სარჩევი

თავი 1. კომბინატორიკა

§ 1. გადანაცვლება, წყობა, ჯუფდება. მათი რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულები

ერთი და იმავე n-ელემენტებისაგან შედგენილ ყოველ დალაგებულ $\{a_1, a_2, a_3, \Lambda , a_n\}$ სიმრავლეს $n-$გადანაცვლება ეწოდება. n რიცხვს გადანაცვლების რიგი ეწოდება. n რიგის ყველა განსხვავებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა ტოლია:

$$P_n = n!$$

n-ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტებისაგან შედგენილ ყოველ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ეწოდება წყობა n-ელემენტისა m ელემენტად.
n-ელემენტის m ელემენტად ყველა წყობათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი: A_n^m.
ადგილი აქვს ტოლობას:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

ცხადია, რომ:

$$1.\ A_n^0 = 1, \qquad 2.\ A_n^1 = n, \qquad 3.\ A_n^n = P_n = n!.$$

n-ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერად შედგენილ ყოველ m ელემენტიან ქვესიმრავლეს (დალაგების გარეშე) ეწოდება **ჯუფდება** n-ელემენტისა m ელემენტად.

n-ელემენტის m ელემენტად ყველა ჯუფდებათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი: C_n^m.
ადგილი აქვს ტოლობას:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

ცხადია, რომ:

$$1.\ C_n^0 = 1, \qquad 2.\ C_n^1 = n, \qquad 3.\ C_n^m = C_n^{n-m}.$$

1.1.1. რამდენ ელემენტს უნდა შეიცავდეს სიმრავლე, რომ მისი ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი იყოს:

1. არა უმეტეს 1000-ისა; 2. არა ნაკლებ 500-ისა.

1.1.2. შეადგინეთ A სიმრავლისაგან ყველა შესაძლო გადანაცვლება, თუ:

1. $A = \{m, n, p, q\}$; 2. $A = \{1, 2, p, q, a\}$.

1.1.3. შეასრულეთ მოქმედებები და გამოთვალეთ:

$$1.\ \frac{8!-6!}{12!};\ 2.\ \frac{(n-2)!}{(n-4)!};\ 3.\ \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+4)!};\ 4.\ \frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{k!}.$$

1.1.4. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება 6 კაცის არჩევა ექვს სხვადასხვა თანამდებობაზე, თუ კანდიდატთა რაოდენობაა 12?

1.1.5. კლასში 28 მოსწავლეა. გამოსაშვებ საღამოზე მათ ერთმანეთს სამახსოვრო ფოტოსურათები გაუცვალეს. რამდენი ფოტოსურათი გაიცვალა სულ?

1.1.6. რამდენი განსხვავებული საგნისაგან შეიძლება 2-ელემენტიანი 210 წყობის შედგენა?

1.1.7. იპოვეთ საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეთა რაოდენობა, თუ თითოეულმა მონაწილემ ყველა დანარჩენთან თითო პარტია ითამაშა და სულ 55 პარტია გათამაშდა?

1.1.8. კლასის 25 მოსწავლიდან კონფერენციისათვის უნდა აირჩიონ 4 დელეგატი. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?

1.1.9. აჩვენეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

ა) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; ბ) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.

1.1.10. რამდენი განსხვავებული ხერხით შეიძლება შედგეს 18 მოსწავლიანი კლასის მოსწავლეთა სია?

1.1.11. იპოვეთ 0, 1, 2, 3 ციფრებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო ოთხნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომელშიც ყველა ციფრი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია

1.1.12. ფეხბურთელთა გუნდში 17 მოთამაშე ირიცხება. სასტარტო ხუთეულის დაყენების რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს?

1.1.13. ამოხსენით განტოლება $A_x^3 - 6C_x^2 = x^2 - x$

1.1.14. ციფრებისაგან 1, 2, 3, 4, 5 შედგენილია ყველა შესაძლო ხუთნიშნა რიცხვი, რომელშიც ციფრები არ მეორდება. იპოვეთ, ასეთნაირად მიღებულ რიცხვებს შორის, 5-იანით დაწყებული რიცხვების რაოდენობა

1.1.15. რამდენი განსხვავებული ბილეთის შედგენა შეიძლება 10 ალგებრული და 6 გეომეტრიული ამოცანის გამოყენებით, თუ თითოეულ ბილეთში შედის 3 ალგებრული და 2 გეომეტრიული ამოცანა?

1.1.6. ამოხსენით უტოლობა $A_{n-1}^2 < 72$

1.1.7. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება განვალაგოთ თაროზე წიგნების ექვსი ტომი?

§ 2. ნიუტონის ბინომი. ბინომიალური კოეფიციენტის გამოსათვლელი ფორმულა

ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია ფორმულა:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \Lambda + C_n^m \cdot a^{n-m}b^m + \Lambda + C_n^n \cdot b^n,$$

რომელსაც **ნიუტონის** ფორმულა (**ბინომი**) ეწოდება. ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეს ბინომის ხარისხის დაშლა, ხოლო C_n^m კოეფიციენტებს –ბინომური კოეფიციენტები ეწოდება. ბინომური კოეფიციენტების რაოდენობა $n+1$-ის ტოლია.

ბინომურ კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1. ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული წევრების ბინომური კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. $C_n^k \cdot C_k^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}$

ბინომური ხარისხის დაშლის $k+1$-ე შესაკრები ტოლია:

$$T_k = C_n^k \cdot a^{n-k}b^k$$

1.2.1. იპოვეთ $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{12}$ დაშლის მეხუთე წევრი

1.2.2. იპოვეთ $\left(x + x^{-2}\right)^{12}$ დაშლის იმ წევრის ნომერი, რომელიც არ შეიცავს x-ს

1.2.3. იპოვეთ $(1+0,01)^{1000}$ დაშლის უდიდესი წევრის ნომერი

1.2.4. იპოვეთ $(2x^2 - 3y^3)^6$ ბინომური დაშლის კოეფიციენტების ჯამი

პასუხები:

1.1.1 1. $n \le 6$, 2. $n \ge 6$; **1.1.4.** $A_{11}^5 = 55\,440$; **1.1.5.** $n = 11$; **1.1.7.** $6!$; **1.2.1.** $495 \cdot x^6$

თავი 2. ჯგუფი, რგოლი, ველი

R არაცარიელ სიმრავლეზე მოცემულია ბინარული ალგებრული ოპერაცია, თუ მის ყოველ დალაგებულ (a,b) წყვილს ცალსახად ეთანადება $c \in R$ ელემენტი.

არაცარიელ G სიმრავლეს ეწოდება ჯგუფი, თუ მასზე განმარტებულია ერთი ბინარული ალგებრული ოპერაცია o, რომლისთვისაც სრულდება პირობები (აქსიომები):

1. ასოციაციურობა
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \forall a,b,c \in G;$$
2. ამ ოპერაციის მიმართ ე. წ. ნეიტრალური $n \in G$ ელემენტის არსებობა
$$a \circ n = n \circ a = a, \forall a \in G;$$
3. სიმეტრიული ელემენტის არსებობა
$$\forall a \in G, \exists a^* \in G : a \circ a^* = a^* \circ a = n.$$

თუ ე ს ოპერაცია შეკრების ოპერაციაა, მაშინ ჯგუფს ადიციურს უწოდებენ, n-ს ნულოვან ელემენტს და $a^* \equiv -a$ ელემენტს a-ს მოპირდაპირეს; თუ ოპერაცია გამრავლებაა მაშინ ჯგუფს მულტიპლიკაციური ჯგუფი ჰქვია, ხოლო n-ს ერთეულოვანი ელემენტი და $a^* \equiv a^{-1}$ ელემენტს a-ს შებრუნებული.

R არაცარიელ სიმრავლეს ეწოდება რგოლი, თუ მასზე განმარტებულია შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები, რომლებისთვისაც სრულდება შემდეგი აქსიომები:

1. კომუტაციურობა შეკრების მიმართ
$$a + b = b + a, \forall a,b \in R;$$
2. ასოციაციურობა შეკრების მიმართ
$$(a+b)+c = a+(b+c), \forall a,b,c \in R;$$
3. ასოციაციურობა გამრავლების მიმართ
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a,b,c \in R;$$
4. დისტრიბუციულობის აქსიომები
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a,b,c \in R,$$
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a,b,c \in R;$$
5. ნულოვანი ელემენტის არსებობის შესახებ აქსიომა
$$\exists \theta \in R : \forall a \in R,\ a + \theta = \theta + a = a;$$
6. მოპირდაპირე ელემენტის არსებობის შესახებ აქსიომა
$$\forall a, \exists (-a) \in R:\ a + (-a) = (-a) + a = \theta;$$

თუ R რგოლში დამატებით სრულდება კომუტაციურობის აქსიომა გამრავლების მიმართ $\forall a, b \in R$: $a \cdot b = b \cdot a$, მაშინ რგოლს აბელური ჰქვია. თუ R რგოლში არსებობს ისეთი e ელემენტი, რომ $\forall a \in R$: $a \cdot e = e \cdot a = a$, მაშინ რგოლს ერთეულიანი რგოლი ეწოდება.

R რგოლის $K \subset R$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მისი ქვერგოლი, თუ K თვითონაა რგოლი R- ზე განმარტებული ბინარული ალგებრული ოპერაციების მიმართ. იმისათვის, რომ $K \subset R$ ქვესიმრავლე იყოს R რგოლის ქვერგოლი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ: $\forall a,b \in K \Rightarrow a-b, ab \in K$.

არანულოვან, კომუტაციურ, ერთეულიან რგოლს, რომლის ყოველი არანულოვანი ელემენტი შებრუნებადია ეწოდება ველი.

K ველის $K' \subset K$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მისი ქვერგოლი, თუ K' თვითონაა ველი K- ველში განმარტებული ბინარული ალგებრული ოპერაციების მიმართ. იმისათვის, რომ $K' \subset K$ ქვესიმრავლე იყოს K ველის ქვეველი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ: $\forall a,b \in K' \Rightarrow a-b, ab^{-1} \in K'$.

რგოლის არანულოვან a და b ელემენტს ეწოდება რგოლის ნულის გამყოფები, თუ ადგილი აქვს ტოლობას $a \cdot b = \theta$. თუ რგოლი ნულის გამყოფთა ერთ წყვილს მაინც

შეიცავს მას ნულგამყოფიანი რგოლი ჰქვია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას უნულგამყოფოს უწოდებენ.

კომუტაციურ, ერთეულიან, უნულგამყოფო რგოლს მთელობის არე ეწოდება.

თუ M და M' ორი არაცარიელი სიმრავლეა და თითოეულ მათგანზე განმარტებულია შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები, მაშინ M სიმრავლის M' სიმრავლეზე F ურთიერთცალსახა ასახვას ეწოდება იზომორფიზმი, თუ $\forall a,b \in M$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$F(a+b)=F(a)+F(b) \text{ და } F(a \cdot b)=F(a)\cdot F(b).$$

2.1. დაახასიათეთ M სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული ოპერაცია “o” , თუ:

ა) $M = N$ და $a \circ b = \sqrt[5]{a \cdot b}$; ბ) $M = R$ და $a \circ b = \cos a \cdot \cos b$;

გ) $M = N$ და $a \circ b = |a-b|+1$; დ) $M = Z$ და $a \circ b = a^3 + b^3$.

2.2. ვთქვათ, M არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო X - მის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. დაახასიათეთ X სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული ოპერაცია o , თუ:

ა) $A \circ B = A \cup B$; ბ) $A \circ B = A \cap B$; გ) $A \circ B = A \setminus B$; დ) $A \circ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2.3. დაადგინეთ, ქვემოთ მოცემული სიმრავლეებიდან რომელი წარმოადგენს რგოლს

ა) მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

ბ) ლუწ რიცხვთა სიმრავლე, რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

გ) კენტ რიცხვთა სიმრავლე, რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

დ) $n \in N$ რიცხვის ჯერად რიცხვთა სიმრავლე, რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ;

ე) Q და R სიმრავლეები, რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

2.4. აჩვენეთ, რომ $M = \{(a,b) : a,b \in Z\}$ სიმრავლე, მასზე განმარტებული

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b') \quad \text{და} \quad (a,b)\circ(a',b')=(a\cdot a',b\cdot b')$$

ოპერაციების მიმართ, არის რგოლი. იპოვეთ მისი ყველა ნულის გამყოფი.

2.5. აჩვენეთ, რომ ერთეულიან რგოლშიშეკრების ოპერაციის კომუტაციურობა რგოლის დანარჩენი აქსიომებიდან გამომდინარეობს.

2.6. დაამტკიცეთ, რომ უნულგამყოფო, კომუტაციური რგოლი, რომელიც შეიცავს ერთზე მეტ ელემენტს, არის ველი.

2.7. დაამტკიცეთ, რომ რგოლში ტოლობიდან $ax = ay$ გამომდინარეობს $x = y$ ტოლობა მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა a არ არის მარცხენა ნულის გამყოფი.

2.8. აჩვენეთ, რომ თუ რგოლში არსებობს ერთი მაინც ელემენტი, რომელიც არ წარმოადგენს რგოლის ნულის გამყოფს, მაშინ შეკრების კომუტაციურობა გამომდინარეობს რგოლის დანარჩენი აქსიომებიდან.

2.9. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ m-ელემენტიან რგოლში ადგილი აქვს ტოლობას

$$ma = \underbrace{a + a + \dots + a}_{m} = 0 .$$

2.10. იპოვეთ M სიმრავლით წარმოქმნილი იდეალები:

ა) $M = \{3;5\}$, Z-რგოლში;

ბ) $M = \{4;10\}$, Z-რგოლში;

გ) $M = \{x^6 - 1; x^4 - 1\}$, $R[x]$-რგოლში;

დ) $M = \{x; x+1\}$, $R[x]$-რგოლში;

ე) $M = \{x^4 + 4x^2 - 7x + 2; x^3 + 3x^2 - 4\}$, $Q[x]$ და $R[x]$-რგოლებში.

2.11. აჩვენეთ, რომ M არაცარიელი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა X სიმრავლე, მასზე განმარტებული შემდეგი ოპერაციებით:

$$A+B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \text{ და } A\cdot B=A\cap B,\ A,B\in X,$$

წარმოადგენს ერთეულიან რგოლს პირობით $T^2=T$.

2.12. დაამტკიცეთ, რომ თუ R რგოლში სრულდება პირობა $X^2=X, \forall X\in R$, მაშინ რგოლი კომუტაციურია. სამართლიანია თუ არა იგივე დებულება პირობით $X^3=X, \forall X\in R$.

2.13. გამოარკვიეთ, 2.3.-ში მოცემული სიმრავლეებიდან რომელი წარმოადგენს ველს და რომელი მთელობის არეს.

2.14. გამოიკვლიეთ მოდულით n ნაშთთა კლასების სიმრავლის სტრუქტურა როცა:
ა) n შედგენილი რიცხვია;
ბ) n მარტივი რიცხვია

2.15. იპოვეთ Z_8-ის, Z_{18}-ისა და Z_5-ის ყველა ქვესიმრავლეები.

2.16. ამოხსენით განტოლებები Z_{11}-ში:
ა) $x^2+3x+7=0$; ბ) $x^2+2x+3=0$; გ) $x^2+5x+1=0$; დ) $x^2+3x+5=0$.

2.17. შემდეგი განტოლებებიდან რომელს აქვს ამონახსნი Z_{11}-ში:
ა) $x^2=5$; ბ) $x^2-7=0$; გ) $x^2=a$.

2.18. აჩვენეთ, რომ $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}, a,b,c\in Q$ სახის რიცხვების სიმრავლე, რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციების მიმართ, წარმოადგენს ველს. იპოვეთ $a=1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$ ელემენტის შებრუნებული ელემენტი.

2.19. აჩვენეთ, რომ რგოლის შებრუნებად ელემენტთა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს.

2.20. აჩვენეთ, რომ ველი, შეკრების ბინარული ოპერაციის მიმართ, წარმოადგენს ადიციურ ჯგუფს. წარმოადგენს თუ არა ველი, გამრავლების ოპერაციის მიმართ, მულტიპლიკაციურ ჯგუფს.

2.21. დაამტკიცეთ, რომ $A=\{(a,b): a,b\in Q, a\neq 0\}$ სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს შემდეგი ოპერაციის მიმართ: $(a,b)(a',b')=(aa',ab'+b)$.

2.22. არის თუ არა მთელ რიცხვთა სიმრავლე ჯგუფი:
ა) რიცხვთა შეკრების ოპერაციის მიმართ;
ბ) რიცხვთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ;
გ) რიცხვთა გამოკლების ოპერაციის მიმართ.

2.23. აჩვენეთ, რომ ჯგუფის ქვეჯგუფთა თანაკვეთა არის ჯგუფი.

2.24. დაამტკიცეთ, რომ:
ა) R ადიციური ჯგუფი იზომორფულია დადებით ნამდვილ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფისა;
ბ)) Q ადიციური ჯგუფი არ არის იზომორფულია დადებით რაციონალურ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფისა.

პასუხები:

2.1. ა) ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია, გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი $n=1$. სიმეტრიული ელემენტი მხოლოდ $n=1$ ელემენტს გააჩნია; ბ) ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია, მას არ გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი; გ) ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია, გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი $n=1$. ყოველი ელემენტი თავისი თავის სიმეტრიულია; დ) ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია, გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი $n=0$. ყოველი a ელემენტის სიმეტრიულია $-a$.

2.2. ა) ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია, გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი $n=\varnothing$. სიმეტრიული ელემენტი მხოლოდ $n=\varnothing$ ელემენტს გააჩნია; ბ) ოპერაცია კომუტაციური და ასოციაციურია, გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი $n=X$. სიმეტრიული ელემენტი მხოლოდ $n=X$ ელემენტს გააჩნია ; გ) ოპერაცია არაკომუტაციური და არაასოციაციურია, არ გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი; დ) ოპერაცია კომუტაციური და

ასოციაციურია, გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი $n=\varnothing$. ყოველი ელემენტი თავისი თავის სიმეტრიულია. **2.3.** ა), ბ), დ), ე) –შემთხვევებში სიმრავლე რგოლია.
2.5. მითითება: გაშალეთ$(e+e)(x+y)$ ნამრავლი დისტრიბუციულობის გამოყენებით.
2.10. ა) Z; ბ) (2); გ) (x^2-1); დ) $R[x]$; ე) $(x-1)$. **2.13.** ა) მთელობის არე; ე) ველი.
2.15. Z_8 -ის ქვერგოლებია $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 4\rangle$ და $\langle 0\rangle$; Z_{18} -ის ქვერგოლებია $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle$, $\langle 6\rangle, \langle 9\rangle$ და $\langle 0\rangle$; Z_5 -ის ქვერგოლებია $\langle 1\rangle$ და $\langle 0\rangle$. **2.16.** ა) 1 და 7; ბ) $\varnothing$; გ) 2 და 7; დ) $x_1=x_2=4$. **2.17.** ა) $x=4$; ბ) $x=2$; გ) $x^3-a\equiv 0 \bmod 11$. **2.18.** $a^{-1}=\frac{5}{43}+\frac{9}{43}\sqrt[3]{2}-\frac{1}{43}\sqrt[3]{4}$.

თავი 3. კომპლექსური რიცხვები

§. 1. კომპლექსური რიცხვი. მისი ალგებრული სახე

ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ (a,b) წყვილს კომპლექსური რიცხვი ეწოდება. $(a,0)$ სახის კომპლექსური რიცხვი გაიგივებულია ნამდვილ a რიცხვთან. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება სიმბოლოთი C. ამ სიმრავლეზე გაინმარტება შეკრებისა და გამრავლების ალგებრული ოპერაციები:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

ამ ოპერაციების მიმართ C სიმრავლე წარმოადგენს ველს. $(0,1)$ კომპლექსური რიცხვი აღინიშნება სიმბოლოთი i და მას წარმოსახვითი ერთეული ქვია.

$z=(a,b)$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს სახით:

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi .$$

კომპლექსური რიცხვის ამ სახეს – მისი ალგებრული ფორმა ქვია. a ნამდვილ რიცხვს z კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება და $\operatorname{Re} z$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო b ნამდვილ რიცხვს – კომპლექსური რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი და აღინიშნება სიმბოლოთი– $\operatorname{Im} z$.

$z=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული ეწოდება $\bar{z}=a-bi$ სახის კომპლექსურ რიცხვს.

ორი მოცემული $z_1 = a_1+b_1$ და $z_2=a_2+b_2$ სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვებისათვის

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,i$$
$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_2b_1}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}} + \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}\,i \quad , z_2 \neq 0..$$

3.1.1. გამოთვალეთ

1. $(2+i)(5-i)+(3+2i)(7+5i)$; 2. $(3+i)(12-i)-(4+i)(18-3i)$;

3. $(5+2i)(3+4i)-(2+3i)(6-5i)$; 4. $\dfrac{(3+i)(4-3i)}{2+i}$; 5. $\dfrac{(6+7i)(2-3i)}{3-i}$;

6. $\dfrac{(1+2i)(7-i)}{(3+i)^2}$; 7. $\dfrac{(3+i)(2-3i)}{1+i}$; 8. $\dfrac{(3+2i)(1-7i)}{5-2i}$; 9. $(3+i)^2-(2+i)^2$;

10. $\dfrac{(2+2i)^5}{(2-2i)^7}$; 11. $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^5$; 12. $(3+2i)^4-(2+3i)^4$.

3.1.2. გამოთვალეთ

1. $(1+5i)(-4+5i)$; 2. $(1-3i)^2$; 3. $(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)$:

4. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}i\right)(0{,}5-0{,}7i)$; 5. $\dfrac{2+3i}{2-3i}$; $\dfrac{13+4i}{17-9i}$;

3.1.3. ამოხსენით განტოლებები ნამდვილი x და y მნიშვნელობებისათვის

1. $(3x+y)+(2x+3y)i=4-i$; 2. $(2x-7y)+(3x-4y)i=-11-2i$;

3. $3x-7i+6y+3xi=-2-3i$; 4. $4x-3yi-3x+yi=2-4i$;

5. $(2+3i)x+(3-2i)y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{7}{4}i$;

3.1.4. გამოთვალეთ

i^{88}; i^{57}; i^{-68}; $i^{2n}, n\in \mathrm{Z}$; $i^{-n}, n\in \mathrm{N}$; $i^5+i^{15}+i^{25}+i^{35}+i^{45}$;

$i + i^2 + i^3 + \Lambda + i^n, n > 4; \quad i^2 i^4 i^6 \Lambda\ i^{60}.$

3.1.5. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები

1. $(2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 3+2i$
   $(2-i)z_1 + (2+i)z_2 = 1+4i;$

2. $2iz_1 + (3-2i)z_2 = 3-8i$
   $4iz_1 + (4+3i)z_2 = 7+4i;$

3. $(2+i)z_1 - 3iz_2 = -2i$
   $4iz_1 + (3+4i)z_2 = 4-5i;$

4. $3z_1 + (4+i)z_2 = -1-i$
   $(3-i)z_1 - (1-5i)z_2 = -3i;$

3.1.6. გამოთვალეთ

1. $\dfrac{3}{i^2};$ 2. $\dfrac{-i-2\sqrt{3}}{-i+2\sqrt{3}};$ 3. $\dfrac{-3i}{1-i};$ 4. $\dfrac{3+2i}{2+3i} - \dfrac{3+i}{-2+5i}.$

3.1.7. ამოხსენით განტოლებები

1. $z^2 = i;$ 2. $z^2 = 2-3i;$ 3. $z^2 = 7-4i;$ 4. $z^2 - (3+2i)z + i + 2 = 0;$

5. $z^2 - 4z = 10i - 7.$

3.1.8. ვთქვათ $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,$ გამოთვალეთ

1. $(a+bz^2+cz)(a+bz+cz^2);$ 2. $(a+b)(a+bz)(a+bz^2);$ 3. $(a+bz+cz^2)^3 + (a+bz^2+cz)^3.$

3.1.9. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები მათი მარცხენა მხარეების ნამდვილ კოეფიციენტიან მრავალწევრთა ნამრავლად დაშლის გზით

1. $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0;$
2. $x^4 + 2x^2 + 24x + 72 = 0;$
3. $x^4 - 3x^2 + 4 = 0;$
4. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0.$

3.1.10 დაამტკიცეთ, რომ თუ

$$a + bi = (x+yi)^n, n \in \mathrm{N}, \quad \text{მაშინ} \quad a^2 + b^2 = (x^2+y^2)^n.$$

3.1.11. დაამტკიცეთ:

1. z კომპლექსური რიცხვი ნამდვილი რომ იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $z = \bar{z};$
2. z კომპლექსური რიცხვი წმინდა წარმოსახვითი რომ იყოს აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს ტოლობა $\bar{z} = -\bar{z};$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0.$

3.1.12. რა შემთხვევაში იქნება ნამდვილი რიცხვი ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი, ნამრავლი.

3.1.13. აჩვენეთ, რომ

1. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z;$ 2. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;$ 3. $\overline{(\bar{z})} = z;$ 4. $|\bar{z}| = |z|;$

5. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, n \in \mathrm{N};$ 6. $z\bar{z} = |z|^2.$

3.1.14. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნამდვილი კოეფიციენტების მქონე f მრავალწევრისა და ნებისმიერი z კომპლექსური რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

§. 2. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული სახე. მუავრის ფორმულა. ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან.

განვიხილოთ სიბრტყეზე რაიმე OXY საკოორდინატო სისტემა. ყოველ $z = (a,b)$ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი (კოორდინატებით a და b) ამ სიბრტყეზე და პირიქით– ამ სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი კომპლექსური რიცხვი (ამ წერტილის კოორდინატებისაგან შედგენილი დალაგებული

წყვილი). ასეთნაირად აგებულ საკოორდინატო სიბრტყეს კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება. OX ღერძს ნამდვილ ღერძს უწოდებენ, ხოლო OY-ს–წარმოსახვით ღერძს.

კომპლექსურ სიბრტყეზე აღებულ ყოველ $z=a+bi$ სახის კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება (r,φ) წყვილი, სადაც: r არის z კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი რადიუს ვექტორის სიგრძე $\left|\overrightarrow{OM}\right|$, მას კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება და $|z|$-ით აღინიშნება, ხოლო φ წარმოადგენს იმ კუთხის სიდიდეს, რომელსაც $\overrightarrow{OM}$ რადიუს ვექტორი ქმნის OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ამასთან ეს კუთხე გადაზომილია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. φ-ს z რიცხვის არგუმენტი ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $Argz$.

ყოველი $z=a+bi$ რიცხვის მოდული

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

ცალსახადაა განსაზღვრული, ხოლო არგუმენტი–არა. ამიტომ z კომპლექსური რიცხვისათვის განიმარტება მისი ე.წ. მთავარი არგუმენტი $\arg z$ – არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომელიც $[-\pi,\pi)$ შუალედშია მოთავსებული. z რიცხვის ნებისმიერი არგუმენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$Argz=\arg z+2\pi k, k\in Z.$$

კომპლექსური რიცხვის მთავარი არგუმენტის დასადგენად გამოიყენება შემდეგი ფორმულა:

$$\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, a>0 \\ arctg\dfrac{b}{a}+\pi, a<0, b>0 \\ arctg\dfrac{b}{a}-\pi, a<0, b<0 \end{cases}$$

.

შევნიშნოთ, რომ $z=(0,0)$ კომპლექსურ რიცხვისათვის არგუმენტი არ განიმარტება.

როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$a=r\cos\varphi \quad \text{და} \quad b=r\sin\varphi.$$

ამრიგად, $z=a+bi$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩავწეროთ სახით

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ამ უკანასკნელ სახეს მისი ტრიგონომეტრიული სახე ეწოდება.

თუ გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულებს, მაშინ z კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ე.წ. მაჩვენებლიანი სახითაც:

$$z=re^{i\varphi}.$$

სამართლიანია მუავრის ფორმულა:

$$z^n=|z|^n(\cos n\arg z+i\sin n\arg z), \forall n\in Z.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით მიიღება z კომპლექსური რიცხვიდან n-ური რიგის ფესვის ამოღების შემდეგი ფორმულა:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right), n=0,1,2\Lambda\ n-1.$$

3.2.1. შემდეგი კომპლექსური რიცხვები წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით

1. 1; 2. -2; 3. i; 4. $-i$; 5. $1+i$; 6. $1-i$; 7. $-1+i$; 8. $-1-i$; 9. $1-i\sqrt{3}$; 10. $3-4i$; 11. -5; 12. $1-i^{207}$; 13. $-1-i\sqrt{3}$; 14. $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 15. $2+i\sqrt{3}$; 16. $\cos\alpha-i\sin\alpha$;

17. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$; 18. $\cos10^\circ-i\sin10^\circ$; 19. $\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$;

3.2.2. გამოთვალეთ

1. $(1+i)^{1000}$; 2. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{150}$; 3. $\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}$; 4. $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{48}$; 5. $\left(2-\sqrt{2}+i\right)^{12}$;

6. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$; 7. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; 8. $(\cos20^\circ+i\sin20^\circ)(\cos70^\circ+i\sin70^\circ)$;

9. $(\cos50^\circ+i\sin50^\circ)(\cos70^\circ+i\sin70^\circ)$;

10. $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$; 11. $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n, n\in\mathrm{N}$; 12. $(1+\omega)^n, n\in\mathrm{N}$, სადაც $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

3.2.3. გამოთვალეთ

1. $\dfrac{\cos130^\circ+i\sin130^\circ}{\cos40^\circ+i\sin40^\circ}$; 2. $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$; 3. $\dfrac{\cos140^\circ+i\sin140^\circ}{\cos50^\circ+i\sin50^\circ}$; 4. $\dfrac{\cos109^\circ+i\sin109^\circ}{\cos49^\circ+i\sin49^\circ}$;

3.2.4. აჩვენეთ, რომ თუ $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$,

მაშინ $$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\alpha, n\in\mathrm{Z}.$$

3.2.5. აჩვენეთ, რომ თუ

$$|z|<\frac{1}{2}, \text{ მაშინ } \left|(1+i)z^3+iz\right|<\frac{3}{4}$$

3.2.6. შეასრულეთ მოქმედებები

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; 2. $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$; 3. $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

3.2.7. დაამტკიცეთ, რომ

1. $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{\pi n}{4}+i\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)$; 2. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=2^n\left(\cos\dfrac{\pi n}{6}+i\sin\dfrac{\pi n}{6}\right)$;

3. $\left(\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^n=\dfrac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha}$; 4. $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3n}}{(1+i)^{4n}}=2.$

3.2.8. გამოსახეთ $\sin x$-ით და $\cos x$-ით:

1. $\sin4x$; 2. $\cos4x$; 3. $\sin5x$; 4. $\cos5x$; 5. $\sin6x$.

3.2.9. გამოსახეთ tgx-ით:

1. $tg3x$; 2. $tg5x$; 3. $tg6x$.

3.2.10. აჩვენეთ, რომ

1. $\cos^3x=\dfrac{1}{4}(3\cos x-\cos3x)$; 2. $\sin^3x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin3x)$; 3. $\sin^4x=\dfrac{1}{8}(\cos4x-4\cos2x+3)$;

4. $\cos^5x=\dfrac{1}{16}(\cos5x+5\cos3x+10\cos x)$.

3.2.11. იპოვეთ ფესვის ყველა მნიშვნელობა

1. $\sqrt[3]{1}$; 2. $\sqrt[4]{-4}$; 3. $\sqrt[6]{i}$; 4. $\sqrt[6]{64}$; 5. $\sqrt[3]{1+i}$; 6. $\sqrt[3]{(1+i)^3}$; 7. $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$; 8. $\sqrt{3-4i}$; 9. $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$;

10. $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$; 11. $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; 12. $\sqrt[3]{2-2i}$; 13. $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; 14. $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$; 15. $\sqrt[6]{1}$.

3.2.12. გამოსახეთ რადიკალებში

1. $\cos\frac{2\pi}{3}$; 2. $\sin\frac{2\pi}{3}$; 3. $\cos\frac{4\pi}{5}$; 4. $\sin\frac{4\pi}{5}$.

3.2.13. შესაძლებელია თუ არა, რომ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვები იყოს $2+3i$ და $1-i$, პასუხი დაასაბუთეთ.

3.2.14. შეადგინეთ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება თუ ცნობილია, რომ მისი ერთერთი ფესვის მნიშვნელობაა:

1. $(1+3i)(5-7i)$; 2. $\frac{3+i}{2-i}$; 3. $\frac{1+i}{1-i}$; 4. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

3.2.15. ამოხსენით განტოლება

1. $(z+1)^n+(z-1)^n=0$; 2. $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; 3. $(z+i)^n+(z-i)^n=0$; 4. $(z+5i)^n-(z-5i)^n=0$;

5. $(z+2)^n-(z-2)^n=0$; 6. $(z+3i)^n+i(z-3i)^n=0$.

3.2.16. კომპლექსურ სიბრტყეზე მონახეთ შემდეგი კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი წერტილები

1. $1+i$; 2. $2-i$; 3. $-4+5i$; 4. $-7-5i$; 5. $5+0i$; 6. $0i-9$; 7. $5i$; 8. $-8i$; 9. $-1-i\sqrt{3}$; 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

3.2.17. იპოვეთ კომპლექსური რიცხვები, რომლებიც შეესაბამებიან:

1. იმ კვადრატის წვეროებს, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია, მისი გვერდის სიგრძე 3-ის ტოლია და ერთი გვერდი ნამდვილი ღერძის პარალელურია

2. იმ წესიერი სამკუთხედის წვეროებს, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია, მისი ერთი გვერდი ნამდვილი ღერძის პარალელურია და ამ გვერდის მოპირდაპირე წვერო წარმოსახვით ღერძზე ძევს. ამასთან ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია r

3. წესიერი $n-$კუთხედის წვეროებს, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია და ერთ-ერთი წვეროა $(1{,}0)$ წერტილი.

3.2.18. როგორ არიან განლაგებული კომპლექსურ სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან:

1. z_1, z_2, z_3 კომპლექსურ რიცხვებს, თუ

$$z_1+z_2+z_3=0 \quad \text{და} \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0;$$

2. z_1, z_2, z_3, z_4 კომპლექსურ რიცხვებს, თუ

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0 \quad \text{და} \quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|\neq 0.$$

3.2.19. კომპლექსურ სიბრტყეზე აღწერეთ იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა შესაბამისი კომპლექსური რიცხვებისათვის:

1. $|z|=1$; 2. $r=2, \varphi=\frac{\pi}{4}$; 3. $r\le 4$; 4. $r\ge 7$; 5. $r\le 8$; 6. $4<r\le 7$; 7. $\frac{\pi}{6}$; 8. $\frac{\pi}{4}\le\varphi<\frac{\pi}{2}$;

9. $0<\varphi<\frac{3\pi}{2}$; 10. $\operatorname{Re} z>0$; 11. $\operatorname{Im} z\le 4$; 12. $1\le\operatorname{Re} z\le 2$; 13. $|\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z|<2$;

14. $|z-1|+|z+1|=3$; 15. $\operatorname{Re}\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$; 16. $|z-i|+|z+i|<4$; 17. $|z+2-3i|>2$; 18. $1<|z-2+i|<4$;

19. $|z+1|<|z-1|$.

3.2.20. რა ტრაექტორია აღიწერება $\frac{1}{z}$ წერტილის მიერ, როცა z გაირბენს წრეწირს ცენტრით $a+bi$ წერტილი და რადიუსით r.

3.2.21. რა ტრაექტორიას აღწერს წერტილი z^2, როცა z წერტილი შემოივლის $-1-i,$ $2-i,\ 2+2i,\ -1+2i$ წვეროების მქონე კვადრატის პერიმეტრს.
3.2.22. დაამტკიცეთ შემდეგი იგივეობა და გაარკვიეთ მისი გეომეტრიული შინაარსი

$$\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right).$$

3.2.23. კომპლექსური სიბრტყის რომელი წერტილებისათვის სრულდება ტოლობა:
1. $\left|\sqrt{2a+b}+i\sqrt{a+2b}\right|=\sqrt{3};$ 2. $\left|\sqrt{a^2+4}+i\sqrt{b-4}\right|=\sqrt{20}.$

3.2.24. კომპლექსური სიბრტყის A და B წერტილები $z_1=6+3i$ და $z_2=3-4i$ კომპლექსურ რიცხვებს შეესაბამებიან. შეადგინეთ AOB კუთხის ბისექტრისის განტოლება.
3.2.25. პარალელოგრამის A, B და C წვეროები $z_1,$ z_2 და z_3 კომპლექსურ რიცხვებს შეესაბამებიან. იპოვეთ პარალელოგრამის მეოთხე, B წვეროს მოპირდაპირე, წვეროს შესაბამისი კომპლექსური რიცხვი.
3.2.26. იპოვეთ კვადრატის ორი მოპირდაპირე წვეროს შესაბამისი კომპლექსური რიცხვები თუ ცნობილია, რომ მისი დანარჩენი ორი წვეროს შესაბამისი კომპლექსური რიცხვებია z და w.
3.2.27. წესიერი $n-$კუთხედის ორი მეზობელი წვეროს შესაბამისი კომპლექსური რიცხვებია z_1 და z_2. იპოვეთ ამ მრავალკუთხედის დანარჩენი წვეროების შესაბამისი რიცხვები.

§. 3. $n-$ური რიგის ფესვი ერთიდან

ვიტყვით, რომ $1-$დან $n-$ური რიგის ε ფესვი ეკუთვნის l მაჩვენებელს $(l\le n)$, თუ l არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\varepsilon^l=1.$

$1-$დან $n-$ური რიგის ε ფესვს ეწოდება პირველადი ფესვი, თუ იგი ეკუთვნის $n-$მაჩვენებელს ანუ $\varepsilon^n\neq 1.$

3.3.1. გამოსახეთ რადიკალებში $1-$დან $n-$ური რიგის ε ფესვები, თუ

$$n=2,\ 3,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24.$$

3.3.2. იპოვეთ $1-$დან $n-$ური რიგის ყველა ფესვის ჯამი და ნამრავლი.
3.3.3. აჩვენეთ, რომ:
1. $\sqrt[n]{1}=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\},$ სადაც $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n};$

2. $\varepsilon_k={\varepsilon_1}^k, k=0,1,2\ldots n-1;$ 3. $\varepsilon_k\varepsilon_l=\begin{cases}\varepsilon_{k+l}, k+l<n\\ \varepsilon_{k+l-n}, k+l\ge n\end{cases},\ k,l=0,1\ldots n-1.$

3.3.4. იპოვეთ $1-$დან $n-$ური რიგის ყველა პირველადი ფესვი, თუ: $n=2,3,4,5,6,8,12,16,24$
3.3.5. რომელ მაჩვენებელს მიეკუთვნება 1-დან n-ური რიგის თითოეული ფესვი, თუ: $n=15;$ $n=20.$
3.3.6. იპოვეთ $\sqrt[600]{1}-$ყველა ის ფესვი, რომელიც მიეკუთვნება მაჩვენებელს 6.
3.3.7. არის თუ არა $1-$დან რომელიმე რიგის ფესვი რიცხვი $\dfrac{2+i}{2-i}.$
3.3.8. აჩვენეთ, რომ $1-$დან $n-$ური რიგის ε ფესვი პირველადია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3\ldots\varepsilon^{n-1},\varepsilon^n=1$ რიცხვები წყვილწყვილად განსხვავებულები არიან.
3.3.9. აჩვენეთ, რომ:
1. $\varepsilon^l=1\Leftrightarrow l/n;$
2. $1-$დან $n-$ური რიგის ε ფესვი ეკუთვნის l მაჩვენებელს მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $(l,n)=1.$

3.3.10. იპოვეთ $1-$დან $n-$ური რიგის ყველა ფესვის $k-$ური ხარისხების ჯამი.

3.3.11. იპოვეთ $\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k$, სადაც ε არის $1-$დან $2n-$რიგის პირველადი ფესვი.

3.3.12. აჩვენეთ, რომ:

1. $1-$დან $n-$ური რიგისა და $1-$დან $m-$ური რიგის ფესვთა ნამრავლი არის $1-$დან $nm-$რიგის ფესვი;
2. $1-$დან $n-$ური რიგის პირველადი ფესვისა და $1-$დან $m-$ური რიგის პირველადი ფესვის ნამრავლი არის $1-$დან nm რიგის პირველადი ფესვი თუ $(n,m)=1$.

§4. ზოგიერთი ჯამისა და ნამრავლის გამოთვლა კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით

3.4.1. გამოთვალეთ ჯამი:

1. $1-C_n^{\ 2}+C_n^{\ 4}-C_n^{\ 6}+\Lambda$; 2. $1+C_n^{\ 1}+C_n^{\ 2}+\Lambda$; 3. $C_n^{\ 1}-C_n^{\ 3}+C_n^{\ 5}-C_n^{\ 7}+\Lambda$; 4. $1+C_n^{\ 4}+C_n^{\ 8}+\Lambda$;

5. $C_n^{\ 1}+C_n^{\ 5}+C_n^{\ 9}+\Lambda$; 6. $C_n^{\ 1}-\frac{1}{3}C_n^{\ 3}+\frac{1}{9}C_n^{\ 5}-\frac{1}{27}C_n^{\ 7}+\Lambda$; 7. $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\Lambda+n\varepsilon^{n-1}$, სადაც ε არის $1-$დან $n-$ური რიგის ფესვი.

3.4.2. დაამტკიცეთ, რომ:

1. $1+C_n^{\ 3}+C_n^{\ 6}+\Lambda=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$; 2. $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\Lambda=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

3. $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\Lambda=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

3.4.3. ვთქვათ, ε არის $1-$დან $n-$ური რიგის ფესვი. იპოვეთ შემდეგი ჯამის მნიშვნელობა:

1. $\sum_{k=1}^{n}k^2\varepsilon^{k-1}$; 2. $\sum_{k=1}^{n}k^3\varepsilon^{k-1}$.

3.4.4. დაამტკიცეთ, რომ:

1. $$\cos x+\cos 2x+\Lambda+\cos nx=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},\ x\neq 2k\pi, k\in Z;$$

2. $$\sin x+\sin 2x+\Lambda+\sin nx=\frac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},\ x\neq 2k\pi, k\in Z;$$

3. $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$;

4. $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$; 5. $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{5\pi}{n}+\Lambda+\cos\frac{2n-1}{n}\pi=0$;

6. $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}+\Lambda+\sin\frac{2n-1}{n}\pi=0$.

3.4.5. აჩვენეთ, რომ:

1. $\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{2n+1}+1\right)=\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$; 2. $\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; 3. $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$;

4. $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

§5. დამატებითი ამოცანები

3.5.1. აჩვენეთ, რომ

1. $(1+i)^{8n}=2^{4n}, n\in Z;$ 2. $(1+i)^{4n}=(-1)^n 2^{2n}, n\in Z.$

3.5.2. დაამტკიცეთ:

1. $|z_1\pm z_2|\le |z_1|+|z_2|;$

2. $\big||z_1|-|z_2|\big|\le |z_1\pm z_2|;$

3. $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow$ z_1 და z_2 რიცხვების სესაბამისი რადიუსვექტორები ერთიდაიმავე მიმართულებისაა;

4. $|z_1+z_2|=\big||z_1|-|z_2|\big|\Leftrightarrow$ z_1 და z_2 რიცხვების შესაბამის რადიუს ვექტორებს ურთიერთ საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ.

3.5.3. დაამტკიცეთ შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$|z_1-z_2|\le \big||z_1|-|z_2|\big|+\min(|z_1|,|z_2|)|\arg z_1-\arg z_2|,$ რა შემთხვევაში ექნება ადგილი ტოლობას.

3.5.4. აჩვენეთ, რომ

$$1.\ \cos nx=\sum_{k=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}x\sin^{2k}x;\quad 2.\ \sin nx=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}x\sin^{2k+1}x.$$

3.5.5. აჩვენეთ, რომ თუ

$\sqrt[n]{z}=\{z_1,z_2,\Lambda\ ,z_n\},$ მაშინ $\sqrt[n]{\overline{z}}=\{\overline{z_1},\overline{z_2},\Lambda\ ,\overline{z_n}\}.$

3.5.6. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

1. $\sqrt[n]{z_1^n z_2}=z_1\sqrt[n]{z_2};$ 2. $\sqrt[n]{-z_1^n z_2}=-z_1\sqrt[n]{z_2};$

3. $\sqrt[n]{z}$ სიმრავლისა და $\sqrt[n]{-z}$ სიმრავლის გაერთიანება არის $\sqrt[2n]{z^2}$ სიმრავლე.

3.5.7. ჭეშმარიტია თუ არა შემდეგი ტოლობა

$$\sqrt[nm]{z^m}=\sqrt[n]{z}, m\ \phi\ 1.$$

3.5.8. დაამტკიცეთ, რომ

1. $1-$დან $n-$ური რიგის ფესვების G_n სიმრავლე $n-$ური რიგის ციკლურ ჯგუფს წარმოადგენს

2. ყოველი $n-$ური რიგის G ციკლური ჯგუფი იზომორფულია G_n-ის.

3.5.9. აჩვენეთ, რომ თუ ε არის $1-$დან $n-$ური რიგის პირველადი ფესვი, მაშინ $\overline{\varepsilon}$ -იც $1-$დან $n-$ური რიგის პირველადი ფესვია.

3.5.10. დაამტკიცეთ, რომ თუ $(m,n)=1$, მაშინ: ε არის $1-$დან $nm-$რიგის პირველადი ფესვი მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა ε წარმოადგენს $1-$დან $n-$ური რიგის პირველადი ფესვისა და $1-$დან $m-$ური რიგის პირველადი ფესვის ნამრავლს.

3.5.11. განვიხილოთ ეილერის $\phi(n)$ ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ:

1. $1-$დან $n-$ური რიგის პირველადი ფესვების რაოდენობა $\varphi(n)-$ის ტოლია;

2. თუ $(m,n)=1$, მაშინ $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n);$

3. $\varphi(p)=p-1,$ თუ $p-$მარტივი რიცხვია;

4. $\varphi(p^n)=p^n-p^{n-1},$ თუ $p-$მარტივი რიცხვია;

5. თუ $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\Lambda\ p_l^{k_l}$, სადაც $p_1,p_2,\Lambda\ ,p_{l-}$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული მარტივი რიცხვებია, მაშინ $\varphi(n)=n\prod_{k=1}^{l}\frac{p_k-1}{p_k}.$

3.5.12. დაამტკიცეთ, რომ $1-$დან $n-$ური რიგის ε_k ფესვის მაჩვენებელი l გამოითვლება ფორმულით: $l=\frac{n}{(n,k)}.$

3.5.13. იპოვეთ $1-$დან $n-$ური რიგის ε ფესვის მაჩვენებელი, თუ ცნობილია, რომ ε^k მიეკუთვნება $l-$მაჩვენებელს.

3.5.14. $\sum(n)-$ ით ავღნიშნოთ $1-$დან $n-$ური რიგის ყველა პირველადი ფესვის ჯამი. აჩვენეთ, რომ:

1. $\sum(1)=1$; 2. $\sum(p)=-1$, სადაც $p-$ მარტივი რიცხვია;

3. $\sum(p^k)=0$, სადაც $p-$ მარტივი რიცხვია და $k>1$;

4. $\sum(nm)=\sum(n)\sum(m)$, თუ $(n,m)=1$.

3.5.15. დაამტკიცეთ, რომ:

1. $2^{2m}\cos^{2m}x=2\sum\limits_{i=0}^{m-1}C_{2m}^{i}\cos 2(m-i)x+C_{2m}^{m}$;

2. $2^{2m}\cos^{2m+1}x=\sum\limits_{i=0}^{m}C_{2m+1}^{i}\cos(2m-2i+1)x$;

3. $2^{2m}\sin^{2m}x=2\sum\limits_{i=0}^{m-1}(-1)^{m+i}C_{2m}^{i}\cos 2(m-i)x+C_{2m}^{m}$;

4. $2^{2m}\sin^{2m+1}x=\sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^{m+i}C_{2m+1}^{i}\sin(2m-2i+1)x$;

5. $\dfrac{\sin mx}{\sin x}=(2\cos x)^{m-1}-C_{m-2}^{1}(2\cos x)^{m-3}+C_{m-3}^{2}(2\cos x)^{m-5}-\Lambda$.

3.5.16. გამოთვალეთ ჯამი

1. $1+a\cos x+a^2\cos 2x+\Lambda+a^n\cos nx$; 2. $\cos x+C_n^1\cos 2x+\Lambda+C_n^n\cos(n+1)x$;

3. $\sin x+C_n^1\sin 2x+\Lambda+C_n^n\sin(n+1)x$; 4. $\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\Lambda+n\sin nx$;

5. $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\Lambda+n\cos nx$; 6. $\sin^2 x+\sin^2 3x+\Lambda+\sin^2(2n-1)x$;

3.5.17. აჩვენეთ, რომ

1. $\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\Lambda+x^n\cos(\alpha+n\beta)+\Lambda=\dfrac{\cos\alpha-x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2}$;

2. $\sin\alpha+x\sin(\alpha+\beta)+x^2\sin(\alpha+2\beta)+\Lambda+x^n\sin(\alpha+n\beta)+\Lambda=\dfrac{\sin\alpha-x\sin(\alpha-\beta)}{1-2x\sin\beta+x^2}$;

3.5.18. კომპლექსურ სიბრტყეზე გამოსახეთ სიმრავლე ყველა იმ წერტილებისა, რომელთა შესაბამისი z კომპლექსური რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda,\ \text{სადაც}\ \lambda>0.$$

3.5.19. დაამტკიცეთ, რომ წილად-წრფივ ასახვას

$$\omega=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc=1$$

ნამდვილი წრფე გადაჰყავს მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $a,b,c,d\in R$.

3.5.20. დაამტკიცეთ, რომ ყველა იმ წილად-წრფივ ასახვას, რომელსაც ზედა ნახევარსიბრტყე გადაჰყავს ერთეულოვან ღია წრეში, ცენრტით კოორდინატთა სათავეში, აქვს სახე:

$\omega=a\dfrac{z-b}{z-\bar{b}}$, სადაც $|a|=1,\operatorname{Im}b>0$.

3.5.21. დაამტკიცეთ, რომ ყველა იმ წილად-წრფივ ასახვას, რომელსაც ერთეულოვან ღია წრე, ცენრტით კოორდინატთა სათავეში, გადაჰყავთ თავის თავში აქვს სახე:

$\omega=a\dfrac{z-b}{1-z\bar{b}}$, სადაც $|a|=1,|b|<1$.

3.5.22. გამოარკვიეთ $\omega=z^n, n\geq 2$ ასახვის გეომეტრიული შინაარსი.

პასუხები:

3.1.1. 1. $22+3i$; 2. $-38+3i$; 3. $-20+18i$; 4. $7-5i$; 5. $10{,}3+2{,}1i$; 6. $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; 7. $3-3i$; 8. $\frac{123}{29}-\frac{61}{29}i$; 9. $5+2i$; 10. $-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}i$; 11. $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; 12. $240i$. **3.1.2.** 1. $-29-15i$; 2. $10-6i$; 3. 7; 4. $\frac{29}{60}-\frac{11}{60}i$; 5. $-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$; 6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. **3.1.3.** 1. $\left(\frac{13}{7},-\frac{11}{7}\right)$; 2. $\left(\frac{30}{13},\frac{29}{13}\right)$; 3. $\left(4,-\frac{7}{3}\right)$; 4. $(2,2)$; 5. $\left(-\frac{55}{156},\frac{9}{26}\right)$.
3.1.4. 1; i; 1; $(-1)^n$; $(-1)^n i^n$; i; $\frac{(1-i)(i^n-1)}{2}$; -1. **3.1.5.** 1. $\left(\frac{i}{4},4+5i\right)$; 2. $\left(-\frac{7}{106}+\frac{78}{53}i,\frac{142}{53}-\frac{47}{53}i\right)$; 3. $\left(-\frac{167}{221}-\frac{313}{221}i,-\frac{116}{221}+\frac{5}{221}i\right)$; 4. $\left(\frac{5}{32}-\frac{11}{32}i,-\frac{11}{32}+\frac{3}{32}i\right)$. **3.1.6.** 1. -3; 2. $-\frac{11}{13}+\frac{4\sqrt{3}}{13}i$; 3. $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$; 4. $\frac{361}{377}+\frac{76}{377}i$. **3.1.7.** 1. $\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 2. $-\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+4}}{2}\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-4}}{2}i$;
3. $-\frac{\sqrt{2\sqrt{65}+14}}{2}\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{65}-14}}{2}i$; 4. $\frac{6\pm\sqrt{2\sqrt{73}-6}}{4}+\frac{4\pm\sqrt{2\sqrt{73}+6}}{4}$;
5. $\frac{4\pm\sqrt{2\sqrt{109}-6}}{2}\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{109}+6}}{2}i$. **3.1.8.** 1. $a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)$; 2. a^3+b^3;
3. $(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+12abc$. **3.1.9.** 1. $\{1\pm 2i,-4\pm 2i\}$, $(x^2-2x+3)(x^2+8x+20)$; 2. $\{2\pm i\sqrt{2},-2\pm 2i\}$, $(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$;
3. $\left\{\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right\}$, $(x^2-\sqrt{7}x+2)(x^2+\sqrt{7}x+2)$; 4. $\{\pm 4\pm i\}$, $(x^2-8x+17)(x^2+8x+17)$.
3.1.12. $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i$ რიცხვებისათვის: $z_1+z_2\in R$, თუ $b_1+b_2=0$; $z_1z_2\in R$, თუ $a_1b_2+a_2b_1=0$. **3.2.1.** 1. $\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ$; 2. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3. $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 4. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;
5. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 6. $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; 7. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
8. $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 9. $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 10. $5\left(\cos arctg\frac{4}{3}-i\sin arctg\frac{4}{3}\right)$;
11. $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; 12. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 13. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 14. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;
15. $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; 16. $\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$; 17. $2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$;
18. $2\left(\cos\frac{35\pi}{18}+i\sin\frac{35\pi}{18}\right)$; 19. $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$.. **3.2.2.** 1. 2^{50}; 2. 2^{150}; 3. -2^{30}; 4. $(2+\sqrt{3})^{24}$;
5. $-2^{12}(2-\sqrt{3})^6$; 6. -2^6; 7. $2^{15}i$; 8. i; 9. $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$; 10. 1; 11. $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$;
12. $\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$. **3.2.3.** 1. $-(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$; 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; 3. i;
4. $-\frac{3}{5}(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)$. **3.2.4.** ჯერ აჩვენეთ, რომ $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

3.2.6. 1. $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}+\varphi\right)\right)$; 2. $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$;

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right)$. **3.2.8.** 1. $4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$;

2. $\cos^4 x - 6\cos x\sin x + \sin^4 x$; 3. $5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$;

4. $\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$; 5. $6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$.

3.2.9. 1. $\frac{3tgx - tg^3x}{1-3tgx}$; 2. $\frac{5tgx-10tg^3x+tg^5x}{1-10tg^2x+5tg^4x}$; 3. $\frac{2\left(3tgx-10tg^3x+3tg^5x\right)}{1-15tg^2x+15tg^4x-tg^6x}$.

3.2.11. 1. $\left\{1,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$; 2. $\{1\pm i,-1\pm i\}$; 3. $\left\{\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}, k=0,1,2,3,4,5\right\}$; 4. $2\sqrt[6]{1}$;

5. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2\sqrt{3}}+i\sqrt{2\sqrt{3}}\right),\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}(i-1),-\frac{1}{6}\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\right\}$;

6. $\left\{1+i,\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right),\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}+i\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)\right\}$;

7. $\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{8k-1}{32}\pi+i\sin\frac{8k-1}{32}\pi\right),k=0,1,\ldots,7\right\}$; 8. $\{2-i,-2+i\}$;

9. $\left\{\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{36}\pi+i\sin\frac{24k+19}{36}\pi\right),k=0,1,2\right\}$;

10. $\left\{\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{24k+13}{48}\pi+i\sin\frac{24k+13}{48}\pi\right),k=0,1,2,3\right\}$;

11. $\left\{\left(\cos\frac{6k-1}{30}\pi+i\sin\frac{6k-1}{30}\pi\right),k=0,1,2,\ldots,9\right\}$;

12. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\ }\left(2-\sqrt{3}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right),1-i\right\}$; 13. $\left\{\frac{3}{2}\left(\pm\sqrt{3}-i\right)\right\}$;

14. $\{\pm\sqrt{3}+i,-2i\}$; 15. $\left\{\pm1,\pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3.2.12. 1. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; 2. $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **3.2.13.** არა. **3.2.14.** 1. $x^2-52x+760=0$; 2. $x^2-2x+2=0$;

3. $x^2+1=0$; 4. $x^2-\left(\sqrt{3}+1\right)x+2=0$. **3.2.17.** 1. $\pm\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}i$; 2. $3i,\pm\frac{3}{2}(1-i)$. **3.2.18.** 1. წესიერი სამკუთხედის წვეროები, ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში; 2. რომბის წვეროები, ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში. **3.2.19.** 8. კუთხე; 13. სიბრტყის ნაწილი მოთავსებული $x+y=\pm1$ წრფეებს შორის $(z=x+iy)$; 14. ელიფსი $\frac{4x^2}{9}+\frac{4y^2}{5}=1$; 15. $\left\{z=x+iy:(x-1)^2+y^2<1\right\}$; 16. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ – ელიფსით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილი; 19. წარმოსახვითი ღერძის მარცხენა ღია ნახევარსიბრტყე.

3.2.23. 1. $-1+2i$ და $2-i$ წერტილებზე გამავალი წრფის წერტილებისათვის; 2. $y=-x^2+20, y\geq 4$ – პარაბოლის წერტილებისათვის. **3.2.24.** $y=\left(2-\sqrt{5}\right)x$.

3.2.25. $z_4=z_1-z_2+z_3$. **3.2.26.** $\frac{z+w}{2}\pm i\frac{z-w}{2}$. **3.2.27.** $z_k=z_0+(z_1-z_0)\varepsilon_k, k=1,2,\ldots,n$, სადაც $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ და $z_0=\frac{1}{2}\left((z_1+z_2)+ictg(z_2-z_1)\right)$ – წარმოადგენს მრავალკუთხედის ცენტრს.

3.3.1. $\{\pm 1\}$;

$\left\{1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right), \pm\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right\}$; $\left\{\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}$;

$\left\{\pm i, \pm\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right), \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right), \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\right\}$;

$\left\{\pm 1, \pm i, \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i), \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right\}$;

$\left\{\pm 1, \pm i, \frac{1}{2}\left(\pm 1 \pm i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}+i\right), \frac{1}{4}\left(\pm\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \pm i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right), \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i), \frac{1}{4}\left(\pm\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \pm i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right)\right\}$.

3.3.2. 1. $(-1)^n$; 2. 0, თუ $n>1$. შენიშვნა: $1-$ისა და $(-1)-$გან განსხვავებული თანამამრავლები დავაჯგუფოთ ურთიერთ შებრუნებულ წყვილებად.

3.3.4. $\{-1\}$; $\left\{\frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)\right\}$; $\{\pm i\}$; $1-$ის გარდა ყველა ფესვი; $\left\{\frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)\right\}$; $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\right\}$;

$\left\{\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3} \pm i\right)\right\}$; $\left\{\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right\}$;

$\left\{\frac{1}{4}\left(\pm\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \pm i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right), \frac{1}{4}\left(\pm\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \pm i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right)\right\}$. **3.3.6.** $\varepsilon_{100} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ და $\varepsilon_{500} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

3.3.7. არა. შენიშვნა: ეს რიცხვი წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული სახით და აჩვენეთ, რომ მას, როგორც $C^{\bullet}$ მულტიპლიკაციური ჯგუფის ელემენტს გააჩნია უსასრულო რიგი.

3.3.10. n, როცა n/k და $0-$სხვა შემთხვევაში. **3.3.11.** $\frac{2}{1-\varepsilon}$.

3.4.1. 1. $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{2}$; 2. 2^n; 3. $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$; 4. $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; (შენიშვნა: გამოიყენეთ პუნქტი 1. და შემდეგი ტოლობები: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$); 5. $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$; 6. $2^n 3^{\frac{1-n}{2}}\sin\frac{n\pi}{6}$;

7. ჯამი ტოლია: $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, როცა $\varepsilon \neq 1$ (საძიებელი ჯამი გავამრავლოთ $(1-\varepsilon)-$ზე) და $\frac{n(n+1)}{2}$, როცა $\varepsilon = 1$. **3.4.3.** 1. $\begin{cases} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \varepsilon = 1 \\ \frac{n^2(\varepsilon-1)-2n}{(1-\varepsilon)^2}, \varepsilon \neq 1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \varepsilon = 1 \\ \frac{n^3(1-\varepsilon)^2+3n(n-1)(1-\varepsilon)+6n}{(1-\varepsilon)^3}, \varepsilon \neq 1 \end{cases}$.

3.4.5. 1. ტოლობის მარჯვენა მხარის მრიცხველი დავშალოთ ნამრავლად $\prod_{k=1}^{2n}(x-\varepsilon_k)$, სადაც $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. $x-\varepsilon_k$ და $x-\varepsilon_{n-k} = x-\overline{\varepsilon_k}$ თანამამრავლები გავაერთიანოთ;

3. შევკვეცოთ 1.-ლი ტოლობა $(x^2-1)-$ზედ და მიღებული გამოსახულება ჩავწეროთ $x=1-$თვის.

3.5.3. გამოარკვიეთ $\min(|z_1|,|z_2|)|\arg z_1 - \arg z_2|$ სიდიდის გეომეტრიული აზრი. ტოლობა მიიღწევა მაშინ, როცა $\arg z_1 = \arg z_2$ ან როცა მოცემულ რიცხვთაგან ერთერთი ნულის ტოლია. **3.5.6.** განმარტებით $zA = \{za : a \in A\}$. **3.5.7.** არასწორია: ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგომი სიმრავლეები სხვადასხვა რაოდენობა ელემენტებისაგან

შედგებიან. **3.5.9.** ε და $\overline{\varepsilon}$ ერთნაირი რიგის მქონე ელემენტებია. **3.5.13.** თუ $\varepsilon-$ის მაჩვენებელია m, მაშინ ε^k-ს მაჩვენებელი იქნება $l=\frac{m}{(m,k)}$, ესე იგი $m=l(m,k)$.

3.5.15. 1.,2.,3.,4.$-$ შენიშვნა: თუ $z=\cos x+i\sin x$, მაშინ $\cos^{2m}x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{2m}$; 5. რადგანაც $\sin(k+1)x+\sin(k-1)x=2\cos x\sin kx$, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას: $A_{k+1}=tA_k-A_{k-1}$, სადაც $A_k=\frac{\sin kx}{\sin x}$ და $t=2\cos x$. გამოიყენეთ ინდუქციის მეთოდი $k-$ს მიმართ.

3.5.16. 6. შენიშვნა: $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$. **3.5.18.** $\lambda=1-$თვის $-$წრფე, რომელიც z_1,z_2 ბოლოების მქონე მონაკვეთის შუა წერტილზე, მის მართობულად, გადის; $\lambda\neq 1-$თვის $-$წრეწირი, რომლის დიამეტრის ბოლოებია $\frac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda}$ და $\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ წერტილები.

თავი IV. გადანაცვლება და ჩასმა

§ 1. გადანაცვლება

n-რიგის $1, 2, 3,\Lambda , n$ გადანაცვლებას ეწოდება მთავარი, მასში ელემენტები მათი ნომრის მიხედვით არიან დალაგებულნი.

ამბობენ, რომ $a_1, a_2, a_3,\Lambda , a_n$ გადანაცვლების a_k და a_m ელემენტები ადგენენ ინვერსიას (უწესრიგობას), თუ:

$$a_k > a_m \text{ და } k < m.$$

გადანაცვლებას ეწოდება ლუწი გადანაცვლება, თუ ის ინვერსიათა ლუწ რაოდენობას შეიცავს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, მას ეწოდება კენტი გადანაცვლება. მთავარი გადანაცვლება ლუწია.

გადანაცვლების ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის ადგილების ურთიერთ-შეცვლას ტრანსპოზიცია ეწოდება.

გადანაცვლებაში ყოველი ორი ელემენტის ტრანსპოზიცია ცვლის მის ლუწ-კენტოვნებას (წყვილადობას).

ყველა შესაძლო n-რიგის გადანაცვლებებს შორის ნახევარი ლუწი და ნახევარი კენტი გადანაცვლებაა.

4.1.1. იპოვეთ ინვერსიათა რიცხვი შემდეგ გადანაცვლებაში

1. $2,3,5,4,1$; 2. $6,3,1,2,5,4$; 3. $1,9,6,3,2,5,4,7,8$; 4. $7,5,6,4,1,3,2$;

5. $1,3,5,7,\Lambda , 2n-1, 2,4,6,8,\Lambda , 2n$; 6. $2,4,6,8,\Lambda , 2n, 1,3,5,7,\Lambda , 2n-1$

4.1.2. შემდეგ გადანაცვლებაში, იპოვეთ ინვერსიათა რიცხვი და დაადგინეთ n-ის რა მნიშვნელობისთვისაა ლუწი ან კენტი

1. $1,4,7,K ,3n-2,\ 2,5,8,K ,3n-1, 3,6,9,K ,3n$; 2. $3,6,9,K ,3n,\ 2,5,8,K ,3n-1, 1,4,7,K ,3n-2$;

3. $2,5,8,K ,3n-1,\ 3,6,9,K ,3n,\ 1,4,7,K ,3n-2$; 4. $2,5,8,K ,3n-1,\ 1,4,7,K ,3n-2,\ 3,6,9,K ,3n$;

5. $1,5,9,K ,4n-3,\ 2,6,10,K ,4n-2,\ 3,7,11,K ,4n-1,\ 4,8,12,K ,4n$;

4.1.3. რომელ გადანაცვლებაში ქმნიან $1, 2, 3,\Lambda , n$ რიცხვები ინვერსიათა უდიდეს რაოდეპნობას, იპოვეთ ეს რაოდენობა

4.1.4. იპოვეთ ინვერსიათა რაოდენობა, რომელსაც ქმნის რიცხვი 1, თუ ის გადანაცვლების k-ურ ადგილზე დგას

4.1.5. იპოვეთ ინვერსიათა რაოდენობა, რომელსაც ქმნის რიცხვი n, თუ ის მთავარი გადანაცვლების k-ურ ადგილზე დგას

§ 2. ჩასმა

$A = \{1, 2, 3,\Lambda , n\}$ დალაგებული სიმრავლის ყოველი $\sigma(i) = a_i, 1 \le i \le n$, ურთიერთ ცალსახა ასახვას თავის თავზე, n-ური ხარისხის ჩასმა ეწოდება და ჩაიწერება სახით:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\,\Lambda & n \\ a_1 & a_2 & a_3\,\Lambda & a_n \end{pmatrix},$$

სადაც, $1 \le a_i \le n$ და $a_i \ne a_j, i \ne j$.

ჩასმას ეწოდება ლუწი, თუ მისი ზედა სტრიქონის შესაბამისი გადანაცვლება მთავარია, ხოლო ქვედა სტრიქონის შესაბამისი გადანაცვლება –ლუწი, ხოლო მას ეწოდება კენტი, თუ მისი ზედა სტრიქონის შესაბამისი გადანაცვლება მთავარია, ხოლო ქვედა სტრიქონის შესაბამისი გადანაცვლება –კენტი.

n-ური ხარისხის f და g გადანაცვლების $f \cdot g$ ნამრავლი (კომპოზიცია) ეწოდება გადანაცვლებას, რომელიც მიიღება მათი თანმიმდევრული შესრულების გზით, ანუ:

$$(f \cdot g)(i) = f(g(i)).$$

გამრავლების ოპერაციის მიმართ, n-ური ხარისხის ყველა გადანაცვლებათა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს, რომელსაც სიმეტრიული ჯგუფი ეწოდება და S_n-ით აღინიშნება.

4.2.1. იპოვეთ შემდეგი ჩასმის შებრუნებული ჩასმა

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

4.2.2. იპოვეთ შემდეგ გადანაცვლებათა ნამრავლი

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}^2$; 5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$

4.2.3. იპოვეთ A^{100}, სადაც $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

4.2.4. იპოვეთ A^{150}, სადაც $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

4.2.5. იპოვეთ $A \cdot B$ და $B \cdot A$ ნამრავლები, თუ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.6. იპოვეთ $A^{-1} \cdot B$ და $B \cdot A^{-1}$, თუ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.7. ამოხსენით განტოლება

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 2. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

4.2.8. იპოვეთ X ჩასმა შემდეგი ტოლობიდან $AXB = C$, სადაც $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ და $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

პასუხები:

4.1.1. 1. 5; 2. 8; 3. 13; 4. 18; 5. $n(n-1)/2$; 6. $n(n+1)/2$; **4.1.2.** 1. $3n(n-1)/2$ ინვერსია. გადანაცვლება ლუწია $n = 4k$ და $n = 4k+1$–თვის და კენტია $n = 4k+2$ და $n = 4k+3$–თვის, სადაც k ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია; 2. $3n(n+1)/2$ ინვერსია. გადანაცვლება ლუწია $n = 4k$ და $n = 4k+3$–თვის და კენტია $n = 4k+1$ და $n = 4k+2$–თვის, სადაც k ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია; 3. $n(3n+1)/2$ ინვერსია. გადანაცვლება ლუწია $n = 4k$ და $n = 4k+1$–თვის და კენტია $n = 4k+2$ და $n = 4k+3$–თვის, სადაც k ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია; 4. $n(3n-1)/2$ ინვერსია. გადანაცვლება ლუწია $n = 4k$ და $n = 4k+3$–თვის და კენტია $n = 4k+1$ და $n = 4k+2$–თვის,

სადაც k ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია; 5. $3n(3n-1)$ ინვერსია. გადანაცვლება, ნებისმიერი $n-$თვის, ლუწია; **4.1.3.** გადანაცვლებაში $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$. ინვერსიათა რაოდენობა ტოლია $C_n^2 = n(n-1)/2$; **4.1.4.** $k-1$; **4.1.5.** $n-k$

4.2.1. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

4.2.2. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; **4.2.3.** A; **4.2.4.** E იგიური ჩასმა; **4.2.5.** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ და

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; **4.2.6.** $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ და $B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

4.2.7. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **4.2.8.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

თავი № 5 დეტერმინანტი

§1. 2-ე და 3-ე რიგის დეტერმინანტი

მე-2-ე რიგის დეტერმინანტი

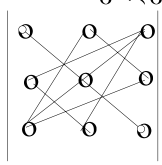
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ტოლია მისი მთავარი და დამხმარე დიაგონალებზე მდგომი ელემენტების ნამრავლების სხვაობისა.

მე-3-ე რიგის დეტერმინანტი კი ტოლია:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

გამოთვლების შესრულების დროს, მოსახერხებელია ე.წ. სამკუთხედების წესის გამოყენება, რომელიც შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სქემის სახით:

$\Delta =$ 

5.1.1. გამოთვალეთ

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 17 & 12 \\ 14 & -11 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 257 & 325 \\ -211 & 302 \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; 9. $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix} a^{\log_a b} & \log_a b \\ \log_b a & \dfrac{1}{b} \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$; 12. $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} tg\alpha & 1 \\ -1 & tg\alpha \end{vmatrix}$;

14. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^3+x+1 \end{vmatrix}$.

5.1.2. გამოთვალეთ

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

6. $\begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & a & 0 \\ 0 & l & 0 \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \\ 1+i & -i & 1+i \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \varepsilon = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$; 10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}, \varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

11. $\begin{vmatrix} 3 & \sin^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 3 & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 3 & \sin^2\delta & \cos^2\delta \end{vmatrix}$; 12. $\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

§2. $n-$ ური რიგის დეტერმინანტი. დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები

განვიხილოთ $n-$ ური რიგის კვადრატული ცხრილი (მატრიცა), ელემენტებით რაიმე $K-$ველიდან:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

ამ მატრიცის ელემენტებისაგან შევადგინოთ ყველა ისეთი $n-$თანამამრავლიანი ნამრავლები, რომ თითოეულ მათგანში, ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან, შედიოდეს თითო-თითო ელემენტი. მიღებულ ნამრავლებში თანამამრავლები ისე დავალაგოთ, რომ მათი პირველი ინდექსებისაგან შედგენილი გადანაცვლება იყოს მთავარი გადანაცვლება, ანუ ჰქონდეს სახე $(1,2,3,\ldots,n)$. ამგვარად, ასეთი ნამრავლის ზოგადი სახე იქნება: $a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n}$, სადაც $1\le k_i\le n,\ k_i\ne k_j, i\ne j$. ცხადია, რომ ასეთ ნამრავლთა რაოდენობა $n!$-ის ტოლია. ასეთნაირად მიღებულ, ყველა შესაძლო ნამრავლებისაგან შევადგინოთ ჯამი. ამასთან თითოეული შესაკრებს ნიშანი მივუწეროთ იმის მიხედვით თუ როგორია ამ წევრის მეორე ინდექსებისაგან შედგენილი $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ გადანაცვლების ლუწ-კენტოვნება.

ასეთნაირად მიღებულ ჯამს A მატრიცის დეტერმინანტი ($n-$ური რიგის დეტერმინანტი) ეწოდება. გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები: $|A|$ ან $\det(A)$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამრიგად, განმარტებით $|A|=\sum\limits_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}(-1)^{I(k_1,k_2,\ldots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$;

დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები:

1. ტრანსპონირებულ მატრიცთა დეტემინანტები ერთმანეთის ტოლია;
2. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) თითოეული ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;
3. დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონისათვის (სვეტისათვის) ადგილების შეცვლა დეტერმინანტის ნიშნის შეცვლას იწვევს;
4. დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ;
5. თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) ერთმანეთის პროპორციულია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;
6. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) თითოეული ელემენტი წარმოადგენს ორი შესაკრების ($n-$შესაკრების) ჯამს, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ტოლია ორი დეტერმინანტის ($n-$შესაკრების) ჯამისა რომელთაგან პირველში მოცემულ სტრიქონში დგას პირველი შესაკრებები, ხოლო მეორეში–მეორე შესაკრებები (და ასე შემდეგ $n-$ური შესაკრები);
7. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება თუ მის რომელიმე სტრიქონს (სვეტს) დავუმატებთ სხვა ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) პროპორციულ სტრიქონს (სვეტს).

დეტერმინანტის გაშლა $i-$ური სტრიქონის მიხედვით:

ადგილი აქვს ფორმულას

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\ 1\le i\le n.$$

სადაც $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ და M_{ij} წარმოადგენს a_{ij} ელემენტის შესაბამის მინორს.

5.2.1. გამოარკვიეთ, ქვემოთ მოყვანილი ნამრავლებიდან რომელი შედის შესაბამისი რიგის დეტერმინანტის გაშლაში და რა ნიშნით:

1. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; 2. $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; 3. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; 4. $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

5. $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$; 6. $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$; 7. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$; 8. $a_{12}a_{23}\Lambda\ a_{n-1,n}a_{n1}$;

9. $a_{12}a_{23}a_{34}\Lambda\ a_{n-1,n}a_{kk}$, $1\le k\le n$; 10. $a_{11}a_{2n}a_{3,n-1}\Lambda\ a_{n,2}$; 11. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\Lambda\ a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$;

12. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\Lambda\ a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

5.2.2. i და k რიცხვების მნიშვნელობები ისე შეარჩიეთ, რომ $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ ნამრავლი, შესაბამისი რიგის დეტერმინანტის გაშლაში, დადებითი ნიშნით შედიოდეს.

5.2.3. i, j და k რიცხვების მნიშვნელობები ისე შეარჩიეთ, რომ $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ ნამრავლი, შესაბამისი რიგის დეტერმინანტის გაშლაში, უარყოფითი ნიშნით შედიოდეს.

5.2.4. i და k რიცხვების მნიშვნელობები ისე შეარჩიეთ, რომ $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ ნამრავლი, შესაბამისი რიგის დეტერმინანტის გაშლაში, უარყოფითი ნიშნით შედიოდეს.

5.2.5. იპოვეთ 4-ე რიგის დეტერმინანტის განაშალის ყველა ის წევრი, რომელიც:

1. თანამამრავლად შეიცავს a_{32} ელემენტს და აქვს დადებითი ნიშანი;
2. თანამამრავლად შეიცავს a_{21} ელემენტს და აქვს უარყოფითი ნიშანი.

5.2.6. რა ნიშნით შედის $n-$ური რიგის დეტერმინანტის განაშალში: 1. მისი მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლი; 2. მისი დამხმარე დიაგონალის ელემენტების ნამრავლი.

5.2.7. იპოვეთ დეტერმინანტის ის წევრები, რომლებიც შეიცავენ x^4-ს, x^3-ს:

$$1).\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix};\quad 2).\begin{vmatrix} 2x & 1 & 3 & 5\\ 2 & 3x & 1 & 2\\ 4 & 1 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 4x\end{vmatrix}.$$

5.2.8. იპოვეთ n-ური რიგის დეტერმინანტის განაშალში ის ელემენტი, რომელიც a_{ij} ელემენტის სიმეტრიულია, დამხმარე დიაგონალის მიმართ.

5.2.9. როგორ შეიცვლებაბ n-ური რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა, თუ მის სვეტებს ჩავწერთ შებრუნებული თანმიმდევრობით.

5.2.10. როგორ შეიცვლებაბ n-ური რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა, თუ მის ყოველ ელემენტს შევცვლით დამხმარე დიაგონალის მიმართ სიმეტრიული ელემენტით.

5.2.11. როგორ შეიცვლებაბ n-ური რიგის დეტერმინანტის მნიშვნელობა, თუ მის ყოველ ელემენტს ჩავწერთ საპირისპირო ნიშნით.

5.2.12. 185, 518 და 851 რიცხვებიდან თითოეული 37-ზე იყოფა. აჩვენეთ, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5\\ 5 & 1 & 8\\ 8 & 5 & 1\end{vmatrix} \text{ გაიყოფა } 37-\text{ზე.}$$

5.2.13. 20604, 53227, 25755, 20927 და 289 რიცხვებიდან თითოეული 17–ზე იყოფა. აჩვენეთ, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4\\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5\\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9\end{vmatrix} \text{ გაიყოფა } 17-\text{ზე.}$$

5.2.14. $24026, 40262, 2624, 26240$ და 62402 რიცხვებიდან თითოეული $41-$ზე იყოფა. აჩვენეთ, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ გაიყოფა } 41-\text{ზე.}$$

5.2.15. გამოიყენეთ დეტერმინანტის განმარტება და გამოთვალეთ:

$$1.\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \Lambda & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \Lambda & 0 \end{vmatrix};\ 2.\begin{vmatrix} 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \Lambda & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda \\ a_{n1} & \Lambda & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};\ 3.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & n \end{vmatrix};\ 4.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\ \Lambda \\ 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};\ 5.\begin{vmatrix} 1 & a & a & \Lambda & a \\ 0 & 2 & a & \Lambda & a \\ 0 & 0 & 3 & \Lambda & a \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & a \end{vmatrix}.$$

5.2.16. დაამტკიცეთ

$$1.\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)\right);$$

$$2.\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta+\sin(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma+\sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha;$$

$$3.\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3;$$

$$4.\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)};$$

$$5.\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi,\ \text{თუ}\ a^2+b^2+c^2=1.$$

5.2.17. ლაპლასის თეორემის გამოყენებით, გამოთვალეთ:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -8 & -13 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

6. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; 9. $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$; 11. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; 12. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$;

14. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$; 15. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 16. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

5.2.18. გამოთვალეთ:

1. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 2\cos 2\beta & 2\sin 2\alpha \\ \cos 3\alpha & \sin 3\alpha & 3\cos 3\alpha & 3\sin 3\alpha \\ \cos 4\alpha & \sin 4\alpha & 4\cos 4\alpha & 4\sin 4\alpha \end{vmatrix}$; 11. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$; 14. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; 15. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$;

16. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n-1} & \ldots & b_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n & \ldots & b_n & b_n \end{vmatrix}$; 17. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3} & \ldots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \ldots & a_{2n-1,2n-2} & 0 & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \ldots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$;

18. $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \ldots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \ldots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \ldots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \ldots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \ldots & x_n^2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \ldots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

5.2.19. დაამტკიცეთ, რომ:

1. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)+2d$;

3. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix} = -4\left(x^2+y^2+z^2+u^2-2(xy+xz+xu+yz+yu=zu)\right)$;

4. ავღნიშნოთ A, B, C და $D-$თი მესამე რიგის დეტერმინანტები, რომლებიც მიიღებიან $\begin{pmatrix} a_1\, b_1\;\, c_1\, d_1 \\ a_2\, b_2\, c_2\, d_2 \\ a_3\, b_3\, c_3\, d_3 \end{pmatrix}$ მატრიცისაგან, თუ ამ მატრიცაში ამოვშლით შესაბამისად პირველ, მეორე, მესამე და მეოთხე სვეტებს. დაამტკიცეთ, რომ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC .$$

5.2.20. გაშალეთ:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}$ მეოთხე სვეტის მიხედვით; 2. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ პირველი სვეტის მიხედვით;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ მესამე სტრიქონის მიხედვით; 4. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ მესამე სტრიქონის მიხედვით; 5. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ მეორე სვეტის მიხედვით.

5.2.21. გამოთვალეთ $n-$ური რიგის $A=(a_{ij})$ დეტერმინანტი, თუ:

1. $a_{ij}=\min(i,j)$; 2. $a_{ij}=\max(i,j)$; 3. $a_{ij}=|i-j|$.

§. 3. დეტერმინანტის გამოთვლა მისი სამკუთხა სახეზე მიყვანის ხერხით

დეტერმინანტის თვისებების გამოყენებით, ზოგიერთი სახის დეტერმინანტი მიიყვანება ე. წ. სამკუთხა სახეზე, როცა მისი მთავარი (ან დამხმარე) დიაგონალის ქვემოთ (ან ზემოთ) მდგომი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია–ასეთი დეტერმინანტის მნიშვნელობა ტოლია დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლისა, სათანადო ნიშნით.

5.3.1. მიიყვანეთ სამკუთხა სახეზე და გამოთვალეთ

$$1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \Lambda & 1 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 1 & 1 & \Lambda & 0 \end{vmatrix};\ 2.\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \Lambda & x \\ x & a_2 & x & \Lambda & x \\ x & x & a_3 & \Lambda & x \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x & x & x & \Lambda & a_n \end{vmatrix};\ 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \Lambda & n \\ -1 & 0 & 3 & \Lambda & n \\ -1 & -2 & 0 & \Lambda & n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ -1 & -2 & -3 & \Lambda & 0 \end{vmatrix};\ 4.\begin{vmatrix} 1 & n & n & \Lambda & n \\ n & 2 & n & \Lambda & n \\ n & n & 3 & \Lambda & n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ n & n & n & \Lambda & n \end{vmatrix};$$

$$5.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \Lambda & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \Lambda & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \Lambda & n & n & n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ n & n & n & \Lambda & n & n & n \end{vmatrix};\ 6.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \Lambda & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 & 1 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1-n & 1 & 1 & \Lambda & 1 & 1 \\ -n & 1 & 1 & \Lambda & 1 & 1 \end{vmatrix};\ 7.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \Lambda & 2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 2 & 2 & 2 & \Lambda & 3 \end{vmatrix};$$

$$8.\begin{vmatrix} 1 & \Lambda & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \Lambda & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \Lambda & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_n-b_n & \Lambda & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix};\ 9.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ -x & x & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & -x & x & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & x \end{vmatrix};\ 10.\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \Lambda & a_{1n} \\ x_1 & x_1 & a_{23} & \Lambda & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \Lambda & a_{3n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_1 & x_2 & x_3 & \Lambda & x_n \end{vmatrix};\ 11.\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & x_n \end{vmatrix};$$

$$12.\begin{vmatrix} a & b & b & \Lambda & b \\ b & a & b & \Lambda & b \\ b & b & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & b & \Lambda & a \end{vmatrix};\ 13.\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \Lambda & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \Lambda & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \Lambda & x^{n-2} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \Lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

§. 4. დეტერმინანტის გამოთვლა წრფივი მამრავლის გამოყოფის ხერხით

დეტერმინანტი შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც მრავალწევრი მასში მონაწილე ერთი, ან რამდენიმე, ცვლადის მიმართ. ზოგჯერ შესაძლებელია დადგინდეს, რომ დეტერმინანტი იყოფა რამდენიმე მამრავლზე ერთდროულად და ე. ი. მათ ნამრავლზეც (იმ პირობით, რომ ეს მამრავლები დამოუკიდებლები არიან). ასეთ შემთხვევაში შესაძლებელი ხდება დეტერმინანტისა და ამ ნამრავლის განაყოფის მნიშვნელობის დადგენა, რაც მნიშვნელოვნად ამარტივებს დეტერმინანტის გამოთვლის პროცესს.

5.4.1. გამოთვალეთ, წრფივ მამრავლთა გამოყოფის გზით

1. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \Lambda & 1 \\ \Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda \\ 1 & 1 & 1 & \Lambda & n+1-x \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \Lambda & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \Lambda & a_n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda \\ a_0 & a_1 & a_2 & \Lambda & x \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \Lambda & n \\ 1 & x+1 & 3 & \Lambda & n \\ 1 & 2 & x+1 & \Lambda & n \\ \Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda \\ 1 & 2 & 3 & \Lambda & x+1 \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \Lambda & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \Lambda & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \Lambda & x_3^{n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda \\ 1 & x_n & x_n^2 & \Lambda & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ − ვანდერმონდის დეტერმინანტი.

§. 5. დეტერმინანტის გამოთვლა რეკურენტული დამოკიდებულების პოვნის ხერხით

ზოგიერთი სახის დეტერმინანტებისათვის შესაძლებელი ხდება რეკურენტული დამოკიდებულების პოვნა, რაც მნიშვნელოვნად ამარტივებს დეტერმინანტის გამოთვლის პროცესს.

განვიხილოთ რეკურენტული დამოკიდებულების ერთი კერძო შემთხვევა: ვთქვათ, რეკურენტულ დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} \;, n > 2 \;,$$

სადაც p და q მუდმივებია.

$p = 0$, $q \neq 0$ და $q = 0$, $p \neq 0$ შემთხვევები ტრივიალურია.

დაწვრილებით განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $p \neq 0$, $q \neq 0$. ვთქვათ α და β წარმოადგენს

$$x^2 - px + q = 0$$

განტოლების ფესვებს, მაშინ:

ა). როცა $\alpha \neq \beta$

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n \;; \qquad C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)},\; C_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha-\beta)} \;;$$

ბ). როცა $\alpha = \beta$

$$D_n = \alpha^n\big((n-1)C_1 + C_2\big); \quad C_1 = \frac{D_2 - \alpha D_1}{\alpha^2},\, C_2 = \frac{D_1}{\alpha} \,.$$

სადაც, $D_2 -$ ით და $D_1 -$ ით აღნიშნულია მეორე და პირველი რიგის დეტერმინანტები, რომლებიც $D_n -$ თავდაპირველად მოცემული დეტერმინანტისაგან “მიიღებიან” ($D_i -$ წარმოადგენს თავდაპირველი დეტერმინანტის ბოლო $i -$ ცალი სტრიქონისა და $i -$ ცალი სვეტის ამოშლის შედეგად მიღებულ დეტერმინანტს).

5.5.1. დაადგინეთ რეკურენტული დამოკიდებულება და გამოთვალეთ:

$$1.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 2 \end{vmatrix};\ 2.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 3 \end{vmatrix};\ 3.\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 7 \end{vmatrix};\ 4.\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$5.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 2 & 5 \end{vmatrix};\ 6.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix};\ 7.\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & \alpha+\beta \end{vmatrix};$$

$$8.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \Lambda & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & \Lambda & 3^n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & (n+1)^3 & \Lambda & (n+1)^n \end{vmatrix};\ 9.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 0 & 0 & \Lambda & a_n \end{vmatrix};\ 10.\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \Lambda & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \Lambda & (a-n)^{n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a & a-1 & \Lambda & a-n \\ 1 & 1 & \Lambda & 1 \end{vmatrix};$$

$$11.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & a_n \end{vmatrix};\ 12.\begin{vmatrix} 1 & \Lambda & 1 \\ x_1+1 & \Lambda & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & \Lambda & x_n^2+x_n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & \Lambda & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix};\ 13.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & x_n \end{vmatrix};$$

$$14.\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \Lambda & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \Lambda & 1+x_2^n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \Lambda & 1+x_n^n \end{vmatrix};\ 15.\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \Lambda & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \Lambda & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \Lambda & a_3b_n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \Lambda & a_nb_n \end{vmatrix};\ 16.\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

§. 6. დეტერმინანტის გამოთვლა მისი ჯამის სახით წარმოდგენის გზით

ზოგიერთ შემთხვევაში დეტერმინანტის გამოთვლა მნიშვნელოვნად მარტივდება თუ მას ორი, ან მეტი, დეტერმინანტის ჯამის სახით წარმოვადგენთ.

5.6.1. გამოთვალეთ:

1. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ a_1 & x_2 & \Lambda & a_n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \; \Lambda \; \Lambda \\ a_1 & a_2 & \Lambda & x_n \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \Lambda & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \Lambda & a_2+b_n \\ \Lambda\;\Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda\;\Lambda \\ a_n+b_n & a_n+b_2 & \Lambda & a_n+b_n \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \Lambda & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \Lambda & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \Lambda & a_3b_n \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \Lambda & x_n \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \Lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \Lambda & a_n \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & x+a_n \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \Lambda & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

5.6.2. გამოთვალეთ:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 & \Lambda & 2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ 2 & 2 & 2 & \Lambda & n+1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & \Lambda & 2n \\ -2 & 0 & 6 & \Lambda & 2n \\ -2 & -4 & 0 & \Lambda & 2n \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ -2 & -4 & -6 & \Lambda & 0 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} a & a & \Lambda & a & a & 1 \\ a & a & \Lambda & a & 2 & a \\ a & a & \Lambda & 3 & a & a \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \\ a & n & \Lambda & a & a & a \\ a & a & \Lambda & a & a & a \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \Lambda & 2n-1 \\ 1 & 2 & 5 & \Lambda & 2n-1 \\ 1 & 3 & 4 & \Lambda & 2n-1 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ 1 & 3 & 5 & \Lambda & 2n-2 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 3 \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & -1 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1 & \Lambda & 2 \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ 2 & 2 & 2 & \Lambda & -1 \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \Lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \Lambda & x & a \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \\ 1 & x & x & \Lambda & 0 & a \\ 1 & x & x & \Lambda & x & 0 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} x & a & a & \Lambda & a & a \\ -a & x & a & \Lambda & a & a \\ -a & -a & x & \Lambda & a & a \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda \\ -a & -a & -a & \Lambda & x & a \\ -a & -a & -a & \Lambda & -a & x \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \alpha \end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$; 11. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & x & y \\ y & 0 & 0 & \Lambda & 0 & x \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \Lambda & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & x \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \Lambda & a_n \\ -n & x & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \Lambda & 0 \\ \Lambda\;\Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda\;\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & x \end{vmatrix}$;

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\,\Lambda & n-1 & n \\ -1 & x & 0\,\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x\,\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0\,\Lambda & x & 0 \\ 0 & 0 & 0\,\Lambda & -1 & x \end{vmatrix}$; 15. $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0\,\Lambda & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0\,\Lambda & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1\,\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 2 & 0 & 0 & 0\,\Lambda & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0\,\Lambda & 0 & x \end{vmatrix}$; 16. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \Lambda & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \Lambda & b_2 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & b_{2n-1} & \Lambda & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \Lambda & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & a_1 & y & \Lambda & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 1 & 0 & 0 & \Lambda & a_n \end{vmatrix}$; 18. $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \Lambda & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \Lambda & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \Lambda & \alpha^{n-3} \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \Lambda & 1 \end{vmatrix}$; 19. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0\,\Lambda & 0 & b \\ 0 & a & 0\,\Lambda & b & 0 \\ 0 & 0 & a\,\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & b & 0\,\Lambda & a & 0 \\ b & 0 & 0\,\Lambda & 0 & a \end{vmatrix}$, $2n-$რიგის;

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\,\Lambda & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1\,\Lambda & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1\,\Lambda & 1-n & 1 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 1 & 1-n & 1\,\Lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 21. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \Lambda & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \Lambda & a_n \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 1 & a_1 & a_2 & \Lambda & a_n+b_n \end{vmatrix}$; 22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \Lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \Lambda & 2 \\ \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 2 & 2 & 2 & \Lambda & n \end{vmatrix}$;

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \Lambda & n \\ 2 & 3 & 4 & \Lambda & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \Lambda & 2 \\ \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ n & 1 & 2 & \Lambda & n-1 \end{vmatrix}$; 24. $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \Lambda & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & a \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} a_1-a_2 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_2-a_3 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-a_4 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\,\Lambda & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & 1\,\Lambda & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$; 26. $\begin{vmatrix} x & 0 & \Lambda & 0 & c_n \\ -1 & x & \Lambda & 0 & c_{n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & x & c_2 \\ 0 & 0 & \Lambda & -1 & x+c_1 \end{vmatrix}$.

5.6.3. გამოთვალეთ დეტერმინანტი:

1. $\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-b_n \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} c & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & c & a & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b & c \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$; 9. $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \ldots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \ldots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a+h & a+2h & a+3h & \ldots & a+(n-1)h & a \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 1+2a_1 & a_1+a_2 & \ldots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 1+2a_2 & \ldots & a_2+a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \ldots & 1+2a_n \end{vmatrix}$; 11. $\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_1a_2 & \ldots & a_1a_n \\ a_1a_2 & (x-a_2)^2 & \ldots & a_2a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1a_n & a_2a_n & \ldots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b & b \\ c & a & b & \ldots & b & b \\ c & c & a & \ldots & b & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c & c & c & \ldots & a & b \\ c & c & c & \ldots & c & a \end{vmatrix}$; 14. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ y & a_2 & x & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y & y & y & \ldots & a_n \end{vmatrix}$.

5.6.4. გამოთვალეთ:

$$1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\,\Lambda & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3\,\Lambda & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5\,\Lambda & n-1 & n \\ \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \\ 1 & 2 & 3\,\Lambda & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3\,\Lambda & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix};\ 2.\begin{vmatrix} 2 & 2 & \Lambda & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \Lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \Lambda & 3 & 2 & 2 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 2 & n-1 & \Lambda & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \Lambda & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix};\ 3.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\,\Lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1\,\Lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0\,\Lambda & 1 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 1 & 1\,\Lambda & 0 \end{vmatrix};\ 4.\begin{vmatrix} n & 1 & 1\,\Lambda & 1 \\ 1 & n & 1\,\Lambda & 1 \\ 1 & 1 & n\,\Lambda & 1 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 1 & 1\,\Lambda & n \end{vmatrix};$$

$$5.\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \Lambda & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \Lambda & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \Lambda & a_{n-1} & 1 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_1 & a_2 & a_3\Lambda & & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \Lambda & a_{n-1} & x \end{vmatrix};\ 6.\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0\Lambda & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0\Lambda & 0 & x \end{vmatrix};\ 7.\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3\Lambda & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2\Lambda & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x\ \Lambda & x^{n-2} \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4}\,\Lambda & 1 \end{vmatrix};$$

$$8.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & & 1 & 1 \end{vmatrix};\ 9.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0\Lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0\Lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2\Lambda & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 3 \end{vmatrix};10.\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 4 & 9 \end{vmatrix};\ 11.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$12.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & -1 & 0 \end{vmatrix};\ 13.\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 1 & a \end{vmatrix};\ 14.\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & -1 & a \end{vmatrix};$$

$$15.\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2}\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix};\ 16.\begin{vmatrix} 0 & a & a & a\Lambda & a & a \\ b & 0 & a & a\Lambda & a & a \\ b & b & 0 & a\Lambda & a & a \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & b & b\Lambda & b & 0 \end{vmatrix};\ 17.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\Lambda & 1 \\ 1 & a_1 & x & x\Lambda & x \\ 1 & y & a_2 & x\Lambda & x \\ 1 & y & y & a_3\Lambda & x \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 1 & y & y & y\Lambda & a_n \end{vmatrix}.$$

5.6.5. იპოვეთ:

$$1.\ \begin{vmatrix} a_0 & b & b & b\,\Lambda & b \\ a & a_1 & 0 & 0\,\Lambda & 0 \\ a & 0 & a_2 & 0\,\Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a & 0 & 0 & 0\,\Lambda & a_n \end{vmatrix};\ 2.\ \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0\,\Lambda & 0 \\ ax & a & -1 & 0\,\Lambda & 0 \\ ax^2 & ax & a & -1\,\Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3}\,\Lambda & a \end{vmatrix};\ 3.\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \Lambda & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 1 & \Lambda & 1 & a_2 \\ 1 & 1 & 0 & \Lambda & 1 & a_3 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & 1 & 1 & \Lambda & 0 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \Lambda & b_n & 0 \end{vmatrix};$$

$$4.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\,\Lambda & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4\,\Lambda & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3\,\Lambda & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2\,\Lambda & n-3 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & x & x & x & x\,\Lambda & 1 \end{vmatrix};\ 5.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\,\Lambda & n \\ x & 1 & 2 & 3\,\Lambda & n-1 \\ x & x & 1 & 2\,\Lambda & n-2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ x & x & x & x\,\Lambda & 1 \end{vmatrix};\ 6.\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \Lambda & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \Lambda & C_n^2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \Lambda & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$7.\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\,\Lambda & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0\,\Lambda & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3\,\Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3\,\Lambda & C_n^{n-1} \end{vmatrix};\ 8.\ \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & \Lambda & 0 \\ 1 & C_3^2 & C_3^3 & \Lambda & 0 \\ 1 & C_4^2 & C_4^3 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & C_n^2 & C_n^3 & \Lambda & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3\,\Lambda & & C_{n+1}^n \end{vmatrix};\ 9.\ \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \Lambda & C_n^m \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \Lambda & C_{n+1}^m \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & C_{n+m}^1 & C_{n+m}^2 & \Lambda & C_{n+m}^m \end{vmatrix};$$

$$10.\ \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \Lambda & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \Lambda & C_{n+1}^n \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & \Lambda & C_{n+2}^n \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \Lambda & C_{2n}^n \end{vmatrix};\ 11.\ \begin{vmatrix} C_{n+m}^m & C_{n+m+1}^m & \Lambda & C_{n+2m}^m \\ C_{n+m+1}^m & C_{n+m+2}^m & \Lambda & C_{n+2m+1}^m \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ C_{n+2m}^m & C_{n+2m+1}^m & \Lambda & C_{n+3m}^m \end{vmatrix};\ 12.\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \Lambda & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \Lambda & 0 & x^2 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \Lambda & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix};$$

$$
13.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & x_0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & x_1 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \Lambda & 0 & x_2 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \Lambda & 0 & x_3 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \Lambda & C_n^{n-1} & x_n \end{vmatrix};\ 14.\begin{vmatrix} a+1 & a & a & \Lambda & a \\ a & a+2 & a & \Lambda & a \\ a & a & a+3 & \Lambda & a \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a & a & a & \Lambda & a+n \end{vmatrix};\ 15.\begin{vmatrix} a+1 & a & a & \Lambda & a \\ a & a+\frac{1}{2} & a & \Lambda & a \\ a & a & a+\frac{1}{3} & \Lambda & a \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a & a & a & \Lambda & a+\frac{1}{n} \end{vmatrix};
$$

$$
16.\begin{vmatrix} a+1 & a & a & \Lambda & a \\ a & a+x & a & \Lambda & a \\ a & a & a+x^2 & \Lambda & a \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a & a & a & \Lambda & a+x^n \end{vmatrix};\ 17.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \Lambda & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \Lambda & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \Lambda & \frac{1}{n+2} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \Lambda & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix};\ 18.\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1-a_1} & \frac{1}{x_1-a_2} & \Lambda & \frac{1}{x_1-a_n} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \frac{1}{x_n-a_1} & \frac{1}{x_n-a_2} & \Lambda & \frac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}.
$$

5.6.6. გამოთვალეთ

$$
1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ C_{x_1}^1 & C_{x_2}^1 & C_{x_3}^1 & \Lambda & C_{x_n}^1 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ C_{x_1}^{n-1} & C_{x_2}^{n-1} & C_{x_3}^{n-1} & \Lambda & C_{x_n}^{n-1} \end{vmatrix};\ 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \Lambda & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \Lambda & f_2(x_n) \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \Lambda & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},\quad f_k(x)=x^k+a_{1k}x^{k-1}+\Lambda+a_{kk};
$$

$$
3.\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \Lambda & x^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 x & \Lambda & C_{n-1}^1 x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & C_{n-2}^1 x^{n-3} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} \\ 1 & y & y^2 & \Lambda & y^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 y & \Lambda & C_{n-1}^1 y^{n-2} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & C_{n-1}^{n-k-1} y^k \end{vmatrix};\ 4.\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \Lambda & x^{n-1} \\ 1 & 2x & 3x^2 & \Lambda & nx^{n-1} \\ 1 & 2^2 x & 3^2 x^2 & \Lambda & n^2 x^{n-1} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 1 & 2^{k-1} x & 3^{k-1} x^2 & \Lambda & n^{k-1} x^{n-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \Lambda & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \Lambda & y_2^{n-1} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 1 & y_{n-k} & y_{n-k}^2 & \Lambda & y_{n-k}^{n-1} \end{vmatrix};
$$

$$
5.\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 & \Lambda & \cos(n-1)\varphi_0 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \Lambda & \cos(n-1)\varphi_1 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ 1 & \cos\varphi_{n-1} & \cos 2\varphi_{n-1} & \Lambda & \cos(n-1)\varphi_{n-1} \end{vmatrix};\ 6.\begin{vmatrix} \sin(n+1)\varphi_0 & \sin n\varphi_0 & \Lambda & \sin\varphi_0 \\ \sin(n+1)\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \Lambda & \sin\varphi_1 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \sin(n+1)\varphi_n & \sin n\varphi_{n-1} & \Lambda & \sin\varphi_n \end{vmatrix}.
$$

§. 7. დამატებითი ამოცანები

5.7.1. დაამტკიცეთ ტოლობა:

$$1.\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha\,;$$

$$2.\ \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

5.7.2. შემდეგი ორი დეტერმინანტის გადამრავლების გზით

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix}$$

დაამტკიცეთ ეილერის იგივეობა:

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4\right)^2+$$
$$\left(x_1y_2-x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3\right)^2+\left(x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2\right)^2+\left(x_1y_4-x_2y_4+x_3y_2-x_4y_1\right)^2.$$

5.7.3. მატრიცთა გადამრავლების გზით, დაამტკიცეთ იგივეობა:

$$\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3-3a_1b_1c_1\right)=A^3+B^3+C^3-3ABC,$$

სადაც,

$$A=aa_1+bb_1+cc_1,\quad B=ac_1+bb_1+ca_1,\quad C=ab_1+ba_1+cc_1.$$

5.7.4. გამოთვალეთ

$|\alpha A|$, თუ $\alpha=\sqrt[5]{2}$, $|A|=3-$ არის მეხუთე რიგის დეტერმინანტი.

5.7.5. იპოვეთ ყველა ისეთი $\alpha-$ კომპლექსური რიცხვი, რომ $n-$ური რიგის A გადაუგვარებელი მატრიცისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას: $|\alpha A|=|A|$.

5.7.6. დაამტკიცეთ, რომ თუ $n-$ური რიგის დეტერმინანტის რომელიმე $k-$ცალი სტრიქონისა და $l-$ სვეტის გადაკვეთაში ნულები დგას და ამასთან $k+l>n$, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

5.7.7. დაამტკიცეთ:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}=|A|\,|C|.$$

5.7.8. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $|AB|=|BA|$, მაშინაც კი, როცა $AB\neq BA$.

5.7.9. ფიბონაჩის მიმდევრობა ეწოდება ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას, რომელიც მოცემულია შემდეგი რეკურენტული ფორმულით

$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, $a_1=1, a_2=2$. დაამტკიცეთ, რომ

$$a_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1\Lambda & 0 & 0 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda\,\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.7.10. რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება ჰქონდეს მესამე რიგის დეტერმინანტს, რომლის ელემენტებიცაა: 1.0 ან 1 ; 2.1ან −1.

5.7.11. $k-$ური რიგის რამდენ მინორს შეიცავს $n-$ური რიგის დეტერმინანტი.

5.7.12. დაამტკიცეთ, რომ თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, მაშინ ამ დეტერმინანტის ყველა ელემენტის ალგებრულ დამატებათა ჯამი თვით ამ დეტერმინანტის ტოლია.

5.7.13. გამოთვალეთ:

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \Lambda & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \Lambda & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \Lambda & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & \Lambda & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

5.7.14. დაამტკიცეთ, რომ $n-$ური რიგის A, B, C და D დეტერმინანტებისათვის თუ $C\,D^T = D\,C^T$, მაშინ

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left| A\,D^T - B\,C^T \right|.$$

5.7.15. დაამტკიცეთ, რომ თუ დეტერმინანტის თითოეულ ელემენტს მივუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მაშინ დეტერმინანტი მნიშვნელობას არ შეიცვლის.

5.7.16. ვთქვათ A წარმოადგენს Δ დეტერმინანტის i -ური $j-$და ური სტრიქონებისა და $k-$ური და $l-$ური სვეტების ამოშლის შედეგად მიღებულ $(n-2)-$რიგის მინორს, ამასთან $i<j\,, k<l$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l}\; A\,\Delta\,.$$

5.7.17. აჩვენეთ, რომ

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \text{ თუ } \alpha+\beta+\gamma=0\,.$$

5.7.18. დაამტკიცეთ, რომ თუ A, B, C და D კვადრატული მატრიცებია, ამასთან C ან D გადაუგვარებელია და $C\,D = D\,C$, მაშინ

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \left| A\,D - B\,C \right|.$$

5.7.19. გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \Lambda & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \Lambda & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \Lambda & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda & \Lambda \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \Lambda & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ სადაც } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\,.$$

5.7.20. დაამტკიცეთ, რომ თუ ლუწი რიგის ირიბსიმეტრიული დეტერმინანტის თითოეულ ელემენტს მივუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს– დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

5.7.21. გამოთვალეთ $\begin{vmatrix} cE & A \\ A & cE \end{vmatrix}$ დეტერმინანტი, სადაც $E-$ერთეულოვანი მატრიცაა და

$$A=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0\Lambda & 0 \\ 1 & a & 1 & 0\Lambda & 0 \\ 0 & 1 & a & 1\Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda & \Lambda\Lambda & \Lambda\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0\Lambda & a \end{vmatrix}.$$

პასუხები:

5.1.1. 1. 1; 2. 4; 3. 355; 4. 77614; 5. $ad-bc$; 6. 0; 7. 1; 8. $\cos(\alpha+\beta)$; 9. 0; 10. 0; 11. 0; 12. $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)$; 13. $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 14. 0.

5.1.2. 1. 0; 2. -42; 3. 28; 4. 15; 5. $a^3+b^3+c^3-3abc$; 6. 0; 7. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\beta-\gamma)$ 8. 2; 9. $-2i$; 10. $-3\sqrt{3}i$; 11. $3(\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\beta)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha))$; 12. $ab(a-b)+cb(c-b)+ac(a-c)+2abc(a-b)$.

5.2.1. 1. პლიუს ნიშნით; 2. მინუს ნიშნით; 3. მინუს ნიშნით; 4. პლიუს ნიშნით; 5. არ შედის; 6. მინუს ნიშნით; 7. არ შედის; 8. $(-1)^{n-1}$; 9. არ შედის; 10. $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$; 11. $(-1)n$; 12. $(-1)^{3n}$. **5.2.2.** $i=6, k=2.$; **5.2.3.** $i=2, k=2, j=3.$; **5.2.4.** $i=5, k=1$.

5.2.5. 1. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}, a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}, a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$; 2. $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}, a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}, a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$.

5.2.6. 1. პლიუს ნიშნით; 2. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; **5.2.7.** 1. $-8x^3$ და $2x^4$; 2. $-25x^3$ და $24x^4$.;

5.2.8. $a_{n-j+1,n-i+1}$.; **5.2.9.** დეტერმინანტი გამრავლდება $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}-$ზე.; **5.2.10.** არ შეიცვლება.

5.2.11. დეტერმინანტი გამრავლდება $(-1)^n-$ზე. **5.2.15.** 1. $a_{11}a_{22}\Lambda\ a_{nn}$; 2. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\Lambda\ a_{n1}$; 3. 0; 4. $n!$. 5. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; 6. $n!$.

.2.17. 1. 8; 2. -3; 3. -153; 4. 297; 5. 90; 6. 150; 7. -336; 8. 1; 9. 10; 11. -2639; 12. 5; 13. 0; 14. 100; 15. $9\sqrt{30}-9\sqrt{20}$; 16. 665; 17. 394.

5.2.18. 1. $-2(x^3+y^3)$; 2. $[(a+b)^2-(c+d)^2][(a-b)^2-(c-d)^2]$; 3. -4; 4. 195; 5. $x^2(x^2-1)^4$; 6. -5; 7. -1; 8. $(x^3+1)(x^2-x+1)$; 9. $(x_2-x_1)\sin(\gamma-\beta)+(y_2-y)_1\sin(\alpha-\gamma)+(z_2-z_1)\sin(\beta-\alpha)$; 10. შემოვიღოთ აღნიშვნა $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$;

11. $x_1^2(x_3-x_2)+x_2^2(x_1-x_3)+x_3^2(x_2-x_1)$; 12. $(x_4-x_3)[(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)]$; 13. 81; 14. 729; 15. $a_{11}a_{22}\Lambda\ a_{nn}$; 16. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\Lambda\ a_n$; 17. $\prod_{k=1}^{n}(a_{kk}a_{2n-k+1,2n-k+1}-a_{k,2n-k+1}a_{2n-k+1,k})$; 18. $(-1)^n\prod_{n\geq i\phi k\geq 1}(x_i-x_k)^2$. **5.2.20.** 1. $4a-c-d$; 2. $2a-b-c-d$; 3. $-5(a+b+c+d)$; 4. $8a+15b+12c-19d$; 5. $2a-8b+c+5d$. **5.2.21.** 1. 1; 2. $(-1)^{n-1}n$; 3. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

5.3.1. 1. $(-1)^{n-1}$; 2. $x\prod_{k=1}^{n}(a_n-x)\left(\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n-1}\right)$, პირველი სტრიქონი გამოვაკლოთ ყველა დანარჩენს, $k-$ური სტრიქონიდან დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ a_k-x, ყოველი $k-$სთვის და პირველ სვეტს მივუმატოთ ყველა დანარჩენი სვეტი; 3. $n!$; 4. $(-1)^{n-1}n!$, ბოლო სტრიქონი გამოვაკლოთ ყოველ დანარჩენ სტრიქონს; 5. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; 6. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}$; პირველ სვეტს მივუმატოთ ყველა დანარჩენი სვეტი; 7. $2n+1$;

8. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_1 b_2 \Lambda\ b_n$;9.$(a_1+a_2+\Lambda+a_n)x^n$; 10. $x_1\prod_{k=2}^{n}(x_k-a_{k-1,k})$, ბოლო სტრიქონიდან დაწყებული, ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მისი წინა სტრიქონი; 11. $\prod_{k=1}^{n}x_k\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k}$, ყოველი $i-$სათვის, დეტერმინანტის $i-$ური სვეტიდან მისი ნიშნის გარეთ გავიტანოთ x_i-ური და ყოველ სვეტს მივუმატოთ ყველა დანარჩენი სვეტი;

12. $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$; 13. $\prod_{k=1}^{n}(1-a_{kk}x)$. **5.4.1.** 1. პირველ სვეტს მივუმატოთ ყველა დანარჩენი სვეტი, მივიღებთ დეტერმინანტის $x+y+z$ გამყოფს; პირველ სვეტს მივუმატოთ მეორე და გამოვაკლოთ დანარჩენი ორი სვეტი, მივიღებთ დეტერმინანტის $y+z-x$ გამყოფს; პირველ სვეტს მივუმატოთ მესამე და გამოვაკლოთ დანარჩენი სვეტი, მივიღებთ დეტერმინანტის $x-y+z$ გამყოფს; პირველ სვეტს მივუმატოთ მეოთხე და გამოვაკლოთ დანარჩენი სვეტი, მივიღებთ დეტერმინანტის $x+y-z$ გამყოფს. ვინაიდან მიღებული მამრავლები დამოუკიდებლები არიან, ამიტომ დეტერმინანტი მათ ნამრავლზეც გაიყოფა. z^4-ის კოეფიციენტთა გატოლების გზით დავადგენთ, რომ საძიებელი დეტერმინანტი ამ ნამრავლის ტოლია, უარყოფითი ნიშნით. 2. $(x^2-1)(x^2-4)$; 3.$[(x-a)^2-(b+c)^2][(x+a)^2-(b-c)^2]$; 4. x^2z^2, მოვახდინოთ პირველი და მეორე სტრიქონის და პირველი და მეორე სვეტის ტრანსპოზიცია, ვაჩვენოთ, რომ: დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ მასში $x-$ს შევცვლით $(-x)-$ით; $x=0$ წარმოადგენს დეტერმინანტის ფესვს; დეტერმინანტი იყოფა x^2-ზე. ანალოგიურად $z-$თვის; 5. მოცემული D_n- დეტერმინანტის, როგორც x_n-ცვლადის მიმართ მრავალწევრის, ფესვებია $x_n=x_1, x_n=x_2,\Lambda, x_n=x_{n-1}$, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ $D_n=q(x_1,x_2,\Lambda,x_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k)$, მაგრამ D_n-წარმოადგენს x_n-ის $n-1$ ხარისხის პოლინომს (გაშალეთ იგი ბოლო სტრიქონის მიხედვით) და $x_n^{n-1}-$ის კოეფიციენტია D_{n-1}, ამიტომ $q(x_1,x_2,\Lambda,x_{n-1})=D_{n-1}$ და $D_n=D_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k)$. საბოლოოდ გვექნება $D_n=\prod_{i\phi j}(x_i-x_j)$.

5.5.1. 1. $n+1$; 2. $2^{n+1}-1$; 3. $\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$; 4. $9-2^{n+1}$; 5. $52^{n-1}-43^{n-1}$; 6. $2^{n+1}-1$; 7. $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$;

8. $\prod_{k=1}^{n}k!$; 9. $-\prod_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$; 10. $\prod_{k=0}^{n}k!$; 11. $a_1a_2\Lambda\ a_n-a_1a_2\Lambda\ a_{n-1}+a_1a_2\Lambda\ a_{n-2}-\Lambda+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^n$;

12. $\prod_{n\ge i\phi k\ge 1}(x_i-x_k)$; 13. $a_0x_1x_2\Lambda\ x_n+a_1y_1x_2x_3\Lambda\ x_n+a_2y_1y_2x_3\Lambda\ x_n+\Lambda+a_ny_1y_2\Lambda\ y_n$;

14. $\left[2x_1x_2\Lambda\ x_n-\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right]\prod_{n\ge i\phi k\ge 1}(x_i-x_k)$, პირველ სვეტად ჩავამატოთ ერთიანებისაგან შედგენილი სვეტი და პირველ სტრიქონად $(1,0,0,K,0)$-სტრიქონი. ყველა დანარჩენ სვეტს გამოვაკლოთ პირველი სვეტი. მარცხენა ზემოთა კუთხეში მდგომი ერთიანი წარმოვადგინოთ $2-1$ სხვაობის სახით და ასეთნაირად მიღებული დეტერმინანტი წარმოვადგინოთ ორი დეტერმინანტის სხვაობის სახით (პირველი სტრიქონის შესაბამისად); 15. $a_1b_n\prod_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_k-a_kb_{k+1})$, უნდა დავადგინოთ რეკურენტული ტოლობა

$D_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)D_{n-1}$; 16.$3^{n+1}-2^{n+1}$.; 5.6.1. 1. $\prod_{k=1}^{n}(x_k-a_k)\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k-a_k}\right)$;

2. $D_n = 0, n > 2; D_1 = a_1 + b_1, D_2 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$;

3. $\prod_{k=1}^{n}(x_k - a_k b_k)\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{x_k}\right)$; 4. $x^n + x^{n-1}\sum_{k=1}^{n} a_k$. ყველა ელემენტი, გარდა მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტებისა, წარმოადგინეთ სახით $a_i = 0 + a_i$; 1.$\prod_{k=1}^{n}(a_k - x_k) - a_1 a_2 \Lambda\ a_n$. მარცხენა ზემოთა კუთხეში მდგომი ელემენტი წარმოვადგინოთ სახით $0 = 1 - 1$ და დეტერმინანტი პირველი სტრიქონის მიხედვით წარმოადგინეთ ორი დეტერმინანტის ჯამად.

5.6.2. 1. $2(n-1)!$; 2. $(2n)! = 2^n n!$; 3. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a \prod_{k=1}^{n}(k-a)$; 4. $(-1)^{n-1}$; 5.1; 6. $(-1)^{n-1}(2n-3)3^{n-1}$;

7. $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$; 8. $\frac{1}{2}\left((x+a)^n + (x-a)^n\right)$; 9. $\alpha^n + (-1)^{n-1}\beta^n$; 10. $\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$; 11. $x^n + (-1)^{n+1} y^n$. გაშალეთ პირველი სვეტის მიხედვით;12.$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \Lambda + a_n$. გაშალეთ პირველი სვეტის მიხედვით; 13. $n!\left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \Lambda + a_n\right)$; 14. $\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2} - \frac{n+1}{x-1}$; 15. $\frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n - 1}{(x-1)^2}$

16. $\prod_{k=1}^{n}(a_k a_{2n-k+1} - b_k b_{2n-k+1})$; 17. $\prod_{k=1}^{n} a_k \left(a_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$; 18. $\left(1-\alpha^n\right)^{n-1}$; 19. $\left(a^2 - b^2\right)^n$;

20. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$; 21. $b_1 b_2 \Lambda\ b_n$; 22. $-2(n-2)!$; 23. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$;

24. $\frac{na^{n-1}}{2}\left[2a + (n-1)h\right]$; 25. $\prod_{k=1}^{n} a_k \left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$; 26. $x^n + c_1 x^{n-1} + \Lambda + c_{n-1}x + c_n$.

5.6.3. 1. $1 - b_1 + b_1 b_2 \_ b_1 b_2 b_3 + \Lambda + (-1)^n b_1 b_2 \Lambda\ b_n$; 2..$na_1 + (n-1)a_2 + \Lambda + 2a_{n-1} + a_n$;

3. $x^n - C_{n-1}^1 x^{n-2} + C_{n-2}^2 x^{n-4} - \Lambda$; 4. $c^n - C_{n-1}^1 c^{n-2}ab + C_{n-2}^2 c^{n-4}a^2 b^2 - \Lambda$; 5. $\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$;

6. $[x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$; 7. $\left(x + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)$; 8. $\prod_{k=1}^{n} a_k\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$; 9. $(-nh)^{n-1}\left[a + \frac{n-1}{2}h\right]$. ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მისი მომდევნო სტრიქონი და შემდეგ მეორე სტრიქონს მივუმატოთ ყველა მომდევნო სტრიქონი;

10. $\left(1 + a_1 + \Lambda + a_n\right)^2 - n\left(a_i^2 + \Lambda + a_n^2\right)$; 11. $x^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x - 2a_k)\left(x + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{x - 2a_k}\right)$;

12. $x^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x - 2a_k)\left(x + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{x - 2a_k}\right)$; 13. $\frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$; 14. $\frac{\left[x\prod_{k=1}^{n}(a_k - y) - y\prod_{k=1}^{n}(a_k - x)\right]}{x-y}$.

5.6.4. 1.$(n-1)!$; 2.$(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} 2(n-2)!$; 3. $(-1)^{n-1}(n-1)$; 4.$(2n-1)(n-1)^{n-1}$; 5. $\prod_{k=1}^{n}(x - a_k)$;

6. $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \Lambda + a_n$; 7. $\prod_{k=1}^{n}(1 - a_{kk}x)$; 8. $\frac{C_{n+1}^1 - 3C_{n+1}^3 + 9C_{n+1}^5 - 27C_{n+1}^7 + \Lambda}{2^n}$; 9.1;

10. $5^{n+1} - 4^{n+1}$; 11. $\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}, n = 2l \\ 0 \quad , n = 2l+1\end{cases}$; 12. $\frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$;

13. $a^n - C_{n-1}^1 a^{n-2} + C_{n-2}^2 a^{n-4} + \Lambda + (-1)^k C_{n-k}^k a^{n-2k} + \Lambda$, გამოიყენეთ რეკურენტული დამოკიდებულების ხერხი და ტოლობა $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;

14. $a^n+C_{n-1}^1a^{n-2}+C_{n-2}^2a^{n-4}+\ldots+C_{n-k}^ka^{n-2k}+\ldots$; 15. $\dfrac{n+1}{x^n}$; 16. $(-1)^{n-1}ab\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$.
დეტერმინანტის მარჯვენა ქვემოთა კუთხის ელემენტისათვის გამოიყენეთ წარმოდგენა $0=a-a$, გაშალეთ დეტერმინანტი ორი დეტერმინანტის ჯამად და გამოიყენეთ რეკურენტული დამოკიდებულების ხერხი; 17. $\dfrac{\left[\prod_{k=1}^{n}(a_k-x)-\prod_{k=1}^{n}(a_k-y)\right]}{x-y}$.

5.6.5. 1. $aba_1a_2\ldots a_n\left(\dfrac{a_0}{ab}-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\right)$; 2. $a(a+x)^n$; 3. $(-1)^n\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k+(-1)^n(n-1)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$;
4. $(-1)^nx^{n-2}$; 5. $(-1)^n\left[(x-1)^n-x^n\right]$; 6. 1 –ყოველ სვეტს გამოაკელით მისი წინა სვეტი, ყოველ სტრიქონს გამოაკელით მისი წინა სტრიქონი და გამოიყენეთ ტოლობა $C_n^k=C_{n-k}^k+C_{n-1}^{k-1}$; 7. 1 –ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მისი წინა სტრიქონი; 8. n –ყოველ სტრიქონს გამოაკელით მისი წინა სტრიქონი, გაშალეთ 1-ლი სვეტის მიხედვით , მიღებული დეტერმინანტი წარმოადგინეთ ორი დეტერმინანტის ჯამად და აჩვენეთ, რომ $D_n=D_{n-1}+1$; 9. 1 –ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მისი წინა სტრიქონი; ყოველ სტრიქონს, დაწყებული მეორედან, გამოვაკლოთ მისი მომდევნო სტრიქონი და ა. შ.; 10. 1; 11. (-1) –ყოველ სვეტს, დაწყებული მეორედან, გამოვაკლოთ მისი წინა სვეტი; ყოველ სვეტს, დაწყებული მესამედან, გამოვაკლოთ მისი წინა სვეტი და ა. შ. მიღებულ დეტერმინანტში იგივე პროცესი ჩაატარეთ სტრიქონებისათვის; 12. $(x-1)^n$ –ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მისი წინა სტრიქონი და ვაჩვენოთ, რომ $D_n=(x-1)D_{n-1}$; 13. $x_n-C_n^1x_{n-1}+C_n^2x_{n-2}-C_n^3x_{n-3}+\ldots+(-1)^nx_0$ –ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ მისი წინა სტრიქონი და ვაჩვენოთ, რომ $D_{n+1}(x_0,x_1,\ldots,x_n)=D_n(x_1-x_0,x_2-x_1,\ldots,x_n-x_{n-1})$, ხოლო შემდეგ გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი; 14. $n!\left(1+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a}{k}\right)$; 15. $\dfrac{1}{n!}\left(1+\dfrac{n(n+1)}{2}a\right)$;
16. $x^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(1+a\dfrac{x^{n+1}-1}{x^n(x-1)}\right)$; 17. $\dfrac{[1!2!3!\ldots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\ldots(2n-1)!}$ –ყოველ სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონი და შემდეგ ყოველ სვეტს გამოვაკლოთ პირველი სვეტი;
18. $\dfrac{\prod_{1\le i<k\le n}(x_i-x_k)(a_k-a_i)}{\prod_{i,k=1}^{n}(x_i-a_k)}$.

5.6.6. 1. $\dfrac{1}{1!2!\ldots(n-1)!}\prod_{i>k}(x_i-x_k)$; 2. $\prod_{i>k}(x_i-x_k)$; 3. $(y-x)^{k(n-k)}$;
4. $1!\,2!\ldots(k-1)!\,x^{\frac{k(k-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n-k}(y_i-x)^k$; 5. $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{i>k}(\cos\varphi_i-\cos\varphi_k)$;
6. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=0}^{n}\sin\varphi_k\prod_{i<k}(\cos\varphi_i-\cos\varphi_k)$;

5.7.1. 1. გაითვალისწინეთ ტოლობა $\cos n\alpha=\dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\dfrac{n}{n-k}C_{n-k}^k(2\cos\alpha)^{n-2k}$ და გამოიყენეთ $n-$ის მიმართ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი; 2. გაითვალისწინეთ ტოლობა $\sin n\alpha=\sin\alpha\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}C_{n-k-1}^k(2\cos\alpha)^{n-2k-1}$ და გამოიყენეთ $n-$ის მიმართ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი; **5.7.2.** თითოეული დეტერმინანტი აიყვანეთ კვადრატში. **5.7.3.** გამოითვალეთ დეტერმინანტთა ნამრავლი:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

5.7.4. 6.; **5.7.5.** $\alpha = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, სადაც $n-$მატრიცის რიგია და $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

5.7.8. სამართლიანია; **5.7.9.** რეკურენტული კავშირია $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$.

5.7.10. 1. 2; $-$აჩვენეთ, რომ დეტერმინანტის ელემენტები ერთდროულად არ შეიძლება იყოს ერთის ტოლი; განიხილეთ დეტერმინანტი, რომლის მთავარი დიაგონალის ელემენტებია ნულები, ხოლო ყველა სხვა ელემენტი ერთიანი; 2. 4 $-$მთავარ დიაგონალზე უნდა იდგნენ $(-1)-$ები, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტები ერთის ტოლია; **5.7.11.** $\left(C_n^k\right)^2$; 5.7.13. $2^{n-2}\left(\cos^n\frac{\pi}{n} - 1\right)$. შენიშვნა: $\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{\varepsilon^k + \varepsilon^{-k}}{2}$, სადაც $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$.; გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ $\forall a-$თვის $\prod_{k=0}^{n-1}\left(a - \varepsilon^{2k}\right) = a^n - 1$, $\varepsilon^n = -1$.

5.7.15. თავდაპირველად აჩვენეთ, რომ $\begin{vmatrix} a_{11}+x & \ldots & a_{1n}+x \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+x & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i,j} A_{ij}$,
მიღებული ტოლობაში მონაწილე ორივე დეტერმინანტში $-$პირველი სტრიქონი გამოვაკლოთ ყველა დანარჩენს და ჩავსვათ მნიშვნელობა $x = 1$; **5.7.17.** დავუშვათ, რომ $\alpha = \varphi_2 - \varphi_3,\ \beta = \varphi_3 - \varphi_1,\ \gamma = \varphi_1 - \varphi_2$.; **5.7.18.** განიხილეთ შემდეგი ნამრავლი $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C^{-1} & D \\ 0 & -C \end{vmatrix}$ ან ნამრავლი $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{vmatrix}$. ; **5.7.19.** $i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{\frac{n}{2}}$. გავამრავლოთ დეტერმინანტი თავის თავზე და შევნიშნოთ, რომ $\varepsilon^k = 1 \Leftrightarrow n/k$. მივიღებთ:

$$D^2 = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{C_{n-1}^2} n^n,$$

საიდანაც $D = \pm i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}}$. ე.ი. $|D| = n^{\frac{n}{2}}$. $D-$ს არგუმენტის საპოვნელად, D გამოთვალეთ როგორც $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{n-1}$ რიცხვების ვანდერმონდის დეტერმინანტი.

5.7.21. $\left[(c-a)^n - C_{n-1}^1(c-a)^{n-2} + C_{n-2}^2(c-a)^{n-4} + \ldots\right]\left[(c+a)^n - C_{n-1}^1(c+a)^{n-2} + C_{n-2}^2(c+a)^{n-4} + \ldots\right]$.
გამოიყენეთ ტოლობა $\begin{vmatrix} cE & A \\ A & cE \end{vmatrix} = \left|c^2E - A^2\right| = |cE - A||cE + A|$.

თავი 6. მატრიცთა თეორიის ელემენტები

ცხრილს, შედგენილს K ველის ელემენტებისაგან, რომელსაც გააჩნია m ცალი სტრიქონი და n ცალი სვეტი, $m\times n$ ზომის მართკუთხოვანი მატრიცა ეწოდება:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

მატრიცა $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ სახითაც ჩაიწერება. a_{ij}, $i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$-ს მატრიცის ელემენტებს უწოდებენ. $m=n$ ტოლობის შემთხვევაში მატრიცას ეწოდება კვადრატული. $1\times n$ ზომის მატრიცას სტრიქონი მატრიცა, ხოლო $m\times 1$ ზომისას სვეტი მატრიცა ეწოდება. კვადრატულ მატრიცაში $a_{11},a_{22},\Lambda\ ,a_{nn}$ ელემენტები ქმნიან მის მთავარ დიაგონალს, ხოლო $a_{1n},a_{2,n-1},\Lambda\ ,a_{n1}$ ელემენტები-მის დამხმარე დიაგონალს.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & \alpha_n \end{pmatrix}$$

სახის კვადრატულ მატრიცას დიაგონალური მატრიცა ეწოდება. თუ დიაგონალურ მატრიცაში $\alpha_1=\alpha_2=\Lambda=\alpha_n=1$ - მას ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება და E-თი აღინიშნება. მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი ველის ნულოვანი ელემენტის ტოლია, ნულოვანი ეწოდება და აღინიშნება O სიმბოლოთი. ე. ი.

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ მატრიცის მოპირდაპირე ეწოდება მატრიცას $(-A)=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$. მატრიცას ეწოდება სამკუთხოვანი, თუ მას აქვს შემდეგი სახე:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \Lambda & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \Lambda & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \Lambda & a_{3n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\lambda\in K$ სკალარისა და A მატრიცის ნამრავლი შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \Lambda & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \Lambda & \lambda\cdot a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \Lambda & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ორი ერთნაირი ზომის $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ და $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ მატრიცის ჯამი ეწოდება ისეთ $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ მატრიცას, რომ

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

თუ მოცემულია $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times l}$ და $A=\left(a_{ij}\right)_{l\times n}$ ორი ისეთი მატრიცა, რომ პირველ მათგანში სვეტების რაოდენობა ტოლია სტრიქონების რაოდენობისა მეორე მატრიცაში, მაშინ განიმარტება ამ მატრიცთა $A\cdot B$ ნამრავლი, როგორც ისეთი $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ მატრიცა, რომ

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}\cdot b_{kj}\,,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\,.$$

მატრიცთა გამრავლების ამ ფორმულას კოში-ბინეს ფორმულა ჰქვია. მატრიცის სკალარზე გამრავლების, მათი შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს შემდეგი თვისებები აქვთ:

1. ა) $A+B=B+A$; ბ) $A+(B+C)=(A+b)+C$; გ) $A+O=O+A=A$.

2. ა) $1\cdot A=A$; ბ) $0\cdot A=O$; გ) $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$;

   დ) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$; ე) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$, $\alpha,\beta\in K$.

3. ა) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$; ბ) $(\alpha\cdot A)\cdot B=\alpha\cdot(A\cdot B)$;

   გ) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$; დ) $C(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$.

თუ $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ მატრიცაში სტრიქონებსა და სვეტებს ადგილებს შევუცვლით, მივიღებთ მატრიცას, რომელსაც A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცი ეწოდება და აღინიშნება A^T სიმბოლოთი, ე. ი. $A^T=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$. ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს:

$$\left(A^T\right)^T=A;\quad (A+B)^T=A^T+B^T;\quad (\lambda\cdot A)^T=\lambda\cdot A^T;\quad (A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T.$$

$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ კვადრატულ მატრიცას ეწოდება გადაგვარებული თუ $|A|=0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას გადაუგვარებელი მატრიცა ჰქვია.

A კვადრატული მატრიცის შებრუნებული ეწოდება მატრიცას, რომელსაც A^{-1}-ით აღნიშნავენ და რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E\,.$$

იმისათვის, რომ A კვადრატულ მატრიცას გააჩნდეს შებრუნებული მატრიცა აუცილებელი და საკმარისია, რომ ის იყოს გადაუგვარებელი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*\,,$$

სადაც $A^*=\left(A_{ij}\right)_{n\times n}$ არის A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა, რომლის A_{ij} ელემენტი წარმოადგენს A მატრიცის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატებას.

კვადრატული მატრიცის რაიმე k ცალი სტრიქონისა და k ცალი სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს მოცემული მატრიცის k-ური რიგის მინორი ეწოდება.

ვიტყვით, რომ მატრიცის რანგია r, თუ არსებობს ამ მატრიცის ერთი მაინც r რიგის არანულოვანი მინორი და მისი ყველა $r+1$რიგის მინორი ნულის ტოლია.

მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნა ეწოდება შემდეგი ოპერაციებიდან თითოეულს: 1) მატრიცის ნებისმიერი ორი სტრიქონისათვის (სვეტისათვის) ადგილების შეცვლა;

2) მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) თითოეული ელემენტის გამრავლება K ველის არანულოვან ელემენტზე;

3) მატრიცის რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრული შეკრება. მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები მის რანგს არ ცვლის.

6.1. იპოვეთ $A+B$, $A\cdot B$ და $B\cdot A$, თუკი ისინი არსებობენ, თუ:

ა) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 2\end{pmatrix}$; ბ) $A=(1,-2,5,3)$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\\ 2 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$;

გ) $A=(1,0,5)$, $B=\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$; დ) $A=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \Lambda & 0\\ 0 & a_2 & \Lambda & 0\\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\\ 0 & 0 & \Lambda & a_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1 & 0 & \Lambda & 0\\ 0 & b_2 & \Lambda & 0\\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\\ 0 & 0 & \Lambda & b_n\end{pmatrix}$;

ე) $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$, სადაც A_i და B_i, $i=1,2$ -ერთი და იგივე რიგის მატრიცებია.

6.2. გამოთვალეთ:

ა) $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}^n$, $n>2$; ბ) $\begin{pmatrix}4 & -3\\ 5 & -4\end{pmatrix}^n$; გ) $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}^n$; დ) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}^n$.

6.3. ააგეთ ყველა მეორე რიგის მატრიცა, რომლის კვადრატიც ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია

6.4. იპოვეთ $f(A)$, თუ:

ა) $f(x)=x^2-8x-10$ და $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$;

ბ) $f(x)=2x^3-5x^2+3x-7$ და $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

გ) $f(x)=x^6-5x^4+4x^2-x+6$ და $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

დ) $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_{n-1}x+a_n$ და $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$, სადაც A_1 და A_2 ნებისმიერად აღებული კვადრატული მატრიცებია.

6.5. დაადგინეთ პირობები, რომელთა შესრულების შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

ა) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

ბ) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;

გ) $A^n-B^n=(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+\Lambda+AB^{n-2}+B^{n-1}\right)$.

6.6. იპოვეთ A მატრიცთან გადანაცვლებადი ყველა მატრიცა:

ა) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; ბ) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; გ) $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \Lambda & 0\\ 0 & \alpha_2 & \Lambda & 0\\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda\\ 0 & 0 & \Lambda & \alpha_n\end{pmatrix}$, $\alpha_i\neq\alpha_j, i\neq j$.

6.7. როგორ შეიცვლება $A\cdot B$ ნამრავლი, თუ:

ა) A მატრიცის i-ურ და j-ურ სტრიქონებს ადგილებს შევუცვლით;

ბ) A მატრიცის i-ურ სტრიქონს დავუმატებთ ამავე მატრიცის j-ურ სტრიქონს, გამრავლებულს λ-სკალარზე;
გ) B მატრიცის i-ურ და j-ურ სვეტებს ადგილებს შევუცვლით;
დ) B მატრიცის i-ურ სვეტს დავუმატებთ ამავე მატრიცის j-ურ სვეტს, გამრავლებულს λ-სკალარზე.

6.8. ააგეთ ყველა მეორე რიგის მატრიცა, რომლის კვადრატიც ნულოვანი მატრიცის ტოლია

6.9. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; ბ) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ 0 & 1 & \Lambda & 1 \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0\Lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\Lambda & n \\ 0 & 1 & 2\Lambda & n-1 \\ 0 & 0 & 1\Lambda & n-2 \\ \Lambda\,\Lambda & \Lambda\,\Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0\Lambda & 1 \end{pmatrix}$.

6.10. როგორ შეიცვლება A^{-1}, თუ:
ა) A მატრიცის i-ურ და j-ურ სტრიქონებს ადგილებს შევუცვლით;
ბ) A მატრიცის i-ურ სტრიქონს დავუმატებთ ამავე მატრიცის j-ურ სტრიქონს გამრავლებულს λ-სკალარზე.

6.11. დაამტკიცეთ, რომ მთელელემენტებიანი მატრიცას მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, გააჩნია მთელ ელემენტებიანი შებრუნებული მატრიცა, როცა მისი დეტერმინანტი ტოლია ± 1.

6.12. აჩვენეთ, რომ $A \cdot X = 0$ მატრიცულ განტოლებას, სადაც A კვადრატული მატრიცაა, გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A| = 0$.

6.13. იპოვეთ A^{-1}, თუ $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$, სადაც E_k და E_l შესაბამისი რიგის ერთეულოვანი მატრიცებია, ხოლო U წარმოადგენს $k+l$ რიგის მატრიცას.

6.14. აჩვენეთ:
ა) გადაუგვარებელი, სიმეტრიული მატრიცის შებრუნებული – სიმეტრიული მატრიცაა;
ბ) გადაუგვარებელი, ირიბ სიმეტრიული მატრიცის შებრუნებული – ირიბსიმეტრიული მატრიცაა.

6.15. აჩვენეთ, რომ ორი სიმეტრიული მატრიცის ნამრავლი სიმეტრიულია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული მატრიცები გადანაცვლებადია.

6.16. აჩვენეთ, რომ ორი ირიბსიმეტრიული მატრიცის ნამრავლი ირიბსიმეტრიულია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული მატრიცები გადანაცვლებადია.

6.17. გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცის რანგი:

ა) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 1 & 4 & 7 \\ -5 & 12 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; ე) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.18. λ და β პარამეტრის ნამდვილ მნიშვნელობებზე დამოკიდებულების გათვალისწინებით, გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცის რანგი:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & -4 & 5 \\ \lambda & \lambda & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \beta & 1 & 3 \\ 1 & 2\beta & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

დ) $\begin{pmatrix} \lambda & \beta & 2 & 1 \\ \lambda & -1+2\beta & 3 & 1 \\ \lambda & \beta & \beta+3 & 2\beta-1 \end{pmatrix}$; ე) $\begin{pmatrix} 0 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4 \end{pmatrix}$;

ვ) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$; ზ) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

6.19. დაამტკიცეთ, რომ მატრიცთა ნამრავლის რანგი არ აღემატება თანამამრავლი მატრიცების რანგებს

6.20. დაამტკიცეთ, რომ მატრიცთა ჯამის რანგი არ აღემატება შესაკრები მატრიცების რანგების ჯამს.

6.21. დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილელემენტებიანი და ტოლი რაოდენობა სტრიქონების მქონე A და B მატრიცებისათვის:

$r\begin{pmatrix} A & AB \\ 2A-5B \end{pmatrix} = r(A)+r(B)$, სადაც $r(X)$-ით X-მატრიცის რანგია აღნიშნული.

6.22. დაამტკიცეთ, რომ ტოლი რანგების მქონე, კვადრატული A და B მატრიცებისათვის:

$$r\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B+B^2 \end{pmatrix} = r(A)+r(B).$$

6.23. დაამტკიცეთ, რომ მატრიცისათვის ერთი ახალი სტრიქონის (სვეტის) მიწერა მატრიცის რანგს ან არ ცვლის ან მის მნიშვნელობას ერთით ზრდის.

პასუხები:

6.1. ა) $A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} -12 & 23 & -1 \\ -6 & 29 & 2 \\ -16 & 35 & -2 \end{pmatrix}$;

ბ) ჯამი, სხვაობა და $B\cdot A$ ნამრავლი არ არსებობს, $A\cdot B=(13\ \ 8)$;

გ) ჯამი და სხვაობა არ არსებობს, $A\cdot B=(19)$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 20 \\ 2 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix}$;

დ) $A\pm B=\begin{pmatrix} a_1\pm b_1 & 0\ \Lambda & 0 \\ 0 & a_2\pm b_2\ \Lambda & 0 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda \\ 0 & 0\ \Lambda & a_n\pm b_n \end{pmatrix}$, $A\cdot B=B\cdot A=\begin{pmatrix} a_1\cdot b_1 & 0\ \Lambda & 0 \\ 0 & a_2\cdot b_2\ \Lambda & 0 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda\ \Lambda & \Lambda\ \Lambda \\ 0 & 0\ \Lambda & a_n\cdot b_n \end{pmatrix}$;

ე) $A\pm B=\begin{pmatrix} A_1\pm B_1 & 0 \\ 0 & A_2\pm B_2 \end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix} A_1\cdot B_1 & 0 \\ 0 & A_2\cdot B_2 \end{pmatrix}$. **6.2.** ა) 0; ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, თუ $n=2k$ და $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, თუ $n=2k+1$; გ) $\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ C_n^2\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ n3^{n-1} & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^n \end{pmatrix}$.

6.3. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2=1-bc$. **6.4.** ა) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -21 & 22 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} -11 & -18 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{pmatrix}$. **6.5.** როცა $A\cdot B=B\cdot A$; **6.6.** ა) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$; გ) ყველა დიაგონალური მატრიცა. **6.7.** ა) i-ური და j-ური სტრიქონები ადგილებს გაცვლიან; ბ) $A\cdot B$ მატრიცის i-ური სტრიქონი შეიკრიბება j-ური სტრიქონის ელემენტების λ-ზე ნამრავლებთან ($\tilde{c}_{ik}=c_{ik}+\lambda\cdot c_{jk}$); გ) იხ. წინა შემთხვევა.

6.8. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2=-bc$. **6.9.** ა) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\Lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1\Lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1\Lambda & 1 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda\;\Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & 0\Lambda & 1 \end{pmatrix}$. **6.10.** ა) A^{-1}-ში ადგილებს შეიცვლიან i-ური და j-ური სტრიქონები; ბ) j-ურ სვეტს გამოაკლდება i-ური სვეტი გამრავლებული λ-ზე. **6.13.** $A^{-1}=\begin{pmatrix} E_k & -U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$. **6.17.** ა) $r=2$; ბ) $r=2$; გ) $r=3$; დ) $r=4$; ე) $r=5$. **6.18.** ა) $r=4$, თუ $\lambda\neq\pm3$ და $r=3$, თუ $\lambda=\pm3$; ბ) $r=4, \forall\lambda\in R$; გ) თუ $\lambda=1, \beta=\frac{1}{2}$, მაშინ $r=2$; თუ $\lambda\neq1$ და β ნებისმიერია, მაშინ $r=3$; თუ $\beta\neq\frac{1}{2}$ და λ ნებისმიერია, მაშინ $r=3$; დ) $r=3$, როცა $\lambda\neq0$ და $\beta\neq1$ ან როცა $\lambda=0$, $\beta\neq1$ და $\beta\neq5$; $r=2$, როცა $\lambda\neq0$ და $\beta=1$ ან როცა $\lambda=0$, $\beta=1$ ან $\lambda=0$, $\beta=5$; ე) $r=1$, როცა $\lambda=-2$; $r=2$, როცა $\lambda=2$ და $r=3$, როცა $\lambda\neq\pm2$; ვ) $r=4$, როცა $\lambda\neq\pm3$ და $r=3$, როცა $\lambda=\pm3$; ზ) $r=3$, როცა $\lambda=0$ და $r=4$, როცა $\lambda\neq0$.

თავი 7. წრფივ განტოლებათა სისტემები

§ 7.1. წრფივ განტოლებათა სისტემა. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გაუსის მეთოდი

$x_1, x_2, \Lambda\ , x_n$ უცნობების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda\ + a_{1n}x_n \quad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda\ + a_{2n}x_n \quad = b_2 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda\ + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

სადაც a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \Lambda\ , m;\ j = 1, 2, \Lambda\ , n)$ სიდიდეები K ველის ელემენტებია. ამასთან, a_{ij}-ელემენტებს უცნობების კოეფიციენტები, ხოლო b_i -ს –თავისუფალი წევრები ეწოდებათ.

n-უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება K ველის ელემენტთა $(c_1, c_2, \Lambda\ , c_n)$ დალაგებულ n-ეულს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ თუ სისტემაში x_1-ის ნაცვლად ჩავსვამთ c_1-ს, x_2-ის ნაცვლად ჩავსვამთ c_2-ს და ა.შ x_n-ის ნაცვლად ჩავსვამთ c_n-ს, მაშინ სისტემის თითოეული განტოლება, K ველის ელემენტების მიმართ, სწორ ტოლობად გადაიქცევა.

წრფივ განტოლება სისტემებს ეწოდებათ ტოლფასი სისტემები, თუ მათი ამონახსნების სიმრავლეები ტოლია.

თუ სისტემას გააჩნია ამონახსნი, მას თავსებადი ეწოდება. სხვა შემთხვევაში სისტემას არათავსებადი ქვია.

წრფივ განტოლებათა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნა ეწოდება თითოეულს შემდეგი ორი გარდაქმნიდან:

(1) სისტემის ნებისმიერი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ K ველის რაიმე არანულოვან ელემენტზე

(2) სიტემის i-ურ, $1 \le i \le m$, განტოლებას დავუმატოთ ამავე სისტემის j-ური, $1 \le j \le m$, განტოლება, წინასწარ გამრავლებული K ველის რაიმე არანულოვან ელემენტზე,

სისტემის ელემენტარული გარდაქმნები მის ტოლფასობას არ ცვლის.

არსებობს წრფივ განტოლებატა სისტემის ამოხსნის რამდენიმე ხერხი. ერთ-ერთ ასეთ ხერხს წარმოადგენს **გაუსის მეთოდი**, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულიხსმოთ, რომ $a_{11} \ne 0$ (ამის მიღწევა შესაძლრებელია ყოველთვის). სისტემის i-ურ, $1 < i \le m$ განტოლებას, დაწყებული მეორე განტოლებიდან, გამოვაკლოთ სისტემის პირველი განტოლება გამრავლებული a_{i1} / a_{11}-ზე, მაშინ განტოლებათა მოცემული სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \Lambda\ + a_{1n}x_n \qquad = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}\ x_2 + a'_{13}\ x_3 + \Lambda\ + a'_{2n}\ x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \qquad\quad a'_{m2}\ x_2 + a'_{m3}\ x_3 + \Lambda\ + a'_{mn}\ x_n = b'_m \end{cases}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულიხსმოთ, რომ $a'_{22} \ne 0$. სისტემის i-ურ, $2 < i \le m$ განტოლებას, დაწყებული მესამე განტოლებიდან, გამოვაკლოთ სისტემის მეორე განტოლება გამრავლებული a'_{i1} / a'_{22}-ზე. ეს პროცესი გარკვეული სასრული ნაბიჯის შემდეგ დასრულდება და თავდაპირველი განტოლებათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \Lambda\ + a_{1n}x_n \qquad = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}\ x_2 + a'_{13}\ x_3 + \Lambda\ + a'_{2n}\ x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r + \Lambda\ + b_{rn}x_n = c_r \end{cases}$$

ცხადია, რომ საზოგადოდ $r \le n$. ამგვარად, შეიძლება გვქონდეს შემდეგი ორი შემთხვევა:

(1) თუ $r = n$, მაშინ სისტემა მიიღებს ე.წ. “სამკუთხოვან” სახეს და მისი უკანასკნელი განტოლება იქნება

$$b_{nn}x_n = c_n,\ b_{nn} \ne 0,$$

რომელსაც ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

ამგვარად, ამ შემთხვევაში წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

(2) თუ $r < n$, მაშინ სისტემა მიიღებს ე.წ. “ტრაპეციის” სახეს. ასეთ შემთხვევაში, $x_{r+1}, x_{r+2}, \Lambda, x_n$ უცნობების (დამოუკიდებელი ცვლადები) ყოველი მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ x_1, x_2, Λ, x_r უცნობების შესაბამის მნიშვნელობებს.

ამგვარად, ამ შემთხვევაში წრფივ განტოლებათა სისტემას უამრავი (უსასრულოდ ბევრი) ამონახსნი აქვს.

თუ ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ, რომ სისტემის რომელიმე განტოლების ყველა კოეფიციენტი ნულოვანი ელემენტია, ხოლო თავისუფალი წევრი არანულოვანი, მაშინ ასეთ შემთხვევაში სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

7.1.1. ამოხსენით გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სიტემები

1. $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-2y+4z=9 \\ y+z=2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y-4z=9 \\ -x-12y+14z=1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x-5y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-13y+5z=-4 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ 3x_1+4x_2-x_3-x_4=2 \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=4 \\ 5x_1-3x_2+6x_3+3x_4=5 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4-x_5=4 \\ x_1+4x_2+2x_3-5x_4+3x_5=6 \\ x_1+15x_2+6x_3-19x_4+9x_5=2 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-2x_4+3x_5=4 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4-4x_5=5 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_5=3 \\ x_1-2x_2+3x_3-3x_4+7x_5=-1 \end{cases}$; 7. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} -9x_1+6x_2+7x_3+10x_4=3 \\ -6x_1+4x_2+2x_3+3x_4=2 \\ -3x_1+2x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$; 9. $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$; 10. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4-7=0 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3+1=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4+7=0 \end{cases}$; 12. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_4+3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4+6=0 \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4-2=0 \end{cases}$; 13. $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases}$;

14. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5 \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3 \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1 \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12 \end{cases}$; 15. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$; 16. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7 \\ 2x_1-x_2-5x_4=6 \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1 \end{cases}$;

17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=5 \end{cases}$

7.1.2. ამოხსენით გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სიტემები და იპოვეთ მისი კერძო ამონახსნი

1. $\begin{cases} 12x_1+9x_2+3x_3+10x_4=13 \\ 4x_1+3x_2+x_3+2x_4=3 \\ 8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=7 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4 \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2 \\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21 \\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10 \\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8 \\ 3x_1+3x_2+x_3+x_4=15 \\ 7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$

7.1.3. ამოხსენით განტოლებათა სისტემები გაუსის მეთოდის გამოყენებით

1. $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7 \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1-(1+i)\,x_2-3i\,x_3=b_1 \\ -2x_1+(1+i)\,x_2+(1+3i)x_3=b_2 \\ x_3=b_3 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+ax_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+ax_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+ax_4=1 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$

§ 7.2. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის კრამერის ხერხი

განვიხილოთ n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

უცნობების კოეფიციენტებისაგან შევადგინოთ დეტერმინანტი:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ $\Delta\neq 0$, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ის შემდეგი ფორმულებით მიიღება:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ \ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

სადაც,

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ i=1,\,2,\ldots,n.$$

იმ შემთხვევაში, როცა თითოეული თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია $b_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემას ერთგვაროვანი ეწოდება. როცა $\Delta \neq 0$ ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

7.2.1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა კრამერის ხერხით

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$; 7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

7.2.2. კრამერის ხერხის გამოყენებით ამოხსენით სისტემები

1. $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ ax + 5y = -2a - 5 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0 \end{cases}$; 9. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

7.2.3. ამოხსენით განტოლებატა სისტემა, თუ ცნობილია, რომ x_1, x_2, x_3 დადებითი რიცხვებია

$$\begin{cases} x_1 x_2^2 x_3^3 = 2 \\ x_1^2 x_2^3 x_3^4 = 4 \\ x_1^2 x_2 x_3 = 2 \end{cases}$$

7.2.4. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა ის ნამდვილი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი

1. $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+(1+k)x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+(2+k)x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+(3+k)x_3+2x_4=0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+kx_3=0 \end{cases}$

7.2.5. იპოვეთ k_1, k_2, k_3, k_4 პარამეტრების ყველა ის ნამდვილი მნიშვნელობები, რომელთათვისაც სისტემას არანულოვანი ამონახსნი გააჩნია

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4=0 \\ k_1^2x_1+k_2^2x_2+k_3^2x_3+k_4^2x_4=0 \\ k_1^3x_1+k_2^3x_2+k_3^3x_3+k_4^3x_4=0 \end{cases}$$

7.2.6. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა Z_5 ველის მიმართ

1. $\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2z=2 \\ 2x+z=1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x+3y+4z=3 \\ x+4y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

7.2.7. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა Z_7 ველის მიმართ

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 4x+3y+2z=1 \end{cases}$$

7.2.8. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2+x_3+\ldots+x_n=0 \\ x_1+\quad\;\; x_3+\ldots+x_n=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} \quad =n-1 \end{cases}$$

§ 7.3. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის კრიტერიუმი

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

შევადგინოთ შემდეგი მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

A-ს სისტემის მატრიცა ეწოდება, ხოლო B-ს –სისტემის გაფართოებული მატრიცა.

იმისათვის, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემა იყოს თავსებადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის მატრიცისა და გაფართოებული მატრიცის რანგები იყოს ერთმანეთის ტოლი:

$$rank\, A = rank\, B = r\,.$$

სისტემის თავსებადობის შემთხვევაში, თუ A მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში მოვაქცევთ "საბაზისო მინორს", მაშინ თავდაპირველი სისტემა ტოლფასია შემდეგი სისტემის:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \Lambda + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \Lambda + a_{2n}x_n) \\ \Lambda \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \Lambda + a_{rr}x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \Lambda + a_{rn}x_n) \end{cases},$$

რომლის ამოხსნა შესაძლებელია როგორც გაუსის მეთოდის ასევე კრამერის ხერხის გამოყენებით.

საზოგადოდ $r \le n$. იმ შემთხვევაში, როცა $r = n$ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო როცა $r < n$ −სისტემას გააჩნია უამრავი ამონახსნი.

7.3.1. გამოიკვლიეთ სისტემის თავსებადობის საკითხი და თავსებადობის შემთხვევაში ამოხსენით

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

7.3.2. გამოიკვლიეთ თავსებადია თუ არა სისტემა და თავსებადობის შემთხვევაში ამოხსენით ის

1. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

7.3.3. გამოიკვლიეთ სისტემის თავსებადობის საკითხი, იპოვეთ სისტემის ზოგადი ამონახსნი და ერთი კერძო ამონახსნი

1. $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7 \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ 3x_1-3x_2+4x_3-3x_4=1 \\ 3x_1-3x_2+8x_3-3x_4=5 \\ x_1-x_2+6x_3-x_4=5 \end{cases}$

7.3.4. ქვემოთ მოცემულ სისტემას $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი. დაამტკიცეთ, რომ $a\cdot b\cdot c\neq 0$. იპოვეთ სისტემის ამონახსნი

7.3.5. იპოვეთ λ პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda \end{cases}$$

წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადია

7.3.6. გამოარკვიეთ λ პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არის სისტემა თავსებადი, იპოვეთ სისტემის ამონახსნი

1. $\begin{cases} 3x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=-\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda \\ (4\lambda+3)x_1+(2\lambda-1)x_2+(\lambda+4)x_3=2\lambda+3 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ (\lambda+1)x_1+(\lambda+2)x_2+2x_3+2x_4=4 \\ \lambda x_2-\lambda x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$

7.3.7. გამოარკვიეთ არის თუ არა თავსებადი წრფივ განტოლებათა სისტემა. თუ თავსებადია, ამოხსენით ის

1. $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} (\lambda+3)x+y+2z=\lambda \\ \lambda x+(\lambda-1)y+z=2\lambda \\ 3(\lambda-1)x+\lambda y+(\lambda+3)z=5 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z=\lambda \\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z=\lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z=1 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} ax+by+2z=1 \\ ax+(2b-1)y+3z=1 \\ ax+by+(b+3)z=2b-1 \end{cases}$

7.3.8. დაამტკიცეთ, რომ თუ ნამდვილკოეფიციენტებიან წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს კომპლექსური ამონახსნი, მაშინ მას აქვს ნამდვილი ამონახსნიც

7.3.9. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემა Z_3 და Z_5 ველების მიმართ

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2z=2 \\ 2x+z=1 \end{cases}$$

7.3.10. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემა Z_5 და Z_7 ველების მიმართ

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 4x+3y+2z=1 \end{cases}$$

7.3.11. ამოხსენით მატრიცული განტოლება

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

§ 7.4. წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა. ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა

წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სიტემას აქვს სახე

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = 0 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

ერთგვაროვანი სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან მას ნულოვანი ამონახსნი ყოველთვის აქვს.

წრფივ ერთგაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნები წრფივ სივრცეს ქმნიან. ამ სივრცის ნებისმიერ ბაზის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა ეწოდება. ამონახსნთა სივრცის განზომილებაა $n-r$, სადაც r −სისტემის მატრიცის რანგია. ამგვარად, ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა შედგება $n-r$ ამონახსნისაგან.

7.4.1. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი და ააგეთ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+2x_3-19x_4=0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+\quad 4x_4+8x_5=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0 \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1+x_3-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4+x_6=0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0 \end{cases}$

7.4.2. იპოვეთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა

1. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2-2x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 4x_1-4x_2\qquad\qquad -x_5=0 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+5x_3+3x_4+x_5=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2-7x_3-11x_4=0 \\ x_1+x_2-9x_3-14x_4=0 \end{cases}$; 5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases}$; 6. $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

7.4.3. დაამტკიცეთ, რომ თუ ნამდვილკოეფიციენტიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას გააჩნია არანულოვანი კომპლექსური ამონახსნი, მაშინ მას არანულოვანი ნამდვილი ამონახსნიც აქვს

7.4.4. შეადგინეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას აქვს სახე

1. $\begin{cases} (4,\ 5,\ 1,\ 0) \\ (3,\ 2,\ 0,\ 1) \end{cases}$; 2. $\begin{cases} (1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 1) \\ (0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2) \\ (0,0,1,-1,-2) \end{cases}$

პასუხები:

7.1.1. 1. $(1,0,2)$, 2. $(13/3,\ -13/3,\ -10/3)$, 3. $(1+4c/3,\ c,\ -1+7c/3),\ c\in R$, 4. $(1,0,-1,2)$, 5. $\varnothing$,

6. $(1+(47x_4-38x_5)/32,\ 1+(-7x_4+6x_5)/4,\ (-21x_4-30x_5)/32,\ x_4,x_5),\ x_4,x_5\in R$,

7. $(x_1,x_2,\ (x_1-9x_2-2)/11,\ (-5x_1+x_2+10)/11),\ x_1,x_2\in R$,

8. $(2x_2/3 - x_4/24 + 1/3, x_2, \ -11x_4/8, \ x_4), \ x_2, x_4 \in R$, 9. $\varnothing$, 10. $(-1,3,-2,2)$, 11. $(2,1,-3,1)$,
12. $(-2,1,4,3)$, 13. $(0,2,1/3,-3/2)$, 14. $(6-26x_3+17x_4, \ -1+7x_3-5x_4, x_3, \ x_4), \ x_3, x_4 \in R$,
15. $((6-15x_2-x_4)/10, \ x_2, \ (1+4x_4)/5), \ x_2, x_4 \in R$, 16. $\varnothing$, 17. $\varnothing$

7.1.2. 1. $(x_1, x_2, \ 1-4x_1-3x_2, 1), \ x_1, x_2 \in R$, 2. $(x_1, x_2, \ 6+10x_1-15x_2, \ -7-12x_1+18x_2), \ x_1, x_2 \in R$,
3. $(3,0,-5,11)$, 4. $(3,2,1)$. **7.1.3.** 1. $(x_1, x_2, \ 13, 19-3x_1-2x_2, -34), \ x_1, x_2 \in R$,
2. $((1+i)x_2/2 + b_1/2 + 3i\,b_3/2, x_2, \ b_3), \ x_2, b_1, b_3 \in R$, 3. თუ $a=3$, მაშინ $\varnothing$;
თუ $a \neq 1$ და $a \neq -3$, მაშინ $(1/(a+3), 1/(a+3), 1/(a+3), 1/(a+3))$;
თუ $a=1$, მაშინ $(1-x_2-x_3-x_4, x_2, x_3, \ x_4)$, 4. $(-11x_3/7, -x_3/7, \ x_3)$, 5. $(x_1, x_2, \ 2x_2-x_1, 1)$, 6. $\varnothing$

7.2.1. 1. $(3,1,1)$, 2. $(1, \ 2, -1)$, 3. $(2, -2, \ 3)$, 4. $(3,4,5)$, 5. $(-1, -1, \ 0, \ 1)$, 6. $(1, \ 2, -1, -2)$, 7. $(-2, 2, \ -3, 3)$,
8. $(1, 2, \ 1, -1)$. **7.2.2.** 1. თუ $a \neq -2$, $(-2,-1)$, 2. $(2, \ 0, 0, 0)$, 3. $(0, \ 0, 0, 0)$, 4. $(1, \ -1, 1, -1, 1)$,
5. $(2, \ 0, -2, -2, 1)$, 6. $(1, 1, -1, -1)$, 7. $(-2, \ 0, 1, -1)$, 8. $(2, \ -2, 1, -1)$, 9. $(-0{,}4; -1{,}2; \ 3{,}4; \ 1)$

7.2.3. $(1, 4, 1/2)$. **7.2.4.** 1. $k=-1; \ 0; 1$, 2. $k=-2; \ 0$. **7.2.5.** $k_i = k_j$, $i \neq j$, რომელიმე $i, \ j = 1,2,3,4$-თვის; **7.2.6.** 1. $(2,3,2)$, 2. $(1, \ 0, 4)$; **7.2.7.** $(2, \ 6, \ 5)$; **7.2.8.** $x_i = n/2 - i + 1$

7.3.1. 1. $(1,2,1)$, 2. $\varnothing$, 3. $(-8, \ 3+x_4, 6+2x_4, x_4)$, 4. $((1+x_5)/3, (1+3x_3+3x_4-5x_5)/3, \ x_3, \ x_4, \ x_5)$, 5. $\varnothing$,
6. $(-x_5)/2, \ -1-x_5/2, \ 0, \ -1-x_5/2, \ x_5)$, 7. $\varnothing$, 8. $((1+5x_4)/6, \ (1-7x_4)/6, \ (1+5x_4)/6, \ x_4)$

7.3.2. 1. $((x_3-9x_4-2)/11, \ (-5x_3+x_4+10)/11, x_3, x_4)$, 2. $(x_1, \ x_2, \ 22x_1-33x_2-11, \ -16x_1+24x_2+8)$,
3. $(x_1, \ x_2, 1-3x_1-4x_2, \ 1)$, 4. $\varnothing$, 5. $((-6+8x_4)/7, \ (1-13x_4)/7, \ (15-6x_4)/7, \ x_4)$, 6. $(3, \ 0, \ -5, \ 11)$, 7. $\varnothing$,
8. $((-4x_4+7x_5)/8, \ (-4x_4+5x_5)/8, \ (4x_4-5x_5)/8, \ x_4, x_5)$; **7.3.3.** 1. $(x_1, \ x_2, 13, \ 19-3x_1-2\,x_2, -34)$,
2. $((3x_3-13x_4)/17, \ (19x_3-20x_4)/17, \ x_3, \ x_4)$, 3. $(7x_5/6 - x_3, \ 5x_5/6 + x_3, \ x_3, \ x_5/3, x_5)$,
4. $(x_1, \ 1+x_1-x_4, 1, \ x_4)$; **7.3.4.** $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; **7.3.5.** $\lambda = 5$

7.3.6. 1. თუ $\lambda = 0$ ან $\lambda = 1$, მაშინ $\varnothing$; თუ $\Delta = \lambda^2(\lambda-1) \neq 0$, მაშინ $((\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9)/\Delta$,
$(\lambda^3+12\lambda-9)/\Delta, \ (-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9)/4)$; 2. თუ $\lambda = 0$, მაშინ $\varnothing$;
თუ $\lambda = 1$, მაშინ $(-4-x_4, 2, 3, x_4)$; თუ $\lambda(\lambda-1) \neq 0$, მაშინ $(0, 2/\lambda, \ 3/\lambda, \ (\lambda-5)/\lambda)$
3. თუ $\lambda = 1$, მაშინ $(-x_2-x_3, x_2, \ x_3)$; თუ $\lambda = -2$, მაშინ (x_1, x_1, x_1); თუ $(\lambda+2)(\lambda-1) \neq 0$, მაშინ $(0, 0, \ 0)$
4. თუ $\lambda = 1$, მაშინ $(1-x_2-x_3, x_2, \ x_3)$; თუ $\lambda = -2$, მაშინ $\varnothing$; თუ $(\lambda+2)(\lambda-1) \neq 0$,
მაშინ $((-\lambda-1)/(\lambda+2), 1/(\lambda+2), \ (\lambda+1)^2/(\lambda+2))$;

7.3.7. 1. თუ $a = 1$ და $b = 1/2$, მაშინ $x = 2 - z, \ y = 2$;
თუ $b(a-1) \neq 0$, მაშინ $x = (2b-1)/(ab-b), \ y = 1/b, z = (2ab-4b+1)/(ab-b)$; სხვა შემთხვევაში $\varnothing$
2. თუ $a = -2$ და $b = -2$, მაშინ $x = z = 1 - 2y$; თუ $a = 1$ და $b = 1$, მაშინ $x = 1 - y - z$;
თუ $b(a-1)(a+2) \neq 0$, მაშინ $x = z = (a-b)/(a-1)(a+2), \ y = (ab+b-2)/(ab-b)(a+2)$; სხვა შემთხვევაში $\varnothing$
3. თუ $\lambda = 1$, მაშინ $x = 2 - z, \ y = -7 + 2z$; თუ $\lambda = 0$, მაშინ $\varnothing$;
თუ $\lambda \neq 0$ და $\lambda \neq 1$, მაშინ $x = (\lambda^2+4\lambda-15)/\lambda^2$, $y = (\lambda^2+\lambda+15)/\lambda^2$, $z = (-4\lambda^2+\lambda+15)/\lambda^2$
4. თუ $\lambda = 0$, მაშინ $x = 1, \ y = z = 0$; თუ $\lambda \neq 0$, მაშინ $x = 1 - \lambda, \ y = \lambda, \ z = 0$
5. თუ $b = 1$, მაშინ $z = 0, \ y = 1 - ax$; თუ $a = 0$ და $b = 5$, მაშინ $y = -1/3, \ z = 4/3, \ x \in R$;
თუ $a \neq 0$ და $b \neq \pm 1$, მაშინ $x = (5-b)/(ab+a), \ y = -2/(b+1), \ z = (2b-2)/(b+1)$; სხვა შემთხვევაში $\varnothing$

7.3.8. მისი ნამდვილი ამონახსნია კომპლექსური ამონახსნის ნამდვილი ნაწილები

7.3.9. Z_3-ის მიმართ $\varnothing$, ხოლო Z_5-ის მიმართ $(2, \ 3, \ 2)$; **7.3.10.** Z_5-ის მიმართ $\varnothing$, ხოლო Z_7-ის მიმართ $(2, \ 6, \ 5)$; **7.3.11.** 1. $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1-2x_1 & 1-2x_2 \end{pmatrix}$, 2. $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, სადაც $x + y + z + t = 1$

7.4.1. 1. ზოგადი ამონახსნი: $(8x_3-7x_4, -6x_3+5x_4, \ x_3, \ x_4)$; ფუნდ. სისტემა: $(8, \ -6, \ 1, \ 0)$, $(-7, \ 5, \ 0, \ 1)$,

2. ზოგადი ამონახსნი: $(x_1,\ x_2,\ -5x_1/2+5x_2, 7x_1/2-7x_2)$; ფუნდ. სისტემა: $(1,\ 0,\ -5/2,\ 7/2),\ (0,\ 1,\ 5,\ 7)$,

3. ზოგადი ამონახსნი: $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ (-9x_1-6x_2-8x_3)/4,\ (3x_1+2x_2+4x_3)/4)$;
ფუნდ. სისტემა: $(1,\ 0,0,\ -9/4,\ 3/4),\ (0,\ 1,0,\ -3/2,\ 1/2),\ (0,\ 0,1,\ -2,\ 1)$

4. სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს

5. ზოგადი ამონახსნი: $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ (-9x_1+3x_2-10x_3)/11,\ (-3x_1+x_2+4x_3)/11)$;
ფუნდ. სისტემა: $(1,\ 0,0,\ -9/11,\ -3/11),\ (0,\ 1,0,\ 3/11,\ 1/11),\ (0,\ 0,1,\ -10/11,\ 4/11)$,

6. სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს

7. ზოგადი ამონახსნი: $(x_4-x_5,\ x_4-x_6,\ x_4,\ x_4,\ x_5, x_6)$;
ფუნდ. სისტემა: $(1,\ 1,1,\ 1,0,0),\ (-1,\ 0,0,\ 0,\ 1,0),\ (0,\ -1,0,\ 0,\ 0,1)$

8. ზოგადი ამონახსნი: $(0,\ (x_3-2x_5)/3,\ x_3,0,\ \ x_5)$;
ფუნდ. სისტემა: $(0,\ 1/3,1,\ 0,0),\ (0,\ -2/3,0,\ 0,\ 1)$

7.4.2. 1. $(0,\ 1,\ 1)$, 2. $(1,0,\ 0,5,\ 4)$, $(0,1,-1,-7,-4)$, 3. $(2,-3,\ 0,0,\ 0)$, $(0,-2,1,1,0)$, $(0,-4,3,0,1)$, 4. $(1,0,\ -3,2)$, $(0,1,-3,2)$, 5. $(1,-4,\ 3,0)$, $(-1,-1,0,\ 1)$, 6. $(-1,1,\ 0,0)$, $(-1,0,1,\ 0)$, $(-1,0,0,\ 1)$

7.4.4. 1. მაგალითად, $\begin{cases} x_1-4x_3-3x_4=0 \\ x_2-5x_3+2x_4=0 \end{cases}$, 2. მაგალითად, $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_5=0 \end{cases}$

თავი 8. პოლინომთა ალგებრა

§ 8.1. მოქმედებები პოლინომებზე. პოლინომთა უდიდესი საერთო გამყოფი

K ველის მიმართ n-ური ხარისხის პოლინომი (მრავალწევრი) ეწოდება გამოსახულებას:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \Lambda + a_{n-1} x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \, x^{n-i},$$

სადაც $a_i \in K, \, i = 0, 2, \Lambda, n,$ სიდიდეებს პოლინომის კოეფიციენტები ეწოდებათ. $a_0 \neq 0$-ს პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი და $a_0 x^n$-ს პოლინომის უფროსი წევრი ქვია. $n = \deg f(x)$ ნატურალურ რიცხვს –პოლინომის ხარისხს უწოდებენ.

მოცემული ორი

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, x^{n-i} \qquad \text{და} \qquad g(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i \, x^{s-i}$$

პოლინომისათვის განიმარტება:

პოლინომთა ჯამი

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k=\max(n,s)} c_i \, x^{k-i}, \text{ სადაც, } c_i = a_i + b_i, \, i \leq \min(n,s) \text{ და}$$

$$c_i = a_i \text{ ან } c_i = b_i, \quad i > \min(n,s);$$

პოლინომთა ნამრავლი

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+s} d_j \, x^{n+s-j}, \text{ სადაც } \quad d_j = \sum_{i+l=j}^{n+s} a_i \, b_l \, .$$

ასეთნაირად განმარტებული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ $K[x]$ პოლინომთა სიმრავლე კომუტაციური რგოლია.

ადგილი აქვს თეორემას გაყოფადობის შესახებ: თუ $f(x), \, g(x) \in K[x]$ და $g(x) \neq 0$, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი $q(x), \, r(x) \in K[x]$ პოლინომებისა, რომ

$$f(x) = g(x) \, q(x) + r(x),$$

სადაც $r(x) = 0$ ან $\deg r(x) < \deg g(x)$.

$q(x)$-ს ეწოდება განაყოფი, ხოლო $r(x)$-ს ნაშთი. თუ $r(x) = 0$, მაშინ ამბობენ, რომ $g(x)$ პოლინომი ყოფს $f(x)$ პოლინომს და ჩაწერენ $g(x) | f(x)$. ამ შემთხვევაში, $g(x)$-ს $f(x)$-ის გამყოფი, ხოლო $f(x)$-ს $g(x)$-ს ჯერადი ეწოდება.

$g(x)$-ს ეწოდება $f_1(x), f_2(x), \Lambda, f_k(x)$ პოლინომების საერთო გამყოფი, თუ

$$g(x) | f_1(x), \; g(x) | f_2(x), \; \Lambda, \; g(x) | f_k(x) \, .$$

$f_1(x), f_2(x), \Lambda, f_k(x)$ პოლინომების $d(x)$ საერთო გამყოფს, რომელიც მათ ნებისმიერ საერთო გამყოფზე იყოფა, უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება. ის, რომ $d(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი, ასე ჩაიწერება $(f(x), g(x)) = d(x)$. ორ პოლინომს ეწოდება თანამარტივი, თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი ნულოვანი ხარისხის არანულოვანი პოლინომია $(f(x), g(x)) = 1$.

თუ $g(x)$ პოლინომი $f(x)$ პოლინომს არ ყოფს, მაშინ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომებისათვის ევკლიდეს ალგორითმის უკანასკნელი არანულოვანი ნაშთის ტოლია, უფროსი კოეფიციენტით ერთიანი.

8.1.1. $R[x]$ რგოლში, შემდეგი პოლინომებისათვის, იპოვეთ განაყოფი და ნაშთი 1. $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ და $g(x)=x^2-3x+1$,

2. $f(x)=x^3-3x^2-x-1$ და $g(x)=3x^2-2x+1$,

3. $f(x)=x^4-4x^3+5x^2+x-1$ და $g(x)=x^2-2x-3$,

4. $f(x)=5x^4-x^2+6$ და $g(x)=x^2+3x+2$,

5. $f(x)=2x^2-3x+1$ და $g(x)=x^3+4$

8.1.2. a, p და q სიდიდეების რა მნიშვნელობებისათვის ყოფს $g(x)=x^2+ax+1$ მრავალწევრი $f(x)$ მრავალწევრს

1. $f(x)=x^4+q$, 2. $f(x)=x^4-21x+q$, 3. $f(x)=x^4+px+q$, 4. $f(x)=x^4-7x^2+q$

8.1.3. p და q სიდიდეების რა მნიშვნელობებისათვის იყოფა $f(x)$ მრავალწევრი $g(x)$ მრავალწევრზე?

1. $f(x)=x^3+px+q$, $g(x)=x^2+mx-1$, 2. $f(x)=x^4+px^2+q$, $g(x)=x^2+mx+1$

8.1.4. $Z_3[x]$, $Z_5[x]$ და $Q[x]$ რგოლებში, შემდეგი პოლინომებისათვის, იპოვეთ განაყოფი და ნაშთი

1. $f(x)=x^5+x^2-x-1$ და $g(x)=x^3-2x+1$, 2. $f(x)=2x^4+x^2+2x$ და $g(x)=x^2-2$

8.1.5. შემდეგი პოლინომებისათვის იპოვეთ უდიდესი საერთო გამყოფი

1. $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ და $g(x)=x^3+x^2-x-1$,

2. $f(x)=x^5+x^4-x^3-2x-1$ და $g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x-2$,

3. $f(x)=x^6+x^5+x^4-3x^2+2x-6$ და $g(x)=x^5+3x^2-2x+2$,

4. $f(x)=x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ და $g(x)=3x^5-7x^3+3x^2-7$,

5. $f(x)=x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$ და $g(x)=3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$,

6. $f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ და $g(x)=x^5+x^2-x+1$,

7. $f(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$ და $g(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1$,

8. $f(x)=x^4-4x^3+1$ და $g(x)=x^3-3x^2+1$,

9. $f(x)=x^4+2x^3+2x+2$ და $g(x)=x^3+3x+2$

8.1.6. ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით, იპოვეთ $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომები, რომ შესრულდეს ტოლობა $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, სადაც $d(x)=(f(x), g(x))$

1. $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$ და $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$,

2. $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$ და $g(x)=x^4+2x^3+x+2$,

3. $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$ და $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$,

4. $f(x)=3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4$ და $g(x)=3x^6-3x^4+7x^3-6x+2$,

5. $f(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$ და $g(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$,

6. $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$ და $g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$

8.1.7. ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით, იპოვეთ $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომები, რომ შესრულდეს ტოლობა $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

1. $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$ და $g(x)=x^2-x+1$,

2. $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$ და $g(x)=x^2-x-1$,

3. $f(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$ და $g(x)=x^3-5x^2-3x+17$,

4. $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$ და $g(x)=2x^3+x^2-x-1$,

5. $f(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$ და $g(x)=3x^3-2x^2+x-1$

8.1.8. იპოვეთ $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი, თუ ცნობილია, რომ $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, სადაც $d(x)=(f(x),g(x))$

8.1.9. იპოვეთ $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი $Z_2[x]$ რგოლში

1. $f(x)=x^5+x^4+1$ და $g(x)=x^4+x^2+1$,
2. $f(x)=x^5+x^3+x+1$ და $g(x)=x^4+1$,
3. $f(x)=x^5+x+1$ და $g(x)=x^4+x^3+1$,
4. $f(x)=x^5+x^3+x$ და $g(x)=x^4+x+1$

§ 8.2. პოლინომის ფესვი. მარტივი და ჯერადი ფესვი

განვიხილოთ პოლინომი

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{n-k} \in K[x].$$

ბეზუს თეორემის ძალით, $f(x)$ პოლინომის $(x-x_0)$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი $r=f(x_0)$-ის ტოლია. მაშასადამე, ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x)=(x-x_0)\,q(x)+f(x_0).$$

განაყოფის ანუ $q(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებისა და $f(x_0)$ მნიშვნელობის პოვნა შესაძლებელია ჰორნერის სქემის გამოყენებით:

	a_0	a_1	a_2	. . .	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	b_2	. . .	b_{n-1}	b_n

სადაც, $b_0=a_0$, $b_1=x_0\,b_0+a_1$, . . . , $b_k=x_0\,b_{k-1}+a_k$, . . . $b_{n-1}=x_0\,b_{n-2}+a_{n-1}$ სიდიდეები $q(x)$ პოლინომის კოეფიციენტებია, ხოლო $b_n=x_0\,b_{n-1}+a_n=f(x_0)$.

$f(x)$ პოლინომის ფესვი ეწოდება K ველის (ან მისი გაფართოების) ისეთ c ელემენტს, რომლისთვისაც $f(c)=0$. ცხადია, რომ x_0 არის $f(x)$ პოლინომის ფესვი მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $(x-x_0)|f(x)$.

x_0-ს ეწოდება $f(x)$ პოლინომის k-ჯერადი ფესვი თუ k არის უდიდესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $(x-x_0)^k|f(x)$. ასეთ შემთხვევაში $(x-x_0)$-ს $f(x)$ პოლინომის k-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი ეწოდება. თუ $k=1$, მაშინ x_0 ფესვს მარტივი ფესვი ეწოდება.

$f(x)$ პოლინომის წარმოებული $f'(x)$-ით აღინიშნება და ის ტოლია:

$$f'(x)=n\,a_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\Lambda+2a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

თუ x_0 არის $f(x)$ პოლინომის k-ჯერადი ფესვი, მაშინ ის $f'(x)$ პოლინომისათვის $k-1$-ჯერადი ფესვი იქნება.

ვთქვათ, $x_0, x_1, \Lambda, x_n \in K$ ველის განსხვავებული ელემენტებია და $y_0, y_1, \Lambda, y_n \in K$ ველის ნებისმიერი ელემენტებია. არსებობს $K[x]$ რგოლის ერთადერთი n-ური ხარისხის $f(x)$ პოლინომი, რომ $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,\Lambda, n$. მას ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი ეწოდება და აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Lambda\,(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\Lambda\,(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\Lambda\,(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\Lambda\,(x_i-x_n)}$$

8.2.1. ჰორნერის სქემის გამოყენებით, იპოვეთ $q(x)$ განაყოფი და r ნაშთი

1. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad g(x) = x - 1$,
2. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, \quad g(x) = x + 3$,
3. $f(x) = 4x^3 + x^2, \quad g(x) = x + 1 + i$,
4. $f(x) = x^3 - x^2 - x, \quad g(x) = x - 1 + 2i$

8.2.2. ჰორნერის სქემის გამოყენებით, იპოვეთ $f(x_0)$, თუ

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad x_0 = 4$,
2. $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7, \quad x_0 = 3$,
3. $f(x) = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 5, \quad x_0 = -0{,}5$,
4. $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7, \quad x_0 = -2 - i$,
5. $f(x) = x^5 + (1-2i)x^4 - (3-i)x^2 + 7, \quad x_0 = -1 + 2i$

8.2.3. ჰორნერის სქემის გამოყენებით, $f(x)$ პოლინომი წარმოადგინეთ $(x - x_0)$ სხვაობის ხარისხების სახით

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1$,
2. $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1$,
3. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2$,
4. $f(x) = x^4 + 2i\,x^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad x_0 = -i$,
5. $f(x) = x^4 + (3-8i)x^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7 + 18i, \quad x_0 = -1 + 2i$

8.2.4. ჰორნერის სქემის გამოყენებით, $f(x+3)$ პოლინომი წარმოადგინეთ x-ის ხარისხებად, თუ $f(x) = x^4 - x^3 + 1$

8.2.5. იპოვეთ $f(x)$-ისა და მისი წარმოებულის მნიშვნელობები x_0 წერტილში, თუ

1. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2$,
2. $f(x) = x^4 - 3i\,x^3 - 4x^2 - 5i\,x - 1, \quad x_0 = 1 + 2i$

8.2.6. ჰორნერის სქემის გამოყენებით, $f(x)$ პოლინომისათვის დაადგინეთ x_0 ფესვის ჯერადობა

1. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad x_0 = 2$,
2. $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \quad x_0 = -2$,
3. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9, \quad x_0 = 3$

8.2.7. იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $x = -1$ არის $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ პოლინომის ფესვი, ჯერადობით არანაკლებ ორი

8.2.8. დაადგინეთ A და B პარამეტრების მნიშვნელობები, თუ ცნობილია, რომ $Ax^4 + Bx^3 + 1$ მრავალწევრი $(x-1)^2$-ზე იყოფა

8.2.9. იპოვეთ $f(x)$ პოლინომის ჯერადი ფესვები

1. $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$,
2. $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$,
3. $f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$,
4. $f(x)=x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$,
5. $f(x)=x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$,
6. $f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$

8.2.10. a პარამერტის რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $x=1$ ჯერადი ფესვი $f(x)$ პოლინომისათვის და როგორია მისი ჯერადობა?

1. $f(x)=x^3+ax^2+3x-1$,
2. $f(x)=2x^3-x^2+ax+3$,
3. $f(x)=3x^4-6x^3+ax^2-2x+1$

8.2.11. იპოვეთ $\varphi(x)$ მრავალწევრი, რომელსაც აქვს იგივე ფესვები, რაც $f(x)$ პოლინომს, მაგრამ არა აქვთ ჯერადი ფესვები. დაშალეთ $f(x)$ მრავალწევრი დაუყვანადი მამრავლების ნამრავლად, C კომპლექსური ველის მიმართ

1. $f(x)=x^6-2x^5-9x^4+4x^3+31x^2+30x+9$,
2. $f(x)=x^6-2x^5-x^4+4x^3-x^2-2x+1$,
3. $f(x)=x^6-4x^5+7x^4-8x^3+7x^2-4x+1$,
4. $f(x)=x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8$

8.2.12. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\Lambda+\frac{x^n}{n!}$$

პოლინომს ჯერადი ფესვები არა აქვს

8.2.13. ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულის გამოყენებით, შეადგინეთ უმცირესი ხარისხის პოლინომი შემდეგი ცხრილის გამოყენებით

1.

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	4	3

2.

x	1	i	-1	$-i$
$f(x)$	1	2	3	4

3.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	-1	-3	1

4.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	13	1	1	1	13

8.2.14. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^3-21x+a$ პოლინომის ერთი ფესვი ორჯერ მეტია მეორეზე

8.2.15. იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც x^3+12x^2+a პოლინომის ორი ფესვის ჯამი მესამე ფესვის ტოლია

§ 8.3. პოლინომის დაშლა დაუყვანად მამრავლებად. პოლინომის რაციონალური ფესვი

მუდმივისაგან განსხვავებული $f(x)\in K[x]$ პოლინომს ეწოდება დაყვანადი K ველის მიმართ, თუ $K[x]$ რგოლში არსებობს მუდმივისაგან განსხვავებული ისეთი $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომები, რომ $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $f(x)$ პოლინომს ეწოდება K ველის მიმართ დაუყვანადი პოლინომი.

ნებისმიერი $f(x)\in K[x]$ პოლინომი შეიძლება წარმოვადგინოთ K ველის მიმართ დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლის სახით.

n-ური ხარისხის ყოველი $f(x)\in K[x]$ პოლინომისათვის არსებობს K ველის ისეთი გაფართოება, რომელიც შეიცავს $f(x)$ პოლინომის $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ –ყველა ფესვს. K ველის ამ გაფართოების მიმართ $f(x)$ პოლინომი შეიძლება დავშალოთ წრფივ მამრავლებად:

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

სადაც $a_0\neq 0$ არის $f(x)$ პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი.

კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ მხოლოდ პირველი ხარისხის პოლინომია დაუყვანადი. ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ დაუყვანადია პირველი ხარისხის პოლინომები და მეორე ხარისხის ის პოლინომები, რომელთა დისკრიმინანტი უარყოფითია და მხოლოდ ისინი.

8.3.1. დაშალეთ $f(x)$ პოლინომი დაუყვანად მამრავლებად, ნამდვილი და კომპლექსური ველების მიმართ

1. $f(x)=x^3-8$, 2. $f(x)=x^3+8$, 3. $f(x)=x^4-16$, 4. $f(x)=x^4+16$, 5. $f(x)=x^6-27$,
6. $f(x)=x^6+27$, 7. $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, 8. $f(x)=x^4+4$, 9. $f(x)=x^4-10x^2+1$,
10. $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$, 11. $f(x)=x^8-6x^4+9$, 12. $f(x)=x^{2n}-2x^n+2$,
13. $f(x)=x^{2n}+x^n+1$, 14. $f(x)=x^{2n}-1$, 15. $f(x)=x^{2n+1}-1$, 4. $f(x)=x^4-ax^2+1,\ -2<a<2$

8.3.2. მოცემული ფესვების მიხედვით, შეადგინეთ ნამდვილ და კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი, უმცირესი ხარისხის პოლინომები

1. 1 –ორჯერადი ფესვი, i და -1 –მარტივი ფესვები, 2. $1-2i$ –სამჯერადი ფესვი,
3. i –ორჯერადი ფესვი, $-1-i$ –მარტივი ფესვი,
4. $-1-i$ და $-2+i$ –ორჯერადი ფესვები, 5. 1, i და -1 –მარტივი ფესვები,

8.3.3. იპოვეთ $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი

1. $f(x)=(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4),\quad g(x)=(x-1)^2(x+2)(x+5)$,
2. $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1),\quad g(x)=(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$,
3. $f(x)=(x^3-1)(x^2-2x+1),\quad g(x)=(x^2-1)^3$

8.3.4. იპოვეთ $f(x)$ და $f'(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი

1. $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3)$, 2. $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$

8.3.5. დაამტკიცეთ, რომ თუ უკვეცი რაციონალური p/q რიცხვი $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ მთელ კოეფიციენტებიანი პოლინომის ფესვია, მაშინ:

1. q ყოფს a_0-ს; 2. p ყოფს a_n-ს; 3. ნებისმიერი $m\in Z$ მთელი რიცხვისათვის, $p-mq$ ყოფს $f(m)$-ს. კერძოდ, $p-q$ ყოფს $f(1)$-ს და $p+q$ ყოფს $f(-1)$-ს

8.3.6. იპოვეთ შემდეგი პოლინომის რაციონალური ფესვები

1. $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$, 2. $f(x)=x^4-2x^3-8x^2+13x-24$,
3. $f(x)=x^5-7x^3-12x^2+6x+36$, 4. $f(x)=x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$,
5. $f(x)=x^4+2x^3-13x^2-38x-24$, 6. $f(x)=2x^3+3x^2+6x-4$, 7. $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$,
8. $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$, 9. $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$,
10. $f(x)=x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$, 11. $f(x)=3x^4+4x^3-2x^2-4x-1$,
12. $f(x)=2x^4+10x^3+3x^2-14x-1$

8.3.7. იპოვეთ $f(x)$ პოლინომის მთელი ფესვები

1. $f(x)=3x^4+5x^3+x^2+x-2$, 2. $f(x)=2x^5+7x^4+3x^3-11x^2-16x-12$,
3. $f(x)=3x^6-5x^4-10x^3-8x^2+x-2$, 4. $f(x)=6x^4+x^3+2x^2-4x+1$

8.3.8. დაამტკიცეთ, რომ მთელ კოეფიციენტებიან $f(x)$ პოლინომს მთელი ფესვები არ გააჩნია, თუ:

1. $f(0)$ და $f(1)$ კენტი რიცხვებია
2. $f(m)$ და $f(m+1)$ კენტი რიცხვებია, რაიმე მთელი m რიცხვისათვის

8.3.9. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)$ პოლინომი დაუყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ

1. $f(x)=x^4-8x^3+12x^2-6x+2$, 2. $f(x)=x^5-12x^3+36x-12$, 3. $f(x)=x^4-x^3+2x+1$

8.3.10. დაამტკიცეთ, რომ $\mathrm{X}_p=\dfrac{x^p-1}{x-1}$ წრიული პოლინომი, სადაც p მარტივი რიცხვია, რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ დაუყვანადია

8.3.11. შეადგინეთ დაუყვანად პოლინომთა ცხრილი Z_2 ველის მიმართ, მეორე ხარისხის ჩათვლით

8.3.12. შეადგინეთ დაუყვანად პოლინომთა ცხრილი Z_3 ველის მიმართ, მეორე ხარისხის ჩათვლით

§ 8.4. სიმეტრიული პოლინომები

K ველის მიმართ n-უცნობიან $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ პოლინომს ეწოდება სიმეტრიული თუ ის უცნობთა ნებისმიერი გადანაცვლების დროს არ იცვლება.

n-უცნობიან სიმეტრიულ პოლინომებს

$$\sigma_1=x_1+x_2+\ldots+x_n$$
$$\sigma_2=x_1x_2+\ldots+x_1x_n+\ldots+x_{n-1}x_n$$
$$\sigma_3=x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_n=x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$$

ელემენტარული სიმეტრიული პოლინომები ეწოდება.

სიმეტრიული პოლინომების შესახებ, ადგილი აქვს ძირითად თეორემას: $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების ნებისმიერი $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ სიმეტრიული პოლინომი ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც, K ველის მიმართ, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\ldots,\sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული პოლინომების მრავალწევრი, ამასთან ეს წარმოდგენა ერთადერთია:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Phi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)$$

8.4.1. წარმოადგინეთ ელემენტარული სიმეტრიული პოლინომების პოლინომად

1. $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$, 2. $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$,

3. $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_1^2x_3^2$, 4. $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5$,

5. $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$, 6. $(x_1^2+x_2^2)\,(x_1^2+x_3^2)\,(x_2^2+x_3^2)$,

7. $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$, 8. $(x_1-x_2)^2\,(x_1-x_3)^2\,(x_2-x_3)^2$

8.4.2. წარმოადგინეთ ელემენტარული სიმეტრიული პოლინომების პოლინომად შემდეგი მონოგენური პოლინომები

1. $x_1^2+\Lambda$, 2. $x_1^3+\Lambda$, 3. $x_1^2x_2x_3\Lambda$, 4. $x_1^2x_2^2+\Lambda$, 5. $x_1^3x_2+\Lambda$, 6. $x_1^4+\Lambda$, 7. $x_1^2x_2^2x_3+\Lambda$, 8. $x_1^3x_2x_3+\Lambda$, 9. $x_1^3x_2^2+\Lambda$, 10. $x_1^4x_2+\Lambda$, 11. $x_1^5+\Lambda$, 12. $x_1^2x_2^2x_3x_4+\Lambda$, 13. $x_1^2x_2^2x_3^2+\Lambda$, 14. $x_1^3x_2x_3x_4+\Lambda$

8.4.3. გამოსახეთ ელემენტარულ სიმეტრიულ პოლინომთა საშუალებით

1. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}$, 2. $\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\dfrac{(x_1-x_3)^2}{x_1+x_3}$

8.4.4. გამოთვალეთ $x^3+2x-3=0$ განტოლების ფესვების კვადრატების ჯამი

8.4.5. იპოვეთ $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_3x_1^3$ სიმეტრიული პოლინომის მნიშვნელობა, თუ x_1, x_2, x_3 რიცხვები $x^3-x^2-4x+1=0$ განტოლების ფესვებია

8.4.6. იპოვეთ $x^4+x^3-2x^2-3x+1=0$ განტოლების x_1, x_2, x_3, x_4 ფესვებისაგან შედგენილი $x_1^3x_2x_3+\Lambda$ მონოგენური სიმეტრიული პოლინომის მნიშვნელობა

8.4.7. იპოვეთ $3x^3-5x^2+1=0$ განტოლების x_1, x_2, x_3 ფესვებისაგან შედგენილი $x_1^4x_2+\Lambda$ მონოგენური სიმეტრიული პოლინომის მნიშვნელობა

8.4.8. იპოვეთ $3x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$ განტოლების x_1, x_2, x_3, x_4 ფესვებისაგან შედგენილი $x_1^3x_2^3+\Lambda$ მონოგენური სიმეტრიული პოლინომის მნიშვნელობა

8.4.9. იპოვეთ $5x^3-6x^2+7x-8=0$ განტოლების ფესვების: 1. კუბების ჯამი; 2. მეოთხე ხარისხების ჯამი

8.4.10. გამოსახეთ $a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ სიმეტრიული პოლინომი $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით, თუ x_1, x_2, x_3 განტოლების ფესვებია

პასუხები:

8.1.1. 1. $q(x)=2x^2+3x+11,\ \ r(x)=25x-5$, 2. $q(x)=(3x-7)/9,\ \ r(x)=(-26x-2)/9$, 3. $q(x)=x^2-2x+4,\ \ r(x)=3x+11$, 4. $q(x)=5x^2-15x+34,\ \ r(x)=-72x-62$, 5. $q(x)=0,\ \ r(x)=2x^2-3x+1$; **8.1.2.** 1. $a=0,\ q=-1$, 2. $a=-3,\ q=8$, 3. $p=a^2-2a,\ q=a^2-1$, 4. $a=\pm 3,\ q=1;\ a=0,\ q=-8$; **8.1.3.** 1. $q=m, p=-m^2-1$, 2. თუ $m=0$, მაშინ $q=p-1$; თუ $m\neq 0$, მაშინ $p=2-m^2, q=1$;

8.1.4. 1. Z_3-ში $r(x)=0,\ q(x)=x^2+2$; Z_5-ში და $Q[x]-$ში $r(x)=3x-3,\ q(x)=x^2+2$, 2. Z_3-ში $r(x)=2x+1,\ q(x)=2x^2+2$; Z_5-ში $r(x)=2x,\ q(x)=2x^2$; $Q[x]-$ში $r(x)=2x+10,\ q(x)=2x^2+5$; **8.1.5.** 1. $x+1$, 2. x^2+1, 3. x^3+x^2+2, 4. x^3+1, 5. x^2-2x+2, 6. x^3-x+1, 7. x^2+x+1, 8. 1, 9. 1; **8.1.6.** 1. $(-x-1)f(x)+(x+2)g(x)=x^2-2$,

2. $-f(x)+(x+1)g(x)=x^3+1$, 3. $\frac{-x+1}{3}f(x)+\frac{2x^2-2x-3}{3}g(x)=x-1$,

4. $(-x^2+1)f(x)+(x^3+2x^2-x-1)g(x)=x^3+2$,

5. $(-x+3)f(x)+(x^2-4x+4)g(x)=x^2+5$ 6. $(-x^2+x+1)f(x)+(x^3+2x^2-5x-4)g(x)=3x+2$

8.1.7. 1. $u(x)=x,\quad v(x)=-3x^2-x+1$, 2. $u(x)=-x-1,\quad v(x)=x^3+x^2-3x-2$,

3. $u(x)=(-x^2+3)/2,\quad v(x)=(x^4-2x^2-2)/2$, 4. $u(x)=(-2x^2-3x)/6,\quad v(x)=(2x^3+5x^2-6)/6$,

5. $u(x)=3x^2+x-1,\quad v(x)=-3x^3+2x^2+x-2$; **8.1.8.** 1. 1; **8.1.9.** 1. x^2+x+1, 2. $x+1$, 3. 1, 4. 1

8.2.1. 1. $q(x)=x^3-x^2+3x-3,\quad r=5$, 2. $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109,\quad r=-327$,

3. $q(x)=4x^2-(3+4i)x+(-1+7i),\quad r=8-6i$, 4. $q(x)=x^2-2ix-5-2i,\quad r=-9+8i$

8.2.2. 1. 136, 2. 286, 3. 151/16, 4. $-1-44i$, 5. $5+22i$

8.2.3. 1. $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$,

2. $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$, 3. $(x-2)^4-18(x-2)+38$,

4. $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$,

5. $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$; **8.2.4.** დავშალოთ $f(x)$ მრავალწევრი $(x-3)$-ის ხარისხებად $f(x)=(x-3)^4+11(x-3)^3+45(x-3)^2+81(x-3)+54$, მაშინ $f(x+3)=x^4+11x^3+45x^2+81x+54$;

8.2.5. 1. $f(2)=18,\quad f'(2)=48,\quad f''(2)=124,\quad f'''(2)=216,\quad f^{(IV)}(2)=240,\quad f^{(V)}(2)=120$,

2. $f(1+2i)=-12-2i,\quad f'(1+2i)=-16+8i,\quad f''(1+2i)=-8+30i$,

$f'''(1+2i)=24+30i,\quad f^{(IV)}(1+2i)=24$; **8.2.6.** 1. $k=3$, 2. $k=4$, 3. $k=2$; **8.2.7.** $a=-5$

8.2.8. $A=3,\quad B=-4$; **8.2.9.** 1. $(x+1)^4(x-2)^2$, 2. $(x+1)^4(x-4)$, 3. $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$,

4. $(x-2)(x^2-2x+2)$, 5. $(x^3-x^2-x-2)^2$, 6. $(x^2+1)^2(x-1)^3$; **8.2.10.** 1. $a=-3,\ k=3$,

2. $a=-4,\ k=2$, 3. $a=4,\ k=2$; 8.2.11. 1. $\varphi(x)=(x+1)(x-3),\quad f(x)=(x+1)^4(x-3)^2$,

2. $\varphi(x)=x^2-1,\quad f(x)=(x-1)^4(x+1)^2$, 2. $\varphi(x)=(x-1)(x^2+1),\quad f(x)=(x-1)^4(x+i)(x-i)$,

4. $\varphi(x)=(x-1)(x-2),\quad f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$; 8.2.12. $f'(x)=1+\frac{x}{1!}+\Lambda+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}$.

მაშასადამე, თუ $f(x_0)=f'(x_0)=0$, მაშინ $x_0=0$, მაგრამ $x_0=0$ არ წარმოადგენს $f(x)$ პოლინომის ფესვს; 8.2.13. ვისარგებლოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულით

8.2.14. $\pm 18\sqrt{3}$; 8.2.15. -216; 8.3.1. 1. $(x-2)(x^2+2x+4),\quad (x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$,

2. $(x+2)(x^2-2x+4),\quad (x+2)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$,

3. $(x-2)(x+2)(x^2+4),\quad (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$,

4. $(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4),\quad (x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2})$,

5. $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3)$,

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}/2-3i/2)(x+\sqrt{3}/2-3i/2)(x-\sqrt{3}/2+3i/2)(x+\sqrt{3}/2+3i/2)$,

6. $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$,

$(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-3/2-i\sqrt{3}/2)(x+3/2-i\sqrt{3}/2)(x-3/2+i\sqrt{3}/2)(x-3/2+i\sqrt{3}/2)$,

7. $(x-1)(x-2)(x-3)$, 8. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2),\quad (x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$

9. $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$,

10. $(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})$

11. $(x-\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x^2+\sqrt{3})^2$, $(x-\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x-i\sqrt{3})^2(x+i\sqrt{3})^2$,

12. $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2\sqrt[2n]{2}\,x\cos\frac{8k+1}{4n}\pi+\sqrt[n]{2})$, $\prod_{k=0}^{n-1}(x-(\cos\frac{8k+1}{4n}\pi\pm i\sin\frac{8k+1}{4n}\pi))$,

13. $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{3k+1}{3n}2\pi+1)$, $\prod_{k=0}^{n-1}(x-(\cos\frac{3k+1}{3n}2\pi\pm i\sin\frac{3k+1}{3n}2\pi))$

14. $(x^2-1)\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1)$, $\prod_{k=0}^{2n-1}(x-(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}))$,

15. $(x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1)$, $\prod_{k=0}^{2n}(x-(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}))$,

16. $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$; 8.3.3. 1. $(x-1)^2(x+2)$, 2. $(x+1)^2(x^2+1)$, 3. $(x-1)^3$
8.3.4. 1. $(x-1)^2(x+1)$, 2. $(x-1)^3(x+1)$; **8.3.5.** მოვახდინოთ ჩასმა $x=p/q$ და გავამრავლოთ q^n-ზე; **8.3.6.** 1. $x_1=2$, 2. $x_1=-3$, 3. $x_1=-2,\ x_2=3$, 4. $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3$,
5. $x_1=-1,\ x_2=-2,\ x_3=-3,\ x_4=4$, 6. $x_1=1/2$, 7. $x_1=x_2=-1/2$, 8. $x_1=x_2=1,\ x_3=x_4=-3$,
9. $x_1=3,\quad x_2=x_3=x_4=x_5=-1$, 10. $x_1=x_2=x_3=2$, 11. $x_1=1$, 12. $x_1=1$; **8.3.7.** 1. -2,
2. $-2,-2$, 3. 2, 4. არა აქვს მთელი ფესვები; **8.3.8.** თუ $f(0)$ და $f(1)$ კენტი რიცხვებია, მაშინ a_n კენტია ე.ი. $a_0+a_1+\Lambda+a_{n-1}$ ლუწია. ამგვარად, $f(x)$ პოლინომს არ შეიძლება ჰქონდეს არც ლუწი ფესვი და არც კენტი ფესვი;
8.3.11. $x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1,\ x^4+x+1,\ x^4+x^3+1,\ x^4+x^3+x^2+x+1$
8.3.12. $x,\ x+1,\ x-1,\ x^2+1,\ x^2+x-1,\ x^2-x-1,\ x^2-x+1,\ x^3+x^2-x+1,\ x^3-x^2+1,\ x^3-x^2+x+1,$ $x^3-x-1,\ x^3-x^2-x-1,\ x^3+x^2-1,\ x^3+x^2+x-1$; **8.4.1.** 1. $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$, 2. $\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$,
3. $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3$, 4. $\sigma_1^3\sigma_2^2-2\sigma_1^4\sigma_3-3\sigma_1\sigma_2^3+6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3+3\sigma_2^2\sigma_3-7\sigma_1\sigma_3^2$, 5. $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$,
7. $2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3$, 8. $\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$; **8.4.2.** 1. $\sigma_1^2-2\sigma_2$,
2. $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$, 3. $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$, 4. $\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$, 5. $\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2+4\sigma_4$,
6. $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$, 7. $\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$, 8. $\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$,
9. $\sigma_1\sigma_2^2-2\sigma_1^2\sigma_3-\sigma_2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_5$, 10. $\sigma_1^3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2^2-\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_4-5\sigma_5$,
11. $\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$, 12. $\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$,
13. $\sigma_3^2-2\sigma_2\sigma_4+2\sigma_1\sigma_5-2\sigma_6$, 14. $\sigma_1^2\sigma_4-2\sigma_2\sigma_4-\sigma_1\sigma_5+6\sigma_6$; **8.4.3.** 1. $\frac{\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3}{\sigma_3}$,
2. $\frac{2(\sigma_1^2\sigma_2-3\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2)}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}$; **8.4.4.** -4; **8.4.5.** -35; **8.4.6.** 16

თავი 9. წრფივი სივრცეები

§. 1. წრფივი სივრცის განმარტება

ვთქვათ $K-$ რაიმე ველია, ხოლო $V-$არაცარიელი სიმრავლე. ვიტყვით, რომ V სიმრავლე, რომლის ელემენტებსაც ვექტორები ეწოდება, წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს, თუ მასზე განმარტებულია ვექტორთა შეკრებისა და K ველის ელემენტზე (სკალარზე) მათი გამრავლების ოპერაციები, რომლებისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

1. V აბელური ჯგუფია შეკრების ოპერაციის მიმართ;
2. $1a = a, \forall a \in V;$
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \forall \lambda, \mu \in K; \quad \forall a \in V;$
4. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \quad \forall \lambda \in K; \quad \forall a, b \in V;$
5. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a), \quad \forall \lambda, \mu \in K; \quad \forall a \in V;$

9.1.1. ნამდვილ რიცხვთა ველზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ, არის თუ არა წრფივი სივრცე შემდეგი სიმრავლე:
1. $N-$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;
2. $Z-$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე
3. $Q-$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;
4. $R-$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
5. $C-$ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე;
6. R_+- დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

9.1.2. არის თუ არა წრფივი სივრცე ნამდვილ რიცხვთა ველზე, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ თავისუფალ ვექტორთა შემდეგი სიმრავლე:
1. L_1- მოცემულ წრფის პარალელურ ვექტორთა სიმრავლე;
2. $M-$ მოცემულ სიბრტყის პარალელურ ვექტორთა სიმრავლე;
3. V^3- სივრცის ყველა ვექტორთა სიმრავლე;
4. $P-$ მოცემულ წრფის არაპარალელურ ვექტორთა სიმრავლე;

9.1.3. შეამოწმეთ, არის თუ არა წრფივი სივრცე შემდეგი სიმრავლე:

$$A = \{(x,y) : x, y \in R\}$$

თუ ოპერაციები შემდეგნაირადაა განმარტებული:
1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$
2. $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y).$

9.1.4. ქვემოთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, რომელი წარმოადგენს წრფივ სივრცეს (მატრიცთა შეკრებისა და მათი სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ):
1. ყველა მატრიცთა სიმრავლე;
2. $R_{n\times m}-$ ყველა მართკუთხა მატრიცთა სიმრავლე;
3. $R_{2\times 2}-$ ყველა მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე
4. $R_{n\times 1}-$ყველა $n\times 1$ რიგის მატრიცთა სიმრავლე;
5. $C_{2\times 2}-$ ყველა მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე, $C-$ველის მიმართ;
6. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R\right\} -$ სიმრავლე;
7. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R\right\} -$ სიმრავლე;
8. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in R\right\} -$ სიმრავლე;

9.1.5. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლეზე განმარტებულია ოპერაციები:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \text{ და } (\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ \lambda\in R.$$

გაარკვიეთ, შემდეგი სიმრავლეებიდან რომელი წარმოადგენს, $R-$ველის მიმართ, წრფივ სივრცეს:

1. C_n- სიმრავლე ნამდვილკოეფიციენტებიანი $f(x)$ პოლინომებისა, რომლებისთვისაც $\deg f(x)\geq 0$
2. $R(n)-$ სიმრავლე $n-$ური ხარისხის მქონე ნამდვილკოეფიციენტებიანი პოლინომებისა
3. $-$ ყველა იმ $p(x)$ მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთათვისაც: $a).\ p(0)=1;\ \ b).\ p(0)=0;\ \ c).\ 2p(0)-3p(1)=0;\ \ d).\ p(1)+p(2)+\Lambda+p(k)=0$
4. $C_{[a,b]}-[a,b]$-ზე ყველა უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე
5. $\overline{C}_{[a,b]}-[a,b]$-ზე ყველა წყვეტილ ფუნქციათა სიმრავლე
6. $C_{[a,b]}^{(k)}-[a,b]$-ზე ყველა k-ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა სიმრავლე
7. $J_{[a,b]}-[a,b]$-ზე ყველა ინტეგრებად ფუნქციათა სიმრავლე
8. $a_1x_1+a_2x_2+\Lambda+a_nx_n+b-$ სახის $n-$ცვლადიანი ფუნქციებისა, კოეფიციენტებით ნამდვილი რიცხვები

9.1.6. ვთქვათ $A-$სასრული სიმრავლეა და ამ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა $T(A)-$ სიმრავლეზე განმარტებულია შეკრებისა და Z_2-ველის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციები:

$$X+Y=(X\cup Y)(X\cap Y),\ \forall X,Y\in T(A) \text{ და } \bar{1}X=X,\ 0X=\varnothing;$$

აჩვენეთ, რომ ამ ოპერაციების მიმართ $T(A)-$ სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს Z_2-ველის მიმართ

9.1.7. ვთქვათ $C-$ველის მიმართ V ვექტორულ სივრცეში განმარტებულია ვექტორის კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია:
$\alpha * x=\overline{\alpha}x$. აჩვენეთ, რომ V-ში განმარტებული შეკრებისა და $*$ ოპერაციების მიმართ V-ვექტორული სივრცეა

§2. ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება. ვექტორული სივრცის განზომილება და ბაზისი

ვთქვათ, V არის K ველის მიმართ წრფივი სივრცე. ვექტორთა $a_1,a_2,\mathrm{K},a_k\in V$ სისტემის წრფივი კომბინაცია ეწოდება $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i-$ სახის ჯამს, სადაც $\lambda_1,\lambda_2,\mathrm{K},\lambda_k\in K-$ ნებისმიერად აღებული სკალარებია.

ვექტორთა a_1,a_2,K,a_k სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ მოიძებნება $\lambda_1,\lambda_2,\mathrm{K},\lambda_k$ სკალარების მნიშვნელობების ისეთი ერთობლიობა, რომელთაგან ერთი მაინც არაა ნულის ტოლი და ადგილი აქვს ტოლობას: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i=0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვექტორთა სისტემას წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება.

ვიტყვით, რომ V წრფივი სივრცის განზომილება $n-$ის ტოლია, თუ V სივრცეში მოიძებნება ერთი მაინც წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა, რომლის ვექტორთა რაოდენობაც $n-$ის ტოლია, და ყველა $n+1-$ვექტორიანი ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

V სივრცის განზომილებას $\dim V-$თი აღნიშნავენ, ხოლო $n-$განზომილებიან სივრცეს V^n-ით.

V^n – წრფივი სივრცის ყოველ n – ვექტორიან წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას ამ სივრცის ბაზისი ეწოდება.

თუ $a \in V^n$ – რაიმე ვექტორია და $(e_i),\, i=\overline{1,n}$ – ამ სივრცის რაიმე ბაზისი, მაშინ არსებობს სკალარების ერთადერთი $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in K$ ერთობლიობა, რომ $a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$.

a – ვექტორის წარმოდგენას ბაზისის ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით ეწოდება a ვექტორის გაშლა აღებულ ბაზისში, ხოლო $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ კოეფიციენტებს a – ვექტორის კოორდინატებს აღებულ ბაზისში.

9.2.1. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა შემდეგი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მოძებნეთ θ – ს ტოლი მისი არატრივიალური წრფივი კომბინაცია:

1. $a_1=(1,2,5),\quad a_2=(5,3,1),\quad a_3=(-15,-2,21)$; 2. $a_1=2+5i, a_2=1-i, a_3=6+29i$;

3. $A_1=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\0\,1\,1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2\,1\,5\\2\,0\,4\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -5\\-8 & 5 & -11\end{pmatrix}$; 4. $\varphi_1=t^2+5, \varphi_2=t^2-4t+3, \varphi_3=t^2+16t+13$;

5. $\varphi_1=\sin^2 t, \varphi_2=\cos^2 t, \varphi_3=t$; 6. $\varphi_1=\sin^2 t, \varphi_2=\cos^2 t, \varphi_3=t, \varphi_4=5, \varphi_5=e^t$.

9.2.2. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა შემდეგი სისტემები წრფივად დამოუკიდებელია:

1. $a_1=(5,3,1),\quad a_2=(1,1,1),\quad a_3=(1,4,2)$; 2. $a_1=(a,b,3),\quad a_2=(2,a-b,1),\quad a\neq 6, b\neq \frac{9}{2}$;

3. $\varphi_1=t^2-4t+3, \varphi_2=5t-4, \varphi_3=t^2+t+1$;

4. $A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, A_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$; 5. $a_1=3+7i, a_2=4-3i$;

6. $\varphi_1=\sin t, \varphi_2=\cos t$; 7. $\varphi_1=1, \varphi_2=\sin t, \varphi_3=\cos t$; 8. $\varphi_1=1, \varphi_2=\sin t, \varphi_3=\sin^2 t,\ldots,\varphi_n=\sin^2 t$;

9. $\varphi_1=1, \varphi_2=\cos t, \varphi_3=\cos^2 t,\ldots,\varphi_n=\cos^2 t$; 10. $\varphi_1=\sin t, \varphi_2=\sin 2t,\ldots,\varphi_n=\sin nt$;

11. $\varphi_1=1, \varphi_2=\cos t, \varphi_3=\cos 2t,\ldots,\varphi_n=\cos nt$.

9.2.3. აჩვენეთ, რომ a და b ვექტორებისა და α და β სკალარებისათვის:

1. $\alpha a=0$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=0$ ან $a=\theta$;

2. $\alpha a+\beta b=\beta a+\alpha b$ მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=\beta$ ან $a=b$.

9.2.4. λ – ს რა მნიშვნელობებისათვის:

1. ვექტორთა a_1,a_2 – სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს $\lambda a_1+a_2, a_1+\lambda a_2$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა;

2. ვექტორთა $a_1,a_2,\ldots,a_n$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს $a_1+a_2, a_2+a_3,\ldots,a_{n-1}+a_n$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა.

9.2.5. გაარკვიეთ ვექტორთა (ფუნქციათა) შემდეგი სისტემების წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი, იპოვეთ მათი ტრივიალური წრფივი კომბინაციები (თუ კი ასეთი კომბინაცია არსებობს):

1. $\varphi_1=t+7, \varphi_2=2t-7$; 2. $\varphi_1=3t+7, \varphi_2=7t-9$; 3. $\varphi_1=t^2-t+3, \varphi_2=3t^2+1, \varphi_3=4t-5$;

4. $\varphi_1=2^t, \varphi_2=3^t, \varphi_3=6^t$; 5. $\varphi_1=e^t, \varphi_2=e^{2t}, \varphi_3=e^{3t}$; 6. $\varphi_1=t^2, \varphi_2=\left|t^3\right|$;

7. $\varphi_1=\sin t, \varphi_2=\sin(t+2), \varphi_3=\sin(t-5)$; 8. $\varphi_1=1, \varphi_2=arctgt, \varphi_3=arcctgt$.

9.2.6. კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლის, როგორც, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, წრფივი სივრცის $e_1=-1+2i, e_2=2-i$ ბაზისში იპოვეთ $x=-5+4i$ ვექტორის კოორდინატები.

9.2.7. $V=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\-b & c\end{pmatrix}: a,b,c\in R\right\}$ წრფივი სივრცის $e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ბაზისში, იპოვეთ შემდეგი ვექტორების კოორდინატები:

1. $a=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $b=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

9.2.8. იპოვეთ $V=\{\alpha+\beta\sin^2 t+\gamma\cos 2t:\alpha,\beta,\gamma\in R\}$ წრფივი სივრცის $e_1=1$, $e_2=\cos 2t$ ბაზისში შემდეგი ვექტორების კოორდინატები:

1. $\varphi_1=\dfrac{5}{2}+3\sin^2 t+\dfrac{3}{2}\cos 2t$, 2. $\varphi_2=5+\sin 2t$.

9.2.9. აჩვენეთ, რომ e_i- ვექტორები ქმნიან შესაბამისი განზომილების სივრცის ბაზისს და იპოვეთ მასში a ვექტორის კოორდინატები:

1. $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,2)$, $e_3=(1,2,3)$, $a=(6,9,14)$;

2. $e_1=(2,1,-3)$, $e_2=(3,2,-5)$, $e_3=(1,-1,1)$, $a=(6,2,-7)$;

3. $e_1=(1,2,-1,-2)$, $e_2=(2,3,0,-1)$, $e_3=(1,2,1,4)$, $e_4=(1,3,-1,0)$, $a=(7,14,-1,2)$.

9.2.10. იპოვეთ $\varphi=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n$ მრავალწევრის კოორდინატები შემდეგ ბაზისში: 1. $1,t,t^2,\ldots,t^n$; 2. $1,t-\alpha,(t-\alpha)^2,\ldots,(t-\alpha)^n$.

9.2.11. აჩვენეთ, რომ e_i და f_j ვექტორთა სისტემები წარმოადგენენ შესაბამისი განზომილების წრფივი სივრცეების ბაზისებს. წარმოადგინეთ ერთი სისტემის ვექტორები მეორე სისტემის ვექტორების საშუალებით:

1. $e_1=(1,2,1)$, $e_2=(2,3,3)$, $e_3=(3,8,2)$, $f_1=(3,5,8)$, $f_2=(5,14,18)$, $f_3=(1,9,2)$;

2. $e_1=(1,2,1)$, $e_2=(2,3,3)$, $e_3=(3,7,1)$, $f_1=(3,1,4)$, $f_2=(5,2,1)$, $f_3=(1,1,-6)$;

3. $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$,
$f_1=(1,0,3,3)$, $f_2=(-2,-3,-5,-4)$, $f_3=(2,2,5,4)$, $f_4=(-2,-3,-4,-4)$.

9.2.12. შეამოწმეთ, წარმოქმნიან თუ არა e_i- ვექტორები R^3 სივრცის ბაზისს და იპოვეთ მასში $a=(3,7,13)$ ვექტორის კოორდინატები:

1. $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$; 2. $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(1,1,0)$, $e_3=(1,1,1)$;

3. $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(1,4,9)$.

9.2.13. შეამოწმეთ წარმოქმნიან თუ არა ბაზისს მრავალწევრთა შემდეგი სისტემები, $\deg f\le 4$ ხარისხის მქონე ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრთა სივრცეში და იპოვეთ $\varphi=5x^4-4x^3+3x^2-2x+1$ პოლინომის კოორდინატები ამ ბაზისში

1. $1,x,x^2,x^3,x^4$; 2. $1-x,x,x^2-x,x^3,x^4-x$; 3. $1-x^4,x-x^4,x^2-x^4,x^3-x^4,x^4$;

4. $1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3,(x-1)^4$.

9.2.14. იპოვეთ $\lambda\in R$ ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც a ვექტორი გამოისახება შემდეგი ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით:

1. $a_1=(2,3,5)$, $a_2=(3,7,8)$, $a_3=(1,-6,1)$, $a=(7,-2,\lambda)$;

2. $a_1=(4,4,3)$, $a_2=(7,2,1)$, $a_3=(4,1,6)$, $a=(5,9,\lambda)$;

3. $a_1=(3,2,5)$, $a_2=(2,4,7)$, $a_3=(5,6,\lambda)$, $a=(1,3,5)$;

4. $a_1=(3,2,6)$, $a_2=(7,3,9)$, $a_3=(5,1,3)$, $a=(\lambda,2,5)$.

9.2.15. იპოვეთ V წრფივი სივრცის განზომილება და ბაზისი, თუ ის შემდეგ ვექტორებზეა მოჭიმული:

1. $a_1=(1,2,1,2)$, $a_2=(2,1,2,1)$, $a_3=(0,3,0,3)$, $a_4=(1,1,1,1)$.

9.2.16. ვექტორთა შემდეგი სისტემები შეავსეთ შესაბამისი განზომილებების სივრცეთა ბაზისებამდე:

1. $a_1=(1,2,1)$, $a_2=(2,4,3)$; 2. $a_1=(2,3,1,1)$, $a_2=(2,4,1,0)$; 3. $a_1=(1,2,0,0)$, $a_2=(1,2,3,0)$;

4. $a_1=(2,1,0,3)$, $a_2=(4,2,0,6)$; 5. $\varphi_1=t^2,\varphi_2=t^2-t^4$; 6. $\varphi_1=t^2-t+1,\varphi_2=2t^3-1$;

7. $a_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a_4=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 8. $a_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.2.17. იპოვეთ R^4 სივრცის ორი სხვადასხვა საბაზისო ვექტორთა სისტემა, რომელთაც გააჩნიათ საერთო ვექტორები $a_1=(1,1,0,0)$ და $a_2=(0,0,1,1)$.

§. 3. წრფივი სივრცის ქვესივრცე. წრფივი გარსი.

K ველის მიმართ V წრფივი სივრცის რაიმე $W\subset V$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მისი ქვესივრცე, თუ W თვითონაა წრფივი სივრცე $V-$ში განმარტებული ოპერაციების მიმართ.

ვთქვათ, $a_1,a_2,\ldots,a_k\in V^n$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა, K ველის მიმართ აღებული წრფივი სივრცისა, ამასთან $k\le n$. მოცემული სისტემის ვექტორთა ყველა შესაძლო წრფივი კომბინაციების

$$\overline{V}^k=\left\{a:a=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i,\ \lambda_i\in K,\ i=\overline{1,k}\right\}$$

სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს V^n-ში განმარტებული ოპერაციების მიმართ. $\overline{V}^k-$ ს ეწოდება $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ვექტორების წრფივი გარსი. ის V^n სივრცის ქვესივრცეა და $\dim\overline{V}^k=k.$ ამასთან $\overline{V}^k-$უმცირესი განზომილების ისეთი ქვესივრცეა V^n-ში, რომელიც $a_1,a_2,\ldots,a_k$-ვექტორებს შეიცავს.

9.3.1. გამოარკვიეთ, არის თუ არა ვექტორთა შემდეგი ერთობლიობა შესაბამისი ვექტორული სივრცის ქვესივრცე:
1. სიბრტყის ყველა იმ ვექტორთა ერთობლიობა, რომლებიც სათავეში არიან მოდებულები და რომელთა ბოლოები მოცემულ წრფეზე ძევს;
2. სიბრტყის ყველა იმ ვექტორთა ერთობლიობა, რომელთა ბოლოებიც პირველ საკოორდინატო მეოთხედშია;
3. R^n-ის ვექტორები, რომელთა კოორდინატებიც მთელი რიცხვებია;
4. R^n-ის ვექტორები, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0;$$

4. R^n- ის ვექტორები, რომლებიც წარმოადგენენ აღებული $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას;
5. R^n- ის ვექტორები, რომელთა კოორდინატებიც მოცემული წრფივ ერთგვაროვან განტოლებეთა სისტემის ამონახსნებია.

9.3.2. დაადგინეთ, ქვემოთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან, რომელი წარმოადგენს $R-$ველის მიმართ შესაბამისი წრფივი სივრცის ქვესივრცეს, იპოვეთ მისი, როგორც ქვესივრცის, განზომილება და რომელიმე ბაზისი:
1. მოცემული სიბრტყის ორთოგონალურ თავისუფალ ვექტორთა სიმრავლე;
2. მოცემული სიბრტყის პარალელურ თავისუფალ ვექტორთა სიმრავლე;
3. მოცემული წრფის ორთოგონალურ თავისუფალ ვექტორთა სიმრავლე;
4. მოცემული სიბრტყის პარალელურ თავისუფალ ვექტორთა სიმრავლე;

5. $\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}:a,b\in R\right\}$-სიმრავლე; 6. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a\\ b & c\end{pmatrix}:a,b,c\in R\right\}$-სიმრავლე;

7. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a\\ b & c\end{pmatrix}:a,b,c\in C\right\}$-სიმრავლე; 8. $\left\{\begin{pmatrix} \alpha+i\beta & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}:\alpha,\beta,\gamma\in R\right\}$-სიმრავლე;

9. $\left\{a+b\sin^2 t+c\cos^2 t:a,b,c\in R\right\}$-სიმრავლე; 10. $\left\{a+b\sin t+c\sin^2 t:a,b,c\in R\right\}$-სიმრავლე.

9.3.3. აჩვენეთ, რომ ვექტორთა შემდეგი ერთობლიობა ქმნის R^n-ის ქვესივრცეს. იპოვეთ მათი განზომილება და რაიმე ბაზისი:
1. ვექტორები, რომელთა პირველი და ბოლო კოორდინატები ტოლია;

2. ვექტორები, რომელთა ლუწ ადგილებზე მდგომი კოორდინატები ნულის ტოლია;

3. ვექტორები, რომელთა ლუწ ადგილებზე მდგომი კოორდინატები ტოლია;

4. $(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\ldots)$ სახის ვექტორები;

5. მოცემული ერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები-ვექტორები.

9.3.4. გამოარკვიეთ, $n-$ური რიგის მატრიცთა შემდეგი სიმრავლეებიდან, რომელი წარმოადგენს K ველის მიმართ შესაბამისი წრფივი სივრცის ქვესივრცეს. იპოვეთ მისი განზომილება და რაიმე ბაზისი:

1. სიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე;
2. ირიბსიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე;
3. გადაუგვარებელ მატრიცთა სიმრავლე;
4. გადაგვარებულ მატრიცთა სიმრავლე.

9.3.5. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების წრფივი გარსის, როგორც შესაბამისი წრფივი სივრცის, განზომილება და რაიმე ბაზისი:

1. $a_1=(1,-1,1,0),\quad a_2=(1,1,0,1),\quad a_3=(2,0,1,1);$
2. $a_1=(1,-1,1,-1,1),\quad a_2=(1,1,0,0,3),\quad a_3=(3,1,1,-1,7),\quad a_4=(0,2,-1,1,2).$

9.3.6. გამოარკვიეთ, ქვემოთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან, რომელი წარმოადგენს, კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ, შესაბამისი წრფივი სივრცის ქვესივრცეს. იპოვეთ მისი განზომილება და რაიმე ბაზისი:

1. $R-$ ნამდვილ რიცხვთა ველი; 2. $\{\alpha(2-i):\alpha\in R\}$-სიმრავლე;

3. $\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ b & c\end{pmatrix}: a,b,c\in R\right\}$-სიმრავლე; 4. $\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ b & c\end{pmatrix}: a,b,c\in R\right\}$-სიმრავლე;

5. $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta+\gamma i\\ \delta i & \alpha i\end{pmatrix}: \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\right\}$-სიმრავლე; 6. $\{(\alpha+\beta i,0,\gamma+\delta i):\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\}$-სიმრავლე;

7. $\{(\alpha+\beta i,1,\gamma+\delta i):\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R\}$-სიმრავლე.

9.3.7. გაარკვიეთ, შემდეგი სიმრავლეებიდან რომელი წარმოადგენს $n-$ური ხარისხის, კოეფიციენტებით ნამდვილი რიცხვები, მრავალწევრთა სივრცის ქვესივრცეს:

1. მრავალწევრები, რომელთაც გააჩნიათ მოცემული $\alpha\in R-$ ნამდვილი ფესვი;
2. მრავალწევრები, რომელთაც გააჩნიათ მოცემული $\alpha\in C-$ კომპლექსური ფესვი;
3. მრავალწევრები, რომელთაც გააჩნიათ მოცემული $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in R-$ ნამდვილი ფესვები;
4. მრავალწევრები, რომელთაც გააჩნიათ მოცემული $\alpha\in R-$ ნამდვილი მარტივი ფესვი.

9.3.8. იპოვეთ შემდეგ ვექტორების წრფივი გარსის განზომილება და რაიმე ბაზისი:

1. $a_1=(1,0,0,-1),\ a_2=(2,1,1,0),\ a_3=(1,1,1,1),\ a_4=(1,2,3,4),\ a_5=(0,1,2,3);$
2. $a_1=(1,1,1,1,0),\ a_2=(1,1,-1,-1,-1),\ a_3=(2,2,0,0,-1),\quad a_4=(1,1,5,5,2),\ a_5=(1,-1,-1,0,0);$
3. $\varphi_1=t^6+t^4,\varphi_2=t^6+3t^4-t,\varphi_3=t^6-2t^4+t,\varphi_4=t^6-4t^4+2t;$
4. $a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 3\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};$
5. $a_1=(1,1,1,2),\quad a_2=(2,0,1,1),\quad a_3=(4,2,3,5),\quad a_4=(0,2,1,3).$

9.3.9. იპოვეთ a_i და b_j ვექტორების $J(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ და $J(b_1,b_2,\ldots,b_q)-$ წრფივი გარსების ჯამისა და თანაკვეთის, როგორც შესაბამისი წრფივი სივრცის ქვესივრცის, განზომილება და რაიმე ბაზისი:

1. $a_1=(1,2,0,1),\quad a_2=(1,1,1,0),\quad b_1=(1,0,1,0),\quad b_2=(1,3,0,1);$
2. $a_1=(1,1,1,1),\quad a_2=(1,-1,1,-1),\quad a_3=(1,3,1,3),\quad b_1=(1,2,0,2),\quad b_2=(1,2,1,2)\quad b_3=(3,1,3,1);$
3. $a_1=(2,-1,0,-2),\ a_2=(3,-2,1,0),\ a_3=(1,-1,1,-1),\quad b_1=(3,-1,-1,0),\ b_2=(0,-1,2,3),\ b_3=(5,-2,-1,0);$
4. $a_1=(1,1,0,0),\quad a_2=(0,1,1,0),\quad a_3=(0,0,1,1),\quad b_1=(1,0,1,0),\quad b_2=(0,2,1,1)\quad b_3=(1,2,1,2);$

5. $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,-1,-1)$, $a_3=(1,-1,1,-1)$, $b_1=(1,-1,-1,1)$, $b_2=(2,-2,0,0)$ $b_3=(3,-1,1,1)$;

9.3.10. იპოვეთ a_i და b_j ვექტორების წრფივი გარსების ჯამისა და თანაკვეთის განზომილება და რაიმე ბაზისი:

1. $a_1=(1,2,1)$, $a_2=(1,1,-1)$, $a_3=(1,3,3)$, $b_1=(2,3,-1)$, $b_2=(1,2,2)$ $b_3=(1,1,-3)$;
2. $a_1=(1,2,1,-2)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(1,2,2,-3)$, $b_1=(1,1,1,1)$, $b_2=(1,0,1,-1)$ $b_3=(1,3,0,-4)$.

9.3.11. ვთქვათ, L_1 და L_2 სასრულგანზომილებიანი $V-$წრფივი სივრცეების ქვესივრცეებია, აჩვენეთ, რომ:

1. თუ $L_1 \subseteq L_2$, მაშინ $\dim L_1 \le \dim L_2$, ამასთან ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ მაშინ, როცა $L_1 = L_2$;
2. თუ $\dim(L_1+L_2)=1+\dim(L_1\cap L_2)$, მაშინ ჯამი: $L_1+L_2=\{a+b : a\in L_1, b\in L_2\}$ დაემთხვევა ერთ-ერთ ქვესივრცეს, ხოლო თანაკვეთა $L_1\cap L_2=\{a : a\in L_1 \ \&\ a\in L_2\}$- მეორე ქვესივრცეს;
3. თუ $\dim L_1+\dim L_2>\dim V$, მაშინ $L_1\cap L_2\ne\varnothing$.

9.3.12. შესაძლებელია თუ არა, რომ, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, წრფივი სივრცის ქვესივრცე მხოლოდ სასრული რაოდენობა ვექტორებისაგან შედგებოდეს.

9.3.13. ვთქვათ $L_1=J(a_1,a_2,\mathrm{K},a_p)$ და $L_2=J(b_1,b_2,\mathrm{K},b_q)-$ წრფივი გარსებია, აჩვენეთ, რომ $L_1+L_2=J(a_1,a_2,\mathrm{K},a_p)+J(b_1,b_2,\mathrm{K},b_q)$ ასევე წრფივი გარსია.

9.3.14. გამოარკვიეთ არის თუ არა, ელემენტებით $K-$ველიდან, კვადრატულ მატრიცთა $M_{n\times n}-$წრფივი სივრცის ორი L_1 და L_2 ქვესივრცის ჯამი და თანაკვეთა $M_{n\times n}-$ის ქვესივრცე, თუ:

1. L_1- სიმეტრიულ მატრიცთა ქვესივრცეა, ხოლო L_2- ზემო სამკუთხა მატრიცთა ქვესივრცე;
2. L_1-სიმეტრიულ, ხოლო L_2-ირიბსიმეტრიულ მატრიცთა ქვესივრცეებია და $char\,K\ne 0$.

9.3.15. $L=\{\lambda_1(\ 1,3,0,-1)+\lambda_2(3,5,1,2)+\lambda_3(2,2,1,3) : \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R\}$ ქვესივრცისათვის იპოვეთ ორი სხვადასხვა დამატებითი ქვესივრცე.

§. 4. წრფივი ოპერატორი. წრფივი ოპერატორის მატრიცა, ბირთვი და ანასახი.

თუ $e_i, i=\overline{1,n}$ (1), და $f_j, j=\overline{1,n}$ (2) წარმოადგენენ, $K-$ველის მიმართ, V^n წრფივი სივრცის რაიმე ორ ბაზისს, მაშინ ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$f_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k,\ i=\overline{1,n}\ \text{ და } e_k=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ik}f_i,\ i=\overline{1,n}\quad ,\text{სადაც } \alpha_{ij},\beta_{ij}\in K.$$

მატრიცას $A=(\alpha_{ij})$ ეწოდება $(1)-$ბაზისიდან $(2)-$ბაზისზე გადასვლის მატრიცას, ხოლო $B=(\beta_{ij})-$ პირიქით $(2)-$დან $(1)-$ზე გადასვლის მატრიცას.

K ველის მიმართ მოცემული V და W წრფივი სივრცეებისათვის, $A:V\to W$ ეწოდება წრფივი ოპერატორი $V-$ დან $W-$ში, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $A(a+b)=A(a)+A(b)$; 2. $A(\lambda a)=\lambda A(a)$, $\forall a,b\in V$, $\forall\lambda\in K$.

იმ შემთხვევაში, როცა $V=W$ წრფივ ოპერატორს სივრცის გარდაქმნას უწოდებენ.

მოცემული $A:V\to W$ წრფივი ოპერატორისათვის ცხადია, რომ $A(e_i)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ki}e_k$, $i=\overline{1,n}.$

მატრიცას $\Lambda=(\lambda_{ij})$ ეწოდება A წრფივი ოპერატორის მატრიცას, $e_i, i=\overline{1,n}$ ბაზისში. თუ $\Lambda'=(\lambda'_{ij})$ არის იმავე A ოპერატორის მატრიცა (2) ბაზისში, მაშინ ადგილი აქვს

ტოლობას $\Lambda' = C^{-1}\Lambda C$, სადაც C წარმოადგენს (1)-დან (2)-ე ბაზისზე გადასვლის მატრიცას.

$A: V \to W$ ოპერატორი განსაზღვრავს ქვესივრცეებს:

$KerA = \{a \in V : A(a) = 0\}$ და $JmA = \{A(a) \in V : a \in V\}$. პირველ მათგანს ეწოდება A ოპერატორის ბირთვი, ხოლო მეორეს– A ოპერატორის ანასახი. მათ განზომილებებს, შესაბამისად, რანგი და დეფექტი ეწოდებათ. სასრულგანზომილებიანი წრფივი სივრცის რანგისა და დეფექტის ჯამი ამ სივრცის განზომილების ტოლია.

9.4.1. გამოარკვიეთ, ქვემოთ მოყვანილი ასახვებიდან რომელი წარმოადგენს თავისუფალ ვექტორთა სივრცეზე წრფივ ოპერატორს, იპოვეთ მათი მატრიცები სტანდარტულ i, j, k ბაზისში:

1. $A(x) = 0$; 2. $A(x) = 2x$; 3. $A(x) = x + i$; 4. $A(x) = (x, a)x$, სადაც a მოცემული ვექტორია; 5. $A(x) = (a, b)x$, სადაც a და b მოცემული ვექტორებია; 6. $A(x) = [x, a]$, სადაც $a = 2i + j + 3k$; 7. $A(x) = 2x_1 i - (x_1 + x_2)j - k$; 8. $A(x) = x^2{}_1 i + x_2 j + x_3 k$; 9. $A(x) = x_1 i$; 10. $A(x) = x_1 i + x_2 j$; 11. $A(x) = a$, სადაც a მოცემული ვექტორია; 12.$A(x) = a + x$, სადაც a მოცემული ვექტორია.

9.4.2. შეამოწმეთ, ქვემოთ მოყვანილი ასახვებიდან რომელი წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს, შეადგინეთ მისი მატრიცა რაიმე ბაზისში:

1.$A(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$; 2.$A(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;

3.$A(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$; 4.$A(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$, სადაც x_1, x_2, x_3 – წარმოადგენენ x ვექტორის კოორდინატებს რაიმე ბაზისში.

9.4.3. შეადგინეთ A წრფივი ოპერატორის მატრიცა:

1. $A(x) = (x_1, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_3)$, სადაც i, j, k ბაზისში $x \in R^3$ ვექტორის კოორდინატებია x_1, x_2, x_3;

2. A არის α კუთხეზე მობრუნება, ნებისმიერად აღებულ ორთონორმირებულ ბაზისში;

3. A არის R^3 სივრცის $\dfrac{2\pi}{3}$ კუთხეზე მობრუნება იმ წრფის გარშემო, რომლის განტოლებასაც i, j, k ბაზისში აქვს სახე $x_1 = x_2 = x_3$;

4. A წარმოადგენს R^3 სივრცის პროექციას e_2 ვექტორის შესაბამის საკოორდინატო ღერძზე, e_1, e_3 ვექტორებით განსაზღვრული სიბრტყის პარალელურად, სივრცის e_1, e_1, e_3 ბაზისში;

5. $A(x) = X^t$- სადაც x იცვლება, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ორგანზომილებიან მატრიცთა სიმრავლეზე;

6. $A(x) = AXB$- სადაც X იცვლება, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ორგანზომილებიან მატრიცთა სიმრავლეზე, ხოლო A და B მოცემული მატრიცებია;

7. $A(x) = AX + XB$- სადაც X იცვლება, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ორგანზომილებიან მატრიცთა სიმრავლეზე, ხოლო A და B მოცემული მატრიცებია;

9.4.4. გამოარკვიეთ, არსებობს თუ არა წრფივი ოპერატორი, რომელსაც, შესაბამისად, ერთმანეთში გადაჰყავს ერთი და იმავე e_1, e_2 ბაზისში მოცემული a_1, a_2 და b_1, b_2 ვექტორები:

1. $a_1 = e_1 + 2e_2$, $a_2 = 3e_1 - e_2$, $b_1 = 6e_1 + 9e_2$, $b_2 = 11e_1 - 8e_2$;

2. $a_1 = e_1 + 2e_2$, $a_2 = 2e_1 + 4e_2$, $b_1 = 2e_1 - e_2$, $b_2 = e_1 + e_2$;

3. $a_1 = e_1 + 2e_2$, $a_2 = 2e_1 + 4e_2$, $b_1 = 2e_1 - e_2$, $b_2 = 4e_1 - 2e_2$.

9.4.5. აჩვენეთ, რომ არსებობს R^3 სივრცის ერთადერთი წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც, შესაბამისად, ერთმანეთში გადაჰყავს ერთი და იმავე ბაზისში მოცემული a_1, a_2, a_3 და b_1, b_2, b_3 ვექტორები:

1. $a_1=(2,3,5)$, $a_2=(0,1,2)$, $a_3=(1,0,0)$, $b_1=(1,1,1)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(2,1,2)$;
2. $a_1=(2,0,3)$, $a_2=(4,1,5)$, $a_3=(3,1,2)$,
$b_1=(1,2,-1)$, $b_2=(4,5,-2)$, $b_3=(1,-1,1)$.

9.4.6. არსებობს თუ არა R^3 სივრცის წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც, შესაბამისად, ერთმანეთში გადაჰყავს ერთი და იმავე ბაზისში მოცემული a_1,a_2,a_3 და b_1,b_2,b_3 ვექტორები, შეადგინეთ ამ გარადაქმნის მატრიცა იმავე ბაზისში:
$a_1=(1,2,0)$, $a_2=(1,1,1)$, $a_3=(2,3,1)$,
$b_1=(1,1,1)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_3=(1,0,0)$.

9.4.7. შეადგინეთ $A-$წრფივი ოპერატორის მატრიცა ბაზისში

$$a_1=2e_1-e_2,\ a_2=e_1+2e_2\ ,$$

თუ e_1,e_2 ბაზისში მის მატრიცას აქვს სახე: $\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}$.

9.4.8. შეადგინეთ $A-$წრფივი ოპერატორის მატრიცა ბაზისში

$$a_1=2e_1+3e_2+e_3,\ a_2=3e_1+4e_2+e_3\ ,\ \ a_3=e_1+2e_2+2e_3\ ,$$

თუ e_1,e_2,e_3 ბაზისში მის მატრიცას აქვს სახე: $\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}$.

9.4.9. შეადგინეთ $A-$წრფივი ოპერატორის მატრიცა $b_1=(2,3), b_2=(0,1)$ ბაზისში, თუ $a_1=(1,2), a_2=(1,1)$ ბაზისში მის მატრიცას აქვს სახე: $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$.

9.4.10. შეადგინეთ $A-$წრფივი ოპერატორის მატრიცა ბაზისში

$$b_1=(1,-2,1), b_2=(3,-1,2)\ , b_3=(2,1,2),$$

თუ $a_1=(8,-6,7), a_2=(-16,7,-13), a_3=(9,-3,7)$ ბაზისში მის მატრიცას აქვს სახე:

$$\begin{pmatrix}1&-18&15\\-1&-22&15\\1&-25&22\end{pmatrix}.$$

9.4.11. $A-$წრფივი ოპერატორის მატრიცას e_1,e_2,e_3 ბაზისში აქვს სახე:

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\5&4&0&-1\\3&2&0&3\\6&1&-1&7\end{pmatrix},$$

რა სახე ექნება იმავე ოპერატორის მატრიცას ბაზისში:
1. e_2,e_1,e_3,e_4 ; 2. $e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,e_1+e_2+e_3+e_4$.

9.4.12. $n\le 2-$ ხარისხის, ნამდვილკოეფიციენტებიან პოლინომთა სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორის მატრიცას აქვს სახე: $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, შეადგინეთ ამ ოპერატორის მატრიცა ბაზისში:
1. $\varphi_1=t-t^2,\varphi_2=1+2t+t^2,\varphi_3=1+3t+t^2$; 2. $\varphi_1=3t^2+2t,\varphi_2=5t^2+3t+1,\varphi_3=7t^2+5t+3$;
3. $\varphi_1=3t^2+2t+1,\varphi_2=t^2+3t+2,\varphi_3=2t^2+t+3$.

9.4.13. შეადგინეთ $A+B$ წრფივი ოპერატორის მატრიცა ბაზისში b_1, b_2, თუ $a_1=(1,2), a_2=(2,3)$ ბაზისში $A-$ ოპერატორის მატრიცაა: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, ხოლო $b_1=(3,1), b_2=(4,2)$ ბაზისში $B-$ ოპერატორის მატრიცაა: $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

9.4.14. შეადგინეთ $(AB)(a)=A(B(a))$ წრფივი ოპერატორის მატრიცა $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ბაზისში, თუ $a_1=(-3,7), a_2=(1,-2)$ ბაზისში $A-$ ოპერატორის მატრიცაა: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, ხოლო $b_1=(6,-7), b_2=(-5,6)$ ბაზისში $B-$ ოპერატორისა: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

9.4.15. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერ წრფივ ოპერატორს ვექტორთა ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემაში გადაჰყავს.

9.4.16. აჩვენეთ, რომ V^n სივრცის ყოველ $a_1, a_2, \ldots, a_n-$ წრფივად დამოუკიდებელ და $b_1, b_2, \ldots, b_n-$ ნებისმიერად აღებულ ვექტორთა სისტემებისათვის, არსებობს ერთადერთი წრფივი ოპერატორი A, რომ $A(a_i)=b_i$, $i=\overline{1,n}$.

9.4.17. შეამოწმეთ, რომ V წრფივი სივრცის L_1 და L_2 ქვესივრცეებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

1. $A(L_1+L_2)=A(L_1)+A(L_2)$;
2. $A(L_1\cap L_2)=A(L_1)\cap A(L_2)$.

9.4.18. იპოვეთ შემდეგი წრფივი ოპერატორებისათვის ბირთვი და ანასახი:

1. $A(x)=a$, სადაც a მოცემული ვექტორია;
2. $A(x)=x+a$, სადაც a მოცემული ვექტორია;
3. $A(x)=\alpha x$, სადაც α მოცემული სკალარია;
4. $A(x)=(x,a)b$, სადაც a და b მოცემული ვექტორებია;
5. $A(x)=(a,x)x$, სადაც a მოცემული ვექტორია;
6. $A(x)=(x_1+2, x_2+5, x_3)$, სადაც $x=(x_1,x_2,x_3)$;
7. $A(x)=(x_1+3x_3, x_2^3, x_1+x_3)$, სადაც $x=(x_1,x_2,x_3)$;
8. $A(x)=(x_1, x_2, x_1+x_2+x_3)$.

9.4.19. იპოვეთ რანგი და დეფექტი, ააგეთ ბირთვისა და ანასახის ბაზისები R^3 სივრცის შემდეგი წრფივი ოპერატორებისათვის:

1. $A(x)=(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3)$, სადაც $x=(x_1,x_2,x_3)$;
2. $A(x)=(2x_1-x_2-x_3, x_1-2x_2+x_3, x_1+x_2-2x_3)$, სადაც $x=(x_1,x_2,x_3)$;
3. $A(x)=(-x_1+x_2+x_3, x_1-x_2+x_3, x_1+x_2-x_3)$, სადაც $x=(x_1,x_2,x_3)$.

9.4.20. ააგეთ, V სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორისათვის, ბირთვისა და ანასახის ბაზისები, თუ ცნობილია, რომ გარკვეულ ბაზისში მის მატრიცს აქვს სახე:

1.$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2.$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; 3.$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; 4.$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5.$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.4.21. აჩვენეთ, რომ წრფივი სივრცის ყოველი ქვესივრცე წარმოადგენს:

1. გარკვეული წრფივი ოპერატორის ბირთვს;
2. გარკვეული წრფივი ოპერატორის ანასახს.

9.4.22. აჩვენეთ, რომ თუ A წრფივი ოპერატორია V სივრცის რაიმე L, $(L\neq V)$, ქვესივრცეზე, მაშინ არსებობს V-ზე განსაზღვრული უსასრულოდ ბევრი წრფივი ოპერატორი, რომლის შეზღუდვაც $L-$ზე დაემთხვევა A ოპერატორს.

§. 5. საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები.

ვთქვათ, A არის, K ველის მიმართ, V წრფივი სივრცის გარდაქმნა. $\lambda \in K$ სკალარს ეწოდება A ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა, თუ არსებობს ისეთი არანულოვანი x ვექტორი, რომლისთვისაც $A(x)=\lambda x$, ასეთ შემთხვევაში x ვექტორს A ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი ეწოდება.

ვთქვათ V სივრცის რაიმე $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში A ოპერატორის მატრიცაა $A=(a_{ij})$.

$$\det(A-\lambda E)$$

მრავალწევრს A ოპერატორის მახასიათებელი პოლინომი ეწოდება.

A ოპერატორის მახასიათებელი პოლინომის ფესვები, და მხოლოდ ისინი, წარმოადგენენ ამ ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობებს. თუ $\lambda=\lambda_0$ არის A ოპერატორის რაიმე საკუთრივი მნიშვნელობა, მაშინ ამ მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი x ვექტორის კოორდინატები წარმოადგენს $(\lambda_0 E - A)X = 0$ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს.

9.5.1. იპოვეთ იმ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები, რომელსაც: $1. Q$; $2. R$; $3. C$ ველის მიმართ წრფივი სივრცის გარკვეულ ბაზისში აქვს შემდეგი მატრიცა:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};\ 2. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};\ 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ 4. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ 5. \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$6. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad 7. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\quad 8. \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.5.2. იპოვეთ იმ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები, რომელსაც Z_p, (p მარტივი რიცხვია) ველის მიმართ მოცემული წრფივი სივრცის გარკვეულ ბაზისში აქვს შემდეგი მატრიცა:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ p=2,3;\ 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ p=3,5;\ 3. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ p=2,3;\ 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ p=2,3.$$

9.5.3. აჩვენეთ,რომ წრფივი გარდაქმნის საკუთრივ ვექტორთა სისტემა, რომელიც განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობებს შეესაბამება, წრფივად დამოუკიდებელია.

9.5.4. აჩვენეთ, რომ:

1. დაამტკიცეთ, რომ წრფივი ოპერატორის ბირთვს მიეკუთვნებიან ამ ოპერატორის ნულოვანი საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები, და მხოლოდ ისინი;

2. დაამტკიცეთ, რომ წრფივი ოპერატორის არანულოვანი საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ამ ოპერატორის ანასახს მიეკუთვნებიან.

9.5.5. დაამტკიცეთ, რომ წრფივი ოპერატორის რაიმე არანულოვან სკალარზე გამრავლების შედეგად ამ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორთა სიმრავლე არ იცვლება და თითოეული საკუთრივი მნიშვნელობა გამრავლდება ამ სკალარზე.

9.5.6. დაამტკიცეთ, რომ გადაუგვარებელ A წრფივ ოპერატორსა და A^{-1} ოპერატორს ერთი და იგივე საკუთრივ ვექტორთა სიმრავლე აქვთ. მოძებნეთ კავშირი მათ საკუთრივი მნიშვნელობებს შორის.

9.5.7. დაამტკიცეთ, რომ თუ A^2 ,$\left(A^2 = AA\right)$, ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობაა λ^2, მაშინ A წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა იქნება λ-სა და $(-\lambda)$-ს შორის ერთ-ერთი.
9.5.8. ვთქვათ არანულოვანი λ და μ სკალარები A წრფივი ოპერატორის a და b საკუთრივი ვექტორების შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობებია. დაადგინეთ, იქნება თუ არა $\lambda a + \mu b$ ვექტორი საკუთრივი A-სთვის.
9.5.9. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $n-$ ური რიგის მრავალწევრი, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტია $(-1)^n$, წარმოადგენს გარკვეული მატრიცის მახასიათებელ პოლინომს.
9.5.10. დაამტკიცეთ, რომ ერთინაირი რიგის A და B კვადრატული მატრიცებისათვის, AB და BA მატრიცებს ერთი და იგივე მახასიათებელი პოლინომი აქვთ.
9.5.11. ვთქვათ, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ არის $R-$ველის მიმართ განსაზღვრული V^n წრფივი სივრცის A წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები. იპოვეთ A-ს საკუთრივი მნიშვნელობები, თუ მას განვიხილავთ როგორც $R-$ველის მიმართ შესაბამისი V^{2n} სივრცის წრფივ ოპერატორს.
9.5.12. დაამტკიცეთ, რომ A წრფივი ოპერატორის λ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამის წრფივად დამოუკიდებელ საკუთრივ ვექტორთა რაოდენობა არ აღემატება $\lambda-$ს, როგორც მახასიათებელი პოლინომის ფესვის, ჯერადობას.
9.5.13. იპოვეთ $A^T A$ მატრიცის საკუთრივი ფესვები, თუ $A = \left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\right)$.

§. 6. დამატებითი ამოცანები.

9.6.1. რა რაოდენობის ელემენტისაგან შედგება q ელემენტიანი სასრული ველის მიმართ აგებული n სიგრძის მქონე სტრიქონების მიერ შედგენილი წრფივი სივრცე.
9.6.2. დაამტკიცეთ, რომ წერტილოვანი შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ, $X = \{1,2,3,\ldots,n\}$ სიმრავლიდან $K-$ველში ყველა ასახვათა სიმრავლე არის $n-$განზომილებიანი წრფივი სივრცე $K-$ველის მიმართ.
9.6.3. დაამტკიცეთ, რომ $\left\{F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) : 0 \le \deg F = k\right\}$- პოლინომთა სიმრავლე, შეკრებისა და $K-$ველიდან სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ, არის წრფივი სივრცე $K-$ველის მიმართ. იპოვეთ მისი განზომილება.
9.6.4. დაამტკიცეთ, რომ $\left\{F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) : 0 \le \deg F \le k\right\}$- პოლინომთა სიმრავლე, შეკრებისა და $K-$ველიდან სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ, არის წრფივი სივრცე $K-$ველის მიმართ. იპოვეთ მისი განზომილება.
9.6.5. აჩვენეთ, რომ C -კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ ყოველი V_C წრფივი სივრცე წარმოადგენს V_R წრფივ სივრცეს R-ველის მიმართ, იმავე ოპერაციებით. დაადგინეთ კავშირი მათ განზომილებებს შორის.
9.6.6. დაადგინეთ, q ელემენტიანი სასრული ველის მიმართ აგებული n განზომილებიან წრფივი სივრცეში, განსხვავებული ბაზისების რაოდენობა.
9.6.7. შეამოწმეთ, არის თუ არა წრფივი სივრცე შემდეგი სიმრავლე:

$$W = \left\{\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right) : v_i \in V^n, i = \overline{1,k}\right\}$$

ოპერაციებით:
$\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right) + \left(u_1, u_2, \ldots, u_k\right) = \left(v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_k + u_k\right)$ და $\alpha\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right) = \left(\alpha v_1, \alpha v_{22}, \ldots, \alpha v_k\right)$,
სადაც V^n არის K ველის მიმართ წრფივი სივრცე. იპოვეთ $W-$ს განზომილება.
9.6.8. აჩვენეთ, რომ $\lambda_i \in R$; $\lambda_i \ne \lambda_j$, $i \ne j$ რიცხვებისათვის ფუნქციათა შემდეგი სისტემები წრფივად დამოუკიდებელია:
1. $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$;   2. $t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}$.

9.6.9. აჩვენეთ, რომ თუ ვექტორთა $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ სისტემა–წრფივად დამოკიდებული, მაშინ a ვექტორი წრფივად გამოისახება $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სისტემის ვექტორებით.

9.6.10. ვთქვათ, $M_n -$ წრფივი სივრცეა ერთი ცვლადის ყველა იმ პოლინომისა, კოეფიციენტებით R ველიდან, რომელთა ხარისხი არ აღემატება $n > 1 -$ს. აჩვენეთ, რომ თუ $L \subset M_n$ იმ პოლინომთა სიმრავლეა, რომელთა ფესვიცაა $\alpha \in R$ რიცხვი, მაშინ L არის $M_n -$ ის ქვესივრცე, იპოვეთ $\dim L$.

9.6.11. რომელი თავისი ქვესივრცეების პირდაპირ ჯამს წარმოადგენს თავისუფალ ვექტორთა წრფივი სივრცე.

9.6.12. აჩვენეთ, რომ $M_n -$ სივრცეში (იხ. 9.6.10.):

1. ლუწი ხარისხის მრავალწევრების L_1 და კენტი ხარისხის მრავალწევრების L_2 ქვესიმრავლეები მისი ქვესივრცეებია;
2. ადგილი აქვს ტოლობას: $L_1 \oplus L_2 = M_n$.

9.6.13. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი $L_1 \subset R^n$ ქვესივრცისათვის არსებობს ისეთი $L_2 \subset R^n$, რომ $L_1 \oplus L_2 = R^n$.

9.6.14. ვთქვათ, L, L_1 და L_2 წარმოადგენენ $R^n -$ ის ქვესივრცეებს. დაამტკიცეთ, რომ L მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, წარმოიდგინება L_1-სა და L_2-ის პირდაპირი ჯამის სახით, როცა სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $L_1 \subseteq L_2$;
2. ნებისმიერი $x \in L$ ვექტორისათვის $x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, ამასთან ეს გამოსახვა ერთადერთია.

9.6.15. დაამტკიცეთ, რომ

$$L_1 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right\} \text{ და } L_2 = \{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) : \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n \},$$

ქვესივრცეებისათვის $L_1 \oplus L_2 = R^n$, იპოვეთ $e_i = \left(0, 0, \ldots 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0 \right) \in R^n$ ვექტორის პროექცია:

1. $L_1 -$ ზე $L_2 -$ ის პარალელურად;
2. $L_2 -$ ზე $L_1 -$ ის პარალელურად.

9.6.16. როგორ შეიცვლება ერთი ბაზისიდან მეორე ბაზისზე გადასვლის მარტიცა, თუ:

1. პირველი ბაზისის ნებისმიერ ორ ვექტორს ადგილებს შევუცვლით;
2. მეორე ბაზისის ნებისმიერ ორ ვექტორს ადგილებს შევუცვლით;
3. ორივე ბაზისში ვექტორებს შებრუნებული თანმიმდევრობით ჩავწერთ.

9.6.17. დაამტკიცეთ, რომ R^n სივრცის ნებისმიერი ორი A და B წრფივი გარდაქმნისათვის:

1. $rang(A+B) \le rangA + rangB$;
2. $def(A \cdot B) \le defA + defB$.

9.6.18. ვთქვათ, $V = L_1 \oplus L_2$, სადაც $V -$ წრფივი სივრცეა. დაამტკიცეთ, რომ $A(x) = a_1$, სადაც $x = a_1 + a_2$; $a_1 \in L_1, a_2 \in L_2 -$ წრფივი ოპერატორია (A ოპერატორს უწოდებენ V სივრცის პროექტირებას L_1 ქვესივრცეზე, L_2 ქვესივრცის პარალელურად). იპოვეთ A ოპერატორის მატრიცა ბაზისში, რომელიც L_1 და L_2 ქვესივრცეების ბაზისების გაერთიანებით მიიღება. დაამტკიცეთ, რომ $A^2 = A$.

9.6.19. დაამტკიცეთ, რომ ერთგანზომილებიანი წრფივი სივრცის ნებისმიერ წრფივ ოპერატორს აქვს სახე: $A(x) = \alpha x$, სადაც $\alpha \in K -$ რაიმე სკალარია.

9.6.20. ააგეთ A წრფივი ოპერატორის მატრიცის ზოგადი სახე ბაზისში, რომლის პირველი $k -$ ცალი ვექტორი ქმნის:

1. $\ker A-$ ქვესივრცის ბაზისს;
2. $\operatorname{Im} A-$ ქვესივრცის ბაზისს.

9.6.21. იპოვეთ n განზომილებიანი V წრფივი სივრცის ყველა წრფივი ოპერატორების $L(A)$ წრფივი სივრცის განზომილება, ააგეთ მისი რაიმე ბაზისი.

9.6.22. გამოარკვიეთ, არსებობს თუ არა $R-$ ველის მიმართ კენტგანზომილებიანი წრფივი სივრცის წრფივი ოპერატორი, რომელსა საკუთრივი ვექტორები არ გააჩნია.

9.6.23. ვთქვათ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ არის A მატრიცის მახასიათებელი პოლინომის ფესვები. იპოვეთ მატრიცთა $M_n(R)$- სივრცის შემდეგი წრფივი ოპერატორების საკუთრივი მნიშვნელობები:

1. $A(x)=AX^tA$;
2. $A(x)=AXA^{-1}$.

9.6.24. დაამტკიცეთ, რომ რაიმე ბაზისში წრფივი ოპერატორის მატრიცას დიაგონალური სახე რომ ჰქონდეს აუცილებელი, და საკმარისია, რომ ეს ბაზისი ამ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგებოდეს.

პასუხები:

9.1.1. 1.,2.,3.,6. – არ არის; 4.,5. – არის; **9.1.2.** 1.,2.,3. – არის; 4. – არ არის; **9.1.3.** არ არის; **9.1.4.** 1.,7. – არ არის; 2.,3.,4.,5.,6.,8. – არის; **9.1.5.** 3. $(b.,c.,d.)$, 4.,6.,7.,8. –არის; 2.,3.$(a.)$ – არ არის; **9.2.1.** 1. $5a_1-4a_2-a_3=\theta$; 2. $3a_1-4a_2-a_3=\theta$; 3. $5A_1-4A_2-A_3=0$; 4. $5\varphi_1-4\varphi_2-\varphi_3=0$; 5. $\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=0$; 6. $3\varphi_1+3\varphi_2+0\varphi_3-\varphi_4+0\varphi_5=0$. **9.2.4.** 1. $\lambda=\pm1$; 2. λ ნებისმიერი კენტი რიცხვია; **9.2.5.** 2. $4\varphi_1-3\varphi_2=0$; 7. $\cos 7\sin t-\cos 5\sin(t+2)+\sin 2\cos(t-5)=0$; **9.2.6.** $(1,-2)$; **9.2.7.** 1. $a=(3,4,-2)$, 2. $b\notin V$; **9.2.8.** $\varphi_1=(4,0)$, $\varphi_2\notin V$; **9.2.9.** 1. $(1,2,3)$, 2. $(1,1,1)$, 3. $(0,2,1,2)$;

9.2.10. 1. $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, 2. $\left(\varphi(\alpha),\varphi'(\alpha),\frac{1}{2!}\varphi''(\alpha),\ldots,\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\alpha)\right)$;

9.2.11. 1. $x_1=-27x_1'-72x_2'-43x_3'$, $x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3'$, $x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'$;
2. $x_1=-27x_1'-71x_2'-41x_3'$, $x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3'$, $x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'$;
3. $x_1=2x_1'+x_3'-x_4'$, $x_2=-3x_1'+x_2'-2x_3'+x_4'$, $x_3=x_1'-2x_2'+2x_3'-x_4'$; $x_4=x_1'-x_2'+x_3'-x_4'$;
9.2.12. 1. $(3,7,13)$, 2. $(-4,-6,13)$, 3. $(1,1,1)$; **9.2.13.** 1. $(1,-2,3,-4,5)$; 2. $(1,7,3,-4,5)$; 3. $(1,-2,3,-4,3)$; 4. $(3,12,21,16,5)$; **9.2.14.** 1. $\lambda=15$; 2. λ – ნებისმიერია; 3. $\lambda\neq12$; 4. არ არსებობს;
9.2.15. $\dim V=3$; a_1,a_2,a_4; **9.2.16.** 1. $a_1,a_2,a_3=(1,0,0)$; 2. $a_1,a_2,a_3=(1,0,0,0), a_4=(0,1,0,0)$;
3. $a_1,a_2,a_3=(1,0,0,0), a_4=(0,0,0,1)$; 4. შეუძლებელია; 5. $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3=1, \varphi_4=t, \varphi_5=t^3$;
6. $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3=1, \varphi_4=t$; 7. შეუძლებელია; 8. $a_1,a_2,a_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, a_4=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$;
9.2.17. $a_1,a_2,a_3=(1,0,0,0), a_4=(0,0,1,0)$ და $a_1,a_2,a_3=(0,1,0,0), a_4=(0,0,0,1)$; **9.3.1.** 1. თუ წრფე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე; 4.,5.,6. – თუ შესაბამისი განტოლებათა სისტემა ერთგვაროვანია; **9.3.2.** 1. $\dim V=1, e\neq\theta-$ ამ სიბრტყის ორთოგონალური ვექტორია; 2. $\dim V=2$, e_1,e_2- მოცემული სიბრტყის პარალელური და არაკოლინეარული ვექტორებია; 3. $\dim V=2$, e_1,e_2- მოცემული წრფის მართობული და არაკოლინეარული ვექტორებია; 4. $\dim V=1$, $e\neq\theta$ -მოცემული წრფის პარალელური ვექტორია; 5. $\dim V=2$, $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$;
7. $\dim V=6$, $e_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}, e_5=\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}$, $e_6=\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}$;

8. $\dim V=3,\quad e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};$ 9. $\dim V=2,\quad e_1=1, e_2=\sin^2 t;$

10. $\dim V=3,\quad e_1=1, e_2=\sin t, e_3=\sin^2 t;$

9.3.3. 1. $\dim V=n-1,\quad e_i=\left(0,0,\ldots 0,\overset{(i)}{1},0,\ldots,0\right), i=\overline{1,n-1};$

2. $\dim V=\left[\dfrac{n+1}{2}\right],\quad e_1=(0,0,\ldots,0), e_2=(0,0,1,\ldots,0), e_3=(0,0,0,0,1,\ldots,0)\ldots;$

3. $\dim V=1+\left[\dfrac{n+1}{2}\right], n>1,\ e=(1,1,\ldots,1), e_1=(0,0,\ldots,0), e_2=(0,0,1,\ldots,0), e_3=(0,0,0,0,1,\ldots,0)\ldots;$

4. $\dim V=2, n>1,\ e_1=(1,0,1,\ldots,0), e_2=(0,10,1,,\ldots,0);$ 5. ბაზისს წარმოადგენს ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. **9.3.4.** 1. $\dim V=\dfrac{n(n+1)}{2}, e_{ij}+e_{ji}, 1\le i\le j\le n;$

2. $\dim V=\dfrac{n(n-1)}{2}$, $a)$. $e_{ij}-e_{ji}, 1\le i<j\le n, charK\ne 2;$ $b)$. $e_{ij}+e_{ji}, 1\le i\le j\le n, charK=2;$

9.3.5. 1. $\dim V=2, e_1=(1,0,-1,-1), e_2=(0,1,1,-1);$

2. $\dim V=3, e_1=(1,-1,-2,0,0), e_2=(1,-1,0,2,0), e_3=(2,1,0,0,-1).;$

9.3.6. 3. $\dim V=3,\quad e_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$ 6. $\dim V=2,\quad e_1=(1,0,0), e_2=(0,0,1).$

9.3.7. 1.,2.,3.$-$ არის, 4.$-$ არ არის. **9.3.8.** 1. $\dim V=3,\quad a_1,a_2,a_4;$ 2. $\dim V=3,\quad a_1,a_2,a_5;$ 3. $\dim V=3,\quad \varphi_1,\varphi_2,\varphi_3;$ 4. $\dim V=2,\quad a_1,a_2;$ 5. $\dim V=2,\quad a_3,a_4$. **9.3.9.** 1. $\dim(L_1+L_2)=3,$ $a_1,a_2,b_1;$ $\dim(L_1\cap L_2)=1,\ a_1;$ 2. $\dim(L_1+L_2)=3,\ a_1,a_2,b_1;$ $\dim(L_1\cap L_2)=2,\ a_1,a_2;$
3. $\dim(L_1+L_2)=4,\ a_1,a_2,a_3,b_1;$ $\dim(L_1\cap L_2)=2,\ a_1,a_2;$ 4. $\dim(L_1+L_2)=4,\quad a_1,a_2,a_3,b_1;$
$\dim(L_1\cap L_2)=2,\quad a_1,a_2;$ 5. $\dim(L_1+L_2)=4,\ a_1,a_2,a_3,b_1;$ $\dim(L_1\cap L_2)=2,\quad a_1,a_2;$

9.3.10. 1. a_1,a_2,b_1 ჯამის ბაზისია, ხოლო a_1 თანაკვეთის; 2. a_1,a_2,a_3,b_1 ჯამის ბაზისია, ხოლო b_1,b_3 თანაკვეთის; **9.3.11.** 2.,3.$-$ ისარგებლეთ ფორმულით $\dim L_1+\dim L_2=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2).$ **9.3.12.** არა, თუ ის არანულოვანია.

9.3.14. 1. $L_1+L_2=M_{n\times n}, L_1\cap L_2$ დიაგონალურ მატრიცთა ქვესივრცეა;
2. $L_1+L_2=M_{n\times n}, L_1\cap L_2=\{0\}.$ **9.3.15.** $\dim L=2,$ დამატებით ქვესივრცეებად შეიძლება განვიხილოთ $L_1=\{\alpha_1(1,0,0,0)+\alpha_2(0,1,0,0):\alpha_1,\alpha_2\in R\}$ და

$L_2=\{\beta_1(6,0,1,0)+\beta_2(0,0,0,1):\beta_1,\beta_2\in R\}.$ **9.4.1.** 1. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$ 2. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix};$ 5. $\begin{pmatrix}(a,b)&0&0\\0&(a,b)&0\\0&0&(a,b)\end{pmatrix};$

6. $\begin{pmatrix}0&3&1\\-3&0&2\\1&2&0\end{pmatrix};$ 9. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-$ პროექცია OX ღერძზე, YOZ სიბრტყის პარალელურად;

10. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-$ პროექცია OZ ღერძზე, XOY სიბრტყის პარალელურად; 11. $a=0,$ იხ.1.;

12. $a=0$, იხ.1.; 3.,4.,7.,8. – შემთხვევებში –პასუხი უარყოფითია; **9.4.2.** 1. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 2.,3. – შემთხვევებში პასუხი უარყოფითია;

.9.4.3. 1. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_3 & a_2b_1 & a_2b_3\\ a_1b_2 & a_1b_4 & a_2b_2 & a_2b_4\\ a_3b_1 & a_3b_3 & a_4b_1 & a_4b_3\\ a_3b_2 & a_3b_4 & a_4b_2 & a_4b_4\end{pmatrix}$; $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$; 7. $\begin{pmatrix}a_1+b_1 & b_3 & a_2 & 0\\ b_2 & a_1+b_4 & 0 & a_2\\ a_3 & 0 & a_4+b_1 & b_3\\ 0 & a_3 & b_2 & a_4+b_4\end{pmatrix}$;

9.4.4. 1. $\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$; 2. – არ არსებობს; 3. $\begin{pmatrix}\alpha & \frac{2-\alpha}{2}\\ \beta & -\frac{\beta+1}{2}\end{pmatrix}$, $\forall\alpha,\beta\in R$; **9.4.5.** 1. $\begin{pmatrix}2 & -11 & 6\\ 1 & -7 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix}-2 & \frac{11}{3} & \frac{5}{3}\\ -4 & \frac{13}{3} & \frac{10}{3}\\ 2 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$. **9.4.6.** $\begin{pmatrix}2 & -11 & 6\\ 1 & -7 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$. **9.4.7.** $\begin{pmatrix}\frac{8}{5} & -\frac{11}{5}\\ \frac{9}{5} & \frac{22}{5}\end{pmatrix}$. **9.4.8.** $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. **9.4.9.** $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

9.4.10. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. **9.4.11.** 1. $\begin{pmatrix}4 & 5 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0 & 3\\ 1 & 6 & -1 & 7\end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix}-5 & -8 & -6 & -2\\ 2 & 4 & 4 & 0\\ -3 & -2 & -1 & -5\\ 6 & 7 & 6 & 13\end{pmatrix}$. **9.4.12.** 1. $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -\frac{15}{4} & -4 & \frac{13}{2}\\ \frac{9}{4} & 3 & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. **9.4.13.** $\begin{pmatrix}44 & 44\\ -\frac{59}{2} & -25\end{pmatrix}$. **9.4.14.** 1. $\begin{pmatrix}109 & 93\\ 34 & 29\end{pmatrix}$.

9.4.17. 1. ჭეშმარიტია; 2. მცდარია. **9.4.18.** 1. $\{0\},V$; 2. $V,\{0\}$; 3. $V,\{0\}$ – როცა $\alpha\neq 0$; $\{0\},V$ – როცა $\alpha=0$; 4. b,a^t – როცა $a\neq\theta, b\neq\theta$; $\{0\},V$ – როცა $a=\theta$ ან $b=\theta$; 5. $V,\{0\}$; 8. $V,\{0\}$. **9.4.19.** 1. $\dim\operatorname{Im}A=1, e_1=(1,1,1)$; $\dim\ker A=2, e_1=(1,-1,0), e_2=(1,0,-1)$;
2. $\dim\operatorname{Im}A=2, e_1=(2,1,1), e_2=(-1,-2,1)$; $\dim\ker A=1, e_1=(1,1,1)$;
3. $\dim\operatorname{Im}A=3$; $\dim\ker A=0$; **9.4.20.** 1. $\ker A=\{0\}, \operatorname{Im}A=V$; 2. $\ker A$ – ს ბაზისია $e_1=(-2,1)$ და $\operatorname{Im}A$ – ს ბაზისია $e_1=(1,3)$; 3. $\ker A=\{0\}, \operatorname{Im}A=V$; 4. $\ker A$ – ს ბაზისია $e_1=(0,1,0,0), e_2=(0,0,1,0)$ და $\operatorname{Im}A$ – ს ბაზისია $e_1=(1,0,2,1), e_2=(0,0,1,1)$; 5. $\ker A$ – ს ბაზისია $e_1=(-1,0,0,1), e_2=(0,-1,1,0)$ და $\operatorname{Im}A$ – ს ბაზისია $e_1=(1,0,1,1), e_2=(0,1,1,2)$.

9.4.21. შენიშვნა: ქვესივრცის $e_1,e_2,\ldots,e_k$ ბაზისი შეავსეთ სივრცის $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ბაზისამდე და განიხილეთ პროექციები $J(e_1,e_2,\ldots,e_k)$ და $J(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ წრფივ გარსებზე.

9.4.22. შენიშვნა: ქვესივრცის ბაზისი შეავსეთ სივრცის ბაზისამდე.

9.5.1. $1.Q:\lambda_1=\lambda_2=-1,a=(\alpha,\alpha),0\neq\alpha\in Q;\quad R:\lambda_1=\lambda_2=-1,a=(\alpha,\alpha),0\neq\alpha\in R;$

$C:\lambda_1=\lambda_2=-1,a=(\alpha,\alpha),0\neq\alpha\in C;$ $2.Q-$ზე და $R-$ზე არ აქვს;

$C:\lambda_1=1+2i,\{(\alpha,\alpha-i\alpha),0\neq\alpha\in C\}$ და $\lambda_2=1-2i,\{(\alpha,\alpha+i\alpha),0\neq\alpha\in C\};$

$3.Q:\lambda_1=1,a=(\alpha,\alpha);\lambda_2=-1,a=(\alpha,-\alpha),0\neq\alpha\in Q;\ R:\lambda_1=1,a=(\alpha,\alpha);\lambda_2=-1,a=(\alpha,-\alpha),0\neq\alpha\in R;$

$C:\lambda_1=1,a=(\alpha,\alpha);\lambda_2=-1,a=(\alpha,-\alpha),0\neq\alpha\in C.$

$4.Q:\lambda_1=1,a=(\alpha,\alpha,\alpha);\lambda_2=2,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_3=-1,a=(\alpha,-3\alpha,-5\alpha),0\neq\alpha\in Q;$

$R:\lambda_1=1,a=(\alpha,\alpha,\alpha);\lambda_2=2,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_3=-1,a=(\alpha,-3\alpha,-5\alpha),0\neq\alpha\in R;$

$C:\lambda_1=1,a=(\alpha,\alpha,\alpha);\lambda_2=2,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_3=-1,a=(\alpha,-3\alpha,-5\alpha),0\neq\alpha\in C;$

$5.Q:\lambda_1=0,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_2=2,a=(3\alpha,-2\alpha,\alpha);\lambda_3=-1,a=(0,\alpha,2\alpha),0\neq\alpha\in Q;$

$R:\lambda_1=0,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_2=2,a=(3\alpha,-2\alpha,\alpha);\lambda_3=-1,a=(0,\alpha,2\alpha),0\neq\alpha\in R;$

$C:\lambda_1=0,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_2=2,a=(3\alpha,-2\alpha,\alpha);\lambda_3=-1,a=(0,\alpha,2\alpha),0\neq\alpha\in C;$

$6.Q:\lambda_1=1,a=(0,2\alpha,\alpha),0\neq\alpha\in Q;\ R:\lambda_1=1,a=(0,2\alpha,\alpha),0\neq\alpha\in R;$

$C:\lambda_1=1,a=(0,2\alpha,\alpha);\lambda_2=i,a=(\alpha+i\alpha,\alpha+i\alpha,-\alpha);\lambda_3=-i,a=(\alpha-i\alpha,\alpha-i\alpha,-\alpha),0\neq\alpha\in C;$

$7.Q:\lambda_1=2,a=(\alpha,0,\alpha),0\neq\alpha\in Q;\quad R:\lambda_1=2,a=(\alpha,0,\alpha),0\neq\alpha\in R;$

$C:\lambda_1=2,a=(\alpha,0,\alpha);\lambda_2=3+i,a=(\alpha,\alpha+i\alpha,2\alpha-i\alpha);\lambda_3=3-i,a=(\alpha,\alpha-i\alpha,2\alpha+i\alpha),0\neq\alpha\in C;$

$8.Q:\lambda_1=\lambda_2=2,a=(2\alpha+\beta,\alpha,\beta),\alpha^2+\beta^2>0;\lambda_3=-5,a=(\alpha,3\alpha,2\alpha),\alpha,\beta\in Q;$

$R:\lambda_1=\lambda_2=2,a=(2\alpha+\beta,\alpha,\beta),\alpha^2+\beta^2>0;\lambda_3=-5,a=(\alpha,3\alpha,2\alpha),\alpha,\beta\in R;$

$C:\lambda_1=\lambda_2=2,a=(2\alpha+\beta,\alpha,\beta),|\alpha|^2+|\beta|^2>0;\lambda_3=-5,a=(\alpha,3\alpha,2\alpha),\alpha,\beta\in C.$

9.5.2. $1.Z_2:\lambda_1=\lambda_2=0,a=(1,1);\ Z_3:\lambda_1=0,a_1=(1,2),a_2=(2,1);\lambda_2=2,a_1=(1,1),a_2=(2,2);$

$2.Z_3:\quad Z_5:\lambda_1=0,a=(3\alpha,\alpha);\lambda_2=2,a=(2\alpha,\alpha),\alpha\in Z_5;$

$3.Z_2:\lambda_1=\lambda_2=0,a_1=(1,0,1),a_2=(1,1,0),a_3=(0,1,1);\lambda_3=1,a=(1,1,1);$

$Z_3:\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,a_1=(1,0,1),a_2=(1,1,0),a_3=(2,1,1),a_4=(2,0,2),$

$a_5=(2,2,0),a_6=(1,2,2),a_7=(0,1,2),a_8=(0,2,1);$

$4.Z_2:\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,a_1=(0,1,0,1),a_2=(1,1,1,0),a_3=(1,0,1,1);$

$Z_3:\lambda_1=\lambda_2=0,a_1=(0,2,0,1),a_2=(0,1,0,2),\ \lambda_3=\lambda_4=2,a_1=(0,1,0,1),a_2=(0,2,0,2).$ **9.5.6.** თუ λ არის A ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა, მაშინ λ^{-1} იქნება A^{-1} ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა. **9.5.7.** შენიშვნა: განიხილეთ $A^2-\lambda^2E^2$; **9.5.8.** არ იქნება;

9.5.9. შენიშვნა: განვიხილოთ მატრიცა $\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.5.11. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\ldots,\overline{\lambda_n}.$ **9.5.12.** განიხილეთ A ოპერატორის მატრიცა იმ ბაზისში, რომლის ვექტორებადაც აღებულია $\lambda-$ს შესაბამისი წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ვექტორები. **9.5.13.** $\lambda_1=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$ **9.6.1.** q^n.

9.6.3. C_{n+k-1}^{n-1}. **9.6.4.** C_{n+k}^{n}, შენიშვნა: შემოვიღოთ ცვლადები $x_i=\frac{y_i}{y_{n+1}}$, (იხ. 9.6.3.). **9.6.5.** $2n$. **9.6.6.** $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})$. **9.6.7.** $\dim W=nk$; $f_1=(e_1,0,0,\ldots,0)$, $f_2=(e_2,0,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $f_n=(e_2,0,0,\ldots,0)$,
$f_{n+1}=(0,e_1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $f_{2n}=(0,e_n,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $f_{nk}=(0,0,0,\ldots,e_n)$.
9.6.8. გაიხსენეთ ვანდერმონდის დეტერმინანტი. **9.6.10.** $\dim L=n$. **9.6.11.** თავისუფალ ვექტორთა V^3 წრფივი სივრცე შეიძლება წარმოვადგინოთ მოცემული სამი არაკომპლანარული ვექტორის პარალელურ ერთგანზომილებიან ქვესივრცეთა პირდაპირი ჯამი. **9.6.15.** 1. e_i- ვექტორის პროექციის $i-$ური კოორდინატია $\frac{n-1}{n}$, ხოლო ყველა დანარჩენი კოორდინატი $\left(-\frac{1}{n}\right)$; 2. e_i- ვექტორის პროექციის თითოეული კოორდინატია $\left(-\frac{1}{n}\right)$; **9.6.16.** 1. მატრიცის შესაბამისი სტრიქონებისთვის ადგილების გაცვლა;
2. მატრიცის შესაბამისი სვეტებისთვის ადგილების გაცვლა;
3. მატრიცის სიმეტრიული არეკვლა საკუთარი ცენტრის მიმართ. **9.6.18.** $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, სადაც $k=\dim L_1$ და $E_k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ არის $k-$ური რიგის. **9.6.21.** 1. მატრიცის პირველი k სვეტი ნულოვანია, ხოლო დანარჩენი სვეტები −წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები; 2. მატრიცის ბოლო $n-k$ სტრიქონი ნულოვანია, ხოლო წინა სტრიქონები−წრფივად დამოუკიდებელი. **9.6.23.** არ არსებობს. **9.6.24.** 1. $\lambda_i,\lambda_j,\ i,j=\overline{1,n}$;
2. $\frac{\lambda_i}{\lambda_j},\ i,j=\overline{1,n}$.

თავი 10. კვადრატული ფორმები

§ 10.1. კვადრატული ფორმის მიყვანა კანონიკურ სახეზე. რანგი და ინდექსი

ერთგვაროვან, n უცნობიან, კვადრატულ f პოლინომს, კოეფიციენტებით K ველიდან, ეწოდება კვადრატული ფორმა K ველის მიმართ:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ სადაც } a_{ij} = a_{ji}.$$

ყოველ კვადრატულ ფორმას შეესაბამება $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $a_{ij} \in K$, მატრიცი, რომელსაც კვადრატული ფორმის მატრიცი ეწოდება. A მატრიცის რანგს კვადრატული ფორმის რანგი ეწოდება და r-ით აღინიშნება. f კვადრატული ფორმა შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცულადაც:

$$f = X^t \cdot A \cdot X, \text{ სადაც } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ერთ სვეტიანი მატრიცია.}$$

კვადრატულ ფორმას ეწოდება გადაუგვარებელი, თუ მისი მატრიცაა გადაუგვარებელი.

ორ კვადრატულ ფორმას ეწოდება ექვივალენტური, თუ არსებობს უცნობთა ნამდვილი, წრფივი, გადაუგვარებელი გარდაქმნა, რომელიც ერთ მათგანს მეორეში გადაიყვანს.

თუ f კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები $a_{ij} = 0, i \neq j$, მაშინ ის მიიღებს სახეს:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

კვადრატული ფორმის ასეთ სახეს კანონიკური სახე ეწოდება.

ნებისმიერი კვადრატული ფორმა, უცნობთა გარკვეული წრფივი გარდაქმნის გამოყენებით, მიიყვანება კანონიკურ სახეზე.

ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში დადებით კოეფიციენტთა რაოდენობას კვადრატული ფორმის ინდექსი ეწოდება და i-თი აღინიშნება. ცხადია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი კვადრატული ფორმისათვის $n \geq r \geq i \geq 0$. ნამდვილი კვადრატული ფორმის ინდექსი ინვარიანტულია უცნობთა ნამდვილი, წრფივი, გადაუგვარებელი გარდაქმნების მიმართ.

თუ კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში $a_{ii} = \pm 1$ ანუ კანონიკური სახე მოცემულია როგორც:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

მაშინ ამბობენ, რომ მას აქვს ნორმალური სახე ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ. კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ ნორმალური სახე იქნება:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2.$$

იმისათვის, რომ R ველის მიმართ, ორი ნამდვილი კვადრატული ფორმა იყოს ექვივალენტური, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათ ჰქონდეთ ერთი და იგივე რანგები და ინდექსები.

აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი f კვადრატული ფორმა იყოს:

(ა) დადებითად განსაზღვრული – არის $n = r = i > 0$,

(ბ) ნახევრად დადებითად განსაზღვრული –არის $n > r = i > 0$,

(გ) განუსაზღვრელი –არის $n \geq r > i > 0$,

(დ) უარყოფითად განსაზღვრული –არის $n = r > i = 0$,

(ე) ნახევრად უარყოფითად განსაზღვრული –არის $n > r > i = 0$.

სამართლიანია სილვესტრის თეორემა: იმისათვის, რომ ნამდვილი კვადრატული ფორმა იყოს დადებითად განსაზღვრული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი ყველა მთავარი მინორი იყოს დადებითი.

ნებისმიერი კვადრატული ფორმისათვის მოიძებნება უცნობთა ნამდვილი ორთოგონალური გარდაქმნა, რომლითაც ის კანონიკურ სახეზე მიიყვანება.

10.1.1. უცნობთა წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნების გამოყენებით, მიიყვანეთ კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე

1. $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$, 2. $x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3$, 3. $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$,

4. $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 5. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 6. $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$,

7. $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$, 8. $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$,

9. $5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$, 10. $3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$,

11. $7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$, 12. $x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$, 13. $2x_1x_2+2x_3x_4$

10.1.2. მიიყვანეთ კვადრატული ფორმა ნორმალურ სახეზე R და C ველების მიმართ

1. $2x_1^2+5x_2^2+8x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$, 2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,

3. $x_1^2+5x_2^2-x_3^2+6x_1x_2+4x_2x_3$, 4. $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$, 5. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$,

6. $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_1x_4$

10.1.3. f და g კვადრატული ფორმებისათვის, ააგეთ უცნობთა წრფივი გარდაქმნა, რომელიც ერთ მათგანს მეორეზე მიიყვანს

1. $f=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2 \qquad g=4z_1^2+z_2^2$,

2. $f=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2 \qquad g=10y_1^2-2y_1y_2+y_2^2$

10.1.4. გამოარკვიეთ, ჩამოთვლილთაგან რომელი კვადრატული ფორმები არიან ექვივალენტურები: 1. R-ის მიმართ; 2. C-ს მიმართ

1. $f_1=x_1^2-x_2x_3, \quad f_2=y_1y_2-y_3^2, \quad f_3=z_1z_2+z_3^2$,

2. $f_1=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3$,

$f_2=y_1^2+2y_2^2-y_3^2-4y_1y_2-2y_1y_3-4y_2y_3$,

$f_3=-4z_1^2-z_2^2-z_3^2-4z_1z_2+4z_1z_3+18z_2z_3$

10.1.5. აჩვენეთ, რომ n-უცნობიან კვადრატულ ფორმათა სიმრავლე შეიძლება დაიყოს ექვივალენტობის კლასებად. დაადგინეთ ამ კლასების რაოდენობა R და C ველის მიმართ

10.1.6. იპოვეთ λ პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც კვადრატული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული

1. $5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$, 2. $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$,

3. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$, 4. $2x_1^2-x_2^2+4x_3^2+(2\lambda-1)x_1x_2+\lambda^2x_2x_3$,

5. $x_2^2+x_3^2+4\lambda x_1x_2+\lambda^2x_1x_3$, 6. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+2\lambda x_1x_3+2\lambda x_2x_3$,

7. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2\lambda x_1x_3+2\lambda x_2x_3$, 8. $x_1^2+5x_2^2+(\lambda^2+1)x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

10.1.7. დაამტკიცეთ, რომ თუ A სიმეტრიული მატრიცის შესაბამისი კვადრატული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული, მაშინ A^{-1} მატრიცის შესაბამისი კვადრატული ფორმაც დადებითადაა განსაზღვრული

10.1.8. დაამტკიცეთ, რომ f კვადრატული ფორმა უარყოფითაა განსაზღვრული მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა $(-f)$ კვადრატული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული

10.1.9. იპოვეთ λ პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც კვადრატული ფორმა უარყოფითადაა განსაზღვრული

1. $-x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - \lambda^2 x_2x_3$, 2. $\lambda x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

3. $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda - 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$, 4. $-2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2\lambda x_2x_3$

10.1.10. მიიყვანეთ f კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე

1. $f = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$, 2. $f = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

3. $f = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$, 4. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$

10.1.11. ააგეთ ორთოგონალური გარდაქმნა, რომლითაც მოცემული კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე მიიყვანება

1. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$, 2. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

3. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 4. $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$,

5. $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, 6. $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$,

7. $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$, 8. $3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 8x_1x_2 - 4x_3x_4$,

9. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$

10.1.12. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნამდვილი, სიმეტრიული A მატრიცისათვის არსებობს Q ორთოგონალური მატრიცა და B ნამდვილი, დიაგონალური მატრიცა, რომ

$$A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$$

10.1.13. მოცემული A მატრიცისათვის, იპოვეთ ორთოგონალური Q მატრიცა და დიაგონალური B მატრიცა, რომ შესრულდეს ტოლობა $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$ თუ:

$$1.\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad 2.\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

10.1.14. კვადრატულ ფორმათა შემდეგი წყვილისათვის იპოვეთ უცნობთა წრფივი, გადაუგვარებელი გარდაქმნა, რომელიც ერთ მათგანს ნორმალურ სახეზე, ხოლო მეორეს კანონიკურ სახეზე მიიყვანს. ამ ფორმათაგან ერთი დადებითადაა განსაზღვრული

1. $f = -4x_1x_2$, $g = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2$, 2. $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$, $g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$,

3. $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$, $g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$,

4. $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$, $g = 0{,}25x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$

10.1.15. მიიყვანეთ კანონიკურ სახეზე მეორე რიგის ზედაპირთა განტოლებები

1. $x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1 - 2x_2 - 5 = 0$, 2. $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) - x_1x_2x_3 = 0$,

3. $x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 5x_2 + 13 = 0$,

4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1 = 0$, 5. $-x_2^2 + 4x_1x_2 = 0$,

6. $x_1x_4 - x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

10.1.16. იპოვეთ f კვადრატული ფორმის რანგი და სიგნატურა, თუ ის $(-f)$ კვადრატული ფორმის ექვივალენტურია

10.1.17. დაამტკიცეთ, რომ f კვადრატული ფორმა უარყოფითადაა განსაზღვრული მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი მატრიცის D_1, D_2, Λ, D_n მთავარი მინორების მიმდევრობა ნიშან მონაცვლე მიმდევრობაა და $D_1 < 0$