ს ფუნქციებში სიმრუდის რადიუსები იმ წირის წერტილებში, რომელიც მიღებულია აღნიშნული პარაბოლოიდის

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=2z-\lambda.$$

პარაბოლოიდთან კვეთაში.

6. იპოვეთ Ox ღერძის სხვადასხვა წერტილებისათვის $xy=az$ პარაბოლოიდის მთავარი კვეთების სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიული ადგილი.

7. იპოვეთ განტოლება ზედაპირისა, რომელიც წარმოადგენს მოცემულ S ზედაპირის და მის M წერტილზე გამავალ სიბრტყეების კვეთის სიმრუდის ცენტრთა გეომეტრიულ ადგილს.

8. ვთქვათ MT არის მოცემული მეორე რიგის ზედაპირის მხები M წერტილში. O—ამ ზედაპირის ისეთ სიბრტყით კვეთის სიმრუდის ცენტრი, რომელიც გადის MT მხებზე, ხოლო O'—ამ კვეთის შლადის სიმრუდის ცენტრი. იპოვეთ O' წერტილების გეომეტრიული ადგილი, როდესაც გამკვეთი სიბრტყე ბრუნავს MT-ს ირგვლივ.

9. იპოვეთ იმ ტორის ასიმპტოტური წირები, რომელიც მიღებულია წრის მის ერთ-ერთ მხების ირგვლივ ბრუნვით.

10. ვთქვათ C არის მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის zOx სიბრტყეზე რაიმე წირი. განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც მიიღება წრეწირებით, რომელთა სიბრტყე პარალელურია zOx სიბრტყისა და რომელთა ცენტრი აღწერს აღნიშნულ C წირს, ხოლო რომელთა რადიუსები იცვლებიან ისეთნაირად, რომ წრეწირები მუდამ ჰკვეთენ Oz ღერძს. შეადგინეთ ამ ზედაპირის ასიმპტოტურ წირთა დიფერენციალური განტოლება, მიიღებთ რა დამოუკიდებელ ცვლადებად მის რაიმე წერტილს z კოორდინატს და θ კუთხეს, რომელსაც ადგენს ამ წერტილზე გამავალი წრეწირის რადიუსი იმ წრფესთან, რომელიც არის გადაკვეთა ამ წრეწირის სიბრტყისა zOx სიბრტყესთან. მიღებული შედეგები გამოიყენეთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც C წირი არის პარაბოლი, რომლის წვერო O წერტილშია, ხოლო ღერძი Ox ღერძია.

11. ერთი წრფივი ზედაპირი ეხება მეორე წრფივ ზედაპირს უკანასკნელი წრფივი Δ მსახველის ყოველ წერტილის განგრძივ; გარდა ამისა პირველის ყველა მსახველი იკვეთება Δ წრფესთან. იპოვეთ პირველი წრფივი ზედაპირის ასიმპტოტური წირები.

12. იპოვეთ მართ ჰელიკოიდზე ისეთი წირი, რომლის ყოველ წერტილზე მიმხები სიბრტყე გადის ზედაპირის ნორმალზე აღებულ წერტილში.

13. იპოვეთ ასიმპტოტური წირები წრფივი ზედაპირისა, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$x=(1+u)\cos v, \quad y=(1-u)\sin v, \quad z=u.$$

14*. დაამტკიცეთ, რომ S ზედაპირის კვეთა სიბრტყეებთან, რომლებიც გადის Δ წრფეზე, და იმ კონუსების თანახების წირები, რომლებიც შემოწერილია S ზედაპირის ირგვლივ და აქვთ წვეროებად Δ წრფის წერტილები, ადგენენ S ზედაპირზე შეუღლებულ ქსელს.

[კ ე ნ ი გ ი (Koenigs)].

15*. თუ უცვლელი წრფე ძრაობს ისეთნაირად, რომ მისი სამი წერტილი რჩება შესაბამად სამ ურთი-ერთ მართობ სიბრტყეზე, მაშინ ეს წრფე იქნება მუდამ გარკვეულ პარალელურ ზედაპირთა ოჯახის ნორმალური. ერთ-ერთი ამ ზედაპირებიდან არის გეომეტრიული ადგილი იმ მონაკვეთა შუა წერტილებისა, რომლის ბოლოები წარმოადგენენ მონაკვეთის გადაკვეთას ერთ-ერთ კოორდინატთა სიბრტყესთან და იმ მართობის ფუძესთან, რომელიც ჩამოშვებულია კოორდინატთა სათავითან ამ წრფეზე.

[Darbaux, Comptes rendus, ტ, XCII, გვ. 446, 1881].

16*. რომელ ზედაპირზე არის წარმოსახვითი წირი, რომელიც წარმოადგენს გეომეტრიულ ადგილს იმ წერტილებისას, რომლებისათვის $1+p^2+q^2=0$.

ამ დებულების დასამტკიცებლად საჭიროა უჩვენოთ, რომ სიმრუდის წირთა დიფერენციალური განტოლება შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$(dp\,dy-dq\,dx)(1+p^2+q^2)+(p\,dy-q\,dx)(p\,dp+q\,dq)=0.$$

17*. ლ ა გ ე რ ი ს (Laguerre) ფ ო რ მ უ ლ ა. ვთქვათ $F(x, y, z)=0$ არის S ზედაპირის განტოლება; როდესაც (x, y, z) წერტილი აღწერს ამ ზედაპირზე რაიმე წირს, მაშინ პირველი სამი რიგის დიფერენციალები აკმაყოფილებენ სამ დამოკიდებულებას:

$$\frac{dF}{\partial x}\partial x+\frac{dF}{\partial y}\partial y+\frac{\partial F}{\partial z}dz\quad 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z+\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}d^3x+\frac{\partial F}{\partial y}d^3y+\frac{\partial F}{\partial z}d^3z+3d\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)d^2x+3d\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)d^2y+3d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\partial^2z+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(3)}=0, \tag{3}$$

რომელთაგან პირველი გამოთქვამს, რომ არსებობს მხები სიბრტყე, ხოლო მეორე მ ე ნ ი ე ს თეორემის ტოლფასია. რომ მივცეთ მესამე განტოლებას გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, ჩვენ შეგვიძლია მასში $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ შევცვალოთ ნორმალის λ, μ, ν მიმართულების კოსინუსებით. მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\lambda H,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\mu H,\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=\nu H,$$

სადაც აღნიშნულია

$$H=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2};$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში მე-(2) დამოკიდებულებას, მე-(3) განტოლება გადაიწერება ასე:

$$\lambda\, d^3x+\mu\, d^3y+\nu\, d^3z+3\,[d\lambda\, d^2x+d\mu\, d^2y+d\nu\, d^2z]=\Phi\,(x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz);$$

Φ არის dx, dy, dz კოეფიციენტების მიმართ კუბური ფორმა, რომელიც დამოკიდებულია აგრეთვე x, y, z-ზე.

გავყოფთ რა ds^3-ზე, დავასკვნით, რომ გამოთქმა:

$$\frac{d^3x}{ds^3}+\mu\frac{d^3y}{ds^3}+\nu\frac{d^3z}{ds^3}+3\left[\frac{d\lambda}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d\mu}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d\nu}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right]=K$$

ინარჩუნებს ერთი და იგივე მნიშვნელობებს ფართეულის წერტილზე იმ წირებისათვის, რომლებიც მდებარეობენ ფართეულზე და ეხებიან ერთმანეთს ფართეულის აღებულ წერტილზე; ეს შედეგი შეიძლებოდა აგრეთვე მიგვეღო, თუ გავაწარმოებდით § 233-ის მე-(7) ფორმულას და მივიღებდით მხედველობაში D, D', D''-ს გამოთქმებს.

შევცვალოთ ახლა $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, ... სიდიდეები მათი მნიშვნელობით ფ რ ე ნ ე ს ფორმულებიდან (§ 222). ამით წინა გამოთქმა მიიღებს სახეს:

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{RT}+\frac{3}{R}\left(\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}\right),$$

სადაც θ-თი აღნიშნულია კუთხე ფართეულის ნორმალსა და წირის მთავარ ნორმალს შორის. მეორე მხრით, თუ გავაწარმოებთ დამოკიდებულებას:

$$\cos\theta=\lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma',$$

მივიღებთ:

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}=\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}-\lambda\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\mu\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-\nu\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right).$$

მაშასადამე,

$$\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}=\sin\theta\left(\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}\right).$$

შევცვლით რა $\alpha'\frac{d\lambda}{ds}+\beta'\frac{d\mu}{ds}+\gamma'\frac{d\nu}{ds}$ გამოთქმას მისი მიღებული მნიშვნელობით, ვნახავთ, რომ გამოთქმას:

$$K=-\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}\cos\theta+\frac{\sin\theta}{R}\left(\frac{2}{T}-3\frac{d\theta}{ds}\right)$$

აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა ყველა წირისათვის, რომელნიც მდებარეობენ ფართეულზე და ეხებიან ერთმანეთს ერთ წერტილში.

18*. ენეპერის (Enneper) ფორმულა. ასიმპტოტური წირის გრეხა მოცემულია ფორმულით:

$$T=\pm\sqrt{-RR'},$$

სადაც R და R' სიმრუდის მთავარი რადიუსებია.

მითითება. დამტკიცებისათვის საკმარისია გამოიყენოთ ასიმპტოტური წირის მიმართ ფრენეს ფორმულა:

$$\frac{d\alpha''}{ds}=\frac{\alpha'}{T}$$

და შენიშნოთ, რომ წირის ბინორმალი ემთხვევა ფართეულის ნორმალს. გამოთვლების გამარტივების მიზნით ხელსაყრელია ფართეულის წერტილი ავიღოთ კოორდინატთა სათავედ, მხები სიბრტყე — xOy სიბრტყედ, ხოლო ასიმპტოტური წირის მხები Oy — ღერძად. ენეპერის ფორმულა შეიძლება აგრეთვე გამოიყვანოთ § 245-ის (51 bis) ფორმულიდან.

19*. ბელტრამის (Beltrami) ფორმულა. ვთქვათ ρ_0 არის ასიმპტოტური წირის სიმრუდის რადიუსი, ρ — სიმრუდის რადიუსი წირისა, რომელიც მიღებულია ფართეულის გადაკვეთით იმ მხებ სიბრტყით, რომელიც ეხება ასიმპტოტს; ეს სიდიდეები შებმულია დამოკიდებულებით:

$$\rho=\frac{3}{2}\rho_0.$$

მითითება. თუ ფართეული წარმოდგენილია განტოლებით:

$$z=2bxy+cy^2+Ax^3+3Bx^2y+\ldots,$$

მაშინ წირს, რომელიც არის ფართეულის გადაკვეთა $z=0$ სიბრტყესთან, აქვს შტო, რომელიც ეხება Ox ღერძს და რომლის განტოლება არის:

$$y=-\frac{Ax^2}{2b}+\ldots;$$

კოორდინატთა სათავეზე ჩვენ გვაქვს:

$$y'=0,\quad y''=-\frac{A}{b}.$$

მეორე მხრით, y''-ის მნიშვნელობა სათავეზედ ადვილად მიიღება ამ წირების დიფერენციალური განტოლებიდან:

$$(6Ax+\ldots)+(4b+\ldots)y'+(2c+\ldots)y'^2=0.$$

[Beltrami, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, მე-2 სერია. ტ. IV გვ. 258. 1865].

დამატება

განსაზღვრული ინტეგრალის გაწარმოების ფორმულები

ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოების კლასიკური ფორმულები (§ 94) უშუალოდ ვრცელდება აგრეთვე მრუდწირულ და ჯერად ინტეგრალებზე, პირობით თუ საინტეგრო გზა ან არე არის უცვლელი, და თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის უწყვეტი და აქვს პარამეტრის მიმართ უწყვეტი წარმოებული. ასეთი განზოგადოება დიდ სიძნელეს წარმოადგენს იმ შემთხვევაში, როცა საინტეგრო გზა ან არე თვით არის ცვალებადი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ საინტეგრო არეში ინტეგრალ-ქვეშა ფუნქცია არის უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი საჭირო რიგამდე.

1. მრუდწირული ინტეგრალები. Γ წირს, რომელიც წარმოდგენილია განტოლებებით:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

სადაც t იცვლება t_0-დან t_1-მდე $(t_1>t_0)$ ეწოდება *წესიერი წირი*, თუ f, φ და ψ ფუნქციები არიან უწყვეტი (t_0, t_1) შუალედში და აქვთ იმავე შუალედში უწყვეტი $f'(t)$, $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ წარმოებულები. *ჩვეულებრივი წირი* შედგება სასრული რიცხვის წესიერი წირებისაგან, რომელნიც შეერთებულია ბოლოებით. ასეთ წირს შეუძლია ჰქონდეს სასრული რიცხვი კუთხითი წერტილებისა; სხვანაირად, ჩვეულებრივი წირისათვის $f'(t)$, $\varphi'(t)$ და $\psi'(t)$ წარმოებულებს შეუძლია ჰქონდეთ (t_0, t_1) შუალედში სასრული რიცხვი პირველი გვარი წყვეტის წერტილებისა ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ წირითი ინტეგრალებს, რომლებიც აღებულია ჩვეულებრივი წირის განგრძივ.

ვთქვათ

$$x=f(t, \alpha), \quad y=\varphi(t, \alpha), \quad z=\psi(t, \alpha)$$

არის Γ წირთა ოჯახის განტოლებები, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ α პარამეტრზე; f, φ და ψ ფუნქციები იგულისხმება უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი საჭირო რიგამდე α და t-ს მიმართ, მეორე მხრით $t_0(\alpha)$ და $t_1(\alpha)$ არიან α პარამეტრის ორი უწყვეტი ფუნქცია, რომელთაც აგრეთვე აქვთ უწყვეტი წარმოებულები.

Γ წირის AB რკალი, რომელიც მიიღება t-ს ცვლილებით t_0-დან t_1-მდე, გადაადგილდება და იმავე დროს განიცდის უწყვეტ დეფორმაციას α პარამეტრის ცვლილების დროს. მისი A და B ბოლოები აგრეთვე გადაადგილდებიან და აწე-

რენ γ_0 და γ_1 წირებს. ამ ორი წერტილის (x_0, y_0, z_0) და (x_1, y_1, z_1) კოორდინატები არიან α პარამეტრის ფუნქციები, რომელთაც აქვთ სახე:

$$x_0 = f(t_0, \alpha), \quad y_0 = \varphi(t_0, \alpha), \quad z_0 = \psi(t_0, \alpha),$$

$$x_1 = f(t_1, \alpha), \quad y_1 = \varphi(t_1, \alpha), \quad z_1 = \psi(t_1, \alpha).$$

ვთქვათ, მოცემულია სამი უწყვეტი ფუნქცია: $P(x, y, z, \alpha)$, $Q(x, y, z, \alpha)$, $R(x, y, z, \alpha)$, რომელთაც აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები; განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$I(\alpha) = \int\limits_{AB} P(x, y, z, \alpha)\, dx + Q(x, y, z, \alpha)\, dy + R(x, y, z, \alpha)\, dz \qquad (1)$$

არის α პარამეტრის ფუნქცია; ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. ცხადია, საკმარისია გამოთვლა ვაწარმოოთ მხოლოდ ინტეგრალზე:

$$I_x(\alpha) = \int\limits_{AB} P(x, y, z, \alpha)\, dx,$$

რომელიც ჩვენ შეგვიძლია შევცვალოთ ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალით:

$$I_x(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1} P(f, \varphi, \psi, \alpha)\, \frac{\partial f}{\partial t}\, dt.$$

ამ ინტეგრალზე ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ გაწარმოების კლასიკური ფორმულა (§ 94), რაც მოგვცემს:

$$I_x'(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} P \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial t}\, dt +$$

$$+ P(x_1, y_1, z_1, \alpha) \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_1 \frac{dt_1}{d\alpha} P(x_0, y_0, z_0, \alpha) \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 \frac{dt_0}{d\alpha};$$

მეორე ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრობით, ვღებულობთ:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} P \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial t}\, dt = \left(P \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) dt;$$

და თუ დავუბრუნდებით პირვანდელ აღნიშვნას, გვაქვს:

$$I_x'(\alpha) = \int\limits_{AB} \frac{\partial P}{\partial \alpha}\, dx + \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right) dx - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dy - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dz +$$

$$+ \left(P \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha} + P \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{t_0}^{t_1}.$$

არა ინტეგრალური წევრის მნიშვნელობა ცხადია; მართლაც, რადგან $x_0 = f(t_0, \alpha)$ ფუნქციის α პარამეტრის მიმართ $\frac{dx_0}{d\alpha}$ წარმოებული არის:

$$\frac{\partial f}{\partial t_0}\frac{dt_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

მაშასადამე, არაინტეგრალური წევრი ტოლია შემდეგი სხვაობის:

$$P(x_1, y_1, z_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha}\ P x_0, y_0, z_0, \alpha)\ \frac{dx_0}{d\alpha} = \left[P(x, y, z, \alpha)\frac{dx}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}.$$

შემდეგი ინტეგრალების:

$$I_y(\alpha) = \int\limits_{AB} Q\,dy \quad \text{და} \quad I_z(\alpha) = \int\limits_{AB} R\,dz$$

წარმოებულების გამოსახვა მოიძებნება ამგვარადვე; სხვათაშორის, შეიძლება მათი მიღება $I_x'(\alpha)$-საგან x, y, z, ასოების წრიული გადანაცვლებით; ამ სამი წარმოებულის შეკრებით ჩვენ ვღებულობთ, დაბოლოს, $I'(\alpha)$-სათვის შემდეგ გამოსახვას:

$$I'(\alpha) = \int\limits_{AB} \frac{\partial P}{\partial \alpha}dx + \frac{\partial Q}{\partial \alpha}dy + \frac{\partial R}{\partial \alpha}dz + \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\right) +$$

$$+ \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dy - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dz\right) + \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}dz - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}dx\right) +$$

$$+ \left[P(x, y, z, \alpha)\frac{dx}{d\alpha} + Q(x, y, z, \alpha)\frac{dy}{d\alpha} + R(x, y, z, \alpha)\frac{dz}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}. \quad (2)$$

იმისათვის, რომ გადავიდეთ ბრტყელი წირის შემთხვევაზე, საკმარისია დავუშვათ $z = \psi = 0$, და ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$I'(\alpha) = \int\limits_{AB} \frac{\partial P}{\partial \alpha}dx + \frac{\partial Q}{\partial \alpha}dy + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial f}{\partial \alpha}dy\right) +$$

$$+ \left[P(x, y, \alpha)\frac{dx}{d\alpha} + Q(x, y, \alpha)\frac{dy}{d\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}. \quad (3)$$

ამ ფორმულას ჩვენ დავწერთ სხვა სახით, ვარიაციათა აღრიცხვის ზოგიერთი აღნიშვნების შემოღებით, თუ U არის α პარამეტრის ფუნქცია, რომელიც შეიძლება დამოკიდებული იყოს აგრეთვე სხვა ცვლადებზედაც. მაშინ U ფუნქციის ვ ა-რ ი ა ც ი ა ს, რომელიც აღინიშნება δU თი ეწოდება $\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,\delta\alpha$ ნამრავლს, ე. ი. ნაზრდის მთავარ ნაწილს, რომელსაც U ღებულობს, როცა ჩვენ α-ს ვაძლევთ $\delta\alpha$ ნაზრდს, მასთან ნაგულისხმევია, რომ დანარჩენი ცვლადები, რომლებზედაც

შეიძლება დამოკიდებული იყოს U, ინარჩუნებენ მუდმივ მნიშვნელობებს. ასე, ჩვენ გვაქვს:

$$\delta x = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\delta\alpha, \quad \delta P = \frac{\partial P}{\partial \alpha}\,\delta\alpha, \cdots$$

A და B ბოლო წერტილთა კოორდინატების შესახებ აუცილებელია შემოვიღოთ კიდევ ზოგიერთი განსხვავება; მაგალითად, $x_0 = f(t_0, \alpha)$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი დამოუკიდებელი t_0 და α ცვლადის ფუნქცია და ჩვენ გვაქვს:

$$\delta x_0 = \frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}\,\delta\alpha.$$

მაგრამ ვინაიდან t_0 არის α-ს ფუნქცია, ამიტომ x_0 სინამდვილეში არის α-ს რთული ფუნქცია, და ჩვენ დავუშვებთ:

$$\Delta x_0 = \frac{dx_0}{d\alpha}\,\delta\alpha = \left[\frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial t_0}\,\frac{dt_0}{d\alpha} - \frac{\partial f(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}\right]\delta\alpha;$$

ანალოგიურად განისაზღვრებიან: Δy_0, Δz_0, Δx_1, Δy_1, Δz_1.

თუ მე-(2) ფორმულის ორივე ნაწილს $\delta\alpha$-ზე გავამრავლებთ მივიღებთ: $\delta I = I'(\alpha)\,\delta\alpha$ ვარიაციის გამოსახვას:

$$\delta I = \int\limits_{AB} \delta P\,dx + \delta Q\,dy + \delta R\,dz + \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\delta y\,dx - \delta x\,dy) +$$

$$+ \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)(\delta z\,dy - \delta y\,dz) + \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(\delta x\,dz - \delta z\,dx) +$$

$$+ \left[P\,\Delta x + Q\,\Delta y + R\,\Delta z\right]_A^B, \tag{4}$$

სადაც აღნიშნულია, მაგალითად:

$$\left[P\,\Delta x\right]_A^B = P(x_1, y_1, z_1, \alpha)\,\Delta x_1 - P(x_0, y_0, z_0, \alpha)\,\Delta x_0.$$

მე-(4) ფორმულის მარჯვენა ნაწილი შეიცავს სამ წევრს: პირველი ინტეგრალი მიღებულია P, Q, R ფუნქციების ვარიაციისაგან, როცა α იცვლება უსასრულოდ მცირე $\delta\alpha$ სიდიდით, და ჩვენ იგი შეგვიძლია მივიღოთ უშუალოდ თუ მხედველობაში არ მივიღებდით ინტეგრობის გზის დეფორმაციას. შესაკრები, რომელიც თავისუფალია ინტეგრალის ნიშნისაგან, დამოკიდებულია მხოლოდ ინტეგრობის გზის A და B ბოლოების უსასრულოდ მცირე გადაადგილებაზე; ჩვენ ამ შესაკრებს მივიღებდით, თუ AB-ს განგრძივ აღებულ ინტეგრალს დაუმატებდით ინტეგრალის ორ ელემენტს აღებულს $A'A$ და $B'B$-ის განგრძივ, სადაც A' და B' ბოლოებია ინტეგრობის ახალი $A'B'$ გზისა, რომელიც ეთანადება პარამეტრის $\alpha + \delta\alpha$ მნიშვნელობას. მეორე ინტეგრალი, რომელსაც ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით, მიღებულია საინტეგრო გზის დეფორმაციისაგან.

მე-(2) და მე-(4) ფორმულები, რომლებიც ჩვენ მიერ გამოყვანილი იყო მხოლოდ წესიერი რკალისათვის, ადვილად გავრცელდება იმ შემთხვევაზე, როცა

საინტეგრო გზას აქვს კუთხითი წერტილთა სასრული რიცხვი. თუ, მაგალითად, AB რკალი შედგენილია ორი წესიერი AC და CB რკალისაგან, რომლებიც ერთდება C წერტილში კოორდინატებით x_2, y_2, z_2, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია მე-(4) ფორმულა გამოვიყენოთ თითოეული AC, CB რკალისათვის; ორივე ფორმულის შეკრების დროს $P(x_2, y_2, z_2, \alpha)\,\Delta x_2 + \ldots$ წევრი შეიკვეცება და ამრიგად, მე-(4) ფორმულა გამოიყენება მთელი AB რკალისათვის. კერძოდ, თუ ინტეგრალი აღებულია შეკრული წირის განგრძივ, მაშინ $\int$-ის ნიშნის გარეთ მდებარე წევრი იკვეცება როგორიც არ უნდა იყოს იმ წესიერ რკალთა რიცხვი, რომლებისგანაც შედგენილია ეს კონტური. აქედან ადვილად შეიძლებოდა გამოგვეყვანა აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ მრუდწირული ინტეგრალი:

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

რომელიც აღებულია ორი A და B წერტილების შემაერთებელ რომელიმე Γ წირის განგრძივ, არ იცვლებოდეს როდესაც უწყვეტად ვცვლით წირს ისე, რომ მისი ბოლოები იყოს უცვლელი (§ 147).

დავუბრუნდეთ მე-(4) ფორმულის მეორე სტრიქონზე მყოფ ინტეგრალს, რომელიც მიღებულია კონტურის დეფორმაციით. დავუშვათ:

$$L = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad M = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad N = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

და აღვნიშნოთ α', β', γ'-თი Γ წირის მხების დადებით მიმართულებასა და ღერძთა დადებით მიმართულებებს შორის შედგენილი კუთხეები; განსახილავი ინტეგრალი $\int\limits_{AB} H\,ds$-ის ტოლია, სადაც H ტოლია შემდეგი დეტერმინანტისა:

$$H = \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ L & M & N \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

ეს H დეტერმინანტი აბსოლუტური სიდიდით ტოლია იმ პარალელოპიპედის მოცულობასა, რომელნიც აგებულია შემდეგ სამ ვექტორზე: 1) mm' ვექტორი, რომლის სათავეა Γ წირის m (x, y, z) წერტილია, ხოლო ბოლო უსასრულოდ მცირედ შეცვლილი Γ წირის m' $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ წერტილი, 2) $m\mathfrak{T}$ ვექტორი, რომელსაც სათავედ m წერტილი აქვს, ხოლო გეგმილებია L, M, N (გრიგალური ვექტორი) და 3) mt ვექტორი, რომელიც M წერტილზე მხების მგეზავია. ვთქვათ, $V = \sqrt{L^2+M^2+N^2}$ არის გრიგალური ვექტორის სიგრძე, δn—მანძილი mt მხებიდან m'-მდე, θ—კუთხე (0-დან π-მდე) გრიგლური ვექტორისა mt და mm'-ზე გამავალ სიბრტყის ელემენტთან. ჩვენ გვაქვს ნიშნამდე სიზუსტით:

$$H = V\,\delta n \sin\theta,$$

და ამ ფორმულას ექნება ზოგადი ხასიათი, თუ ჩვენ შევთანხმდებით მივაწეროთ δn-ს გარკვეული ნიშანი, სახელდობრ $+$ ნიშანი, თუ $mtm'\mathfrak{T}$ სამღერძს ღერძთა იგივე განლაგება აქვს, რაც $Oxyz$ სამღერძს, და $-$ ნიშანი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მაშასადამე, მე-(4) ზოგადი ფორმულა შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\delta J = \int\limits_{AB} \delta P\,dx + \delta Q\,dy + \delta R\,dz + V\delta n \sin\theta\,ds + [P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z]_{A}^{B}. \qquad (5)$$

ბრტყელი წირის შემთხვევაში მეორე ინტეგრალი შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$\int\limits_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\delta y\,dx - \delta x\,dy) = \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \cos\alpha'\,\delta y - \cos\beta'\,\delta x)\,ds,$$

სადაც α' და β' მხების დადებითი მიმართულებით ღერძებთან შედგენილი კუთხეებია; $\delta n = \cos\alpha'\,\delta y - \cos\beta'\,\delta x$ წარმოადგენს mm' ვექტორის გეგმილს Γ წირის m-ში ნორმალის მიმართულებაზე, რომელიც შეადგენს $+\frac{\pi}{2}$ კუთხეს მხების დადებით მიმართულებასთან (ნაანგარიშევია Ox-დან $-Oy$-მდე); მაშინ δJ-სათვის ზოგადი ფორმულა ღებულობს სახეს:

$$\delta J = \int\limits_{AB} \delta P\,dz + \delta Q\,dy + \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \delta n\,ds + [P\Delta x + Q\Delta y]_{A}^{B}. \qquad (6)$$

ამ უკანასკნელ ფორმულაში δJ ნაწილი, რომელიც მიღებულია ინტეგრობის გზის დეფორმაციით, დამოკიდებულია მხოლოდ Γ წირის თითოეული m წერტილის მხების მართობლად უსასრულოდ მცირე გადაადგილებაზე. ეს შედეგი ცხადია a priori, ვინაიდან ყოველი უსასრულოდ მცირე mm' გადაადგილება მუდამ შეიძლება დაიშალოს მხებ და ნორმალ გადაადგილებად. δJ-ს ნაწილი, რომელიც მიიღება მხები გადაადგილებით, ტოლია ნულის, ვინაიდან ამ დეფორმაციის დროს Γ წირი გადადის თავის თავში, და ინტეგრალის თითოეული ელემენტი შეიცვლება უსასრულოდ მახლობელი ელემენტით. სხვათაშორის, ცხადია, რომ ინტეგრობის გზის განმსაზღვრელ განტოლებებში, შედის გარკვეული ნებისმიერი ელემენტი: ეს არის, სახელდობრ, დამხმარე t პარამეტრის შერჩევა. ჩვენ შეგვიძლია t შევცვალოთ სხვა τ ცვლადით, რომელიც დაკავშირებულია t-სთან დამოკიდებულებით: $t = \pi(\tau, \alpha)$, ისე რომ t იზრდება t_0-დან t_1-მდე, როცა τ იზრდება τ_0-დან τ_1-მდე. ასეთი შეცვლით δx, δy, δz გამოსახულებები იცვლებიან, მაგრამ $J(\alpha)$, და მაშასადამე, δJ-ც არ არის დამოკიდებული t ცვლადის შერჩევაზე. მეორე მხრით, δJ-ის პირველი და მესამე წევრი თვით არ არიან დამოკიდებულნი ამ შერჩევაზე, მაშასადამე, იმავე მდგომარეობას ექნება ადგილი δJ-ს იმ წევრის შესახებაც, რომელიც მხოლოდ შეიცავს δx, δy, δz-ს. ეს შენიშვნა საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერად შევარჩიოთ თანადობა AB გზის $m(x, y, z)$ წერტილსა და მეზობელ Γ' წირის უსასრულოდ მახლობელ $m'(x+\delta x,$

$y+\delta y$, $z+\delta z$) წერტილს შორის; მასთან საჭიროა ყურადღება მიექცეს უწყვეტლობის პირობებს. კერძოდ, შეიძლება Γ წირის m წერტილს შევუსაბამოთ m' წერტილი, რომელიც მდებარეობს Γ წირის m წერტილზე გავლებულ ნორმალ სიბრტყეზე, ანდა შევარჩიოთ t ისე, რომ t_0 და t_1-ის ზღვარული მნიშვნელობები არ იყოს დამოკიდებული α-ზე; ამ შემთხვევაში ორივე AB და $A'B'$ რკალების წერტილები იმყოფებიან ორმხრივ ცალსახა თანადობაში. პრაქტიკულ საკითხებში არ არის საჭირო მოცემული იყოს ცხადად ფუნქციები:

$$x=f(t,\ \alpha),\ y=\varphi(t,\ \alpha),\ z=\psi(t,\ \alpha),$$

რომლებიც ჩვენ ვიგულისხმეთ ცნობილებად ჩვენს მსჯელობაში. თუ ჩვენ ვიცით ორივე უსასრულოდ მახლობელი Γ და Γ' წირი, რომლებიც შეესაბამებიან პარამეტრების α და $\alpha+\delta\alpha$ მნიშვნელობებს, მაშინ ჩვენთვის საკმარისი იქნება ავიღოთ δx, δy, δz-ად ისეთი $\delta\alpha$-ს მიმართ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირეები, რომ $(x,\ y,\ z)$ წერტილს ეთანადებოდეს Γ'-ზე მოთავსებული $(x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z)$ წერტილი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი. 1. წარმოვიდგინოთ, რომ Γ წირი წარმოადგენს წრფის AB მონაკვეთს, რომელიც აერთებს $A\ (0,\ \alpha)$ წერტილს $B\ (\alpha,\ 0)$ წერტილთან, ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ.

$$x=t, \qquad y=a-t, \qquad t_0=0, \qquad t_1=a,$$

რაც იძლევა:

$$x_0=0, \qquad y_0=\alpha, \qquad x_1=\alpha, \qquad y_1=0, \qquad \delta x=0.\ \delta y=\delta\alpha,$$

$$\Delta x_0=\Delta y_1=0, \qquad \Delta y_0=\delta\alpha, \qquad \Delta x_1=\delta\alpha.$$

თუ ჩვენ გვაქვს:

$$J=\int\limits_{AB} P(x,\ y,\ \alpha)\,dx+Q(x,\ y,\ \alpha)\,dy,$$

და მაშასადამე,

$$\delta J=\int\limits_{AB} \delta P\,dx+\delta Q\,dy+\int\limits_{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta\alpha\,dx+[P(\alpha,\ 0,\ \alpha)-Q(0,\ \alpha,\ \alpha)]\,\delta\alpha,$$

ან, თუ შევნიშნავთ, რომ AB-ს განგრძივ ჩვენ გვაქვს $dy+dx=0$:

$$\delta J=\int\limits_0^a(\delta P-\delta Q)\,dx+\int\limits_0^a\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta\alpha\,dx+\alpha\,[P(\alpha,\ 0,\ \alpha)-Q(0,\ \alpha,\ \alpha)]\,\delta\alpha.$$

ჩვენ შეგვეძლო მიგვეღო აგრეთვე:

$$x=\alpha t, \qquad y=\alpha(1-t), \qquad t_0=0, \qquad t_1=1$$

და მივიღებდით იმავე შედეგს.

2. თუ ინტეგრობის გზის ნაწილი უცვლელია, მაშინ მეორე ინტეგრალი, რომელიც მიღებულია ამ ნაწილისაგან, ტოლია ნულის, ვინაიდან სათანადო ნორმალური δn გადაადგილება ტოლია ნულის. განვიხილოთ, მაგალითად, შეკრული $ABMA$ კონტური, რომელიც შედგენილია Ox ღერძის $A\ (-r,\ 0)$-წერტილიდან გამოსულ $B\ (r,\ 0)$-მდე AB მონაკვეთისა და წრეწირისაგან,

რომელიც შემოწერილია AB-ზე როგორც დიამეტრზე ღერძის ზემოთ; მასთან ეს კონტური აღწერილია დადებითი მიმართულებით. ვთქვათ $J(r)$ არის ინტეგრალი

$$\int P(x, y)\, dx+Q(x, y)\, dy,$$

აღებული ამ კონტურის განგრძივ. ჩვენ გვაქვს $\delta n=0$ AB-ს განგრძივ, და $\delta n=-\delta r$ BMA-ს განგრძივ; ამრიგად:

$$\delta J=-\delta r \int\limits_{BMA} \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) ds=-\delta r \int\limits_{0}^{\pi} \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) r\, d\varphi.$$

2. ორჯერადი ინტეგრალები. ვთქვათ

$$J(\alpha)=\iint\limits_{D} F(x, y, \alpha)\, dx\, dy$$

არის ორჯერადი ინტეგრალი გავრცელებული D არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული Γ წირით, სადაც ეს წირი შედგენილია წესიერ რკალთა სასრული რიცხვისაგან. აღვნიშნოთ $U(x, y, \alpha)$-თი ფუნქცია, რომლის წარმოებულებიც x ცვლადის მიმართ ტოლია F-ის. თუ D არე შემოსაზღვრულია ერთი შეკრული Γ წირით, რომელსაც ყოველი Ox-ის პარალელური წრფე ჰკვეთს არა უმეტეს ვიდრე ორ წერტილში—წინასწარი დაშვება, რომელსაც ჩვენ პირველ ყოვლისა მოვახდენთ, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია $U(x, y, \alpha)$-ად ავიღოთ ფუნქცია ცალსახა და უწყვეტი D არეში. საკმარისი იქნება ავიღოთ $\frac{\partial U}{\partial x}=F$ განტოლების ის ინტეგრალი, რომელიც იქცევა ნულად D არეში მდებარე რაიმე ისეთ დამხმარე წირის ყოველ წერტილში, რომელიც გადაჰკვეთს $y=C$ პარალელებს მხოლოდ ერთ წერტილში. გ რ ი ნ ი ს ფორმულის თანახმად ჩვენ გვაქვს:

$$J(\alpha)=\int\limits_{\Gamma} U(x, y, \alpha)\, dy,$$

მასთან ინტეგრალი აღებულია დადებითი მიმართულებით. δJ ვარიაცია მე-(6) ზოგადი ფორმულის თანახმად გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\delta J=\int\limits_{\Gamma} \delta U\, dy-\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial x} (\delta y\, dx-\delta x\, dy),$$

ვინაიდან წირი არის შეკრული; δx და δy აღნიშნავენ x და y-ის ვარიაციებს, როდესაც Γ წირის (x, y) წერტილიდან გადავდივართ ახალი კონტურის უსასრულოდ მახლობელ $(x,+\delta x,\ y+\delta y)$ წერტილში. გამოვიყენებთ რა ისევ გ რ ი ნ ი ს ფორმულას, შეგვიძლია პირველი ინტეგრალი დავწეროთ ასე:

$$\int\limits_{\Gamma} \delta U\, dy=\delta\alpha \int\limits_{\Gamma} \frac{\delta U}{\delta\alpha}\, dy=\delta\alpha \iint\limits_{D} \frac{\delta^2 U}{\delta\alpha\, \delta x}\, dx\, dy=\delta\alpha \iint\limits_{D} \frac{\partial F}{\partial\alpha}\, dx\, dy,$$

და ჩვენ გვაქვს საბოლოოდ:

$$\delta i = \iint_D \delta F \, dx \, dy + \int_\Gamma F(\delta x \, dy - \delta y \, dx). \tag{7}$$

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას, რომლითაც ჩვენ ხშირად ვსარგებლობდით, ჩვენ შეგვიძლია ეს ფორმულა გავავრცელოთ იმ შემთხვევაზე, როდესაც Γ კონტური ჰკვეთს Ox ღერძის პარალელურ წრფეს ორზე მეტ წერტილში, აგრეთვე იმ შემთხვევაზედაც, როცა D არე შემოსაზღვრულია რამოდენიმე შეკრული წირით; მასთან ჩვენ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ უკანასკნელი ინტეგრალი აიღება Γ კონტურის დადებითი მიმართულებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ δi შედგება ორი წევრისაგან: ორჯერადი ინტეგრალისაგან, რომელიც მიღებულია F-ს ვარიაციისაგან, და მარტივი ინტეგრალისაგან, რომელიც მიღებულია კონტურის ვარიაციით. ვთქვათ α'', β'' არიან გარენორმალის მიერ ღერძებთან შედგენილი კუთხეები; თუ ჩვენ ვგულისხმობთ δn ნორმალურ ვარიაციას დადებითად სწორედ ამ მიმართულებით, მაშინ გვაქვს:

$$\delta x = \delta n \cos \alpha'', \quad \delta y = \delta n \cos \beta'',$$

და მეორე მხრით (§ 92):

$$dx = -ds \cos \beta'', \quad dy = ds \cos \alpha''.$$

ჩვენ გვაქვს, მაშასადამე:

$$\delta x \, dy - \delta y \, dx = ds \, \delta n,$$

და წირითი ინტეგრალი, რომელიც წარმოადგენს I-ს ვარიაციას, კონტურის ვარიაციით გამოწვეულს, ტოლია

$$\int_\Gamma F \delta n \, ds. \tag{11}$$

ეს შედეგი ადვილად განიმარტება. დავუშვათ, მაგალითად, $\delta n > 0$; ნაზრდი, რომელსაც I მიიღებს, როდესაც Γ კონტურით შემოსაზღვრულ არედან გადავალთ, Γ'-ით შემოსაზღვრულ არეში, ეტოლება ორჯერად ინტეგრალს, რომელიც გავრცელებულია Γ და Γ'-ს შორის მოთავსებულ არეზე. მაგრამ ვინაიდან ამ არეს δn განზომილება უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ ორჯერადი ინტეგრალი დაიყვანება Γ წირის განგრძივ აღებულ წირითი ინტეგრალზე; ამ წირითი ინტეგრალის ელემენტი ზუსტად უდრის $F \delta n \, ds$-ს, ვინაიდან $\delta u \, ds$ წარმოადგენს იმ უსასრულოდ მცირე არის ფართს, რომელიც შემოსაზღვრულია Γ კონტურის ds რკალით, ნორმალებით ამ რკალის ორივე ბოლოში და Γ' კონტურის შესაბამი რკალით.

3. **ზედაპირული ინტეგრალები.** ვთქვათ

$$I(\alpha) = \iint_S A(x, y, z, \alpha) \, dy dz + B(x, y, z \, \alpha) \, dz dx + C(x, y, z, \alpha) \, dx dy$$

არის ზედაპირული ინტეგრალი, გავრცელებული წესიერ ნაწილზე S ფართეულისა, რომელიც α პარამეტრის ცვლილების დროს უწყვეტად გადაინაცვლება, ისე როგორც ამ ფართეულის შემომსაზღვრელი Γ კონტური. A, B, C ფუნქციები ნაგულისხმევია უწყვეტი, აგრეთვე მათი ყველა კერძო წარმოებული, რომლებიც შევლენ გამოანგარიშებაში. S-ის დადებით მხარედ ჩვენ მივიღებთ იმ მხარეს, რომელზედაც აღებულია ინტეგრალი; ამ მხარეს ეთანადება Γ კონტურზე აველის მიმართულება (§ 132), რომელსაც ჩვენ დადებით მიმართულებას ვუწოდებთ. ვიგულისხმოთ, რომ S ფართეული განსაზღვრულია განტოლებებით:

$$x=f(u, v, \alpha), \quad y=\varphi(u, v, \alpha), \quad z=\psi(u, v, \alpha),$$

რომლებიც ამყარებენ თანადობას S ფართეულის წერტილებსა და (u, v) სიბრტყეზე შეკრული ისეთი L კონტურით შემოსაზღვრული R არეს წერტილებს შორის, რომელიც აგრეთვე უწყვეტად გადაინაცვლება α პარამეტრის ცვლის დროს. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ Ou, Ov ღერძებს აქვს ისეთი დალაგება, რომლისთვისაც Γ კონტურზე დადებით მიმართულებას ეთანადება L-ზე დადებითი მიმართულება (§ 132). ჩვენ ყოველთვის შევვიძლია ვიგულისხმოთ ეს დაშვება, ვინაიდან დამხმარე u, v ცვლადები საბოლოო შედეგში არ შედიან.

ზედაპირული $I(\alpha)$ ინტეგრალი ტოლია ორჯერადი ინტეგრალის, რომელიც გავრცელებულია (u, v) სიბრტყის R არეზე (§ 131):

$$I(\alpha)=\iint_R\Big[A(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+B(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+$$

$$+C(f, \varphi, \psi, \alpha)\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\Big]du\, dv.$$

იმისათვის რომ ვიპოვოთ $I'(\alpha)$, საკმარისია ამ ინტეგრალზე გამოვიყენოთ მე-(7) ფორმულა, თუ მასში x და y-ის შევცვლით შესაბამად u და v-თი; მასთან საჭიროა ჯერ $\delta I(\alpha)$-ის ყველა წევრი გავყოთ $\delta\alpha$-ზე. ეს წარმოებული შედგება ორი ნაწილისაგან: R-ზე გავრცელებული ორჯერადი ინტეგრალისაგან, და წირითი ინტეგრალისაგან, აღებული L-ის განგრძივ. ჯერ ჩვენ გავარჩიოთ ორჯერადი ინტეგრალი; ამ ინტეგრალის ერთი წევრთაგანი, რომელიც დამოკიდებულია C-ზე, ტოლია:

$$\iint_R\left\{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\right)\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}+C\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]\right\}du\, dv.$$

დანარჩენი ორი წევრი მიიღება მისგან (A, B, C) და (f, φ, ψ)-ს წრიული გადანაცვლებით. თუ შევაჯგუფებთ წევრებს, რომელნიც შეიცავენ $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$, მივიღებთ ორჯერად ინტეგრალს:

$$\iint_R\left[\frac{\partial A}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}+\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)}+\frac{\partial C}{\partial \alpha}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right]du\, dv,$$

რომელიც უდრის ზედაპირულ ინტეგრალს:

$$\iint_R \frac{\partial A}{\partial \alpha} dy\, dz + \frac{\partial B}{\partial \alpha} dz\, dx + \frac{\partial C}{\partial \alpha} dx\, dy. \qquad (I)$$

ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint_R C \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right] du\, dv$$

შესაძლოა გარდაიქმნას შემდეგნაირად. მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}\right];$$

გრინის ფორმულა (§ 116), გვაძლევს:

$$\iint_R C \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)}\right] du\, dv = \int_L C \frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)} dv - \iint_R \frac{\partial C}{\partial u} \frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, v)} du\, dv,$$

$$\iint_R C \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)}\right] du\, dv = -\int_L C \frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)} du - \iint_R \frac{\partial C}{\partial v} \frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, u)} du\, dv.$$

ამ გარდაქმნის შემდეგ ორჯერად ინტეგრალში რჩება შემდეგი წევრები, რომლებიც C-ს შეიცავენ:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \cdots,$$

მასთან ეს ორი წევრი, რომლებიც არ არის დაწერილი, მიიღება პირველისაგან u, v, α ასოთა წრიული გადანაცვლებით. $\frac{\partial C}{\partial x}$ და $\frac{\partial C}{\partial y}$-ის კოეფიციენტები ტოლია ნულის, ხოლო $\frac{\partial C}{\partial z}$-ის კოეფიციენტი უდრის:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{D(\psi, f)}{D(u, v)} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}.$$

ფორმულების სიმეტრიულობის გამო $\frac{\partial A}{\partial x}$ და $\frac{\partial B}{\partial y}$ კოეფიციენტები $\iint$ ნიშნის ქვეშ იქნება იგივე, ხოლო $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial z}$-ის კოეფიციენტები ტოლია ნულის. მაშასადამე, $I'(\alpha)$-ის გამოსახვაში შემოვა ახალი ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint_R \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{D(\psi, \varphi)}{D(u, v)} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\right] du,\ dv,$$

რომელიც უდრის ზედაპირულ ინტეგრალს:

$$\int\int_S \left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dy\, gz+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, dz\, dx+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\, dx\, dy. \qquad \text{(II)}$$

გარდა ამისა, ჩვენ გვაქვს მარტივი ინტეგრალი, მიღებული ნაწილობითი ინტეგრობის მოხდენით, რომელშიაც C-ს შემცველი წევრი, არის:

$$\int_L C\left[\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}\,dv+\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}\,du\right].$$

დასასრულ, ჩვენ გვაქვს მარტივი ინტეგრალი, რომელიც მიღებულია Γ და L კონტურების ვარიაციით. ვთქვათ

$$u_0=\pi(t,\alpha),\quad v_0=\chi(t,\alpha)$$

არის L კონტურის წერტილის კოორდინატები, გამოსახული α პარამეტრის ფუნქციაში და დამხმარე t ცვლადის, რომელიც განსაზღვრავს წერტილის მდებარეობას კონტურზე. $I'(\alpha)$-ის გამოსახვაში მარტივი ინტეგრალი, რომელიც მიღებულია კონტურის ვარიაციით, არის, როგორც ჩვენ ახლა ვნახეთ [ფორმულა (7)]:

$$\int_L\left[A\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+B\frac{D(\psi,f)}{D(u,v)}+C\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right]\left(\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\,dv-\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}\,du\right);$$

ამ ორი მარტივი ინტეგრალის შეკრებით ჩვენ ვნახავთ, რომ C-ს კოეფიციენტი $\int$ ნიშნის ქვეშ ტოლია:

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,v)}\,dv+\frac{D(f,\varphi)}{D(\alpha,u)}\,du+\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}\,dv-\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}\,du\right),$$

სადაც u და v ს ადგილას უნდა ჩაისვას u_0 და v_0; ვთქვათ (x_0, y_0, z_0) არის Γ კონტურის იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც L კონტურის (u_0, v_0) წერტილს შეესაბამება; x_0, y_0 და z_0 არიან α-ს რთული ფუნქციები:

$$x_0=f(u_0, v_0, \alpha),\quad y_0=\varphi(u_0, v_0, \alpha),\quad z_0=\psi(u_0, v_0, \alpha);$$

ჩვენ გვაქვს, ამრიგათ:

$$\frac{dx_0}{d\alpha}=\frac{\partial f}{du_0}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{dv_0}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial y_0}{\partial\alpha}=\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\ldots,$$

და კოეფიციენტი C-სთან შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$\frac{dx_0}{\partial\alpha}\,dy-\frac{dy_0}{d\alpha}\,dx.$$

სიმეტრიისა გამო ჩვენ, ბოლოსდაბოლოს, ვხედავთ, რომ წირითი ინტეგრალი აღებული L-ის გაწგრძივ, რომელიც შედის $I'(\alpha)$ ის გამოსახვაში, შეიძლება შეიცვალოს Γ-ს გაწგრძივ აღებული წირითი ინტეგრალით:

$$\int\limits_{\Gamma} A\left(\frac{dy_0}{d\alpha}dz-\frac{dz_0}{d\alpha}dy\right)+B\left(\frac{dz_0}{d\alpha}dx-\frac{dx_0}{d\alpha}dz\right)+C\left(\frac{dx_0}{d\alpha}dy-\frac{dy_0}{d\alpha}dx\right). \quad \text{(III)}$$

სამივე I, II, III ინტეგრალის შეკრებით, ჩვენ გვაქვს, დასასრულ:

$$I'(\alpha)=\iint\limits_{S}\frac{\partial A}{\partial\alpha}dy\,dz+\frac{\partial B}{\partial\alpha}dz\,dx+\frac{\partial C}{\partial\alpha}dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}dy\,dz+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}dz\,dx+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}dx\,dy+\right)+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}A\left(\frac{dy_0}{d\alpha}dz-\frac{dz_0}{d\alpha}dy\right)+B\left(\frac{dz_0}{d\alpha}dx-\frac{dx_0}{d\alpha}dz\right)+C\left(\frac{dx_0}{d\alpha}dy-\frac{dy_0}{d\alpha}dx\right). \quad (8)$$

ორივე ნაწილის $\delta\alpha$-ზე გამრავლებით, ჩვენ ვღებულობთ δi-ის გამოსახვას:

$$\delta i=\iint\limits_{S}\delta A\,dy\,dz+\delta B\,dz\,dx+\delta C\,dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{S}\left(\frac{dA}{dx}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)(\delta x\,dy\,dz+\delta y\,dz\,dx+\delta z\,dx\,dy)+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}A(\Delta y_0\,dz-\Delta z_0\,dy)+B(\Delta z_0\,dx-\Delta x_0\,dz)+C(\Delta x_0\,dy-\Delta y_0\,dx), \quad (9)$$

სადაც

$$\delta A=\frac{\partial A}{\partial\alpha}\delta\alpha,\quad \delta x=\frac{\partial f}{\partial\alpha}\delta\alpha,\quad \Delta x_0=\left(\frac{\partial f}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial v_0}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)\delta\alpha,\ldots$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ δI შედგება სამი წევრისაგან, რომელთაგანაც პირველი მიიღება α-ზე დამოკიდებული A, B. C ფუნქციების ვარიაციით, მეორე—S ფართეულის დეფორმაციით და უკანასკნელი Γ კონტურის დეფორმაციით. ვთქვათ λ, μ, ν არიან კუთხეები, რომლებსაც S ფართეულის ნორმალის დადებითი მიმართულება ადგენს ღერძებთან, $d\sigma$—ფართის ელემენტი; მეორე ინტეგრალი ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ ასე:

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)(\cos\lambda\,\delta x+\cos\mu\,\delta y+\cos\nu\,\delta z)\,d\sigma=$$

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\delta n\,d\sigma, \quad (10)$$

სადაც δn არის იმ ვექტორის გეგმილი ნორმალის დადებით მიმართულებაზე, რომელიც აერთებს S ფართეულის (x, y, z) წერტილს უსასრულოდ მახლობელ S' ფართეულის $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ წერტილთან, ე. ი. დეფორმაციის დროს S ფართეულის წერტილთა ნორმალური უსასრულოდ მცირე გადაადგილება. ჩვენ ვხედავთ, როგორც ზემოთ, რომ მეორე ინტეგრალი დამოკიდებულია მხოლოდ ამ ნორმალურ გადაადგილებაზე; ჩვენ შეგვიძლია δn-ად ავიღოთ ნორმალის S და S'-ს შორის მოთავსებული უსასრულოდ მცირე მონაკვეთის სიგრძე, რაც S და S'-ს შორის გარკვეული თანადობის დამყარების ტოლფასია.

რაც შეეხება მარტივ ინტეგრალს, ის ჩვენ შეგვიძლია ვაინტეგროთ მსგავსად მე-(4) ფორმულის ანალოგიური ინტეგრალისა. ვთქვათ V არის ვექტორის სიგრძე, რომელსაც სათავედ (x_0, y_0, z_0) წერტილი აქვს, ხოლო კომპონენტებად $-A, B, C$; θ—კუთხე ამ ვექტორის ბრტყელ ელემენტთან, რომელიც განსაზღვრულია Γ-ს მხებითა და Γ კონტურის (x_0, y_0, z_0) წერტილის უსასრულოდ მცირე $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ გადაადგილებით; $\delta' n$—მანძილი $(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta z_0, z_0+\Delta z_0)$ წერტილიდან Γ-ს (x_0, y_0, z_0) წერტილში მხებამდე, აღებული სათანადო ნიშნით. ეს მარტივი ინტეგრალი შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$\int_{\Gamma} V \sin \theta \delta'_n ds. \tag{11}$$

როგორც წირითი ინტეგრალის შემთხვევაში, ჩვენ შეგვიძლია Γ კონტურის წერტილსა და გადანაცვლებული Γ' კონტურის უსასრულოდ მახლობელ წერტილს შორის დავამყაროთ თანადობა რაიმე კანონით.

წარმოვიდგინოთ, კერძოდ, რომ Γ კონტურის $m\ (x_0, y_0, z_0)$ წერტილს ჩვენ უსაბამებთ $(m'\ (x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0, z_0+\Delta z_0)$ წერტილს, რომელიც მდებარეობს Γ წირის ნორმალურ სიბრტყეზე m წერტილში; მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$\Delta x_0 = \delta'_n \cos \lambda'', \ \Delta y_0 = \delta'_n \operatorname{coc} \mu'', \ \Delta z_0 = \delta'_n \cos \nu'',$$

სადაც δ'_n არის mm' მანძილი, ხოლო λ'', μ'', ν''—კუთხეები mm' მიმართულებისა ღერძებთან. ვთქვათ, შემდეგ λ', μ', ν' არის კუთხეები Γ-ს მხების დადებითი მიმართულებისა ღერძებთან; მე-(11) ინტეგრალი ტოლია:

$$\int [A (\cos \mu'' \cos \nu' - \cos \nu'' \cos \mu') + B (\cos \nu'' \cos \lambda' - \cos \lambda'' \cos \nu') + C \ldots] \delta'_n ds,$$

რაც აგრეთვე შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$\int_{L} (A \cos \lambda_1 + B \cos \mu_1 + C \cos \nu_1) \delta'_n ds,$$

სადაც λ, μ, ν არის კუთხეები, შედგენილი ღერძებთან ნორმალის მიერ S'' ზოლისა, რომელიც შემოწერილია Γ კონტურით, როცა α პარამეტრი ღებულობს $\delta\alpha$ ნაზრდს. მაგრამ $\delta'_n ds$ წარმოადგენს უსასრულოდ მცირე ელემენტს ფართისა, რომელიც შემოწერილია Γ კონტურის ds რკალით, როცა α იცვლება $\delta\alpha$-თი,

—ელემენტს, რომელიც ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მართკუთხედად. ამრიგად წინა მარტივი ინტეგრალი ტოლია ორჯერადი ინტეგრალის:

$$\int\int_{S''} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

რომელიც გავრცელებულია უსასრულოდ ვიწრო S'' ზოლის ზედაპირზე, სადაც S ფართეულის ის მხარე, რომელზედაც აიღება ინტეგრალი განისაზღვრება ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებებით.

მიღებული შედეგი ადვილად აიხსნება გ რ ი ნ ი ს ფორმულის საშუალებით. დავუშვათ, რომ ჩვენ გადავდივართ S-დან S'-საკენ, და ვანიჭებთ S ფართეულის თითოეულ წერტილს უსასრულოდ მცირე δn ნაზრდს, ნორმალის დადებითი მიმართულებით. მაშინ ორივე S და S' ფართეული და უსასრულოდ ვიწრო S'' ზოლი შემოსაზღვრავენ რაიმე D არეს. I-ს ნაზრდი, რომელიც S და Γ-ს დეფორმაციით არის ჯამი ზედაპირული ინტეგრალებისა გავრცელებული S და S' ფართეულთა გარე მხარეზე. გ რ ი ნ ი ს ფორმულის თანახმად ეს ჯამი ტოლია სამჯერადი ინტეგრალის:

$$\int\int_D\int \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\ dy\,dz,$$

რომელიც გავრცელებულია D არეზე, მიმატებული ზედაპირული ინტეგრალი:

$$\int\int_{S''} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

აღებული S'' ზოლის შ ი გ ა მხარეზე.

ვინაიდან D არის δn განზომილება უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ სამჯერადი ინტეგრილი ამ არეში დაიყვანება S არეზე გავრცელებულ ორჯერად ინტეგრალზე, რომლის ელემენტი ტოლია:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \delta n\,d\sigma,$$

ვინაიდან $\delta n\,d\sigma$ არის S და S'-ს შორის მოთავსებული ისეთი უსასრულოდ მცირე მართი ცილინდრის მოცულობის ელემენტი, რომლის ფუძეც არის S ფართეულის $d\sigma$ ელემენტი. სრულიად ასევე, ვინაიდან S'' ფართეულის ერთი განზომილებათაგანი უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ ამ ფართეულზე გავრცელებული ორჯერადი ინტეგრალი გადაიქცევა წირით ინტეგრალად Γ წირის განგრძივ, რომლის ელემენტიც არის:

$$(A\cos\lambda_1 + B\cos\mu_1 + C\cos\nu_1)\ \delta'_n\,ds,$$

რადგან $\delta'_n\,ds$ არის ელემენტი ფართეულისა, რომელიც შემოსაზღვრულია Γ კონტურის ds რკალის ბოლოებში ორ უსასრულოდ მახლობელ ნორმალსა და Γ, Γ' კონტურებს შორის.

მე-(9) ფორმულა, როგორც § 1-ში, ვრცელდება აგრეთვე წესიერ ფართეულთა ნაჭრების სასრულო რიცხვისაგან შედგენილ ნებითი ფართეულზე; თუ ფართეული შეკრულია, მაშინ წირითი ინტეგრალი ისპობა. შედეგი, მიღებული წირითი ინტეგრალის ვარიაციისაგან, შეიძლებოდა სავსებით ასევე შეგვედარებინა ს ტ ო კ ს ი ს ფორმულასთან.

4. სამჯერადი ინტეგრალები. განვიხილოთ, უკანასკნელად, სამჯერადი ინტეგრლი:

$$I(\alpha)=\iiint_D F(x, y, z, \alpha)\, dx\, dy\, dz, \tag{12}$$

გავრცელებული შეკრული S ფართეულით შემოსაზღვრული D არეზე, რომელიც იცვლება α პარამეტრთან ერთად. ჯერ ჩვენ დავუშვათ, რომ ერთი ღერძთაგანის პარალელური წრფე, მაგალითად, Oz-ის, ჰკვეთს ამ ფართეულს არა უმეტეს ვიდრე ორ წერტილში. მაშინ არსებობს $U(x, y, z, \alpha)$ ფუნქცია უწყვეტი D-ში, რომელიც აკმაყოფილებს დამოკიდებულებას (იხ. § 2):

$$\frac{\partial U}{\partial z}=F(x, y, z, \alpha),$$

და ჩვენ გვაქვს აგრეთვე:

$$I(\alpha)=\iint_S U(x, y, z, \alpha)\, dx\, dy, \tag{13}$$

მასთან ინტეგრალი ვრცელდება S ფართეულის გარე მხარეზე. ვინაიდან S ფართეული შეკრულია, ამიტომ ამ ინტეგრალზე თუ გამოვიყენებთ მე-(8) ზოგად ფორმულას, მივიღებთ:

$$I'(\alpha)=\iint_S \frac{\partial U}{\partial \alpha}\, dx\, dy+\iint_S \frac{\partial U}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dy\, dz+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, dz\, dy+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\, dx\, dy,\right),$$

ანუ, თუ გავამრავლებთ $\delta\alpha$-ზე და მხედველობაში მივიღებთ U და F-ს შორის დამოკიდებულებას:

$$\delta I=\iiint_D \delta F\, dx\, dy\, dz+\iint_S F(x, y, z, \alpha)\,(\delta x\, dy\, dz+\delta y\, dz\, dx+\delta z\, dx\, dy), \tag{14}$$

სადაც δx, δy, δz აღნიშნავენ S ფართეულის მსაზღვრავ (x, y, z) წერტილის კოორდინატების ვარიაციას, და ზედაპირულ ინტეგრალს ღებულობენ გარე მხარეზე. ფორმულა, როგორც ზემოთ მე-(§ 2)-ში, ვრცელდება ნებისმიერი ფორმის ფართეულზე. შესაძლოა აგრეთვე δI-ის გამოსახვაში შემავალი ორჯერადი ინტეგრალი დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\iint_S F(x, y, z, \alpha)\, \delta n\, d\sigma,$$

სადაც $d\sigma$ არის S ფართეულის ფართის ელემენტი, ხოლო δn ნორმალური უსასრულოდ მცირე გადაადგილება გარე ნორმალის მიმართულებით.

მაგრამ $\delta n\, d\sigma$ არის, სიზუსტით ნიშნამდე, მოცულობა უსასრულოდ მცირე მართი ცილინდრისა, რომელსაც ფუძეთ აქვს $\delta\sigma$, ხოლო სიმაღლეთ δn, ასე რომ განსახილავი ორჯერადი ინტეგრალი წარმოადგენს შემდეგი სამჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობას:

$$\int\int\int dx\; dy\; dz,$$

გავრცელებულს არეზე, რომელიც მოთავსებულია ორ უსასრულოდ მახლობელ S და S' ფართეულს შორის, სადაც თითოეული ელემენტი ამ ინტეგრალისა აიღება შესაბამი ნიშნით.

შინაარსი

თავი I

შესავალი

თავი II

წარმოებულები და დიფერენციალები

თ ა ვ ი III

უცხადო ფუნქციები. მაქსიმუმი და მინიმუმი. ცვლათა გარდაქმნა

თავი IV

განსაზღვრული ინტეგრალები

თავი V

განსაზღვრულ ინტეგრალების გამოთვლა

თავი VI

ორჯერადი ინტეგრალები

თავი VII

ჯერადი ინტეგრალები. სრული დიფერენციალების ინტეგრობა

თავი VIII

წრფივები და უსასრულო ნამრავლნი

თავი IX

მთელი წკრივები. ტრიგონომეტრიული წკრივები

თავი X

მომვლებთა თეორია. თანახება

თავი XI

ორმაგი სიმრუდის წირები

თავი XII

ფართეულები

დ ა მ ა ტ ე ბ ა

[illegible]

[illegible]

პ/მგ. რედაქტორი—ა. რუხაძე
კორექტორი და { შ. აფხაიძე
ტექრედაქტორი { ა. კოჩინაშვილი
გამომშვები—ნ. მალანია
გადაეცა წარმოებას—28/I—38 წ.
ხელმოწერილია დასაბეჭდად—21/VII—38 წ.
მთავლიტის № 872
შეკვეთა № 96.
ტირაჟი—3100
ზომა—7×11

გამომცემლობა „ტექნიკა და შრომა"-ს სტამბა, ფურცელაძის ქ. № 5

1911