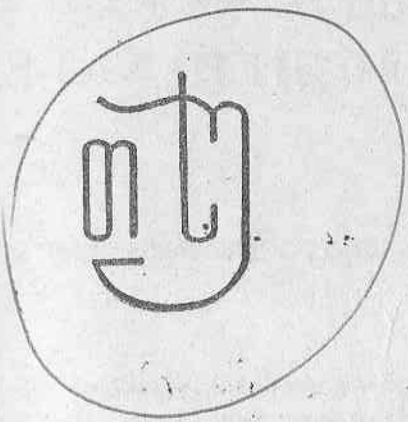
ა. გ. კუროში

უმაღლესი ალგებრის კურსი

თბილისი



А. Г. Курош

КУРС ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для государственных университетов и педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ТБИЛИСИ — 1961

ა. გ. კუროში

უმაღლესი ალგებრის კურსი

მეექვსე გადამუშავებული და შევსებული გამოცემა

დაშვებულია სსრ კავშირის უმაღლესი განათლების სამინისტროს მიერ როგორც სახელმძღვანელო სახელმწიფო უნივერსიტეტებისა და პედაგოგიური ინსტიტუტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი — 1961

მეექვსე გამოცემის წინასიტყვაობა

ეს წიგნი პირველად გამოვიდა 1946 წ., ხოლო შემდეგ იგი ხელახლა გამოიცა 1950, 1952, 1955 და 1956 წლებში. მეორე და მეოთხე გამოცემების წინ წიგნმა განიცადა მნიშვნელოვანი გადამუშავება, რომლის მიზანი იყო აესახა მოსკოვის უნივერსიტეტში ალგებრული სწავლების გამოცდილება. ამ მეექვსე გამოცემის მომზადების დროს წიგნმა განიცადა კიდევ უფრო სერიოზული გადამუშავება, იმდენად სერიოზული, რომ საკმაო საფუძვლებით იგი შეგვეძლო ჩაგვეთვალა ახალ წიგნად, და არა ძველი წიგნის მეექვსე გამოცემად.

ეს გადამუშავება განისაზღვრა ორი ამოცანით. უწინარეს ყოვლისა, არაერთხელ გამოითქვა სურვილები წიგნის გაფართოების შესახებ იმისათვის, რომ მას უზრუნველეყო უმაღლესი ალგებრის მთელი სავალდებულო საუნივერსიტეტო კურსი და არა მარტო მისი პირველი ორი სემესტრი, როგორც ეს იყო აქამდე. ამ მიზნით წიგნში შეტანილია რამდენიმე ახალი თავი. ერთი მათგანი მიძღვნილია ჯგუფთა თეორიის საფუძვლებისადმი, ხოლო დანარჩენი — წრფივ სივრცეთა თეორია, ევკლიდურ სივრცეთა თეორია, λ-მატრიცთა და მატრიცის ჟორდანის ნორმალური ფორმის თეორია — მიეკუთვნება წრფივ ალგებრას.

რა თქმა უნდა, საბჭოთა ალგებრულ ლიტერატურაში ამჟამად არის რიგი კარგი წიგნებისა წრფივ ალგებრაში, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მოცულობით, შინაარსით, გადმოცემის ხასიათით. წრფივ ალგებრასთან დაკავშირებული მასალის ასეთი მნიშვნელოვანი დამატების შემდეგაც კი ამ წიგნს არ შეიძლება ჰქონდეს რომელიმე ამ წიგნთაგანის შეცვლის პრეტენზია. მიუხედავად ამისა, უდავოა, რომ სტუდენტებისათვის მოხერხებული იქნება მთელი სავალდებულო მასალის ერთ სახელმძღვანელოში გაერთიანება და ერთიანი სტილით გადმოცემა.

მეორე მხრივ, თავების ის დალაგება, რომელიც მიღებული იყო წიგნის წინა გამოცემებში, დიდი ხანია უკვე აღარ შეესაბამება მასალის გადმოცემის იმ დალაგებას, რომელიც მოსკოვის უნივერსიტეტში ფაქტიურად მოქმედებს — ეს დალაგება უმთავრესად განისაზღვრება იმის აუცილებლობით, რომ გარ-

კვეულ ვადაში შესრულდეს ანალიზური გეომეტრიისა და მათემატიკური ანალიზის კურსების გარკვეული შეკვეთები. უფრო მეტიც, სამი წლის წინათ მოსკოვის უნივერსიტეტში შემოღებულ იქნა უმაღლესი ალგებრის კურსის ახალი პროგრამა. ამ წლების მანძილზე მან წარმატებით გაიარა გამოცდა და ამიტომ მიზანშეწონილი აღმოჩნდა წიგნის გადაკეთება ისე, რომ მასში მასალა დალაგებულიყო მითითებულ პროგრამასთან ზუსტ შესაბამისობაში. ამ ახალი პროგრამის შესაბამისი სახელმძღვანელოს გაჩენა გააადვილებს, ალბათ, მის მიღებას სხვა უნივერსიტეტებშიც.

მივუთითოთ მასალის განაწილება სემესტრების მიხედვით: 1-ლი სემესტრი — 1-5 თავები, მე-2 სემესტრი — 6-9 თავები, მე-3 სემესტრი—10, 11, 13 და 14 თავები. უნდა აღინიშნოს, რომ მოსკოვის უნივერსიტეტის სტუდენტი-მექანიკოსები სწავლობენ უმაღლეს ალგებრას მხოლოდ პირველი ორი სემესტრის მოცულობით.

უდავოა, რომ წიგნის ეს გადამუშავება არ გააძნელებს და, შესაძლოა, გააადვილებს კიდევაც მის გამოყენებას პედაგოგიურ ინსტიტუტებში.

წიგნის წინა გადამუშავებანი ხერხდებოდა მისი მოცულობის ყოველგვარი გადიდების გარეშე. ამჯერად ამის გაკეთება, რა თქმა უნდა, შეუძლებელი იყო. წიგნის მოცულობის რამდენადმე შემცირების სურვილმა გვაიძულა მისგან გამოგვერიცხა გარკვეული მასალა, კერძოდ პარაგრაფები, მიძღვნილი შტურმის თეორემისადმი, ალგებრათა თეორიისადმი და ფრობენიუსის თეორემისადმი. მიუხედავად ამისა, გონივრული არ ჩანდა შემოვფარგლულიყავით წიგნში მხოლოდ იმ მასალის გადმოცემით, რომელიც ახლა შედის სავალდებულო პროგრამაში, ე. ი. გადაგვექცია ეს წიგნი ლექციების უბრალო კონსპექტად. ამ წიგნში შენახული არასავალდებულო მასალა — პარაგრაფები, რომლებიც მთლიანად მას მიეკუთვნება, აღნიშნულია ვარსკვლავით — როგორც წესი, ისეთია, რომ თავის დროზე ის შედიოდა უმაღლესი ალგებრის კურსის სავალდებულო პროგრამაში, ზოგიერთ უნივერსიტეტსა და პედაგოგიურ ინსტიტუტში იგი ახლაც შედის პროგრამაში და ყოველ შემთხვევაში შეტანილი იქნებოდა პროგრამაში, რომ უმაღლესი ალგებრის კურსს დათმობილი ჰქონდეს საათების მეტი რიცხვი.

წიგნის გადამუშავებისას შეიცვალა აგრეთვე ზოგიერთი დეტალი, მაგრამ მათზე ახლა არ შევჩერდებით.

ა. კუროში

მოსკოვი, 1958 წ. დეკემბერი

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

სტუდენტი-მათემატიკოსის მათემატიკური განათლება იწყება სამი ძირითადი დისციპლინის შესწავლით, სახელდობრ, მათემატიკური ანალიზის, ანალიზური გეომეტრიისა და უმაღლესი ალგებრის. ეს დისციპლინები ხშირად ეხებიან და კვეთენ კიდეც ერთმანეთს და ერთად ქმნიან საძირკველს, რომელზედაც შენდება თანამედროვე მათემატიკური მეცნიერების მთელი შენობა.

უმაღლესი ალგებრა, რომლის გადმოცემას ეძღვნება ეს წიგნი, წარმოადგენს ელემენტარული ალგებრის სასკოლო კურსის ძირითადი შინაარსის შორს წასულ, მაგრამ სავსებით ბუნებრივ განზოგადებას. ალგებრის სასკოლო კურსში ცენტრალურია, უდავოდ, საკითხი განტოლებათა ამოხსნის შესახებ. როგორც მკითხველს ახსოვს, განტოლებების შესწავლა იწყება ერთუცნობიანი პირველი ხარისხის ერთი განტოლების ძალიან მარტივი შემთხვევით, ხოლო შემდეგ ვითარდება ორი მიმართულებით. ერთი მხრივ, განიხილება პირველი ხარისხის ორი და სამი განტოლების სისტემები ორი და, შესაბამისად, სამი უცნობით; მეორე მხრივ, შეისწავლება ერთი კვადრატული განტოლება ერთი უცნობით და აგრეთვე ზოგიერთი კერძო ტიპი უფრო მაღალი ხარისხის განტოლებებისა, რომლებიც ადვილად დაიყვანება კვადრატულზე (მაგალითად, ბიკვადრატული განტოლებები).

ორივე ეს მიმართულება ღებულობს შემდგომ განვითარებას უმაღლესი ალგებრის კურსში და განსაზღვრავს მის დაყოფას ორ დიდ დარგად. ერთ-ერთი მათგანის, სახელდობრ წრფივი ალგებრის საფუძვლების, გამოსავალი ამოცანაა პირველი ხარისხის განტოლებების, ანუ, როგორც ამბობენ, წრფივი განტოლებების ნებისმიერი სისტემების შესწავლა. ასეთი სისტემების ამოხსნისათვის იმ შემთხვევაში, როცა განტოლებათა რიცხვი ტოლია უცნობთა რიცხვისა, იქმნება დეტერმინანტთა თეორიის აპარატი. მაგრამ ეს აპარატი უკვე აღარ არის საკმარისი წრფივ განტოლებათა ისეთი სისტემების შესწავლისათვის, რომელთა განტოლებების რიცხვი არ უდრის უცნობთა რიცხვს,— შემთხვევა, რომელიც უჩვეულოა ელემენტარული ალგებრის თვალსაზრისით, მაგრამ ძალიან მნიშვნელოვანია გამოყენებისათვის. კერძოდ, აუცილებელი აღმოჩნდა მატრიცების, ე. ი. რამდენიმე სტრიქონიან და სვეტებიან კვად-

რატულ ან მართკუთხოვან სისტემების თეორიის შემუშავება. ეს თეორია მეტად ღრმა აღმოჩნდა და მან გამოყენება პოვა წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორიის ფარგლებიდან ძალიან შორს. მეორე მხრივ, წრფივ განტოლებათა სისტემების შესწავლამ მოითხოვა მრავალგანზომილებიანი (ეგრეთწოდებული ვექტორული ანუ წრფივი) სივრცეების შემოტანა და შესწავლა. მათემატიკისაგან შორს მდგარი ადამიანები მრავალგანზომილებიან (პირველ რიგში ოთხგანზომილებიან) სივრცეს უკავშირებენ ბუნდოვან და ხშირად მცდარ წარმოდგენებს; სინამდვილეში კი ეს ცნება წმინდა მათემატიკურია, ძირითადად ალგებრულიც კი, და წარმოადგენს მნიშვნელოვან იარაღს ბევრ მათემატიკურ გამოკვლევაში და აგრეთვე ფიზიკასა და მექანიკაში.

უმაღლესი ალგებრის კურსის მეორე ნახევარი, რომელსაც ეწოდება მრავალწევრთა ალგებრა, მიძღვნილია ერთუცნობიანი, მაგრამ უკვე ნებისმიერი ხარისხის, ერთი განტოლების შესწავლისადმი. თუ მივიღებთ მხედველობაში კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნისათვის ფორმულის არსებობას, ბუნებრივი იქნებოდა გვეძებნა ანალოგიური ფორმულები უფრო მაღალი ხარისხის განტოლებებისათვის. ისტორიულად ალგებრის ეს დარგი ასედაც ვითარდებოდა, ამასთან ფორმულები მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებების ამოხსნისათვის მონახული იყო უკვე XVI საუკუნეში. ამის შემდეგ დაიწყო უშედეგო ძებნა ფორმულებისა, რომლებიც გამოსახავდნენ მეხუთე და უფრო მაღალი ხარისხის განტოლების ფესვებს ამ განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით რადიკალების დახმარებით და რომლებიც, შესაძლოა, ძალიან მრავალსართულიანიც ყოფილიყვნენ. ეს ძებნა გრძელდებოდა XIX საუკუნის დასაწყისამდე, როდესაც, ბოლოს, დამტკიცდა, რომ ასეთი ფორმულები ვერ მოინახება და რომ ყველა ხარისხისათვის, დაწყებული მეხუთედან, არსებობენ კონკრეტული მაგალითებიც კი მთელკოეფიციენტებიანი განტოლებებისა, რომელთა ფესვები ვერ ჩაიწერება რადიკალების დახმარებით.

მაღალი ხარისხის განტოლებათა ამოხსნისათვის ფორმულების უქონლობა არ უნდა ჩავთვალოთ ძალიან სავალალო მდგომარეობად—მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებების შემთხვევაშიც კი, სადაც ასეთი ფორმულები არსებობენ, ისინი ძალიან რთული და პრაქტიკულად თითქმის გამოუსადეგარი არიან. მეორე მხრივ, კოეფიციენტები იმ განტოლებებისა, რომელთა ამოხსნა უხდებათ ფიზიკოსებს და ინჟინრებს, ჩვეულებრივ წარმოადგენენ გაზომვების შედეგად მიღებულ სიდიდეებს, ე. ი. ცნობილი არიან მხოლოდ მიახლოებით და ამიტომ ფესვებიც უნდა ვიცოდეთ მხოლოდ მიახლოებით, მოცემული სიზუსტით. ამან გამოიწვია დამუშავება განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდებისა, რომელთაგან მხოლოდ უმარტივესნია გადმოცემული უმაღლესი ალგებრის კურსში.

მაგრამ მრავალწევრთა ალგებრაში ცენტრალურია თურმე არა საკითხი განტოლებათა ფესვების პრაქტიკული მონახვის შესახებ, არამედ საკითხი მათი არსებობის შესახებ. ცნობილია, რომ არსებობენ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლებებიც კი, რომლებსაც არ აქვთ ნამდვილი ფესვები. თუ რიცხვების მარაგს შევავსებთ ყველა კომპლექსური რიცხვების სიმრავლემდე, აღმოჩნდება, რომ კვადრატულ განტოლებებს უკვე გააჩნიათ

ფესვები და რომ ეს სამართლიანია მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებებისათვისაც, როგორც ეს გამომდინარეობს მათი ამოხსნისათვის ფორმულების არსებობიდან. მაგრამ ხომ არ მოინახება მეხუთე ან უფრო მაღალი ხარისხის ისეთი განტოლება, რომელსაც არ აქვს არც ერთი ფესვი კომპლექსური რიცხვთა შორისაც კი, და ხომ არ მოგვიხდება ასეთი განტოლებების ფესვების მოძებნისათვის გადასვლა კომპლექსური რიცხვებიდან რიცხვთა უფრო ფართო მარაგზე? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც ამბობს, რომ ყოველ განტოლებას ნებისმიერი რიცხვითი, არა მარტო ნამდვილი, არამედ კომპლექსური, კოეფიციენტებით აქვს კომპლექსური (კერძოდ, შესაძლოა, ნამდვილი) ფესვები, ამასთან ეს ფესვები, საერთოდ რომ ვთქვათ, იმდენიც კია, რამდენიც განტოლების ხარისხია.

ასეთია უმაღლესი ალგებრის კურსის ძირითადი შინაარსის მოკლე მიმოხილვა, ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ უმაღლესი ალგებრა არის მხოლოდ დასაწყისი დიდი ალგებრული მეცნიერებისა, რომელიც ძალიან განშტოებულია, მდიდარია შინაარსით და მუდამ ვითარდება. შევეცადოთ კიდევ უფრო მოკლედ მიმოვიხილოთ ალგებრის ის განშტოებები, რომლებიც ძირითადად მდებარეობენ უმაღლესი ალგებრის კურსის ფარგლებს გარეთ.

წრფივი ალგებრა, რომელიც წარმოადგენს დიდ მეცნიერებას, მიძღვნილს, ძირითადად, მატრიცათა თეორიისადმი და მასთან დაკავშირებული ვექტორული სივრცეების წრფივი გარდაქმნების თეორიისადმი, მოიცავს აგრეთვე ფორმათა თეორიას, ინვარიანტთა თეორიას და ტენზორულ ალგებრას, რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს დიფერენციალურ გეომეტრიაში. ვექტორულ სივრცეთა თეორია ღებულობს შემდგომ განვითარებას ალგებრის გარეთ, ფუნქციონალურ ანალიზში (უსასრულოგანზომილებიანი სივრცეები). თავისი მრავალფეროვნებით და გამოყენებათა მნიშვნელობით როგორც მათემატიკაში, ასევე მექანიკასა, ფიზიკასა და ტექნიკურ მეცნიერებებშიც წრფივი ალგებრა ჯერჯერობით პირველ ადგილზე რჩება ალგებრის მრავალრიცხოვან განშტოებათა შორის.

მრავალწევრთა ალგებრა, რომელიც მრავალი ათწლეულების მანძილზე ვითარდებოდა როგორც მეცნიერება ერთუცნობიანი ნებისმიერი ხარისხის ერთი განტოლების შესახებ, ახლა უკვე ძირითადად დამთავრებულია. შემდგომი განვითარება მან ნაწილობრივ მიიღო კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთ დარგში, ძირითადად კი იგი გადაიზარდა ველთა თეორიაში, რომელსაც ქვემოთ შევეხებით. რაც შეეხება ძალიან ძნელ საკითხს რამდენიმე ცვლადის, მაგრამ არა წრფივი, არამედ ნებისმიერი ხარისხის განტოლებათა სისტემების შესახებ,—ამ საკითხს, რომელიც ორივე იმ მიმართულებას აერთიანებს, უმაღლესი ალგებრის კურსში რომ მუშავდება, თვით ამ კურსში თითქმის არ შევეხებით,—ის სინამდვილეში ეკუთვნის მათემატიკის განსაკუთრებულ განშტოებას, რომელსაც ალგებრული გეომეტრია ეწოდება.

ამომწურავი ამოხსნა საკითხისა იმ პირობების შესახებ, რომლის დროს განტოლება რადიკალებში შეიძლება ამოიხსნას, მოგვცა ფრანგმა მათემატიკოსმა გალუამ (1811—1832). მისმა გამოკვლევებმა მიუთითეს ახალ მიმართულებებზე ალგებრის განვითარებაში, რამაც უკვე XX საუკუნეში, გერმანელი

ალგებრაისტი ქალის ე. ნოეთერის (1882—1935) შრომების შემდეგ, გამოიწვია ახალი თვალსაზრისის ჩამოყალიბება ალგებრული მეცნიერების ამოცანებზე. ახლა უდავოა, რომ ალგებრის ცენტრალური ამოცანა სრულებით არ არის განტოლებების შესწავლა. ალგებრული კვლევის ჭეშმარიტ ობიექტად უნდა ჩაითვალოს ალგებრული ოპერაციები, რიცხვების შეკრების ან გამრავლების მსგავსი, მაგრამ, შესაძლოა, არა რიცხვებზე ნაწარმოები.

ფიზიკის კურსში მოსწავლეს უკვე ხვდება ძალთა შეკრების ოპერაცია. მათემატიკური დისციპლინები, რომლებიც შეისწავლებიან უნივერსიტეტებისა და პედაგოგიური ინსტიტუტების პირველ კურსებზე, იძლევიან ალგებრული ოპერაციების მრავალრიცხოვან მაგალითებს—მატრიცების, ფუნქციების შეკრება და გამრავლება, ოპერაციები სივრცის გარდაქმნებზე; ვექტორებზე და ა. შ. ეს ოპერაციები, ჩვეულებრივ, რიცხვებზე ოპერაციებს გავს და ატარებს იმავე სახელწოდებებს, მაგრამ ხანდახან ზოგი თვისება, რომელთაც რიცხვების შემთხვევაში შევეჩვიეთ, ახლა დაკარგული აღმოჩნდება. ასე მაგალითად, ძალიან ხშირად და ძალიან მნიშვნელოვან შემთხვევებში ოპერაციები აღმოჩნდებიან არაკომუტატური (ნამრავლი დამოკიდებულია თანამამრავლთა რიგზე), და ზოგჯერ არაასოციაციურიც კი (სამ მამრავლთა ნამრავლი დამოკიდებულია ფრჩხილების განლაგებაზე).

ყველაზე უფრო სისტემატურად შეისწავლება მცირერიცხოვანი, ყველაზე მეტად მნიშვნელოვანი ტიპები ალგებრული სისტემებისა, ე. ი. სიმრავლეებისა, რომლებიც შედგებიან რაიმე ბუნების ელემენტებისაგან, რომელთათვისაც განმარტებულია რაღაც ალგებრული ოპერაციები. ასეთებია, კერძოდ, ველები. ეს იქნება ალგებრული სისტემები, რომლებშიც, ნამდვილ რიცხვთა სისტემისა და კომპლექსურ რიცხვთა სისტემის მსგავსად, განმარტებულია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები, ორივე კომუტატური და ასოციაციური, დაკავშირებულნი დისტრიბუციის კანონით (ე. ი. სამართლიანია ფრჩხილების გახსნის ჩვეულებრივი წესი), რომლებსაც გააჩნიათ შებრუნებული ოპერაციები—გამოკლება და გაყოფა. ველთა თეორია აღმოჩნდა ბუნებრივი არე განტოლებათა თეორიის შემდგომი განვითარებისათვის, ხოლო მისმა ძირითადმა განშტოებებმა—ალგებრულ რიცხვთა ველებისა და ალგებრულ ფუნქციათა ველების თეორიებმა—დააკავშირეს ის შესაბამისად რიცხვთა თეორიასთან და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიასთან. უმაღლესი ალგებრის კურსი მოიცავს ველთა თეორიის ელემენტარულ შესავალს, ხოლო კურსის ზოგიერთი ნაწილი—რამდენიმე ცვლადის მრავალწევრები, მატრიცის ნორმალური ფორმა—გადმოცემულია ერთბაშად ნებისმიერი ძირითადი ველის შემთხვევისათვის.

ველის ცნებაზე უფრო ფართოა რგოლის ცნება. ველის შემთხვევისაგან განსხვავებით აქ უკვე არ მოითხოვება გაყოფის შესრულების შესაძლებლობა და, გარდა ამისა, გამრავლება შეიძლება იყოს არაკომუტატური და არაასოციაციურიც კი. რგოლების უმარტივესი მაგალითებია ყველა მთელი რიცხვის (უარყოფითების ჩათვლით) ერთობლიობა, ერთუცნობიანი მრავალწევრების სისტემა და ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციათა სისტემა. რგოლთა თეორია მოიცავს ალგებრის ისეთ ძველ განშტოებებს, როგორიცაა ჰიპერკომპლექსურ სისტემათა თეორია და იდეალთა თეორია, ის დაკავშირებულია

რიგ მათემატიკურ მეცნიერებებთან, კერძოდ ფუნქციონალურ ანალიზთან, და მან უკვე ნახა ზოგი გასავალი ფიზიკაში. სინამდვილეში, უმაღლესი ალგებრის კურსი შეიცავს მხოლოდ რგოლის ცნების განმარტებას.

გამოყენების კიდევ უფრო დიდი არე აქვს ჯგუფთა თეორიას. ჯგუფი ეწოდება ალგებრულ სისტემას ერთი ძირითადი ოპერაციით, ამასთან ეს ოპერაცია უნდა იყოს ასოციაციური, თუმცა არა აუცილებლად კომუტატიური, და უნდა გააჩნდეს შებრუნებული ოპერაცია — გაყოფა, თუ ძირითად ოპერაციას გამრავლება ეწოდება. ასეთია, მაგალითად, მთელ რიცხვთა ერთობლიობა, განხილული შეკრების ოპერაციის მიმართ, და, აგრეთვე, დადებით ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა, განხილული გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ჯგუფები დიდ როლს თამაშობდნენ უკვე გალუას თეორიაში, საკითხში განტოლებების რადიკალებში ამოხსნადობის შესახებ, ახლა კი ისინი წარმოადგენენ მნიშვნელოვან იარაღს ველთა თეორიაში, გეომეტრიის მრავალ დარგში, ტოპოლოგიაში და, აგრეთვე, მათემატიკის გარეთაც — კრისტალოგრაფიაში, თეორიულ ფიზიკაში. საერთოდ, გამოყენებათა არის სიფართოვის მიხედვით ჯგუფთა თეორიას წრფივი ალგებრის შემდეგ მომდევნო ადგილი უკავია ალგებრის ყველა განშტოებას შორის. ჩვენს კურსში შედის ჯგუფთა თეორიის საფუძვლებისადმი მიძღვნილი თავი.

სულ უკანასკნელ ათწლეულებში წარმოიშვა და მეტად განვითარდა ახალი დარგი: მესერთა თეორია. მესერი ეწოდება ალგებრულ სისტემას ორი ოპერაციით — შეკრება და გამრავლება. ეს ოპერაციები უნდა იყვნენ კომუტატური და ასოციაციური, აგრეთვე უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ მოთხოვნილებებს: ელემენტის თავის თავზე შეკრებაცა და გამრავლებაც უნდა უდრიდეს თვით ამ ელემენტს; თუ ორი ელემენტის ჯამი უდრის ერთ-ერთ მათგანს, მაშინ ნამრავლი უდრის მეორეს, და პირიქით. მესერის მაგალითია ნატურალური რიცხვების სისტემა, რომელიც განხილულია საერთო უმცირესი ჯერადისა და საერთო უდიდესი გამყოფის აღების ოპერაციების მიმართ. მესერთა თეორიას აქვს საინტერესო კავშირები ჯგუფთა თეორიასთან, რგოლთა თეორიასთან და აგრეთვე სიმრავლეთა თეორიასთან; გეომეტრიის ერთი ძველი განშტოება, სახელდობრ პროექციული გეომეტრია, სინამდვილეში აღმოჩნდა მესერთა თეორიის ნაწილი; შეიძლება აღინიშნოს აგრეთვე მესერთა თეორიის ერთი გამოყენება ელექტრულ ქსელთა თეორიაში.

ცნობილმა პარალელიზმმა, რომელიც არსებობს ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთ ნაწილსა, რგოლთა თეორიასა და მესერთა თეორიას შორის, მიგვიყვანა ალგებრული სისტემების (ანუ უნივერსალური ალგებრების) ზოგადი თეორიის წარმოშობამდე. ამ თეორიამ ჯერ მხოლოდ სულ პირველი ნაბიჯები გადადგა, მაგრამ მისი კონტურები უკვე მკაფიოდ მოჩანს, ხოლო აქ აღმოჩენილი კავშირები მათემატიკურ ლოგიკასთან საშუალებას იძლევა ვივარაუდოთ შემდგომი სერიოზული განვითარება.

რა თქმა უნდა, ზემოთ გადმოცემულ სქემაში მთლიანად არ თავსდება ალგებრული მეცნიერების მთელი მრავალფეროვანი შინაარსი. კერძოდ, არსებობს ალგებრის რიგი დარგებისა, რომლებიც ესაზღვრებიან მათემატიკის სხვა ნაწილებს. ასეთია ტოპოლოგიური ალგებრა, რომელიც შეისწავლის

ალგებრულ სისტემებს, რომლებშიც ოპერაციები უწყვეტია გარკვეული, ამ სისტემების ელემენტებისათვის განმარტებული, კრებადობის მიმართ; ამის მაგალითია ნამდვილ რიცხვთა სისტემა. ტოპოლოგიურ ალგებრასთან ახლოსაა უწყვეტ (ანუ ლის) ჯგუფთა თეორია, რომელსაც აქვს მრავალრიცხოვანი გამოყენებები გეომეტრიის სხვადასხვა საკითხებში, თეორიულ ფიზიკაში, ჰიდროდინამიკაში. სხვათა შორის, ლის ჯგუფთა თეორია გამოირჩევა ალგებრული, ტოპოლოგიური, გეომეტრიული და ფუნქციონალურ-თეორიული მეთოდების ისეთი გადახლართვით, რომ სწორი იქნებოდა ჩაგვეთვალა ის მათემატიკის განსაკუთრებულ განშტოებად. არსებობს, შემდეგ, დალაგებულ ალგებრულ სისტემათა თეორია, რომელიც წარმოიშვა გეომეტრიის საფუძვლებში გამოკვლევებთან დაკავშირებით და რომელმაც პოვა გამოყენებები ფუნქციონალურ ანალიზში. დაბოლოს, იწყებს განვითარებას დიფერენციალური ალგებრა, რომელიც ამყარებს ახალ კავშირებს ალგებრასა და დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიას შორის.

თავისთავად იგულისხმება, რომ ალგებრული მეცნიერების ის ბრწყინვალე განვითარება, რომელმაც მიგვიყვანა მის დღევანდელ მდგომარეობამდე, არ იყო შემთხვევითი—ის იყო მათემატიკის ზოგადი განვითარების ნაწილი და მნიშვნელოვან წილად გამოწვეული იყო იმის აუცილებლობით, რომ პასუხი გაცემულიყო სხვა მათემატიკურ მეცნიერებათა მიერ ალგებრისადმი წარდგენილ კითხვებზე. მეორე მხრივ, ალგებრის განვითარება თვითონ ახდენდა და ახდენს მეცნიერების მოსაზღვრე შტოების განვითარებაზე ძალიან დიდ გავლენას, რომელიც განსაკუთრებით გაძლიერდა გამოყენებათა არის იმ გაფართოების წყალობით, რომელიც დამახასიათებელია თანამედროვე ალგებრისათვის და ამიტომ ზოგჯერ ლაპარაკობენ კიდეც მათემატიკის ამჟამად მიმდინარე „ალგებრაიზაციაზე".

ალგებრის ჩვენს მიერ ზემოთ მოცემული მიმოხილვა არის არა მარტო ძალიან მოკლე, არამედ იგი არ იძლევა წარმოდგენას ამ მეცნიერების განვითარების ისტორიაზე. ამიტომ ჩვენ დავამთავრებთ ჩვენ შესავალს ალგებრის ისტორიის ძალიან მოკლე მიმოხილვით.

ალგებრის ზოგიერთ საკითხს, კერძოდ უმარტივესი განტოლებების ამოხსნას, სწავლობდნენ ჯერ კიდევ ბაბილონელი, ხოლო შემდეგ ძველი ბერძენი მათემატიკოსები. ამ პერიოდის ალგებრული გამოკვლევების მწვერვალია ბერძენი (ალექსანდრიელი) მათემატიკოსის დიოფანტეს (III საუკ. ჩ. წ.) თხზულებები. შემდგომში ეს გამოკვლევები განავითარეს ინდოელმა მათემატიკოსებმა—არიაბჰატამ (VI საუკ.), ბრამაჰუპტამ (VII საუკ.), ბჰასკარამ (XII საუკ.). ძალიან ადრე დაიწყო ალგებრის საკითხების დამუშავება ჩინეთში—ჩჟან ცანი (II საუკ. ჩ. წ.-მდე), ცინ ჩოუ-ჩანი (I საუკ. ჩ. წ.). ფრიად დიდი ჩინელი ალგებრაისტი იყო ცინ ძიუ-შაო (XIII საუკ.).

ალგებრის განვითარებაში დიდი წვლილი შეიტანეს შუა საუკუნეების აღმოსავლეთის მათემატიკოსებმა, რომლებიც წერდნენ არაბულ ენაზე, განსაკუთრებით შუა აზიაში დაბადებულმა უზბეკმა მეცნიერმა მუჰამედ ალ-ხორეზმიმ (IX საუკ.) და ტაჯიკმა მათემატიკოსმა და პოეტმა ომარ ხაიამმა

(1040—1123). კერძოდ, თვით სიტყვა „ალგებრა“ წარმოიშვა ალ-ხორეზმის წიგნის „ალ-ჯებრ ალ-მუკაბალა“-ს სათაურთან დაკავშირებით.

ბაბილონელი, ბერძენი, ინდოელი, ჩინელი და შუააზიელი ალგებრაისტების ზემოთ ხსენებული გამოკვლევები მიეკუთვნებოდნენ ალგებრის იმ საკითხებს, რომლებიც ამჟამად შედიან ელემენტარული ალგებრის კურსის პროგრამაში, და მხოლოდ ზოგჯერ ეხებოდნენ მესამე ხარისხის განტოლებებს. საკითხთა ამავე წრეში ძირითადად რჩებოდნენ შუა საუკუნეების დასავლეთ ევროპელ ალგებრაისტთა და აღორძინების ეპოქის ალგებრაისტების გამოკვლევებიც; დავასახელოთ იტალიელი მათემატიკოსი ლეონარდო პიზანელი (ფიბონაჩი) (XII საუკ.) და თანამედროვე ალგებრული სიმბოლიკის შემქმნელი ფრანგი ვიეტა (1540—1603). თუმცა, როგორც ზემოთ უკვე აღინიშნა, XVI საუკუნეში მოინახა მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნის მეთოდები; აქ უნდა დავასახელოთ იტალიელები ფერო (1465—1526), ტარტალია (1500—1557), კარდანო (1501—1576) და ფერარი (1522—1565).

XVII და XVIII საუკუნეებში მიმდინარეობდა ინტენსიური დამუშავება განტოლებათა (ე. ი. მრავალწევრთა ალგებრის) ზოგადი თეორიისა, რომელშიც მონაწილეობას ღებულობდნენ იმ დროის უდიდესი მეცნიერები — ფრანგი დეკარტი (1596—1650), ინგლისელი ნიუტონი (1643—1727), ფრანგები დალამბერი (1717—1783) და ლაგრანჟი (1736—1813). XVIII საუკუნეში დაიწყო აგრეთვე დეტერმინანტთა თეორიის აგება — შვეიცარიელი მათემატიკოსი კრამერი (1704—1752), ფრანგი მეცნიერი ლაპლასი (1749—1827). XVIII და XIX საუკუნეების მიჯნაზე გერმანელმა მათემატიკოსმა გაუსმა (1777—1855) დაამტკიცა ზემოთ ხსენებული ძირითადი თეორემა რიცხვით კოეფიციენტებიან განტოლებათა ფესვების არსებობის შესახებ.

XIX საუკუნის პირველი მესამედი აღინიშნა ალგებრის ისტორიაში განტოლებათა რადიკალებში ამოხსნადობის პრობლემის ამოხსნით. მეხუთე ან მეტი ხარისხის განტოლებათა ამოსახსნელი ფორმულების მონახვის შეუძლებლობა დაამტკიცა იტალიელმა მათემატიკოსმა რუფინიმ (1765—1822) და უფრო მკაცრ ფორმაში ნორვეგიელმა მეცნიერმა აბელმა (1802—1829). როგორც უკვე ზემოთ აღინიშნა, ამომწურავი ამოხსნა საკითხისა პირობების შესახებ, რომლის დროსაც განტოლებას აქვს ამონახსენი რადიკალებში, გალუას ეკუთვნის.

გალუას თეორიამ ბიძგი მისცა ალგებრის ფართო განვითარებას XIX საუკუნის შუა წლებში და მეორე ნახევარში, კერძოდ მის ახალ მიმართულებებს. ასე გაჩნდა ალგებრულ რიცხვთა ველების და ალგებრულ ფუნქციათა ველების თეორია და მასთან დაკავშირებული იდეალთა თეორია. აქ უნდა დავასახელოთ გერმანელი მათემატიკოსები კუმერი (1810—1893), კრონეკერი (1823—1891) და დედეკინდი (1831—1916) და რუსი მათემატიკოსები ე. ზოლოტარიოვი (1847—1878) და გ. ვორონოი (1868—1908). დიდი განვითარება მიიღო სასრულ ჯგუფთა თეორიამ, რომელიც მოდის ჯერ კიდევ ლაგრანჟიდან და გალუადან; აქ მუშაობდნენ ფრანგები კოში (1789—1857) და ჟორდანი (1838—1922), ნორვეგიელი მათემატიკოსი სილოვი (1832—1918), გერმანელი ალგებრაისტები ფრობენიუსი (1849—1918) და ჰოელდერი (1859—

1937), ნორვეგიელი მათემატიკოსის ს. ლის (1842—1899) გამოკვლევებმა დასაბამი მისცა უწყვეტ ჯგუფთა თეორიას.

ინგლისელი მეცნიერის ჰამილტონის (1805—1865) და გერმანელი მათემატიკოსის გრასმანის (1809—1877) შრომებით დაიწყო ჰიპერკომპლექსური სისტემების თეორია ანუ, როგორც ახლა ამბობენ, ალგებრათა თეორია. ალგებრის ამ განშტოების შემდგომ განვითარებაში დიდი როლი ითამაშა რუსი მათემატიკოსის ფ. მოლინის (1861—1941) შრომებმა, რომლებიც საუკუნის ბოლოს მიეკუთვნება.

XIX საუკუნეში წრფივმა ალგებრამ მიაღწია დიდ აყვავებას უპირველეს ყოვლისა ინგლისელი მათემატიკოსების სილვესტრისა (1814—1897) და კელის (1821—1895) შრომების წყალობით. გრძელდებოდა მრავალწევრთა ალგებრის დამუშავებაც; ჩვენ აღვნიშნავთ მხოლოდ განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდს, რომელიც პონახა რუსმა გეომეტრმა ნ. ლობაჩევსკიმ (1792—1856), და გერმანელი მათემატიკოსის ჰურვიცის (1859—1919) შრომებს. საუკუნის მეორე ნახევარში დაიწყო ალგებრული გეომეტრიის შექმნა, კერძოდ გერმანელი მათემატიკოსის მ. ნოეთერის (1844—1922) შრომებში.

XX საუკუნეში ალგებრულმა გამოკვლევებმა ძალიან ფართო ხასიათი მიიღო და ალგებრამ, როგორც უკვე ვიცით, დაიკავა მათემატიკაში ფრიად საპატიო ადგილი. ამ პერიოდში ჩნდება ალგებრის მრავალი ახალი დარგი, მათ შორის ველთა ზოგადი თეორია (ათიანი წლები), რგოლთა თეორია და ჯგუფთა ზოგადი თეორია (ოციანი წლები), ტოპოლოგიური ალგებრა და მესერთა თეორია (ოცდაათიანი წლები); ორმოციან და ორმოცდაათიან წლებში გაჩნდნენ ნახევარჯგუფთა თეორია და ქვაზიჯგუფთა თეორია, უნივერსალურ ალგებრათა თეორია, ჰომოლოგიური ალგებრა, კატეგორიათა თეორია. ალგებრის ყველა ნაწილში მუშაობენ დიდი მეცნიერები, რომლებმაც სერიოზული წვლილი შეიტანეს მეცნიერებაში, მთელ რიგ ქვეყნებში იქმნება დიდი ალგებრული სკოლები. ეს ეხება, კერძოდ, საბჭოთა კავშირს.

რუს რევოლუციამდელ ალგებრაისტთა რიცხვიდან, გარდა ზემოთ დასახელებულებისა, უნდა მივუთითოთ ს. შატუნოვსკიზე (1859—1929) და დ. გრავეზე (1863—1939). მაგრამ ჩვენს ქვეყანაში ალგებრულ გამოკვლევათა ნამდვილი აყვავება იწყება მხოლოდ დიდი ოქტომბრის რევოლუციის შემდეგ. ეს გამოკვლევები იპყრობენ თანამედროვე ალგებრული მეცნიერების თითქმის ყველა დარგს, ამასთან ზოგიერთ მათგანში საბჭოთა ალგებრაისტების შრომები ხელმძღვანელ როლს თამაშობენ. ჩვენ დავასახელებთ მხოლოდ ორ სახელს — ნ. ჩებოტარიოვს (1894—1947), რომელიც მუშაობდა ველთა თეორიაში და ლის ჯგუფთა თეორიაში, და ო. შმიდტს (1891—1956), ცნობილ პოლუსელს და ამავე დროს დიდ ალგებრაისტს, რომელმაც შექმნა საბჭოთა ჯგუფურ-თეორიული სკოლა.

ვამთავრებთ რა ალგებრის თანამედროვე მდგომარეობისა და განვითარების გზების ჩვენს მოკლე მიმოხილვას, ერთხელ კიდევ ხაზი უნდა გავუსვათ იმას, რომ აქ განხილული საკითხები ძირითადად მდებარეობენ უმაღლესი ალგებრის კურსის ფარგლებს გარეთ. მიმოხილვის ამოცანა მხოლოდ ის იყო, რომ დახმარებოდა მკითხველს მიეღო სწორი წარმოდგენა იმ ადგილზე, რომელიც უკავია უმაღლესი ალგებრის კურსს ალგებრულ მეცნიერებაში მთლიანად და მათემატიკის მთელ დიდ შენობაში.

თავი პირველი

წრფივ განტოლებათა სისტემები. დეტერმინანტები

§ 1. უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდი

ჩვენ დავიწყებთ უმაღლესი ალგებრის კურსს რამდენიმე უცნობის შემცველ პირველი ხარისხის განტოლებათა სისტემების, ანუ, როგორც ჩვეულებრივ ამბობენ, **წრფივ განტოლებათა სისტემების** შესწავლით[1].

წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორია დასაწყისია ალგებრის დიდი და მნიშვნელოვანი ნაწილისა—წრფივი ალგებრისა,—რომელსაც მიეკუთვნება ჩვენი წიგნის თავების მეტი ნაწილი, კერძოდ, მისი პირველი სამი თავი. ამ სამ თავში განხილულ განტოლებათა კოეფიციენტები, უცნობთა მნიშვნელობები და საზოგადოდ ყველა რიცხვი, რომლებსაც ჩვენ შევხვდებით, ნამდვილი რიცხვებია; თუმცა ამ თავების მთელი შინაარსი სიტყვასიტყვით გადაიტანება ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვების შემთხვევაზედაც, რომელთაც მკითხველი იცნობს საშუალო სკოლის კურსიდან.

ელემენტარული ალგებრისაგან განსხვავებით ჩვენ შევისწავლით სისტემებს განტოლებათა და უცნობთა ნებისმიერი რიცხვით, ამასთან ზოგჯერ არც ვიგულისხმებთ, რომ განტოლებათა რიცხვი ემთხვევა უცნობთა რიცხვს. ვთქვათ მოცემულია n უცნობიანი s წრფივ განტოლებათა სისტემა. შევთანხმდეთ შემდეგი აღნიშვნების გამოყენებაზე: უცნობები აღვნიშნოთ x ასოთი ინდექსებით: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; განტოლებები გადავნომროთ: პირველი, მეორე, ..., მე-s-ე; i-ური განტოლების x_j უცნობის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ a_{ij}-თი[2]; ბოლოს, i-ური განტოლების თავისუფალი წევრი აღვნიშნოთ b_i-თი.

---

[1] ეს სახელწოდება იმასთან არის დაკავშირებული, რომ ორუცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლება ანალიზურ გეომეტრიაში სიბრტყეზე განსაზღვრავს წრფეს.

[2] მაშასადამე, ჩვენ გამოვიყენებთ ორ ინდექსს, რომელთაგან პირველი განტოლების ნომერს უჩვენებს, მეორე—უცნობის ნომერს. წერის შეკვეცის მიზნით ეს ინდექსები მძიმით არ გამოიყოფიან; მაგრამ a_{11}-ის შემთხვევაში არ უნდა დავუშვათ, რომ „a ერთი ერთის" ნაცვლად „a თერთმეტი" წავიკითხოთ, a_{34}-ის შემთხვევაში „a სამი ოთხის" ნაცვლად „a ოცდათოთხმეტი" წავიკითხოთ.

ამგვარად, ჩვენი სისტემა ჩაიწერება შემდეგი ზოგადი სახით:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

უცნობების კოეფიციენტები შეადგენენ სწორკუთხოვან ცხრილს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

რომელსაც ეწოდება s *სტრიქონისაგან* და n *სვეტისაგან* შედგენილი *მატრიცი*; a_{ij} რიცხვებს ეწოდებათ მატრიცის ელემენტები[1]. თუ $s=n$ (ე. ი. სტრიქონთა რიცხვი უდრის სვეტების რიცხვს), მაშინ მატრიცს ეწოდება n-*ური რიგის კვადრატული მატრიცი*. ამ მატრიცის იმ დიაგონალს, რომელიც მარცხენა ზედა კუთხიდან მარჯვენა ქვედა კუთხისაკენ მიდის (ე. ი. რომელიც $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ელემენტებისაგანაა შედგენილი), ეწოდება *მთავარი დიაგონალი*. n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცს ეწოდება n-*ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცი*, თუ მისი მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, ხოლო ამ დიაგონალის გარეთ მდებარე ყველა სხვა ელემენტი ნულის ტოლია.

(1) წრფივ განტოლებათა სისტემის *ამონახსენი* ეწოდება ისეთ n რიცხვთა $k_1, k_2, \ldots, k_n$ სისტემას, რომ თუ (1)-ში x_i უცნობებს შესაბამისი k_i, $i=1, 2, \ldots, n$,[2] რიცხვებით შევცვლით, მაშინ ყოველი განტოლება იგივეობად იქცევა.

წრფივ განტოლებათა სისტემას შესაძლებელია არ ჰქონდეს არც ერთი ამონახსენი; ამ შემთხვევაში მას ეწოდება *არათავსებადი* სისტემა. ასეთია, მაგალითად, სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 1, \\ x_1 + 5x_2 &= 7; \end{aligned}$$

ამ განტოლებათა მარცხენა მხარეები თანხვდებიან, მარჯვენა მხარეები კი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, რის გამოც უცნობთა მნიშვნელობების არც ერთ სისტემას არ შეუძლია დააკმაყოფილოს ორივე განტოლება ერთდროულად.

თუ წრფივ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნები, მაშინ მას *თავსებადი* ეწოდება. თავსებად სისტემას ეწოდება *განსაზღვრული*,

---

[1] ამგვარად, თუ (2) მატრიცს (1) სისტემასთან კავშირის გარეშე განვიხილავთ, მაშინ a_{ij} ელემენტის პირველი ინდექსი უჩვენებს სტრიქონის ნომერს, მეორე— სვეტის ნომერს, რომელთა გადაკვეთაზე ეს ელემენტი დგას.

[2] შევნიშნავთ, რომ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები შეადგენენ სისტემის ერთ ამონახსენს და არა n ამონახსენს.

თუ მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი,—მხოლოდ ასეთი სისტემები განიხილებიან ელემენტარულ ალგებრაში,—და **განუზღვრელი**, თუ ამონახსნი ერთზე მეტია; როგორც ამას შემდგომ გავიგებთ, მათი რიცხვი ამ შემთხვევაში უსასრულოდ დიდიც იქნება.

მაგალითად, სისტემა

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2&=7, \\ x_1+x_2&=4 \end{aligned}\right\}$$

განსაზღვრულია: მას აქვს ამონახსნი $x_1=1$, $x_2=3$ და, როგორც ადვილად შემოწმდება უცნობთა გამორიცხვის მეთოდით, ეს ამონახსნი ერთადერთია. რაც შეეხება

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2&=1, \\ 6x_1-2x_2&=2 \end{aligned}\right\}$$

სისტემას, იგი განუზღვრელია, რადგანაც მას გააჩნია უსასრულოდ მრავალი ამონახსნი

$$x_1=k,\ x_2=3k-1 \tag{3}$$

სახისა, სადაც k რიცხვი ნებისმიერია; ამასთანავე, (3) ფორმულებით მოიცემა ჩვენი სისტემის ყველა ამონახსნი.

წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორიის ამოცანა მდგომარეობს იმ მეთოდების დამუშავებაში, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ გავიგოთ, თავსებადია თუ არა განტოლებათა მოცემული სისტემა, თავსებადობის შემთხვევაში დავადგინოთ ამოხსნათა რიცხვი და, ამასთანავე, მივუთითოთ იმ ხერხზე, რომლითაც მოიძებნება ყველა ეს ამონახსნი.

ჩვენ დავიწყებთ იმ მეთოდის განხილვით, რომელიც უფრო მოხერხებულია რიცხვულ-კოეფიციენტებიანი სისტემების ამოხსნათა პრაქტიკული მოძებნისათვის, სახელდობრ, **უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდით**, ანუ **გაუსის მეთოდით**.

დავიწყოთ ერთი წინასწარი შენიშვნით. ჩვენ მოგვიხდება შემდეგში წრფივ განტოლებათა სისტემების შემდეგი გარდაქმნების ჩატარება. სისტემის ერთ-ერთი განტოლების ორივე მხარის გამრავლება ერთსადაიმავე რიცხვზე და სისტემის რომელიმე მეორე განტოლების შესაბამისი მხარეებისაგან მისი გამოკლება. ვთქვათ, სიცხადისათვის, (1) სისტემის პირველი განტოლების c-ზე გამრავლებულ ორივე მხარეს ვაკლებთ მეორე განტოლების შესაბამის მხარეებს. მივიღებთ წრფივ განტოლებათა ახალ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1, \\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\dots+a'_{2n}x_n&=b'_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\dots+a_{3n}x_n&=b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\dots+a_{sn}x_n&=b_s. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

სადაც

$$a'_{2j}=a_{2j}-ca_{1j},\ \text{როცა}\ j=1,2,\dots,n,\ b'_2=b_2-cb_1.$$

განტოლებათა (1) და (4) სისტემები ეკვივალენტური არიან, ე. ი. ისინი ან ორივე არათავსებადია, ან ორივე თავსებადია და ერთიდაიგივე ამონახსნები აქვთ. მართლაც, ვთქვათ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ არის (1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი. ეს რიცხვები, ცხადია, აკმაყოფილებენ (4) სისტემის ყველა განტოლებას, გარდა მეორისა. მაგრამ ისინი აკმაყოფილებენ (4) სისტემის მეორე განტოლებასაც; ამისათვის საკმარისია მოვიგონოთ, როგორ გამოისახება ეს განტოლება (1) სისტემის მეორე და პირველი განტოლებებით. პირიქით, (4) სისტემის ყოველი ამონახსენი დააკმაყოფილებს (1) სისტემასაც. მართლაც, (1) სისტემის მეორე განტოლება მიიღება (4) სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარის c რიცხვზე გამრავლებით და ამავე სისტემის მეორე განტოლების შესაბამის მხარეებისაგან მათი გამოკლებით.

გასაგებია, რომ თუ (1) სისტემის მიმართ რამოდენიმეჯერ იქნება გამოყენებული განხილული სახის გარდაქმნები, მაშინ განტოლებათა ახლად მიღებული სისტემა გამოსავალი (1) სისტემის ექვივალენტური დარჩება.

შეიძლება, რომ ასეთი გარდაქმნების ჩატარების შემდეგ ჩვენს სისტემაში აღმოჩნდეს განტოლება, რომლის მარცხენა მხარის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია. თუ ამ განტოლების თავისუფალი წევრიც ტოლი იქნება ნულისა, მაშინ ის დაკმაყოფილდება უცნობთა ყოველგვარი მნიშვნელობებით და, ამიტომ, თუ უკუვაგდებთ ამ განტოლებას, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომელიც გამოსავალი სისტემის ექვივალენტური იქნება. თუკი აღნიშნული განტოლების თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ეს განტოლება არ დაკმაყოფილდება უცნობთა არც ერთი მნიშვნელობით და ამიტომ არათავსებადი იქნება განტოლებათა როგორც ჩვენს მიერ მიღებული სისტემა, ასევე მისი ექვივალენტური გამოსავალი სისტემაც.

ახლა შევუდგეთ გაუსის მეთოდის გადმოცემას.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემა (1). დავუშვათ, სიცხადისათვის, რომ კოეფიციენტი $a_{11} \neq 0$; სინამდვილეში a_{11} შესაძლებელია აღმოჩნდეს ნულის ტოლი, მაგრამ მაშინ დავიწყებდით სისტემის პირველი განტოლების რომელიმე სხვა, ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტის განხილვით.

გარდავქმნათ ახლა (1) სისტემა x_1 უცნობის გამორიცხვით ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა. ამისათვის პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ რიცხვზე და გამოვაკლოთ იგი მეორე განტოლების შესაბამის მხარეებს, შემდეგ პირველი განტოლების ორივე მხარეს, გამრავლებულს $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ რიცხვზე, ვაკლებთ მესამე განტოლების შესაბამის მხარეებს და ა. შ.

ამ გზით ჩვენ მივალთ n უცნობიანი s წრფივ განტოლებათა ახალ სისტემამდე:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{s2}x_2 + a'_{s3}x_3 + \dots + a'_{sn}x_n &= b'_s. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

უცილებელი არ არის გამოსავალი (1) სისტემის კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების საშუალებით ცხადი სახით ჩავწეროთ ახალი a'_{ij} კოეფიციენტებისა და ახალი b'_i თავისუფალი წევრების გამოსახულებანი.

როგორც ვიცით, განტოლებათა (5) სისტემა ექვივალენტურია (1) სისტემისა. ახლა გარდავქმნათ (5) სისტემა. ამასთანავე პირველ განტოლებას სრულებით აღარ შევეხებით და გ ა რ დ ა ს ა ქ მ ნ ე ლ ა დ ჩავთვლით (5) სისტემის იმ ნაწილს, რომელიც შედგება ყველა განტოლებისაგან, გარდა პირველისა. ამასთან ჩვენ ვთვლით, რა თქმა უნდა, რომ ამ განტოლებათა შორის არ არის ისეთი განტოლებები, რომელთა მარცხენა მხარეების ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლი იყოს,—ასეთ განტოლებებს ჩვენ უკუვაგდებთ, თუკი მათი თავისუფალი წევრებიც ტოლი იქნებოდა ნულის, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში დამტკიცდებოდა აღებული სისტემის არათავსებადობა. ამგვარად, a'_{ij} კოეფიციენტთა შორის არის ნულისაგან განსხვავებულები. გარკვეულობისათვის მივიღოთ, რომ $a'_{22} \neq 0$. ახლა გარდავქმნათ (5) სისტემა შემდეგნაირად: მისი მესამე და ყოველი შემდეგი განტოლების ორივე მხარეს გამოვაკლოთ შესაბამისად

$$\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \ \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \dots, \frac{a'_{s2}}{a'_{22}}$$

რიცხვებზე გამრავლებული მეორე განტოლების ორივე მხარე. ამ გზით გამორიცხება x_2 უცნობი ყველა განტოლებიდან, გარდა პირველისა და მეორისა, და მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას, რომელიც ექვივალენტურია (5) სისტემისა და, მაშასადამე, (1) სისტემისაც:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a''_{t3}x_3 + \dots + a''_{tn}x_n &= b''_t. \end{aligned}\right\}$$

ახლა ჩვენი სისტემა შეიცავს t, $t \leqslant s$, განტოლებას, რადგანაც ზოგიერთი განტოლება, შესაძლებელია, უკუგდებულია. ცხადია, რომ სისტემის განტოლებათა რიცხვი შესაძლებელია შემცირდა x_1 უცნობის გამორიცხვისთანავე. ამის შემდეგ უნდა გარდაიქმნას მხოლოდ მიღებული სისტემის ის ნაწილი, რომელიც შეიცავს ყველა განტოლებას, გარდა პირველი ორისა.

როდის შეწყდება უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის ეს პროცესი?

თუ ჩვენ მივალთ ისეთ სისტემამდე, რომლის ერთ-ერთ განტოლებას აქვს ნულისაგან განსხვავებული თავისუფალი წევრი, ხოლო მარცხენა მხარის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ, როგორც ვიცით, გამოსავალი სისტემა არათავსებადია.

წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას, რომელიც ექვივალენტურია (1) სისტემისა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a^{(k-2)}_{k-1,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1,k}x_k + \dots + a^{(k-2)}_{k-1,n}x_n &= b^{(k-2)}_{k-1}, \\ a^{(k-1)}_{kk}x_k + \dots + a^{(k-1)}_{kn}x_n &= b^{(k-1)}_{k}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

აქ $a_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0, \dots, a^{(k-2)}_{k-1,k-1} \neq 0,\ a^{(k-1)}_{kk} \neq 0$; შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ $k \leqslant s$ და, ცხადია, $k \leqslant n$.

ამ შემთხვევაში (1) სისტემა თავსებადია. ის იქნება განსაზღვრული, როცა $k=n$ და განუზღვრელი, როცა $k<n$.

მართლაც, თუ $k=n$, მაშინ (6) სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_{n}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ x_n უცნობის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ უკანასკნელის წინა განტოლებაში, მივიღებთ x_{n-1} უცნობის ცალსახად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, ვნახავთ, რომ (7) სისტემას და, ამიტომ (1) სისტემასაც, გააჩნიათ ერთადერთი ამონახსენი, ე. ი. ისინი თავსებადი და განსაზღვრული სისტემები არიან.

თუ $k<n$, მაშინ „თავისუფალი“ $x_{k+1}, \dots, x_n$ უცნობებისათვის ავიღებთ ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობებს და შემდეგ (6) სისტემაში ქვევიდან ზევით სვლით, ისე, როგორც ზემოთ, მივიღებთ $x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1$ უცნობებისათვის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობებს. რადგანაც თავისუფალი უცნობებისათვის მნიშვნელობები შესაძლებელია ავირჩიოთ სხვადასხვაგვარად უსასრულო რაოდენობით, ამიტომ (6) სისტემა და, მაშასადამე, (1) სისტემაც იქნებიან თავსებადნი, მაგრამ განუზღვრელები. ადვილი შესამოწმებელია, რომ აქ მოყვანილი მეთოდით (როცა თავისუფალ უცნობებს ვაძლევთ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას) შესაძლებელია ვიპოვოთ (1) სისტემის ყველა ამონახსენი.

პირველად შესაძლებლად გვეჩვენება კიდევ ერთი სახე სისტემისა, რომელზედაც შესაძლებელია გაუსის მეთოდით მიყვანილ იქნას წრფივ განტოლებათა სისტემა, სახელდობრ ის სახე, რომელიც მიიღება (7) სისტემასთან კიდევ რამდენიმე ისეთი განტოლების მიწერით, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ x_n უცნობს, მაგრამ, სინამდვილეში, ამ შემთხვევაში გარდაქმნები არ არის ბოლომდის მიყვანილი: რადგანაც $a^{(n-1)}_{nn} \neq 0$, ამიტომ $(n+1)$-დან დაწყებული ყველა განტოლებებიდან x_n უცნობი შესაძლებელია გამოირიცხოს.

უნდა აღინიშნოს, რომ განტოლებათა (7) სისტემის „სამკუთხოვანი“ ფორმა ან განტოლებათა (6) სისტემის „ტრაპეციული“ ფორმა (როცა $k<n$) მიღებულ იქნა იმის დაშვებით, რომ კოეფიციენტები a_{11}, a'_{22} და ა. შ. განსხვავებულია ნულისაგან. ზოგად შემთხვევაში კი განტოლებათა ის სისტემა, რომელთანაც მივალთ უცნობთა გამორიცხვის პროცესის ბოლომდე მიყვანით, ღებულობს სამკუთხოვან ან ტრაპეციულ ფორმას მხოლოდ უცნობთა სათანადო გადანომვრით.

თუ შევაჯამებთ ყოველივე ზემოთ ნათქვამს, მივიღებთ, რომ *გაუსის მეთოდი გამოსადეგია წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემისათვის. ამასთან, სისტემა არათავსებადია, თუ გარდაქმნათა პროცესში მივიღებთ ისეთ განტოლებას, რომელშიაც ყველა უცნობის კოეფიციენტები ტოლია ნულისა, ხოლო თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან; თუკი ასეთ განტოლებას არ შევხვდებით, მაშინ სისტემა იქნება თავსებადი. განტოლებათა თავსებადი სისტემა განსაზღვრულია, თუ ის მიიყვანება (7) სამკუთხოვან სახემდე, და განუზღვრელია, თუ იგი მიიყვანება (6) ტრაპეციულ სახემდე, როცა* $k<n$.

ზემოთ ნათქვამი გამოვიყენოთ წრფივ *ერთგვაროვან* განტოლებათა სისტემისათვის, ე. ი. სისტემისათვის, რომლის განტოლებების თავისუფალი წევრები ტოლია ნულისა. ასეთი სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგანაც მას გააჩნია *ნულოვანი* ამონახსენი (0, 0, ..., 0). ვთქვათ, განსახილავ სისტემაში განტოლებათა რიცხვი *ნაკლებია* უცნობთა რიცხვზე. მაშინ ეს სისტემა არ მიიყვანება სამკუთხოვან სახემდე, რადგან გაუსის მეთოდით გარდაქმნათა პროცესში სისტემის განტოლებათა რიცხვი შესაძლებელია შემცირდეს, მაგრამ არ შეიძლება გადიდდეს. მაშასადამე, ის მიიყვანება ტრაპეციულ სახემდე, რაც ნიშნავს სისტემის განუზღვრელობას.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, *თუ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემაში განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, მაშინ ამ სისტემას გააჩნია, გარდა ნულოვანი ამონახსნისა, არანულოვანი ამონახსნებიც*, ე. ი. ამონახსნები, რომლებშიაც ზოგიერთი (ან ყველა) უცნობების მნიშვნელობები განსხვავებული არიან ნულისაგან; ასეთი *ამონახსნები უსასრულოდ ბევრი იქნება*.

გაუსის მეთოდით წრფივ განტოლებათა სისტემის პრაქტიკულად ამოხსნისას საჭიროა ამოვწეროთ სისტემის კოეფიციენტების მატრიცი, მივუწეროთ მას თავისუფალი წევრების სვეტი, რომელიც გარკვეულობისათვის გამოყოფილია ვერტიკალური ხაზით, და ყველა გარდაქმნები ჩავატაროთ ამ „გაფართოებული“ მატრიცის სტრიქონებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი 1. ამოხსენით სისტემა

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-9,\\ x_1-x_2+3x_3&=2,\\ 3x_1-6x_2-x_3&=25. \end{aligned}\right\}$$

ამ სისტემის გაფართოებულ მატრიცზე მოვახდინოთ შემდეგი გარდაქმნები:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-9,\\ -3x_2-2x_3&=11,\\ -8x_3&=8, \end{aligned}\right\}$$

რომელსაც აქვს ერთადერთი ამონახსენი

$$x_1=2,\ x_2=-3,\ x_3=-1.$$

გამოსავალი სისტემა განსაზღვრული აღმოჩნდა.

2. ამოხსენით სისტემა

$$\left.\begin{aligned} x_1-5x_2-8x_3+x_4&=3,\\ 3x_1+x_2-3x_3-5x_4&=1,\\ x_1\qquad\ -7x_3+2x_4&=-5,\\ 11x_2+20x_3-9x_4&=2. \end{aligned}\right\}$$

გარდავქმნათ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცი

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1\\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5\\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & -8 & 1 & 3\\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160\\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

მივიღეთ სისტემა, რომელიც შეიცავს განტოლებას $0=2$, რაც გვიჩვენებს გამოსავალი სისტემის არათავსებადობას.

3. ამოხსენით სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}\right|$$

ეს არის ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, რომელშიაც განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე; ამიტომ ის უნდა იყოს განუზღვრელი. რადგანაც ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ამიტომ გარდაქმნებს მოვახდენთ მხოლოდ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შემდგარ მატრიცზე:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 \qquad\quad - 2x_4 &= 0, \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}\right|$$

თავისუფალ უცნობად შეიძლება მივიღოთ x_2 ან x_4. ვთქვათ, $x_4 = \alpha$. მაშინ პირველი განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $x_2 = \alpha$, რის შემდეგ მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ $x_3 = \frac{4}{5}\alpha$, და, ბოლოს, მესამე განტოლებიდან ვღებულობთ: $x_1 = \frac{3}{5}\alpha$. ამგვარად,

$$\frac{3}{5}\alpha,\ \alpha,\ \frac{4}{5}\alpha,\ \alpha$$

იქნება განტოლებათა მოცემული სისტემის ამონახსენის ზოგადი სახე.

§ 2. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები

წინა პარაგრაფში გადმოცემული წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მეთოდი ძალიან მარტივია და მოითხოვს ერთგვაროვანი გამოთვლების შესრულებას, რომლებიც ადვილად შეიძლება ჩატარდეს საანგარიშო მანქანებზე. მაგრამ მის არსებით ნაკლს წარმოადგენს ის, რომ იგი არ იძლევა საშუალებას სისტემის კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების გამოყენებით ჩამოვაყალიბოთ ამ სისტემის თავსებადობის ან განსაზღვრულობის პირობები. მეორე მხრივ, განსაზღვრული სისტემის შემთხვევაშიც კი ეს მეთოდი საშუალებას არ გვაძლევს ვიპოვოთ სისტემის ამოხსნის ფორმულები, რომლებიც მისი კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების საშუალებით გამოსახული იქნებიან. ყოველივე ეს კი აუცილებელი აღმოჩნდა სხვადასხვა თეორიულ საკითხებში, კერძოდ, გეომეტრიულ გამოკვლევებში. ამიტომ საჭიროა წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორია განვავითაროთ სხვა, უფრო ღრმა მეთოდებით. ზოგადი შემთხვევა შემდეგ თავში იქნება განხილული. წინამდებარე თავის დანარჩენი ნაწილი კი ისეთი განსაზღვრული სისტემების განხილვას შეიძლვნება, რომლებსაც აქვთ განტოლებათა და უცნობთა

ტოლი რიცხვი. ამასთან, ჩვენ დავიწყებთ უკვე ელემენტარულ ალგებრაში შესწავლილ ორ და სამუცნობიანი სისტემებით.

ვთქვათ, მოცემულია ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სისტემა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

რომლის კოეფიციენტები ადგენენ მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

თუ (1) სისტემისათვის გამოვიყენებთ კოეფიციენტების გატოლების მეთოდს, მივიღებთ:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

დავუშვათ, რომ $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. მაშინ

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

თუ უცნობების მოცემულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1) განტოლებებში, ადვილად შევამოწმებთ, რომ (3) წარმოადგენს (1)-ის ამონახსენს; ამ ამონახსენის ერთადერთობის საკითხი § 7-ში იქნება განხილული.

უცნობთა (3) მნიშვნელობების საერთო მნიშვნელი ძალიან მარტივად გამოისახება (2) მატრიცის ელემენტების საშუალებით. ის მიიღება, თუ მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს გამოვაკლებთ მეორე დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს. ამ რიცხვს ეწოდება (2) მატრიცის განმსაზღვრელი (ანუ დეტერმინანტი); ამასთან, რადგან (2) მატრიცი მეორე რიგისაა, ამიტომ მის შესაბამის დეტერმინანტსაც უწოდებენ მეორე რიგის დეტერმინანტს. (2) მატრიცის დეტერმინანტის აღსანიშნავად გამოიყენება შემდეგი სიმბოლო: (2) მატრიცი მრგვალი ფრჩხილების ნაცვლად ჩაისმება სწორ ხაზებში; ამგვარად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{4}$$

მაგალითები:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 4-7\cdot 1=5;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5+6=11.$

საჭიროა ერთხელ კიდევ შევნიშნოთ, რომ იმ დროს, როცა მატრიცი რიცხვებისაგან შედგენილი ცხრილია, დეტერმინანტი რიცხვი არის, რომელიც კვადრატულ მატრიცთან სრულიად განსაზღვრული წესითაა დაკავშირებული.

შევნიშნოთ, რომ $a_{11}a_{22}$ და $a_{12}a_{21}$ ნამრავლებს მეორე რიგის დეტერმინანტის წევრები ეწოდება.

(3) გამოსახულებების მრიცხველებს ისეთი სახე აქვთ, როგორიც მათ მნიშვნელს, ე. ი. ისინიც აგრეთვე მეორე რიგის დეტერმინანტები არიან. x_1-ის გამოსახულების მრიცხველი იმ მატრიცის დეტერმინანტს წარმოადგენს, რომელიც მიიღება (2) მატრიცისაგან მისი პირველი სვეტის შეცვლით (1) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტით, x_2-ის გამოსახულების მრიცხველი კი არის დეტერმინანტი იმ მატრიცისა, რომელიც მიიღება (2) მატრიცისაგან მისი მეორე სვეტის ასეთივე შეცვლით. ახლა (3) ფორმულები შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ეს წესი (კრამერის წესად წოდებული) სიტყვიერად შემდეგნაირად გამოითქმება:

თუ (1) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი (4) დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ (1) სისტემის ამონახსნს მივიღებთ, თუ უცნობების მნიშვნელობებად ავიღებთ წილადებს, რომელთა საერთო მნიშვნელს წარმოადგენს (4) დეტერმინანტი, ხოლო მრიცხველი x_i უცნობისათვის ($i=1, 2$) წარმოადგენს დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება (4) დეტერმინანტისაგან მასში i-ური სვეტის (ე. ი. საძებნი უცნობის კოეფიციენტთა სვეტის) შეცვლით (1) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტით[1].

მაგალითი. ამოხსენით სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+\ \ x_2&=7, \\ x_1-3x_2&=-2. \end{aligned}\right\}$$

კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი არის

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7;$$

რაც განსხვავდება ნულისაგან და ამიტომ სისტემისათვის გამოიყენება კრამერის წესი. უცნობების მრიცხველებად იქნება დეტერმინანტები

$$d_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19, \quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11.$$

[1] სიმოკლისათვის ვამბობთ „დეტერმინანტში" სვეტების შეცვლის შესახებ. ანალოგიურად შემდეგშიაც ვილაპარაკებთ, თუ ეს ხელსაყრელი იქნება, დეტერმინანტის სტრიქონებისა და სვეტების შესახებ, მისი ელემენტების შესახებ, დიაგონალების შესახებ და ა. შ.

ამგვარად ჩვენი სისტემის ამონახსენს წარმოადგენს რიცხვთა შემდეგი სისტემა:

$$x_1=\frac{d_1}{d}=\frac{19}{7}, \quad x_2=\frac{d_2}{d}=\frac{11}{7}.$$

მეორე რიგის დეტერმინანტების შემოღება ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნისათვის არსებით გამარტივებას არ იძლევა. აღნიშნული ამონახსენი დეტერმინანტების გამოყენების გარეშეც ადვილად მიიღება, მაგრამ ანალოგიური მეთოდები სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემებისათვის უკვე პრაქტიკულად გამოსადეგი აღმოჩნდება. ვთქვათ, მოცემულია სისტემა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცია

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

თუ გავამრავლებთ (6)-ის პირველი განტოლების ორივე მხარეს $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ რიცხვზე, მეორე განტოლების ორივე მხარეს $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ რიცხვზე, მესამე განტოლების ორივე მხარეს $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ რიცხვზე, და შემდეგ შევკრებთ სამივე განტოლებას, მაშინ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, x_2 და x_3 უცნობების კოეფიციენტები ნულის ტოლი აღმოჩნდებიან, ე. ი. ეს უცნობები ერთდროულად გამოირიცხებიან, და ჩვენ მივიღებთ ტოლობას

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=\\ =b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned} \tag{8}$$

ამ ტოლობაში x_1-ის კოეფიციენტს ეწოდება (7) მატრიცის შესაბამისი მესამე რიგის დეტერმინანტი. მისი ჩაწერისათვის ისეთივე სიმბოლო გამოიყენება, როგორიც მეორე რიგის დეტერმინანტის შემთხვევაში, ამგვარად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\ &-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned} \tag{9}$$

თუმცა, მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოსახულება საკმარისად დიდია, მაგრამ მისი შედგენა (7) მატრიცის ელემენტებისაგან ძალიან მარტივია. მართლაც, დეტერმინანტის პირველი სამი წევრიდან, რომლებიც მის (9) გამოსახულებაში შედიან პლუს ნიშნით, ერთი წარმოადგენს მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს, დანარჩენი ორი—მთავარი დიაგონალის პარა-

ლელურ დიაგონალებზე და მატრიცის მობირდაპირე წვეროებზე მდებარე ელემენტების ნამრავლს, შესაბამისად წევრები, რომლებიც შედიან (9)-ში მინუს ნიშნით აიგებიან იმავე წესით, ოღონდ მეორე დიაგონალის მიმართ. ჩვენ ვღებულობთ მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოთვლის ხერხს, რომელსაც (ცოტა ვარჯიშის შემდეგ) შედეგამდე ძალიან სწრაფად მივყავართ.

ნახ. 1.

1 ნახაზზე მარცხნივ სქემატურად ნაჩვენებია მესამე რიგის დეტერმინანტის დადებითი წევრების გამოთვლის წესი, მარჯვნივ კი — მისი უარყოფითი წევრების გამოთვლის წესი.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5+1\cdot 1\cdot 2+2\cdot(-4)\cdot 3-2\cdot 3\cdot 2-1\cdot(-4)\cdot 5-2\cdot 1\cdot 3=30+2-24-12+20-6=10.$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 0+0\cdot 2\cdot 1+(-2)\cdot(-5)\cdot(-2)-(-5)\cdot 3\cdot 1-0\cdot(-2)\cdot 0-1\cdot 2\cdot(-2)=-20+15+4=-1.$$

(8) ტოლობის მარჯვენა ნაწილიც იქნება მესამე რიგის დეტერმინანტი, სახელდობრ, იმ მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება (7) მატრიცისაგან, მისი პირველი სვეტის შეცვლით (6) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტით. თუ (9) დეტერმინანტს აღვნიშნავთ d ასოთი, ხოლო დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება მისი j-ური ($j=1, 2, 3$) სვეტის შეცვლით (6) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტით, — d_j სიმბოლოთი, მაშინ (8) ტოლობა მიიღებს $dx_1=d_1$ სახეს, საიდანაც, როცა $d \neq 0$, მივიღებთ

$$x_1=\frac{d_1}{d}. \tag{10}$$

იმავე გზით, თუ (6) განტოლებებს გავამრავლებთ, შესაბამისად, რიცხვებზე $a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$, მივიღებთ x_2-ისათვის შემდეგ გამოსახულებას (კვლავ, როცა $d \neq 0$):

$$x_2=\frac{d_2}{d}. \tag{11}$$

ბოლოს, თუ ამ განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ რიცხვებზე, მივიღებთ x_3-ისათვის გამოსახულებას:

$$x_3=\frac{d_3}{d}. \tag{12}$$

თუ (10)—(12) გამოსახულებებს ჩავსვამთ (6) განტოლებებში (ცხადია, იგულისხმება, რომ d და ყველა d_j დეტერმინანტი ჩაწერილია გაშლილი სახით), ვრცელი, მაგრამ მკითხველისათვის სავსებით მისაწვდომი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ, რომ ყველა ეს განტოლება კმაყოფილდება, ე. ი. (10)—(12) რიცხვები წარმოადგენენ (6) სისტემის ამონახსენს. ამგვარად, *თუ სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ამ სისტემის ამოხსნა შეიძლება ვიპოვოთ კრამერის წესით, რომლის ფორმულირება ისევე ხდება, როგორც ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის შემთხვევაში.* ამ დებულების სხვაგვარ დამტკიცებას (რომელიც არ ეყრდნობა ჩვენს მიერ გამოტოვებულ გამოთვლებს) და აგრეთვე (6) სისტემის (10)—(12) ამონახსენის ერთადერთობის დამტკიცებას, თანაც უფრო ზოგადი შემთხვევისათვის, მკითხველი ნახავს § 7-ში.

მაგალითი. ამოვხსნათ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+\ x_3&=0,\\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1,\\ x_1+3x_2-2x_3&=4. \end{aligned}\right|$$

სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28.$$

ამიტომ ამ სისტემისათვის გამოიყენება კრამერის წესი. უცნობების მრიცხველები იქნებიან დეტერმინანტები:

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,\quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

ე. ი. სისტემის ამონახსენს წარმოადგენს რიცხვთა სისტემა

$$x_1=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

§ 3. გადანაცვლებანი და ჩასმები

n-ური რიგის დეტერმინანტის განმარტებისა და შესწავლისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ზოგიერთი ცნება და ფაქტი, რომლებიც შეეხებიან სასრულ სიმრავლეებს. ვთქვათ, მოცემულია რომელიღაც სასრულო M სიმრავლე, რომელიც შედგება n ელემენტისაგან. ეს ელემენტები შესაძლებელია გადანომრილ იქნან პირველი n ნატურალური $1, 2, \ldots, n$ რიცხვის საშუალებით,

და, რადგანაც ჩვენთვის საინტერესო საკითხებში სრულიად არ აქვს მნიშვნელობა იმას, თუ რა ბუნების ელემენტებისაგან შედგება M სიმრავლე, ამიტომ ჩვენ უბრალოდ მივიღებთ, რომ M-ის ელემენტებს წარმოადგენს თვით ეს რიცხვები $1, 2, \ldots, n$.

ჩვენს მიერ გამოყენებული რიცხვების ნორმალური $1, 2, \ldots, n$ დალაგების გარდა ისინი შეგვიძლია დავალაგოთ სხვა მრავალი წესითაც. ასე, მაგალითად, რიცხვები 1, 2, 3, 4 შესაძლებელია დალაგდეს შემდეგნაირად: 3, 1, 2, 4 ან 2, 4, 1, 3 და ა. შ. $1, 2, \ldots, n$ რიცხვთა ყოველგვარ დალაგებას, რომელიმე განსაზღვრული რიგით, n რიცხვთა (ან n სიმბოლოთა) *გადანაცვლება* ეწოდება.

n სიმბოლოთა ყველა სხვადასხვა გადანაცვლებათა რიცხვი ტოლია $1 \cdot 2 \ldots n$ ნამრავლისა, რომელიც ასე აღინიშნება: $n!$ (იკითხება: „ენ-ფაქტორიალი“). მართლაც, n სიმბოლოთა გადანაცვლების ზოგადი სახე არის $i_1, i_2, \ldots, i_n$, სადაც ყოველი i_s არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვებიდან ერთი. ამასთან არც ერთი ამ რიცხვებიდან არ გვხვდება ორჯერ. i_1-დ ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ $1 \cdot 2, \ldots, n$ რიცხვებიდან ნებისმიერი; ეს გვაძლევს n სხვადასხვა შესაძლებლობას. მაგრამ, თუ i_1 უკვე არჩეულია, მაშინ i_2-დ შეგვიძლია ავიღოთ დარჩენილი $n-1$ რიცხვიდან მხოლოდ ერთი; ე. ი. i_1 და i_2 სიმბოლოების სხვადასხვაგვარად არჩევის რიცხვი ტოლია ნამრავლისა $n(n-1)$ და ა. შ.

ამგვარად, n სიმბოლოების გადანაცვლებათა რიცხვი, როცა $n=2$, ტოლია $2!=2$ (გადანაცვლებები 12 და 21; მაგალითებში, რომელშიც $n \leqslant 9$ ჩვენ მძიმეებით არ გამოვყოფთ გადასაადგილებელ სიმბოლოებს), როცა $n=3$ ეს რიცხვი ტოლია $3!=6$, როცა $n=4$, ის ტოლია $4!=24$. n-ის ზრდასთან ერთად გადანაცვლებათა რიცხვი მეტისმეტად სწრაფად იზრდება; ასე, მაგალითად, როცა $n=5$, ის ტოლია $5!=120$, ხოლო როცა $n=10$, უკვე $10!=$ $=3628800$-ისა.

თუ რომელიმე გადანაცვლებაში ადგილებს შევუცვლით რომელიღაც ორ სიმბოლოს (არა აუცილებლად ერთმანეთის გვერდში მდგომს), ყველა დანარჩენ სიმბოლოს კი დავტოვებთ ადგილზე, მაშინ, ცხადია, მივიღებთ ახალ გადანაცვლებას. გადანაცვლების ასეთ გარდაქმნას *ტრანსპოზიცია* ეწოდება.

n სიმბოლოთა ყველა $n!$ გადანაცვლება შეიძლება ისეთი რიგით დავალაგოთ, რომ ყოველი შემდეგი მიიღებოდეს წინასაგან ერთი ტრანსპოზიციით, ამასთან დაწყება შეიძლება ნებისმიერი გადანაცვლებით.

ეს დებულება სამართლიანია, როცა $n=2$. მართლაც, თუ მოითხოვება 12 გადანაცვლებით დაწყება, მაშინ საძებნი დალაგება იქნება 12, 21; თუ კი უნდა დავიწყოთ გადანაცვლებით 21, მაშინ ეს იქნება დალაგება 21, 12. დავუშვათ, რომ დებულება უკვე დამტკიცებულია $n-1$-ისათვის და დავამტკიცოთ ის n-ისათვის. ვთქვათ, უნდა დავიწყოთ გადანაცვლებით

$$i_1, i_2, \ldots, i_n. \tag{1}$$

განვიხილოთ n სიმბოლოთა ყველა ისეთი გადანაცვლება, რომლებშიაც პირველ ადგილზე დგას i_1. ასეთ გადანაცვლებათა რიცხვი არის $(n-1)!$ და

მაშასადამე, მისი დალაგება შეიძლება თეორემის პირობის თანახმად, ამასთან ვიწყებთ (1) გადანაცვლებით, რადგანაც სინამდვილეში, ეს მიიყვანება $n-1$ სიმბოლოთა ყველა გადანაცვლების მოწესრიგებაზე, რომელიც ინდუქციური დაშვების თანახმად, შეიძლება დავიწყოთ ნებისმიერი გადანაცვლებით, კერძოდ, გადანაცვლებით $i_2, \ldots, i_n$. ამ გზით n სიმბოლოსაგან მიღებულ გადანაცვლებათაგან უკანასკნელში მოვახდინოთ i_1 სიმბოლოს ტრანსპოზიცია ნებისმიერ სხვა სიმბოლოსთან, მაგალითად i_2-თან, და ასე მიღებული გადანაცვლებიდან დაწყებული ვალაგებთ საჭირო სახით ყველა იმ გადანაცვლებას, რომელშიც პირველ ადგილზე დგას i_2 და ა. შ. ცხადია, ამ გზით შეიძლება n სიმბოლოთა ყველა გადანაცვლების მიღება.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ *n სიმბოლოთა ნებისმიერი გადანაცვლებიდან შეიძლება გადავიდეთ იმავე სიმბოლოთა ნებისმიერ მეორე გადანაცვლებაზე რამდენიმე ტრანსპოზიციის საშუალებით.*

ვამბობთ, რომ მოცემულ გადანაცვლებაში i და j რიცხვები ქმნიან *ინვერსიას*, თუ $i>j$ და გარდა ამისა, i წინ უსწრებს j-ს. გადანაცვლებას ეწოდება *ლუწი* გადანაცვლება, თუ მისი სიმბოლოები ქმნიან ინვერსიათა ლუწ რიცხვს, *კენტი* გადანაცვლება ეწოდება საწინააღმდეგო შემთხვევაში. ასე, მაგალითად, $1, 2, \ldots, n$ გადანაცვლება იქნება ლუწი ნებისმიერი n-სათვის, რადგანაც ინვერსიათა რიცხვი მასში ნულის ტოლია. 451362 გადანაცვლება ($n=6$) შეიცავს 8 ინვერსიას და ამიტომ ლუწია. 38524671 ($n=8$) გადანაცვლება შეიცავს 15 ინვერსიას და ამიტომ კენტია.

ყოველი ტრანსპოზიცია ცვლის გადანაცვლების ლუწკენტოვნებას. ამ მნიშვნელოვანი თეორემის დამტკიცებისათვის უპირველესად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა სატრანსპოზიციო სიმბოლოები i და j ერთიმეორის გვერდით დგანან, ე. ი. გადანაცვლებას აქვს სახე $\ldots, i, j, \ldots$, სადაც მრავალწერტილი ცვლის იმ სიმბოლოებს, რომლებსაც ტრანსპოზიცია არ ეხება. ტრანსპოზიცია ჩვენს გადანაცვლებას გადაიყვანს გადანაცვლებაში $\ldots, j, i, \ldots$, ამასთან, გასაგებია, რომ ორივე გადანაცვლებაში თვითეული i და j სიმბოლოთაგანი ქმნის ერთსა და იმავე ინვერსიას იმ სიმბოლოებთან, რომლებიც ადგილზე დარჩნენ. თუ i და j სიმბოლოები ტრანსპოზიციამდე არ ქმნიდნენ ინვერსიას, მაშინ ახალ გადანაცვლებაში გაჩნდება ერთი ახალი ინვერსია, ე. ი. ინვერსიათა რიცხვი გაიზრდება ერთით; თუკი ისინი ადრე ქმნიდნენ ინვერსიას, მაშინ ახლა ეს ინვერსია გაქრება; ე. ი. ინვერსიათა რიცხვი ერთით შემცირდება. ორივე შემთხვევაში გადანაცვლების ლუწკენტოვნება იცვლება.

ვთქვათ, ახლა სატრანსპოზიციო i და j სიმბოლოებს შორის მოთავსებულია s სიმბოლო, $s>0$, ე. ი. გადანაცვლებას აქვს სახე:

$$\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots \qquad (2)$$

i და j სიმბოლოთა ტრანსპოზიცია შეიძლება მივიღოთ მეზობელ ელემენტთა თანმიმდევრობით $2s+1$ ტრანსპოზიციის შესრულების შედეგად. სახელდობრ, ესენი იქნებიან ტრანსპოზიციები, რომლებიც ანაცვლებენ სიმბოლოებს i და k_1-ს, შემდეგ i (რომელიც დგას უკვე k_1-ის ადგილზე) და k_2-ს და ა. შ., ვიდრე

i არ დაიჭერს k_s სიმბოლოს ადგილს, ამ s ტრანსპოზიციას მოსდევს ტრანსპოზიცია, რომელიც ანაცვლებს i და j სიმბოლოებს, ხოლო შემდეგ — j სიმბოლოს s ტრანსპოზიცია ყველა k-სთან, რის შემდეგ j იკავებს i-ს ადგილს, k სიმბოლოები კი უბრუნდებიან თავიანთ ძველ ადგილებს. ამგვარად, ჩვენ გადანაცვლების ლუწკენტოვნება შევცვალეთ კენტ რიცხვჯერ, რის გამოც გადანაცვლებებს (2) და

$$\ldots, j, k_1, k_2, \ldots, k_s, i, \ldots \tag{3}$$

აქვთ საწინააღმდეგო ლუწკენტოვნება.

თუ $n \geqslant 2$, *მაშინ n სიმბოლოსაგან შედგენილ ლუწ გადანაცვლებათა რიცხვი ტოლია იმავე სიმბოლოებისაგან შედგენილ კენტ გადანაცვლებათა რიცხვისა, ე. ი. ტოლია* $\frac{1}{2}n!$-*სა*.

მართლაც, ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, მოვაწესრიგოთ n სიმბოლოსაგან შედგენილი ყველა გადანაცვლება ისე, რომ ყოველი მათგანი მიიღებოდეს წინასაგან ერთი ტრანსპოზიციით. მეზობელ გადანაცვლებებს ექნებათ ერთმანეთის საწინააღმდეგო ლუწკენტოვნება, ე. ი. გადანაცვლებები ისეა განლაგებული, რომ ლუწი ცვლის კენტს და პირიქით. ახლა ჩვენი დებულება ადვილად გამომდინარეობს იმ ცხადი ფაქტიდან, რომ, როცა $n \geqslant 2$, მაშინ $n!$ რიცხვი ლუწია.

განვმარტოთ ახლა ერთი ახალი ცნება, სახელდობრ, n-*ური ხარისხის ჩასმის ცნება*. დავწეროთ n სიმბოლოსაგან შედგენილი ორი გადანაცვლება ერთიმეორის ქვემოთ და მოვათავსოთ მიღებული ორი სტრიქონი ფრჩხილებში; მაგალითად, როცა $n=5$:

$$\begin{pmatrix} 3\,5\,1\,4\,2 \\ 5\,2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

ამ მაგალითში[1] რიცხვი 3-ის ქვემოთ დგას რიცხვი 5, რიცხვი 5-ის ქვემოთ — რიცხვი 2 და ა. შ. ჩვენ ვამბობთ, რომ რიცხვი 3 *გადადის* რიცხვ 5-ში, რიცხვი 5 გადადის 2-ში, რიცხვი 1 გადადის 3-ში, რიცხვი 4 გადადის 4-ში (ან ადგილზე რჩება) და, ბოლოს, რიცხვი 2 გადადის 1-ში. ამგვარად, ორი გადანაცვლება, ერთიმეორის ქვემოთ (4) სახით, განსაზღვრავს პირველი ხუთი ნატურალური რიცხვის რომელიღაც *ურთიერთ ცალსახა ასახვას* თავისთავზე, ე. ი. გადასახვას, რომელიც 1, 2, 3, 4, 5 ნატურალური რიცხვებიდან ყოველს უთანადებს ამ ნატურალური რიცხვებიდანვე ერთერთს, ამასთან სხვადასხვა რიცხვს სხვადასხვა რიცხვი ეთანადება. გარდა ამისა, რადგანაც სულ გვაქვს ხუთი რიცხვი, ე. ი. სასრული სიმრავლე, ამიტომ *ყოველ* რიცხვს ამ ხუთი რიცხვიდან შეესაბამება ერთ-ერთი 1, 2, 3, 4, 5 რიცხვებიდან, სახელდობრ, ის რიცხვი, რომელიც მასში „გადადის“.

ცხადია, რომ ის ურთიერთცალსახა ასახვა პირველი ხუთი ნატურალური რიცხვისა, რომელიც მივიღეთ (4)-ის საშუალებით, შეიძლებოდა მიგვეღო ამ

[1] გარეგნულად ეს მოგვაგონებს ორი სტრიქონისა და 5 სვეტისაგან შედგენილ მატრიცს, მაგრამ მას სულ სხვა აზრი აქვს.

ხუთი ნატურალური რიცხვისაგან შედგენილი რომელიმე სხვა გადანაცვლებათა წყვილების ერთიმეორის ქვემოთ (4) სახით ჩაწერის საშუალებით. ეს ჩანაწერები მიიღება (4)-ისაგან სვეტთა რამოდენიმე ტრანსპოზიციის შედეგად; ასეთებია, მაგალითად:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

ყველა ამ ჩანაწერში 3 გადადის 5-ში, 5—2-ში და ა. შ.

ანალოგიური გზით n სიმბოლოსაგან შედგენილი ორი გადანაცვლება, ჩაწერილი ერთიმეორის ქვემოთ, განსაზღვრავს რომელიღაც ურთიერთცალსახა ასახვას პირველი n ნატურალური რიცხვისა თავისთავზე. პირველი n ნატურალური რიცხვის ყოველ ურთიერთცალსახა A ასახვას თავისთავზე ეწოდება n-ური **ხარისხის ჩასმა**, ამასთან, ცხადია, ყოველი A ჩასმა შესაძლებელია ჩაიწეროს ორი გადანაცვლების საშუალებით, რომლებიც ჩაწერილი არიან ერთიმეორის ქვემოთ

$$A=\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_n \\ \alpha_{i_1}, & \alpha_{i_2}, & \dots, & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}; \tag{6}$$

აქ α_i-თი აღნიშნულია ის რიცხვი, რომელშიაც A ჩასმის დროს გადადის i რიცხვი, $i=1, 2, \dots, n$.

A ჩასმას აქვს (6) სახის მრავალი სხვადასხვა ჩანაწერი. ასე, მაგალითად, (4) და (5) წარმოადგენს ერთი და იგივე მე-5 ხარისხის ჩასმის სხვადასხვა ჩანაწერს.

A ჩასმის ერთი ჩანაწერიდან მეორეზე გადასვლა შეიძლება სვეტთა რამოდენიმე ტრანსპოზიციის საშუალებით. ამასთან შესაძლებელია (6) სახის ისეთი ჩანაწერის მიღება, რომლის ზედა (ან ქვედა) სტრიქონში დგას n სიმბოლოთა წინასწარ მოცემული გადანაცვლება. კერძოდ, ყოველი n-ური რიგის ჩასმა A შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

ე. ი. ზედა სტრიქონში რიცხვთა ნატურალური განლაგებით. ასეთნაირი ჩაწერის დროს სხვადასხვა ჩასმები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ქვედა სტრიქონის გადანაცვლებებით, და ამიტომ **n-ური ხარისხის ჩასმების რიცხვი ტოლია n სიმბოლოსაგან შედგენილი გადანაცვლებების რიცხვისა, ე. ი. ტოლია n!-ისა.**

n-ური რიგის ჩასმის მაგალითს წარმოადგენს **იგივური ჩასმა**

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

რომლის დროსაც ადგილზე რჩება ყველა სიმბოლო.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ A ჩასმის (6) სახით ჩანაწერში ზედა და ქვედა სტრიქონები ასრულებენ სხვადასხვა როლს და მათი გადანაცვლებით, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, მივიღებთ სხვა ჩასმას. მაგალითად, მე-4 რიგის ჩასმები

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ და } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

სხვადასხვა ჩასმებია: პირველში რიცხვი 2 გადადის 4-ში, მეორეში კი 3-ში.

ავიღოთ n-ური ხარისხის A ჩასმის ნებისმიერი (6) სახის ჩანაწერი. ამ ჩანაწერის ზედა და ქვედა სტრიქონების გადანაცვლებებს შეიძლება ჰქონდეთ ან ერთნაირი, ან ერთმანეთის საწინააღმდეგო ლუწკენტოვნება. A ჩასმის ნებისმიერ სხვა სახით ჩაწერაზე გადასვლა შეიძლება განვახორციელოთ, როგორც ვიცით, რამდენიმე ტრანსპოზიციის თანმიმდევრობით შესრულებით ზედა სტრიქონში და ამ ტრანსპოზიციების შესაბამისი ტრანსპოზიციებით ქვედა სტრიქონში. მაგრამ, როცა ვახდენთ ერთ ტრანსპოზიციას (6) ჩანაწერის ზედა სტრიქონში და მათი შესაბამისი ელემენტების ერთ ტრანსპოზიციას ქვედა სტრიქონში, ამით ერთდროულად ვცვლით ორივე გადანაცვლების ლუწკენტოვნებას და ამიტომ ვინახავთ ლუწკენტოვნების თანამთხვევას ან განსხვავებას. აქედან გამომდინარეობს, რომ, *A ჩასმის ყველა ჩანაწერში ზედა და ქვედა სტრიქონების ლუწკენტოვნება ერთნაირია, ანდა ყველა ჩანაწერში ისინი ერთმანეთის საწინააღმდეგონი არიან.* პირველ შემთხვევაში A ჩასმას ეწოდება *ლუწი*, მეორე შემთხვევაში — *კენტი*. კერძოდ, იგივური ჩასმა ლუწია.

თუ A ჩასმა ჩაწერილია (7) სახით, ე. ი. ზედა სტრიქონში დგას ლუწი გადანაცვლება $1, 2, \ldots, n$, მაშინ A ჩასმის ლუწკენტოვნება განისაზღვრება ქვედა სტრიქონში მდგომი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ გადანაცვლების ლუწკენტოვნებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ *n-ური ხარისხის ლუწი ჩასმების რიცხვი უდრის კენტი ჩასმების რიცხვს, ე. ი. ტოლია $\frac{1}{2}n!$-ისა.*

ჩასმათა ლუწკენტოვნების განმარტებას შეიძლება მივცეთ რამდენიმედ შეცვლილი ფორმა. თუ (6) ჩანაწერში ორივე სტრიქონის ლუწკენტოვნება ერთნაირია, მაშინ ინვერსიათა რიცხვი ან ორივე სტრიქონში ლუწია, ან ორივეში—კენტი, ე. ი. (6)-ის ორივე სტრიქონში ინვერსიათა საერთო რიცხვი იქნება ლუწი; ხოლო თუ (6)-ის სტრიქონთა ლუწკენტოვნება ერთმანეთის საწინააღმდეგოა, მაშინ ინვერსიათა საერთო რიცხვი ამ ორ სტრიქონში იქნება კენტი. ამგვარად, *A ჩასმა იქნება ლუწი, თუ მისი ნებისმიერი ჩაწერის ორივე სტრიქონში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, და კენტი—საწინააღმდეგო შემთხვევაში.*

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მეხუთე ხარისხის ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

მის ზედა სტრიქონში 4 ინვერსიაა, ქვედა სტრიქონში 7 ინვერსიაა. ორივე სტრიქონში ინვერსიათა საერთო რიცხვი არის 11 და ამიტომ ჩასმა კენტია.

გადავწეროთ ეს ჩასმა შემდეგი სახით:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

ინვერსიათა რიცხვი ზედა სტრიქონში არის 0, ქვედა სტრიქონში—5, ე. ი. მათი საერთო რიცხვი ისევ კენტია. ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩასმათა სხვადასხვა სახით ჩაწერისას ინვერსიათა საერთო რიცხვი იცვლება, მაგრამ ამ რიცხვის ლუწკენტოვნება ინახება.

ახლა ჩვენ გვსურს მივუთითოთ ჩასმათა ლუწკენტოვნების განმარტების სხვა სახეებზე, რომლებიც ზემოთ მოყვანილის ექვივალენტური არიან![1] ამ მიზნისათვის განვმარტოთ **ჩასმათა ნამრავლი**, რომელიც თავისთავადაც ძალიან დიდ ინტერესს იწვევს. n-ური ხარისხის ჩასმა, როგორც ვიცით, არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვთა სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვა თავისთავზე. $1, 2, \ldots, n$ სიმრავლის ორი თანმიმდევრობითი თავისთავზე ურთიერთცალსახა ასახვის შედეგი კვლავ იქნება, ცხადია, რომელიღაც ურთიერთცალსახა ასახვა ამ სიმრავლისა თავისთავზე, ე. ი. n-ური ხარისხის ორი ჩასმის თანმიმდევრობით შესრულებას მივყავართ სავსებით განსაზღვრულ მესამე n-ური ხარისხის ჩასმასთან, რომელსაც ეწოდება მოცემული ჩასმათაგან პირველის **ნამრავლი** მეორეზე. მაგალითად, თუ მოცემულია მეოთხე ხარისხის ჩასმები

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

მართლაც, A ჩასმისას სიმბოლო 1 გადადის 3-ში, მაგრამ B-ში სიმბოლო 3 გადადის 4-ში, ამიტომ AB-ში სიმბოლო 1 გადადის 4-ში, და ა. შ.

შესაძლებელია გადავამრავლოთ მხოლოდ ერთი და იგივე ხარისხის ჩასმები. **n-ური ხარისხის ჩასმათა ნამრავლი**, როცა $n \geqslant 3$, **არაკომუტატურია**. მართლაც, ზემოთ განხილული A და B ჩასმისათვის BA ნამრავლს აქვს შემდეგი სახე:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

ე. ი. BA ჩასმა განსხვავდება AB ჩასმისაგან. ასეთი მაგალითების მოძებნა შეიძლება ყველა n-სათვის, როცა $n \geqslant 3$, თუმცა ჩასმათა ზოგიერთი წყვილისათვის შესაძლებელია შემთხვევით კომუტატურობის კანონი შესრულდეს.

ჩასმათა ნამრავლი ასოციურია, ე. ი. შესაძლებელია ვილაპარაკოთ n-ური ხარისხის ჩასმათა ნებისმიერი სასრული რიცხვის ნამრავლზე, რომლებიც აიღებიან განსაზღვრული რიგით (არაკომუტატურობის გამო). მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ჩასმები A, B, C და ვთქვათ, სიმბოლო i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant n$, A ჩასმისას გადადის i_2 სიმბოლოში, i_2 სიმბოლო B ჩასმით გადადის i_3 სიმბოლოში, ხოლო უკანასკნელი C ჩასმით გადადის i_4 სიმბოლოში. მაშინ AB ჩასმით i_1 სიმბოლო გადადის i_3 სიმბოლოში, BC ჩასმით i_2 სიმბოლო გადადის i_4 სიმბოლოში, და ამიტომ როგორც $(AB)C$, ისე $A(BC)$ ჩასმით სიმბოლო i_1 გადავა i_4 სიმბოლოში.

---

[1] ესენი დაგვჭირდება მხოლოდ 14 თავში და ამიტომ პირველი წაკითხვისას ეს მასალა შეიძლება გამოვტოვოთ.

ცხადია, რომ ნებისმიერი A ჩასმის ნამრავლი იგივურ E ჩასმაზე, და ასევე E-ს ნამრავლი A-ზე, ტოლია A-სი:

$$AE=EA=A.$$

დაბოლოს A ჩასმის შებრუნებული ჩასმა ვუწოდოთ იმავე ხარისხის ისეთ A^{-1} ჩასმას, რომ

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ჩასმისათვის შებრუნებული ჩასმა არის

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

რომელიც მიიღება A-საგან ზედა და ქვედა სტრიქონების გადანაცვლებით.

განვიხილოთ ახლა სპეციალური სახის ჩასმები, რომლებიც მიიღებიან იგივური ჩასმისაგან მის ქვედა სტრიქონში ერთი ტრანსპოზიციის შესრულებით. ასეთი ჩასმები კენტია: მათ ეწოდებათ ტ რ ა ნ ს პ ო ზ ი ც ი ე ბ ი და აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix} \dots i \dots j \dots \\ \dots j \dots i \dots \end{pmatrix}, \tag{8}$$

სადაც მრავალწერტილით შეცვლილია ის სიმბოლოები, რომლებიც უცვლელი რჩებიან. შევთანხმდეთ, რომ ეს ტრანსპოზიცია აღვნიშნოთ (i, j) სიმბოლოთი. ნებისმიერი A ჩასმის (7) ჩანაწერის ქვედა სტრიქონის i და j სიმბოლოების ტრანსპოზიცია ტოლძალოვანია A ჩასმის გამრავლებისა მარჯვნიდან (8) ჩასმაზე, ე. ი. (i, j)-ზე. ვიცით, რომ n სიმბოლოსაგან შედგენილი ყველა გადანაცვლება ერთ-ერთი მათგანიდან, მაგალითად, $1, 2, \dots, n$-დან, ტრანსპოზიციათა მიმდევრობითი გამოყენებით მიიღება; ამიტომ ყოველი ჩასმა შეიძლება მიღებულ იქნას იგივური ჩასმისაგან, მის ქვედა სტრიქონში თანმიმდევრობით რამდენიმე ტრანსპოზიციის შესრულების შედეგად, ე. ი. (6) სახის ჩასმაზე თანმიმდევრობითი გამრავლების გზით. მაშასადამე, შეიძლება დავამტკიცოთ (E მამრავლი უგულვებელვჰყოთ), რომ ყ ო ვ ე ლ ი ჩ ა ს მ ა წ ა რ მ ო ი დ გ ი ნ ე ბ ა ტ რ ა ნ ს პ ო ზ ი ც ი ა თ ა ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ს ა ხ ი თ.

ყოველი ჩასმა შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვა ხერხით დავშალოთ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით. მაგალითად, ყოველთვის შეიძლება დავამატოთ ორი ერთნაირი მამრავლი (i, j) (i, j) სახისა, რომელნიც ნამრავლში გვაძლევენ E ჩასმას, ე. ი. ერთმანეთს აბათილებენ. მოვიყვანოთ ნაკლებად ტრივიალური მაგალითი:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(12)(15)(34)=(14)(24)(45)(34)(13).$$

ჩასმათა ლუწკენტოვნების ახალი განმარტება დაფუძნებულია შემდეგ თეორემაზე:

ჩასმის ყოველგვარ დაშლაში ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით ამ ტრანსპოზიციათა რიცხვის ლუწკენტოვნება ერთი და იგივე იქნება და ის თანხვდება თვით ჩასმის ლუწკენტოვნებას.

მაგალითად, ზემოთ განხილული ჩასმა კენტია, რის შემოწმებაც შეიძლება ინვერსიათა რიცხვის დათვლითაც.

ეს თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერ k ტრანსპოზიციის ნამრავლი არის ჩასმა, რომლის ლუწკენტოვნება თანხვდება k რიცხვის ლუწკენტოვნებას. როცა $k=1$, ეს სამართლიანია, რადგანაც ტრანსპოზიცია არის კენტი ჩასმა. დავუშვათ, რომ დებულება უკვე დამტკიცებულია $k-1$ მამრავლის შემთხვევისათვის. მაშინ მისი სამართლიანობა k მამრავლისათვის გამომდინარეობს იქიდან, რომ $k-1$ და k რიცხვებს აქვთ ერთმანეთის საწინააღმდეგო ლუწკენტოვნება, ხოლო ჩასმის გამრავლება (ამ შემთხვევაში პირველი $k-1$ მამრავლის ნამრავლი) ტრანსპოზიციაზე ტოლძალოვანია ამ ტრანსპოზიციის შესრულებისა ჩასმის ქვედა სტრიქონში, ე. ი. ცვლის ამ ჩასმის ლუწკენტოვნებას.

ჩასმათა მოხერხებულად ჩაწერის ხერხს, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ადვილად ვიპოვოთ მათი ლუწკენტოვნება, წარმოადგენს ციკლებად დაშლა. n-ური ხარისხის ყოველ ჩასმას შეუძლია $1, 2, \ldots, n$ სიმბოლოებიდან რამდენიმე დატოვოს ადგილზე, დანარჩენებს კი ნამდვილად შეუცვალოს ადგილი. ციკლური ჩასმა ანუ ციკლი ეწოდება ისეთ ჩასმას, რომლის განმეორებაც საკმარის რიცხვჯერ მის ნებისმიერ ნამდვილად გადანაცვლებად სიმბოლოს გადაიყვანს მის ასეთსავე ნებისმიერ მეორე სიმბოლოში. ასეთია, მაგალითად, მერვე ხარისხის ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

ის ნამდვილად გადაანაცვლებს სიმბოლოებს 2, 3, 6, 8, ამასთან სიმბოლო 2 გადაყავს 8-ში, სიმბოლო 8—3-ში, სიმბოლო 3—6-ში, ხოლო სიმბოლო 6-ისევ 2-ში.

ციკლთა რიცხვს ეკუთვნის ყველა ტრანსპოზიცია. ზემოთ განხილული ტრანსპოზიციების მოკლედ ჩაწერის ანალოგიურად, ციკლებისათვის გამოიყენება შემდეგი ჩაწერა: ნამდვილად გადანაცვლებადი სიმბოლოები იწერება მრგვალ ფრჩხილებში ერთმანეთის მიმდევრობით იმ რიგით, როგორითაც ისინი ერთიმეორეში გადადიან ჩასმის განმეორების დროს. ჩაწერა იწყება რომელიმე ნამდვილად გადანაცვლებადი სიმბოლოთი, ხოლო უკანასკნელი სიმბოლო ითვლება პირველში გარდამავალ სიმბოლოდ. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი მაგალითისათვის ამ ჩაწერას აქვს სახე

$$(2\ 8\ 3\ 6).$$

ნამდვილად გადანაცვლებად ციკლთა სიმბოლოთა რიცხვს ეწოდება ციკლის სიგრძე.

n-ური რიგის ორ ციკლს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათ არ გააჩნიათ საერთო ნამდვილად გადანაცვლებადი სიმბოლო. გასაგებია, რომ დამოუკიდებელ ციკლთა გამრავლებისას თანამამრავლთა რიგი გავლენას არ ახდენს შედეგზე.

ყოველი ჩასმა შეიძლება ერთადერთი სახით დაიშალოს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი ციკლების ნამრავლად. ამ დებულების დამტკიცება სიძნელეს არ წარმოადგენს და ამიტომ გვერდს ვუვლით მას. პრაქტიკულად დაშლა ხდება შემდეგნაირად: ვიწყებთ ნამდვილად გადანაცვლებადი სიმბოლოებიდან ნებისმიერით და მივუწერთ მას იმ სიმბოლოებს, რომლებშიაც ის გადადის ჩასმათა განმეორებისას, სანამ არ დავუბრუნდებით გამოსავალ სიმბოლოს. ციკლის „ჩაკეტვის“ შემდეგ ვიწყებთ დანარჩენი ნამდვილად გადანაცვლებადი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით, მივიღებთ მეორე ციკლს და ა. შ.

მაგალითები.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (13)(254).$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (156)(38)(47).$

შებრუნებით, ყოველი ჩასმისათვის, რომელიც მოცემულია დამოუკიდებელი ციკლების ნამრავლის სახით, შეიძლება ვიპოვოთ მისი ჩაწერა ჩვეულებრივი ფორმით (იმ პირობით, რომ ამ ჩასმის ხარისხი ცნობილია). მაგალითად,

3) $(1372)(45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

თუ ცნობილია, რომ ამ ჩასმის ხარისხი არის 7.

ვთქვათ, მოცემულია n-ური ხარისხის ჩასმა და ვთქვათ, s არის ჯამი ამ ჩასმის დაშლაში დამოუკიდებელი ციკლთა რიცხვისა და იმ სიმბოლოთა რიცხვისა, რომელსაც ეს ჩასმა უცვლელად სტოვებს[1]. სხვაობას $n-s$ ეწოდება ამ ჩასმის **დ ე კ რ ე მ ე ნ ტ ი**. ცხადია, დეკრემენტი ტოლია ჩასმის ნამდვილად გადანაცვლებად სიმბოლოთა რიცხვს მინუს იმ დამოუკიდებელ ციკლთა რიცხვი, რომელიც შედის ჩასმის დაშლაში. ზემოთ განხილულ 1), 2) და 3) მაგალითებში დეკრემენტი, შესაბამისად, ტოლია 3, 4 და 4.

ჩ ა ს მ ი ს ლ უ წ კ ე ნ ტ ო ვ ნ ე ბ ა თ ა ნ ხ ვ დ ე ბ ა ა მ ჩ ა ს მ ი ს დ ე კ რ ე მ ე ნ ტ ი ს ლ უ წ კ ე ნ ტ ო ვ ნ ე ბ ა ს.

დავუშვათ ახლა, რომ მოცემულია A ჩასმის დაშლა დამოუკიდებელ ციკლებად. თუ ყოველ ციკლს დავშლით ზემოთ აღნიშნული წესით ტრანსპოზიციათა ნამრავლად, მაშინ მივიღებთ A ჩასმის წარმოდგენას ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით. ამ ტრანსპოზიციათა რიცხვი, ცხადია, იქნება ტოლი A ჩასმით გამოწვეულ ნამდვილად გადანაცვლებად სიმბოლოთა რიცხვს მინუს ჩასმის დაშლაში შემავალ დამოუკიდებელ ციკლთა რიცხვი. აქედან გამომდინარეობს, რომ A ჩასმა შეიძლება დავშალოთ ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით, რომელთა რიცხვი დეკრემენტის ტოლია და ამიტომ ჩასმის ლუწკენტოვნება განისაზღვრება დეკრემენტის ლუწკენტოვნებით.

§ 4. n-ური რიგის დეტერმინანტები

ახლა ჩვენ გვსურს § 2-ში მიღებული შედეგები განვაზოგადოთ $n=2$ და 3-დან ნებისმიერი n-ის შემთხვევაზე. ამისათვის აუცილებელია შემოვიტანოთ n-ური რიგის დეტერმინანტები. მაგრამ შეუძლებელია ამის გაკეთება იმ გზით, რომლითაც იყვნენ შემოტანილი მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები, ე. ი. წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნებით ზოგადი სახით. n-ის ზრდასთან ერთად გამოთვლები ძალიან გართულდება, ხოლო ნებისმიერი n-ისათვის—პრაქტიკულად განუხორციელებელი გახდება. ჩვენ ავირჩევთ სხვა გზას: ჩვენთვის უკვე ცნობილ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების განხილვით ჩვენ შევეცდებით დავადგინოთ ზოგადი კანონი, რომლის მიხედვითაც ეს დეტერმინანტები გამოისახებიან შესაბამისი მატრიცების ელემენტების საშუალებით, და ამ კანონს მივიღებთ n-ური რიგის დეტერმინანტის

---

[1] ყოველ სიმბოლოსათვის, რომელიც ჩასმით ადგილზე რჩება, შესაძლებელი იყო თანამამრავლში 1 სიგრძის „ციკლი" მოგვეყვანა, ე. ი., მაგალითად, ზემოთ მითითებულ 2) მაგალითში ჩაგვეწერა (156) (38) (42) (2). მაგრამ ჩვენ ამას არ გავაკეთებთ.

განმარტებად, რის შემდეგ დავამტკიცებთ, რომ ასეთნაირი განმარტებისას კრამერის წესი ჭეშმარიტი რჩება.

მოვიგონოთ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოსახულებანი:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - \\ - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

როგორც ვხედავთ, მეორე რიგის დეტერმინანტის ყოველი წევრი არის ორი ელემენტის ნამრავლი, რომლებიც დგანან როგორც სხვადასხვა სტრიქონებში, ისე სხვადასხვა სვეტებში, ამასთან ყველა ასეთი სახის ნამრავლი, რომელთა შედგენაც კი შეიძლება მეორე რიგის მატრიცის ელემენტებისაგან (ისინი სულ ორია), გამოყენებულია დეტერმინანტის წევრებად. მსგავსადვე მესამე რიგის დეტერმინანტის ყოველი წევრი წარმოადგენს სამი ელემენტის ნამრავლს, აღებულს თითო-თითოდ ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან, ამასთან ყველა ასეთი ნამრავლი გამოიყენება დეტერმინანტის წევრებად.

ვთქვათ, ახლა მოცემულია n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

განვიხილოთ ამ მატრიცის სხვადასხვა სტრიქონებში და სხვადასხვა სვეტებში მოთავსებულ n ელემენტთა ყოველგვარი ნამრავლები, ე. ი. შემდეგი სახის ნამრავლები:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \tag{2}$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ინდექსები შეადგენენ $1, 2, \ldots n$ რიცხვთა გადანაცვლებას. ასეთ ნამრავლთა რიცხვი ტოლია n სიმბოლოსაგან შედგენილი სხვადასხვა გადანაცვლებების რიცხვისა, ე. ი. ტოლია $n!$-ის. ყველა ეს ნამრავლი ჩავთვალოთ იმ განსასაზღვრავი n-ური რიგის დეტერმინანტის წევრად, რომელიც შეესაბამება (1) მატრიცს.

ნიშნის განსაზღვრისათვის, რომლითაც (2) ნამრავლი შედის დეტერმინანტის შემადგენლობაში, შევნიშნოთ, რომ ამ ნამრავლის ინდექსებისაგან შესაძლებელია შევადგინოთ ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

სადაც i გადადის α_i-ში, თუ (2) ნამრავლის შემადგენლობაში შედის (1) მატრიცის i-ურ სტრიქონში და α_i სვეტში მდგომი ელემენტი. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოსახულებების განხილვისას ვამჩნევთ, რომ მათში

პლუს ნიშნით შედიან ის წევრები, რომელთა ინდექსები შეადგენენ ლუწ ჩასმებს, ხოლო მინუს ნიშნით ის წევრები, რომელთა ინდექსები ქმნიან კენტ ჩასმებს. ბუნებრივია, შევინარჩუნოთ ეს კანონზომიერება n-ური რიგის დეტერმინანტის განმარტებისასაც.

ამგვარად, ჩვენ მივედით შემდეგ განმარტებასთან: (1) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება $n!$ წევრის ალგებრულ ჯამს, რომელიც შედგენილია შემდეგნაირად: მის წევრებს წარმოადგენს ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან თითო-თითოდ აღებული n ელემენტის ყოველგვარი ნამრავლი, ამასთან წევრი აიღება პლუს ნიშნით, თუ მისი ინდექსები ქმნიან ლუწ ჩასმას და მინუს ნიშნით — წინააღმდეგ შემთხვევაში.

(1) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტის ჩაწერისათვის გამოვიყენებთ, როგორც მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების შემთხვევაში, სიმბოლოს

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

n-ური რიგის დეტერმინანტი, როცა $n=2$ და $n=3$, გვაძლევს ზემოთ განხილულ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტებს, ხოლო როცა $n=1$, ე. ი. ერთი ელემენტისაგან შედგენილი მატრიცებისათვის, დეტერმინანტი იქნება ამ ელემენტის ტოლია. მაგრამ, ჯერჯერობით ჩვენ არ ვიცით შეიძლება თუ არა, როცა $n>3$, n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოყენება წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნისათვის. ეს ნაჩვენები იქნება § 7-ში; წინასწარ საჭიროა n-ური რიგის დეტერმინანტების დეტალური შესწავლა და, კერძოდ, მათი გამოთვლის მეთოდების პოვნა, რადგანაც დეტერმინანტების გამოთვლა უშუალოდ მათი განმარტების გამოყენებით იმ შემთხვევაშიც კი, როცა n ძალიან დიდი არ არის, საკმარისად შრომატევადი იქნებოდა.

ახლა დავადგენთ n-ური რიგის დეტერმინანტის ზოგიერთ უმარტივეს თვისებას, რომლებიც ეხებიან უპირატესად ერთ-ერთს შემდეგი ორი საკითხიდან: ერთი მხრივ, ჩვენ გვაინტერესებს ის პირობები, რომლის დროსაც დეტერმინანტი ნულის ტოლია; მეორე მხრივ, ჩვენ მივუთითებთ მატრიცის ზოგიერთ გარდაქმნებზე, რომლებიც არ ცვლიან მის დეტერმინანტს ან ცვლიან მას ადვილად მხედველობაში მისაღები სახით.

(1) მატრიცის ტრანსპონირება ვუწოდოთ ამ მატრიცის ისეთ გარდაქმნას, რომლის დროსაც მისი სტრიქონები დაიჭერენ სვეტების ადგილს იმავე ნომრებით და პირიქით, ე. ი. გადასვლას (1) მატრიციდან მატრიცზე

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

შეიძლება ითქვას, რომ ტრანსპონირება არის (1) მატრიცის მობრუნება მთავარი დიაგონალის ირგვლივ. შესაბამისად ამბობენ, რომ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

მიღებულია (4) დეტერმინანტის ტრანსპონირებით.

1 თ ვ ი ს ე ბ ა. დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი ა რ ი ც ვ ლ ე ბ ა ტ რ ა ნ ს პ ო ნ ი რ ე ბ ი ს შ ე დ ე გ ა დ.

მართლაც, (4) დეტერმინანტის ყოველ წევრს აქვს სახე

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{7}$$

სადაც მეორე ინდექსები შეადგენენ $1, 2, \dots, n$ სიმბოლოების რომელიღაც გადანაცვლებას. მაგრამ (7) ნამრავლის ყველა მამრავლი (6) დეტერმინანტშიც რჩება სხვადასხვა სტრიქონებში და სხვადასხვა სვეტებში, ე. ი. (7) წარმოადგენს ტრანსპონირებული დეტერმინანტის წევრსაც. ცხადია, სამართლიანია შებრუნებულიც, და ამიტომ (4) და (6) დეტერმინანტები შედგებიან ერთი და იგივე წევრებისაგან. (7) წევრის ნიშანი (4) დეტერმინანტში განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

ჩასმის ლუწკენტოვნებით; (6) დეტერმინანტში ელემენტთა პირველი ინდექსები განსაზღვრავენ სვეტის ნომერს, მეორე ინდექსები — სტრიქონის ნომერს, ამიტომ (7) წევრს (6) დეტერმინანტში შეესაბამება ჩასმა

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(8) და (9) ჩასმები საზოგადოდ სხვადასხვა ჩასმებია, მაგრამ მათ აქვთ, ცხადია, ერთი და იგივე ლუწკენტოვნება, ამიტომ (7) წევრს ორივე დეტერმინანტში აქვს ერთი და იგივე ნიშანი. ამგვარად, (4) და (6) დეტერმინანტები წარმოადგენენ ერთნაირი ნიშნის მქონე, ერთი და იგივე წევრთა ჯამებს, ე. ი. ისინი ერთმანეთის ტოლი არიან.

1 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი დებულება დეტერმინანტის სტრიქონების მიმართ სამართლიანია მისი სვეტების მიმართაც და პირიქით, ე. ი. დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ შ ი (მატრიცისაგან განსხვავებით) ს ტ რ ი ქ ო ნ ე ბ ი დ ა ს ვ ე ტ ე ბ ი თ ა ნ ა ს წ ო რ უ ფ ლ ე ბ ი ა ნ ი ა. ჩვენ შემდეგ 2—9 თვისებებს ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ მხოლოდ დეტერმინანტის სტრიქონებისათვის; ანალოგიური თვისებები სვეტებისათვის არ მოითხოვენ განსაკუთრებულ დამტკიცებას.

2 თ ვ ი ს ე ბ ა. თ უ დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი ს რ ო მ ე ლ ი მ ე ს ტ რ ი ქ ო ნ ი ნ უ ლ ე ბ ი ს ა გ ა ნ შ ე დ გ ე ბ ა, მ ა შ ი ნ ე ს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

მართლაც, ვთქვათ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტი წარმოადგენს ნულს. მაშინ დეტერმინანტის ყოველ წევრში უნდა შევიდეს მამრავლად i-ური სტრიქონიდან ერთი ელემენტი და ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში დეტერმინანტის ყველა წევრი ტოლია ნულისა.

3 თვისება. თუ ერთი დეტერმინანტი მიღებულია მეორისაგან ორი სტრიქონის გადანაცვლებით, მაშინ პირველი დეტერმინანტის ყველა წევრი იქნება მეორე დეტერმინანტის წევრიც, მაგრამ შებრუნებული ნიშნით, ე. ი. დეტერმინანტი ორი სტრიქონის გადანაცვლებით იცვლის მხოლოდ ნიშანს.

მართლაც, ვთქვათ მე-(4) დეტერმინანტში ვანაცვლებთ i-ურ და j-ურ სტრიქონებს, ხოლო ყველა დანარჩენ სტრიქონს ვტოვებთ უცვლელად. მივიღებთ შემდეგ დეტერმინანტს

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \tag{10}$$

(გვერდით ნაჩვენებია სტრიქონთა ნომერი). თუ

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n} \tag{11}$$

არის (4) დეტერმინანტის წევრი, მაშინ, ცხადია, მისი ყოველი მამრავლი (10) დეტერმინანტშიც დარჩება სხვადასხვა სტრიქონში და სხვადასხვა სვეტში. ამგვარად, (4) და (10) დეტერმინანტები შედგებიან ერთი და იგივე წევრებისაგან. (11) წევრს მე-(4) დეტერმინანტში შეესაბამება ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

ხოლო (10) დეტერმინანტში—ჩასმა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i & \ldots & \alpha_j & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{13}$$

რადგან, მაგალითად, ელემენტი $a_{i\alpha_i}$ ახლა დგას j-ურ სტრიქონში, მაგრამ რჩება α_i-ურ სვეტში. მაგრამ (13) ჩასმა მიიღება (12) ჩასმისაგან ზედა სტრიქონში ერთი ტრანსპოზიციის შესრულებით, ე. ი. აქვს საწინააღმდეგო ლუწკენტოვნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ (4) დეტერმინანტის ყველა წევრი შედის (10) დეტერმინანტში შებრუნებული ნიშნით, ე. ი. (4) და (10) დეტერმინანტები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

4 თვისება. დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონი ერთმანეთის ტოლია, უდრის ნულს.

მართლაც, ვთქვათ დეტერმინანტი d რიცხვის ტოლია და მისი i-ური და j-ური სტრიქონების ($i \neq j$) შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია. მე-3 თვისების ძალით ამ ორი სტრიქონის გადანაცვლებით მიღებული დეტერ-

მინანტი—d რიცხვის ტოლი გახდება. მაგრამ, რადგანაც ერთნაირი სტრიქონების გადანაცვლება ხდება, ამიტომ დეტერმინანტი სინამდვილეში არ იცვლება, ე. ი. $d=-d$, საიდანაც $d=0$.

5 თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს გავამრავლებთ რომელიღაც k რიცხვზე, მაშინ თვით დეტერმინანტი გამრავლდება k-ზე.

ვთქვათ, k-ზე გამრავლებულია i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტი. დეტერმინანტის ყოველი წევრი i-ური სტრიქონიდან შეიცავს ზუსტად ერთ ელემენტს, ამიტომ ყოველი წევრი იძენს k მამრავლს, ე. ი. თვით დეტერმინანტი მრავლდება k რიცხვზე.

ამ თვისების ფორმულირება შეიძლება კიდევ შემდეგი სახით: დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი შესაძლებელია გამოვიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

6 თვისება. დეტერმინანტი, რომელიც შეიცავს ორ პროპორციულ სტრიქონს, ნულის ტოლია.

მართლაც, ვთქვათ დეტერმინანტის j-ური სტრიქონის ელემენტები განსხვავდებიან i-ური სტრიქონის ($i \neq j$) შესაბამისი ელემენტებისაგან ერთი და იგივე k მამრავლით. თუ ამ საერთო k მამრავლს j სტრიქონიდან გამოვიტანთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, მივიღებთ დეტერმინანტს, რომლის ორი სტრიქონი ერთმანეთის ტოლია. 4 თვისების ძალით ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

4 თვისება (და ასევე 2 თვისებაც, როცა $n>1$), ცხადია, წარმოადგენს 6 თვისების კერძო შემთხვევას (როცა $k=1$ და $k=0$).

7 თვისება. თუ n-ური რიგის დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით:

$$a_{ij}=b_j+c_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

მაშინ ეს დეტერმინანტი ტოლია ორი დეტერმინანტის ჯამისა, რომელთა ყველა სტრიქონი, გარდა i-სა, ისეთივეა, როგორიც მოცემული დეტერმინანტის შესაბამისი სტრიქონები, ხოლო i-ური სტრიქონი ერთ-ერთი შესაკრებისა შედგება b_j ელემენტებისაგან, მეორესი კი c_j ელემენტებისაგან.

მართლაც, მოცემული დეტერმინანტის ყოველი წევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots (b_{\alpha_i}+c_{\alpha_i}) \cdots a_{n\alpha_n} =$$
$$= a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots b_{\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots c_{\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

თუ ცალკე შევკრებთ ამ ჯამის ყველა პირველ შესაკრებს (იმავე ნიშნებით, როგორიც ჰქონდათ შესაბამის წევრებს მოცემულ დეტერმინანტში), ცხადია, მივიღებთ n-ური რიგის დეტერმინანტს, რომელიც მოცემული დეტერ-

მინანტისაგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ მის i-ურ სტრიქონში a_{ij} ელემენტების ნაცვლად დგანან b_j ელემენტები. შესაბამისად მეორე შესაკრებები წარმოქმნიან დეტერმინანტს, რომლის i ურ სტრიქონში დგანან c_j ელემენტები.

ამგვარად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7 თვისება ადვილად ვრცელდება იმ შემთხვევაზე, როცა i-ური სტრიქონის ყოველი ელემენტი არის ჯამი არა ორი, არამედ m შესაკრებისა, $m>2$.

ვიტყვით, რომ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონი არის მისი დანარჩენი სტრიქონების **წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა**, თუ ყოველი j სტრიქონისათვის, $j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, შეიძლება მივუთითოთ ისეთ k_j რიცხვზე, რომ თუ j-ურ სტრიქონს გავამრავლებთ k_j-ზე და შემდეგ შევკრებთ ყველა სტრიქონს, გარდა i-სა (ამასთან სტრიქონთა შეკრება საჭიროა გვესმოდეს ისე, რომ იკრიბება ყველა ამ სტრიქონთა ელემენტი ყოველ სვეტში ცალ-ცალკე), მივიღებთ i-ურ სტრიქონს. k_j კოეფიციენტებიდან შესაძლებელია ზოგიერთი ნულის ტოლი იყოს, ე. ი. სინამდვილეში i-ური სტრიქონი იქნება წრფივი კომბინაცია არა ყველა დანარჩენი სტრიქონისა, არამედ მათი ნაწილისა, კერძოდ, თუ k_j კოეფიციენტებიდან მხოლოდ ერთი განსხვავდება ნულისაგან, მივიღებთ ორი სტრიქონის პროპორციულობის შემთხვევას. დაბოლოს, თუ სტრიქონი შედგება ნულებისაგან, მაშინ ის ყოველთვის იქნება დანარჩენი სტრიქონების წრფივი კომბინაცია,—ეს ის შემთხვევაა, როცა ყველა k_j ნულის ტოლია.

8 **თ ვ ი ს ე ბ ა. თუ დეტერმინანტის ერთ-ერთი სტრიქონი წარმოადგენს მისი სხვა სტრიქონების წრფივ კომბინაციას, მაშინ ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლია.**

ვთქვათ, მაგალითად, i-ური სტრიქონი წარმოადგენს სხვა სტრიქონთა წრფივ კომბინაციას, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. მაშინ i-ური სტრიქონის ყოველი ელემენტი იქნება s შესაკრების ჯამი, რის გამოც, თუ გამოვიყენებთ 7 თვისებას, მოცემულ დეტერმინანტს წარმოვადგენთ ისეთ დეტერმინანტთა ჯამის სახით, რომელთაგან ყოველში i-ური სტრიქონი სხვა რომელიმე სტრიქონის პროპორციული იქნება. 6 თვისების ძალით ყველა ეს დეტერმინანტი ტოლია ნულისა და, მაშასადამე, მოცემული დეტერმინანტიც ნულის ტოლია.

ეს თვისება წარმოადგენს მე-6 თვისების განზოგადებას, ამასთან როგორც § 10-ში იქნება დამტკიცებული, აღნიშნული თვისება გვაძლევს დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევას.

9 **თ ვ ი ს ე ბ ა. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ მეორე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულთ ერთსა და იმავე რიცხვზე.**

მართლაც, ვთქვათ d დეტერმინანტის i-ურ სტრიქონს ვუმატებთ j-ურ, $j \neq i$, სტრიქონს გამრავლებულს k რიცხვზე; ე. ი. მიღებულ დეტერმინანტში i-ური სტრიქონის ყოველ ელემენტს აქვს სახე $a_{is}+ka_{js}$, $s=1, 2, \ldots, n$. მაშინ, 7 თვისების ძალით, ეს დეტერმინანტი დაიშლება ორი დეტერმინანტის ჯამად, რომელთაგან პირველი არის d, ხოლო მეორე შეიცავს ორ პროპორციულ სტრიქონს და ამიტომ ნულის ტოლია.

რადგანაც k რიცხვი შეიძლება უარყოფითიც იყოს, ამიტომ დეტერმინანტი მაშინაც არ იცვლება, როცა მის რომელიმე სტრიქონს ვაკლებთ მეორე სტრიქონს, გამრავლებულს რომელიღაც რიცხვზე. საზოგადოდ, დეტერმინანტი არ იცვლება, თუ ერთ-ერთ მის სტრიქონს ემატება სხვა სტრიქონების ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია.

განვიხილოთ ერთი მაგალითი. დეტერმინანტს ირიბსიმეტრიული ეწოდება, თუ მისი მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიული ელემენტები ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან, ე. ი. თუ ყოველი i და j-თვის $a_{ji}=-a_{ij}$, აქედან გამომდინარეობს რომ ყოველი i-თვის $a_{ii}=-a_{ii}=0$. ამგვარად, დეტერმინანტს შემდეგი სახე აქვს:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \cdots a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \;\ldots\; a_{3n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} \ldots 0 \end{vmatrix}.$$

თუ ამ დეტერმინანტის ყოველ სტრიქონს -1-ზე გავამრავლებთ, ტრანსპონირებულ დეტერმინანტს მივიღებთ, ე. ი. ისევ d-ს ტოლს, საიდანაც, მე-5 თვისების თანახმად, გამომდინარეობს:

$$(-1)^n d=d.$$

აქედან კენტი n-თვის გვაქვს: $-d=d$, ე. ი. $d=0$. ამგვარად, ყოველი კენტი რიგის ირიბსიმეტრიული დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

§ 5. მინორები და მათი ალგებრული დამატებანი

ზემოთ უკვე აღინიშნა, რომ n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა ძნელი იქნებოდა, თუ უშუალოდ მის განმარტებას გამოვიყენებდით, ე. ი. ყოველთვის ამოვწერდით ყველა $n!$ წევრს, მათ ნიშნებს განვსაზღვრავდით და ა. შ. არსებობენ დეტერმინანტთა გამოთვლის უფრო მარტივი მეთოდები, რომლებიც დაფუძნებულია იმაზე, რომ n-ური რიგის დეტერმინანტი შესაძლებელია უფრო დაბალი რიგის დეტერმინანტების საშუალებით გამოისახოს. ამ მიზნით შემდეგი ცნება შემოვიტანოთ.

ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის d დეტერმინანტი. ავიღოთ მთელი k რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $1 \leqslant k \leqslant n-1$, და d დეტერმინანტში ნებისმიერი k სტრიქონი და k სვეტი ავირჩიოთ. ამ სტრიქონებისა და სვეტების თანაკვეთაზე მდგომი ელემენტები, ე. ი. ის ელემენტები, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან ერთერთ სტრიქონს და ერთერთ სვეტს არჩეული სტრიქონებიდან და სვეტებიდან, ცხადია, k რიგის მატრიცს შეადგენენ. ამ მატრიცის

დეტერმინანტს d დეტერმინანტის k რიგის მინორი ეწოდება. ასევე შეიძლება ითქვას, რომ k რიგის მინორი არის დეტერმინანტი, რომელიც d დეტერმინანტიდან $n-k$ სტრიქონისა და $n-k$ სვეტის ამოშლით მიიღება. კერძოდ, დეტერმინანტიდან ერთი სტრიქონისა და ერთი სვეტის ამოშლით $(n-1)$ რიგის მინორს მივიღებთ; მეორე მხრივ, d დეტერმინანტის პირველი რიგის მინორები მისი ცალკეული ელემენტები იქნებიან.

ვთქვათ, n-ური რიგის d დეტერმინანტში k რიგის M მინორია აღებული. თუ ამოვშლით იმ სტრიქონებსა და სვეტებს, რომელთა გადაკვეთაზე მდებარეობს ეს მინორი, მაშინ $(n-k)$ რიგის M' მინორი დარჩება, რომელსაც M მინორის დამატებითი მინორი ეწოდება. პირიქით, თუ იმ სტრიქონებსა და სვეტებს ამოვშლით, რომლებშიაც M' მინორის ელემენტებია განლაგებული, მაშინ, ცხადია, M მინორი მიიღება. ამგვარად, შესაძლებელია დეტერმინანტის ურთიერთდამატებითი მინორების წყვილის შესახებ ვილაპარაკოთ. კერძოდ, a_{ij} ელემენტი და $(n-1)$ რიგის მინორი, რომელიც დეტერმინანტის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლითაა მიღებული, ურთიერთდამატებითი მინორების წყვილს შეადგენენ.

თუ k რიგის M მინორი მოთავსებულია $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ნომრიან სტრიქონებში და $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ნომრიან სვეტებში, მაშინ M მინორის ალგებრული დამატება ვუწოდოთ მის დამატებით მინორს M'-ს აღებულს პლუს ან მინუს ნიშნით, იმისდა მიხედვით, ლუწია თუ კენტი ყველა იმ სტრიქონისა და სვეტის ნომრების ჯამი, რომლებშიაც განლაგებულია M მინორის ელემენტები, ე. ი. ჯამი

$$s_M = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k, \qquad (1)$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, M მინორისათვის ალგებრული დამატება $(-1)^{s_M} M'$ რიცხვია.

d დეტერმინანტში ნებისმიერი k რიგის M მინორის ნამრავლი მის ალგებრულ დამატებაზე ალგებრულ ჯამს წარმოადგენს, რომლის შესაკრებები, M მინორის წევრების დამატებითი M' მინორის $(-1)^{s_M}$ ნიშნით აღებულ წევრებზე გადამრავლებით მიღებულნი, d დეტერმინანტის რომელიმე წევრები იქნებიან, ამასთან ამ ჯამში მათი ნიშნები იგივეა, როგორითაც ისინი დეტერმინანტის შემადგენლობაში შედიან.

ამ თეორემის დამტკიცებას დავიწყებთ იმ შემთხვევით, როცა M მინორი დეტერმინანტის მარცხენა ზედა კუთხეშია მოთავსებული.

$$d = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \cdots M \cdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,k+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{k,k+1} \cdots a_{kn} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a_{k+1,1} \cdots a_{k+1,k} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nk} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{k+1,k+1} \cdots a_{k+1,n} \\ \cdots M' \cdots \\ a_{n,k+1} \cdots a_{nn} \end{matrix} \end{array}\right|,$$

$1, 2, \ldots, k$ ნომრიან სტრიქონებში და იმავე ნომრიან სვეტებში. მაშინ M' მინორი დეტერმინანტის მარცხენა ქვედა კუთხეს დაიკავებს. s_M რიცხვი ამ შემთხვევაში ლუწი იქნება:

$$s_M = 1 + 2 + \ldots + k + 1 + 2 + \ldots + k = 2(1 + 2 + \ldots + k),$$

ამიტომ M-ის ალგებრულ დამატებას თვით M' მინორი წარმოადგენს.

ავიღოთ M მინორის ნებისმიერი წევრი

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k}\,; \tag{2}$$

M-ში მისი ნიშანი $(-1)^l$ იქნება, თუ l ინვერსიათა რიცხვია ჩასმაში

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix}; \tag{3}$$

M' მინორის ნებისმიერ

$$a_{k+1,\, \beta_{k+1}}\, a_{k+2,\, \beta_{k+1}} \ldots a_{n\beta n} \tag{4}$$

წევრს ამ მინორში $(-1)^{l'}$ ნიშანი აქვს, სადაც l' ინვერსიათა რიცხვია ჩასმაში

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(2) და (4) წევრების გადამრავლებით ისეთ n ელემენტთა ნამრავლს მივიღებთ

$$a^1{}_{\alpha_1}\, a2_{\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k}\, a_{k+1,\, \beta_{k+1}}\, a_{k+2,\, \beta_{k+2}} \ldots a_{n\, \beta_n}, \tag{6}$$

რომლებიც დეტერმინანტის სხვადასხვა სტრიქონებში და სხვადასხვა სვეტებში არიან განლაგებული; მაშასადამე, ის d დეტერმინანტის წევრია. (6) წევრის ნიშანი MM' ნამრავლში (2) და (4) წევრთა ნიშნების ნამრავლი იქნება, ე. ი. $(-1)^l \cdot (-1)^{l'} = (-1)^{l+l'}$. მაგრამ, (6) წევრს d დეტერმინანტშიც ასეთივე ნიშანი აქვს. მართლაც,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

ჩასმის ქვედა სტრიქონი, რომელიც ამ წევრის ინდექსებისაგანაა შედგენილი, მხოლოდ $l + l'$ ინვერსიას შეიცავს, რადგანაც არც ერთ α-ს არც ერთ β-სთან არ შეუძლია ინვერსიის შექმნა: არც ერთი α არ აღემატება k-ს და არც ერთი β არ არის $k+1$-ზე ნაკლები. ამით ჩვენს მიერ განხილული კერძო შემთხვევა თეორემისა დამტკიცებულია. გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე, ე. ი. ვიგულისხმოთ, რომ M მინორი $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ნომრიან სტრიქონებში და $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ნომრიან სვეტებში არის განლაგებული, ამასთან

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k,\quad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

შევეცადოთ, სტრიქონებისა და სვეტების გადანაცვლებით M მინორი მარცხენა ზედა კუთხეში გადავაადგილოთ, ამასთან ისე, რომ დამატებითი მინორი არ შეიცვალოს. ამისათვის i_1 სტრიქონი გადავანაცვლოთ (i_1-1) სტრიქონთან, შემდეგ (i_1-2)-თან და ა. შ., სანამ i_1 სტრიქონი პირველი სტრიქონის

ადგილს არ დაიჭერს; ამისათვის საჭიროა სტრიქონთა $i-1$-ჯერ გადანაცვლება. ამის შემდეგ i_2 სტრიქონს თანმიმდევრობით მის ზემოთ მდებარე სტრიქონებთან გადავანაცვლებთ, სანამ ის უშუალოდ i_1 სტრიქონის ქვემოთ არ მოთავსდება, ე. ი. იმ ადგილზე, რომელიც გარდაქმნის დაწყებამდე მეორე სტრიქონს ეკავა; ამისათვის, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, i_2-2 ჯერ უნდა გადავანაცვლოთ სტრიქონები. ანალოგიურად i_3 სტრიქონს მესამე სტრიქონის ადგილზე გადავიყვანთ და ა. შ., სანამ i_k სტრიქონი k-ური სტრიქონის ადგილზე არ აღმოჩნდება. მთლიანად საჭიროა სტრიქონთა

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\ldots+i_k)-$$
$$-(1+2+\ldots+k)$$

ტრანსპოზიციის შესრულება.

M მინორი უკვე ახალი დეტერმინანტის პირველ k სტრიქონში მოთავსებული. ახლა თანმიმდევრობით დეტერმინანტის სვეტები გადავანაცვლოთ: j_1 სვეტი ყველა მის წინ მდებარესთან, სანამ ის პირველ ადგილს არ დაიკავებს, შემდეგ j_2, სანამ ის არ დაიკავებს მეორე ადგილს, და ა. შ. მთლიანად სვეტები

$$(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\ldots+k)$$

რიცხვჯერ გადაადგილდებიან.

ყველა ამ გარდაქმნის შემდეგ ახალ d' დეტერმინანტს მივიღებთ, რომელშიაც M მინორს მარცხენა ზემო კუთხე უკავია. რადგანაც ჩვენ ყოველთვის მხოლოდ მეზობელ სტრიქონებს ან სვეტებს ვანაცვლებდით, ამიტომ M' მინორის სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთგანლაგება, რომელიც ჰქონდა d დეტერმინანტში, დარჩება უცვლელი, და ამიტომ d' დეტერმინანტში M მინორის დამატებით მინორად M' მინორი დარჩება, მაგრამ მას უკვე მარცხენა ქვედა კუთხე უკავია. MM' ნამრავლი, როგორც ზემოთაა დამტკიცებული, წარმოადგენს ჯამს d' დეტერმინანტის რაღაც რაოდენობის წევრთა, რომლებიც იმავე ნიშნებით არიან აღებული, როგორითაც ისინი d'-ში შედიან, მაგრამ d' დეტერმინანტი d დეტერმინანტისაგანაა მიღებული სტრიქონთა და სვეტთა

$$[(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\ldots+k)]+$$
$$+[(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+\ldots+k)]=$$
$$=s_M-2(1+2+\ldots+k)$$

ტრანსპოზიციის გზით, ამიტომ, როგორც წინა პარაგრაფიდან ვიცით, d' დეტერმინანტის წევრები d დეტერმინანტის შესაბამისი წევრებისაგან მხოლოდ $(-1)^{s_M}$ ნიშნით განსხვავდებიან (ცხადია, ლუწი რიცხვი $2(1+2+\ldots+k)$ გავლენას არ მოახდენს ნიშანზე). აქედან გამომდინარეობს, რომ $(-1)^{s_M}MM'$ ნამრავლი d დეტერმინანტის რაღაც რაოდენობის ელემენტებისაგან შედგება, რომლებიც ისეთივე ნიშნებით არიან აღებული, როგორიც მათ ამ დეტერმინანტში აქვთ. თეორემა დამტკიცებულია.

თუ M და M' ურთიერთდამატებითი მინორებია, მაშინ s_M და $s_{M'}$ რიცხვებს ერთი და იგივე ლუწკენტოვნება აქვთ. მართლაც, ყოველი სტრიქონისა და ყოველი სვეტის ნომერი შესაკრების სახით ერთ და მხოლოდ ერთ ამ რიცხვთაგანში შედის და, ამიტომ, $s_M + s_{M'}$ ჯამი ტოლია დეტერმინანტის ყველა სტრიქონისა და სვეტის ნომრების საერთო ჯამისა, ე. ი. ტოლია $2(1+2+\ldots+k)$ ლუწი რიცხვისა.

§ 6. დეტერმინანტთა გამოთვლა

წინა პარაგრაფის შედეგები საშუალებას გვაძლევს n-ური რიგის დეტერ-მინანტის გამოთვლა დავიყვანოთ $(n-1)$ რიგის რამდენიმე დეტერმინანტის გამოთვლაზე. დასაწყისში შემდეგი აღნიშვნები შემოვიტანოთ: თუ a_{ij} არის d დეტერმინანტის ელემენტი, მაშინ M_{ij}-ით დამატებით მინორს აღვნიშნავთ ანუ, მოკლედ, ამ ელემენტის მინორს, ე. ი. $(n-1)$ რიგის მინორს, რომელიც დეტერმინანტიდან i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით მიიღება. შემდეგ, a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება აღვნიშნოთ A_{ij}-თი, ე. ი.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

$a_{ij}M_{ij}$ ნამრავლი, როგორც წინა პარაგრაფში დამტკიცდა, წარმოადგენს ჯამს d დეტერმინანტის რამდენიმე წევრისა, რომლებიც ამ ჯამში იმავე ნიშნებით შედიან, როგორითაც ისინი d დეტერმინანტის შემადგენლობაში იმყოფებიან. ადვილი გამოსათვლელია ამ წევრთა რიცხვი: ის M_{ij} მინორში შემავალი ელემენტების რიცხვის ტოლია, ე. ი. $(n-1)!$-ის ტოლია.

ახლა d დეტერმინანტის რომელიმე i-ური სტრიქონი ავირჩიოთ და გან-ვიხილოთ ამ სტრიქონის ყოველი ელემენტის მის ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლი:

$$a_{i1} A_{i1},\ a_{i2} A_{i2},\ \ldots,\ a_{in} A_{in}. \tag{1}$$

d დეტერმინანტის არც ერთ წევრს არ შეუძლია შევიდეს (1)-ის ორ განსხვავებულ ნამრავლში: დეტერმინანტის ყველა წევრი, რომელიც $a_{i1}A_{i1}$ ნამრავლში შედის, i-ური სტრიქონიდან შეიცავს a_{i1} ელემენტს და ამიტომ განსხვავდება იმ წევრებისაგან, რომლებიც $a_{i2}A_{i2}$ ნამრავლში შედიან, ე. ი. რომლებიც i-ური სტრიქონიდან შეიცავენ a_{i2} ელემენტს, და ა. შ.

მეორე მხრივ, საერთო რიცხვი d დეტერმინანტის ელემენტებისა, რომ-ლებიც (1)-ის ყველა ნამრავლში შედის

$$(n-1)!\, n=n!$$

რიცხვის ტოლია, ე. ი. d დეტერმინანტის ყველა წევრი საერთოდ ამით ამოი-წურება. ამგვარად, დავამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს d დეტერმინანტის შემდეგ დაშლას i-ური სტრიქონის მიმართ:

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}, \tag{2}$$

ე. ი. d დეტერმინანტი ტოლია მისი ნებისმიერი სტრიქონის ყველა ელემენტის მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა

ჯამისა. დეტერმინანტის ანალოგიური დაშლა შეიძლება მივიღოთ მისი ნებისმიერი სვეტის მიმართაც.

თუ (2) დაშლაში ალგებრულ დამატებებს პლუს ან მინუს ნიშნით აღებული შესაბამისი მინორებით შევცვლით, მაშინ n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლას დავიყვანთ $n-1$ რიგის რამდენიმე დეტერმინანტის გამოთვლაზე. შევნიშნოთ, რომ თუ i-ური სტრიქონის ელემენტებიდან ზოგიერთი ტოლია ნულისა, მაშინ, გასაგებია, რომ მათ შესაბამის მინორებს არ დაჭირდებათ გამოთვლა. ამის გამო სასარგებლოა 9 თვისების გამოყენებით (ნახ. § 4) წინასწარ დეტერმინანტი ისე გარდავქმნათ, რომ ერთ-ერთ სტრიქონში ან ერთ-ერთ სვეტში საკმარისად ბევრი ელემენტი შეცვლილი აღმოჩნდეს ნულებით. სინამდვილეში 9 თვისება საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერ სტრიქონში ან ნებისმიერ სვეტში ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა, ნულებით შევცვალოთ. მართლაც, თუ $a_{ik} \neq 0$, მაშინ i-ური სტრიქონის ნებისმიერი a_{ij}, $j \neq k$, ელემენტი შეიცვლება ნულით, თუ k-ურ სვეტს გავამრავლებთ $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$-ზე და გამოვაკლებთ j-ურ სვეტს. ამგვარად, n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ ერთი $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტის გამოთვლაზე.

მაგალითები.

1. გამოთვალეთ მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

დავშალოთ ის მესამე სტრიქონის მიხედვით, რისთვისაც გამოვიყენოთ მასში ერთი ნულის არსებობა:

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

თუ მიღებულ მესამე რიგის დეტერმინანტებს გამოვთვლით, მივიღებთ:

$$d=2.16-40+48=40.$$

2. გამოთვალეთ მეხუთე რიგის დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

თუ მეორე სტრიქონს გასამკეცებულ მეხუთე სტრიქონს დავუმატებთ და მეოთხეს გაოთხკეცებულ მეხუთეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ:

$$d=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

ეს დეტერმინანტი დავშალოთ მესამე სვეტის მიხედვით, რომელიც მხოლოდ ერთ ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტს შეიცავს (ინდექსთა ჯამი 5+3, ე. ი. ლუწია), მივიღებთ

$$d=(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

მიღებული დეტერმინანტი ისევ გარდავქმნათ, რისთვისაც პირველ სტრიქონს გაორკეცებული მეორე სტრიქონი დავუმატოთ და მესამე სტრიქონს გასამკეცებული მეორე გამოვაკლოთ, ხოლო მეოთხეს—გაორკეცებული მეორე:

$$d=-\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix},$$

შემდეგ პირველი სვეტის მიხედვით დავშალოთ, თან შევნიშნოთ, რომ ამ სვეტის ერთადერთ ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტს ინდექსთა კენტი ჯამი შეესაბამება; მივიღებთ:

$$d=\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

ეს მესამე რიგის დეტერმინანტი გამოვთვალოთ მისი წინასწარ დაშლით მესამე სტრიქონის მიხედვით

$$d=36\begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix}-(-33)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix}+(-24)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix}=$$

$$=36\cdot(-72)-(-33)\cdot(-104)+(-24)\cdot(-208)=-1032.$$

3. თუ დეტერმინანტის ყველა ელემენტი, რომელიც მთავარი დიაგონალიდან ერთ მხარეს მდებარეობს, ნულის ტოლია, მაშინ ეს დეტერმინანტი მთავარ დიაგონალზე მდებარე ელემენტების ნამრავლის ტოლია.

მეორე რიგის დეტერმინანტისათვის ეს დებულება ცხადია. ამიტომ მას დავამტკიცებთ ინდუქციით, ე. ი. დავუშვებთ, რომ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტისათვის ის უკვე დამტკიცებულია და განვიხილავთ n-ური რიგის დეტერმინანტს

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამის პირველი სვეტის მიხედვით დაშლით მივიღებთ:

$$d=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგრამ მინორისათვის, რომელიც მარჯვენა ნაწილში დგას, ინდუქციური დაშვება გამოდგება, ე. ი. ის $a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}$ ნამრავლის ტოლია, და ამიტომ

$$d=a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}.$$

4. *ვანდერმონდის დეტერმინანტი ეწოდება შემდეგ დეტერმინანტს*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

დავამტკიცოთ, რომ *ნებისმიერი n-ისათვის ვანდერმონდის დეტერმინანტი ყოველგვარი a_i-a_j სხვაობების, სადაც $1 \leqslant j<i \leqslant n$, ნამრავლის ტოლია.* მართლაც, $n=2$-თვის გვექნება

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

ვთქვათ, დებულება $(n-1)$ რიგის ვარდერმონდის დეტერმინანტისათვის უკვე დამტკიცებულია. d დეტერმინანტი შემდეგნაირად გარდავქმნათ: n-ურ (უკანასკნელ) სტრიქონს გამოვაკლოთ a_1-ზე გამრავლებული $(n-1)$ სტრიქონი, შემდეგ $(n-1)$-ს გამოვაკლოთ ისევ a_1-ზე გამრავლებული $(n-2)$-რე სტრიქონი და ა. შ., ბოლოს მეორე სტრიქონს გამოვაკლოთ a_1-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონი. მივიღებთ:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \dots & a_n^2-a_1a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

ამ დეტერმინანტის პირველი სვეტის მიხედვით დაშლით $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტს მივიღებთ; ყველა სვეტიდან საერთო მამრავლების დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გამოტანის შემდეგ ის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ a_2 & a_3 & \dots a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

უკანასკნელი მამრავლი $(n-1)$ რიგის ვანდერმონდის დეტერმინანტს წარმოადგენს, ე. ი., დაშვების თანახმად, ყველა a_i-a_j, $2 \leqslant j<i \leqslant n$, სხვაობების ნამრავლის ტოლია. მაშასადამე, თუ $\prod$ სიმბოლოს გამოვიყენებთ ნამრავლის აღსანიშნავად, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j).$$

ასეთივე მეთოდით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$d' = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი ყოველგვარი $a_i - a_j$ სხვაობების, სადაც $1\leqslant i<j\leqslant n$, ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

$$d' = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i - a_j).$$

დეტერმინანტის სტრიქონისა და სვეტის მიხედვით ზემოთ მიღებული დაშლის განზოგადებით დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას, რომელიც დეტერმინანტის რამდენიმე სტრიქონისა და სვეტის მიხედვით დაშლას გვაძლევს.

ლაპლასის თეორემა. ვთქვათ, n-ური რიგის d დეტერმინანტში ნებისმიერადაა არჩეული k სტრიქონი (ან k სვეტი) $1\leqslant k\leqslant n-1$. მაშინ არჩეულ სტრიქონებში შემავალი ყველა k რიგის მინორების მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი d დეტერმინანტის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ d დეტერმინანტში $i_1, i_2, \dots, i_k$ ნომრიანი სტრიქონებია არჩეული. ვიცით, რომ ამ სტრიქონებში მოთავსებული k რიგის ნებისმიერი მინორის მის ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლი შედგება d დეტერმინანტის რაღაც რაოდენობის წევრებისაგან, რომლებიც იმავე ნიშნებითაა აღებული, რომლებითაც ისინი დეტერმინანტის შემადგენლობაში შედიან. მაშასადამე, თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ, როცა M მინორი არჩეულ სტრიქონებში გაირბენს ყველა k რიგის მინორს, მაშინ დეტერმინანტის ყველა წევრს მივიღებთ, ამასთან განმეორებით არც ერთი მათგანი არ შეგვხვდება.

ვთქვათ,

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \tag{3}$$

d დეტერმინანტის ნებისმიერი წევრია. ცალკე ავიღოთ ამ წევრის იმ ელემენტების ნამრავლი, რომლებიც ჩვენს მიერ არჩეულ $i_1, i_2, \dots, i_k$ ნომრიან სტრიქონებს ეკუთვნიან. ეს იქნება ნამრავლი

$$a_{i_1\alpha_{i_1}},\, a_{i_2\alpha_{i_2}} \dots a_{i_k\alpha_{i_k}}; \tag{4}$$

ამ ნამრავლის k მამრავლი k სხვადასხვა სვეტში დგას, სახელდობრ, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ ნომრიან სვეტებში. მაშასადამე, სვეტთა ეს ნომრები სავსებით განისაზღვრებიან (3) წევრის მოცემით. თუ M-ით აღვნიშნავთ k რიგის მინორს,

რომელიც დგას ამ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ ნომრიან სვეტებისა და ადრე არჩეული $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ნომრიანი სტრიქონების გადაკვეთაზე, მაშინ (4) ნამრავლი M მინორის ერთ-ერთი წევრი იქნება, ხოლო (3) წევრის იმ ელემენტთა ნამრავლი, რომლებიც (4)-ში არ შედიან, — მისი დამატებითი მინორის წევრი. ამგვარად, დეტერმინანტის ყოველი წევრი შედის არჩეული სტრიქონების რომელიმე, სრულიად განსაზღვრული k რიგის მინორის ნამრავლში, მის ალგებრულ დამატებაზე, ამასთან იგი ამ ორი მინორის სრულიად განსაზღვრული წევრების ნამრავლს წარმოადგენს. დაბოლოს, იმისათვის, რომ დეტერმინანტის ჩვენს მიერ აღებული წევრი იმ ნიშნით მივიღოთ, როგორიც მას დეტერმინანტში აქვს, დაგვრჩენია, როგორც ვიცით, დამატებითი მინორი ალგებრული დამატებით შევცვალოთ. ამით თეორემის დამტკიცება მთავრდება.

თეორემის დამტკიცება შესაძლებელი იყო რამდენიმედ სხვა გზითაც ჩაგვეტარებინა. სახელდობრ, არჩეულ სტრიქონებში მოთავსებული ნებისმიერი k რიგის მინორის მის ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლი $k!(n-k)!$ წევრისაგან შედგება, რადგანაც k რიგის M მინორი $k!$ წევრისაგან შედგება, ხოლო მისი ალგებრული დამატება, რომელიც შეიძლება $n-k$ რიგის მინორისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებოდეს, $(n-k)!$ წევრს შეიცავს. მეორე მხრივ, ჩვენს მიერ არჩეულ სტრიქონებში მოთავსებული k რიგის მინორების რიცხვი n-დან k-ად აღებულ ჯგუფდებათა რიცხვის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

რიცხვის ტოლია.

გადამრავლებით მივიღებთ, რომ არჩეული სტრიქონებიდან აღებული k რიგის ყველა მინორის მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი $n!$ შესაკრებისაგან შედგება. მაგრამ, d დეტერმინანტის წევრთა საერთო რიცხვიც ასეთივეა. მაშასადამე, თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ d დეტერმინანტის ყოველი წევრი განხილულ მინორების მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამში ერთხელ მაინც შედის (და მაშინ მხოლოდ ერთხელ). ამისათვის მკითხველს რჩება წინათ ჩატარებული დამტკიცების მსჯელობების (ზოგიერთი გამარტივებით) შემოწმება.

ლაპლასის თეორემა საშუალებას გვაძლევს n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დავიყვანოთ k და $n-k$ რიგის რამდენიმე დეტერმინანტის გამოთვლამდე. საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ეს ახალი დეტერმინანტები საკმარისად ბევრი აღმოჩნდება, და ამიტომ ლაპლასის თეორემის გამოყენება მიზანშეწონილია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დეტერმინანტში k სტრიქონის (ან სვეტის) არჩევა ისეა შესაძლებელი, რომ ამ სტრიქონებში მოთავსებული k რიგის მინორებიდან ბევრი ნულის ტოლი იქნეს.

მაგალითები.

1. ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი, რომელშიაც პირველ k სტრიქონში და უკანასკნელ $n-k$ სვეტში მოთავსებული ყველა ელემენტი ნულის ტოლია:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} & \\ \cdot \;\cdot\; \vdots \;\cdot & 0 \\ a_{k1} \dots a_{kk} & \\ a_{k+1,\,1} \dots a_{k+1,\,k} & a_{k+1,\,k+1} \dots a_{k+1,\,n} \\ \cdot \;\cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot & \cdot \;\cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nk} & a_{n,\,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაშინ ეს დეტერმინანტი ორი თავისი მინორის ნამრავლის ტოლია:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \cdot \;\cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot \\ a_{k1} \dots a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1} \dots a_{k+1,\,n} \\ \cdot \;\cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot \\ a_{n,\,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია დეტერმინანტის პირველი **k** სტრიქონის მიმართ დაშლა.

2. ვთქვათ, მოცემულია $2n$ რიგის დეტერმინანტი, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში მთლიანად ნულებისაგან შედგენილი n რიგის მინორი დგას. თუ n-ური რიგის მინორები, რომლებიც დეტერმინანტის ზედა მარჯვენა, ქვედა მარცხენა და ქვედა მარჯვენა კუთხეებში დგანან, შესაბამისად აღნიშნული იქნებიან M, M' და M''-ით, ე. ი. დეტერმინანტი შეიძლება სიმბოლიურად $d=\begin{vmatrix} O & M \\ M' & M'' \end{vmatrix}$ სახით დავწეროთ, მაშინ $d=(-1)^n M M'$.

დამტკიცებისათვის დეტერმინანტი პირველ n სტრიქონის მიხედვით დავშალოთ და შევნიშნოთ, რომ

$$s_M=(1+2+\dots+n)+[(n+1)+(n+2)+\dots+2n]=n+2n^2,$$

ე. ი. s_M და n ერთი და იგივე ლუწკენტოვნებისაა.

3. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

თუ დავშლით მას პირველი და მესამე სვეტის მიხედვით, რომლებიც მოხერხებულად განლაგებულ ნულებს შეიცავენ, მივიღებთ:

$$d=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=(-8)\cdot(-20)-(-10)\cdot(-62)-7\,.\,87=-1069.$$

§ 7. კრამერის წესი

n-ური რიგის დეტერმინანტთა ზემოთ გადმოცემული თეორია საშუალებას გვაძლევს ვაჩვენოთ, რომ ეს დეტერმინანტები, რომლებიც მხოლოდ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების ანალოგიურად არიან შემოტანილი, უკანასკნელის მსგავსადვე შესაძლებელია წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნისათვის იქნან გამოყენებული, თუმცა, პირველ ყოვლისა, ერთი დამატებითი შენიშვნა უნდა მოვიყვანოთ, რომელიც დაკავშირებულია დეტერმინანტის სტრიქონის ან სვეტის მიხედვით დაშლასთან; ეს შენიშვნა შემდეგში არა ერთხელ იქნება გამოყენებული.

დეტერმინანტი

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

მისი j-ური სვეტის მიხედვით დავშალოთ:

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj},$$

ხოლო შემდეგ ამ დაშლაში j-ური სვეტის ელემენტები n ნებისმიერი $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვებით შევცვალოთ. გამოსახულება

$$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj},$$

რომელსაც მივიღებთ, მოიცემა, ცხადია, იმ

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots b_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots b_2 \cdots a_{2n} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{n1} \cdots b_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის j-ური სვეტის მიხედვით დაშლით, რომელიც d დეტერმინანტში j-ური სვეტის $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვთა სვეტით შეცვლითაა მიღებული. მართლაც, d დეტერმინანტის j-ური სვეტის შეცვლა გავლენას არ ახდენს ამ სვეტის ელემენტების მინორებზე და ამიტომ მათ ალგებრულ დამატებებზედაც.

გამოვიყენოთ ეს იმ შემთხვევისათვის, როცა $b_1, b_2, \ldots b_n$ რიცხვების სახით d დეტერმინანტის k სვეტის $k \neq j$ ელემენტებს ვიღებთ. დეტერმინანტი, რომელსაც ასეთნაირი შეცვლის შედეგად ვღებულობთ, ორ ერთნაირ (i-ურ და k-ურ) სვეტს შეიცავს და ამიტომ ნულის ტოლი იქნება. მაშასადამე, ამ დეტერმინანტის j-ური სვეტის მიხედვით დაშლაც ნულის ტოლია, ე. ი.

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = 0, \text{ როცა } i \neq j.$$

ამგვარად, დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის ყველა ელემენტის სხვა სვეტის შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია. ცხადია, ასეთივე შედეგი დეტერმინანტის სტრიქონებისათვისაცაა სამართლიანი.

გადავიდეთ წრფივ განტოლებათა სისტემების განხილვაზე, ამასთან ჯერჯერობით შემოვისაზღვროთ სისტემათა იმ შემთხვევით, როდესაც განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია, ე. ი. შემდეგი სახის სისტემებით:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

დამატებით ვიგულისხმოთ, რომ ამ სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი d დეტერმინანტი, რომელსაც მოკლედ **სისტემის დეტერმინანტი** ეწოდება, ნულისაგან განსხვავდება. ამ დაშვებებით დავამტკიცებთ, რომ (1) სისტემა თავსებადია და განსაზღვრულიც.

§ 2-ში, როცა სამუცნობიანი სამი განტოლების სისტემას ვხსნიდით, ყოველ განტოლებას რომელიღაც მამრავლზე ვამრავლებდით და შემდეგ ვკრებდით ამ განტოლებებს, რის შემდეგაც სამი უცნობიდან ორის კოეფიციენტი ნულის ტოლი გამოდიოდა. ახლა ადვილად აღმოვაჩენთ, რომ ის მამრავლები, რომლებსაც ვიყენებდით, სისტემის დეტერმინანტში იმ ელემენტების ალგებრული დამატებები იყვნენ, რომლებიც მოცემულ განტოლებებში შესაბამისად საძებნი უცნობების კოეფიციენტებს წარმოადგენენ. ახლა (1) სისტემის ამოხსნისათვის იგივე ხერხი იქნება გამოყენებული.

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ (1) სისტემა თავსებადია და $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ მისი ერთ-ერთი ამონახსენია. მაშასადამე, სამართლიანია ტოლობები

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n=b_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ვთქვათ, $1, 2, \ldots, n$ რიცხვებიდან j ნებისმიერია. (2) ტოლობებიდან პირველის ორივე მხარე A_{1j}-ზე გავამრავლოთ, ე. ი. სისტემის d დეტერმინანტის a_{1j} ელემენტის ალგებრულ დამატებაზე, მეორე ტოლობის ორივე მხარე A_{2j}-ზე გავამრავლოთ და ა. შ., დაბოლოს, უკანასკნელის ორივე მხარე გავამრავლოთ A_{nj}-ზე. შემდეგ, თუ ყველა ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს ცალ-ცალკე შევკრებთ, მივიღებთ ასეთ ტოლობას:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\ldots+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+ \\ &\quad+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\ldots+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+ \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+ \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\ldots+a_{nn}A_{nj})\alpha_n= \\ &\qquad\qquad=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}. \end{aligned}$$

ამ ტოლობაში α_j-ს კოეფიციენტი არის d, ყველა დანარჩენი α-ების კოეფიციენტები, ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად, ნულის ტოლია, ხოლო თავისუფალი წევრი ის დეტერმინანტია, რომელიც d დეტერმინანტისაგან მიიღება მასში j-ური სვეტის შეცვლით (1) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტით. თუ ამ უკანასკნელ დეტერმინანტს, როგორც § 2-ში, d_j-ით აღვნიშნავთ, მაშინ ჩვენი ტოლობა მიიღებს სახეს

$$d\alpha_j = d_j,$$

საიდანაც, რადგან $d \neq 0$,

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

ამით დამტკიცებულია, რომ თუ (1) სისტემა თავსებადია, მაშინ მას ერთადერთი ამონახსენი აქვს

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d},\ \ \alpha_2 = \frac{d_2}{d},\ \dots,\ \alpha_n = \frac{d_n}{d}. \tag{3}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (3) რიცხვთა სისტემა ნამდვილად (1) განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებს, ე. ი. რომ (1) სისტემა თავსებადია. ამასთან ჩვენ გამოვიყენებთ საყოველთაოდ მიღებულ შემდეგ სიმბოლიკას.

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ სახის ყოველი ჯამი შემოკლებით $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$-ით იქნება აღნიშნული. თუკი განიხილება ჯამი, რომლის a_{ij} შესაკრებებს ორი ინდექსი გააჩნიათ, ამასთან $i = 1, 2, \dots n,\ j = 1, 2, \dots, m$, მაშინ შეიძლება თავდაპირველად პირველი ინდექსით ფიქსირებული ელემენტების ჯამები ავიღოთ, ე. ი. $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$ ჯამები, სადაც $i = 1, 2, \dots, n$, ხოლო შემდეგ ყველა ეს ჯამი შევკრიბოთ. მაშინ ყველა a_{ij} ელემენტის ჯამისათვის შემდეგ ჩაწერას მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

თუმცა, შესაძლებელი იყო პირველად a_{ij} შესაკრებები შეგვეკრიბა ფიქსირებული მეორე ინდექსით, ხოლო შემდეგ უკვე მიღებული ჯამები შეგვეკრიბა. ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

ე. ი. ორმაგ ჯამში შესაძლებელია შეჯამებადობის რიგის შეცვლა.

ახლა (1) სისტემის i-ურ განტოლებაში უცნობთა (3) მნიშვნელობები ჩავსვათ. რადგანაც i-ური განტოლების მარცხენა მხარე $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ სახით შეიძლება ჩავწეროთ და ვინაიდან $d_j = \sum_{j=1}^{n} b_k A_{kj}$, ამიტომ მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right).$$

ამ გარდაქმნათა მიმართ შევნიშნოთ, რომ $\frac{1}{d}$ რიცხვი ყველა შესაკრების საერთო მამრავლი აღმოჩნდა და ამიტომ ის ჯამის ნიშნის გარეთ გამოვიტანეთ; გარდა ამისა, შეჯამებადობის რიგის შეცვლის შემდეგ b_k მამრავლი შიგა ჯამის ნიშნის გარეთაა გამოტანილი, რადგანაც ის შიგა ჯამის შეჯამებადობის j ინდექსისაგან დამოუკიდებელია.

ვიცით, რომ გამოსახულება $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn}$ ტოლია d-სი, როცა $k = i$, და ტოლია ნულისა—ყველა სხვა k-თვის. ამგვარად, გარე ჯამში k-ს მიმართ. მხოლოდ ერთი შესაკრები დარჩება, სახელდობრ, $b_i d$, ე. ი.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} b_i d = b_i.$$

ამით დამტკიცებულია, რომ (3) რიცხვთა სისტემა ნამდვილად (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენს წარმოადგენს.

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი შედეგი:

n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, ამონახსნი გაჩნია და ამასთან მხოლოდ ერთი. ეს ამონახსენი (3) ფორმულებით მიიღება, ე. ი. *კრამერის წესით*; ამ წესის ფორმულირება ისეთივეა, როგორიც ორი განტოლების სისტემის შემთხვევაში (ნახ. § 2).

მაგალითი. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემა.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27,$$

ამიტომ სისტემისათვის კრამერის წესი გამოსადეგია. უცნობთა მნიშვნელობებს მრიცხველებად ექნებათ დეტერმინანტები:

$$d_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81, \quad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27, \quad d_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27.$$

ამგვარად,

$$x_1=3, \; x_2=-4, \; x_3=-1, \; x_4=1$$

იქნება სისტემის ამონახსენი, ამასთან ერთადერთი.

ჩვენ განხილვიდან გამოვრიცხეთ ის შემთხვევა, როცა n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა (1) სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. ამ შემთხვევას მივაკუთვნებთ მე-2 თავს, სადაც ის თავის ადგილს იპოვის ნებისმიერი რაოდენობის უცნობებიან და ნებისმიერი რაოდენობის განტოლებებიან სისტემათა ზოგად თეორიაში.

n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის მიმართ კიდევ ერთი შენიშვნა გავაკეთოთ. ვთქვათ მოცემულია n უცნობიანი n ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა (ნახ. § 1):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ამ შემთხვევაში ყველა d_j, $j=1, 2, \ldots, n$, დეტერმინანტი ნულებისაგან შედგენილ სვეტს შეიცავს და ამიტომ ნულის ტოლია. ამგვარად, თუ (4) სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, ე. ი. თუ ამ სისტემისათვის კრამერის წესი გამოიყენება, მაშინ (4) სისტემის ერთადერთი ამონახსენი ნულოვანი ამონახსენი იქნება

$$x_1=0, \; x_2=0, \; \ldots, \; x_n=0.$$

აქედან ასეთი შედეგი გამომდინარეობს:

თუ n უცნობიან n ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას ნულოვანი ამონახსენისაგან განსხვავებული ამო-

ნახსენი გააჩნია, მაშინ ამ სისტემის დეტერმინანტი აუცი-ლებლად ნულის ტოლია.

პირიქით, § 12-ში ნაჩვენები იქნება, რომ თუ ასეთი სისტემის დეტერ-მინანტი ნულის ტოლია, მაშინ, გარდა ნულოვანი ამონახსენისა, რომლის არსებობა ყოველ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემისათვის ცხადია, მის-თვის სხვა ამონახსენებიც იარსებებს.

მაგალითი. k-ს რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია ნულოვანი ამონახსენი

$$\left.\begin{aligned} kx_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + kx_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

განტოლებათა სისტემას?

ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

ნულის ტოლი მხოლოდ $k = \pm 1$-თვის იქნება. ადვილი სანახავია, რომ k-ს ამ მნიშვნელობე-ბისათვის მოცემულ სისტემას ნამდვილად გააჩნია ნულოვანი ამონახსენისაგან განსხვავებული ამონახსენები.

კრამერის წესის მნიშვნელობა უმთავრესად იმაში მდგომარეობს, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ეს წესი გამოსადეგია, იგი სისტემის ამონახსენის ცხად გამოსახულებას ამ სისტემის კოეფიციენტების საშუალებით იძლევა. თუმცა კრამერის წესის პრაქტიკულად გამოყენება საკმარისად დიდ გამოთვ-ლებთან არის დაკავშირებული: n უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტე-მის შემთხვევაში საჭიროა n-ური რიგის $n+1$ დეტერმინანტის გამოთვლა. უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდი, რომელიც § 1-ში გადმოვე-ცით, ამ მხრივ ბევრად უფრო მოხერხებულია, რადგანაც ის გამოთვლა, რო-მელსაც ეს მეთოდი ითხოვს, არსებითად იმ გამოთვლის ტოლძალოვანია, რომელიც საჭიროა ერთი n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლისათვის.

სხვადასხვა გამოყენებებში გვხვდება წრფივ განტოლებათა სისტემები, რომელთა კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვებს, რომლებიც რომელიღაც ფიზიკური სიდიდეების გაზომვის შედე-გადაა მიღებული, ე. ი. მხოლოდ მიახლოებით, რაღაც სიზუსტით, არიან ცნობილი. ასეთი სისტემების ამოსახსნელად ზემოთ გადმოცემული მეთოდები ზოგჯერ მოუხერხებელი აღმოჩნდება, რადგანაც მათ ცუდი სიზუსტის შედე-გამდე მივყევართ, და ამიტომ მათ მაგივრად სხვადასხვა იტერაციული მეთოდებია დამუშავებული, ე. ი. მეთოდები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ აღნიშნული სისტემები უცნობთა მიმდევრობითი მიახლოების საშუალებით ამოვხსნათ. მკითხველი ამ მეთოდების გადმოცემას მიახლოებითი გამოთვლების თეორიის წიგნებში ნახავს.

ᲗᲐᲕᲘ ᲛᲔᲝᲠᲔ

ᲬᲠᲤᲘᲕ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲐᲗᲐ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲔᲑᲘ (ᲖᲝᲒᲐᲓᲘ ᲗᲔᲝᲠᲘᲐ)

§ 8. n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე

წრფივ განტოლებათა სისტემების ზოგადი თეორიის აგებისათვის აღარაა საკმარისი ის აპარატი, რომელიც ასე წარმატებით მოვიხმარეთ იმ სისტემების ამოხსნის დროს, რომლებისთვისაც დასაშვები იყო კრამერის წესის გამოყენება. დეტერმინანტებისა და მატრიცების გარდა ერთი ახალი ცნება უნდა გამოვიყენოთ, რომელიც, შესაძლებელია, უფრო დიდ ზოგად მათემატიკურ ინტერესს წარმოადგენდეს, სახელდობრ, *მრავალგანზომილებიანი ვექტორული სივრცის ცნება*.

დავიწყოთ რამდენიმე წინასწარი შენიშვნით. ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ სიბრტყის ყოველი წერტილი (მოცემული კოორდინატთა ღერძების მიმართ) თავისი ორი კოორდინატით განისაზღვრება, ე. ი. ორი ნამდვილი რიცხვის მოწესრიგებული სისტემით; ყოველი ვექტორი სიბრტყეზე თავისი ორი კომპონენტით განისაზღვრება, ე. ი. ისევ ორი ნამდვილი რიცხვის მოწესრიგებული სისტემით. ანალოგიურად, სამგანზომილებიანი სივრცის ყოველი წერტილი მისი სამი კოორდინატით განისაზღვრება, ყოველი ვექტორი სივრცეში — სამი კომპონენტით.

მაგრამ გეომეტრიაში, და ასევე მექანიკასა და ფიზიკაში, ხშირად ისეთი ობიექტების შესწავლა გვიხდება, რომელთა მოცემისათვის სამი ნამდვილი რიცხვი აღარ არის საკმარისი.

განვიხილოთ, მაგალითად, სამგანზომილებიან სივრცეში სფეროთა ერთობლიობა. იმისათვის, რომ სფერო მთლიანად იყოს განსაზღვრული, საჭიროა მისი ცენტრის კოორდინატებისა და რადიუსის მოცემა, ე. ი. ოთხი ნამდვილი რიცხვის მოწესრიგებული სისტემის მოცემა, რომელთაგან უკანასკნელს (რადიუსს) მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობების მიღება შეუძლია. განვიხილოთ, მეორე მხრივ, მყარი სხეულის სხვადასხვა მდებარეობა სივრცეში. სხეულის მდებარეობა სავსებით იქნება განსაზღვრული, თუ მოცემული იქნება მისი სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები (ე. ი. სამი ნამდვილი რიცხვი), რომელიღაც ფიქსირებული ღერძის მიმართულება, რომელიც სიმძიმის ცენტრზე გადის (ორი რიცხვი—სამი მიმმართველი კოსინუსიდან ორი) და, ბოლოს, ამ

ღერძის ირგვლივ მობრუნების კუთხე. ამგვარად, მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში ექვსი ნამდვილი რიცხვის მოწესრიგებული სისტემით განისაზღვრება.

ეს მაგალითები გვიჩვენებენ n ნამდვილ რიცხვთა ყოველგვარი მოწესრიგებული სისტემების ერთობლიობის განხილვის მიზანშეწონილობას. სწორედ ამ ერთობლიობას, მასში შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების შემოყვანის შემდეგ (რაც ქვემოთ გაკეთდება სამგანზომილებიანი სივრცის კომპონენტებით გამოსახულ ვექტორებისათვის ცნობილი შესაბამისი ოპერაციების ანალოგიურად), n- განზომილებიანი ვექტორული სივრცე ეწოდება. ამგვარად, n- განზომილებიანი სივრცე არის მხოლოდ ალგებრული წარმონაქმნი, რომელიც სამგანზომილებიანი სივრცის კოორდინატთა სათავიდან გამომავალ ვექტორთა ერთობლიობის ზოგიერთ უმარტივეს თვისებას ინარჩუნებს.

n რიცხვთა მოწესრიგებულ სისტემას

$$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

n- განზომილებიანი ვექტორი ეწოდება. a_i, $i=1, 2, \ldots, n$, რიცხვები α ვექტორის კომპონენტებად იწოდებიან. α და

$$\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{2}$$

ვექტორები ტოლებად ითვლება იმ შემთხვევაში, თუ ერთნაირ ადგილებზე მდგომი კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა, ე. ი. თუ $a_i=b_i$, როცა $i=$ $=1, 2, \ldots, n$. შემდეგში ვექტორთა აღსანიშნავად ბერძნული პატარა ასოები გამოიყენება, ხოლო რიცხვთა აღსანიშნავად—ლათინური პატარა ასოები.

ვექტორთა მაგალითებად მოვიყვანოთ შემდეგი: 1) კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყეზე ან სამგანზომილებიან სივრცეში გამომავალი მონაკვეთი—ვექტორები ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ შესაბამისად ორი და სამგანზომილებიანი ვექტორები იქნებიან ზემოთ მოცემული განმარტების აზრით, 2) ყოველი n უცნობიანი წრფივი განტოლების კოეფიციენტები n-განზომილებიან ვექტორებს წარმოადგენენ, 3) n უცნობიან წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემის ყოველი ამონახსენი n განზომილებიანი ვექტორი იქნება, 4) თუ s სტრიქონიანი და n- სვეტიანი მატრიცაა მოცემული, მაშინ მისი სტრიქონები n-განზომილებიანი ვექტორები იქნებიან, ხოლო სვეტები—განზომილებიანი ვექტორები, 5) თვით s სტრიქონისაგან და n სვეტისაგან შედგენილი მატრიცი შეიძლება განვიხილოთ როგორც sn-განზომილების ვექტორი: საკმარისია მატრიცის ელემენტები წავიკითხოთ სტრიქონიდან სტრიქონზე თანმიმდევრობით გადასვლით; კერძოდ, ყოველი n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი შეიძლება განვიხილოთ როგორც n^2- განზომილების ვექტორი, ამასთან, ცხადია, ყოველი n^2-განზომილების ვექტორი ამ გზით შეიძლება მივიღოთ რომელიღაც n რიგის მატრიციდან.

(1) და (2) ვექტორების ჯამი ეწოდება ვექტორს

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n), \tag{3}$$

რომლის კომპონენტები შესაკრები ვექტორების შესაბამისი კომპონენტების ჯამის ტოლია. რიცხვთა შეკრების კომუტატურობისა და ასოციაციურობის გამო, ვექტორთა შეკრებაც კომუტატურია და ასოციაციური.

ნულის როლს ნ უ ლ ო ვ ა ნ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი თამაშობს

$$0=(0, 0, \ldots, 0). \tag{4}$$

მართლაც,

$$\alpha+0=(a_1+0, a_2+0, \ldots, a_n+0)=(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\alpha.$$

ნულოვანი ვექტორის დაწერისათვის ვიყენებთ იმავე სიმბოლო 0-ს, რასაც ნულოვანი რიცხვისათვის; იმის გარკვევა, რომელიმე მოცემულ მომენტში ლაპარაკი ნული რიცხვის შესახებაა, თუ ნულოვანი ვექტორის შესახებ, არასოდეს სიძნელეს არ წარმოადგენს და ამიტომ მათი არევის საშიშროება არ იქნება. მიუხედავად ამისა, უახლოესი პარაგრაფების შესწავლისას მკითხველს უნდა ახსოვდეს 0 სიმბოლოს ამ სხვადასხვაგვარი გაგების შესაძლებლობის შესახებ.

(1) ვექტორის მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე ვ ე ქ ტ ო რ ი ვუწოდოთ ვექტორს

$$-\alpha=(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n). \tag{5}$$

ცხადია, რომ $\alpha+(-\alpha)=0$. ახლა ადვილი სანახავია, რომ ვექტორთა შეკრებისათვის არსებობს შებრუნებული ოპერაცია—გამოკლება: (1) და (2) ვექტორების ს ხ ვ ა ო ბ ა იქნება ვექტორი $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, ე. ი.

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n). \tag{6}$$

(3) ფორმულით განსაზღვრული n-განზომილებიანი ვექტორების შეკრება წარმოიშვა სიბრტყეზე ან სამგანზომილებიან სივრცეში პარალელოგრამის წესით შესრულებულ ვექტორთა გეომეტრიული შეკრებიდან. გეომეტრიაში გარდა ამისა გამოიყენება ვექტორის ნამდვილ რიცხვზე („სკალარ"-ზე) გამრავლება: α ვექტორის გამრავლება k რიცხვზე, როცა $k>0$, α-ს k-ჯერ გაჭიმვას ნიშნავს (ე. ი. შეკუმშვას, როცა $k<1$), ხოლო როცა $k<0$, მაშინ — $|k|$-ჯერ გაჭიმვას და მიმართულების მოპირდაპირე მიმართულებით შეცვლას. თუ ამ წესს α ვექტორის კომპონენტების საშუალებით გამოვსახავთ და ჩვენს მიერ განხილულ ზოგად შემთხვევაზე გადავალთ, შემდეგ განმარტებას მივიღებთ:

(1) ვ ე ქ ტ ო რ ი ს k რ ი ც ხ ვ ზ ე ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ე წ ო დ ე ბ ა ვ ე ქ ტ ო რ ს

$$k\alpha=\alpha k=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n), \tag{7}$$

რომლის კომპონენტები α ვექტორის შესაბამისი კომპონენტების k რიცხვზე ნამრავლის ტოლია.

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისებები, რომელთა დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ:

$$k(\alpha\pm\beta)=k\alpha\pm k\beta; \tag{8}$$

$$(k\pm l)\alpha=k\alpha\pm l\alpha; \tag{9}$$

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha; \tag{10}$$

$$1\cdot\alpha=\alpha. \tag{11}$$

ასევე ადვილად შემოწმდება შემდეგი თვისებები, რომლებიც შესაძლებელია მიღებულ იქნან როგორც (8)—(11) თვისებათა შედეგები:

$$0 \cdot \alpha = 0; \tag{12}$$

$$(-1) \cdot \alpha = -\alpha; \tag{13}$$

$$k \cdot 0 = 0; \tag{14}$$

$$\text{თუ } k\alpha = 0, \text{ მაშინ ან } k = 0, \text{ ან } \alpha = 0. \tag{15}$$

ნამდვილ კომპონენტებიან ყველა n-განზომილებიან ვექტორთა ერთობლიობას, რომელშიაც განმარტებულია ვექტორთა შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები, n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე ეწოდება.

ხაზი გავუსვათ იმას, რომ n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის განმარტებაში არავითარი გამრავლება ვექტორისა ვექტორზე არა გვაქვს. ვექტორთა გამრავლების განმარტება ადვილი იქნებოდა, თუ დავუშვებდით, მაგალითად, რომ ვექტორთა ნამრავლის კომპონენტები თანამამრავლთა შესაბამისი კომპონენტების ნამრავლის ტოლია. მაგრამ ასეთნაირი გამრავლება ჩვენთან ვერავითარ სერიოზულ გამოყენებას ვერ ნახავდა. ასე, მაგალითად, სიბრტყეზე ან სივრცეში კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი მონაკვეთი-ვექტორები ფიქსირებულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, ორგანზომილებიან და, შესაბამისად, სამგანზომილებიან ვექტორულ სივრცეებს შეადგენენ. ამ მაგალითში ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას, როგორც უკვე ზემოთაა აღნიშნული, მნიშვნელოვანი გეომეტრიული აზრი აქვს, იმ დროს როდესაც ვექტორთა კომპონენტობრივ გამრავლებას არავითარი გონივრული გეომეტრიული ახსნა არ შეიძლება მიეცეს.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი n უცნობიანი წრფივი განტოლებისა, ე. ი.

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

გამოსახულების მარცხენა მხარეს $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა წრფივი ფორმა ეწოდება. ცხადია, წრფივი ფორმა f სავსებით განისაზღვრება მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ვექტორით; პირიქით, ყოველი n-განზომილებიანი ვექტორი ცალსახად განსაზღვრავს რომელიღაც წრფივ ფორმას. ვექტორთა შეკრება და ვექტორის რიცხვზე გამრავლება წრფივ ფორმებზე შესაბამის ოპერაციებად იქცევიან. ამ ოპერაციებით ფართოდ ვსარგებლობდით § 1-ში. ვექტორთა კომპონენტობრივ გამრავლებას კი ამ მაგალითშიაც არა აქვს არავითარი აზრი.

§ 9. ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება

n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის β ვექტორს ეწოდება α ვექტორის პროპორციული, თუ არსებობს ისეთი k რიცხვი, რომ $\beta = k\alpha$ (იხ. წინა პარაგრაფის (7) ფორმულა). კერძოდ, $0 = 0 \cdot \alpha$ ტოლობის გამო, ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი α ვექტორის პროპორციულია. თუკი $\beta = k\alpha$

და $\beta \neq 0$, საიდანაც $k \neq 0$, მაშინ $\alpha = k^{-1}\beta$, ე. ი. არანულოვანი ვექტორებისათვის პროპორციულობას სიმეტრიულობის თვისება აქვს.

ვექტორთა პროპორციულობის ცნების განზოგადებას წარმოადგენს შემდეგი განმარტება, რომელსაც (მატრიცის სტრიქონებისათვის) ჩვენ უკვე § 4-ში შევხვდით: β ვექტორს ეწოდება $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ვექტორთა წ რ ფ ი ვ ი კ ო მ ბ ი ნ ა ც ი ა, თუ არსებობენ ისეთი $l_1, l_2, \ldots, l_s$ რიცხვები, რომ

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_s\alpha_s.$$

ამრიგად, β ვექტორის j-ური კომპონენტი, $j = 1, 2, \ldots, n$, ვექტორთა ჯამისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების განმარტების თანახმად, უდრის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ვექტორთა j-ური კომპონენტების შესაბამისად $l_1, l_2, \ldots, l_s$ რიცხვებზე ნამრავლთა ჯამს.

ვექტორთა

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r \quad (r \geqslant 2) \tag{1}$$

სისტემას ეწოდება წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი, თუ ერთი მაინც ამ ვექტორთაგანი არის (1) სისტემის დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია, და წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი — წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მივცეთ ამ მეტად მნიშვნელოვან განმარტებას სხვა ფორმა: ვექტორთა (1) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, თუ არსებობენ ისეთი $k_1, k_2, \ldots, k_r$ რიცხვები, რ ო მ ე ლ თ ა გ ა ნ ე რ თ ი მ ა ი ნ ც გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ ე ბ უ ლ ი ა ნ უ ლ ი ს ა გ ა ნ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r = 0. \tag{2}$$

ამ ორი განმარტების ექვივალენტობის დამტკიცება არ წარმოადგენს სიძნელეს. ვთქვათ, მაგალითად, რომ (1) სისტემის α_r ვექტორი არის დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია:

$$\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_{r-1}\alpha_{r-1}.$$

აქედან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_{r-1}\alpha_{r-1} - \alpha_r = 0,$$

ე. ი. (2) სახის ტოლობა, სადაც $k_i = l_i$, როცა $i = 1, 2, \ldots, r-1$, და $k_r = -1$, ე. ი. $k_r \neq 0$. პირიქით, ვთქვათ (1) სისტემის ვექტორები დაკავშირებული არიან (2) დამოკიდებულებით, რომელშიც, მაგალითად, $k_r \neq 0$. მაშინ

$$\alpha_r = \left(-\frac{k_1}{k_r}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k_r}\right)\alpha_2 + \ldots + \left(-\frac{k_{r-1}}{k_r}\right)\alpha_{r-1},$$

ე. ი. α_r ვექტორი აღმოჩნდა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვექტორთა

$$\alpha_1 = (5, 2, 1), \ \alpha_2 = (-1, 3, 3), \ \alpha_3 = (9, 7, 5), \ \alpha_4 = (3, 8, 7)$$

სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც ეს ვექტორები დაკავშირებული არიან

$$4\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$$

თანაფარდობით, რომელშიაც ყველა კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია, აღვნიშნოთ, რომ ამ ვექტორებს შორის არსებობენ სხვა წრფივი დამოკიდებულებებიც, რომლებშიაც ზოგი კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაგალითად

$$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0,\ 3\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=0.$$

წრფივად დამოკიდებულების ზემოთ ჩამოყალიბებული ორი განმარტებიდან მეორე გამოიყენება იმ შემთხვევაშიაც, როცა $r=1$, ე. ი. ისეთი სისტემისათვის, რომელიც მხოლოდ ერთი α ვექტორისაგან შედგება: ეს სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება წრფივად დამოკიდებული, როცა $\alpha=0$. მართლაც, თუ $\alpha=0$, მაშინ, მაგალითად როცა $k=1$, გვექნება: $k\alpha=0$. პირიქით, თუ $k\alpha=0$ და $k\neq 0$, მაშინ $\alpha=0$.

აღვნიშნოთ წრფივად დამოკიდებულების ცნების შემდეგი თვისება.

თუ ვექტორთა (1) სისტემის რომელიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ (1) სისტემაც წრფივად დამოკიდებულია.

მართლაც, ვთქვათ, რომ (1) სისტემის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ვექტორები, სადაც $s<r$, დაკავშირებული არიან

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$$

თანაფარდობით, რომელშიაც ყველა კოეფიციენტი არ უდრის ნულს. აქედან გამომდინარეობს დამოკიდებულება

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s+0\cdot\alpha_{s+1}+\ldots+0\cdot\alpha_r=0,$$

ე. ი. (1) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

ამ თვისებიდან გამომდინარეობს წრფივად დამოკიდებულება ორი ტოლი ან, საზოგადოდ, ორი პროპორციული ვექტორის შემცველ ვექტორთა ყოველი სისტემისა და აგრეთვე ყოველი სისტემისა, რომელიც შეიცავს ნულოვან ვექტორს. ზემოთ დამტკიცებულ თვისებას შეიძლება მივცეთ ასეთი ფორმულირებაც: თუ ვექტორთა (1) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მისი ნებისმიერი ქვესისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება.

იბადება კითხვა, რამდენად ბევრ ვექტორს შეიძლება შეიცავდეს n-განზომილებიან ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა და, კერძოდ, არსებობს თუ არა ასეთი სისტემები ვექტორთა ნებისმიერი რაოდენობით. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში შემდეგი ვექტორები:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1=(1,0,0,\ldots,0),\\ \varepsilon_2=(0,1,0,\ldots,0),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varepsilon_n=(0,0,0,\ldots,1),\end{array}\right\}\qquad(3)$$

რომელთაც ამ სივრცის ერთეულოვანი ვექტორები ეწოდება. ერთეულოვან ვექტორთა სისტემა იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. ვთქვათ

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\dots+k_n\varepsilon_n=0;$$

ვინაიდან ამ ტოლობის მარცხენა მხარე ტოლია $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ვექტორისა, ამიტომ

$$(k_1, k_2, \dots, k_n)=0,$$

ე. ი. $k_i=0$, $i=1, 2, \dots, n$, რადგან ნულოვანი ვექტორის ყველა კომპონენტი ნულია, ხოლო ვექტორთა ტოლობა შესაბამის კომპონენტთა ტოლობის ტოლფასია.

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ერთი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, რომელიც შეიცავს n ვექტორს, მკითხველი ქვემოთ ნახავს, რომ სინამდვილეში ამ სივრცეში არსებობს უსასრულოდ ბევრი სხვადასხვა ასეთი სისტემა.

მეორე მხრივ, დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ყოველი s ვექტორი, სადაც $s>n$, შეადგენს წრფივად დამოკიდებულ სისტემას.

მართლაც, ვთქვათ მოცემული გვაქვს ვექტორები:

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\\ \alpha_2&=(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_s&=(a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}).\end{aligned}$$

ჩვენ უნდა შევარჩიოთ ისეთი $k_1, k_2, \dots, k_s$ რიცხვები, რომელთაგან ყველა არ არის ნულის ტოლი, რომ

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_s\alpha_s=0. \tag{4}$$

თუ (4) ტოლობიდან გადავალთ შესაბამის ტოლობებზე კომპონენტებს შორის, მაშინ გვექნება:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\dots+a_{s1}k_s&=0,\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\dots+a_{s2}k_s&=0,\\ \dots\dots\dots\dots&\dots\\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\dots+a_{sn}k_s&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

მაგრამ (5) ტოლობები წარმოადგენს n წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას s რაოდენობის $k_1, k_2, \dots, k_s$ უცნობთა მიმართ. ამ სისტემაში განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, და ამიტომ, როგორც ეს დამტკიცებულია § 1-ში, ამ სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნები. მაშასადამე, შეიძლება შეირჩეს ისეთი $k_1, k_2, \dots, k_s$ რიცხვები, რომელთაგანაც ყველა არ არის ნულის ტოლი, რომ დაკმაყოფილდეს (4) მოთხოვნილება. თეორემა დამტკიცებულია.

n-განზომილებიან ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{6}$$

სისტემას ვუწოდოთ *მაქსიმალური* წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, თუ მას ნებისმიერი n-განზომილებიანი β ვექტორის დამატება გადააქცევს წრფივად დამოკიდებულ სისტემად. რადგან $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta$ ვექტორთა ყოველ წრფივ დამოკიდებულებაში β-სთან მდგომი კოეფიციენტი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში (6) სისტემა იქნებოდა წრფივად დამოკიდებული, ამიტომ β ვექტორი წრფივად გამოისახება (6) ვექტორების საშუალებით, რის გამოც ვექტორთა (6) სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, როცა (6) ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი არის, ხოლო ნებისმიერი n-განზომილებიანი β ვექტორი მათ წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს.

ზემოთ მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ *n-განზომილებიან სივრცეში n ვექტორისაგან შემდგარი ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა იქნება მაქსიმალური და, აგრეთვე, რომ ამ სივრცის ვექტორთა ნებისმიერი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა არა უმეტეს n ვექტორისაგან შედგება.*

n-განზომილებიან ვექტორთა ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა შედის ერთ მაინც მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემაში. მართლაც, თუ ვექტორთა მოცემული სისტემა არ არის მაქსიმალური, მაშინ მას შეიძლება დავუმატოთ ერთი ვექტორი ისე, რომ მიღებული სისტემა დარჩეს წრფივად დამოუკიდებელი. თუ ეს ახალი სისტემა კვლავ არ არის მაქსიმალური, მაშინ მას შეიძლება დავუმატოთ კიდევ ერთი ვექტორი და ა. შ. მაგრამ, ეს პროცესი არ შეიძლება გაგრძელდეს უსასრულოდ, იმიტომ, რომ n-განზომილებიან ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა, $n+1$ ვექტორისაგან შემდგარი, უკვე წრფივად დამოკიდებული იქნება.

ვინაიდან ყოველი სისტემა, რომელიც მხოლოდ ერთი არანულოვანი ვექტორისაგან შედგება, წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ, *ყოველი არანულოვანი ვექტორი შედის რომელიმე მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემაში და, მაშასადამე, n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში არსებობს უსასრულოდ ბევრი სხვადასხვა მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემები.*

იბადება კითხვა, არსებობს თუ არა ამ სივრცეში n რიცხვზე ნაკლებ ვექტორთა შემცველი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემები, თუ ნებისმიერ ასეთ სისტემაში ვექტორთა რიცხვი აუცილებლად n-ის ტოლია? ამ მნიშვნელოვან კითხვაზე პასუხი ქვემოთ იქნება გაცემული ზოგი წინასწარი განხილვის შემდეგ.

თუ β ვექტორი არის

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{7}$$

ვექტორთა წრფივი კომბინაცია, მაშინ ხშირად ამბობენ, რომ β წრფივად გამოისახება (7) სისტემის საშუალებით. გასაგებია, რომ თუ β ვექტორი წრფივად გამოისახება ამ სისტემის რომელიმე ქვესისტემით, მაშინ ის წრფივად გამოისახება თვით (7) სისტემითაც—საკმარისია დანარჩენი ვექტორები ავიღოთ ნულის ტოლი კოეფიციენტებით. განაზოგადებენ რა ამ ტერმინოლოგიას, ამბობენ, რომ

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \tag{8}$$

ვექტორთა სისტემა წრფივად გამოისახება (7) სისტემით, თუ ყოველი β_i ვექტორი, $i=1, 2, \ldots, s$, წარმოადგენს (7) სისტემის ვექტორთა წრფივ კომბინაციას.

დავამტკიცოთ ამ ცნების ტრანზიტულობა: თუ (8) სისტემა წრფივად გამოისახება (7) სისტემით, ხოლო

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t \tag{9}$$

ვექტორთა სისტემა წრფივად გამოისახება (8) სისტემით, მაშინ (9) წრფივად გამოისახება (7)-ითაც.

მართლაც,

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji} \beta_i, \quad j=1, 2, \ldots, t, \tag{10}$$

მაგრამ $\beta_i = \sum_{m=1}^{r} k_{im} \alpha_m$, $i=1, 2, \ldots, s$. თუ ჩავსვამთ ამ გამოსახულებებს (10)-ში, მივიღებთ:

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji} \left(\sum_{m=1}^{r} k_{im} \alpha_m \right) = \sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{s} l_{ji} k_{im} \right) \alpha_m,$$

ე. ი. ყოველი γ_j ვექტორი, $j=1, 2, \ldots, t$, (7) სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა.

ვექტორთა ორ სისტემას ეწოდება ექვივალენტური, თუ თვითეული მათგანი წრფივად გამოისახება მეორის საშუალებით. ახლახან დამტკიცებული დებულებიდან ვექტორთა სისტემების ერთიმეორის საშუალებით წრფივად გამოსახვის ტრანზიტულობის შესახებ გამომდინარეობს ვექტორთა სისტემების ექვივალენტობის ცნების ტრანზიტულობა და აგრეთვე შემდეგი დებულება: თუ ვექტორთა ორი სისტემა ექვივალენტურია და თუ რაიმე ვექტორი წრფივად გამოისახება ერთ-ერთი ამ სისტემის საშუალებით, მაშინ ის წრფივად გამოისახება მეორე სისტემის საშუალებითაც.

თუ ვექტორთა ორი, ერთიმეორის ექვივალენტური სისტემიდან ერთი რომელიმე წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ ვერ ვიტყვით, რომ მეორეც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება. თუ ორივე სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათში შემავალ ვექტორთა რაოდენობაზე შეიძლება გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. დავამტკიცოთ ჯერ შემდეგი თეორემა, რო-

მელსაც მისი როლის გამო შემდგომ და აგრეთვე დამოწმების გასაადვილებლად **ძირითადი თეორემა** ვუწოდოთ.

თუ n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში მოცემულია ვექტორთა ორი სისტემა:

$$\text{(I)} \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r,$$

$$\text{(II)} \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s,$$

რომელთაგან პირველი წრფივად დამოუკიდებელია და წრფივად გამოისახება მეორის საშუალებით, მაშინ ვექტორთა რიცხვი პირველ სისტემაში არ არის მეტი, ვიდრე მეორეში, ე. ი. $r \leqslant s$.

ვთქვათ, მართლაც, რომ $r > s$. პირობის თანახმად, (I) სისტემის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება (II) სისტემით:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1s}\beta_s, \\
\alpha_2 = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2s}\beta_s, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_r = a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + \ldots + a_{rs}\beta_s.
\end{array}\right\} \qquad (11)$$

ამ წრფივ გამოსახულებათა კოეფიციენტები შეადგენენ s განზომილებიან r ვექტორთა სისტემას:

$$\begin{array}{l}
\gamma_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1s}), \\
\gamma_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2s}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rs}).
\end{array}$$

რადგანაც $r > s$, ამიტომ ეს ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, ე. ი.

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_r\gamma_r = 0,$$

სადაც $k_1, k_2, \ldots k_r$ კოეფიციენტებიდან ყველა არ არის ნულის ტოლი. აქედან გამომდინარე, ჩვენ ვღებულობთ კომპონენტებს შორის შემდეგ ტოლობებს:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (12)$$

ახლა განვიხილოთ (I) სისტემის ვექტორთა შემდეგი წრფივი კომბინაცია:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r$$

ან, მოკლედ, $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i$. თუ გამოვიყენებთ (11) და (12)-ს, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\beta_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} \right) \beta_j = 0;$$

ეს კი (I) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას ეწინააღმდეგება.

ახლახან დამტკიცებულ ძირითადი თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი:

ყოველი ორი ექვივალენტური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა შეიცავს ვექტორთა ტოლ რაოდენობას.

ცხადია, რომ n განზომილებიან ვექტორთა ნებისმიერი ორი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა ექვივალენტური იქნება. მაშასადამე, ისინი შეიცავენ ვექტორთა თანაბარ რაოდენობას და, რადგანაც ჩვენთვის ცნობილია, რომ არსებობენ ასეთი სახის n ვექტორისაგან შემდგარი სისტემები, ამიტომ ჩვენ, დაბოლოს, პასუხს ვღებულობთ ზემოთ დასმულ კითხვაზე: *n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ყოველი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა n ვექტორისაგან შედგება.*

მიღებული დებულებებიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ სხვა შედეგებიც.

თუ ვექტორთა მოცემულ წრფივად დამოკიდებულ სისტემაში აღებულია ორი მასში მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა, ე. ი. ორი ისეთი ქვესისტემა, რომლებსაც არ შეიძლება დავუმატოთ ჩვენი სისტემის არც ერთი ვექტორი ისე, რომ არ დაირღვეს წრფივად დამოუკიდებლობა, მაშინ ეს ქვესისტემები შეიცავენ ვექტორთა ტოლ რაოდენობას.

მართლაც, თუ

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \qquad (13)$$

ვექტორთა სისტემაში

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \ s<r, \qquad (14)$$

ქვესისტემა იქნება მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი, მაშინ ყოველი ვექტორი $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ ვექტორებიდან წრფივად გამოისახება (14) სისტემით. მეორე მხრივ, ყოველი α_i ვექტორი (13) სისტემიდან წრფივად გამოისახება ამ სისტემით: საკმარისია ავიღოთ თითონ α_i-ს კოეფიციენტი 1-ის ტოლი, ხოლო სისტემის ყველა სხვა ვექტორთა კოეფიციენტები—0-ის ტოლი. ახლა ადვილი შესამჩნევია, რომ (13) და (14) სისტემები ექვივალენტურია. აქედან გამომდინარეობს, რომ (13) სისტემა მასში შემავალი ყოველი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემის ექვივალენტურია და, ამიტომ, ყველა ეს ქვესისტემა ერთიმეორის ექვივალენტურიც იქნება, ე. ი. არიან რა წრფივად დამოუკიდებელი, ისინი შეიცავენ ერთი და იგივე რაოდენობის ვექტორებს.

ვექტორთა მოცემული სისტემის ნებისმიერ მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ქვესისტემაში შემავალ ვექტორთა რიცხვს ამ სისტემის *რანგი* ეწოდება. თუ გამოვიყენებთ ამ ცნებას, მაშინ ძირითადი თეორემიდან შეგვიძლია მივიღოთ კიდევ ერთი დასკვნა.

ვთქვათ მოცემულია n-განზომილებიან ვექტორთა ორი არა აუცილებლად წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \qquad (15)$$

და

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \qquad (16).$$

და ვთქვათ, რომ (15) სისტემის რანგი ტოლია k რიცხვისა, ხოლო (16) სისტემის რანგი—l რიცხვისა. თუ პირველი სისტემა წრფივად გამოისახება მეორეთი, მაშინ $k \leqslant l$, ხოლო თუ ეს სისტემები ექვივალენტურია, მაშინ $k=l$.

მართლაც, ვთქვათ

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k} \qquad (17)$$

და

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_l} \qquad (18)$$

არიან შესაბამისად (15) და (16) სისტემების ნებისმიერი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემები. მაშინ (15) და (17) სისტემები ურთიერთ ექვივალენტურნი არიან. იგივე სამართლიანია (16) და (18) სისტემებისათვისაც. იქიდან, რომ (15) სისტემა წრფივად გამოისახება (16) სისტემით, გამომდინარეობს, რომ (17) სისტემა წრფივად გამოისახება (16) სისტემით და, ამიტომ, მისი ექვივალენტური (18) სისტემითაც, რის შემდეგაც, თუ გავითვალისწინებთ (17) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ძირითადი თეორემა. დასამტკიცებელი დებულების მეორე ნაწილი უშუალოდ გამომდინარეობს პირველისაგან.

§ 10. მატრიცის რანგი

თუ მოცემულია n-განზომილებიან ვექტორთა რაიმე სისტემა, მაშინ იბადება ბუნებრივი კითხვა, არის თუ არა ვექტორთა ეს სისტემა წრფივად დამოკიდებული. არ უნდა ვივარაუდოთ, რომ ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა ადვილი იყოს. მაგალითად, ერთი თვალის გადავლებით ძნელია

$$\alpha=(2, -5, 1, -1),\ \beta=(1, 3, 6, 5),\ \gamma=(-1, 4, 1, 2)$$

ვექტორთა სისტემას შევამჩნიოთ რაიმე წრფივი დამოკიდებულებანი, თუმცა, სინამდვილეში, ეს ვექტორები დაკავშირებულნი არიან შემდეგი თანაფარდობით:

$$7\alpha-3\beta+11\gamma=0.$$

ამ საკითხის გადაწყვეტისათვის ერთ მეთოდს § 1 გვაძლევს; რადგანაც ჩვენთვის ცნობილია მოცემულ ვექტორთა კომპონენტები, ამიტომ, თუ უცნობებად მივიღებთ საძებნ წრფივად დამოკიდებულებათა კოეფიციენტებს, გვექნება წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, რომელსაც გაუსის მეთოდით ამოვხსნით. ამ პარაგრაფში განსახილველი საკითხის გადასაწყვეტად მოცემული იქნება სხვა გზა; ერთდროულად ჩვენ საგრძნობლად მივუახლოვდებით ჩვენს ძირითად მიზანსაც—ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემა.

ვთქვათ, მოცემულია მატრიცი

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

რომელიც შეიცავს s სტრიქონს და n სვეტს, ამასთან n და s რიცხვები არაფრით არ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. ამ მატრიცის სვეტები, თუ მათ განვიხილავთ როგორც s განზომილებიან ვექტორებს, საზოგადოდ შეიძლება იყვნენ წრფივად დამოკიდებულნი. სვეტთა სისტემის რანგს, ე. ი. A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს (უფრო ზუსტად, იმ სვეტების რიცხვს, რომლებიც შედიან სვეტთა სისტემის ნებისმიერ მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ქვესისტემაში), ეწოდება ამ მატრიცის *რანგი*.

გასაგებია, რომ, ასევე, A მატრიცის სტრიქონები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც n განზომილებიანი ვექტორები. თურმე მატრიცის სტრიქონთა სისტემის რანგი უდრის სვეტთა სისტემის რანგს, ე. ი. უდრის ამ მატრიცის რანგს. ეს მეტად მოულოდნელი დებულება მიღებული იქნება მას შემდეგ, რაც ჩვენ მივუთითებთ მატრიცის რანგის განსაზღვრის კიდევ ერთ ფორმაზე, რომელიც, ამავე დროს, მოგვცემს მატრიცის რანგის პრაქტიკული გამოთვლის ხერხს.

განვაზოგადოთ ჯერ მინორის ცნება სწორკუთხოვანი მატრიცებისათვის. ამოვირჩიოთ A მატრიცის ნებისმიერი k სტრიქონი და k სვეტი, $k \leqslant \min(s, n)$. ამ სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთის ადგილებზე მდებარე ელემენტები შეადგენენ k-*ური რიგის* კვადრატულ მატრიცს, რომლის დეტერმინანტსაც ეწოდება A მატრიცის k-*ური რიგის მინორი*. შემდეგში ჩვენ დავინტერესდებით მატრიცის იმ მინორების რიგებით, რომლებიც განსხვავებულნი არიან ნულისაგან და, სახელდობრ, *ამ რიგთა შორის უდიდესით*. მისი ძიებნის დროს სასარგებლოა გავითვალისწინოთ შემდეგი შენიშვნა: *თუ A მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორი ნულის ტოლია, მაშინ ნულის ტოლია ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორიც.* მართლაც, თუ ლაპლასის თეორემის საფუძველზე ყოველი $k+j$-ური რიგის, $k < k+j \leqslant \min(s, n)$, მინორს დავშლით ნებისმიერ k სტრიქონის მიხედვით, მაშინ ამ მინორს წარმოვადგენთ k რიგის მინორთა რომელიმე j რიგის მინორებზე ნამრავლთა ჯამის სახით და ამით დავამტკიცებთ, რომ იგი უდრის ნულს.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა *მატრიცის რანგის* შესახებ:

A მატრიცის ნულისაგან განსხვავებულ მინორთა უმაღლესი რიგი უდრის ამ მატრიცის რანგს.

დამტკიცება. ვთქვათ A მატრიცის ნულისაგან განსხვავებულ მინორთა უმაღლესი რიგი არის r. ვიგულისხმოთ,— ეს არ შეზღუდავს დამტკიცების ზოგადობას— რომ r-ური რიგის D მინორი, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან, $D \neq 0$, მოთავსებულია

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} & a_{1,r+1} \dots a_{1n} \\ \dots D \dots & \dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} & a_{r,r+1} \dots a_{rn} \\ a_{r+1,1} \dots a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \dots a_{r+1,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{s1} \dots a_{sr} & a_{s,r+1} \dots a_{sn} \end{vmatrix}$$

მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეში. მაშინ A მატრიცის პირველი r სვეტი იქნება ერთმანეთის მიმართ წრფივად დამოუკიდებელი: მათ შორის რომ არსებობდეს წრფივი დამოკიდებულება, მაშინ, რადგანაც ვექტორების შეკრების დროს იკრიბება შესაბამისი კომპონენტები, D მინორის სვეტებს შორისაც იარსებებდა იგივე წრფივი დამოკიდებულება და ამიტომ D მინორი იქნებოდა ნულის ტოლი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ A მატრიცის ყოველი l-ური სვეტი, $r<l\leqslant n$, იქნება პირველ r სვეტთა წრფივი კომბინაცია. ავიღოთ ნებისმიერი i, $1\leqslant i\leqslant s$, და შევადგინოთ $r+1$ რიგის დამხმარე დეტერმინანტი

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r}\, a_{1l} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr}\, a_{rl} \\ a_{i1} \dots a_{ir}\, a_{il} \end{vmatrix},$$

რომელიც მიიღება D მინორის „მოარშიებით" l-ური სვეტისა და i-ური სტრიქონის შესაბამისი ელემენტებით. ნებისმიერი i-სათვის Δ_i დეტერმინანტი უდრის ნულს. მართლაც, თუ $i>r$, მაშინ Δ_i იქნება A მატრიცის $(r+1)$ რიგის მინორი და ამიტომ, r რიცხვის არჩევის გამო, იგი უდრის ნულს. თუკი $i\leqslant r$, მაშინ Δ_i უკვე აღარ იქნება A მატრიცის მინორი, რადგან მას ვეღარ მივიღებთ ამ მატრიციდან რომელიმე სტრიქონისა და სვეტის ამოშლით; მაგრამ Δ_i დეტერმინანტი ახლა შეიცავს ორ ტოლ სტრიქონს და, მაშასადამე, ისევ უდრის ნულს.

განვიხილოთ Δ_i დეტერმინანტის უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტთა ალგებრული დამატებები. a_{il} ელემენტის ალგებრული დამატება, ცხადია, იქნება D მინორი. თუ $1\leqslant j\leqslant r$, მაშინ a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება Δ_i-ში იქნება რიცხვი

$$A_j = (-1)^{(r+1)+j} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,j-1}\, a_{1,j+1} \dots a_{1r}\, a_{1l} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{r,j-1},\, a_{r,j+1} \dots a_{rr}\, a_{rl} \end{vmatrix};$$

ეს რიცხვი არ არის დამოკიდებული i-ზე და ამიტომ აღნიშნულია A_j-თი. ამგვარად, თუ დავშლით Δ_i დეტერმინანტს მისი უკანასკნელი სტრიქონის მიხედვით და ამ დაშლას გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ, რადგან $\Delta_i=0$, რომ

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0,$$

საიდანაც, იმის გამო, რომ $D \neq 0$, ვღებულობთ

$$a_{il} = -\frac{A_1}{D}a_{i1} - \frac{A_2}{D}a_{i2} - \dots - \frac{A_r}{D}a_{ir}.$$

ეს ტოლობა სამართლიანია i-ს ყველა მნიშვნელობისათვის, $i = 1, 2, \dots, s$, და რადგანაც ამ ტოლობის კოეფიციენტები i-ზე არ არიან დამოკიდებული, ამიტომ ვღებულობთ, რომ A მატრიცის მთელი l-ური სვეტი იქნება მის პირველ r სვეტთა ჯამი, აღებული, შესაბამისად,

$$-\frac{A_1}{D}, -\frac{A_2}{D}, \dots, -\frac{A_r}{D}$$

კოეფიციენტებით.

ამრიგად, A მატრიცის სვეტთა სისტემაში ვიპოვეთ r სვეტისაგან შემდგარი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა, რითაც დამტკიცებულია, რომ A მატრიცის რანგი უდრის r-ს, ე. ი. დამტკიცებულია თეორემა რანგის შესახებ.

ეს თეორემა იძლევა მატრიცის რანგის პრაქტიკულად გამოთვლის მეთოდს და ამიტომ ხსნის საკითხს ვექტორთა მოცემულ სისტემაში წრფივად დამოკიდებულების არსებობის შესახებ. თუ შევადგენთ მატრიცს, რომლისათვისაც მოცემული ვექტორები იქნებიან სვეტები, და გამოვთვლით მის რანგს, მაშინ ვიპოვით სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალურ რიცხვს.

მატრიცის რანგის პოვნის მეთოდი, რომელიც დამყარებულია თეორემაზე რანგის შესახებ, მოითხოვს ამ მატრიცის, მართალია, სასრულ, მაგრამ საკმაოდ ბევრი მინორის გამოთვლას. მეორე მხრივ, შემდეგი შენიშვნა საშუალებას იძლევა შევიტანოთ ამ მეთოდში მნიშვნელოვანი გამარტივებანი. თუ მკითხველი ერთხელ კიდევ გადახედავს რანგის შესახებ დამტკიცებულ თეორემას, შეამჩნევს, რომ მასში არ არის გამოყენებული A მატრიცის ყველა $(r+1)$-ური რიგის მინორის ნულთან ტოლობის პირობა — სინამდვილეში გამოყენებულია მხოლოდ ის $(r+1)$-ური რიგის მინორები, რომლებიც მოაარშიებენ მოცემულ ნულისაგან განსხვავებულ r რიგის D მინორს (ე. ი. შეიცავენ მას მთლიანად თავის შიგნით), და ამიტომ მარტო ამ მინორთა ნულთან ტოლობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ r არის A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა მაქსიმალური რიცხვი; უკანასკნელიდან კი გამომდინარეობს, რომ ამ მატრიცის ყველა $(r+1)$ რიგის მინორია ნულის ტოლი. მივიღეთ *მატრიცის რანგის გამოთვლის* შემდეგი წესი:

მატრიცის რანგის გამოთვლის დროს საჭიროა გადავიდეთ დაბალი რიგის მინორებიდან მაღალი რიგის მინორებზე. თუ უკვე ნაპოვნია ნულისგან განსხვავებული k-ური რიგის D მინორი, მაშინ გამოთვლას მოითხოვენ მხოლოდ D მინორის მომმარშიებელი $(k+1)$ რიგის მინორები: თუ ისინი ნულის ტოლი არიან, მაშინ მატრიცის რანგი არის k.

მაგალითები:

1. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი.

ამ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში მდებარე მეორე რიგის მინორი ნულის ტოლია. მაგრამ მატრიცი შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ მეორე რიგის მინორებსაც, მაგალითად

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

მესამე რიგის მინორი

$$d'=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

რომელიც მოამარშიებს d მინორს, განსხვავებულია ნულისაგან, $d'=1$, მაგრამ d' მინორის მომმარშიებელი ორივე მეოთხე რიგის მინორი ნულის ტოლია:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

ამრიგად, A მატრიცის რანგი უდრის სამს.

2. ვიპოვოთ

$$\alpha_1=(2, -2, -4),\ \alpha_2=(1, 9, 3),\ \alpha_3=(-2, -4, 1),\ \alpha_4=(3, 7, -1)$$

ვექტორთა სისტემაში მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა.

შევადგინოთ მატრიცი

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

რომლისთვისაც მოცემული ვექტორები წარმოადგენენ სვეტებს. ამ მატრიცის რანგი უდრის ორს, მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებული მეორე რიგის მინორი არ უდრის ნულს, მაგრამ მისი მომმარშიებელი ორივე მესამე რიგის მინორი ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემულ სისტემაში α_1 და α_2 ვექტორები შეადგენენ ერთ-ერთ მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ქვესისტემას.

როგორც შედეგი თეორემისა მატრიცის რანგის შესახებ, დავამტკიცოთ ჩვენ მიერ ადრე ჩამოყალიბებული დებულება:

ყოველი მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალური რიცხვი უდრის მის წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა მაქსიმალურ რიცხვს, ე. ი. უდრის ამ მატრიცის რანგს.

ამის დასამტკიცებლად მოვახდინოთ მატრიცის ტრანსპონირება, ე. ი. მისი სტრიქონები ვაქციოთ სვეტებად მათი ნუმერაციის შენარჩუნებით.

ტრანსპონირების დროს მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული მინორების მაქსიმალური რიგი არ შეიძლება შეიცვალოს, რადგან ტრანსპონირება დეტერმინანტს არ ცვლის, ხოლო გამოსავალი მატრიცის ყოველი მინორისათვის, მინორი, რომელიც მიიღება მისი ტრანსპონირებით, შედის ახალ მატრიცაში და პირიქით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ახალი მატრიცის რანგი საწყისი მატრიცის რანგის ტოლია; იგი, ამავე დროს, ტოლია ახალი მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სვეტთა მაქსიმალური რიცხვისა, ანუ საწყისი სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ *სტრიქონთა* მაქსიმალური რიცხვისა.

მაგალითი. § 8-ში უკვე შემოტანილი იყო n უცნობიანი წრფივი ფორმის ცნება; ასევე განმარტებული იყო წრფივ ფორმათა შეკრება და მათი გამრავლება რიცხვზე. ეს განმარტება საშუალებას გვაძლევს გადავიტანოთ წრფივად დამოკიდებულების ცნება, მთელი თავისი თვისებებით, წრფივ ფორმებზეც. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წრფივ ფორმათა სისტემა

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4, \\ f_2 &= 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4, \\ f_3 &= x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4, \\ f_4 &= 2x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

საჭიროა გამოვყოთ მასში მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა. შევადგინოთ ამ ფორმების კოეფიციენტებისაგან მატრიცი

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

და ვიპოვოთ მისი რანგი. ზედა მარცხენა კუთხეში მდებარე მეორე რიგის მინორი განსხვავებულია ნულისაგან, მაგრამ ადვილი სანახავია, რომ მისი მომმარშიებელი მესამე რიგის ორივე მინორი ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ მატრიცის პირველი ორი სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო მესამე და მეოთხე სტრიქონები წარმოადგენენ მათ წრფივ კომბინაციას. მაშასადამე, f_1, f_2 სისტემა იქნება წრფივ ფორმათა მოცემული სისტემის საძებნი ქვესისტემა.

მივუთითოთ კიდევ მნიშვნელოვან შედეგზე თეორემისა მატრიცის რანგის შესახებ.

n-ური რიგის დეტერმინანტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, თუ მის სტრიქონებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. ამ დებულების ერთი ნაწილი უკვე დამტკიცებულია § 4-ში (თვისება 8). ვთქვათ, ახლა, მოცემული გვაქვს n-ური რიგის დეტერმინანტი, რომელიც უდრის ნულს, ე. ი., სხვანაირად რომ ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი, რომლის ერთადერთი მაქსიმალური რიგის მქონე მინორი უდრის ნულს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ამ მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული მინორების მაქსიმალური რიგი ნაკლებია n-ზე, ე. ი. რანგი ნაკლებია n-ზე და, ამიტომ, ზემოთ დამტკიცებულის საფუძველზე, ამ მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია.

გასაგებია, რომ ახლახან დამტკიცებული შედეგის ფორმულირებაში სტრიქონების ნაცვლად შეგვიძლია ვილაპარაკოთ დეტერმინანტის სვეტებზეც.

მატრიცის რანგის გამოსათვლელად არსებობს კიდევ ერთი მეთოდი, რომელიც არ არის დაკავშირებული თეორემასთან მატრიცის რანგის შესახებ და არც დეტერმინანტების გამოთვლას მოითხოვს. თუმცა იგი გამოიყენება მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როდესაც ჩვენ გვაინტერესებს თვითონ რანგი და არ ვეძებთ რომელი სტრიქონები (ან სვეტები) შეადგენენ მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. გადმოვცეთ ეს მეთოდი.

მატრიცის ელემენტარულ გარდაქმნებად იწოდებიან ამ მატრიცის შემდეგი გარდაქმნები:

(ა) ორი სტრიქონის ან ორი სვეტის ადგილების შეცვლა (ტრანსპოზიცია);

(ბ) სტრიქონის (ან სვეტის) გამრავლება ნებისმიერ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე;

(ც) რომელიმე სტრიქონისადმი (ან სვეტისადმი) რაიმე რიცხვზე გამრავლებული სხვა სტრიქონის (ან სვეტის) მიმატება.

ადვილი სანახავია, რომ ელემენტარული გარდაქმნები არ ცვლიან მატრიცის რანგს. მართლაც, თუ ეს გარდაქმნები გამოიყენება მატრიცის, მაგალითად, სვეტების მიმართ, მაშინ სვეტთა სისტემა, თუ განვიხილავთ მათ როგორც ვექტორებს, იცვლება ექვივალენტური სისტემით. დავამტკიცოთ ეს მხოლოდ (ც) გარდაქმნისათვის, რადგან (ა) და (ბ)-სთვის ეს ცხადია. ვთქვათ i-ურ სვეტს ემატება k რიცხვზე გამრავლებული j-ური სვეტი. თუ გარდაქმნამდე მატრიცის სვეტები იყო

$$\alpha_1, \ldots \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n, \tag{1}$$

ვექტორები, მაშინ გარდაქმნის შემდეგ მატრიცის სვეტები იქნება

$$\alpha_1, \ldots, \alpha'_i = \alpha_i + k\alpha_j, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n \tag{2}$$

ვექტორები. (2) სისტემა წრფივად გამოისახება (1) სისტემით, ხოლო ტოლობა

$$\alpha_i = \alpha'_i - k\alpha_j$$

გვიჩვენებს, რომ თავის მხრივ (1) სისტემა წრფივად გამოისახება (2)-თი. მაშასადამე, ეს სისტემები ექვივალენტურია და, ამიტომ, მათი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემები შეიცავენ თანაბარი რაოდენობის ვექტორებს.

ამრიგად, მატრიცის რანგის გამოთვლის დროს, წინასწარ შეიძლება მისი გამარტივება ელემენტარული გარდაქმნების რაიმე კომბინაციით.

ამბობენ, რომ s სტრიქონისა და n სვეტის შემცველ მატრიცს აქვს დიაგონალური ფორმა, თუ ყველა მისი ელემენტი, გარდა $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ (სადაც $0 \leqslant r \leqslant \min(s, n)$) ელემენტებისა, რომლებიც ერთის ტოლია, უდრის ნულს. ცხადია, რომ ამ მატრიცის რანგი უდრის r-ს.

ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით ნებისმიერი მატრიცი შეგვიძლია მივიყვანოთ დიაგონალური ფორმის მატრიცამდე.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია მატრიცი

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1} \cdots a_{sn} \end{pmatrix}.$$

თუ მისი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ მას უკვე აქვს დიაგონალური ფორმა. თუკი მას გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები, მაშინ სტრიქონებისა და სვეტების ტრანსპოზიციით შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ a_{11} ელემენტი იყოს განსხვავებული ნულისაგან. ამის შემდეგ, პირველი სტრიქონის გამრავლებით a_{11}^{-1}-ზე a_{11} ელემენტს შევცვლით 1-ით. თუ ახლა j-ურ სვეტს, $j > 1$, გამოვაკლებთ a_{1j}-ზე გამრავლებულ პირველ სვეტს, მაშინ a_{1j} ელემენტი შეიცვლება ნულით. თუ ამ გარდაქმნას ჩავატარებთ მეორიდან დაწყებულ ყველა სვეტზე და აგრეთვე ყველა სტრიქონზე, მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის მატრიცს

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{s2} & \dots & a'_{sn} \end{pmatrix}.$$

თუ იგივე სახის გარდაქმნებს ჩავატარებთ A' მატრიცის მარჯვენა ქვედა კუთხეში მდებარე მატრიცის მიმართ და ა. შ., გარდაქმნათა სასრული რიცხვის ჩატარების შემდეგ ჩვენ მივიღებთ დიაგონალურ მატრიცს, რომელსაც იგივე რანგი ექნება, რაც საწყის A მატრიცს ჰქონდა.

ამრიგად, *მატრიცის რანგის საპოვნელად საჭიროა მისი მიყვანა, ელემენტარული გარდაქმნებით, დიაგონალურ ფორმამდე და შემდეგ უკანასკნელის მთავარ დიაგონალზე ერთიანების რიცხვის დათვლა.*

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი. თუ გადავანაცვლებთ ამ მატრიცის პირველ და მეორე სვეტს და შემდეგ პირველ სტრიქონს გავამრავლებთ $\frac{1}{2}$-ზე, მივიღებთ მატრიცს

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

მივუმატოთ მის მესამე სვეტს ორზე გამრავლებული პირველი სვეტი, ხოლო შემდეგ თუ ახლად მიღებული პირველი სტრიქონის რომელიმე ჯერადს მივუმატებთ ყველა დანარჩენ სტრიქონს, მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

მატრიცს. ბოლოს, თუ გავამრავლებთ მეორე სტრიქონს -1-ზე, მესამე სვეტს გამოვაკლებთ გასამკეცებულ მეორე სვეტს და შემდეგ მესამე და მეხუთე სტრიქონს გამოვაკლებთ ახლად მიღებულ მეორე სტრიქონის რომელიმე ჯერადს, მივალთ საძებნ დიაგონალურ ფორმამდე

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, A მატრიცის რანგი უდრის ორს.

მე-13 თავში ჩვენ კიდევ ერთხელ შევხვდებით ელემენტარულ გარდაქმნებს და მატრიცთა დიაგონალურ ფორმას, თუმცა მათი ელემენტები იქნებიან უკვე არა რიცხვები, არამედ მრავალწევრები.

§ 11. წრფივ განტოლებათა სისტემები

ჩვენ გადავდივართ წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემების შესწავლაზე; ამასთანავე უკვე აღარ ვგულისხმობთ იმასაც, რომ სისტემის განტოლებათა რიცხვი ტოლია უცნობთა რიცხვისა. თუმცა ჩვენი შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნეს იმ (§ 7-ში განხილვის გარეშე დატოვებულ) შემთხვევაშიაც, როდესაც განტოლებათა რიცხვი ტოლია უცნობთა რიცხვისა, ხოლო სისტემის დეტერმინანტი უდრის ნულს.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

როგორც § 1-დან ვიცით, უპირველესად უნდა გადავჭრათ ამ სისტემის თავსებადობის საკითხი. ამ მიზნისათვის ავიღოთ ამ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შემდგარი A მატრიცი და „გაფართოებული“ $\bar{A}$ მატრიცი, რომელიც მიიღება A მატრიცზე თავისუფალწევრებიანი სვეტის მიერთებით,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix},$$

და გამოვთვალოთ ამ მატრიცთა რანგები. ადვილი სანახავია, რომ $\bar{A}$ მატრიცის რანგი ან უდრის A მატრიცის რანგს ან ერთით მეტია უკანასკნელზე. მართლაც, ავიღოთ A მატრიცის სვეტთა რომელიმე მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა. ის იქნება წრფივად დამოუკიდებელი $\bar{A}$ მატრიცშიაც. თუ სისტემა ინარჩუნებს მაქსიმალურობასაც, ე. ი. თავისუფალწევრებიანი სვეტი მისი საშუალებით წრფივად გამოისახება, მაშინ A და $\bar{A}$ მატრიცთა რანგები ტოლია; წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ მივუერთებთ ამ სისტემას თავისუფალწევრებიან სვეტს, მივიღებთ $\bar{A}$ მატრიცის სვეტთა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას, რომელიც მასში მაქსიმალური იქნება.

წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის საკითხზე სრულ პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

კრონეკერ-კაპელლის თეორემა. წრფივ განტოლებათა (1) სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის თავსებადი, როდესაც გაფართოებული $\bar{A}$ მატრიცის რანგი უდრის A მატრიცის რანგს.

დამტკიცება. 1. ვთქვათ, (1) სისტემა თავსებადია და $k_1, k_2, \ldots, k_n$ არის მისი ერთ-ერთი ამონახსენი. თუ ჩავსვამთ ამ რიცხვებს (1)-ში უცნობების ნაცვლად, მივიღებთ s იგივეობას, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ $\bar{A}$ მატრიცის უკანასკნელი სვეტი წარმოადგენს დანარჩენ სვეტთა ჯამს, აღებულს, შესაბამისად, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ კოეფიციენტებით. $\bar{A}$ მატრიცის ნებისმიერი სხვა სვეტი შედის A-შიც და ამიტომ წრფივად გამოისახება ამ მატრიცის ყველა სვეტის საშუალებით. პირიქით, A მატრიცის ყოველი სვეტი არის $\bar{A}$ მატრიცის სვეტიც, ე. ი. წრფივად გამოისახება ამ მატრიცის სვეტების საშუალებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ A და $\bar{A}$ მატრიცთა სვეტების სისტემები ურთიერთეკვივალენტურია და ამიტომ, როგორც ეს დამტკიცებული იყო § 9-ში, ორივე ამ s-განზომილებიან ვექტორთა სისტემას აქვს ერთი და იგივე რანგი; სხვანაირად რომ ვთქვათ, A და $\bar{A}$ მატრიცის რანგები ტოლია.

2. ვთქვათ, ახლა, რომ A და $\bar{A}$ მატრიცებს აქვთ ტოლი რანგები. აქედან გამომდინარეობს, რომ A მატრიცის სვეტთა ნებისმიერი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა რჩება მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემად $\bar{A}$ მატრიცშიაც. ამრიგად, ამ სისტემის საშუალებით და, მაშასადამე, საერთოდ A მატრიცის სვეტთა სისტემით, წრფივად გამოისახება $\bar{A}$ მატრიცის ბოლო სვეტი. მაშასადამე, არსებობს $k_1, k_2, \ldots, k_n$ კოეფიციენტთა ისეთი სისტემა, რომ A მატრიცის ამ კოეფიციენტებით აღებულ სვეტთა ჯამი უდრის თავისუფალწევრებიან სვეტს და, ამიტომ, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები შეადგენენ (1) სისტემის ამონახსენს. ამრიგად, A და $\bar{A}$ მატრიცთა რანგების ტოლობა იწვევს (1) სისტემის თავსებადობას.

თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. ამ თეორემის გამოყენებისას, კონკრეტულ მაგალითებში საჭიროა, უპირველეს ყოვლისა, გამოვთვალოთ A მატრიცის რანგი, რაც თავის მხრივ მოითხოვს ამ მატრიცის ისეთი ნულისაგან განსხვავებული მინორის პოვნას, რომლის მომარშიებელი ყველა მინორი ნულის ტოლია; ვთქვათ, ეს ნულისაგან განსხვავებული მინორი არის M. ამის შემდეგ საჭიროა გამოვთვალოთ $\bar{A}$ მატრიცის M-ის მომარშიებელი ყველა მინორი, რომელიც A-ში არ შედის (ე. წ. (1) სისტემის *მახასიათებელი დეტერმინანტები*). თუ ყველა ეს მინორი ნულის ტოლია, მაშინ A და $\bar{A}$ მატრიცთა რანგები ტოლია და, ამიტომ, (1) სისტემა თავსებადია; წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ის არათავსებადია. ამრიგად, კრონეკერ-კაპელლის თეორემა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

წრფივ განტოლებათა (1) სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის თავსებადი, თუ ყველა მისი მახასიათებელი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

ვიგულისხმოთ, ახლა, რომ (1) *სისტემა თავსებადია.* კრონეკერ-კაპელლის თეორემა, რომლის საშუალებითაც ჩვენ ვადგენთ ამ სისტემის თავსებადობას, ადასტურებს ამოხსნის არსებობას, მაგრამ არ იძლევა არავითარ მეთოდს სისტემის *ყველა ამონახსენის პრაქტიკულად მონახვისათვის.* ამ საკითხს ახლა განვიხილავთ.

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი არის r. როგორც წინა პარაგრაფში იყო დამტკიცებული, r არის A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალური რიცხვი. ვთქვათ, გარკვეულობისათვის, რომ A მატრიცის პირველი r სტრიქონი წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ყოველი სხვა სტრიქონი არის მათი წრფივი კომბინაცია. მაშინ $\bar{A}$ მატრიცის პირველი r სტრიქონიც იქნება წრფივად დამოუკიდებელი: მათ შორის ნებისმიერი წრფივი დამოკიდებულება იქნებოდა A მატრიცის პირველ r სტრიქონთა შორის წრფივი დამოკიდებულებაც (გავიხსენოთ ვექტორთა შეკრების განმარტება 1). შემდეგ, A და $\bar{A}$ მატრიცის რანგთა ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\bar{A}$ მატრიცის პირველი r სტრიქონი შეადგენს მასში სტრიქონთა მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას, ე. ი. ნებისმიერი სხვა სტრიქონი ამ მატრიცისა იქნება მათი წრფივი კომბინაცია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ (1) სისტემის ყოველი განტოლება შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც რაიმე კოეფიციენტებით აღებული პირველ r განტოლებათა ჯამი, და, ამიტომ, პირველ r განტოლებათა ნებისმიერი ზოგადი ამონახსენი დააკმაყოფილებს (1) სისტემის ყველა განტოლებას. მაშასადამე, საკმარისია ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის ყველა ამონახსენი

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rn}x_n=b_r. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

რადგანაც (2) განტოლებებში უცნობების წინ მდგომი კოეფიციენტებისაგან შემდგარი სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია, ე. ი. კოეფიციენტებისაგან შემდგარი მატრიცის რანგი არის r, ამიტომ $r \leqslant n$ და, გარდა ამისა, ამ მატრიცის r რიგის მინორთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. თუ $r=n$, მაშინ (2) იქნება განტოლებათა და უცნობთა თანაბარი რაოდენობის შემცველი სისტემა ნულისაგან განსხვავებული დეტერმინანტით, ე. ი. მას და, ამიტომ (1) სისტემასაც, აქვს ერთადერთი ამონახსენი, სახელდობრ ის, რომელიც კრამერის წესით გამოითვლება.

ვთქვათ ახლა $r<n$ და, გარკვეულობისათვის, ნულისგან განსხვავებული იყოს პირველი r უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შემდგარი r რიგის მინორი. (2) სისტემის ყველა განტოლებაში გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს $x_{r+1},\dots,x_n$ უცნობთა შემცველი ყველა წევრი და შევარჩიოთ ამ უცნობთათვის რაიმე მნიშვნელობები $c_{r+1},\dots,c_n$. მივიღებთ r განტოლებათა სისტემას r რაოდენობის $x_1, x_2,\dots,x_r$ უცნობთა მიმართ

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}c_{r+1}-\dots-a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}c_{r+1}-\dots-a_{2n}c_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}c_{r+1}-\dots-a_{rn}c_n \end{array}\right\} \qquad (3)$$

ამ სისტემის მიმართ გამოიყენება კრამერის წესი, ამიტომ მას აქვს ერთადერთი $c_1, c_2,\dots,c_r$ ამონახსენი; ცხადია, რომ $c_1, c_2,\dots,c_r, c_{r+1},\dots,c_n$ რიცხვთა სის-

ტემა იქნება (2) სისტემის ამონახსენი. რადგანაც $x_{r+1}, \dots, x_n$ უცნობთათვის, ე. წ. თავისუფალი უცნობებისათვის, $c_{r+1}, \dots, c_n$ რიცხვთა მნიშვნელობები ჩვენ შეგვეძლო შეგვერჩია ნებისმიერად, ამიტომ ამ გზით (2) სისტემის უსასრულოდ ბევრი სხვადასხვა ამონახსენი მიიღება.

მეორე მხრივ, (2) სისტემის ყოველი ამონახსენი შეიძლება მიღებულ იქნას აღნიშნული გზით: თუ მოცემულია (2) სისტემის რაიმე ამონახსენი $c_1, c_2, \dots c_n$, მაშინ თავისუფალი უცნობებისათვის ვიღებთ $c_{r+1}, \dots, c_n$ რიცხვით მნიშვნელობებს. ამგვარად, $c_1, c_2, \dots, c_r$ რიცხვები დააკმაყოფილებენ (3) სისტემას და, მაშასადამე, წარმოადგენენ ამ სისტემის იმ ერთადერთ ამონახსენს, რომელიც კრამერის წესით გამოითვლება.

ყველა ზემონათქვამი შეგვიძლია გავაერთიანოთ წრფივ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემის ამოხსნის შემდეგ წესში:

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ განტოლებათა თავსებადი (1) სისტემა და ვთქვათ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი A მატრიცის რანგი არის r. ამოვირჩიოთ A-ში წრფივად დამოუკიდებელი r სტრიქონი და (1) სისტემაში დავტოვოთ მხოლოდ ის განტოლებები, რომელთა კოეფიციენტები არჩეულ სტრიქონებში შევიდა. ამ განტოლებების მარცხენა მხარეებში ვტოვებთ ისეთ r უცნობებს, რომ მათი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებული იყოს ნულისაგან, ხოლო სხვა უცნობებს ვთვლით თავისუფალ უცნობებად და გადაგვაქვს ისინი განტოლებათა მარჯვენა მხარეებში. თუ თავისუფალ უცნობებს მივცემთ ნებისმიერ რიცხობრივ მნიშვნელობებს, ხოლო სხვა უცნობების მნიშვნელობებს გამოვთვლით კრამერის წესით, მაშინ ჩვენ მივიღებთ (1) სისტემის ყველა ამონახსენს.

დამატებით ერთხელ კიდევ ჩამოვაყალიბოთ ჩვენს მიერ მიღებული შემდეგი შედეგი:

თავსებად (1) სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ერთადერთი ამონახსენი, როდესაც A მატრიცის რანგი უცნობთა რიცხვის ტოლია.

მაგალითები: 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის ორს. ზედა მარცხენა კუთხეში მდებარე მეორე რიგის მინორი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო მისი მომარშიებელი ორივე მესამე რიგის მინორი უდრის ნულს. გაფართოებული მატრიცის რანგი უდრის სამს, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სისტემა არათავსებადია.

2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 7x_1+3x_2&=2\\ x_1-2x_2&=-3\\ 4x_1+9x_2&=11.\end{aligned}\right\}$$

კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის 2-ს, ე. ი. უდრის უცნობთა რიცხვს; გაფართოებული მატრიცის რანგი ასევე უდრის 2-ს. ამრიგად, სისტემა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

პირველი ორი განტოლების მარცხენა მხარე წრფივად დამოუკიდებელია; თუ ამოვხსნით ამ ორ განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას, უცნობებისათვის მნიშვნელობებს მივიღებთ:

$$x_1=-\frac{5}{17};\quad x_2=\frac{23}{17}.$$

ადვილი სანახავია, რომ ეს ამონახსენი მესამე განტოლებასაც აკმაყოფილებს.

3. ამოვხსნათ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5&=1,\\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5&=4,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5&=0.\end{aligned}\right\}$$

სისტემა თავსებადია, რადგანაც გაფართოებული მატრიცის რანგი, ისევე როგორც რანგი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცისა, უდრის ორს. პირველი და მესამე განტოლებების მარცხენა მხარეები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც x_1 და x_2-ის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მეორე რიგის მინორი განსხვავებულია ნულისაგან. ამოვხსნათ ამ ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა, ისე რომ x_3, x_4 და x_5 უცნობები ჩავთვალოთ თავისუფალ უცნობებად, რომელთაც უკვე მიცემული აქვთ რაიმე რიცხობრივი მნიშვნელობები, და გადავიტანოთ ისინი განტოლებათა მარჯვენა მხარეებში. კრამერის წესის გამოყენება მოგვცემს:

$$x_1=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4-x_5,$$

$$x_2=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4.$$

ეს ტოლობები განსაზღვრავენ მოცემული სისტემის ზოგად ამონახსენს; თუ მივცემთ მასში თავისუფალ უცნობებს ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობებს, მივიღებთ სისტემის ყველა ამონახსენს, ასე, მაგალითად, სისტემის ამონახსენი იქნება ვექტორები (2, 5, 3, 0, 0), (3, 5, 2, 1, —2), $\left(0,\ -\frac{1}{4},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$ და ა. შ. მეორე მხრივ, ზოგადი ამონახსენიდან მიღებული x_1 და x_2-ის გამოსახულებების ჩასმა სისტემის ნებისმიერ განტოლებაში, რომელიც წინა განხილვიდან იყო გამორიცხული, მაგალითად, მეორეში, იგივეობას მოგვცემს.

4. ამოვხსნათ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+x_2-2x_3+x_4&=3,\\ x_1-2x_2-x_3+2x_4&=2,\\ 2x_1+5x_2\qquad-x_4&=-1,\\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4&=1.\end{aligned}\right\}$$

მართალია, უცნობთა რიცხვი უდრის განტოლებათა რიცხვს, მაგრამ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია და ამიტომ კრამერის წესი ვერ გამოიყენება. კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის სამს—ამ მატრიცის მარჯვენა ზედა კუთხეში მოთავსებულია მესამე რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორი. გაფართოებული მატრიცის რანგიც

უდრის სამს, ე. ი. სისტემა თავსებადია. თუ განვიხილავთ მხოლოდ პირველ სამ განტოლებას და x_1-ს ჩავთვლით თავისუფალ უცნობად, მივიღებთ შემდეგი სახის ზოგად ამონახსენს

$$x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_1, \quad x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}x_1, \quad x_4 = 0.$$

5. ვთქვათ მოცემულია n უცნობიანი $n+1$ განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა. ამ სისტემის გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცი იქნება $n+1$ რიგის კვადრატული მატრიცი. თუ ჩვენი სისტემა თავსებადია, მაშინ, კრონეკერ-კაპელლის თეორემის თანახმად, $\overline{A}$ მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

ასე, მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია სისტემა

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 8x_2 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 &= 1, \\ 4x_1 + 7x_2 &= -4. \end{aligned}\right\}$$

ამ განტოლებათა კოეფიციენტებისაგან და თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან:

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -77,$$

ამიტომ სისტემა არათავსებადია. შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, არ იქნება სამართლიანი: $\overline{A}$ მატრიცის დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის პირობიდან არ გამომდინარეობს, რომ A და $\overline{A}$ მატრიცთა რანგი ერთმანეთს ემთხვევა.

§ 12. წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემები

წინა პარაგრაფის შედეგები გამოვიყენოთ *წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემებისათვის*:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

კრონეკერ-კაპელლის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ეს სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგანაც ნულოვანი სვეტის დამატება არ ასწევს მატრიცის რანგს. ეს, თუმცა, უშუალოდაც ჩანს: (1) სისტემას აშკარად აქვს *ნულოვანი ამონახსენი* (0, 0, ..., 0).

ვთქვათ, (1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის r-ს. თუ $r=n$, *მაშინ ნულოვანი ამონახსენი იქნება* (1) *სისტემის ერთადერთი ამონახსენი; როცა* $r<n$, *მაშინ სისტემას აქვს აგრეთვე არანულოვანი ამონახსენები*, რომელთა მოსაძებნად გამოიყენება იგივე ხერხი, რაც ზემოთ განტოლებათა ნებისმიერი სისტემის შემთხვევაში გამოიყენებოდა. კერძოდ, *n-უცნობიან n წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს არანულოვანი ამონახსენები, როცა ამ სისტემის*

დეტერმინანტი უდრის ნულს[1]. მართლაც, ამ დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა ტოლფასია იმისა, რომ A მატრიცის რანგი ნაკლებია n-ზე. მეორე მხრივ, თუ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემაში განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, მაშინ სისტემას აუცილებლად გააჩნია ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები, რადგანაც რანგი ამ შემთხვევაში არ შეიძლება უცნობთა რიცხვის ტოლი იყოს; ეს შედეგი, სხვა მოსაზრებებზე დაყრდნობით, უკვე მიღებული იყო § 1-ში.

განვიხილოთ, კერძოდ, n უცნობიანი $n-1$ განტოლებისაგან შედგენილი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ ამ განტოლებათა მარცხენა მხარეები ერთმანეთის მიმართ წრფივად დამოუკიდებელნი არიან, ვთქვათ, ამ სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცი არის

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2}, & \dots, & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

აღვნიშნოთ M_i-ით $(n-1)$ რიგის მინორი, რომელიც მიიღება A მატრიციდან i-ური, $i=1, 2, \ldots, n$, სვეტის ამოშლის შემდეგ. მაშინ სისტემის ერთ-ერთი ამონახსენი იქნება

$$M_1, \; -M_2, \; M_3, \; -M_4, \ldots, (-1)^{n-1}M_n, \tag{2}$$

რიცხვთა სისტემა, ხოლო ყველა სხვა ამონახსენი მისი პროპორციული იქნება.

დამტკიცება. რადგანაც პირობის თანახმად, A მატრიცის რანგი უდრის $n-1$-ს, ამიტომ M_i მინორებიდან ერთი მაინც განსხვავებული უნდა იყოს ნულისაგან; ვთქვათ, ასეთია M_n. მივიღოთ, რომ x_n არის თავისუფალი უცნობი და გადავიტანოთ იგი ყველა განტოლების მარჯვენა მხარეში, რის შემდეგაც მივიღებთ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} &= -a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} &= -a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} &= -a_{n-1,n}x_n. \end{aligned}$$

შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ კრამერის წესს, მივიღებთ მოცემული სისტემის ზოგად ამონახსენს, რომელსაც ადვილი გარდაქმნების შემდეგ, შეიძლება მივცეთ ასეთი სახე

$$x_i=(-1)^{n-i}\frac{M_i}{M_n}x_n, \quad i=1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

დავუშვათ, რომ $x_n=(-1)^{n-1}M_n$; მივიღებთ: $x_i=(-1)^{2n-i-1}M_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, ან, რადგანაც სხვაობა $(2n-i-1)-(i-1)=2n-2i$ არის ლუწი რიცხვი, $x_i=(-1)^{i-1}M_i$ ე. ი. (2) რიცხვთა სისტემა მართლაც არის განტოლებათა სისტემის ამონახსენი. ამ სისტემის ნებისმიერი სხვა ამონახსენი მიიღება (3) ფორმულებიდან, მასში x_n-ის სხვადასხვა რიცხვობრივი მნიშვნელობების აღებით, და ამიტომ ის პროპორციულია (2) ამონახსენისა. გასაგებია, რომ

[1] ამ დებულების ერთი ნაწილი უკვე დამტკიცებული იყო § 7-ში.

ყველა ზემონათქვამი სამართლიანი იქნება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $M_n = 0$, მაგრამ ერთ-
რთი M_i, $1 \leq i \leq n-1$ მინორთაგანი განსხვავებულია ნულისაგან.

წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს აქვთ შემ-
დეგი თვისებები. თუ ვექტორი $\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ არის (1) სისტემის ამონახ-
სენი, მაშინ მისი ამონახსენი იქნება $k\beta=(kb_1, kb_2, \ldots, kb_n)$ ვექტორიც, სადაც
k არის ნებისმიერი რიცხვი. ჩვენ ამაში დავრწმუნდებით მისი უშუალო ჩასმით
(1) სისტემის ნებისმიერ განტოლებაში. შემდეგ, თუ $\gamma=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ვექტორი
არის (1) სისტემის რომელიღაც მეორე ამონახსენი, მაშინ მისი ამონახსენი
იქნება $\beta+\gamma=(b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_n+c_n)$ ვექტორიც:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_j+c_j)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j=0,\quad i=1, 2, \ldots, s.$$

ამიტომ, საზოგადოდ, ერთგვაროვანი (1) სისტემის ამონახ-
სენთა ყოველი წრფივი კომბინაცია თვითონ იქნება ამ სის-
ტემის ამონახსენი. შევნიშნოთ, რომ არაერთგვაროვანი სის-
ტემის შემთხვევაში, ე. ი. წრფივ განტოლებათა ისეთი სისტემის შემთხვე-
ვაში, რომლის თავისუფალი წევრებიდან ყველა არ უდრის ნულს, ასეთ
დებულებას არა აქვს ადგილი: არაერთგვაროვან განტოლებათა არც ორი
ამონახსენის ჯამი და არც ამონახსენის ნამრავლი რიცხვზე აღარ იქნება უკვე
ამ სისტემის ამონახსენი.

§ 9-დან ვიცით, რომ n-განზომილებიან ვექტორთა ყოველი სისტემა,
რომელიც შეიცავს n-ზე მეტ ვექტორს, იქნება წრფივად დამოკიდებული,
აქედან გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვან (1) სისტემის ამონახსნებიდან,
რომლებიც, როგორც ვიცით, n-განზომილებიან ვექტორებს წარმოადგენენ,
შეიძლება შევარჩიოთ სასრული მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი
სისტემა, მაქსიმალური იმ გაგებით, რომ (1)-ის ყოველი სხვა ამონახსენი
იქნება შერჩეულ სისტემაში შემავალ ამონახსენთა წრფივი კომბინაცია.

ერთგვაროვანი (1) სისტემის ამონახსენთა ყოველ მაქსიმალურ წრფივად
დამოუკიდებელ სისტემას ეწოდება მის ამონახსენთა ფუნდამენტა-
ლური სისტემა.

ერთხელ კიდევ აღვნიშნოთ ხაზგასმით, რომ n-განზომილებიანი
ვექტორი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება (1) სისტემის
ამონახსენი, როდესაც ის წარმოადგენს მოცემული ფუნდა-
მენტალური სისტემის ვექტორთა წრფივ კომბინაციას.

გასაგებია, რომ ფუნდამენტალური სისტემა იარსებებს მხოლოდ იმ
შემთხვევაში, როცა (1) სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსნები, ე. ი.
როცა მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი ნაკლებია
უცნობთა რიცხვზე. ამასთან, (1) სისტემას შეიძლება ჰქონდეს ამონახსენთა
მრავალი სხვადასხვა ფუნდამენტალური სისტემები. მაგრამ ყველა ეს სისტემა
ურთიერთეკვივალენტურია, რადგანაც ნებისმიერი სისტემის ყოველი ვექტორი
წრფივად გამოისახება ნებისმიერი სხვა სისტემით და ამიტომ ეს სისტემები
შეიცავენ ამონახსენთა თანაბარ რაოდენობას.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თუ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა (1) სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცის რანგი r ნაკლებია უცნობთა n რიცხვზე, მაშინ (1) სისტემის ამონახსენთა ყოველი ფუნდამენტალური სისტემა შედგება $n-r$ ამონახსენისაგან.

დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ, რომ $n-r$ არის (1) სისტემის თავისუფალ უცნობთა რიცხვი; დავუშვათ, რომ თავისუფალი უცნობებია $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. განვიხილოთ ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული $n-r$ რიგის d დეტერმინანტი, რომელიც ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$d=\begin{vmatrix} c_{1,r+1}, & c_{1,r+2}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{2,r+1}, & c_{2,r+2}, & \ldots, & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2}, & \ldots, & c_{n-r,n} \end{vmatrix}.$$

თუ ავიღებთ თავისუფალი უცნობების მნიშვნელობებისათვის ამ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტებს, $1 \leqslant i \leqslant n-r$, მივიღებთ, როგორც ჩვენთვის უკვე ცნობილია, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობთათვის ცალსახად განსაზღვრულ მნიშვნელობებს, ე. ი. მივიღებთ (1) განტოლებათა სისტემის სავსებით გარკვეულ ამონახსენს; დავწეროთ ეს ამონახსენი ვექტორის სახით

$$\alpha_i=(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir}, c_{i,r+1}, c_{i,r+2}, \ldots, c_{in}).$$

ჩვენს მიერ მიღებული $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ ვექტორთა სისტემა წარმოადგენს განტოლებათა (1) სისტემის ამონახსენთა ფუნდამენტალურ სისტემას. მართლაც, ვექტორთა ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც ამ ვექტორებისაგან, როგორც სტრიქონებისაგან, შედგენილი მატრიცი შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ $n-r$ რიგის d მინორს. მეორე მხრივ, ვთქვათ

$$\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n)$$

არის განტოლებათა (1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი. დავამტკიცოთ, რომ β ვექტორი წრფივად გამოისახება $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ ვექტორებით. აღვნიშნოთ α'_i-ით, $i=1, 2, \ldots, n-r$, d დეტერმინანტის i-ური სტრიქონი და განვიხილოთ იგი როგორც $(n-r)$-განზომილებიანი ვექტორი, დავუშვათ შემდეგ, რომ

$$\beta'=(b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n).$$

α'_i, $i=1, 2, \ldots, n-r$, ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც $d \neq 0$. მაგრამ, $(n-r)$-განზომილებიან

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-r}, \beta'$$

ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც ამ სისტემაში ვექტორთა რიცხვი მეტია მათ განზომილებაზე. მაშასადამე, არსებობენ ისეთი $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$ რიცხვები, რომ

$$\beta'=k_1\alpha'_1+k_2\alpha'_2+\ldots+k_{n-r}\alpha'_{n-r}. \tag{4}$$

განვიხილოთ ახლა n-განზომილებიანი ვექტორი

$$\delta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{n-r}\alpha_{n-r}-\beta.$$

ვექტორი δ, რომელიც წარმოადგეს ერთგვაროვან განტოლებათა (1) სისტემის ამონახსენთა წრფივ კომბინაციას, თვითონ იქნება ამ სისტემის ამონახსენი. (4)-დან გამომდინარეობს, რომ δ ამონახსენში თავისუფალ უცნობთა მნიშვნელობები ნულის ტოლია. მაგრამ განტოლებათა (1) სისტემის ის ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც მიიღება ყველა თავისუფალ უცნობთა ნულოვანი მნიშვნელობებით, იქნება ნულოვანი ამონახსენი. ამრიგად, $\delta=0$, ე. ი.

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,+\ldots,+k_{n-r}\alpha_{n-r}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ ჩატარებული დამტკიცება უფლებას გვაძლევს ვამტკიცოთ ერთგვაროვან განტოლებათა (1) სისტემის ამონახსენთა ყველა ფუნდამენტალური სისტემის მიღების შესაძლებლობა, თუკი d დეტერმინანტად ავიღებთ ყველა შესაძლო ნულისაგან განსხვავებულ $(n-r)$ რიგის დეტერმინანტს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5&=0,\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5&=0,\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5&=0,\\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5&=0 \end{aligned}\right|$$

სისტემა.

კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი უდრის 2-ს, უცნობთა რიცხვი ტოლია ხუთისა, ამიტომ განტოლებათა ამ სისტემის ამონახსენთა ნებისმიერი ფუნდამენტალური სისტემა შედგება სამი ამონახსენისაგან. შემოვისაზღვროთ პირველი ორი წრფივად დამოუკიდებელი განტოლებით, მივიღოთ x_3, x_4, x_5 თავისუფალ უცნობებად და ამოვხსნათ სისტემა. მივიღებთ შემდეგი სახის ზოგად ამონახსენს

$$x_1=\frac{19}{8}x_3+\frac{3}{8}x_4-\frac{1}{2}x_5,\quad x_2=\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5.$$

ავიღოთ, შემდეგ, სამი წრფივად დამოუკიდებელი 3-განზომილებიანი ვექტორი (1, 0, 0), (0, 1, 0) და (0, 0, 1). თუ ჩავსვამთ თვითეული მათგანის კომპონენტებს ზოგად ამონახსენში, როგორც თავისუფალ უცნობთა მნიშვნელობებს, და გამოვთვლით x_1 და x_2-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ მოცემული სისტემის ამონახსენთა შემდეგ ფუნდამენტალურ სისტემას:

$$\alpha_1=\left(\frac{19}{8},\ \frac{7}{8},1,0,0\right),\quad \alpha_2=\left(\frac{3}{8},\ -\frac{25}{8},\ 0,1,0\right),$$

$$\alpha_3=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},0,0,1\right).$$

დავამთავროთ ეს პარაგრაფი ერთგვაროვან და არაერთგვაროვან სისტემათა ამონახსნებს შორის არსებული კავშირის განხილვით. ვთქვათ, მოცემულია წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=b_s \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

სისტემას, რომელიც მიიღება (5) სისტემიდან თუ თავისუფალ წევრებს შევცვლით ნულებით ეწოდება (5) სისტემის **დაყვანილი სისტემა.** (5) და (6) სისტემის ამონახსენთა შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი, რომელზედაც მიუთითებს შემდეგი ორი თეორემა.

I. (5) **სისტემის ნებისმიერი ამონახსენისა და დაყვანილი (6) სისტემის ნებისმიერი ამონახსენის ჯამი კვლავ იქნება (5) სისტემის ამონახსენი.**

მართლაც, ვთქვათ $c_1, c_2, \dots, c_n$ ამონახსენია (5) სისტემისა, ხოლო $d_1, d_2, \dots, d_n$—(6) სისტემისა. ავიღოთ (5) სისტემის ნებისმიერი განტოლება და მასში უცნობების მაგივრად ჩავსვათ $c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n$ რიცხვები. მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}d_j = b_k + 0 = b_k.$$

II. (5) **სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსენის სხვაობა არის დაყვანილი (6) სისტემის ამონახსენი.**

მართლაც, ვთქვათ $c_1, c_2, \dots, c_n$, c'_1, და $c'_2, \dots, c'_n$ არის (5) სისტემის ორი ამონახსენი. ავიღოთ (6) სისტემის ნებისმიერი განტოლება და მასში უცნობების ნაცვლად ჩავსვათ რიცხვები

$$c_1 - c'_1,\ c_2 - c'_2, \dots, c_n - c'_n.$$

მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j - c'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c'_j = b_k - b_k = 0.$$

ამ თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ვიპოვით წრფივ არაერთგვაროვან (5) განტოლებათა სისტემის ერთ ამონახსენს, მაშინ მისი მიმატებით დაყვანილი (6) სისტემის თვითეულ ამონახსენთან, მივიღებთ (5) სისტემის ყველა ამონახსენს.

თავი მესამე

მატრიცთა ალგებრა

§ 13. მატრიცთა გამრავლება

წინა თავებში მატრიცის ცნება გამოყენებული იყო, როგორც არსებითი დამხმარე საშუალება წრფივ განტოლებათა სისტემების შესასწავლად. ამ ცნების მრავალრიცხოვანმა სხვა გამოყენებებმა აქცია იგი საგნად დიდი დამოუკიდებელი თეორიისა, რომლის ბევრი ნაწილი გამოდის ჩვენი კურსის ფარგლებიდან. ჩვენ შევისწავლით ამ თეორიის საფუძვლებს, რომელიც იმით იწყება, რომ მოცემული რიგის ყველა კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლეში, თავისებური, მაგრამ სავსებით მიზანშეწონილი წესით განისაზღვრება ორი ალგებრული ოპერაცია—შეკრება და გამრავლება. დავიწყოთ მატრიცთა გამრავლების განმარტებით; მატრიცთა შეკრება § 15-ში იქნება შემოტანილი.

ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის ღერძების α კუთხით მობრუნების დროს წერტილის კოორდინატები გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულებით:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

სადაც x და y წერტილის ძველი კოორდინატებია, ხოლო x' და y' — მისი ახალი კოორდინატები; ამრიგად, x და y წრფივად გამოისახებიან x' და y'-ით, რაღაც რიცხვობრივი კოეფიციენტების საშუალებით. მრავალ სხვა შემთხვევაშიც აგრეთვე გვხვდება უცნობთა (ან ცვლადთა) შეცვლა, რომლის დროსაც ძველი უცნობები წრფივად გამოისახებიან ახლებით; უცნობთა ასეთ შეცვლას ჩვეულებრივ უწოდებენ მათ წრფივ გარდაქმნას (ან წრფივ ჩასმას). მაშასადამე, ვღებულობთ შემდეგ განმარტებას:

უცნობთა წრფივი გარდაქმნა ეწოდება n უცნობიან $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სისტემიდან n უცნობიან $y_1, y_2, \ldots, y_n$ სისტემაზე ისეთ გადასვლას, რომლის დროსაც ძველი უცნობები, რაიმე რიცხვითი კოეფიციენტების საშუალებით, წრფივად გამოისახებიან ახალი უცნობებით:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)
$$

(1) წრფივი გარდაქმნა სავსებით განისაზღვრება მისი კოეფიციენტები-საგან შედგენილი მატრიცით

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{pmatrix},
$$

რადგანაც ერთი და იგივე მატრიცის მქონე ორი წრფივი გარდაქმნა შეიძ-ლება განსხვავებული იყოს მხოლოდ უცნობების აღსანიშნავად შემოტანილი ასოებით; თუმცა შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ამ აღნიშვნათა შემოტანა მთლიანად ჩვენზეა დამოკიდებული. პირიქით, თუ გვაქვს n-ური რიგის ნების-მიერი მატრიცი, ჩვენ შეგვიძლია მაშინვე დავწეროთ ისეთი წრფივი გარ-დაქმნა, რომლისთვისაც ეს მატრიცი იქნება კოეფიციენტთა მატრიცი. ამრიგად, n უცნობთა წრფივ გარდაქმნებსა და n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცებს შორის არსებობს ურთიერთ ცალსახა თანადობა, და ამიტომ წრფივ გარდა-ქმნებთან დაკავშირებულ ყოველ ცნებას და ამ გარდაქმნათა ყოველ თვისებას უნდა შეესაბამებოდეს მატრიცებთან დაკავშირებული ანალოგიური ცნება ან თვისება.

განვიხილოთ ორი წრფივი გარდაქმნის თანმიმდევრობითი შესრულების საკითხი. ვთქვათ, (1) წრფივ გარდაქმნას მოსდევს შემდეგი წრფივი გარ-დაქმნა

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n, \\
y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

რომელსაც გადაყავს $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობთა სისტემა $z_1, z_2, \ldots z_n$ სისტემაში; ამ გარდაქმნის მატრიცი აღვნიშნოთ B-თი. ჩავსვათ (2)-დან აღებული $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობთა გამოსახულებანი (1)-ში, მაშინ მივიღებთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა წრფივ გამოსახვას $z_1, z_2, \ldots, z_n$ უცნობთა საშუალებით. ამგვარად, უცნობთა ორი წრფივი გარდაქმნის თანმიმდევრობით შესრულების შედეგი კვლავ წრფივი გარდაქმნაა.

მაგალითი.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3y_1 - y_2, & \qquad y_1 &= z_1 + z_2, \\
x_2 &= y_1 + 5y_2, & \qquad y_2 &= 4z_1 + 2z_2
\end{aligned}
$$

წრფივ გარდაქმნათა მიმდევრობით შესრულების შედეგი იქნება წრფივი გარდაქმნა

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3(z_1 + z_2) - (4z_1 + 2z_2) = -z_1 + z_2, \\
x_2 &= (z_1 + z_2) + 5(4z_1 + 2z_2) = 21z_1 + 11z_2.
\end{aligned}
$$

(1) და (2) წრფივ გარდაქმნათა თანმიმდევრობით შესრულების შედეგად მიღებული წრფივი გარდაქმნის მატრიცი აღვნიშნოთ C-თი და ვიპოვოთ ის კანონი, რომლითაც მისი c_{ik} ელემენტები, $i, k=1, 2, \ldots, n$, A და B მატრიცის ელემენტებით გამოისახებიან. თუ მოკლედ ჩავწერთ (1) და (2) გარდაქმნებს

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j,\ i=1, 2, \ldots, n;\quad y_j=\sum_{k=1}^{n} b_{jk}z_k,\ j=1, 2, \ldots, n,$$

სახით, მივიღებთ

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)z_k,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

ამრიგად, z_k-ს კოეფიციენტს x_i-ს გამოსახულებაში, ე. ი. C მატრიცის c_{ik} ელემენტს, აქვს

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk} \tag{3}$$

სახე. *C მატრიცის ის ელემენტი, რომელიც მდებარეობს i-ურ სტრიქონსა და k-ურ სვეტში, უდრის A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის k-ური სვეტის შესაბამის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს.*

(3) ფორმულა, რომელიც C მატრიცის ელემენტებს გამოსახავს A და B მატრიცების ელემენტების საშუალებით, შესაძლებელს ხდის მოცემული A და B მატრიცებისათვის მაშინვე დაიწეროს C მატრიცი, ისე რომ გვერდი ავუაროთ A და B მატრიცების შესაბამის წრფივ გარდაქმნათა განხილვას. ამ გზით n-ური რიგის ყოველ კვადრატულ მატრიცთა წყვილს შეესაბამება ცალსახად განსაზღვრული მესამე მატრიცი. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ n-ური რიგის ყველა კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლეში ჩვენ განვსაზღვრეთ ალგებრული ოპერაცია; მას ეწოდება *მატრიცთა გამრავლება*, ხოლო C მატრიცს—A მატრიცის ნამრავლი B მატრიცზე:

$$C=AB.$$

ერთხელ კიდევ ჩამოვაყალიბოთ წრფივ გარდაქმნებისა და მატრიცთა გამრავლებას შორის არსებული დამოკიდებულება.

უცნობთა წრფივ გარდაქმნას, რომელიც მიიღება A და B მატრიცებიანი ორი წრფივი გარდაქმნის მიმდევრობით შესრულების შედეგად, კოეფიციენტთა მატრიცად აქვს AB მატრიცი.

მაგალითები.

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 1+9\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) ვიპოვოთ

$$\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - y_2 + 3y_3, \\ x_2 &= y_2 - 2y_2, \\ x_3 &= \quad 7y_2 - y_3 \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} y_1 &= 2z_1 \quad + z_3, \\ y_2 &= \quad z_2 - 5z_3, \\ y_3 &= \quad 2z_2 \end{aligned}$$

წრფივ გარდაქმნათა მიმდევრობით შესრულების შედეგი.

მატრიცთა გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix},$$

ამიტომ საძებნ წრფივ გარდაქმას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10z_1 + 5z_2 + 10z_3, \\ x_2 &= 2z_1 - 2z_2 + 11z_3, \\ x_3 &= \quad 5z_2 - 35z_3. \end{aligned}$$

ავიღოთ ზემოთ განხილული მატრიცთა გამრავლების მაგალითებიდან ერთ-ერთი, ვთქვათ (2), და ვიპოვოთ იმავე მატრიცთა ნამრავლი, ოღონდ შებრუნებული მიმდევრობით:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

ვხედავთ, რომ მატრიცთა ნამრავლი დამოკიდებულია მამრავლთა თანმიმდევრობაზე ე. ი. მ ა ტ რ ი ც თ ა გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა ა რ ა კ ო მ უ ტ ა ტ უ რ ი ა. ეს მოსალოდნელიც იყო, რადგან C მატრიცის განმარტებაში A და B მატრიცები შედიან არატოლფასოვნად: A-ში იღება სტრიქონები ხოლო B-ში—სვეტები.

მაგალითები n-ური რიგის არაგადანაცვლებადი მატრიცებისა, ე. ი. ასეთი მატრიცებისა, რომელთა ნამრავლი იცვლება თანამამრავლთა გადაადგილებით, შეიძლება მოვიყვანოთ n-ის ყველა მნიშვნელობებისათვის დაწყებული $n = 2$-დან. (1) მაგალითში მეორე რიგის მატრიცები არაგადანაცვლებადია. მეორე მხრივ, შეიძლება ორი მოცემული მატრიცი შემთხვევით აღმოჩნდეს გადანაცვლებადი, როგორც შემდეგი მაგალითიდან ჩანს:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

მატრიცთა გამრავლება ასოციაციურია; მაშასადამე, შეიძლება ვილაპარაკოთ გარკვეული მიმდევრობით (ნამრავლის არაკომუტატურობის გამო) აღებულ ნებისმიერ სასრული რაოდენობის n-ური რიგის მატრიცთა ცალსახად განსაზღვრული ნამრავლის შესახებ.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემული გვაქვს სამი ნებისმიერი n-ური რიგის მატრიცი A, B და C. ჩავწეროთ ისინი შემოკლებული ფორმით, რომელიც გვიჩვენებს მათი ელემენტების საერთო სახეს: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. შემდეგ შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$AB=U=(u_{ij}), \quad BC=V=(v_{ij}),$$
$$(AB)C=S=(s_{ij}), \quad A(BC)=T=(t_{ij}).$$

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა: $(AB)C=A(BC)$ ე. ი. $S=T$. მაგრამ

$$u_{il}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}, \quad v_{kj}=\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj},$$

და ამიტომ, $S=UC$, $T=AV$ ტოლობების გამო,

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{n} u_{il} c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

$$t_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

ე. ი. $s_{ij}=t_{ij}$, როცა $i, j=1, 2, \ldots, n$.

მატრიცთა ნამრავლის თვისებების შემდგომი შესწავლა მოითხოვს მათი დეტერმინანტების გამოყენებას; ამასთან შევთანხმდეთ, რომ, სიმოკლისათვის, A მატრიცის დეტერმინანტი აღვნიშნოთ $|A|$-ით. თუ მკითხველი ყოველ ზემოთ განხილულ მაგალითში გამოთვლის გადასამრავლებელ მატრიცთა დეტერმინანტებს და შეადარებს ამ დეტერმინანტების ნამრავლს მოცემულ მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტს, დაინახავს მეტად საგულისხმო კანონზომიერებას, რომელიც გამოიხატება დეტერმინანტთა გადამრავლების შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემით:

n-ური რიგის რამდენიმე მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის ამ მატრიცთა დეტერმინანტების ნამრავლს.

საკმარისია ეს თეორემა დავამტკიცოთ ორი მატრიცის შემთხვევისათვის. ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის მატრიცები $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ და ვთქვათ, რომ $AB=C=(c_{ij})$. ავაგოთ $2n$ რიგის შემდეგი დამხმარე Δ დეტერმინანტი: მის ზედა მარცხენა კუთხეში მოვათავსოთ A მატრიცი, მარჯვენა ქვედა კუთხეში — B მატრიცი, მთელი მარჯვენა ზედა კუთხე შევავსოთ ნულებით და, ბოლოს, მარცხენა ქვედა კუთხის მთავარი დიაგონალი შევავსოთ -1 რიცხვით, ხოლო ამ დიაგონალის გარეთ ჩავწეროთ კვლავ ნულები. მაშასადამე, Δ დეტერმინანტს ექნება შემდეგი სახე:

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\
0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

თუ Δ დეტერმინანტის მიმართ გამოვიყენებთ ლაპლასის თეორემას—დაშლას პირველი n სტრიქონის მიხედვით—მივიღებთ შემდეგ ტოლობას.

$$
\Delta=|A|\cdot|B|. \tag{4}
$$

მეორე მხრივ შევეცადოთ Δ დეტერმინანტი ისე გარდავქმნათ, რომ მისი მნიშვნელობა არ შევცვალოთ, ხოლო ყველა b_{ij} ელემენტი, $i, j=1, 2,\dots n$, შეიცვალოს ნულებით. ამ მიზნით Δ დეტერმინანტის მე-$(n+1)$ სვეტს მივუმატოთ b_{11}-ზე გამრავლებული პირველი სვეტი, b_{21}-ზე გამრავლებული მეორე სვეტი და ა. შ., საბოლოოდ მე-n სვეტი გამრავლებული b_{n1}-ზე. შემდეგ Δ დეტერმინანტის მე-$(n+2)$ სვეტს მივუმატოთ b_{12}-ზე გამრავლებული პირველი სვეტი, b_{22}-ზე გამრავლებული მეორე სვეტი და ა. შ. საზოგადოდ Δ დეტერმინანტის მე-$(n+j)$ სვეტს, სადაც $j=1, 2, \dots, n$ მივუმატოთ შესაბამისად $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ კოეფიციენტებით აღებული პირველ n სვეტთა ჯამი.

ადვილი სანახავია, რომ ამ გარდაქმნებს, რომლებიც დეტერმინანტს არ ცვლიან, მართლაც მივყევართ ყველა b_{ij} ელემენტების ნულებით შეცვლამდე. ერთდროულად, დეტერმინანტის ზედა მარჯვენა კუთხეში მოთავსებული ნულები შეიცვლება შემდეგი რიცხვებით: დეტერმინანტს i-ური სტრიქონისა და $(n+j)$-ური სვეტის გადაკვეთაზე, $i, j=1, 2, \dots, n$, ახლა მოთავსებული იქნება რიცხვი $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$, რომელიც (3)-ის ძალით არის $C=AB$ მატრიცის c_{ij} ელემენტი. მაშასადამე, ახლა დეტერმინანტის ზედა მარჯვენა კუთხე უჭირავს C მატრიცს:

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\
-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}
$$

ერთხელ კიდევ გამოვიყენოთ ლაპლასის თეორემა და დეტერმინანტი გავშალოთ უკანასკნელი n სვეტის მიმართ. $|C|$ მინორისათვის დამატებითი მინორი უდრის $(-1)^n$, მაგრამ რადგანაც $|C|$ მინორი მოთავსებულია $1, 2,\dots n$, ნომრიან სტრიქონებში და $n+1,\ n+2, \dots, 2n$ ნომრიან სვეტებში, ამასთან

$$1+2+\dots+n+(n+1)+(n+2)+\dots+2n=2n^2+n,$$

ამიტომ

$$\Delta=(-1)^{2n^2+n}\,(-1)^n\,|C|=(-1)^{2(n^2+n)}|C|$$

ანუ, რადგანაც $2(n^2+n)$ ლუწი რიცხვია,

$$\Delta=|C|. \tag{5}$$

საბოლოოდ, (4) და (5)-დან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა

$$|C|=|A|\cdot|B|.$$

დეტერმინანტთა გამრავლების თეორემის დამტკიცება შეიძლებოდა ლაპლასის თეორემის გამოუყენებლადაც. ერთ-ერთ ასეთ დამტკიცებას მკითხველი ნახავს § 16-ის ბოლოს.

§ 14 შებრუნებული მატრიცი

კვადრატულ მატრიცს ეწოდება *გადაგვარებული* (*ან განსაკუთრებული*), თუ მისი დეტერმინანტი უდრის ნულს, და *გადაუგვარებელი* (*ან არაგანსაკუთრებული*) — წინააღმდეგ შემთხვევაში. შესაბამისად, უცნობთა წრფივ გარდაქმნას ეწოდება *გადაგვარებული* ან *გადაუგვარებელი* იმისდა მიხედვით, ნულის ტოლია თუ ნულისაგან განსხვავებული ამ გარდაქმნის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი. წინა პარაგრაფის ბოლო ნაწილში დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები:

ისეთი მატრიცების ნამრავლი, რომელთაგან ერთი მაინც გადაგვარებულია, გადაგვარებული მატრიცი იქნება.

ნებისმიერ გადაუგვარებელ მატრიცთა ნამრავლი თვითონაც იქნება გადაუგვარებელი მატრიცი.

აქედან, მატრიცთა გადამრავლებასა და წრფივ გარდაქმნათა თანმიმდევრობით შესრულებას შორის არსებული კავშირის გამო, გამომდინარეობს ასეთი დებულება: *რამდენიმე წრფივი გარდაქმნის თანმიმდევრობით ჩატარების შედეგი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება გადაუგვარებელი გარდაქმნა, თუ ყველა მოცემული გარდაქმნა გადაუგვარებელია.*

ერთეულის როლს მატრიცების გადამრავლებაში ერთეულოვანი

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

მატრიცი ასრულებს; ამასთან იგი გადანაცვლებადია მოცემული რიგის მქონე ნებისმიერ A მატრიცის მიმართ

$$AE=EA=A. \tag{1}$$

ამ ტოლობების დასამტკიცებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ან მატრიცთა გადამრავლების წესი უშუალოდ, ან შემდეგი შენიშვნა: ერთეულოვანი მატრიცი შეესაბამება

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1, \\
x_2 &= \quad y_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= \qquad\quad y_n,
\end{aligned}
$$

უცნობთა იგივურ წრფივ გარდაქმნას, რომლის ჩატარებაც, ცხადია, არ ცვლის უცნობთ, მიუხედავად იმისა განვახორციელებთ მას ნებისმიერ სხვა წრფივ გარდაქმნამდე, თუ მის შემდეგ.

შევნიშნოთ, რომ E მატრიცი არის ერთადერთი მატრიცი, რომელიც ნებისმიერი A მატრიცისათვის აკმაყოფილებს (1) პირობას. მართლაც, რომ არსებობდეს კიდევ E' მატრიცი იმავე თვისებით, მაშინ მივიღებდით

$$E'E=E',\ E'E=E,$$

საიდანაც $E'=E$.

მოცემული A მატრიცისათვის შებრუნებული მატრიცის არსებობის საკითხი თურმე უფრო რთულია. მატრიცთა გადამრავლების არაკომუტატურობის გამო, ჩვენ ახლა ვილაპარაკებთ მარჯვენა შებრუნებული მატრიცის შესახებ, ე. ი. ისეთი A^{-1} მატრიცის შესახებ, რომლის გადამრავლება A მატრიცზე მარჯვნიდან გვაძლევს ერთეულოვან მატრიცს,

$$AA^{-1}=E. \tag{2}$$

გადაგვარებული A მატრიცისათვის A^{-1} მატრიცი რომ არსებობდეს, მაშინ, როგორც ვიცით, (2) ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი ნამრავლი AA^{-1} იქნებოდა გადაგვარებული მატრიცი, იმ დროს, როცა სინამდვილეში ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეზე მდგომი E მატრიცი გადაუგვარებელია, ვინაიდან მისი დეტერმინანტი ერთის ტოლია. ამრიგად, გადაგვარებულ მატრიცს არ შეიძლება ჰქონდეს მარჯვენა შებრუნებული მატრიცი. ასეთივე მოსაზრებები გვიჩვენებს, რომ მას არ გააჩნია არც მარცხენა შებრუნებული მატრიცი და ამიტომ გადაგვარებულ მატრიცისათვის შებრუნებული მატრიცი საზოგადოდ არ არსებობს.

გადავდივართ რა გადაუგვარებელი მატრიცების შემთხვევაზე, წინასწარ შემოვიტანოთ შემდეგი დამხმარე ცნება. ვთქვათ მოცემულია n-ური რიგის

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცი.

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცს, რომელიც შედგენილია A მატრიცის ელემენტების ალგებრული დამატებებით, სადაც a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება მდებარეობს j-ური სტრიქონისა და i-ური სვეტის გადაკვეთაზე, ეწოდება A მატრიცის მ ი ე რ თ ე ბ უ ლ ი (ანუ ს ა უ რ თ ი ე რ თ ო) მატრიცი.

ვიპოვოთ ნამრავლები AA^* და A^*A. გამოვიყენოთ § 6-დან ცნობილი ფორმულა დეტერმინანტის დაშლის შესახებ სტრიქონის ან სვეტის მიმართ და აგრეთვე § 7-დან თეორემა დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტთა სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლების ჯამის შესახებ; მაშინ, თუ A მატრიცის დეტერმინანტს d-თი აღვნიშნავთ,

$$d=|A|,$$

მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}. \tag{3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ A მ ა ტ რ ი ც ი გ ა დ ა უ გ ვ ა რ ე ბ ე ლ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ი ს ი მ ი ე რ თ ე ბ უ ლ ი A^* მ ა ტ რ ი ც ი ც გ ა დ ა უ გ ვ ა რ ე ბ ე ლ ი ი ქ ნ ე ბ ა, ა მ ა ს თ ა ნ A^* მ ა ტ რ ი ც ი ს d^* დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს A მ ა ტ რ ი ც ი ს d დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი ს $(n-1)$ ხ ა რ ი ს ხ ს.

მართლაც, თუ გადავალთ (2) ტოლობიდან დეტერმინანტთა შორის ტოლობაზე, მივიღებთ

$$dd^*=d^n,$$

საიდანაც, იმის გამო, რომ $d\neq 0$,

$$d^*=d^{n-1}$$ [1].

ახლა უკვე ადვილია დავამტკიცოთ ნებისმიერი გ ა დ ა უ გ ვ ა რ ე ბ ე ლ ი მატრიცისათვის შებრუნებული მატრიცის არსებობა და ვიპოვოთ მისი სახე. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თუ განვიხილავთ ორი მატრიცის AB ნამრავლს და ერთ-ერთი მამრავლის, მაგალითად B-ს, ყველა ელემენტს გავყოფთ ერთი და იგივე d რიცხვზე, მაშინ AB ნამრავლის ყველა ელემენტიც გაიყოფა ამავე რიცხვზე: დამტკიცებისათვის საკმარისია მოვიგონოთ მატრიცთა გადამრავლების განმარტება. ამრიგად, თუ

$$d=|A|\neq 0,$$

მაშინ (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ A მ ა ტ რ ი ც ი ს ა თ ვ ი ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი ი ქ ნ ე ბ ა ი ს, რ ო მ ე ლ ი ც მ ი ი ღ ე ბ ა მ ი ე რ თ ე ბ უ ლ ი A^* მ ა ტ რ ი ც ი ს ყ ვ ე ლ ა ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს d რ ი ც ხ ვ ზ ე გ ა ყ ო ფ ი თ:

---

[1] შეიძლებოდა დაგვემტკიცებინა, რომ თუ A მატრიცი გადაგვარებულია, მაშინ მისი მიერთებული A^* მატრიციც გადაგვარებულია და ამასთან მისი რანგი არ აღემატებოდა 1 რიცხვს.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}.$$

მართლაც, (3)-დან გამომდინარეობს ტოლობები

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{4}$$

ერთხელ კიდევ გავუსვათ ხაზი იმ გარემოებას, რომ A^{-1} მატრიცის i-ურ სტრიქონში მოთავსებულია $|A|$ დეტერმინანტის i-ური სვეტის ელემენტთა ალგებრული დამატებები, გაყოფილი $d=|A|$-ზე.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ A^{-1} მატრიცი არის ერთადერთი მატრიცი, რომელიც მოცემული გადაუგვარებელი A მატრიცისათვის აკმაყოფილებს (4) პირობას. მართლაც, თუ C მატრიცი ისეთია, რომ

$$AC=CA=E,$$

მაშინ

$$CAA^{-1}=C(AA^{-1})=CE=C,$$

$$CAA^{-1}=(CA)A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1},$$

საიდანაც $C=A^{-1}$.

(4)-დან და დეტერმინანტთა გადამრავლების თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ A^{-1} მატრიცის დეტერმინანტი ტოლია $\frac{1}{|A|}$-სი; ისე, რომ ეს მატრიციც ასევე იქნება გადაუგვარებელი; მისთვის შებრუნებული იქნება A მატრიცი.

თუ ახლა მოცემულია n-ური რიგის ორი კვადრატული A და B მატრიცი, რომელთაგან A გადაუგვარებელია, ხოლო B-ნებისმიერი, მაშინ შეგვიძლია შევასრულოთ მარცხენა და მარჯვენა გაყოფა B მატრიცისა A-ზე, ე. ი. ამოვხსნათ მატრიცული განტოლებები

$$AX=B, \quad YA=B. \tag{5}$$

ამისათვის, მატრიცთა გადამრავლების ასოციაციურობის გამო, საკმარისია დავუშვათ, რომ

$$X=A^{-1}B, \quad Y=BA^{-1};$$

ამასთან (5) განტოლებების ეს ამონახსნები, მატრიცთა გადამრავლების არაკომუტატურობის გამო, საზოგადოდ სხვადასხვა იქნებიან.

მაგალითები. 1) მოცემულია მატრიცი

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

მისი დეტერმინანტი $|A|=5$, ამიტომ შებრუნებული მატრიცი არსებობს, ამასთან

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2) მოცემულია მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

A მატრიცი გადაუგვარებელია, ამასთან

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

ამიტომ $AX=B$, $YA=B$ განტოლებათა ამონახსენები იქნებიან მატრიცები

$$X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}.$$

სწორკუთხოვანი მატრიცების გამრავლება. თუმცა წინა პარაგრაფში განსაზღვრული იყო მხოლოდ ერთნაირი რიგის მქონე კვადრატული მატრიცების გამრავლება, მაგრამ შესაძლებელია ამ განმარტების გავრცელება ისეთ მართკუთხოვან A და B მატრიცთა შემთხვევისთვისაც, რომელთათვის შესაძლებელია წინა პარაგრაფის (3) ფორმულის გამოყენება, ე. ი. როცა A მატრიცის ყოველი სტრიქონი შეიცავს იმდენ ელემენტს, რამდენსაც B მატრიცის ყოველი სვეტი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეიძლება ვილაპარაკოთ A და B სწორკუთხოვანი მატრიცების გამრავლების შესახებ იმ შემთხვევაში, თუ A მატრიცის სვეტთა რიცხვი ტოლია B მატრიცის სტრიქონთა რიცხვისა; ამასთან, AB მატრიცის სტრიქონთა რიცხვი უდრის A მატრიცის სტრიქონთა რიცხვს, ხოლო მისი სვეტთა რიცხვი—B მატრიცის სვეტთა რიცხვს.

მაგალითები:

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

3) $(5\ 1\ 0\ -3)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(11\ -1).$

შეგვიძლია მართკუთხოვან მატრიცთა გადამრავლებას დავუკავშიროთ უცნობთა წრფივი გარდაქმნების თანმიმდევრული შესრულება, თუკი უკანასკნელთა განმარტებაში უარს ვიტყვით იმ პირობაზე, რომ წრფივი გარდაქმნის დროს უცნობთა რიცხვი არ შეიცვალოს.

თუ სიტყვასიტყვით გავიმეორებთ კვადრატული მატრიცებისათვის ზემოთ მოცემულ დამტკიცებას, ადვილად შევამოწმებთ აგრეთვე, რომ ასოციაციურობის კანონი ძალაში რჩება სწორკუთხოვანი მატრიცების გადამრავლების შემთხვევაშიაც.

ვისარგებლოთ ახლა მართკუთხოვანი მატრიცების გადამრავლებითა და შებრუნებული მატრიცის თვისებებით, რათა მივიღოთ კრამერის წესის ახალი გამოყვანა, რომელიც უკვე აღარ მოითხოვს ისეთ რთულ გამოთვლებს, როგორიც § 7-ში დაგვჭირდა. ვთქვათ, მოცემულია n უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

ამასთან ამ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. (6) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცი აღვნიშნოთ A-თი; ეს მატრიცი გადაუგვარებელია, რადგანაც, პირობის თანახმად, $d=|A|\neq 0$. შემდეგ, აღვნიშნოთ X-ით უცნობთა სვეტი, ხოლო B-თი—(6) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტი, ე. ი.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_n\end{pmatrix}.$$

AX ნამრავლს აქვს აზრი, რადგანაც A მატრიცის სვეტების რიცხვი უდრის X მატრიცის სტრიქონების რიცხვს, ამასთან ეს ნამრავლი იქნება განტოლებათა (6) სისტემის მარცხენა ნაწილებისაგან შედგენილი სვეტი. ამრიგად, (6) სისტემა შეგვიძლია ჩავწეროთ ერთი მატრიცული განტოლების სახით

$$AX=B.\qquad(7)$$

თუ გავამრავლებთ (7) ტოლობის ორივე მხარეს მარცხნიდან A^{-1} მატრიცზე, რომლის არსებობა გამომდინარეობს კვადრატული A მატრიცის გადაუგვარებლობიდან, მივიღებთ:

$$X=A^{-1}B.\qquad(8)$$

მარჯვნივ მდგომი ნამრავლი იქნება ერთი სვეტისაგან შედგენილი მატრიცი; მისი j-ური ელემენტი უდრის A^{-1} მატრიცის j-ური სტრიქონის ელემენტებისა და B მატრიცის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. უდრის რიცხვს

$$\frac{A_{1j}}{d}b_1+\frac{A_{2j}}{d}b_2+\dots+\frac{A_{nj}}{d}b_n=\frac{1}{d}(A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\dots+A_{nj}b_n).$$

მაგრამ მარჯვენა მხარეში მოთავსებული ფრჩხილი წარმოადგენს იმ d_j დეტერმინანტის დაშლას j-ური სვეტის მიხედვით, რომელიც მიიღება d დეტერმინანტისაგან მისი j-ური სვეტის B სვეტით შეცვლით. ამრიგად, (8) ფორმულები ტოლფასოვანია § 7-ის (3) ფორმულებისა, რომლებიც გამოსახავენ (6) სისტემის კრამერის წესით მიღებულ ამონახსენს.

დაგვრჩა ვაჩვენოთ, რომ უცნობთა მიღებული მნიშვნელობები მართლაც შეადგენენ (6) სისტემის ამონახსენს. ამისათვის საკმარისია (8) გამოსახულება ჩავსვათ (7) მატრიცულ განტოლებაში, რაც, ცხადია, მოგვცემს იგივეობას $B=B$.

მატრიცების ნამრავლის რანგი. გადაგვარებული მატრიცების შემთხვევისათვის დეტერმინანტების გამრავლების თეორემა სხვას არაფერს იძლევა, გარდა იმისა, რომ ნამრავლიც იქნება გადაგვარებული, თუმცა გადაგვარებული კვადრატული მატრიცები ერთიმეორისაგან შეიძლება გავარჩიოთ კიდევ მათი რანგის მიხედვით. შევნიშნოთ, რომ არ არსებობს სავსებით განსაზღვრული დამოკიდებულება თანამამრავლთა რანგებსა და ნამრავლის რანგს შორის, როგორც ამას შემდეგი მაგალითები გვიჩვენებს:

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

ორივე შემთხვევაში მრავლდებიან მატრიცები, რომელთაც აქვთ რანგი 1, მაგრამ ნამრავლს ერთ შემთხვევაში აქვს რანგი 1, ხოლო მეორე შემთხვევაში—რანგი 0. სამართლიანია, და ამასთანავე არა მარტო კვადრატული, არამედ სწორკუთხოვანი მატრიცებისთვისაც, მხოლოდ შემდეგი თეორემა.

მატრიცთა ნამრავლის რანგი არ აღემატება თვითეული თანამამრავლის რანგს.

საკმარისია დავამტკიცოთ ეს თეორემა ორი თანამამრავლის შემთხვევისათვის. ვთქვათ, მოცემულია მატრიცები A და B, რომლებისთვისაც AB ნამრავლს აქვს აზრი; აღვნიშნოთ $AB=C$. განვიხილოთ § 13-ის (3) ფორმულა, რომელიც იძლევა გამოსახულებებს C მატრიცის ელემენტებისათვის. თუ განვიხილავთ ამ ფორმულას მოცემული k-სათვის და ყველა შესაძლო i-სათვის ($i=1, 2,\dots$), მივიღებთ, რომ C მატრიცის k-ური სვეტი წარმოადგენს A მატრიცის ყველა სვეტის ჯამს აღებულს რაღაც კოეფიციენტებით (სახელდობრ, b_{1k}, $b_{2k},\dots$ კოეფიციენტებით). ამით დამტკიცებულია, რომ C მატრიცის სვეტების სისტემა წრფივად გამოისახება A მატრიცის სვეტების სისტემით

და ამიტომ, როგორც ეს § 9-ში ნაჩვენები, პირველი სისტემის რანგი ნაკლებია ან ტოლი მეორე სისტემის რანგისა; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, C მატრიცის რანგი არ არის მეტი A მატრიცის რანგზე. რადგანაც, მეორე მხრივ, § 13-ის იმავე (3) ფორმულიდან, მოცემული i-სათვის და ყველა k-სათვის, გამომდინარეობს, რომ C მატრიცის ყოველი i-ური სტრიქონი წარმოადგენს B მატრიცის სტრიქონთა წრფივ კომბინაციას, ამიტომ ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ C მატრიცის რანგი არ აღემატება B მატრიცის რანგს.

უფრო ზუსტი შედეგი მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთ-ერთი თანამამრავლი წარმოადგენს გადაუგვარებელ კვადრატულ მატრიცს:

ნებისმიერი A მატრიცის გადაუგვარებელ კვადრატულ Q მატრიცზე მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ნამრავლის რანგი უდრის A მატრიცის რანგს.

ვთქვათ, მაგალითად,

$$AQ=C. \tag{9}$$

წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ C მატრიცის რანგი არ აღემატება A მატრიცის რანგს. მაგრამ, თუ გავამრავლებთ (9) ტოლობას მარჯვნიდან Q^{-1}-ზე, მივიღებთ ტოლობას

$$A=CQ^{-1},$$

და ამიტომ, კვლავ წინა თეორემის საფუძველზე, A მატრიცის რანგი არ აღემატება C მატრიცის რანგს. ამ ორი შედეგის შედარება ამტკიცებს, რომ A და C მატრიცების რანგები ტოლია.

§ 15. მატრიცების შეკრება და მატრიცის გამრავლება რიცხვზე

n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებისათვის შეკრება განიმარტება შემდეგნაირად:

ორი n-ური რიგის კვადრატული $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ მატრიცის $A+B$ ჯამი ეწოდება ისეთ $C=(c_{ij})$ მატრიცს, რომლის ყველა ელემენტი წარმოადგენს A და B მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$ [1]

ჩვენს მიერ განმარტებული მატრიცების შეკრება, ცხადია, იქნება კომუტატური და ასოციაციური. მისთვის არსებობს შებრუნებული ოპერაცია — გამოკლება: A და B მატრიცების სხვაობა იქნება მატრიცი, რომლის ელემენტები წარმოადგენენ მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემენტების სხვაობებს. ამასთან ნულის როლს თამაშობს ნულოვანი მატრიცი, რომელიც მთლიანად ნულებისაგან შედგება. შემდგომში ეს მატრიცი აღინიშნება სიმბოლო 0-ით,

[1] შეიძლებოდა, რასაკვირველია, მატრიცების გამრავლებაც განმარტებული ყოფილიყო სეთივე ბუნებრივი წესით: შესაბამისი ელემენტების გადამრავლებით. მაგრამ § 13-ში განარტებული გამრავლებისაგან განსხვავებით ასეთ გადამრავლებას არ ექნებოდა რაიმე ერიოზული გამოყენება.

ნულოვანი მატრიცისა და რიცხვი 0-ის ერთმანეთში არევა სერიოზულ საშიშროებას არ წარმოადგენს.

კვადრატული მატრიცების შეკრება და მათი გამრავლება, განმარტებული § 13-ში, დაკავშირებულია დისტრიბუციულობის კანონებით.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია სამი n-ური რიგის მატრიცი $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. მაშინ ნებისმიერი i და j-სათვის ადგილი ექნება ცხადტოლობას

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}b_{is}c_{sj}.$$

მაგრამ ამ ტოლობის მარცხენა მხარე არის $(A+B)C$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარე ელემენტი, ხოლო მარჯვენა მხარე—$AC+BC$ მატრიცში იმავე ადგილზე მდებარე ელემენტი. ამით დამტკიცებულია ტოლობა

$$(A+B)C=AC+BC.$$

ტოლობა $C(A+B)=CA+CB$ დამტკიცდება ასეთივე გზით. გასაგებია, რომ მატრიცების გამრავლების არაკომუტატურობა თხოულობს დისტრიბუციულობის ამ ორივე კანონის დამტკიცებას.

შემოვიტანოთ მატრიცის რიცხვზე გამრავლების შემდეგი განმარტება.

კვადრატული $A=(a_{ij})$ მატრიცის k რიცხვზე kA ნამრავლი ეწოდება ისეთ $A'=(a'_{ij})$ მატრიცს, რომელიც მიიღება A მატრიცის ყველა ელემენტის გამრავლებით k რიცხვზე:

$$a'_{ij}=ka_{ij}.$$

მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ერთ ასეთ მაგალითს ჩვენ უკვე შევხვდით წინა პარაგრაფში: თუ A მატრიცი გადაუგვარებელია და ამასთან $|A|=d$, მაშინ მისი შებრუნებული A^{-1} მატრიცი და მიერთებული A^* მატრიცი დაკავშირებულნი არიან ტოლობით

$$A^{-1}=d^{-1}A^*.$$

როგორც ვიცით, ყოველი n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც n-განზომილებიანი ვექტორი, ამასთან მატრიცებისა და ვექტორების ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა. ამ თვალსაზრისით ახლახან განმარტებული მატრიცების შეკრება და მატრიცების რიცხვზე ნამრავლი გადაიქცევა ვექტორების შეკრებად და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებად. ამრიგად, n-ური რიგის კვადრატული მატრიცების ერთობლიობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც n^2-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა (სადაც A და B n-ური რიგის მატრიცებია, k, l რიცხვებია, 1 არის რიცხვი ერთი):

$$k(A+B)=kA+kB, \tag{1}$$

$$(k+l)A=kA+lA, \tag{2}$$

$$k(lA)=(kl)A, \tag{3}$$

$$1\cdot A=A \tag{4}$$

(1) და (2) თვისებები ერთმანეთთან აკავშირებს მატრიცების რიცხვზე გამრავლებას მატრიცების შეკრებასთან. ამასთან ერთად არსებობს მეტად მნიშვნელოვანი კავშირი მატრიცის რიცხვზე გამრავლებასა და თვით მატრიცების გამრავლებას შორის, სახელდობრ:

$$(kA)B=A(kB)=k(AB), \tag{5}$$

ე. ი. თუ მატრიცების გამრავლების დროს ერთი თანამამრავლი მრავლდება k რიცხვზე, მაშინ მთელი ნამრავლიც მრავლდება ამავე k რიცხვზე.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია მატრიცები $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ და რიცხვი k. მაშინ ნებისმიერი i და j-სთვის გვექნება:

$$\sum_{s=1}^{n}(ka_{is})b_{sj}=k\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj},$$

მაგრამ ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი არის $(kA)B$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარე ელემენტი, ხოლო მარჯვენა ნაწილი—$k(AB)$ მატრიცში იმავე ადგილზე მდებარე ელემენტი. ამით დამტკიცებულია ტოლობა

$$(kA)\mathrm{B}=k(AB).$$

ასეთივე გზით მტკიცდება ტოლობა $A(kB)=k(AB)$.

მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია საშუალებას გვაძლევს შემოვიყვანოთ მატრიცების ჩაწერის ახალი ხერხი. E_{ij}-თი აღვნიშნოთ მატრიცი, რომლის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარეობს რიცხვი 1, ხოლო ყველა სხვა ელემენტი ნულის ტოლია. თუ დავუშვებთ, რომ $i=1, 2, \ldots, n$ და $j=1, 2, \ldots, n$, მაშინ მივიღებთ E_{ij} სახის n^2 მატრიცს, რომლებიც, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, დაკავშირებული არიან გამრავლების შემდეგი ცხრილით:

$$E_{is}E_{sj}=E_{ij};\ E_{is}E_{tj}=0,\ \text{როცა}\ s\neq t.$$

kE_{ij} მატრიცი მხოლოდ იმით განსხვავდება E_{ij} მატრიცისაგან, რომ მის i-ური სტრიქონის და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარეობს რიცხვი k. თუ გავითვალისწინებთ ამას და გამოვიყენებთ მატრიცების შეკრების განმარტებას, ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცისათვის გვექნება ასეთი ჩაწერა:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}, \tag{6}$$

ამასთან, ცხადია, რომ A მატრიცს გააჩნია ერთადერთი (6) სახის ჩაწერა.

kE მატრიცს, სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა, მატრიცის რიცხვზე გამრავლების განმარტების თანახმად, აქვს შემდეგი სახე:

$$kE=\begin{pmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{pmatrix},$$

ე. ი. მთავარ დიაგონალზე მდებარეობს ერთი და იგივე k რიცხვი, ხოლო ყველა ელემენტი ამ დიაგონალის გარეთ ტოლია ნულისა. ასეთ მატრიცებს **სკალარული** მატრიცები ეწოდებათ.

მატრიცების შეკრების განმარტება გვაძლევს შემდეგ ტოლობას

$$kE+lE=(k+l)E. \tag{7}$$

მეორე მხრივ, თუ გამოვიყენებთ მატრიცების გამრავლების განმარტებას, ანდა დავეყრდნობით (5) ტოლობას, მივიღებთ:

$$kE\cdot lE=(kl)E. \tag{8}$$

A **მატრიცის გამრავლება** k **რიცხვზე შეგვიძლია გავიგოთ, როგორც** A**-ს გამრავლება სკალარულ** kE **მატრიცზე მატრიცთა გამრავლების აზრით.** მართლაც, (5)-ის მიხედვით

$$(kE)A=A(kE)=kA.$$

აქედან გამომდინარეობს ასევე, რომ **ყოველი სკალარული მატრიცი გადანაცვლებადია ნებისმიერ** A **მატრიცთან.** მეტად მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ სკალარული მატრიცები ერთადერთია, რომლებსაც ეს თვისება გააჩნიათ:

თუ რაიმე n**-ური რიგის** $C=(c_{ij})$ **მატრიცი გადანაცვლებადია ამავე რიგის მქონე ნებისმიერ მატრიცთან, მაშინ** C **მატრიცი სკალარულია.**

მართლაც, დავუშვათ, რომ $i\neq j$ და განვიხილოთ, პირობის თანახმად, ტოლი ნამრავლები CE_{ij} და $E_{ij}C$ (იხ. ზემოთ E_{ij} მატრიცის განმარტება). ადვილი სანახავია, რომ CE_{ij} მატრიცის ყველა სვეტი, j-ური სვეტის გარდა, შედგება ნულებისაგან, ხოლო j-ური სვეტი ემთხვევა C მატრიცის i-ურ სვეტს; კერძოდ CE_{ij} მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარეობს c_{ii} ელემენტი. ანალოგიურად, $E_{ij}C$ მატრიცის ყველა სტრიქონი, გარდა i-ური სტრიქონისა, შედგება ნულებისაგან, ხოლო i-ური სტრიქონი ემთხვევა C მატრიცის j-ურ სტრიქონს; $E_{ij}C$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარეობს c_{jj} ელემენტი. თუ გამოვიყენებთ ტოლობას $CE_{ij}=E_{ij}C$, მივიღებთ, რომ $c_{ii}=c_{jj}$ (როგორც ტოლი მატრიცების ერთი და იგივე ადგილებზე მდებარე ელემენტები), ე. ი. C მატრიცის მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთმანეთის ტოლია. მეორეს მხრივ, CE_{ij} მატრიცის j-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდება-

რეობს c_{ji} ელემენტი; ხოლო E_iC მატრიცის ამავე ადგილზე მდებარეობს ნული (რადგან $i \neq j$) და ამიტომ, $c_{ji}=0$, ე. ი. C მატრიცის ყოველი ელემენტი მთავარი დიაგონალის გარეთ უდრის ნულს. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 16*. დეტერმინანტთა თეორიის აქსიომატიკური აგება

n-ური რიგის დეტერმინანტი არის რიცხვი, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება n-ური რიგის მოცემული კვადრატული მატრიცით. ამ ცნების განმარტება, მოყვანილი § 4-ში, მიუთითებს წესზე, რომლის მიხედვითაც დეტერმინანტი განისაზღვრება მოცემული მატრიცის ელემენტების საშუალებით. მაგრამ ეს კონსტრუქციული განმარტება შეიძლება შევცვალოთ აქსიომატიკური განმარტებით; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეიძლება §§ 4 და 6-ში დეტერმინანტის დადგენილ თვისებებს შორის ისეთებზე მივუთითოთ, რომ მატრიცის ერთადერთი ფუნქცია ნამდვილი მნიშვნელობებით, რომელსაც ეს თვისებები გააჩნია, მისი დეტერმინანტი იყოს.

ასეთი სახის უმარტივესი განმარტება დეტერმინანტის სტრიქონის მიხედვით დაშლის გამოყენებაში მდგომარეობს. ვიხილავთ ნებისმიერი რიგის კვადრატულ მატრიცებს და ვუშვებთ, რომ ყოველ ასეთ M მატრიცს შეესაბამება რიცხვი d_M, ამასთან სრულდება შემდეგი პირობები:

1) თუ M მატრიცი პირველი რიგისაა, ე. ი. შედგება მხოლოდ ერთი a ელემენტისაგან, მაშინ $d_M=a$.

2) თუ n-ური რიგის M მატრიცის პირველი სტრიქონი $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ ელემენტებისაგან შედგება და თუ M_i-ით, $i=1, 2, \ldots, n$, აღნიშნულია $(n-1)$ რიგის მატრიცი, რომელიც მიღებულია M-იდან პირველი სტრიქონისა და i-ური სვეტის ამოშლით, მაშინ

$$d_M=a_{11}d_{M_1}-a_{12}d_{M_2}+a_{13}d_{M_3}-\ldots+(-1)^{n-1}a_{1n}\,d_{M_n}.$$

ყოველი M მატრიცისათვის რიცხვი d_M უდრის ამ მატრიცის დეტერმინანტს. ვანდობთ მკითხველს ამ დებულების დამტკიცებას, რომელიც ჩატარდება ინდუქციის ხერხით n-ის მიმართ და § 6-ის შედეგების გამოყენებით.

ბევრად უფრო საინტერესოა დეტერმინანტის აქსიომატიკური განსაზღვრის სხვა ფორმები, რომლებიც ეხებიან მხოლოდ ერთ მოცემულ n-ურ რიგს და რომლებსაც საფუძვლად უძევთ დეტერმინანტისათვის § 4-ში დადგენილი რამდენიმე უმარტივესი თვისება. ჩვენ შევუდგებით ახლა ერთ-ერთ ასეთი განმარტების განხილვას.

ვთქვათ ყოველ n-ური რიგის კვადრატულ M მატრიცს შეესაბამება რიცხვი d_M და ამასთანავე სრულდება შემდეგი პირობები:

I. თუ M მატრიცის სტრიქონებიდან ერთი მაინც მრავლდება k რიცხვზე, მაშინ d_M რიცხვიც გამრავლდება k-ზე.

II. d_M რიცხვი არ იცვლება, თუ M მატრიცის რომელიმე სტრიქონს ემატება ამ მატრიცის სხვა სტრიქონი.

III. თუ E ერთეულოვანი მატრიცაა, მაშინ $d_E=1$.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი M მატრიცისათვის რიცხვი d_M ტოლია ამ მატრიცის დეტერმინანტისა.

გამოვიყვანოთ ჯერ I—III პირობებიდან d_M რიცხვის რამდენიმე თვისება, რომლებიც ანალოგიურია დეტერმინანტის შესაბამისი თვისებებისა.

(1) თუ M მატრიცის სტრიქონებიდან ერთი მაინც შედგება ნულისაგან, მაშინ $d_M=0$.

მართლაც, თუ ნულებისაგან შედგენილ სტრიქონს გავამრავლებთ 0 რიცხვზე, ამით არ ვცვლით მატრიცს, მაგრამ I პირობის ძალით, რიცხვი d_M იძენს მამრავლად 0-ს. ამიტომ

$$d_M=0 \quad d_M=0.$$

(2) d_M რიცხვი არ შეიცვლება, თუ M მატრიცის i-ურ სტრიქონს მივუმატებთ k რიცხვზე გამრავლებულ ამავე მატრიცის j-ურ სტრიქონს, $i \neq j$.

თუ $k=0$, მაშინ ყველაფერი დამტკიცებულია. თუკი $k \neq 0$, მაშინ გავამრავლებთ j-ურ სტრიქონს k რიცხვზე; მივიღებთ M' მატრიცს, რომლისთვისაც, I პირობის ძალით, $d_{M'}=kd_M$. შემდეგ M' მატრიცის i-ურ სტრიქონს მივუმატებთ მის j-ურ სტრიქონს და მივიღებთ M'' მატრიცს, ამასთან, II პირობის ძალით, $d_{M''}=d_{M'}$. ბოლოს, M'' მატრიცის j-ურ სტრიქონს ვამრავლებთ k^{-1} რიცხვზე. ვღებულობთ M''' მატრიცს, რომელიც სინამდვილეში მიღებულია M მატრიცისაგან ისეთი გარდაქმნით, რომელიც მითითებულია დასამტკიცებელი თვისების ფორმულირებაში; ამასთანავე

$$d_{M'''}=k^{-1}d_{M''}=k^{-1}d_{M'}=k^{-1}\cdot kd_M=d_M.$$

(3) თუ M მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ $d_M=0$.

მართლაც, თუ ერთი სტრიქონი, მაგალითად i-ური, არის სხვა სტრიქონების წრფივი კომბინაცია, მაშინ გამოვიყენებთ რა რამდენჯერმე (2) გარდაქმნას, შევძლებთ, რომ i-ური სტრიქონი შევცვალოთ ნულებიანი სტრიქონით. (2) გარდაქმნა არ ცვლის d_M რიცხვს და ამიტომ, (1) თვისების გამო, $d_M=0$.

(4) თუ M მატრიცის i-ური სტრიქონი წარმოადგენს ორი β და γ ვექტორის ჯამს და თუ M' და M'' მატრიცები მიღებულია M მატრიცისაგან მისი i-ური სტრიქონის β და, შესაბამისად, γ ვექტორებით შეცვლით, მაშინ

$$d_M=d_{M'}+d_{M''}.$$

მართლაც, ვთქვათ S არის M მატრიცის ყველა სტრიქონის სისტემა, გარდა i-ურისა. თუ S-ში არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, მაშინ წრფივად დამოკიდებული იქნება ყველა M, M' და M'' მატრიცის სტრიქონები და ამიტომ, (3) თვისების ძალით, $d_M=d_{M'}=d_{M''}=0$, საიდანაც გამომდინარეობს, ამ შემთხვევისათვის, დასამტკიცებელი თვისების სამართლიანობა.

თუკი S სისტემა, რომელიც შედგება $n-1$ ვექტორისაგან, წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ, როგორც გვიჩვენებს § 9-ის შედეგები, მისი შევსება შეიძლება რაიმე α ვექტორით n განზომილებიან ვექტორული სივრცის მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემამდე. ამ სისტემის საშუალებით შეგვიძლია β და γ ვექტორები გამოვსახოთ წრფივად. დავუშვათ, რომ α ვექტორი ამ გამოსახულებებში შედის k და, შესაბამისად, l კოეფიციენტებით; $\beta+\gamma$ ვექტორის გამოსახულებაში, ე. ი. M მატრიცის i-ური სტრიქონისათვის, α ვექტორი შევა, მაშასადამე, $k+l$ კოეფიციენტით. ახლა შეიძლება M, M' და M'' მატრიცების გარდაქმნა, თუ გამოვაკლებთ მათ i-ურ სტრიქონებს სხვა სტრიქონთა რაიმე წრფივ კომბინაციებს ისე, რომ მათი i-ური სტრიქონები შესაბამისად იყოს ვექტორები $(k+l)\alpha$, $k\alpha$ და $l\alpha$. ამიტომ, თუ ავღნიშნავთ M^{0}-ით მატრიცს, რომელიც მიიღება M-საგან მისი i-ური სტრიქონის შეცვლით α ვექტორით და თუ გავითვალისწინებთ (2)-ს და I-ს, მივიღებთ ტოლობებს:

$$d_M=(k+l)d_{M^0}, \; d_{M'}=kd_{M^0}, \; d_{M''}=ld_{M^0}.$$

ამით (4) თვისება დამტკიცებულია.

(5) თუ $\overline{M}$ მატრიცი მიღებულია M მატრიცის ორი სტრიქონის ტრანსპოზიციით, მაშინ $d_{\overline{M}}=-d_M$.

ვთქვათ, მართლაც, საჭიროა M მატრიცში i-ურ და j-ურ ნომრებიანი სტრიქონების გადანაცვლება. ამას შეგვიძლია მივაღწიოთ შემდეგ გარდაქმნათა თანმიმდევრობით; ჯერ M მატრიცის i-ურ სტრიქონს მივუმატებთ მის j-ური სტრიქონს და მივიღებთ M' მატრიცს, ამასთან, II პირობის ძალით, $d_{M'}=d_M$. შემდეგ M' მატრიცის j-ურ სტრიქონს გამოვაკლებთ მის i-ურ სტრიქონს და მივიღებთ M'' მატრიცს, რომლისთვისაც, (2) თვისების ძალით, გვექნება $d_{M''}=d_{M'}$; M'' მატრიცის j-ური სტრიქონი M მატრიცის i-ური სტრიქონისაგან ნიშნით იქნება განსხვავებული. ახლა M'' მატრიცის i-ურ სტრიქონს დავუმატოთ მისი j-ური სტრიქონი. M''' მატრიცისათვის, რომელსაც ვღებულობთ ამ გარდაქმნით, II პირობის ძალით, გვექნება $d_{M'''}=d_{M''}$, ამასთან ამ მატრიცის i-ური სტრიქონი თანხვდება M მატრიცის j-ურ სტრიქონს. ბოლოს, გადავამრავლებთ რა M'' მატრიცის j-ურ სტრიქონს -1 რიცხვზე, მივიღებთ საძებნ $\overline{M}$ მატრიცს. ამიტომ, I პირობის ძალით,

$$d_{\overline{M}}=-d_{M'''}=-d_M.$$

(6) თუ M' მატრიცი M მატრიცისგანაა მიღებული სტრიქონთა გადანაცვლებით და, ამასთან, M' მატრიცის i-ურ სტრიქონს, $i=1, 2, \ldots, n$, M მატრიცის α_i სტრიქონი წარმოადგენს, მაშინ

$$d_{M'}=\pm d_M.$$

ამასთან, პლუს ნიშანი იმ შემთხვევას შეესაბამება, როცა

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ჩასმა ლუწოვანია, ხოლო მინუს ნიშანი იმ შემთხვევას როცა ეს ჩასმა კენტოვანია.

მართლაც, M' მატრიცი შეიძლება მივიღოთ M მატრიცისაგან ორი სტრიქონის რამდენჯერმე ტრანსპოზიციით, რის გამოც შესაძლებელია ვისარგებლოთ (5) თვისებით. ამ ტრანსპოზიციათა რიცხვის ლუწკენტოვნება, როგორც § 3-დანაა ცნობილი, ზემოთ აღნიშნული ჩასმის ლუწკენტოვნებას განსაზღვრავს.

ახლა განვიხილოთ მატრიცები $M=(a_{ij})$, $N=(b_{ij})$ და მათი ნამრავლი $Q=MN$ § 13 აზრით. ვიპოვით d_Q რიცხვს. ვიცით, რომ Q მატრიცის ყოველი i-ური სტრიქონი N მატრიცის ყველა სტრიქონის ჯამს წარმოადგენს, აღებულს შესაბამისად $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ კოეფიციენტებით (იხ., მაგალითად, § 14). Q მატრიცის ყველა სტრიქონი შევცვალოთ მათი აღნიშნული წრფივი გამოსახულებებით N მატრიცის სტრიქონებით და ვისარგებლოთ რამდენიმეჯერ (4) თვისებით. მივიღებთ, რომ d_Q რიცხვი d_T რიცხვთა ჯამის ტოლი იქნება ყოველგვარი შემდეგი სახის T მატრიცებისათვის: T მატრიცის i-ური სტრიქონი, $i=1, 2, \ldots, n$, N მატრიცის α_i-ური სტრიქონის $a_{i\alpha_i}$ რიცხვზე ნამრავლის ტოლია. ამასთან, (3) თვისების ძალით, შესაძლებელია განხილვიდან გამოვრიცხოთ ყველა ის T მატრიცი, რომლისთვისაც არსებობენ ისეთი ინდექსები i და j, $i \neq j$, რომ $\alpha_i=\alpha_j$; სხვანაირად რომ ვთქვათ, მხოლოდ ისეთი T მატრიცებზ დარჩებიან, რომლებისთვისაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ინდექსები $1, 2, 3, \ldots, n$ რიცხვთა გადანაცვლებას შეადგენენ. I-სა და (6) თვისების ძალით, ასეთი მატრიცისათვის d_T რიცხვს აქვს სახე

$$d_T = \pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n} d_N,$$

სადაც ნიშანი ინდექსთა ჩასმის ლუწკენტოვნებით განისაზღვრება. აქედან d_Q რიცხვისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას: თუ ყოველი d_T სახის შესაკრებიდან გამოვიტანთ ფრჩხილებს გარეთ საერთო d_N მამრავლს, მაშინ, ცხადია, ფრჩხილებში M მატრიცის $|M|$ დეტერმინანტი დარჩება § 4-ში მოცემული კონსტრუქციული განმარტების აზრით, ე. ი.

$$d_Q = |M| \cdot d_N. \tag{*}$$

თუ ახლა N მატრიცის სახით ერთეულოვან E მატრიცს ავიღებთ, მაშინ მივიღებთ $Q=M$ და, III თვისებების ძალით, $d_N=d_E=1$, ე. ი. ნებისმიერი M მატრიცისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$d_M = |M|,$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა. ერთდროულად კიდევ ერთხელ, ამასთან ლაპლასის თეორემის გამოყენების გარეშე, დამტკიცებულია თეორემა დეტერმინანტთა გამრავლების შესახებ. ამისათვის საკმარისია (*) ტოლობაში d_Q და d_N რიცხვები შესაბამისი მატრიცების დეტერმინანტებით შევცვალოთ.

ეს აქსიომატიკური განხილვა I—III პირობების *დამოუკიდებლობის* დამტკიცებით დავამთავროთ, ე. ი. იმის დამტკიცებით, რომ არც ერთი ამ პირობათაგანი არ წარმოადგენს დანარჩენი ორის შედეგს.

III პირობის დამოუკიდებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $d_M=0$ n-ური რიგის ყოველი M მატრიცისათვის. ცხადია, I და II პირობები შესრულდება, III პირობა კი დაირღვევა.

II პირობის დამოუკიდებლობის დამტკიცებისათვის დავუშვათ, რომ ყოველი M მატრიცისათვის d_M რიცხვი ამ მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლის ტოლია. I და III პირობები სრულდება, ხოლო II პირობას უკვე არა აქვს ადგილი.

ბოლოს, I პირობის დამოუკიდებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $d_M=1$ ყოველი M მატრიცისათვის. ამ შემთხვევაში II და III პირობები სრულდება, ხოლო I პირობა ირღვევა.

თავი მეოთხე

კომპლექსური რიცხვები

§ 17. კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა

ელემენტარულ ალგებრის კურსში რამდენიმეჯერ ხდება რიცხვთა მარაგის გამდიდრება. მოსწავლე, რომელიც ალგებრის შესწავლას იწყებს, არითმეტიკიდან იცნობს დადებით მთელ და წილად რიცხვებს. ალგებრა არსებითად იწყება უარყოფითი რიცხვების შემოტანით, ე. ი. ჩამოყალიბებით უმნიშვნელოვანეს რიცხვთა სისტემიდან პირველისა—*მთელ რიცხვთა* სისტემისა, რომელიც ყველა დადებითი და ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვისა და ნულისაგან შედგება, და *რაციონალურ რიცხვთა* უფრო ფართო სისტემისა, რომელიც ყველა მთელი რიცხვისა და ყველა როგორც დადებითი, ისევე უარყოფითი წილადი რიცხვისაგან შედგება.

რიცხვთა მარაგის შემდგომი გაფართოება ხდება მაშინ, როცა ირაციონალური რიცხვები შემოიტანება. სისტემა, რომელიც ყველა რაციონალური და ყველა ირაციონალური რიცხვისაგან შედგება, *ნამდვილ* (ანუ *არს*) *რიცხვთა* სისტემად იწოდება. ნამდვილ რიცხვთა სისტემის მკაცრი აგება ჩვეულებრივ მათემატიკური ანალიზის საუნივერსიტეტო კურსში შედის, მაგრამ ჩვენთვის წინა თავებში საკმარისი იყო და შემდეგშიც საკმარისი იქნება ნამდვილი რიცხვების შესახებ ის ცოდნა, რომელიც აქვს უმაღლესი ალგებრის შესწავლის დამწყებ მკითხველს.

დაბოლოს, ელემენტარული ალგებრის კურსის დასასრულს, ნამდვილ რიცხვთა სისტემა ფართოვდება *კომპლექსურ რიცხვთა* სისტემამდე. რიცხვთა ეს სისტემა, რა თქმა უნდა, მკითხველისათვის უფრო უცხო რჩება, ვიდრე ნამდვილ რიცხვთა სისტემა, თუმცა მას სინამდვილეში მრავალი ძალიან კარგი თვისება აქვს. ამ თავში ერთხელ კიდევ იქნება გადმოცემული, აუცილებელი სისრულით, კომპლექსურ რიცხვთა თეორია.

კომპლექსური რიცხვები შემოდის შემდეგ ამოცანასთან დაკავშირებით. როგორც ცნობილია, ნამდვილი რიცხვები საკმარისი არ არის იმისათვის, რომ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ნებისმიერი კვადრატული განტოლება ამოვხსნათ. კვადრატულ განტოლებათაგან უმარტივესი, რომელსაც არა აქვს ფესვები ნამდვილ რიცხვებს შორის, არის

$$x^2+1=0; \qquad (1)$$

ამჟამად ჩვენ მხოლოდ ეს განტოლება გვაინტერესებს. ჩვენს წინაშე მდგომი ამოცანა ასეთია: ნამდვილ რიცხვთა სისტემა უნდა გავაფართოოთ რიცხვთა ისეთ სისტემამდე, რომელშიც (1) განტოლებას უკვე ექნება ფესვი.

იმ მასალად, რომლისგანაც აიგება რიცხვთა ეს ახალი სისტემა, ავიღოთ სიბრტყის წერტილები. მოვიგონოთ, რომ ნამდვილი რიცხვების გამოსახვა სწორი ხაზის წერტილებით (იმაზე დაფუძნებული, რომ თუ მოცემული კოორდინატთა სათავისა და სამასშტაბო ერთეულისათვის წრფის ყოველ წერტილს თანადობაში მოვუყვანთ მის აბსცისს, მაშინ ურთიერთცალსახა თანადობას დავამყარებთ წრფის ყველა წერტილთა სიმრავლესა და ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის) სისტემატურად გამოიყენება მათემატიკის ყველა დარგში და იმდენად ჩვეულია, რომ ჩვენ ჩვეულებრივ არ ვანსხვავებთ ნამდვილ რიცხვსა და მის გამომსახველ წერტილს.

ამრიგად, ჩვენ გვინდა განვსაზღვროთ რიცხვთა სისტემა, რომელიც გამოისახება სიბრტყის ყველა წერტილით. აქამდე ჩვენ არ დაგვჭირებია სიბრტყის წერტილთა შეკრება ან გამრავლება, ამიტომ უფლება გვაქვს წერტილებზე ოპერაციათა განსაზღვრის ამორჩევისას მხოლოდ იმაზე ვიზრუნოთ, რომ ახალ რიცხვთა სისტემას ჰქონდეს ყველა ის თვისება, რისთვისაც მას ვქმნით. ეს განმარტებები, განსაკუთრებით ნამრავლისათვის, პირველად ძალიან ხელოვნურად მოგვეჩვენება, მაგრამ მე-10 თავში ნაჩვენები იქნება, რომ ოპერაციის არც ერთი სხვა განმარტება, პირველი შეხედვით თითქოს უფრო ბუნებრივიც კი, ვერ მიგვიყვანდა მიზნამდე, ე. ი. ნამდვილ რიცხვთა სისტემის ისეთი გაფართოების აგებამდე, რომელიც (1) განტოლების ფესვებს შეიცავდეს. იქვე ნაჩვენები იქნება, რომ ამ აგებისას სიბრტყის წერტილების შეცვლა ნებისმიერი სხვა მასალით ვერ მიგვიყვანდა რიცხვთა ისეთ სისტემამდე, რომელიც თავისი ალგებრული თვისებებით განსხვავებული იქნებოდა კომპლექსურ რიცხვთა იმ სისტემისაგან, რომელიც აიგება ქვემოთ.

ვთქვათ, სიბრტყეზე არჩეულია კოორდინატთა მართკუთხოვანი სისტემა. შევთანხმდეთ, რომ სიბრტყის წერტილები აღვნიშნოთ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ასოებით და α წერტილი a აბსცისით და b ორდინატით ჩავწეროთ ასე: (a, b), ე. ი. ანალიზურ გეომეტრიაში მიღებული აღნიშვნის ცოტაოდენი განსხვავებით დავწეროთ $\alpha=(a, b)$. თუ მოცემულია $\alpha=(a, b)$ და $\beta=(c, d)$ წერტილები, მაშინ ამ წერტილთა ჯამი ვუწოდოთ წერტილს $a+c$ აბსცისითა და $b+d$ ორდინატით, ე. ი.

$$(a, b)+(c, d)=(a+c,\ b+d); \tag{2}$$

$\alpha=(a, b)$ და $\beta=(c, d)$ წერტილთა ნამრავლი ვუწოდოთ წერტილს $ac-bd$ აბსცისითა და $ad+bc$ ორდინატით, ე. ი.

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd,\ ad+bc). \tag{3}$$

ამ გზით სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლეში განვსაზღვრეთ ორი ალგებრული ოპერაცია. ვაჩვენოთ, რომ ამ ოპერაციებს აქვს ყველა

ის ძირითადი თვისება, რომელიც აქვს ოპერაციებს ნამდვილ რიცხვთა სისტემაში ან რაციონალურ რიცხვთა სისტემაში: ისინი ორივე კომუტატური და ასოციაციურია, ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან დისტრიბუციულობის კანონით და მათთვის არსებობს შებრუნებული ოპერაციები—გამოკლება და გაყოფა (გარდა ნულზე გაყოფისა).

შეკრების კომუტატურობა და ასოციაციურობა ცხადია (უფრო ზუსტად, ისინი გამომდინარეობენ ნამდვილ რიცხვთა შეკრების სათანადო თვისებებიდან), რადგან სიბრტყის წერტილთა შეკრებისას მათ აბსცისებს ცალკე ვკრებთ და ორდინატებს კიდევ ცალკე. გამრავლების კომუტატურობა ემყარება იმას, რომ ნამრავლის განმარტებაში α და β წერტილები სიმეტრიულად შედიან. გამრავლების ასოციაციურობას ამტკიცებს შემდეგი ტოლობები:

$$[(a, b)(c, d)](e, f)=(ac-bd, ad+bc)(e, f)=$$
$$=(ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce),$$
$$(a, b)[(c, d)(e, f)]=(a, b)(ce-df, cf+de)=$$
$$=(ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf).$$

დისტრიბუციულობის კანონი გამომდინარეობს ტოლობებიდან

$$[(a, b)+(c, d)](e, f)=(a+c, b+d)(e, f)=$$
$$=(ae+ce-bf-df, af+cf+be+de),$$
$$(a, b)(e, f)+(c, d)(e, f)=(ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de)=$$
$$=(ae-bf+ce-df, af+be+cf+de).$$

განვიხილოთ შებრუნებული ოპერაციების საკითხი. თუ მოცემულია $\alpha=(a, b)$ და $\beta=(c, d)$ წერტილები, მაშინ მათი სხვაობა იქნება ისეთი (x, y) წერტილი, რომ

$$(c, d)+(x, y)=(a, b).$$

აქედან, (2)-ის ძალით,

$$c+x=a, \quad d+y=b.$$

ამრიგად, $\alpha=(a, b)$ და $\beta=(c, d)$ წერტილთა სხვაობაა

$$\alpha-\beta=(a-c, b-d) \tag{4}$$

წერტილი და ეს სხვაობა ცალსახად განისაზღვრება. კერძოდ, ნული იქნება (0, 0) კოორდინატთა სათავე, ხოლო $\alpha=(a, b)$ წერტილის მოპირდაპირე წერტილი იქნება

$$-\alpha=(-a, -b). \tag{5}$$

შემდეგ, ვთქვათ, მოცემულია $\alpha=(a, b)$ და $\beta=(c, d)$ წერტილები, ამასთანავე β წერტილი განსხვავებულია ნულისაგან, ე. ი. c, d კოორდინატთაგან ერთი მაინც არ არის ნული და, ამიტომ, $c^2+d^2\neq 0$. განაყოფი α-სი β-ზე უნდა იყოს ისეთი (x, y) წერტილი, რომ $(c, d)(x, y)=(a, b)$. აქედან, (3)-ის ძალით,

$$cx-dy=a,$$
$$dx+cy=b.$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

ამრიგად, როცა $\beta \neq 0$, განაყოფი $\frac{\alpha}{\beta}$ არსებობს და ცალსახად განისაზღვრება:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \tag{6}$$

თუ აქ ვიგულისხმებთ, რომ $\beta=\alpha$, მივიღებთ, რომ წერტილთა ჩვენი გამრავლებისას ერთეული არის $(1, 0)$ წერტილი, რომელიც ძევს აბსცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან მარჯვნივ 1-ის ტოლ მანძილზე. შემდეგ, თუ (6)-ში ვიგულისხმებთ, რომ $\alpha=1=(1, 0)$, მივიღებთ, რომ, როცა $\beta \neq 0$, მაშინ β-ს შებრუნებული წერტილი იქნება:

$$\beta^{-1}=\left(\frac{c}{c^2+d^2},\ \frac{-d}{c^2+d^2}\right). \tag{7}$$

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ რიცხვთა სისტემა, რომელიც გამოისახება სიბრტყის წერტილებით და ამასთანავე ამ რიცხვებზე ოპერაციები განისაზღვრება (2) და (3) ფორმულებით. რიცხვთა ამ სისტემას ეწოდება კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა.

ვაჩვენოთ, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა ნამდვილ რიცხვთა სისტემის გაფართოებაა. ამ მიზნით განვიხილოთ აბსცისთა ღერძზე მდებარე წერტილები, ე. ი. $(a, 0)$ სახის წერტილები; თუ $(a, 0)$ წერტილს მოვუყვანთ თანადობაში a ნამდვილ რიცხვს, ცხადია მივიღებთ ურთიერთცალსახა თანადობას განხილულ წერტილთა სიმრავლესა და ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის. ამ წერტილებზე (2) და (3) ფორმულების გამოყენება გვაძლევს ტოლობებს

$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0),$$
$$(a, 0)\cdot(b, 0)=(ab, 0),$$

ე. ი. $(a, 0)$ წერტილები ერთმანეთთან იკრიბება და მრავლდება ისევე, როგორც შესაბამისი ნამდვილი რიცხვები. ამრიგად, აბსცისთა ღერძზე მდებარე წერტილთა სიმრავლე, განხილული როგორც კომპლექსურ რიცხვთა სისტემის ნაწილი, თავისი ალგებრული თვისებებით არაფრით არ განსხვავდება ნამდვილ რიცხვთა სისტემისაგან, რომელიც ჩვეულებრივ გამოისახება წრფის წერტილებით. ეს საშუალებას გვაძლევს შემდეგში $(a, 0)$ წერტილი და a ნამდვილი რიცხვი არ განვასხვავოთ, ე. ი. ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ

$(a, 0) = a$. კერძოდ, კომპლექსურ რიცხვთა სისტემის ნული $(0, 0)$ და ერთეული $(1, 0)$ აღმოჩნდნენ ჩვეულებრივი 0 და 1 ნამდვილი რიცხვები.

ახლა ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ კომპლექსურ რიცხვთა შორის არსებობს (1) განტოლების ფესვი, ე. ი. ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის -1 ნამდვილ რიცხვს. ეს იქნება, მაგალითად, $(0, 1)$ წერტილი, ე. ი. ორდინატთა ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან ზემოთ 1-ის ტოლ მანძილზე მდებარე წერტილი. მართლაც, (3)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$(0, 1)\ (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

შევთანხმდეთ ეს წერტილი აღვნიშნოთ i-თი, ისე რომ $i^2 = -1$.

დაბოლოს ვაჩვენოთ, რომ ჩვენს მიერ აგებული კომპლექსური რიცხვები შესაძლებელია ჩვეულებრივად ჩავწეროთ. ამისათვის თავდაპირველად ვიპოვოთ b ნამდვილი რიცხვისა და i წერტილის ნამრავლი:

$$bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b);$$

მაშასადამე, ეს იქნება ორდინატთა ღერძზე მდებარე და b ორდინატის მქონე წერტილი, ამასთანავე ორდინატთა ღერძის ყველა წერტილი წარმოდგენადია ასეთი ნამრავლის სახით. ახლა, თუ (a, b) ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

ტოლობის გამო მივიღებთ:

$$(a, b) = a + bi,$$

ე. ი. ჩვენ მართლაც მივედით კომპლექსურ რიცხვთა ჩვეულებრივ ჩაწერამდე; $a + bi$ გამოსახულებაში ჯამი და ნამრავლი უნდა გავიგოთ, რა თქმა უნდა, ჩვენს მიერ აგებულ კომპლექსურ რიცხვთა სისტემაში განმარტებული ოპერაციების აზრით.

ახლა, როცა კომპლექსური რიცხვები უკვე აგებული გვაქვს, მკითხველისათვის ძნელი არ იქნება შეამოწმოს, რომ წიგნის წინა თავების მთელი შინაარსი — დეტერმინანტთა თეორიაც, წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორიაც, ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულების თეორიაც და მატრიცებზე ოპერაციების თეორიაც — ყოველგვარი შეზღუდვის გარეშე გადმოიტანება იმ შემთხვევაშიც, როცა განიხილება ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვები და არა მხოლოდ ნამდვილი რიცხვები.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ ჩატარებული აგება კომპლექსურ რიცხვთა სისტემისა შემდეგ კითხვას ბადებს: შეიძლება თუ არა ისე განვსაზღვროთ სამგანზომილებიანი სივრცის წერტილთა შეკრება და გამრავლება, რომ ამ წერტილთა ერთობლიობა გახდეს რიცხვთა ისეთი სისტემა, რომელიც მოიცავს კომპლექსურ რიცხვთა სისტემას, ან ნამდვილ რიცხვთა სისტემას მაინც. ეს კითხვა გამოდის ჩვენი კურსის ჩარჩოებიდან, შევნიშნავთ მხოლოდ, რომ პასუხი მასზე უარყოფითია.

მეორე მხრივ, თუ შევნიშნავთ, რომ კომპლექსურ რიცხვთა ზემოთ განსაზღვრული შეკრება არსებითად ემთხვევა სიბრტყეზე კოორდინატთა სათა-

ვიდან გამომავალ (იხ. შემდეგი პარაგრაფი) ვექტორთა შეკრებას, ბუნებრივია დავსვათ ასეთი კითხვა: შესაძლებელია თუ არა რომელიმე n-სათვის n-განზომილებიან ნამდვილ ვექტორულ სივრცეში ისე განვმარტოთ ვექტორთა გამრავლება, რომ ამ გამრავლებისა და ვექტორთა ჩვეულებრივი შეკრების მიმართ ჩვენი სივრცე აღმოჩნდეს ისეთი რიცხვითი სისტემა, რომელიც ნამდვილ რიცხვთა სისტემას შეიცავს. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამის გაკეთება შეუძლებელია, თუ მოვითხოვთ ოპერაციათა ყველა იმ თვისებების შენარჩუნებას, რომელთაც ადგილი აქვთ რაციონალურ, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა სისტემებში. ხოლო თუკი უარს ვიტყვით გამრავლების კომუტატურობაზე, მაშინ ასეთი აგება შესაძლებელია ოთხგანზომილებიან სივრცეში; რიცხვთა სისტემას, რომელიც ასე მიიღება, კ ვ ა ტ ე რ ნ ი ო ნ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა ეწოდება. ანალოგიური აგება შესაძლებელია რვაგანზომილებიან სივრცეშიც— იქ, სადაც მიიღება ეგრეთწოდებული კ ე ლ ი ს რ ი ც ხ ვ თ ა ს ი ს ტ ე მ ა. მაგრამ აქ მოგვიხდება უარი ვთქვათ არა მარტო ნამრავლის კომუტატურობაზე, არამედ მის ასოციაციურობაზეც და შევცვალოთ ეს უკანასკნელი უფრო სუსტი მოთხოვნით.

§ 18. კომპლექსური რიცხვების შემდგომი შესწავლა

ისტორიულად შექმნილი ტრადიციების შესაბამისად i კომპლექსურ რიცხვს ვუწოდოთ წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ე რ თ ე უ ლ ი, ხოლო bi სახის რიცხვებს— წ მ ი ნ დ ა წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი, თუმც ამ რიცხვების არსებობა ჩვენში ეჭვს არ იწვევს და შეგვიძლია ვაჩვენოთ სიბრტყის ის წერტილები,— ორდინატთა ღერძის წერტილები,— რომლებითაც ეს რიცხვები გამოისახებიან. α კომპლექსური რიცხვის $\alpha=a+bi$ სახით ჩაწერაში a რიცხვს ეწოდება α რიცხვის ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ნ ა წ ი ლ ი, ხოლო bi-ს—მისი წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ნ ა წ ი ლ ი. სიბრტყეს, რომლის წერტილები გაიგივებულია კომპლექსურ რიცხვებთან, § 17-ში გადმოცემული წესით, ვუწოდოთ კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე. ამ სიბრტყის აბსცისთა ღერძს ეწოდება ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ღ ე რ ძ ი, რადგან მისი წერტილები გამოსახავენ ნამდვილ რიცხვებს; სათანადოდ, კომპლექსური სიბრტყის ორდინატთა ღერძს ეწოდება წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ღ ე რ ძ ი.

$a+bi$ სახით ჩაწერილ კომპლექსურ რიცხვთა შეკრება, გამრავლება, გამოკლება და გაყოფა, როგორც ეს გამომდინარეობს წინა პარაგრაფის (2), (4), (3) და (6) ფორმულებიდან, ხდება შემდეგნაირად:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა შ ე კ რ ე ბ ი ს ა ს ც ა ლ კ ე ი კ რ ი ბ ე ბ ა მ ა თ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ნ ა წ ი ლ ე ბ ი დ ა ც ა ლ კ ე წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ნ ა წ ი ლ ე ბ ი; ანალოგიურ წესს აქვს ადგილი გამოკლებისთვისაც. გამრავლებისა და გაყოფის ფორმულების სიტყვიერად ჩამოყალიბება

ძალიან გრძელია და მას არ ვიძლევით. ამ ფორმულებიდან უკანასკნელის დამახსოვრება არ არის აუცილებელი; საჭიროა მხოლოდ დამახსოვრება, რომ მისი მიღება შესაძლებელია მოცემული წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის გამრავლებით ისეთ რიცხვზე, რომელიც მნიშვნელისაგან განსხვავდება მხოლოდ წარმოსახვითი ნაწილის ნიშნით.

მართლაც,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

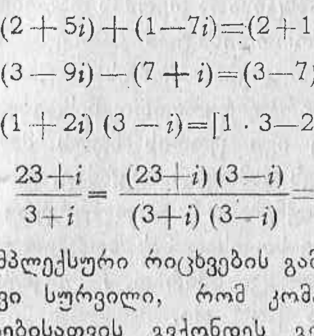
1) $(2+5i)+(1-7i)=(2+1)+(5-7)i=3-2i;$

2) $(3-9i)-(7+i)=(3-7)+(-9-1)i=-4-10i;$

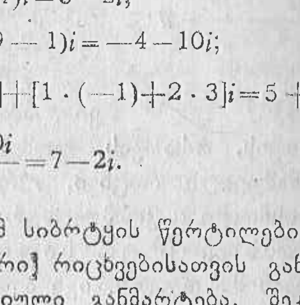
3) $(1+2i)(3-i)=[1\cdot 3-2\cdot(-1)]+[1\cdot(-1)+2\cdot 3]i=5+5i;$

4) $\dfrac{23+i}{3+i}=\dfrac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{70-20i}{10}=7-2i.$

კომპლექსური რიცხვების გამოსახვამ სიბრტყის წერტილებით აღვიძრა ბუნებრივი სურვილი, რომ კომპლექსური რიცხვებისათვის განსაზღვრულ ოპერაციებისათვის გვქონდეს გეომეტრიული განმარტება. შეკრებისათვის



ნახ. 2

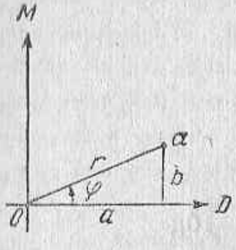


ნახ. 3

ასეთი განმარტება დაუბრკოლებლად შეიძლება იქნას მიღებული. ვთქვათ, მოცემულია $\alpha=a+bi$ და $\beta=c+di$ რიცხვები. შევაერთოთ მათი შესაბამისი (a, b) და (c, d) წერტილები კოორდინატთა სათავესთან მონაკვეთებით და ავაგოთ ამ მონაკვეთებზე, როგორც გვერდებზე, პარალელოგრამი (ნახ. 2). ამ პარალელოგრამის მეოთხე წვერო, ცხადია, იქნება $(a+c, b+d)$ წერტილი. ამრიგად, კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა შ ე კ რ ე ბ ა გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ა დ ს რ უ ლ დ ე ბ ა პ ა რ ა ლ ე ლ ო გ რ ა მ ი ს წ ე ს ი თ, ე. ი. კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ა თ ა ვ ი დ ა ნ გ ა მ ო მ ა ვ ა ლ ვ ე ქ ტ ო რ თ ა შ ე კ რ ე ბ ი ს წ ე ს ი თ. შემდეგ, $\alpha=a+bi$ რ ი ც ხ ვ ი ს მ ო პ ი რ დ ა პ ი რ ე რ ი ც ხ ვ ი ი ქ ნ ე ბ ა კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს კ ო ო რ-

დინატთა სათავის მიმართ α წერტილის სიმეტრიული წერტილი (ნახ. 3). აქედან დაუბრკოლებლად მიიღება გამოკლების გეომეტრიული განმარტება.

კომპლექსურ რიცხვთა გამრავლებისა და გაყოფის გეომეტრიული აზრი ნათელი გახდება მხოლოდ მას შემდეგ, რაც შემოვიღებთ კომპლექსური რიცხვებისათვის ახალ ჩაწერას, რომელიც განსხვავდება იმისაგან, რასაც ჩვენ აქამდე ვიყენებდით. α რიცხვის $\alpha=a+bi$ სახით ჩაწერა იყენებს ამ რიცხვის შესაბამის წერტილის დეკარტის კოორდინატებს. მაგრამ წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე სავსებით განისაზღვრება აგრეთვე მისი პოლარული კოორდინატებით: r-ით, რომელიც არის მანძილი კოორდინატთა სათავიდან წერტილამდე, და φ-ით, რომელიც კუთხეა აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასა და კოორდინატთა სათავიდან ამ წერტილამდე მიმართულებას შორის (ნახ. 4).



ნახ. 4

r რიცხვი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, ამასთანავე იგი უდრის ნულს მხოლოდ 0 წერტილისათვის. α-სათვის, რომელიც ძევს ნამდვილ ღერძზე, ე. ი. რომელიც არის ნამდვილი რიცხვი, r რიცხვი იქნება α-ს აბსოლუტური სიდიდე, ამიტომ ნებისმიერი α კომპლექსური რიცხვისთვისაც მას ზოგჯერ უწოდებენ α რიცხვის *აბსოლუტურ სიდიდეს*; თუმცა ხშირად, r რიცხვს უწოდებენ α რიცხვის *მოდულს*. იგი აღინიშნება $|\alpha|$-თი.

φ კუთხეს ეწოდება α რიცხვის *არგუმენტი* და აღინიშნება ასე: $\arg \alpha$[1]. φ კუთხეს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობა, როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი, ამასთანავე დადებითი კუთხეები გადაიზომება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით; მაგრამ, თუ კუთხეები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π-ით ან 2π-ს ჯერადი რიცხვით, მაშინ მათი შესაბამისი სიბრტყის წერტილები ემთხვევიან.

ამრიგად, α კომპლექსური რიცხვის არგუმენტს აქვს უსასრულოდ მრავალი მნიშვნელობა, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან 2π-ს მთელი ჯერადი რიცხვით; მაშასადამე, მოდულითა და არგუმენტით მოცემული ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ მხოლოდ, რომ არგუმენტები განსხვავდებიან 2π-ს მთელი ჯერადით, მაშინ, როცა მოდულები ტოლია. არგუმენტი განსაზღვრული არ არის მხოლოდ 0 რიცხვისათვის, მაგრამ ეს რიცხვი სავსებით განისაზღვრება ტოლობით $|0|=0$.

კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ნამდვილი რიცხვის ნიშნის ბუნებრივი განზოგადებაა. მართლაც, დადებითი ნამდვილი რიცხვის არგუმენტი ტოლია 0-სა; უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის არგუმენტი ტოლია π-სი. ნამდვილ ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან გამოდის მხოლოდ ორი მიმართულება და ისინი შეიძლება განვასხვავოთ ორი სიმბოლოთი $+$ და $-$, მაშინ, როცა კომპლექსურ სიბრტყეზე 0 წერტილიდან გამომავალი მიმართულებანი უსას-

[1] მაშასადამე, ჩვენ უარს ვიტყვით წერტილის პოლარული კოორდინატების ჩვეულებრივ სახელწოდებაზე—პოლარული რადიუსი და პოლარული კუთხე.

რულად მრავალია და ისინი განსხვავდებიან უკვე მათ მიერ ნამდვილი ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხით.

წერტილის დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი, რომელიც სამართლიანია სიბრტყეზე წერტილის ნებისმიერი მდებარეობისათვის:

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi, \tag{1}$$

საიდანაც

$$r=+\sqrt{a^2+b^2}. \tag{2}$$

გამოვიყენოთ (1) ფორმულები ნებისმიერი $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვისათვის:

$$\alpha=a+bi=r\cos\varphi+(r\sin\varphi)i,$$

ანუ

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{3}$$

პირიქით, ვთქვათ $\alpha=a+bi$ რიცხვი ჩაიწერება $\alpha=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$ სახით, სადაც r_0 და φ_0 რაიმე ნამდვილი რიცხვებია, ამასთანავე $r_0>0$. მაშინ $r_0\cos\varphi_0=a$, $r_0\sin\varphi_0=b$, საიდანაც $r_0=+\sqrt{a^2+b^2}$, ე. ი., (2)-ის ძალით, $r_0=|\alpha|$. აქედან, (1)-ის გამოყენებით, მივიღებთ: $\cos\varphi_0=\cos\varphi$, $\sin\varphi_0=\sin\varphi$, ე. ი. $\varphi_0=\arg\alpha$. ამრიგად, **ყოველი α კომპლექსური რიცხვი ცალსახად ჩაიწერება (3) სახით**, სადაც $r=|\alpha|$, $\varphi=\arg\alpha$ (ამასთანავე, რა თქმა უნდა, φ არგუმენტი განისაზღვრება მხოლოდ 2π-ის ჯერადი შესაკრების სიზუსტით). α რიცხვის ამ ჩაწერას ეწოდება მისი **ტრიგონომეტრიული ფორმა** და შემდეგში ძალიან ხშირად გამოიყენება.

რიცხვები

$$\alpha=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad \beta=\cos\frac{19}{3}\pi+i\sin\frac{19}{3}\pi$$

და

$$\gamma=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით; აქ $|\alpha|=3$, $|\beta|=1$, $|\gamma|=\sqrt{3}$; $\arg\alpha=\frac{\pi}{4}$,

$$\arg\beta=\frac{19}{3}\pi,\ \arg\gamma=-\frac{\pi}{7}\ \left(\text{ან}\ \arg\beta=\frac{\pi}{3},\ \arg\gamma=\frac{13}{7}\pi\right).$$

მეორე მხრივ, კომპლექსური რიცხვები

$$\alpha'=(-2)\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),\quad \beta'=3\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

$$\gamma'=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),\quad \delta'=\sin\frac{3}{4}\pi+i\cos\frac{3}{4}\pi$$

არ არიან მოცემული ტრიგონომეტრიული ფორმით, თუმც მათი ჩაწერა გვაგონებს (3) ჩაწერას. ეს რიცხვები ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაიწერებიან ასე:

$$\alpha' = 2\left(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi\right), \quad \beta' = 3\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right),$$

$$\delta' = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$

γ' რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმის მოძებნისას ვაწყდებით სიძნელეს, რომელსაც თითქმის ყოველთვის ვხვდებით კომპლექსური რიცხვის ჩვეულებრივი ჩაწერიდან ტრიგონომეტრიულ ფორმაზე გადასვლის დროს და პირიქით: შეუძლებელია, გარდა რამდენიმე შემთხვევისა, სინუსისა და კოსინუსის მოცემული რიცხვითი მნიშვნელობით მოვძებნოთ კუთხე ზუსტად და მოცემული კუთხისათვის დავწეროთ მისი სინუსისა და კოსინუსის ზ უ ს ტ ი მნიშვნელობანი.

ვთქვათ, α და β კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით: $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. გადავამრავლოთ ეს რიცხვები:

$$\alpha\beta = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\cdot[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] =$$
$$= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'),$$

ანუ

$$\alpha\beta = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]. \tag{4}$$

მივიღეთ $\alpha\beta$ ნამრავლის ჩაწერა ტრიგონომეტრიული ფორმით და ამიტომ $|\alpha\beta| = rr'$, ანუ

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \tag{5}$$

ე. ი. კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს მ ო დ უ ლ ი თ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ლ თ ა მ ო დ უ ლ ე ბ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა; შემდეგ, $\arg(\alpha\beta) = \varphi + \varphi'$, ანუ

$$\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta, \tag{6}$$

ე. ი. კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი თ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ლ თ ა ა რ გ უ მ ე ნ ტ ე ბ ი ს ჯ ა მ ი ს ტ ო ლ ი ა[1]. ცხადია, ეს წესები ვავრცელდება ნებისმიერი სასრულო რიცხვ თანამამრავლზე. (5) ფორმულის გამოყენება, ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში, გვაძლევს ამ რიცხვთა აბსოლუტური სიდიდის ცნობილ თვისებას, ხოლო (6), როგორც ადვილი შესამოწმებელია, გადაიქცევა ნამდვილ რიცხვთა გადამრავლებისას ნიშნის წესად.

ანალოგიურ წესს აქვს ადგილი განაყოფისთვისაც. მართლაც, ვთქვათ, $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, ამასთანავე $\beta \neq 0$, ე. ი. $r' \neq 0$. მაშინ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi')} =$$

$$= \frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'),$$

[1] შევნიშნოთ, რომ აქ ტოლობა გვესმის 2π-ს ჯერადი შესაკრების სიზუსტით.

ანუ

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]. \tag{7}$$

საიდან გამომდინარეობს, რომ $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{r}{r'}$, ანუ

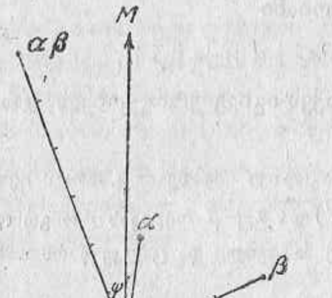
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}, \tag{8}$$

ე. ი. ორი კომპლექსური რიცხვის განაყოფის მოდული არის გასაყოფის მოდული გაყოფილი გამყოფის მოდულზე; შემდეგ, $\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\varphi-\varphi'$, ანუ

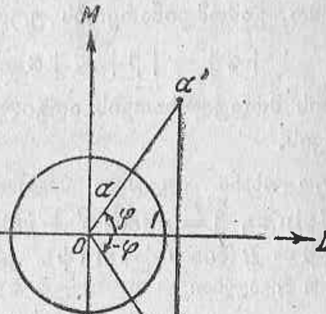
$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta, \tag{9}$$

ე. ი. ორი კომპლექსური რიცხვის განაყოფის არგუმენტი მიიღება გასაყოფის არგუმენტიდან გამყოფის არგუმენტის გამოკლებით.

ახლა გამრავლებისა და გაყოფის გეომეტრიული აზრი დაუბრკოლებლად გამოირკვევა. მართლაც, (5) და (6) ფორმულების გამო, α რიცხვის $\beta=$



ნახ. 5



ნახ. 6

$=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ რიცხვზე ნამრავლის გამომსახველ წერტილს მივიღებთ, თუ O-დან α-საკენ მიმავალ ვექტორს (ნახ. 5) საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოვაბრუნებთ $\varphi'=\arg\beta$ კუთხით, და შემდეგ ამ ვექტორს გავჭიმავთ $r'=|\beta|$-ჯერ (როცა $0\leqslant r'<1$, რა თქმა უნდა, ეს იქნება შეკუმშვა და არა გაჭიმვა). შემდეგ, (7)-დან გამომდინარეობს, რომ, როცა $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$, გვექნება

$$\alpha^{-1}=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)], \tag{10}$$

ე. ი. $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$, $\arg(\alpha^{-1}) = -\arg\alpha$. ამრიგად, α^{-1} წერტილს მივიღებთ, თუ α წერტილიდან გადავალთ α' წერტილზე, რომელიც ძევს r^{-1} მანძილზე ნულიდან გამომავალ იმავე ნახევარ წრფეზე, რომელზედაც α (ნახ. 6)[1], და შემდეგ გადავალთ α'-ის სიმეტრიულ წერტილზე ნამდვილი ღერძის მიმართ.

ტრიგონომეტრიული ფორმით მოცემული კომპლექსურ რიცხვთა ჯამი და სხვაობა არ შეიძლება გამოვსახოთ (4) და (7)-ის მსგავსი ფორმულებით. მაგრამ ჯამის მოდულისათვის ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან უტოლობებს:

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \tag{11}$$

ე. ი. ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამის მოდული ნაკლებია ან ტოლი შესაკრებთა მოდულების ჯამზე და მეტია ან ტოლი ამ მოდულების სხვაობაზე. (11) უტოლობანი გამომდინარეობენ ელემენტარულ გეომეტრიაში სამკუთხედის გვერდების შესახებ ცნობილი თეორემიდან იმის გამო, რომ $|\alpha+\beta|$, როგორც ვიცით, უდრის $|\alpha|$ და $|\beta|$ გვერდებიანი პარალელოგრამის დიაგონალს. მაგრამ სპეციალურ განხილვას მოითხოვს, რომელსაც მკითხველს ვანდობთ, შემთხვევა, როცა α, β და 0 წერტილები ერთ სწორ ხაზზე ძევს; (11) ფორმულებში მხოლოდ ამ შემთხვევაში შეიძლება მიღწეულ იქნას ტოლობანი.

(11)-დან, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$-ს და

$$|-\beta| = |\beta| \tag{12}$$

(ეს ტოლობა გამომდინარეობს თუნდაც $-\beta$ რიცხვის გეომეტრიული განმარტებიდან) გამო, გამომდინარეობს უტოლობანი

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha-\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \tag{13}$$

ე. ი. სხვაობის მოდულისათვის ადგილი აქვს იგივე უტოლობებს, რასაც ჯამის მოდულისათვის.

(11) უტოლობანი შეგვეძლო მიგვეღო აგრეთვე შემდეგი გზითაც: ვთქვათ, $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ და $\alpha+\beta$ რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმაა $\alpha+\beta = R(\cos\psi + i\sin\psi)$. ცალკე ნამდვილი და ცალკე წარმოსახვითი ნაწილების შეკრებით მივიღებთ:

$$r\cos\varphi + r'\cos\varphi' = R\cos\psi,$$
$$r\sin\varphi + r'\sin\varphi' = R\sin\psi;$$

თუ გავამრავლებთ პირველი ტოლობის ორივე მხარეს $\cos\psi$-ზე, მეორე ტოლობის ორივე მხარეს—$\sin\psi$-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$r(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + r'(\cos\varphi'\cos\psi + \sin\varphi'\sin\psi) =$$
$$= R(\cos^2\psi + \sin^2\psi),$$

---

[1] $|\alpha'| = |\alpha|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|\alpha| = 1$, ე. ი. თუ α წერტილი ძევს ერთეულოვან წრეხაზზე. თუ α ძევს ერთეულოვანი წრის შიგნით, მაშინ α' იქნება მის გარეთ, და პირიქით; ამასთან, ცხადია, ამ გზით ჩვენ მივიღებთ ურთიერთცალსახა თანადობას ერთეულოვანი წრის გარეთ მდებარე კომპლექსური სიბრტყის ყველა წერტილსა და ამ წრის შიგნით მდებარე და ნულისაგან განსხვავებულ ყველა წერტილს შორის.

ე. ი.

$$r\cos(\varphi-\psi)+r'\cos(\varphi'-\psi)=R.$$

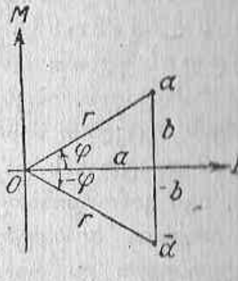
აქედან, რადგან კოსინუსი არასოდეს არ არის ერთზე მეტი, გამომდინარეობს უტოლობა $r+r'\geqslant R$, ე. ი. $|\alpha|+|\beta|\geqslant|\alpha+\beta|$. მეორე მხრივ, $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha+\beta)+(-\beta)$. აქედან დამტკიცებულისა და (12)-ის ძალით,

$$|\alpha|\leqslant|\alpha+\beta|+|-\beta|=|\alpha+\beta|+|\beta|,$$

საიდანაც $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ კომპლექსური რიცხვებისათვის ცნებები „მეტი“ და „ნაკლები“ არ შეგვიძლია განვსაზღვროთ გონივრულად, რადგან ეს რიცხვები, ნამდვილი რიცხვებისაგან განსხვავებით, განლაგებული არიან არა წრფეზე, რომლის წერტილები ბუნებრივად მოწესრიგებულია, არამედ სიბრტყეზე. ამიტომ თვით კომპლექსური რიცხვები (და არა მათი მოდულები) არასოდეს არ შეიძლება შეერთებულ იქნას უტოლობის ნიშნით.

შეუღლებული რიცხვები. ვთქვათ, მოცემულია $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვი. $a-bi$ რიცხვს, განსხვავებულს α-საგან მხოლოდ წარმოსახვითი ნაწილის ნიშნით, ეწოდება α-ს შეუღლებული რიცხვი და აღინიშნება $\bar{\alpha}$-ით.



ნახ. 7

მოვიგონოთ, რომ კომპლექსურ რიცხვთა გაყოფის განხილვისას მივმართეთ შეუღლებულ რიცხვს, თუმცა არ შემოგვიღია ეს სახელწოდება.

ცხადია, $\bar{\alpha}$-ის შეუღლებული რიცხვი იქნება α, ე. ი. შეიძლება ვილაპარაკოთ შეუღლებულ რიცხვთა წყვილზე. ნამდვილი რიცხვები, და მხოლოდ ისინი, არიან თავის თავის შეუღლებულნი.

გეომეტრიულად შეუღლებული რიცხვები ნამდვილი ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია (ნახ. 7). აქედან გამომდინარეობს ტოლობანი:

$$|\bar{\alpha}|=|\alpha|,\ \arg\bar{\alpha}=-\arg\alpha. \tag{14}$$

შეუღლებულ კომპლექსურ რიცხვთა ჯამი და ნამრავლი ნამდვილი რიცხვებია. მართლაც,

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\bar{\alpha}&=2a,\\ \alpha\bar{\alpha}&=a^2+b^2=|\alpha|^2.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\alpha\bar{\alpha}$ რიცხვი დადებითიც კი არის, როცა $\alpha\neq 0$. § 24-ში მიიღება თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შეუღლებულ რიცხვთა ახლა დამტკიცებული თვისება მათთვის დამახასიათებელია.

ტოლობა

$$(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$$

გვიჩვენებს, რომ ორი რიცხვის ჯამის შეუღლებული რიცხვი ტოლია შესაკრებთა შეუღლებული რიცხვების ჯამისა:

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}. \tag{16}$$

ანალოგიურად,

$$(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნამრავლის შეუღლებული რიცხვი ტოლია თანამამრავლთა შეუღლებულ რიცხვთა ნამრავლის:

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}. \tag{17}$$

უშუალო შემოწმება გვიჩვენებს აგრეთვე

$$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}, \tag{18}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \tag{19}$$

ფორმულების სამართლიანობას.

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება: თუ α რიცხვი რაიმე სახით გამოსახულია $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ კომპლექსური რიცხვებით შეკრების, გამრავლების, გამოკლებისა და გაყოფის საშუალებით, მაშინ ამ გამოსახულებაში ყველა β_k რიცხვის შეცვლით მისი შეუღლებულით მივიღებთ α-ს შეუღლებულ რიცხვს; კერძოდ, თუ α ნამდვილი რიცხვია, მაშინ იგი არ იცვლება ყველა β_k კომპლექსური რიცხვის შეცვლით მისი შეუღლებულით.

ამ დებულებას დავამტკიცებთ ინდუქციით n-ის მიმართ, რადგან, როცა $n=2$, იგი გამომდინარეობს (16)—(19) ფორმულებიდან.

ვთქვათ, α რიცხვი გამოსახულია $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ რიცხვებით, არ არის სავალდებულო ეს რიცხვები განსხვავებულნი იყვნენ. ამ გამოსახულებაში ნაჩვენებია შეკრების, გამრავლების, გამოკლებისა და გაყოფის ოპერაციების შესრულების გარკვეული რიგი. უკანასკნელი ნაბიჯი იქნება ამ ოპერაციებიდან ერთ-ერთის შესრულება $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ რიცხვებით გამოსახულ γ_1 რიცხვზე, სადაც $1 \leqslant k \leqslant n-1$, და $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$ რიცხვებით გამოსახულ γ_2 რიცხვზე. ინდუქციური დაშვების თანახმად, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ რიცხვების შეცვლა შეუღლებულებით იწვევს γ_1-ის შეცვლას $\overline{\gamma_1}$-ით, $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ რიცხვთა შეუღლებულებით შეცვლა კი γ_2-ს შეცვლის $\overline{\gamma_2}$-ით. მაგრამ (16) — (19) ფორმულებიდან ერთ-ერთის გამო γ_1 და γ_2-დან $\overline{\gamma_1}$ და $\overline{\gamma_2}$-ზე გადასვლა α რიცხვს გარდაქმნის $\overline{\alpha}$-ში.

§ 19. კომპლექსურ რიცხვებიდან ფესვის ამოღება

გადავდივართ კომპლექსური რიცხვის ახარისხებისა და მისგან ფესვის ამოღების საკითხზე. $\alpha=a+bi$ რიცხვის n მთელ დადებით ხარისხში ასაყვანად საკმარისია $(a+bi)^n$ გამოსახულებისათვის გამოვიყენოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა (ეს ფორმულა სამართლიანია კომპლექსური რიცხვებისთვისაც, რადგან მისი დამტკიცება ემყარება მხოლოდ დისტრიბუციულობის კანონს),

და შემდეგ ვისარგებლოთ $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ ტოლობებით, საიდანაც საზოგადოდ

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$$

თუ α რიცხვი მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ მთელი დადებითი n-სათვის წინა პარაგრაფის (4) ფორმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი ფორმულა:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{1}$$

რომელიც მუავრის ფორმულად იწოდება, ე. ი. კომპლექსური რიცხვის ახარისხებისას მოდული ახარისხდება ამ ხარისხში, არგუმენტი კი მრავლდება ხარისხის მაჩვენებელზე. (1) ფორმულა სამართლიანია მთელი უარყოფითი მაჩვენებლებისთვისაც. მართლაც, $\alpha^{-n}=(\alpha^{-1})^n$-ის ძალით, საკმარისია მუავრის ფორმულის გამოყენება α^{-1} რიცხვზე, რომლის ტრიგონომეტრიულ ფორმას გვაძლევს წინა პარაგრაფის (10) ფორმულა.

მაგალითები:

1) $i^{37}=i$, $i^{122}=-1$;

2) $(2+5i)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot5i+3\cdot2\cdot5^2i^2+5^3i^3=8+$
$+60i-150-125i=-142-65i$;

3) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=(\sqrt{2})^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4$;

4) $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{-3}=$
$=3^{-3}\left[\cos\left(-\frac{3}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=\frac{1}{27}\left(\cos\frac{7}{5}\pi+i\sin\frac{7}{5}\pi\right)$.

მუავრის ფორმულის კერძო შემთხვევა, სახელდობრ

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

ტოლობა, საშუალებას გვაძლევს ადვილად მივიღოთ ჯერადი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის ფორმულები. მართლაც, ამ ტოლობის მარცხენა მხარის გაშლით ბინომის ფორმულით და ტოლობის ორივე მხარის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ცალ-ცალკე გატოლებით, მივიღებთ:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi-\cdots,$$

$$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi+$$

$$+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi-\cdots,$$

აქ $\binom{n}{k}$ ბინომური კოეფიციენტის ჩვეულებრივი აღნიშვნაა:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}.$$

$n=2$-სათვის მივიღებთ ცნობილ ფორმულებს

$$\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,$$
$$\sin 2\varphi=2\cos\varphi\sin\varphi,$$

ხოლო, როცა $n=3$,

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi$$

ფორმულებს.

კომპლექსური რიცხვებიდან ფესვის ამოღება წარმოადგენს უკვე ბევრად მეტ სიძნელეს. დავიწყოთ $\alpha=a+bi$ რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით. ჯერ არ ვიცით, არსებობს თუ არა ისეთი კომპლექსური რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის α-ს. ვიგულისხმოთ, რომ ასეთი $u+vi$ რიცხვი არსებობს, ე. ი. თუ ვისარგებლებთ ჩვეულებრივი აღნიშვნით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sqrt{a+bi}=u+vi.$$
$$(u+vi)^2=a+bi$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\left.\begin{aligned}u^2-v^2&=a,\\ 2uv&=b.\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

(2) ტოლობიდან თითოეულის ორივე მხარის კვადრატში აყვანით და შემდეგ შეკრებით, მივიღებთ:

$$(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=(u^2+v^2)^2=a^2+b^2,$$

საიდანაც

$$u^2+v^2=+\sqrt{a^2+b^2};$$

დადებით ნიშანს ვიღებთ იმიტომ, რომ u და v ნამდვილი რიცხვებია. და ამიტომ ტოლობის მარცხენა ნაწილი დადებითია. ამ ტოლობიდან და (2) ტოლობათაგან პირველიდან მივიღებთ:

$$u^2=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$v^2=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

კვადრატული ფესვების ამოღებით u-სათვის მივიღებთ ერთმანეთისაგან ნიშნით განსხვავებულ ორ მნიშვნელობას, აგრეთვე ორ მნიშვნელობას v-სათვისაც. ყველა ეს მნიშვნელობა იქნება ნამდვილი, რადგან კვადრატული ფესვები ნებისმიერი a და b-სათვის ამოიღება დადებითი რიცხვებიდან. u და v-სათვის მიღებული მნიშვნელობანი არ შეიძლება კომბინირებულ იქნან ერთ-

ნეთთან ნებისმიერად, რადგან, (2) ტოლობათაგან მეორის ძალით, uv ნამრავლის ნიშანი უნდა ემთხვეოდეს b-ს ნიშანს. ეს იძლევა u და v-ს მნიშვნელობათა ორ შესაძლებელ კომბინაციას, ე. ი. $u+vi$ სახის ორ რიცხვს, რომლებიც იქნებიან α რიცხვიდან კვადრატული ფესვის მნიშვნელობები; ეს რიცხვები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ნიშნით. ელემენტარული, თუმცა საკმაოდ გრძელი, შემოწმება (მიღებული რიცხვების კვადრატში ამაღლება, $b>0$ და $b<0$ შემთხვევებისათვის ცალ-ცალკე) გვიჩვენებს, რომ ჩვენს მიერ ნაპოვნი რიცხვები მართლაც არიან α რიცხვიდან კვადრატული ფესვის მნიშვნელობანი. ამრიგად, *კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღება ყოველთვის შესაძლებელია და გვაძლევს ორ მნიშვნელობას, რომელნიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ნიშნით.*

კერძოდ, ახლა უკვე შესაძლებელი გახდა კვადრატული ფესვის ამოღება უარყოფითი ნამდვილი რიცხვიდანაც, ამასთანავე ამ ფესვის მნიშვნელობანი იქნებიან წმინდათ წარმოსახვითი. მართლაც, თუ $a<0$ და $b=0$, გვაქვს $\sqrt{a^2+b^2}=-a$, რადგან ეს ფესვი უნდა იყოს დადებითი, ხოლო მაშინ $u^2=\frac{1}{2}(a-a)=0$, ე. ი. $u=0$, საიდანაც $\sqrt{a}=\pm vi$.

მაგალითი: ვთქვათ, $\alpha=21-20i$. მაშინ $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29$, ამიტომ $u^2=\frac{1}{2}(21+29)=25$, $v^2=\frac{1}{2}(-21+29)=4$, საიდანაც $u=\pm 5$, $v=\pm 2$; u და v-ს ნიშნები უნდა იყოს განსხვავებული b-ს უარყოფითობის გამო, ამიტომ

$$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i).$$

$a+bi$ სახით მოცემული კომპლექსური რიცხვიდან ორზე უფრო მაღალი ხარისხის ფესვის ამოღების ცდა ხვდება გადაულახავ სიძნელეებს. ასე, თუ მოვინდომებთ იმავე მეთოდით, როგორც ზემოთ, ამოვიღოთ კუბური ფესვი $a+bi$ რიცხვიდან, უნდა ამოვხსნათ გარკვეული დამხმარე კუბური განტოლება, რაც ჩვენ ჯერ არ ვიცით, და რაც, თავის მხრივ, მოითხოვს, როგორც § 38-ში ვნახავთ, კომპლექსური რიცხვიდან კუბური ფესვის ამოღებას. მეორე მხრივ, ტრიგონომეტრიული ფორმა ძალიან ხელსაყრელია ნებისმიერი ხარისხის ფესვის ამოსაღებად და მისი საშუალებით ჩვენ ახლა სავსებით ამოვწურავთ ამ საკითხს.

ვთქვათ, $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ რიცხვიდან უნდა ამოვიღოთ n ხარისხის ფესვი. ვიგულისხმოთ, რომ ეს შესაძლებელია და შედეგად მიიღება $\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$ რიცხვი, ე. ი.

$$[\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{3}$$

მაშინ, მუავრის ფორმულის ძალით, $\rho^n=r$, ე. ი. $\rho=\sqrt[n]{r}$, სადაც მარჯვენა მხარეში დგას r დადებითი ნამდვილი რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ამოღებით ცალსახად განსაზღვრული დადებითი მნიშვნელობა. მეორე მხრივ, (3) ტოლობის მარცხენა ნაწილის არგუმენტია $n\vartheta$. მაგრამ არ შეიძლება

დამტკიცება, რომ $n\vartheta$ ტოლია φ, რადგან ეს კუთხეები სინამდვილეში შეიძლება განსხვავდებოდნენ 2π-ს მთელი ჯერადი შესაკრებით. ამიტომ $n\vartheta=\varphi+2k\pi$, სადაც k მთელი რიცხვია, საიდანაც

$$\vartheta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

პირიქით, თუ ავიღებთ $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ რიცხვს, მაშინ ნებისმიერი მთელი დადებითი ან უარყოფითი k-სათვის, ამ რიცხვის n ხარისხი ტოლია α. ამრიგად,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{4}$$

თუ მივცემთ k-ს სხვადასხვა მნიშვნელობას, ყოველთვის არ მივიღებთ საძიებელი ფესვის განსხვავებულ მნიშვნელობებს. მართლაც, როცა

$$k=0,1,2,\ldots,n-1, \tag{5}$$

მივიღებთ ფესვის n მნიშვნელობას, რომელიც ყველა განსხვავებული იქნება, რადგან k-ს ერთით გაზრდა იწვევს არგუმენტის $\frac{2\pi}{n}$-ით გაზრდას. ახლა ვთქვათ, k ნებისმიერია. თუ $k=nq+r$, $0\leqslant r\leqslant n-1$, მაშინ

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

ე. ი. ჩვენი k-სათვის არგუმენტის მნიშვნელობა განსხვავდება $k=r$-სათვის არგუმენტის მნიშვნელობისაგან 2π-ს ჯერადი რიცხვით, მაშასადამე, მივიღებთ ფესვის იმავე მნიშვნელობას, რასაც r-ის ტოლი, ე. ი. (5) სისტემაში შემავალი, k-სათვის.

ამრიგად, α კომპლექსური რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ამოღება ყოველთვის შესაძლებელია და გვაძლევს n განსხვავებულ მნიშვნელობას. n ხარისხის ფესვის ყველა მნიშვნელობა განლაგებულია ნულ ცენტრიან და $\sqrt[n]{|\alpha|}$ რადიუსიან წრეხაზზე და ყოფს ამ წრეხაზს n ტოლ ნაწილად.

კერძოდ, a ნამდვილი რიცხვიდან n ხარისხის ფესვსაც აქვს n განსხვავებული მნიშვნელობა; ამ მნიშვნელობებიდან ნამდვილი იქნება ორი, ერთი ან არცერთი იმისდა მიხედვით, თუ როგორია a-ს ნიშანი და n-ის ლუწკენტოვნება.

მაგალითები:

1) $$\beta=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=$$
$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right);$$

$$k=0:\quad \beta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$k=1:\quad \beta_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right);$$

$$k=2:\quad \beta_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

2) $$\beta=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2};$$

$$\beta_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \beta_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\beta_0.$$

3) $$\beta=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right);$$

$$\beta_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3};$$

$$\beta_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2;$$

$$\beta_2=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-i\sqrt{3}.$$

ფესვები ერთეულიდან. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია n ხარისხის ფესვის ამოღება რიცხვიდან 1. ამ ფესვს აქვს n მნიშვნელობა, ამასთანავე $1=\cos 0+i\sin 0$ ტოლობისა და (4) ფორმულის გამო, ყველა ეს მნიშვნელობა, ანუ, როგორც ვიტყვით, ერთეულიდან n ხარისხის ყველა ფესვი, მოიცემა ფორმულით

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1. \tag{6}$$

ერთეულიდან n ხარისხის ფესვის ნამდვილი მნიშვნელობანი მიიღებიან (6) ფორმულიდან $k=0$ და $\frac{n}{2}$ მნიშვნელობისათვის, თუ n ლუწია, და $k=0$-თვის, თუ n კენტია. კომპლექსურ სიბრტყეზე n ხარისხის ფესვები ერთეულიდან განლაგებულია ერთეულოვან წრეხაზზე და ყოფენ მას n ტოლ რკალად; გაყოფის წერტილთაგან ერთ-ერთი არის რიცხვი 1. აქედან გამომდინარეობს, რომ

ერთეულიდან n ხარისხის ის ფესვები, რომელნიც არ არიან ნამდვილი, განლაგებულია ნამდვილი ღერძის მიმართ სიმეტრიულად, ე. ი. წყვილ-წყვილად შეუღლებულებია.

ერთეულიდან კვადრატულ ფესვს აქვს ორი მნიშვნელობა: 1 და -1, ერთეულიდან მეოთხე ხარისხის ფესვს—ოთხი მნიშვნელობა: $1, -1, i$ და $-i$. შემდეგისთვის სასარგებლოა დავიმახსოვროთ ერთეულიდან კუბური ფესვის მნიშვნელობანი. (6)-ის ძალით ეს იქნება $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ რიცხვები, სადაც $k=0, 1, 2$, ე. ი., გარდა თვით ერთეულისა, აგრეთვე ურთიერთ შეუღლებული რიცხვები

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \varepsilon_2&=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

α კომპლექსური რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის ყველა მნიშვნელობა შეგვიძლია მივიღოთ ერთ-ერთი მათგანიდან მისი გამრავლებით ერთეულიდან n ხარისხის ყველა ფესვზე. მართლაც, ვთქვათ, β არის α რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის მნიშვნელობათაგან ერთ-ერთი, ე. ი. $\beta^n=\alpha$, ხოლო ε—ერთეულიდან n ხარისხის ფესვის ნებისმიერი მნიშვნელობა, ე. ი. $\varepsilon^n=1$. მაშინ $(\beta\varepsilon)^n=\beta^n\varepsilon^n=\alpha$, ე. ი. $\beta\varepsilon$-ც იქნება $\sqrt[n]{\alpha}$-ის მნიშვნელობათაგან ერთ-ერთი. β რიცხვის გამრავლებით ერთეულიდან n ხარისხის ფესვის მნიშვნელობათაგან თითოეულზე, მივიღებთ α რიცხვიდან n ხარისხის ფესვის n განსხვავებულ მნიშვნელობას, ე. ი. ამ ფესვის ყველა მნიშვნელობას.

მაგალითები: 1) -8-დან კუბური ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობაა -2. (7)-ის ძალით, ორი დანარჩენი იქნება $-2\varepsilon_1=1-i\sqrt{3}$ და $-2\varepsilon_2=1+i\sqrt{3}$ რიცხვები (იხ. ზედა მაგალითი 3).

2) $\sqrt[4]{81}$ აქვს ოთხი მნიშვნელობა: $3, -3, 3i, -3i$.

ერთეულიდან n-ური ხარისხის ორი ფესვის ნამრავლი თვითონ არის n-ური ხარისხის ფესვი ერთეულიდან. მართლაც, თუ $\varepsilon^n=1$ და $\eta^n=1$, მაშინ $(\varepsilon\eta)^n=\varepsilon^n\eta^n=1$. შემდეგ, რიცხვი, რომელიც ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვის შებრუნებულია, თვითონ არის ასეთივე ფესვი. მართლაც, ვთქვათ $\varepsilon^n=1$, მაშინ $\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}=1$-დან გამომდინარეობს $\varepsilon^n\cdot(\varepsilon^{-1})^n=1$, ე. ი. $(\varepsilon^{-1})^n=1$. საზოგადოდ, ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვის ყოველი ხარისხი აგრეთვე ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვია.

ერთეულიდან k ხარისხის ყოველი ფესვი არის ერთეულიდან l ხარისხის ფესვიც, ყოველი k-ს ჯერადი l-სათვის. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ განვიხილავთ ერთეულიდან n ხარისხის ყველა ფესვთა ერთობლიობას, მაშინ

ამ ფესვთაგან ზოგიერთი უკვე იქნება ერთეულიდან n' ხარისხის ფესვი, n რიცხვის გამყოფ რომელიმე n'-სათვის. მაგრამ, ყოველი n-სათვის არსებობს ერთეულიდან n ხარისხის ისეთი ფესვები, რომელნიც არ არიან ერთეულიდან არცერთი უფრო ნაკლები ხარისხის ფესვები. ასეთ ფესვებს ეწოდებათ ერთეულიდან n ხარისხის *პირველყოფილი ფესვები*. მათი არსებობა გამომდინარეობს (6) ფორმულებიდან: თუ მოცემული k მნიშვნელობის შესაბამის ფესვის მნიშვნელობას აღვნიშნავთ ε_k-თი (ისე, რომ $\varepsilon_0 = 1$), მაშინ მუავრის (1) ფორმულის საფუძველზე

$$\varepsilon_1^k = \varepsilon_k.$$

მაშასადამე, ε_1 რიცხვის n-ზე უფრო ნაკლები არც ერთი ხარისხი არ იქნება 1-ის ტოლი, ე. ი. $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ არის პირველყოფილი ფესვი.

ერთეულიდან n-ხარისხის ε ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება პირველყოფილი, თუ მისი ε^k ხარისხები, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, განსხვავებულია, ე. ი. თუ მათ მიერ ამოიწურება ერთეულიდან n ხარისხის ყველა ფესვი.

მართლაც, თუ ε რიცხვის ყველა აღნიშნული ხარისხები განსხვავებულია, მაშინ, ცხადია, ε იქნება n ხარისხის პირველყოფილი ფესვი. ხოლო თუ, მაგალითად, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$, როცა $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$, მაშინ $\varepsilon^{l-k} = 1$, ე. ი., $1 \leqslant l-k \leqslant n-1$ უტოლობათა ძალით, ε ფესვი არ იქნება პირველყოფილი.

ზემოთ ნაპოვნი ε_1 რიცხვი ზოგად შემთხვევაში არა ერთადერთი პირველყოფილი n ხარისხის ფესვია. ყველა ასეთი ფესვის მოძებნას ემსახურება შემდეგი თეორემა.

თუ ε ერთეულიდან n ხარისხის პირველყოფილი ფესვია, მაშინ ε^k რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება n ხარისხის პირველყოფილი ფესვი, როცა k თანამარტივია n-თან.

მართლაც, ვთქვათ, d არის k და n რიცხვთა უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ $d > 1$ და $k = dk'$, $n = dn'$, მაშინ

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1,$$

ე. ი. ε^k ფესვი აღმოჩნდა ერთეულიდან n' ხარისხის ფესვი.

ვთქვათ, მეორე მხრივ, $d = 1$ და ამასთანავე ε^k რიცხვი არის ერთეულიდან m ხარისხის ფესვი, $1 \leqslant m < n$. ამრიგად,

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1.$$

რადგან ε რიცხვი ერთეულიდან n ხარისხის *პირველყოფილი* ფესვია, ე. ი. მისი მხოლოდ n-ის ჯერადი მაჩვენებლიანი ხარისხები შეიძლება იყოს ერთეულის ტოლი, ამიტომ km რიცხვი ჯერადი იქნება n-ის. მაგრამ აქედან გამომდინარეობს, რომ k და n რიცხვები არ შეიძლება იყვნენ თანამარტივნი, რადგან $1 \leqslant m < n$, წინააღმდეგ დაშვებისა.

ამრიგად, ერთეულიდან n ხარისხის პირველყოფილ ფესვთა რიცხვი ტოლია n-ზე ნაკლებ და მასთან თანამარტივ მთელ დადებით k რიცხვთა რაოდენობისა. ამ რიცხვის გამოსახულება, რომელიც ჩვეულებრივ აღინიშნება $\varphi(n)$, შეიძლება ვნახოთ რიცხვთა თეორიის ნებისმიერ კურსში.

თუ p მარტივი რიცხვია, მაშინ ერთეულიდან p ხარისხის პირველყოფილი ფესვები იქნება ყველა ეს ფესვი, გარდა თვით ერთეულისა. მეორე მხრივ, ერთეულიდან მეოთხე ხარისხის ფესვთა შორის პირველყოფილი იქნება i და $-i$, მაგრამ არა 1 და -1.

თავი მეხუთე

მრავალწევრები და მათი ფესვები

§ 20. ოპერაციები მრავალწევრებზე

წიგნის პირველი ორი თავის შინაარსი, სახელდობრ დეტერმინანტთა თეორია და წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორია, წარმოიშვა სასკოლო ალგებრის კურსის იმ მიმართულების უშუალო განვითარებით, რომელმაც დაწყებული ერთუცნობიან პირველი ხარისხის ერთი განტოლებიდან მიგვიყვანა პირველი ხარისხის ორ და სამუცნობიან ორ და, შესაბამისად, სამ განტოლებათა სისტემამდე. ელემენტალურ ალგებრის მეორე მიმართულება, რომელიც იქ კიდევ უფრო მნიშვნელოვნადაა აღიარებული, მდგომარეობს გადასვლაში პირველი ხარისხის ერთუცნობიან განტოლებიდან კვლავ ერთუცნობიან, მაგრამ უკვე ნებისმიერ კვადრატულ განტოლებაზე, ხოლო შემდეგ მესამე და მეოთხე ხარისხის ზოგიერთი კერძო სახის განტოლებებზეც. ეს მიმართულება უმაღლეს ალგებრაში ვითარდება ძალიან დიდ და შინაარსიან დარგად, რომელიც მიძღვნილია ერთუცნობიან ნებისმიერი n-ური ხარისხის ნებისმიერი განტოლებების შესწავლისადმი. ალგებრის ამ ნაწილს, ისტორიულად ყველაზე ადრინდელს, მიეკუთვნება როგორც წინამდებარე, ასევე რამდენიმე შემდგომი თავი.

n-ური ხარისხის განტოლების ზოგადი სახე (სადაც n რომელიმე მთელი დადებითი რიცხვია) არის

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0. \qquad (1)$$

ამ განტოლების $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ კოეფიციენტებად ვიგულისხმებთ ნებისმიერ კომპლექსურ რიცხვებს, ამასთანავე უ ფ რ ო ს ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ი a_0 განსხვავებული უნდა იყოს ნულისაგან.

თუ მოცემულია (1) განტოლება, ყოველთვის იგულისხმება, რომ მოითხოვება მისი ა მ ო ხ ს ნ ა. სხვა სიტყვებით, მოითხოვება მოიძებნოს x უცნობისათვის ისეთი რიცხვითი მნიშვნელობანი, რომელნიც დ ა ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ე ნ ამ განტოლებას, ე. ი. უცნობის ნაცვლად ჩასმისა და ყველა მითითებულ ოპერაციათა შესრულების შემდეგ ისინი (1) განტოლების მარცხენა ნაწილს აქცევენ ნულად.

მაგრამ მიზანშეწონილია (1) განტოლების ამოხსნის ამოცანა შევცვალოთ უფრო ზოგადი ამოცანით, ამ განტოლების მარცხენა

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \tag{2}$$

მხარის შესწავლით, რომელსაც x *უცნობის მიმართ* n*-ური ხარისხის მრავალწევრი* (ანუ *პოლინომი*) ეწოდება. ამ ტერმინთაგან ჩვენ ავირჩევთ პირველს; მტკიცედ უნდა გვახსოვდეს, რომ ახლა მრავალწევრი ეწოდება მხოლოდ (2) სახის გამოსახულებას, ე. ი. x უცნობის მხოლოდ მთელ არაუარყოფით ხარისხების ჯამს, აღებულთ რაიმე რიცხვითი კოეფიციენტებით და არა ერთწევრთა ნებისმიერ ჯამს, როგორც ეს იყო ელემენტალურ ალგებრაში. კერძოდ, მრავალწევრებად არ ჩავთვლით ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც x უცნობს შეიცავენ უარყოფითი ან წილადი მაჩვენებლებით, მაგალითად, $2x^3 - \frac{1}{x} + 3$, ან $ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1} + d + ex + fx^2$, ან კიდევ $x^{\frac{1}{2}} + 1$.

მრავალწევრთა შემოკლებული ჩაწერის მიზნით ვისარგებლებთ $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ და ა. შ. სიმბოლოებით.

ორ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრს ჩავთვლით *ტოლად* (ანუ *იგივურად ტოლად*) $f(x) = g(x)$ იმ შემთხვევაში, თუ ტოლია მათი კოეფიციენტები ერთი და იმავე ხარისხთან. კერძოდ, არც ერთი მრავალწევრი, რომლის ერთი კოეფიციენტი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, და ამიტომ n-ური ხარისხის (1) განტოლების ჩაწერაში ნახმარ ტოლობის ნიშანს არავითარი კავშირი არ აქვს მრავალწევრთა ახლახან განმარტებულ ტოლობასთან. მრავალწევრთა დამაკავშირებელი ნიშანი = შემდეგში ყოველთვის უნდა გავიგოთ ამ მრავალწევრთა იგივური ტოლობის აზრით.

ამრიგად, n-ური ხარისხის (2) მრავალწევრს უნდა შევხედოთ, როგორც გარკვეულ ფორმალურ გამოსახულებას, რომელიც სავსებით განისაზღვრება თავის $a_0, a_1, \dots, a_n$ კოეფიციენტთა ერთობლიობით, სადაც $a_0 \neq 0$. ამ სიტყვათა ზუსტი აზრი გამოირკვევა ბევრად უფრო გვიან, მე-10 თავში. შევნიშნოთ, რომ მრავალწევრის (2) სახით, ე. ი. x *უცნობის ხარისხების კლებადობის მიხედვით* ჩაწერის გარდა, დაშვებული იქნება მისი სხვა ჩანაწერებიც, რომლებიც (2)-დან მიიღებიან შესაკრებთა გადანაცვლებით, მაგალითად, ჩაწერა *უცნობის ზრდადი ხარისხებით*.

რა თქმა უნდა, (2) მრავალწევრისთვის შეგვეძლო შევვეხედა მათემატიკური ანალიზის თვალსაზრისითაც, ე. ი. ჩაგვეთვალა იგი x კომპლექსური ცვლადის კომპლექსურ ფუნქციად. მაგრამ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ *ორი ფუნქცია ტოლად ითვლება იმ შემთხვევაში, როცა ტოლია მათი მნიშვნელობანი* x *ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის*. ცხადია, რომ ორი მრავალწევრი, ტოლი ზემოთ აღნიშნული ფორმალურ-ალგებრული აზრით, ტოლი იქნება, როგორც x-ის ფუნქციაც. მაგრამ შებრუნებული დებულება დამტკიცებული იქნება მხოლოდ § 24-ში. ამის შემდეგ, ალგებრული და ფუნქციონალურ-თეორიული თვალსაზრისი რიცხვითი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ცნების შესახებ სინამდვილეში გახდებიან ტოლძალოვანი, ჯერჯერობით კი ყოველთვის უნდა მივუთითოთ

სახელდობრ რომელი აზრით განიხილება მრავალწევრის ცნება. წინამდებარე და ორ შემდგომ პარაგრაფში მრავალწევრს განვიხილავთ, როგორც ფორმალურ-ალგებრულ გამოსახულებას.

გასაგებია, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობენ n-ური ხარისხის მრავალწევრები. ყველა შესაძლებელი მრავალწევრის განხილვისას, გარდა პირველი ხარისხის, კვადრატული, კუბური და ა. შ. მრავალწევრებისა, შევხვდებით აგრეთვე *ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრებსაც*, ე. ი. *ნულისაგან განსხვავებულ კომპლექსურ რიცხვებს*. რიცხვს ნულსაც აგრეთვე ჩავთვლით მრავალწევრად; ეს იქნება ერთადერთი მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ არის განსაზღვრული.

ახლა კომპლექსურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრთათვის განვსაზღვრავთ შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციებს. ეს ოპერაციები შემოღებული იქნება ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებზე ოპერაციების მსგავსად, რომელიც მკითხველისათვის ცნობილია ელემენტალური ალგებრის კურსიდან.

თუ მოცემულია კომპლექსური კოეფიციენტებიანი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები, რომლებიც, მოხერხებულობისათვის, x-ის ზრდადი ხარისხებითაა ჩაწერილნი

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \quad a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_{s-1}x^{s-1}+b_sx^s, \quad b_s\neq 0,$$

და თუ, მაგალითად, $n\geqslant s$, მაშინ მათი *ჯამი* ეწოდება მრავალწევრს

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\dots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n,$$

რომლის კოეფიციენტები მიიღებიან $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უცნობის ერთნაირ ხარისხიან წევრთა კოეფიციენტების შეკრებით, ე. ი.

$$c_i=a_i+b_i, \quad i=0, 1, \dots, n. \tag{3}$$

ამასთანავე, როცა $n>s$, მაშინ $b_{s+1}, b_{s+2}, \dots, b_n$ უნდა ჩავთვალოთ ნულის ტოლად. ჯამის ხარისხი ტოლი იქნება n-ისა, თუ n მეტია s-ზე, მაგრამ როცა $n=s$, მაშინ იგი შეიძლება შემთხვევით აღმოჩნდეს n-ზე ნაკლები, სახელდობრ იმ შემთხვევაში, როცა $b_n=-a_n$.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა *ნამრავლი* ეწოდება მრავალწევრს

$$f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+\dots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s},$$

რომლის კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$d_i=\sum_{k+l=i}a_kb_l, \quad i=0, 1, \dots, n+s-1, n+s, \tag{4}$$

ე. ი. d_i კოეფიციენტი მიიღება, თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ისეთ კოეფიციენტებს, რომელთა ინდექსების ჯამი i-ს ტოლია, გადავამრავლებთ და შემდეგ ყველა ასეთ ნამრავლს შევკრებთ; კერძოდ, $d_0=a_0b_0$, $d_1=a_0b_1+a_1b_0, \dots, d_{n+s}=a_nb_s$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს $d_{n+s}\neq 0$ უტოლობა და ამიტომ *ორი მრავალწევრის ნამრავლის ხარისხი ტოლია ამ მრავალწევრთა ხარისხების ჯამისა*.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნულისაგან განსხვავებულ მრავალწევრთა ნამრავლი არასოდეს არ იქნება ნულის ტოლი.

როგორი თვისებები აქვს მრავალწევრებისათვის ჩვენს მიერ შემოღებულ ოპერაციებს? შეკრების კომუტატურობა და ასოციაციურობა მაშინვე გამომდინარეობს რიცხვთა შეკრებისათვის ამ თვისებათა სამართლიანობიდან, რადგან იკრიბებიან უცნობის ყოველ ცალკეულ ხარისხთან მდგომი კოეფიციენტები. გამოკლება თურმე შესაძლებელია: ნულის როლს ასრულებს რიცხვი ნული, რომელიც მივაკუთვნეთ მრავალწევრთა რიცხვს, ხოლო ზემოთ დაწერილი $f(x)$ მრავალწევრის მოპირდაპირე იქნება მრავალწევრი

$$-f(x)=-a_0-a_1x-\dots-a_{n-1}x^{n-1}-a_nx^n.$$

გამრავლების კომუტატურობა გამომდინარეობს რიცხვთა გამრავლების კომუტატურობიდან და იმ ფაქტიდან, რომ მრავალწევრთა გამრავლების განმარტებაში ორივე $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები გამოიყენებიან სავსებით თანასწორუფლებიანად. გამრავლების ასოციაციურობა მტკიცდება შემდეგნაირად: თუ ზემოთ დაწერილ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა გარდა, კიდევ მოცემულია

$$h(x)=c_0+c_1x+\dots+c_{t-1}x^{t-1}+c_tx^t, \quad c_t\neq 0,$$

მრავალწევრი, მაშინ x^i-ს კოეფიციენტი, $i=0, 1, \dots, n+s+t$, $[f(x)g(x)]h(x)$ ნამრავლში იქნება რიცხვი

$$\sum_{j+m=i}\Big(\sum_{k+l=j}a_kb_l\Big)c_m=\sum_{k+l+m=i}a_kb_lc_m,$$

ხოლო $f(x)[g(x)h(x)]$ ნამრავლში — მისი ტოლი რიცხვი

$$\sum_{k+j=i}a_k\Big(\sum_{l+m=j}b_lc_m\Big)=\sum_{k+l+m=i}a_kb_lc_m.$$

დაბოლოს, დისტრიბუციულობის კანონის სამართლიანობა გამომდინარეობს ტოლობიდან

$$\sum_{k+l=i}(a_k+b_k)c_l=\sum_{k+l=i}a_kc_l+\sum_{k+l=i}b_kc_l,$$

რადგან ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი არის x^i-ს კოეფიციენტი $[f(x)+g(x)]h(x)$ მრავალწევრში, ხოლო მარჯვენა ნაწილი — უცნობის იმავე ხარისხის კოეფიციენტი $f(x)h(x)+g(x)h(x)$ მრავალწევრში.

შევნიშნოთ, რომ მრავალწევრთა გამრავლებისას ერთეულის როლს ასრულებს რიცხვი 1, განხილული, როგორც ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი. მეორე მხრივ, $f(x)$ მრავალწევრს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს შებრუნებული $f^{-1}(x)$ მრავალწევრი,

$$f(x)f^{-1}(x)=1, \tag{5}$$

თუ $f(x)$ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრია. მართლაც, თუ $f(x)$ ნულისაგან განსხვავებული a რიცხვია, მაშინ მისი შებრუნებული მრავალწევრი იქნება a^{-1} რიცხვი. ხოლო, თუ $f(x)$-ს აქვს $n\geqslant 1$ ხარისხი, მაშინ (5) ტო-

ლობის მარცხენა ნაწილის ხარისხი, თუკი $f^{-1}(x)$ მრავალწევრი არსებობს, არ იქნება ნაკლები n-ზე მაშინ, როცა მარჯვნივ დგას ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრთა გამრავლებისათვის შებრუნებული ოპერაცია—გაყოფა—არ არსებობს. ამ მხრივ კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი ყველა მრავალწევრთა სისტემა გვაგონებს ყველა მთელ რიცხვთა სისტემას. ეს ანალოგია მჟღავნდება იმაში, რომ მრავალწევრებისათვის ისევე, როგორც მთელი რიცხვებისათვის, არსებობს ნაშთით გაყოფის ალგორითმი. ეს ალგორითმი ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრთათვის მკითხველისათვის ცნობილია ჯერ კიდევ ელემენტალური ალგებრიდან. მაგრამ, რადგან ახლა ჩვენ ვიხილავთ კომპლექსურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრთა შემთხვევას, ერთხელ კიდევ [illegible] მოვიყვანოთ ყველა მასთან დაკავშირებული ფორმულირება და დამტკიცება.

ნებისმიერი ორი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x), \tag{6}$$

ამასთანავე $r(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე, ანდა $r(x)=0$. ამ პირობის დამაკმაყოფილებელი $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები ცალსახად განისაზღვრებიან.

პირველად დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნახევარი. ვთქვათ, კიდევ არსებობენ $\overline{q}(x)$ და $\overline{r}(x)$ მრავალწევრები, რომელნიც აგრეთვე აკმაყოფილებენ

$$f(x)=g(x)\,\overline{q}(x)+\overline{r}(x) \tag{7}$$

ტოლობას, ამასთანავე, $\overline{r}(x)$-ის ხარისხი კვლავ ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე[1]. (6) და (7) ტოლობათა მარჯვენა ნაწილების გატოლებით მივიღებთ:

$$g(x)\,[q(x)-\overline{q}(x)]=\overline{r}(x)-r(x).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე, მარცხენა ნაწილის ხარისხი კი, როცა $q(x)-\overline{q}(x)\neq 0$, მეტია ან ტოლი $g(x)$-ის ხარისხისა. ამიტომ უნდა გვქონდეს $q(x)-\overline{q}(x)=0$, ე. ი. $q(x)=\overline{q}(x)$, ხოლო მაშინ კი $r(x)=\overline{r}(x)$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

გადავიდეთ თეორემის პირველი ნახევრის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს აქვთ ხარისხები n და s, შესაბამისად. თუ $n<s$, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$. თუკი $n\geqslant s$, მაშინ ვისარგებლებთ იმავე მეთოდით, როგორც ელემენტალურ ალგებრაში ხდება ნამდვილ კოეფიციენტებიან, უცნობის კლებადი ხარისხებით დალაგებულ, მრავალწევრთა გაყოფა. ვთქვათ,

---

[1] ანდა $\overline{r}(x)=0$; შემდეგში ეს შემთხვევა არ იქნება ცალკე განხილული.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0,$$
$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_{s-1}x+b_s,\quad b_0\neq 0.$$

თუ ვიგულისხმებთ

$$f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}g(x)=f_1(x), \tag{8}$$

მივიღებთ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი ნაკლებია n-ზე. აღვნიშნოთ ეს ხარისხი n_1-ით, ხოლო $f_1(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი — a_{10}-ით. შემდეგ, თუ კიდევ $n_1\geqslant s$, დავუშვათ

$$f_1(x)-\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}g(x)=f_2(x), \tag{8_1}$$

აღვნიშნოთ n_2-ით ხარისხი, ხოლო a_{20}-ით უფროსი კოეფიციენტი $f_2(x)$ მრავალწევრისა, შემდეგ დავუშვათ

$$f_2(x)-\frac{a_{20}}{b_0}x^{n_2-s}g(x)=f_3(x) \tag{8_2}$$

და ა. შ.

რადგან $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... მრავალწევრთა ხარისხები მცირდებიან, $n>n_1>$ $>n_2>\ldots$, ამიტომ ნაბიჯთა სასრული რიცხვი შემდეგ მივალთ ისეთ $f_k(x)$ მრავალწევრამდე,

$$f_{k-1}(x)-\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}g(x)=f_k(x), \tag{8_{k-1}}$$

რომლის ხარისხი n_k ნაკლებია s-ზე, რის შემდეგაც ჩვენი პროცესი ჩერდება. (8), (8_1), ..., (8_{k-1}) ტოლობათა შეკრებით მივიღებთ:

$$f(x)-\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s}\right)g(x)=f_k(x),$$

ე. ი. მრავალწევრები

$$q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-s}+\frac{a_{10}}{b_0}x^{n_1-s}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-s},$$
$$r(x)=f_k(x)$$

მართლაც აკმაყოფილებენ (6) ტოლობას, ამასთანავე $r(x)$-ის ხარისხი სინამდვილეში ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე.

შევნიშნოთ, რომ $q(x)$ მრავალწევრს ეწოდება განაყოფი $f(x)$-ისა $g(x)$-ზე, $r(x)$-ს კი — ამ გაყოფის ნაშთი.

ნაშთით გაყოფის ალგორითმის განხილვიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ, თუ $f(x)$ და $g(x)$ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია, მაშინ ყველა $f_1(x)$, $f_2(x)$,... მრავალწევრის კოეფიციენტები და ამიტომ $q(x)$ განაყოფისა და $r(x)$ ნაშთის კოეფიციენტებიც ნამდვილი იქნება.

§ 21. გამყოფები. უდიდესი საერთო გამყოფი

ვთქვათ, მოცემულია კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი არანულოვანი $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრები. თუ $f(x)$-ის $\varphi(x)$-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთი უდრის ნულს, ე. ი., როგორც ამბობენ, $f(x)$ *იყოფა* (ანუ *უნაშთოდ იყოფა*) $\varphi(x)$-ზე, მაშინ $\varphi(x)$ მრავალწევრს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის *გამყოფი*.

$\varphi(x)$ მრავალწევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $f(x)$ მრავალწევრის გამყოფი, თუ არსებობს

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x) \tag{1}$$

ტოლობის დამაკმაყოფილებელი $\psi(x)$ მრავალწევრი.

მართლაც, თუ $\varphi(x)$ არის $f(x)$-ის გამყოფი, მაშინ $\psi(x)$-ად უნდა ავიღოთ განაყოფი $f(x)$-ისა $\varphi(x)$-ზე. პირიქით, ვთქვათ, (1) ტოლობის დამაკმაყოფილებელი $\psi(x)$ მრავალწევრი არსებობს. ისეთი $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრთა ერთადერთობის გამო, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$f(x)=\varphi(x)q(x)+r(x)$$

ტოლობას და იმ პირობას, რომ $r(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $\varphi(x)$-ის ხარისხზე, რაც წინა პარაგრაფში იყო დამტკიცებული, ჩვენს შემთხვევაში გამომდინარეობს, რომ $f(x)$-ის $\varphi(x)$-ზე გაყოფით მიღებული განაყოფი ტოლია $\psi(x)$-ისა, ხოლო ნაშთი უდრის ნულს.

გასაგებია, რომ, თუ (1) ტოლობას აქვს ადგილი, მაშინ $\psi(x)$-ც იქნება $f(x)$-ის გამყოფი. შემდეგ ცხადია, რომ $\varphi(x)$-ის ხარისხი მეტი არ არის $f(x)$-ის ხარისხზე.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ მრავალწევრს და მის $\varphi(x)$ გამყოფს ორივეს აქვს რაციონალური ან ნამდვილი კოეფიციენტები, მაშინ $\psi(x)$ მრავალწევრსაც აგრეთვე რაციონალური ან, შესაბამისად, ნამდვილი კოეფიციენტები ექნება, რადგან იგი მოიძებნება გაყოფის ალგორითმის საშუალებით. რა თქმა უნდა, რაციონალურ ან ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრს შეიძლება ჰქონდეს ისეთი გამყოფებიც, რომელთა ყველა კოეფიციენტი არ არის რაციონალური ან, შესაბამისად, ნამდვილი. ამას გვიჩვენებს, მაგალითად, ტოლობა

$$x^2+1=(x-i)(x+i).$$

მივუთითოთ მრავალწევრთა გაყოფადობის ზოგიერთი ძირითადი თვისება, რომელიც შემდეგში ნახავენ მრავალრიცხოვან გამოყენებას.

I. *თუ $f(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე, ხოლო $g(x)$ იყოფა $h(x)$-ზე, მაშინ $f(x)$ გაიყოფა $h(x)$-ზე.*

მართლაც, პირობის ძალით, $f(x)=g(x)\varphi(x)$ და $g(x)=h(x)\psi(x)$, და ამიტომ $f(x)=h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$.

II. *თუ $f(x)$ და $g(x)$ იყოფიან $\varphi(x)$-ზე, მაშინ მათი ჯამიც და სხვაობაც აგრეთვე გაიყოფიან $\varphi(x)$-ზე.*

მართლაც, $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ და $g(x)=\varphi(x)\chi(x)$ ტოლობათაგან გამომდინარეობს $f(x)\pm g(x)=\varphi(x)[\psi(x)\pm\chi(x)]$.

$f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ ნამრავლი $f(x)$-ისა ნე-
ბისმიერ $g(x)$ მრავალწევრზე აგრეთვე გაიყოფა $\varphi(x)$-ზე.

მართლაც, თუ $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, მაშინ $f(x)g(x)=\varphi(x)[\psi(x)g(x)]$.

II და III-დან გამომდინარეობს შემდეგი თვისება:

IV. თუ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ მრავალწევრთაგან თითოეული
იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ $\varphi(x)$-ზე გაიყოფა

$$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+\ldots+f_k(x)g_k(x)$$

მრავალწევრიც, სადაც $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x)$—ნებისმიერი მრა-
-ვალწევრებია.

V. ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა ნულოვანი ხარის-
ხის ნებისმიერ მრავალწევრზე.

მართლაც, თუ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, ხოლო c ნებისმიერი
რიცხვია, ნულისაგან განსხვავებული, ე. ი. ნულოვანი ხარისხის ნებისმიერი
მრავალწევრია, მაშინ

$$f(x)=c\left(\frac{a_0}{c}x^n+\frac{a_1}{c}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_n}{c}\right).$$

VI. თუ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, მაშინ $f(x)$ გაიყოფა $c\varphi(x)$-ზეც,
სადაც c არის ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი
რიცხვი.

მართლაც, $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $f(x)=$
$=[c\varphi(x)]\cdot[c^{-1}\psi(x)]$ ტოლობა.

VII. $cf(x)$ მრავალწევრები, $c\neq 0$, და მხოლოდ ისინი, იქნე-
ბიან $f(x)$ მრავალწევრის ის გამყოფები, რომელთაც იგივე
ხარისხი აქვთ, რაც $f(x)$-ს.

მართლაც, $f(x)=c^{-1}[cf(x)]$, ე. ი. $f(x)$ იყოფა $cf(x)$-ზე.

მეორე მხრივ, თუ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე, ამასთანავე $f(x)$ და $\varphi(x)$-ის
ხარისხები ემთხვევიან, მაშინ $f(x)$-ის $\varphi(x)$-ზე გაყოფით მიღებული განაყოფის
ხარისხი უნდა იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. $f(x)=d\varphi(x)$, $d\neq 0$, საიდანაც
$\varphi(x)=d^{-1}f(x)$.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი თვისება:

VIII. $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები მაშინ და მხოლოდ მაშინ
იყოფიან ერთდროულად ერთმანეთზე, როცა $g(x)=cf(x)$, $c\neq 0$.

დაბოლოს, VIII და I-დან გამომდინარეობს თვისება:

IX. ყოველი გამყოფი ორი $f(x)$ და $cf(x)$, სადაც $c\neq 0$, მრა-
ვალწევრიდან ერთ-ერთისა, მეორე მრავალწევრის გამყოფიც
იქნება.

უდიდესი საერთო გამყოფი. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი მრავალ-
წევრები $f(x)$ და $g(x)$. $\varphi(x)$ მრავალწევრს ეწოდება $f(x)$ და $g(x)$ მრავალ-
წევრთა საერთო გამყოფი, თუ იგი თითოეული ამ მრავალწევრის გამ-
ყოფია. V თვისება (იხ. ზემოთ) გვიჩვენებს, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევ-
რების საერთო გამყოფთა რიცხვს მიეკუთვნება ნულოვანი ხარისხის ყველა

მრავალწევრი. თუ ამ ორ მრავალწევრს სხვა საერთო გამყოფები არ აქვთ, მაშინ მათ *ურთიერთ მარტივი* ეწოდებათ.

ზოგად შემთხვევაში $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს შეიძლება ჰქონდეთ გამყოფები, დამოკიდებულნი x-ზე, და ჩვენ გვინდა ამ მრავალწევრთა *უდიდესი* საერთო გამყოფის ცნების შემოტანა.

უხერხული იქნებოდა ისეთი განმარტების მიღება, რომლის მიხედვით $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი არის მათი უდიდესი ხარისხის საერთო გამყოფი. ერთი მხრივ, ჯერ კიდევ არ ვიცით, ხომ არ ექნებათ $f(x)$ და $g(x)$-ს უდიდესი ხარისხის მრავალი სხვადასხვა საერთო გამყოფი, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან არა მარტო ნულოვანი ხარისხის მამრავლით, ე. ი. ხომ არ შეიცავს ეს განმარტება მეტად დიდ განუსაზღვრელობას. მეორე მხრივ, მკითხველი ელემენტარულ არითმეტიკაში უკვე შეხვედრია მთელ რიცხვთა უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნის ამოცანას და იცის, რომ 12 და 18 მთელ რიცხვთა უდიდესი საერთო გამყოფი 6 არის არა მარტო ამ რიცხვების საერთო გამყოფთა შორის უდიდესი, არამედ იყოფა კიდეც მათ ნებისმიერ სხვა საერთო გამყოფზე; მართლაც, 12 და 18 რიცხვების სხვა საერთო გამყოფებია 1, 2, 3, —1, —2, —3, —6 რიცხვები.

ამიტომ მრავალწევრების შემთხვევაში მივიღებთ ასეთ განმარტებას: $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა *უდიდესი საერთო გამყოფი* ეწოდება ისეთ $d(x)$ მრავალწევრს, რომელიც არის მათი საერთო გამყოფი და ამასთანავე, თვითონ იყოფა ამ მრავალწევრთა ნებისმიერ სხვა საერთო გამყოფზე. $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი აღინიშნება $(f(x), g(x))$ სიმბოლოთი.

ეს განმარტება ღიად ტოვებს კითხვას, არსებობს თუ არა ნებისმიერ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი. ამ კითხვაზე ახლა დადებითი პასუხი გაიცემა. ამავე დროს მითითებული იქნება მოცემულ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფის პრაქტიკულად მოძებნის მეთოდი. გასაგებია, რომ ჩვენ არ შეგვიძლია აქ გადმოვიტანოთ ის წესი, რომლითაც ჩვეულებრივ ხდება მთელ რიცხვთა უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნა, რადგან მრავალწევრებისათვის ჯერ კიდევ არა გვაქვს მთელი რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლის მსგავსი რამ. მაგრამ მთელი რიცხვებისათვის არსებობს სხვა წესიც, ეგრეთწოდებული *მიმდევრობითი გაყოფის ალგორითმი*, ანუ *ევკლიდეს ალგორითმი*; ეს წესი სავსებით გამოიყენება მრავალწევრებისთვისაც.

მრავალწევრებისათვის ევკლიდეს ალგორითმი მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები, $f(x)$ ვყოფთ $g(x)$-ზე და ვღებულობთ, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, რაიმე $r_1(x)$ ნაშთს. შემდეგ $g(x)$ ვყოფთ $r_1(x)$-ზე და ვღებულობთ $r_2(x)$ ნაშთს, $r_1(x)$ ვყოფთ $r_2(x)$-ზე და ა. შ. რადგან ნაშთების ხარისხები სულ მცირდებიან, ამიტომ თანმიმდევრობით გაყოფის ამ მწკრივში ჩვენ უნდა მივაღწიოთ იმ ადგილამდე, სადაც გაყოფა მოხდება უნაშთოდ და ამიტომ პროცესი შეწყდება. *სწორედ ის* $r_k(x)$ *ნაშთი, რომელზედაც უნაშთოდ იყოფა წინა* $r_{k-1}(x)$ *ნაშთი,*

იქნება $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა საერთო უდიდესი გამყოფი.

დამტკიცებისათვის წინა აბზაცში გადმოცემული ჩამოვწეროთ შემდეგი ტოლობათა მწკრივის სახით:

$$\left.\begin{aligned}
f(x)&=g(x)\,q_1(x)+r_1(x),\\
g(x)&=r_1(x)\,q_2(x)+r_2(x),\\
r_1(x)&=r_2(x)\,q_3(x)+r_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{k-3}(x)&=r_{k-2}(x)\,q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x),\\
r_{k-2}(x)&=r_{k-1}(x)\,q_k(x)+r_k(x),\\
r_{k-1}(x)&=r_k(x)\,q_{k+1}(x).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $r_k(x)$ გამყოფია $r_{k-1}(x)$-ის. აქედან გამომდინარეობს, რომ უკანასკნელის წინა ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ორივე შესაკრები იყოფა $r_k(x)$-ზე, რის გამოც $r_k(x)$ გამყოფი იქნება $r_{k-2}(x)$-საც. შემდეგ, ამავე გზით თუ ავალთ ზემოთ, მივიღებთ, რომ $r_k(x)$ გამყოფი იქნება $r_{k-3}(x), \ldots, r_2(x)$, $r_1(x)$-საც. აქედან, მეორე ტოლობის ძალით, გამოვა, რომ $r_k(x)$ გამყოფი იქნება $g(x)$-ის და, მაშასადამე, პირველი ტოლობის საფუძველზე—$f(x)$-საც. ამრიგად, $r_k(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$-ის საერთო გამყოფი.

ახლა ავიღოთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ნებისმიერი $\varphi(x)$ საერთო გამყოფი. რადგან (2) ტოლობათაგან პირველის მარცხენა ნაწილი და მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები იყოფიან $\varphi(x)$-ზე, ამიტომ $r_1(x)$-იც გაიყოფა $\varphi(x)$-ზე. თუ გადავალთ მეორე და შემდგომ ტოლობებზე, ამავე წესით მივიღებთ, რომ $\varphi(x)$-ზე გაიყოფიან $r_2(x)$, $r_3(x), \ldots$ მრავალწევრები. დაბოლოს, თუ უკვე დამტკიცებულია, რომ $r_{k-2}(x)$ და $r_{k-1}(x)$ იყოფიან $\varphi(x)$-ზე, მაშინ უკანასკნელის წინა ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $r_k(x)$-იც იყოფა $\varphi(x)$-ზე. ამრიგად, $r_k(x)$ სინამდვილეში იქნება $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი.

მაშასადამე, დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ორ მრავალწევრს აქვს უდიდესი საერთო გამყოფი და მივიღეთ მისი გამოთვლის წესი. ეს წესი გვიჩვენებს, რომ, თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს ორივეს აქვს რაციონალური ან ნამდვილი კოეფიციენტები, მაშინ მათი უდიდესი საერთო გამყოფის კოეფიციენტებიც აგრეთვე რაციონალური ან, შესაბამისად, ნამდვილი იქნებიან, თუმცა, რა თქმა უნდა, ამ მრავალწევრებს შეიძლება ჰქონდეთ ისეთი გამყოფებიც, რომელთა ყველა კოეფიციენტი რაციონალური (ნამდვილი) არ არის. ასე მაგალითად, რაციონალურ კოეფიციენტებიან

$$f(x)=x^3-3x^2-2x+6,\; g(x)=x^3+x^2-2x-2$$

მრავალწევრებს უდიდეს საერთო გამყოფად აქვთ რაციონალურ კოეფიციენტებიანი x^2-2 მრავალწევრი, თუმცა მათ აქვთ საერთო გამყოფი $x-\sqrt{2}$, რომლის ყველა კოეფიციენტი რაციონალური არ არის.

თუ $d(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი, მაშინ, როგორც VIII და IX (იხ. ზემოთ) თვისებები გვიჩვენებს, ამ მრავალწევრთა უდიდეს საერთო გამყოფად შეგვეძლო აგვერჩია $cd(x)$ მრავალწევრიც, სადაც c არის ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი. სხვა სიტყვებით, ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი განისაზღვრება მხოლოდ ნულოვანი ხარისხის მამრავლის სიზუსტით. ამის გამო შეგვიძლია შევთანხმდეთ, რომ ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფის უფროსი კოეფიციენტი ყოველთვის ჩავთვალოთ ერთის ტოლად. თუ ვისარგებლებთ ამ პირობით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ორი მრავალწევრი თანამარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის ერთს. მართლაც, ორი თანამარტივი მრავალწევრის უდიდეს საერთო გამყოფად შეგვიძლია ავიღოთ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი, მაგრამ თუ გავამრავლებთ მას შებრუნებულ ელემენტზე, მივიღებთ ერთს.

მაგალითი. მოვძებნოთ

$$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3,\ g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$$

მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი.

თუ გამოვიყენებთ მთელ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებზე ევკლიდეს ალგორითმს, იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ წილადი კოეფიციენტები, შეგვიძლია გავამრავლოთ გასაყოფი ან შევკვეცოთ გამყოფი ნებისმიერ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე, ამასთანავე არა მხოლოდ მიმდევრობითი გაყოფის რომელიმე ადგილიდან დაწყებული, არამედ თვით ამ გაყოფის პროცესშიც. გასაგებია, ეს მიგვიყვანს განაყოფის დამახინჯებაზე, მაგრამ ჩვენთვის საინტერესო ნაშთები შეიძენენ მხოლოდ ნულოვანი ხარისხის მამრავლს, რაც, როგორც ვიცით, უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნისას დასაშვებია.

$f(x)$ გავყოთ $g(x)$-ზე, წინასწარ $f(x)$ გავამრავლოთ 3-ზე:

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\
\cline{2-2}
3x^4+10x^3+2x^2-3x & x+1 \\
\cline{1-1}
-x^3-5x^2-9x-9 &
\end{array}$$

(გავამრავლოთ -3-ზე)

$$\begin{array}{r}
3x^3+15x^2+27x+27 \\
3x^3+10x^2+2x-3 \\
\hline
5x^2+25x+30.
\end{array}$$

ამრიგად, პირველი ნაშთი, 5-ზე შეკვეცის შემდეგ, იქნება $r_1(x)=x^2+5x+6$. გავყოთ მასზე $g(x)$ მრავალწევრი:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\
\cline{2-2}
3x^3+15x^2+18x & 3x-5 \\
\cline{1-1}
-5x^2-16x-3 & \\
-5x^2-25x-30 & \\
\cline{1-1}
9x+27. &
\end{array}$$

მაშასადამე, მეორე ნაშთი 9-ზე შეკვეცის შემდეგ იქნება $r_2(x)=x+3$. რადგან

$$r_1(x)=r_2(x)(x+2),$$

ამიტომ $r_2(x)$ იქნება ის უკანასკნელი ნაშთი, რომელზედაც უნაშთოდ იყოფა წინა ნაშთი. ამრიგად, იგი იქნება საძიებელი უდიდესი საერთო გამყოფი:

$$(f(x),\ g(x))=x+3.$$

შემდეგი თეორემის დამტკიცებისათვის გამოვიყენებთ ევკლიდეს ალგორითმს.

თუ $d(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი, მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x). \tag{3}$$

ამასთანავე, თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ხარისხები ნულზე მეტია, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $u(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე, $v(x)$-ის ხარისხი კი ნაკლებია $f(x)$-ის ხარისხზე.

დამტკიცება დამყარებულია (2) ტოლობებზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $r_k(x)=d(x)$ და ვიგულისხმებთ $u_1(x)=1$, $v_1(x)=-q_k(x)$, მაშინ (2) ტოლობათაგან უკანასკნელის წინა მოგვცემს:

$$d(x)=r_{k-2}(x)u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x).$$

აქ (2)-ის წინა ტოლობიდან, თუ ჩავსვამთ $r_{k-1}(x)$-ის გამოსახულებას $r_{k-3}(x)$ და $r_{k-2}(x)$-ის საშუალებით, მივიღებთ:

$$d(x)=r_{k-3}(x)u_2(x)+r_{k-2}(x)v_2(x),$$

სადაც, როგორც ჩანს, $u_2(x)=v_1(x)$, $v_2(x)=u_1(x)-v_1(x)q_{k-1}(x)$. თუ განვაგრძობთ (2) ტოლობებში ზემოთ სვლას, დაბოლოს მივალთ დასამტკიცებელ (3) ტოლობამდე.

თეორემის მეორე დებულების დასამტკიცებლად ვიგულისხმოთ, რომ (3) ტოლობის დამაკმაყოფილებელი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები უკვე მოძებნილია, მაგრამ, მაგალითად, $u(x)$-ის ხარისხი მეტია ან ტოლი $g(x)$-ის ხარისხის. $u(x)$ გავყოთ $g(x)$-ზე:

$$u(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

სადაც $r(x)$-ის ხარისხი $g(x)$-ის ხარისხზე ნაკლებია, და ჩავსვათ ეს გამოსახულება (3)-ში. მივიღებთ

$$f(x)r(x)+g(x)[v(x)+f(x)q(x)]=d(x)$$

ტოლობას. $f(x)$-თან მდგომი მამრავლის ხარისხი უკვე ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე. თავის მხრივ, კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$-ის ხარისხზე, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მარცხენა ნაწილის მეორე შესაკრების ხარისხი ნაკლები არ იქნებოდა $g(x)f(x)$ ნამრავლის ხარისხზე და რადგან პირველი შესაკრების ხარისხი ნაკლებია ამ ნამრავლის ხარისხზე, ამიტომ მთელ მარცხენა ნაწილს ექნება $g(x)f(x)$-ის

ხარისხზე მეტი ან ნაკლები ხარისხი მაშინ, როცა $d(x)$ მრავალწევრს, ჩვენი დაშვებით, უეჭველად აქვს ნაკლები ხარისხი.

თეორემა დამტკიცებულია. ამავე დროს მივიღეთ, რომ, თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს აქვთ რაციონალური ან ნამდვილი კოეფიციენტები, მაშინ (3) ტოლობის დამაკმაყოფილებელი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრებიც შეგვიძლია ავირჩიოთ ისე, რომ მათი კოეფიციენტები იყვნენ რაციონალური ან, შესაბამისად, ნამდვილი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ (3) ტოლობის დამაკმაყოფილებელი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, თუ

$$f(x)=x^3-x^2+3x-10,\quad g(x)=x^3+6x^2-9x-14.$$

ამ მრავალწევრზე გამოვიყენოთ ევკლიდეს ალგორითმი, ამასთანავე გაყოფისას ახლა უკვე აღარ შეგვიძლია დავუშვათ განაყოფთა დამახინჯებანი, რადგან ეს განაყოფები გამოიყენებიან $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრთა მოძებნაში. მივიღებთ ტოლობათა ასეთ სისტემას:

$$f(x)=g(x)+(-7x^2+12x+4);$$

$$g(x)=(-7x^2+12x+4)\left(-\frac{1}{7}x-\frac{54}{49}\right)+\frac{235}{49}(x-2);$$

$$-7x^2+12x+4=(x-2)(-7x-2).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $(f(x),\ g(x))=x-2$ და რომ

$$u(x)=\frac{7}{235}x+\frac{54}{235},\quad v(x)=-\frac{7}{235}x-\frac{5}{235}.$$

თუ გამოვიყენებთ თანამარტივ მრავალწევრებზე ახლა დამტკიცებულ თეორემას, მივიღებთ ასეთ შედეგს:

$f(x)$ და $g(x)$ მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ე ბ ი თ ა ნ ა მ ა რ ტ ი ვ ი ა მ ა შ ი ნ და მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, თ უ შ ე ს ა ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \tag{4}$$

ტ ო ლ ო ბ ი ს დ ა მ ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ე ლ ი $u(x)$ და $v(x)$ მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ თ ა მ ო ძ ე ბ ნ ა.

ამ შედეგზე დაყრდნობით შესაძლებელია თ ა ნ ა მ ა რ ტ ი ვ მ რ ა ვ ა ლ-წ ე ვ რ ე ბ ზ ე რამდენიმე მარტივი, მაგრამ მნიშვნელოვანი თ ე ო რ ე მ ი ს დამტკიცება:

ა) თ უ $f(x)$ მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი თ ა ნ ა მ ა რ ტ ი ვ ი ა $\varphi(x)$ დ ა $\psi(x)$ მ რ ა-ვ ა ლ წ ე ვ რ ე ბ ი დ ა ნ თ ი თ ო ე უ ლ თ ა ნ, მ ა შ ი ნ ი გ ი თ ა ნ ა მ ა რ ტ ი ვ ი ა მ ა თ ნ ა მ რ ა ვ ლ თ ა ნ ა ც.

მართლაც, (4)-ის ძალით, არსებობს ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$f(x)u(x)+\varphi(x)v(x)=1.$$

ამ ტოლობის $\psi(x)$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$f(x)[u(x)\psi(x)]+[\varphi(x)\psi(x)]v(x)=\psi(x),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $f(x)$-სა და $\varphi(x)\psi(x)$-ის ყოველი საერთო გამყოფი გამყოფი იქნებოდა $\psi(x)$-საც; მაგრამ, პირობის ძალით, $(f(x), \psi(x))=1$.

ბ) თუ $f(x)$ და $g(x)$ *მრავალწევრთა ნამრავლი იყოფა* $\varphi(x)$*-ზე, მაგრამ* $f(x)$ *და* $\varphi(x)$ *თანამარტივია, მაშინ* $g(x)$ *იყოფა* $\varphi(x)$-ზე.

მართლაც,

$$f(x)\,u(x)+\varphi(x)\,v(x)=1$$

ტოლობის $g(x)$-ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$[f(x)\,g(x)]\,u(x)+\varphi(x)\,[v(x)\,g(x)]=g(x).$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ორივე შესაკრები იყოფა $\varphi(x)$-ზე; მაშასადამე, მასზე გაიყოფა $g(x)$-იც.

გ) თუ $f(x)$ *მრავალწევრი იყოფა* $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ *მრავალწევრებზე, რომელნიც ურთიერთ შორის თანამარტივია, მაშინ* $f(x)$ *გაიყოფა მათ ნამრავლზეც.*

მართლაც, $f(x)=\varphi(x)\overline{\varphi}(x)$ ისე, რომ მარჯვნივ მდგომი ნამრავლი იყოფა $\psi(x)$-ზე. ამიტომ ბ)-ს ძალით, $\overline{\varphi}(x)$ იყოფა $\psi(x)$-ზე, $\overline{\varphi}(x)=\psi(x)\overline{\psi}(x)$, საიდანაც $f(x)=[\varphi(x)\,\psi(x)]\overline{\psi}(x)$.

უდიდესი საერთო გამყოფის განსაზღვრება შეიძლება გავრცელდეს მრავალწევრთა ნებისმიერი სასრული სისტემისათვის: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ მრავალწევრთა **უდიდესი საერთო გამყოფი** ეწოდება ამ მრავალწევრთა ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მათ ნებისმიერ სხვა საერთო გამყოფზე. მრავალწევრთა ნებისმიერი სასრული სისტემისათვის უდიდესი საერთო გამყოფის არსებობა გამომდინარეობს შემდეგი *თეორემიდან*, რომელიც გვაძლევს მისი გამოთვლის წესსაც.

$f_1(x), f_2(x),\ldots, f_s(x)$ *მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის* $f_s(x)$ *მრავალწევრისა და* $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_{s-1}(x)$ *მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფის უდიდეს საერთო გამყოფს.*

მართლაც, თეორემა ცხადია, როცა $s=2$. ამიტომ ვიგულისხმებთ, რომ იგი სამართლიანია $s-1$-სათვის, ე. ი., კერძოდ, უკვე დამტკიცებულია $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_{s-1}(x)$ მრავალწევრთა $d(x)$ უდიდესი საერთო გამყოფის არსებობა. $\overline{d}(x)$-ით აღვნიშნოთ $d(x)$ და $f_s(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, იგი იქნება ყველა მოცემული მრავალწევრთა საერთო გამყოფი. მეორე მხრივ, ამ მრავალწევრთა ყველა სხვა საერთო გამყოფი გამყოფი იქნება აგრეთვე $d(x)$-საც და, მაშასადამე, $\overline{d}(x)$-საც.

კერძოდ $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_s(x)$ მრავალწევრთა სისტემას ეწოდება **თანამარტივი**, თუ ამ მრავალწევრთა საერთო გამყოფები მხოლოდ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრებია, ე. ი. თუ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის 1. თუ $s>2$, მაშინ შესაძლებელია ეს მრავალწევრები წყვილ-წყვილად თანამარტივნი არ იყვნენ. მაგალითად,

$$f(x)=x^3-7x^2+7x+15, \quad g(x)=x^2-x-20,$$

$$h(x)=x^3+x^2-12x$$

მრავალწევრთა სისტემა თანამარტივია, თუმცა

$$(f(x),\ g(x))=x-5,\ (f(x),\ h(x))=x-3,\ (g(x),\ h(x))=x+4.$$

მკითხველი ადვილად განაზოგადებს თანამარტივ მრავალწევრებზე ზემოთ დამტკიცებულ ა)—ბ) თეორემებს მრავალწევრთა ნებისმიერი სასრული რიცხვის შემთხვევაზე.

§ 22. მრავალწევრთა ფესვები

§ 20-ში უკვე შევხვდით მრავალწევრის მნიშვნელობებს, როდესაც ვლაპარაკობდით მრავალწევრის ცნების შესახებ ფუნქციონალურ-თეორიული თვალსაზრისით. მოვიგონოთ განმარტება.

თუ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \tag{1}$$

რაიმე მრავალწევრია, ხოლო c—რაიმე რიცხვი, მაშინ რიცხვს

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_n,$$

რომელიც მიღებულია $f(x)$-ის (1) გამოსახულებაში x უცნობის შეცვლით c რიცხვით და თანმიმდევრობით ყველა მითითებული ოპერაციის შესრულებით, ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა, როცა $x=c$. გასაგებია, რომ, თუ $f(x)=g(x)$ მრავალწევრთა ალგებრული ტოლობის თვალსაზრისით, რომელიც განმარტებულია § 20-ში, მაშინ $f(c)=g(c)$ ნებისმიერი c-სათვის.

ადვილი სანახავია აგრეთვე რომ, თუ

$$\varphi(x)=f(x)+g(x),\ \psi(x)=f(x)\,g(x),$$

მაშინ

$$\varphi(c)=f(c)+g(c),\ \psi(c)=f(c)\,g(c).$$

სხვა სიტყვებით, § 20-ში განმარტებული მრავალწევრთა შეკრება და გამრავლება მრავალწევრთა ფუნქციონალურ-თეორიული თვალსაზრისით განხილვისას გადაიქცევიან ფუნქციათა შეკრებად და გამრავლებად, რომელნიც გვესმის, როგორც ამ ფუნქციების სათანადო მნიშვნელობათა შეკრება და გამრავლება.

თუ $f(c)=0$, ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრი ნული ხდება მასში უცნობის ნაცვლად c რიცხვის ჩასმით, მაშინ c-ს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის (ან $f(x)=0$ განტოლების) ფესვი. ახლა ნაჩვენები იქნება, რომ ეს ცნება მთლიანად შეეფარდება მრავალწევრთა გაყოფადობის იმ თეორიას, რომელიც წინა პარაგრაფის შესწავლის საგანი იყო.

თუ $f(x)$ მრავალწევრს გავყოფთ პირველი ხარისხის ნებისმიერ მრავალწევრზე (ანუ, როგორც შემდეგში ვიტყვით, წრფივ მრავალწევრზე), მაშინ ნაშთი ან ნულოვანი ხარისხის რაიმე მრავალწევრი იქნება, ან ნული, ე. ი. ყოველ შემთხვევაში—რაიმე r რიცხვი. შემდეგი თეორემა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ეს ნაშთი, თვითონ გაყოფის შეუსრულებლად, იმ შემთხვევაში, როცა გაყოფა ხდება $x-c$ სახის მრავალწევრზე.

$f(x)$ მრავალწევრის $x-c$ წრფივ მრავალწევრზე გაყოფის ნაშთი ტოლია $f(x)$ მრავალწევრის $f(c)$ მნიშვნელობისა, როცა $x=c$.

მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x)=(x-c)q(x)+r.$$

თუ ავიღებთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის მნიშვნელობას, როცა $x=c$, მივიღებთ:

$$f(c)=(c-c)q(c)+r=r,$$

რაც თეორემას ამტკიცებს.

აქედან გამომდინარეობს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი *შედეგი*:

c რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, როცა $f(x)$ იყოფა $x-c$-ზე.

მეორე მხრივ, თუ $f(x)$ იყოფა პირველი ხარისხის რაიმე $ax+b$ მრავალწევრზე, მაშინ, ცხადია, იყოფა $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$ მრავალწევრზეც, ე. ი. $x-c$ სახის მრავალწევრზეც. ამრიგად, *$f(x)$ მრავალწევრის ფესვების მოძებნა ტოლფასია მისი წრფივი გამყოფების მოძებნისა.*

ზემოთ ნათქვამის ძალით, საინტერესოა $f(x)$ მრავალწევრის $x-c$ წრფივ ორწევრზე გაყოფის შემდეგი მეთოდი, უფრო მარტივი, ვიდრე მრავალწევრთა გაყოფის ზოგადი ალგორითმი. ამ მეთოდს ეწოდება *ჰორნერის მეთოდი*. ვთქვათ,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n \tag{2}$$

და

$$f(x)=(x-c)q(x)+r, \tag{3}$$

სადაც

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}.$$

(3)-ში x-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტების შედარებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
a_0&=b_0,\\
a_1&=b_1-cb_0,\\
a_2&=b_2-cb_1,\\
&\cdots\cdots\\
a_{n-1}&=b_{n-1}-cb_{n-2},\\
a_n&=r-cb_{n-1}.
\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $b_0=a_0$, $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, ე. ი. *b_k კოეფიციენტი მიიღება წინა b_{k-1} კოეფიციენტის c-ზე გამრავლებით და სათანადო a_k კოეფიციენტის მიმატებით*; დაბოლოს, $r=cb_{n-1}+a_n$, ე. ი. r ნაშთი, ტოლი, როგორც ვიცით, $f(c)$-სი, მიიღება ამავე კანონით. ამრიგად, განაყოფისა და ნაშთის კოეფიციენტები შეგვიძლია თანმიმდევრობით მივიღოთ ერთი და იმავე სახის გამოთვლით, რომელნიც განლაგდებიან სქემაში, როგორც შემდეგი მაგალითები გვიჩვენებს:

1. $f(x)=2x^5-x^4-3x^3+x-3$ გავყოთ $x-3$-ზე.

შევადგინოთ ცხრილი, რომელშიც ხაზის ზემოთ განლაგდებიან $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები, ხაზის ქვემოთ—განაყოფისა და ნაშთის შესაბამისი კოეფიციენტები, რომ-

ლებიც გამოთვლილია თანმიმდევრობით, ხოლო მარცხნივ გვერდით — c-ს მნიშვნელობა მოცემულ მაგალითში:

$$3\left|\begin{array}{llllll} 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 2, & 3\cdot 2-1=5, & 3\cdot 5-3=12, & 3\cdot 12+0=36, & 3\cdot 36+1=109, & 3\cdot 109-3=324 \end{array}\right.,$$

ამრიგად, საძიებელი განაყოფი იქნება

$$q(x)=2x^4+5x^3+12x^2+36x+109,$$

ხოლო ნაშთი $r=f(3)=324$.

2. $f(x)=x^4-8x^3+x^2+4x-9$ გავყოთ $x+1$-ზე.

$$-1\left|\begin{array}{rrrrr} 1 & -8 & 1 & 4 & -9 \\ \hline 1 & -9 & 10 & -6 & -3 \end{array}\right..$$

ამიტომ განაყოფი იქნება

$$q(x)=x^3-9x^2+10x-6,$$

ხოლო ნაშთი $r=f(-1)=-3$.

ეს მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ ჰორნერის მეთოდი შეიძლება აგრეთვე გამოყენებულ იქნას, რომ $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა სწრაფად გამოვითვალოთ უცნობის მოცემული მნიშვნელობისათვის.

ჯერადი ფესვები. თუ $f(x)$ მრავალწევრის ფესვია c, ე. ი. $f(c)=0$, მაშინ $f(x)$ იყოფა, როგორც ვიცით, $x-c$-ზე. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $f(x)$ მრავალწევრი იყოფა $x-c$ წრფივი ორწევრის არა მხოლოდ პირველ ხარისხზე, არამედ მის უფრო მაღალ ხარისხზეც. ყოველ შემთხვევაში მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი k, რომ $f(x)$ უნაშთოდ იყოფა $(x-c)^k$-ზე, მაგრამ არ იყოფა $(x-c)^{k+1}$-ზე. ამიტომ

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ მრავალწევრი $(x-c)$-ზე უკვე არ იყოფა, ე. ი. c რიცხვი მას ფესვად არა აქვს. k რიცხვს ეწოდება c ფესვის *ჯერადობა* $f(x)$ მრავალწევრში, ხოლო თვით c ფესვს—ამ მრავალწევრის k-*ჯერადი ფესვი*. თუ $k=1$, მაშინ ამბობენ, რომ ფესვი c *მარტივია*.

ჯერადი ფესვის ცნება მჭიდრო კავშირშია მრავალწევრის წარმოებულის ცნებასთან. მაგრამ ჩვენ შევისწავლით ნებისმიერ კომპლექსურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებს და ამიტომ არ შეგვიძლია უბრალოდ ვისარგებლოთ წარმოებულის ცნებით, რომელიც მათემატიკური ანალიზის კურსშია შემოტანილი. ის, რაც ქვემოთ იქნება ნათქვამი, უნდა განვიხილოთ როგორც ანალიზის კურსისაგან დამოუკიდებელი *განმარტება* მრავალწევრის წარმოებულისა.

ვთქვათ, მოცემულია n-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით. მისი *წარმოებული* (ანუ *პირველი წარმოებული*) ეწოდება $(n-1)$ ხარისხის მრავალწევრს

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}.$$

ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრის და ნულის წარმოებული ითვლება ნულის ტოლად. პირველი წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის მ ე ო რ ე წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი და აღინიშნება $f''(x)$-ით, და ასე შემდეგ. ცხადია, რომ

$$f^{(n)}(x)=n!a_0$$

და ამიტომ $f^{(n+1)}(x)=0$, ე. ი. n-ური ხ ა რ ი ს ხ ი ს მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს $(n+1)$-ე წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა.

ჩვენს შემთხვევაში არ შეგვიძლია ვისარგებლოთ კომპლექსურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებზე წარმოებულის თვისებებით, რომელიც დამტკიცებულია ანალიზის კურსში ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებისათვის და თუ ვისარგებლებთ მხოლოდ ზემოთ მოცემული წარმოებულის განმარტებით, საჭიროა ეს თვისებები ახლად დავამტკიცოთ. ჩვენ გვაინტერესებს შემდეგი თვისებები, რომელნიც, როგორც ამბობენ, წარმოადგენენ ჯამისა და ნამრავლის გაწარმოების ფორმულებს:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x); \tag{4}$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x). \tag{5}$$

ეს ფორმულები ადვილად შემოწმდება უშუალო გამოთვლითაც, თუკი $f(x)$ და $g(x)$-ად ავიღებთ ორ ნებისმიერ მრავალწევრს და გამოვიყენებთ წარმოებულის ზემოთ მოცემულ განმარტებას; ამ შემოწმებას ვანდობთ მკითხველს.

(5) ფორმულა ადვილად განზოგადდება მამრავლთა ნებისმიერი სასრული რიცხვის ნამრავლის შემთხვევაზე და ამიტომ ჩვეულებრივი წესით შეგვიძლია ფორმულის გამოყვანა ხარისხის წარმოებულისთვისაც:

$$(f^k(x))'=kf^{k-1}(x)f'(x). \tag{6}$$

ჩვენი მიზანია შემდეგი თეორემის დამტკიცება:

თ უ c რ ი ც ხ ვ ი $f(x)$ მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს k-ჯ ე რ ა დ ი ფ ე ს ვ ი ა, მ ა შ ი ნ, რ ო ც ა $k>1$, ი გ ი ი ქ ნ ე ბ ა ა მ მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს $(k-1)$-ჯ ე რ ა დ ი ფ ე ს ვ ი; ხ ო ლ ო, თ უ $k=1$, მ ა შ ი ნ c ა რ ი ქ ნ ე ბ ა $f'(x)$-ი ს ფ ე ს ვ ი.

მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x),\ k\geqslant 1, \tag{7}$$

სადაც $\varphi(x)$ უკვე არ იყოფა $x-c$-ზე. (7) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f'(x)=(x-c)^k\varphi'(x)+k(x-c)^{k-1}\varphi(x)=$$

$$=(x-c)^{k-1}[(x-c)\varphi'(x)+k\varphi(x)].$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი ჯამის პირველი შესაკრები იყოფა $x-c$-ზე, ხოლო მეორე არ იყოფა $(x-c)$-ზე; ამიტომ მთელი ჯამი არ შეიძლება გაიყოს $x-c$-ზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f'(x)$-ის განაყოფი $(x-c)^{k-1}$-ზე განისაზღვრება ცალსახად, მივიღებთ, რომ $(x-c)^{k-1}$ არის $x-c$ ორწევრის უდი-

ტესი ხარისხი, რომელზედაც იყოფა $f'(x)$ მრავალწევრი, რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

თუ ამ თეორემას რამდენიმეჯერ გამოვიყენებთ, მივიღებთ, რომ $f(x)$ *მრავალწევრის k-ჯერადი ფესვი იქნება $(k-s)$-ჯერადი ფესვი ამ მრავალწევრის s-ი წარმოებულისა* $(k \geqslant s)$ *და პირველად არ იქნება ფესვი $f(x)$-ის k-ური წარმოებულისა.*

§ 23. ძირითადი თეორემა

წინა პარაგრაფში მრავალწევრის ფესვების შესწავლისას არ დაგვისვამს კითხვა იმის შესახებ, ყოველ მრავალწევრს აქვს თუ არა ფესვები. ცნობილია, რომ არსებობენ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები, რომელთაც არ აქვთ ნამდვილი ფესვები; x^2+1 ერთ-ერთი ასეთი მრავალწევრია. შეიძლებოდა გვეფიქრა, რომ არსებობენ მრავალწევრები, რომელთაც ფესვები არა აქვთ კომპლექსურ რიცხვთა შორისაც კი, განსაკუთრებით მაშინ, თუ განიხილება ნებისმიერი კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები. ეს რომ ასე ყოფილიყო, მაშინ საჭირო იქნებოდა კომპლექსურ რიცხვთა სისტემის შემდგომი გაფართოება. მაგრამ, სინამდვილეში, სამართლიანია *კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის შემდეგი ძირითადი თეორემა*:

ყოველ მრავალწევრს ნებისმიერი რიცხვითი კოეფიციენტებით, რომლის ხარისხი ერთზე ნაკლები არ არის, აქვს ერთი მაინც, საზოგადოდ კომპლექსური, ფესვი.

ეს თეორემა მთელი მათემატიკის ერთ-ერთი უდიდესი მიღწევათაგანია და გამოყენებას პოულობს მეცნიერების სრულიად განსხვავებულ დარგებში. კერძოდ, მასზე დაფუძნებულია რიცხვითი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრების მთელი შემდგომი თეორია, ამიტომაც წინათ ამ თეორემას უწოდებდნენ (და ზოგჯერ ახლაც უწოდებენ) „უმაღლესი ალგებრის ძირითად თეორემას". მაგრამ, სინამდვილეში, ძირითადი თეორემა წმინდად ალგებრული არ არის. ყველა მისი დამტკიცება,—და ისინი კი მეტად ბევრი მოიძებნა გაუსის შემდეგ, რომელმაც პირველად დაამტკიცა ეს თეორემა XVIII საუკუნის სულ ბოლოს—იძულებულია ცოტად თუ ბევრად გამოიყენოს ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა ე. წ. ტოპოლოგიური თვისებები, ე. ი. უწყვეტობასთან დაკავშირებული თვისებები.

დამტკიცებაში, რომელიც ახლა იქნება ჩატარებული, კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი განიხილება, როგორც x კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქცია. ამრიგად, x-ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი კომპლექსური მნიშვნელობა, ე. ი., როგორც ამბობენ, თუ გავითვალისწინებთ § 17-ში გადმოცემულ კომპლექსურ რიცხვთა აგების წესს, x ცვლადი იცვლება *კომპლექსურ სიბრტყეზე*. $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანიც აგრეთვე კომპლექსური რიცხვები იქნებიან. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ეს მნიშვნელობანი აღინიშნებიან კომპლექსური სიბრტყის მეორე ეგზემპლარზე, მსგავსად იმისა, როგორც ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციის შემთხვევაში დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობანი აღინიშნებიან ერთ რიცხვით წრფეზე

(აბსცისათა ღერძზე), ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობანი — მეორეზე (ორდინატთა ღერძზე).

უწყვეტი ფუნქციის განმარტება, მკითხველისათვის მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილი, გადაიტანება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციებზეც. ამასთანავე, განმარტების ფორმულირებისას აბსოლუტური მნიშვნელობანი იცვლებიან მოდულებით.

სახელდობრ, x კომპლექსური ცვლადის $f(x)$ კომპლექსურ ფუნქციას x_0 *წერტილში უწყვეტი* ეწოდება, თუ ნებისმიერ დადებით ნამდვილ ε რიცხვისათვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი დადებითი ნამდვილი δ რიცხვი, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს (საზოგადოდ რომ ვთქვათ, კომპლექსური) h ნაზრდი, რომლის მოდული აკმაყოფილებს $|h|<\delta$ უტოლობას, სამართლიანი იქნება აგრეთვე

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

უტოლობაც. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი*, თუ იგი უწყვეტია ყველა x_0 წერტილში, რომელშიც იგი განსაზღვრულია, ე. ი., თუ $f(x)$ არის მრავალწევრი მთელს კომპლექსურ სიბრტყეზე.

$f(x)$ მრავალწევრი წარმოადგენს x კომპლექსური ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას.

ამ თეორემის დამტკიცება შეიძლება ჩატარებულ იქნას ისევე, როგორც ეს კეთდება მათემატიკური ანალიზის კურსში, სახელდობრ, იმის ჩვენებით, რომ უწყვეტ ფუნქციათა ჯამი და ნამრავლი უწყვეტია და იმის შენიშვნით, რომ ფუნქცია, მუდმივად ერთი და იმავე კომპლექსური რიცხვის ტოლი, უწყვეტი იქნება. მაგრამ ჩვენ წავალთ სხვა გზით.

თავდაპირველად დავამტკიცებთ თეორემის კერძო შემთხვევას, სახელდობრ შემთხვევას, როცა $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ამასთანავე დავამტკიცებთ $f(x)$-ის უწყვეტობას მხოლოდ $x_0=0$ წერტილში. სხვა სიტყვებით, დავამტკიცებთ შემდეგ ლემას (h-ის ნაცვლად ვწერთ x-ს):

ლემა 1. *თუ $f(x)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x,$$

ე. ი. $f(0)=0$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სათვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი $\delta>0$, რომ ყველა x-სათვის, რომელთათვისაც $|x|<\delta$, გვექნება $|f(x)|<\varepsilon$.

მართლაც, ვთქვათ,

$$A=\max(|a_0|, |a_1|,\ldots,|a_{n-1}|).$$

ε რიცხვი უკვე მოცემული გვაქვს. ვაჩვენოთ, რომ, თუ δ რიცხვად ავიღებთ

$$\delta=\frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}, \qquad (1)$$

მაშინ იგი დააკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს.

მართლაც,

$$|f(x)| \leqslant |a_0|\,|x|^n + |a_1|\,|x|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}|\,|x| \leqslant$$
$$\leqslant A\,(|x|^n + |x|^{n-1} + \dots + |x|),$$

ე. ი.

$$|f(x)| \leqslant A\,\frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|}.$$

რადგან $|x| < \delta$ და, (1)-ის თანახმად, $\delta < 1$, ამიტომ

$$\frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|} < \frac{|x|}{1 - |x|},$$

და ამიტომ

$$|f(x)| < \frac{A\,|x|}{1 - |x|} < \frac{A\delta}{1 - \delta} = \frac{A\,\dfrac{\varepsilon}{A+\varepsilon}}{1 - \dfrac{\varepsilon}{A+\varepsilon}} = \varepsilon,$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

ახლა გამოვიყვანოთ შემდეგი ფორმულა. ვთქვათ, მოცემულია მრავალწევრი

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით. მასში ჩავსვათ x-ის ნაცვლად $x+h$ ჯამი, სადაც h არის მეორე უცნობი. თუ გავშლით მარჯვენა ნაწილში $(x+h)^k$, $k \leqslant n$, ხარისხებიდან თითოეულს ბინომის ფორმულით და h-ის ერთნაირ ხარისხიან წევრებს დავაჯგუფებთ, მაშინ, როგორც მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, მივიღებთ

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

ტოლობას, ე. ი. დავამტკიცებთ **ტეილორის ფორმულას**, რომელიც გვაძლევს $f(x+h)$-ის დაშლას h „ნაზრდის“ ხარისხებათ.

ახლა **ნებისმიერი** $f(x)$ **მრავალწევრის უწყვეტობა ნებისმიერ** x_0 **წერტილში** დამტკიცდება შემდეგნაირად. ტეილორის ფორმულით

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n = \varphi(h),$$

სადაც

$$c_1 = f'(x_0),\; c_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \dots,\; c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

$\varphi(h)$ მრავალწევრი h უცნობის მიმართ არის თავისუფალი წევრის არმქონე მრავალწევრი, ამიტომ, ლემა 1-ის ძალით, ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ, როცა $|h| < \delta$, გვექნება $|\varphi(h)| < \varepsilon$, ე. ი.

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

უტოლობიდან

$$\| f(x_0+h) | - | f(x_0) \| \leqslant | f(x_0+h)-f(x_0)|,$$

რომელიც § 18-ის (13) ფორმულაზეა დამყარებული, და ახლა დამტკიცებულ მრავალწევრის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს $f(x)$ მრავალწევრის $|f(x)|$ მოდულის უწყვეტობა; ცხადია, ეს მოდული x კომპლექსური ცვლადის ნამდვილი არაუარყოფითი ფუნქციაა.

ახლა დავამტკიცებთ ლემებს, რომლებიც გამოიყენება ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას.

ლემა უფროსი წევრის მოდულის შესახებ. თუ მოცემულია n-ური ხარისხის მრავალწევრი, $n\geqslant 1$,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით და თუ k—ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ x უცნობის მოდულით საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის ადგილი აქვს

$$|a_0x^n| > k\,|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n| \tag{2}$$

უტოლობას, ე. ი. უფროსი წევრის მოდული მეტია ყველა დანარჩენ წევრთა ჯამის მოდულზე და ამავე დროს იმდენჯერ მეტი, რამდენჯერაც გვინდა.

მართლაც, ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, კოეფიციენტთა მოდულებიდან A უდიდესია:

$$A=\max(|a_1|,\ |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

მაშინ (იხ. § 18-ში კომპლექსურ რიცხვთა ჯამისა და ნამრავლის მოდულების თვისება)

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n| \leqslant |a_1\|x|^{n-1}+|a_2\|x|^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots+|a_n| \leqslant A(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\ldots+1)=A\,\frac{|x|^n-1}{|x|-1}.$$

თუ დავუშვებთ $|x|>1$, მივიღებთ:

$$\frac{|x|^n-1}{|x|-1}<\frac{|x|^n}{|x|-1},$$

საიდანაც

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n| < A\,\frac{|x|^n}{|x|-1}.$$

ამრიგად, (2) უტოლობა შესრულდება, თუ x, გარდა $|x|>1$ პირობისა, დააკმაყოფილებს აგრეთვე უტოლობას

$$kA\,\frac{|x|^n}{|x|-1} \leqslant |a_0x^n| = |a_0\|x|^n,$$

ე. ი. თუ

$$|x| \geqslant \frac{kA}{|a_0|}+1. \tag{3}$$

რადგან (3) უტოლობის მარჯვენა ნაწილი მეტია 1, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი x მნიშვნელობებისათვის ადგილი აქვს (2) უტოლობას, რაც ამტკიცებს ლემას.

ლემა მრავალწევრის მოდულის ზრდის შესახებ. კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისათვის, რომლის ხარისხი ერთზე ნაკლები არ არის, და ყოველი, რაგინდ დიდი დადებითი ნამდვილი M რიცხვისათვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი დადებითი ნამდვილი N რიცხვი, რომ, როცა $|x|>N$, მაშინ გვექნება $|f(x)|>M$.

ვთქვათ,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

§ 18-ის (11) ფორმულით

$$|f(x)|=|a_0x^n+(a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)|\geqslant|a_0x^n|-|a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|. \tag{4}$$

გამოვიყენოთ ლემა უფროსი წევრის მოდულის შესახებ; დავუშვათ $k=2$: იარსებებს ისეთი N_1 რიცხვი, რომ, როცა $|x|>N_1$, გვექნება

$$|a_0x^n|>2\,|a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|,$$

საიდანაც

$$|a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|<\frac{1}{2}\,|a_0x^n|,$$

ე. ი., (4)-ის ძალით,

$$|f(x)|>|a_0x^n|-\frac{1}{2}|a_0x^n|=\frac{1}{2}|a_0x^n|.$$

ამ უტოლობის მარჯვენა მხარე M-ზე მეტია, როცა

$$|x|>N_2=\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

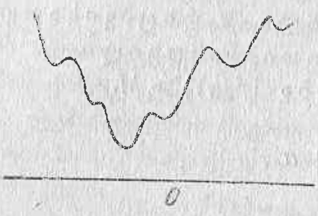
ამრიგად, როცა $|x|>N=\max(N_1,N_2)$, გვექნება $|f(x)|>M$.

ამ ლემის არსი შეიძლება ცხადვყოთ შემდეგი გეომეტრიული ილუსტრაციის საშუალებით, რომელიც ამ პარაგრაფში არაერთხელ იქნება გამოყენებული. ვიგულისხმოთ, რომ კომპლექსური სიბრტყის ყოველ x_0 წერტილში აღმართულია ამ სიბრტყისადმი პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძე (მოცემული სამასშტაბო ერთეულისათვის) ტოლია ამ წერტილში $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობის მოდულისა, ე. ი. ტოლია $|f(x_0)|$. ზემოთ დამტკიცებული მრავალწევრის მოდულის უწყვეტობის გამო პერპენდიკულართა ბოლოები შეადგენენ კომპლექსური სიბრტყის ზემოთ მდებარე რაიმე უწყვეტ მრუდ ზედაპირს. ლემა მრავალწევრის მოდულის ზრდის შესახებ გვიჩვენებს, რომ ეს ზედაპირი, როცა $|x_0|$ იზრდება, სულ უფრო და უფრო შორდება კომპლექსურ სიბრტყეს, თუმცა, გასაგებია, ეს დაშორება სრულიად არ არის მონოტონური. ნახ. 8 სქემატურად გამოსახავს ამ ზედაპირის თანაკვეთის წირს (O წერტილზე გამავალ და კომპლექსურ სიბრტყისადმი პერპენდიკულარულ სიბრტყესთან.

დამტკიცებაში ძირითად როლს ასრულებს შემდეგი ლემა:

დალამბერის ლემა. თუ, როცა $x=x_0$, n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, $n\geqslant 1$, ნული არ ხდება, $f(x_0)\neq 0$, და ამიტომ $|f(x_0)|>0$, მაშინ შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი, საზოგადოდ კომპლექსური, h ნაზრდი, რომ

$$|f(x_0+h)|<|f(x_0)|.$$



ნახ. 8

ტეილორის ფორმულით, თუ h ნაზრდი ჯერ კიდევ ნებისმიერია, გვაქვს

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

პირობის ძალით, x_0 არ არის $f(x)$-ის ფესვი. მაგრამ შემთხვევით შეიძლება ეს რიცხვი აღმოჩნდეს $f'(x)$-ის ფესვი, და აგრეთვე, შესაძლებელია, შემდგომ წარმოებულთაგან რამოდენიმესიც. ვთქვათ, k-ური წარმოებული ($k\geqslant 1$) პირველია, რომელსაც x_0 არ აქვს ფესვად, ე. ი.

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

ასეთი k იარსებებს, რადგან, თუ a_0 არის $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი, მაშინ

$$f^{(n)}(x_0)=n!\,a_0\neq 0.$$

ამრიგად,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

$f^{(k+1)}(x_0),\dots,f^{(n-1)}(x_0)$ რიცხვებიდან ზოგი შეიძლება აგრეთვე გაუტოლდეს ნულს, მაგრამ ეს ჩვენთვის არაარსებითია.

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ $f(x_0)$-ზე, რომელიც, პირობის ძალით, განსხვავებულია ნულისაგან, და თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$c_j=\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!\,f(x_0)},\quad j=k,\,k+1,\dots,n,$$

მივიღებთ:

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=1+c_kh^k+c_{k+1}h^{k+1}+\dots+c_nh^n,$$

ანუ, რადგან $c_k\neq 0$,

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=(1+c_kh^k)+c_kh^k\left(\frac{c_{k+1}}{c_k}h+\dots+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right).$$

მოდულზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right|\leqslant|1+c_kh^k|+|c_kh^k|\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}h+\dots+\frac{c_n}{c_k}h^{n-k}\right|. \tag{5}$$

ამ მომენტამდე არ გაგვიკეთებია არავითარი დაშვება h ნაზრდის შესახებ. ახლა ა ვ ი რ ჩ ე ვ თ h, ამასთანავე ცალკე ავირჩევთ მის მოდულს და მის არგუმენტს. h-ის მოდული ავირჩიოთ შემდეგნაირად. რადგან

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}$$

არის h-ის მიმართ მრავალწევრი თავისუფალი წევრის გარეშე, ამიტომ, ლემა 1-ის ძალით $\left(\text{თუ ვიგულისხმებთ } \varepsilon = \frac{1}{2}\right)$, შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი δ_1, რომ, როცა $|h| < \delta_1$, გვექნება

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right| < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

მეორე მხრივ, როცა

$$|h| < \delta_2 = \sqrt[k]{|c_k|^{-1}},$$

გვექნება

$$|c_k h^k| < 1. \tag{7}$$

ვიგულისხმოთ, რომ h-ის მოდული არჩეულია

$$|h| < \min(\delta_1, \delta_2) \tag{8}$$

უტოლობის შესაბამისად. მაშინ (6)-ის გამო (5) უტოლობა გადაიქცევა მკაცრ უტოლობად

$$\left| \frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} \right| < |1 + c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k|; \tag{9}$$

(7) პირობით ვისარგებლებთ მხოლოდ უფრო გვიან.

h-ის არგუმენტის არჩევისათვის მოვითხოვთ, რომ $c_k h^k$ რიცხვი იყოს უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი. სხვა სიტყვებით

$$\arg(c_k h^k) = \arg c_k + k \arg h = \pi,$$

საიდანაც

$$\arg h = \frac{\pi - \arg c_k}{k}. \tag{10}$$

ამასთანავე, h-ის ასეთი არჩევისას $c_k h^k$ რიცხვი განსხვავებული იქნება თავის აბსოლუტური სიდიდისაგან ნიშნით,

$$c_k h^k = -|c_k h_k|,$$

და ამიტომ, თუ ვისარგებლებთ (7) უტოლობით,

$$|1 + c_k h^k| = |1 - |c_k h^k|| = 1 - |c_k h^k|.$$

ამრიგად, h-ის არჩევით (8) და (10) პირობათა საფუძველზე, (9) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$\left| \frac{f(x_0+h)}{f(x_c)} \right| < 1 - |c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k| = 1 - \frac{1}{2} |c_k h^k|,$$

ე. ი. მით უმეტეს

$$\left|\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x_0+h)|}{|f(x_0)|} < 1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)|,$$

რაც ამტკიცებს დალამბერის ლემას.

ზემოთ მოცემული გეომეტრიული ილუსტრაციის საშუალებით შესაძლებელია დალამბერის ლემის შემდეგნაირად ახსნა. მოცემულია, რომ $|f(x_0)|>0$. ეს ნიშნავს, რომ x_0 წერტილში კომპლექსური სიბრტყისადმი აღმართული პერპენდიკულარის სიგრძე განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ, დალამბერის ლემის ძალით, შესაძლებელია ისეთი $x_1=x_0+h$ წერტილის მოძებნა, რომ $|f(x_1)|<|f(x_0)|$, ე. ი. x_1 წერტილში პერპენდიკულარი უფრო მოკლე იქნება, ვიდრე x_0 წერტილში და, მაშასადამე, პერპენდიკულარის ბოლოებით წარმოქმნილი ზედაპირი ამ ახალ წერტილში რამოდენიმედ უფრო ახლოს იქნება კომპლექსურ სიბრტყესთან. როგორც ლემის დამტკიცება გვიჩვენებს, h მოდული შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რაგინდ მცირე, ე. ი. x_1 წერტილი შეგვიძლია ავირჩიოთ x_0 წერტილთან რაგინდ ახლოს; მაგრამ შემდეგში ამ შენიშვნით არ ვისარგებლებთ.

ცხადია, $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები იქნებიან ის კომპლექსური რიცხვები (ე. ი. კომპლექსური სიბრტყის ის წერტილები), რომელშიც პერპენდიკულარის ბოლოებით წარმოქმნილი ზედაპირი ეხება ამ სიბრტყეს. მხოლოდ დალამბერის ლემაზე დაყრდნობით შეუძლებელია ასეთ წერტილთა არსებობის დამტკიცება. მართლაც, თუ ვისარგებლებთ ამ ლემით, შეგვიძლია მოვძებნოთ მხოლოდ წერტილთა ისეთი უსასრულო მიმდევრობა $x_0, x_1, x_2, \ldots$, რომ

$$|f(x_0)|>|f(x_1)|>|f(x_2)|>\ldots \qquad (11)$$

მაგრამ აქედან არ გამომდინარეობს ისეთი $\overline{x}$ წერტილის არსებობა, რომ $f(\overline{x})=0$, მით უმეტეს, რომ დადებით ნამდვილ რიცხვთა კლებადი (11) მიმდევრობა სრულებით არ არის სავალდებულო, რომ ნულისაკენ მიისწრაფოდეს.

შემდგომი განხილვა ემყარება ერთ თეორემას კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიიდან, რომელიც წარმოადგენს მკითხველისათვის მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილ ვაიერშტრასის თეორემის განზოგადებას. იგი ეხება კომპლექსური ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებს, ე. ი. მხოლოდ ნამდვილი მნიშვნელობის მიმღებ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციებს; ასეთი ფუნქციის მაგალითია მრავალწევრის მოდული. სიმარტივისათვის ამ თეორემის ჩამოყალიბებაში ვიხმართ *ჩაკეტილ E წრეს*, რომლის ქვეშ გვესმის წრე კომპლექსურ სიბრტყეზე, რომელსაც დამატებული აქვს ყველა მისი საზღვრის წერტილი.

თუ x კომპლექსური ცვლადის ნამდვილი $g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია E ჩაკეტილი წრის ყველა წერტილში, მაშინ E წრეში არსებობს ისეთი x_0 წერტილი, რომ ყოველი x წერ-

წერტილისათვის E-დან ადგილი აქვს $g(x) \geqslant g(x_0)$ უტოლობას. მაშასადამე, x_0 წერტილი წარმოადგენს $g(x)$-ისათვის მინიმუმის წერტილს E წრეში.

ამ თეორემის დამტკიცება შეგვიძლია ვნახოთ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ყველა კურსში და ჩვენ მას არ მოვიყვანთ.

თუ შემოვისაზღვრებით შემთხვევით, როცა $g(x)$ ფუნქცია არაუარყოფითია E წრის ყველა წერტილში, — მხოლოდ ეს შემთხვევაა ჩვენთვის საინტერესო, — ამ თეორემას ავხსნით გეომეტრიულად იმ ილუსტრაციის საშუალებით, რომელიც უკვე იყო გამოყენებული ზემოთ. E წრის ყოველ x_0 წერტილში აღვმართოთ $g(x_0)$ სიგრძის პერპენდიკულარი. ამ პერპენდიკულარების ბოლოები შექმნიან უწყვეტი მრუდე ზედაპირის ნაჭერს, ამასთანავე, E წრის ჩაკეტილობის გამო, ამ ზედაპირის ნაჭრისათვის მინიმუმის წერტილების არსებობა გეომეტრიულად საკმარისად ნათელი ხდება. რა თქმა უნდა, ეს ილუსტრაცია არ ცვლის თეორემის დამტკიცებას.

ახლა შეგვიძლია უშუალოდ გადავიდეთ ძირითადი თეორემის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, მოცემულია n ხარისხის, $n \geqslant 1$, $f(x)$ მრავალწევრი. თუ მისი თავისუფალი წევრია a_n, მაშინ, ცხადია, $f(0)=a_n$. ვიგულისხმოთ, რომ $M=|f(0)|=|a_n|$ და გამოვიყენოთ ჩვენი მრავალწევრისათვის ლემა მრავალწევრის მოდულის ზრდის შესახებ. მაშასადამე, არსებობს ისეთი N, რომ, როცა $|x| > N$, გვაქვს $|f(x)| > |f(0)|$. შემდეგ, ცხადია, რომ ზემოთ მითითებული ვაიერშტრასის თეორემის განზოგადება გამოიყენება $|f(x)|$ ფუნქციისათვის E ჩაკეტილი წრის ნებისმიერი არჩევისათვის. E-დ ავიღებთ ჩაკეტილ წრეს, შემოსაზღვრულს N რადიუსიანი წრეხაზით ცენტრით 0 წერტილში. ვთქვათ, x_0 წერტილი $|f(x)|$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია E წრეში, საიდანაც, კერძოდ, გამომდინარეობს $|f(x_0)| \leqslant |f(0)|$.

ადვილი სანახავია, რომ x_0 სინამდვილეში იქნება $|f(x)|$-ის მინიმუმის წერტილი მთელს კომპლექსურ სიბრტყეზე: თუ x' წერტილი ძევს E-ს გარეთ, მაშინ $|x'| > N$ და ამიტომ

$$|f(x')| > |f(0)| \geqslant |f(x_0)|.$$

დაბოლოს, აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x_0)=0$, ე. ი. რომ x_0 არის $f(x)$-ის ფესვი; თუ გვექნებოდა $f(x_0) \neq 0$, მაშინ, დალამბერის ლემის ძალით, იარსებებდა ისეთი x_1 წერტილი, რომ $|f(x_1)| < |f(x_0)|$; მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება x_0 წერტილის ახლახან დამტკიცებულ თვისებას.

შევნიშნოთ, რომ ძირითადი თეორემის კიდევ ერთი დამტკიცება მოყვანილი იქნება § 55 ში.

§ 24. ძირითადი თეორემის შედეგები

ვთქვათ, მოცემულია n-ური ხარისხის, $n \geqslant 1$, მრავალწევრი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით. ჩვენ მას კვლავ განვიხილავთ, როგორც ფორმალურ ალგებრულ გამოსახულებას, რომელიც სავსებით განი-

საზღვრება თავისი კოეფიციენტებით. წინა პარაგრაფში დამტკიცებული ძირითადი თეორემა ფესვების არსებობის შესახებ საშუალებას გვაძლევს ვამტკიცოთ $f(x)$-ის კომპლექსური ან ნამდვილი α_1 ფესვის არსებობა. ამიტომ $f(x)$ მრავალწევრს აქვს დაშლა

$$f(x)=(x-\alpha_1)\varphi(x).$$

$\varphi(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები კვლავ ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია და ამიტომ $\varphi(x)$-ს აქვს ფესვი α_2, საიდანაც

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\psi(x).$$

თუ გავაგრძელებთ ასე შემდეგ, ნაბიჯთა სასრული რიცხვის შემდეგ მივალთ n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრის n წრფივ მამრავლთა ნამრავლად დაშლამდე:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n). \tag{2}$$

a_0 კოეფიციენტი გამოჩნდა შემდეგი მიზეზით: (2) გამოსახულებაში მარჯვნივ რომ ყოფილიყო რომელიმე b კოეფიციენტი, მაშინ ფრჩხილების გახსნის შემდეგ $f(x)$ მრავალწევრის უფროს წევრს ექნებოდა bx^n სახე, თუმც სინამდვილეში, (1)-ის გამო, იგი არის a_0x^n წევრი. ამიტომ $b=a_0$.

$f(x)$ მრავალწევრისათვის (2) ტიპის დაშლა ერთადერთია მამრავლთა რიგის სიზუსტით.

მართლაც, ვთქვათ, კიდევ გვაქვს დაშლა

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n). \tag{3}$$

(2) და (3)-დან გამომდინარეობს ტოლობა

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n). \tag{4}$$

α_i ფესვი განსხვავებული რომ იყოს ყველა β_j-საგან, $j=1, 2,\dots,n$, მაშინ (4)-ში თუ ჩავსვამთ უცნობის ნაცვლად α_i-ს, მარცხნივ მივიღებთ ნულს, ხოლო მარჯვნივ ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვს. ამრიგად, ყოველი α_i ფესვი ტოლია რომელიმე β_j ფესვის და პირიქით.

აქედან კიდევ არ გამომდინარეობს (2) და (3) დაშლათა თანამთხვევა. მართლაც, α_i, $i=1, 2,\dots,n$, ფესვთა შორის შეიძლება გვქონდეს ტოლი ფესვები. ვთქვათ, მაგალითად, მათგან s ფესვი ტოლია α_1-ის და, მეორე მხრივ, β_j, $j=1, 2,\dots,n$, ფესვთა შორის α_1 ფესვის ტოლია t ფესვი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $s=t$.

რადგან მრავალწევრთა ნამრავლის ხარისხი ტოლია თანამამრავლთა ხარისხების ჯამისა, ამიტომ ნულისაგან განსხვავებული ორი მრავალწევრის ნამრავლი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ მრავალწევრთა ორი ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ტოლობის ორივე ნაწილი შეგვიძლია შევკვეცოთ საერთო მამრავლზე: თუ

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$$

და $\varphi(x)\neq 0$, მაშინ

$$[f(x)-g(x)]\varphi(x)=0$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$f(x)-g(x)=0,$$

ე. ი.,

$$f(x)=g(x).$$

გამოვიყენოთ ეს (4) ტოლობის მიმართ. თუ, მაგალითად, $s>t$, მაშინ (4) ტოლობის ორივე ნაწილის $(x-\alpha_1)^t$ მამრავლზე შეკვეცით მივალთ ტოლობამდე, რომლის მარცხენა მხარე კიდევ შეიცავს $x-\alpha_1$ მამრავლს, ხოლო მარჯვენა არ შეიცავს. მაგრამ ზემოთ ნაჩვენები იყო, რომ მას მივყავართ წინააღმდეგობამდე. ამრიგად, $f(x)$ მრავალწევრისათვის (2) დაშლის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

თუ გავაერთიანებთ ერთნაირ მამრავლებს, (2) დაშლა შეგვიძლია გადავწეროთ

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l} \qquad (5)$$

სახით, სადაც

$$k_1+k_2+\dots+k_l=n.$$

ამასთანავე, იგულისხმება, რომ $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_l$ ფესვთა შორის უკვე არ არიან ტოლი ფესვები.

დავამტკიცოთ, რომ (5)-ში k_i რიცხვი, $i=1, 2, \dots, l$, წარმოადგენს $f(x)$ მრავალწევრში α_i ფესვის ჯერადობას. მართლაც, თუ ეს ჯერადობა ტოლია s_i, მაშინ $k_i\leqslant s_i$. მაგრამ, ვთქვათ, $k_i<s_i$. ჯერადი ფესვის განმარტების ძალით, არსებობს დაშლა

$$f(x)=(x-\alpha_i)^{s_i}\varphi(x).$$

ამ დაშლაში თუ შევცვლით $\varphi(x)$ მამრავლს მისი წრფივ მამრავლებად დაშლით, მივიღებთ $f(x)$-ის დაშლას წრფივ მამრავლებად, უეჭველად განსხვავებულს (2) დაშლისაგან, ე. ი., ზემოთ დამტკიცებული დაშლის ერთადერთობის გამო, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი შედეგი:

ნებისმიერ რიცხვით კოეფიციენტებიან ყოველ n, $n\geqslant 1$, ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აქვს n ფესვი, თუ ყოველ ფესვს ჩავთვლით იმდენჯერ, რამდენიც არის მისი ჯერადობა.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენი თეორემა სამართლიანია მაშინაც, როცა $n=0$, რადგან, გასაგებია, ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრს არ აქვს ფესვი. ეს თეორემა არ გამოიყენება მხოლოდ 0 მრავალწევრისათვის, რომელსაც არ აქვს ხარისხი და ნულის ტოლია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამ უკანასკნელი შენიშვნით ვისარგებლებთ შემდეგი თეორემის დამტკიცებისას:

თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n-ს, აქვთ ტოლი მნიშვნელობანი უცნობთა n-ზე მეტი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის, მაშინ $f(x)=g(x)$.

მართლაც, $f(x)-g(x)$ მრავალწევრს, ჩვენი დაშვების თანახმად, აქვს n-ზე მეტი ფესვი და რადგან მისი ხარისხი არ აღემატება n-ს, ამიტომ ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობას $f(x)-g(x)=0$.

ამრიგად, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ განსხვავებული რიცხვები უსასრულოდ ბევრია, შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ორი განსხვავებული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრისათვის მოიძებნება x უცნობის ისეთი c მნიშვნელობანი, რომ $f(c) \neq g(c)$. ასეთი c შეგვიძლია მოვძებნოთ არა მხოლოდ კომპლექსურ რიცხვთა შორის, არამედ ნამდვილ, რაციონალურ და აგრეთვე მთელ რიცხვთა შორისაც კი.

ამრიგად, რიცხვითი კოეფიციენტებიანი ორი მრავალწევრი, რომელთაც x უცნობის თუნდაც ერთ რომელიმე ხარისხთან მდგომი კოეფიციენტები აქვთ განსხვავებული, იქნება x კომპლექსური ცვლადის სხვადასხვა კომპლექსური ფუნქცია. დაბოლოს, ამით დამტკიცდა § 20-ში მითითებული მრავალწევრთა ტოლობის ორი — ალგებრული და ფუნქციონალურ-თეორიული — განმარტების ტოლფასობა რიცხვითი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებისათვის.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ, რომ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს, სავსებით განისაზღვრება უცნობის n-ზე მეტი ნებისმიერი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის მიღებული მნიშვნელობებით. შესაძლებელია თუ არა მრავალწევრის ამ მნიშვნელობების მოცემა ნებისმიერად? თუ ვიგულისხმებთ, რომ მრავალწევრის მნიშვნელობანი მოიცემა უცნობის $n+1$ განსხვავებული მნიშვნელობისათვის, მაშინ პასუხი იქნება დადებითი: ყოველთვის არსებობს მრავალწევრი არა უმეტესი n-ური ხარისხისა, რომელიც იღებს წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობებს უცნობთა მოცემული $n+1$ განსხვავებული მნიშვნელობისათვის.

მართლაც, ვთქვათ, უნდა ავაგოთ მრავალწევრი არა უმეტეს n-ური ხარისხისა, რომელიც უცნობის $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ განსხვავებული მნიშვნელობისათვის მიიღებს $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ მნიშვნელობებს, შესაბამისად. ეს მრავალწევრი იქნება:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n+1})}. \tag{6}$$

მართლაც, მისი ხარისხი არ არის n-ზე მეტი, ხოლო $f(a_i)$ მნიშვნელობა ტოლია c_i-ს.

(6) ფორმულას ეწოდება ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულა. სახელწოდება „საინტერპოლაციო" დაკავშირებულია იმასთან, რომ ამ ფორმულით, თუ ვიცით მრავალწევრის მნიშვნელობა $n+1$ წერტილში, შეგვიძლია გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა ყველა სხვა წერტილში.

ვიეტას ფორმულები. ვთქვათ, მოცემულია n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი უფროსი კოეფიციენტით 1,

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{7}$$

და, ვთქვათ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — მისი ფესვებია[1]. მაშინ $f(x)$-ს აქვს შემდეგი დაშლა:

[1] აქ ყოველი ჯერადი ფესვი აიღება შესაბამის რიცხვჯერ.

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

მარჯვნივ მდგომი ფრჩხილების გადამრავლებით, შემდეგ კი მსგავსი წევრების შეკრებით და მიღებული კოეფიციენტების (7)-ის კოეფიციენტებთან შედარებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს, რომლებსაც ვ ი ე ტ ა ს ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი ეწოდებათ და რომლებიც მრავალწევრის კოეფიციენტებს გამოსახავენ მისი ფესვების საშუალებით:

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n),$$

$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),$$

$$a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

ამრიგად, k-ური ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, $k=1, 2, \ldots, n$, დგას ჯამი k ფესვის ყოველგვარი ნამრავლისა, აღებული პლუს ან მინუს ნიშნით იმისდა მიხედვით k ლუწია თუ კენტი.

როცა $n=2$, ეს ფორმულები გადაიქცევა ელემენტალური ალგებრიდან ცნობილ ფორმულებად, რომლებიც აკავშირებენ კვადრატული მრავალწევრის ფესვებსა და კოეფიციენტებს. როცა $n=3$, ე. ი. კუბური მრავალწევრისათვის, ეს ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\ a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\ a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

ვიეტას ფორმულები აადვილებს მრავალწევრის ჩაწერას მისი მოცემული ფესვებით. ვთქვათ მაგალითად, მოვძებნოთ მეოთხე ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, რომელსაც აქვს მარტივ ფესვებად 5 და -2 რიცხვები და ორჯერად ფესვად რიცხვი 3. მივიღებთ:

$$a_1=-(5-2+3+3)=-9,$$

$$a_2=5\cdot(-2)+5\cdot3+5\cdot3+(-2)\cdot3+(-2)\cdot3+3\cdot3=17,$$

$$a_3=-[5\cdot(-2)\cdot3+5\cdot(-2)\cdot3+5\cdot3\cdot3+(-2)\cdot3\cdot3]=33,$$

$$a_4=5\cdot(-2)\cdot3\cdot3=-90,$$

და ამიტომ

$$f(x)=x^4-9x^3+17x^2+33x-90.$$

თუ $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი a_0 განსხვავებულია 1-ისაგან, მაშინ ვიეტას ფორმულების გამოყენებისათვის აუცილებელია თავდაპირველად ყველა კოეფიციენტი გავყოთ a_0-ზე, რაც გავლენას არ მოახდენს მრავალწევრის ფესვებზე. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ვიეტას ფორმულები მოგვცემს ყველა კოეფიციენტის უფროს კოეფიციენტთან ფარდობის გამოსახულებას.

ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები. ახლა კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის ძირითად თეორემიდან გამოყვანილი იქნება რამდენიმე შედეგი, რომელიც ეხება ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებს, არსებითად. სწორედ ამ შედეგებზეა დამყარებული ძირითადი თეორემის ის განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა, რომელზედაც ლაპარაკი იყო ადრე.

ვთქვათ, ნამდვილ კოეფიციენტებიან

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრს აქვს კომპლექსური α ფესვი, ე. ი.

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\dots+a_{n-1}\alpha+a_n=0.$$

ვიცით, რომ უკანასკნელი ტოლობა არ დაირღვევა, თუ მასში ყველა რიცხვს შევცვლით მისი შეუღლებულით. მაგრამ ყველა $a_0, a_1, \dots a_{n-1}, a_n$ კოეფიციენტი და აგრეთვე მარჯვნივ მდგომი 0 რიცხვი, როგორც ნამდვილნი, ამ შეცვლის დროს დარჩებიან უცვლელი და მივიღებთ:

$$a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\dots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n=0$$

ტოლობას, ე. ი.

$$f(\overline{\alpha})=0.$$

ამრიგად, თუ კომპლექსური (და არა ნამდვილი) α რიცხვი არის ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ $f(x)$-ის ფესვი იქნება $\overline{\alpha}$ შეუღლებული რიცხვიც.

მაშასადამე, $f(x)$ მრავალწევრი გაიყოფა კვადრატულ სამწევრზე

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}, \tag{8}$$

რომლის კოეფიციენტები, როგორც § 18-დან ვიცით, ნამდვილია. თუ ვისარგებლებთ ამით, დავამტკიცებთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის α და $\overline{\alpha}$ ფესვებს აქვთ ერთი და იგივე ჯერადობა.

მართლაც, ვთქვათ, ამ ფესვებს აქვთ k და l ჯერადობა, შესაბამისად, და ვთქვათ, მაგალითად, $k>l$. მაშინ $f(x)$ გაიყოფა $\varphi(x)$ მრავალწევრის l-ურ ხარისხზე,

$$f(x)=\varphi^l(x)\,q(x).$$

$q(x)$ მრავალწევრს, როგორც ორი ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის განაყოფს, აგრეთვე ექნება ნამდვილი კოეფიციენტები, მაგრამ ზემოთ დამტკიცებულის წინააღმდეგ მას ექნება α რიცხვი $(k-l)$-ჯერად ფესვად, მაშინ, როცა $\overline{\alpha}$ რიცხვი არ არის მისი ფესვი. აქედან გამომდინარეობს, რომ $k=l$.

ამრიგად, ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველი ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის კომპლექსური ფესვები წყვილ-წყვილად შეუღლებულია. აქედან და ზემოთ დამტკიცებული (2) სახის დაშლის ერთადერთობიდან გამომდინარეობს შემდეგი საბოლოო შედეგი:

ყოველი ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი ერთადერთი გზით (მამრავლთა რიგის სიზუსტით) წარმოიდგინება თავისი a_0 უფროსი კოეფიციენტისა და ნამდვილ კოეფიციენტებიანი რამდენიმე მრავალწევრის ნამრავლის სახით, ამასთანავე ამ უკანასკნელში გვხვდება მხოლოდ $x-\alpha$ წრფივი სახის მამრავლები, რომლებიც შეესაბამებიან

$f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვებს, და (8) კვადრატული სახის მამრავლები, რომელნიც შეესაბამებიან მის შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვთა წყვილებს.

შემდეგისათვის სასარგებლოა ხაზგასმით აღვნიშნოთ, რომ ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრთა შორის, უფროსი კოეფიციენტით 1, უფრო ნაკლები ხარისხის მამრავლებად დაუშლადი ანუ, როგორც ჩვენ ვიტყვით, დაუყვანადი არიან მხოლოდ $x-\alpha$ სახის წრფივი მრავალწევრები და (8) სახის კვადრატული მრავალწევრები.

§ 25* რაციონალური წილადები

მათემატიკური ანალიზის კურსში მთელი რაციონალური, ჩვენს მიერ მრავალწევრად წოდებული, ფუნქციების გარდა, შეისწავლება აგრეთვე *წილად-რაციონალური ფუნქციები*; ესენი არიან ორი მთელი რაციონალური ფუნქციის $\frac{f(x)}{g(x)}$ განაყოფები, სადაც $g(x) \neq 0$. ამ ფუნქციებზე ალგებრული ოპერაციები იწარმოება იმავე კანონით, როგორც რაციონალურ რიცხვებზე, ე. ი. როგორც წილადზე მთელი მრიცხველითა და მნიშვნელით. ორი წილად-რაციონალური ფუნქციის ანუ, როგორც შემდეგში ვიტყვით, *რაციონალური წილადის ტოლობა* გვესმის აგრეთვე იმავე აზრით, როგორც ელემენტალურ არითმეტიკაში წილადების ტოლობა. გარკვეულობისათვის ჩვენ განვიხილავთ *ნამდვილ* კოეფიციენტებიან რაციონალურ წილადებს; მკითხველი ადვილად შენიშნავს, რომ ამ პარაგრაფის მთელი შინაარსი თითქმის სიტყვასიტყვით შეიძლება გადავიტანოთ კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი რაციონალური წილადების შემთხვევაზე.

რაციონალურ წილადს ეწოდება *უკვეცი*, თუ მისი მრიცხველი თანამარტივია მნიშვნელთან.

ყოველი რაციონალური წილადი ტოლია რომელიმე უკვეცი წილადის, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება მრიცხველისა და მნიშვნელისათვის საერთო ნულოვანი ხარისხის მამრავლის სიზუსტით.

მართლაც, ყოველი რაციონალური წილადი შეგვიძლია შევკვეცოთ მრიცხველისა და მნიშვნელის უდიდეს საერთო გამყოფზე, რის შემდეგაც მივიღებთ მის ტოლ უკვეც წილადს. შემდეგ, თუ $\frac{f(x)}{g(x)}$ და $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ უკვეცი წილადები ერთმანეთის ტოლია, ე. ი.

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x), \tag{1}$$

მაშინ $f(x)$ და $g(x)$-ის თანამარტივობიდან გამომდინარეობს, § 21-ის 3) თვისების გამო, რომ $\varphi(x)$ იყოფა $f(x)$-ზე, ხოლო $\varphi(x)$ და $\psi(x)$-ის თანამარტივობიდან კი გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ იყოფა $\varphi(x)$-ზე. ამრიგად, $f(x)=c\varphi(x)$ და მაშინ (1)-დან გამომდინარეობს $g(x)=c\psi(x)$.

რაციონალურ წილადს ეწოდება **წესიერი**, თუ მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე. თუ შევთანხმდებით, წესიერ წილადთა რიცხვს მივაკუთვნოთ 0 მრავალწევრი, მაშინ სამართლიანია შემდეგი **თეორემა**:

ყოველი რაციონალური წილადი წარმოიდგინება, ამასთანავე ერთადერთი გზით, მრავალწევრისა და წესიერი წილადის ჯამის სახით.

მართლაც, თუ მოცემულია $\frac{f(x)}{g(x)}$ რაციონალური წილადი და თუ მრიცხველს გავყოფთ მნიშვნელზე, მივიღებთ

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

ტოლობას, სადაც $r(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე, მაშინ, როგორც ადვილად შევამოწმებთ,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}.$$

თუ აგრეთვე ადგილი აქვს

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\overline{q}(x)+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ტოლობას, სადაც $\varphi(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $\psi(x)$-ის ხარისხზე, მაშინ მივიღებთ

$$q(x)-\overline{q}(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)g(x)-\psi(x)r(x)}{\psi(x)g(x)}$$

ტოლობას. რადგან მარცხნივ დგას მრავალწევრი, ხოლო მარჯვნივ, როგორც ადვილი სანახავია, წესიერი წილადი, ამიტომ მივიღებთ $q(x)-\overline{q}(x)=0$ და

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=0.$$

შესაძლებელია წესიერი რაციონალური წილადების შემდგომი შესწავლა. ამასთანავე მოვიგონოთ, რომ, როგორც წინა პარაგრაფის ბოლოს იყო აღნიშნული, დაუყვანადი ნამდვილი მრავალწევრებია $x-\alpha$ სახის მრავალწევრები, სადაც α რიცხვი ნამდვილია, და $x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}$ სახის მრავალწევრები, სადაც β და $\overline{\beta}$ შეუღლებული კომპლექსურ რიცხვთა წყვილია. როგორც ადვილი შესამოწმებელია, კომპლექსურ შემთხვევაში ანალოგიურ როლს ასრულებენ $x-\alpha$ სახის მრავალწევრები, სადაც α არის ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ წესიერ რაციონალურ წილადს ეწოდება **უმარტივესი**, თუ მისი $g(x)$ მნიშვნელი არის დაუყვანადი $p(x)$ მრავალწევრის ხარისხი

$$g(x)=p^k(x),\quad k\geqslant 1,$$

$f(x)$ მრიცხველის ხარისხი კი ნაკლებია $p(x)$-ის ხარისხზე.

სამართლიანია შემდეგი **ძირითადი თეორემა**:

(ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი იშლება უმარტივეს წილადთა ჯამად.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ $\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$ წესიერი რაციონალური წილადი, სადაც $g(x)$ და $h(x)$ მრავალწევრები თანამარტივია,

$$(g(x),\ h(x))=1.$$

მაშასადამე, § 21-ის გამო არსებობენ ისეთი $\overline{u}(x)$ და $\overline{v}(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$g(x)\overline{u}(x)+h(x)\overline{v}(x)=1,$$

საიდანაც

$$g(x)\left[\overline{u}(x)f(x)\right]+h(x)\left[\overline{v}(x)f(x)\right]=f(x), \tag{2}$$

ვთქვათ, $\overline{u}(x)f(x)$ ნამრავლის $h(x)$-ზე გაყოფისას მივიღებთ $u(x)$ ნაშთს, რომლის ხარისხი ნაკლებია $h(x)$-ის ხარისხზე. მაშინ (2) ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ

$$g(x)u(x)+h(x)v(x)=f(x) \tag{3}$$

სახით, სადაც $v(x)$ მრავალწევრია, რომლის გამოსახულება შეგვიძლია ადვილად დავწეროთ. რადგან $g(x)u(x)$ ნამრავლისა და, პირობით, $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხები ნაკლებია $g(x)h(x)$ ნამრავლის ხარისხზე, ამიტომ $h(x)v(x)$ ნამრავლსაც აქვს ნაკლები ხარისხი, ვიდრე $g(x)h(x)$-ს, რის გამო $v(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$-ის ხარისხზე. ახლა (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}=\frac{v(x)}{g(x)}+\frac{u(x)}{h(x)}$$

ტოლობა, რომლის მარჯვენა ნაწილში დგას წესიერ წილადთა ჯამი.

თუ $g(x)$, $h(x)$ მნიშვნელთაგან ერთი მაინც იშლება თანამარტივ მამრავლთა ნამრავლად, მაშინ შესაძლებელია შევასრულოთ შემდგომი დაშლა. თუ ასე გავაგრძელებთ, მივიღებთ, რომ ყოველი წესიერი წილადი იშლება რამდენიმე წესიერ წილადთა ჯამად, რომელთაგან თითოეულს მნიშვნელად აქვს რომელიმე დაუყვანადი მრავალწევრის ხარისხი. უფრო ზუსტად, თუ მოცემულია $\frac{f(x)}{g(x)}$ წესიერი წილადი, რომლის მნიშვნელს აქვს დაშლა დაუყვანად მამრავლებად

$$g(x)=p_1^{k_1}(x)\,p_2^{k_2}(x)\ldots p_l^{k_l}(x)$$

(რა თქმა უნდა, ყოველთვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ რაციონალური წილადის მნიშვნელის უფროსი კოეფიციენტი ერთის ტოლია), ამასთანავე $p_i(x)\neq p_j(x)$, როცა $i\neq j$, მაშინ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}+\frac{u_2(x)}{p_2^{k_2}(x)}+\ldots+\frac{u_l(x)}{p_l^{k_l}(x)};$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყველა შესაკრები წესიერი წილადია.

განსახილველი დაგვრჩა $\dfrac{u(x)}{p^k(x)}$ სახის წესიერი წილადი, სადაც $p(x)$ დაუყვანადი მრავალწევრია. ნაშთით გაყოფის ალგორითმი გამოვიყენოთ: $u(x)$ გავყოთ $p^{k-1}(x)$-ზე, მიღებული ნაშთი გავყოთ $p^{k-2}(x)$-ზე და ა. შ.

მივალთ შემდეგ ტოლობებამდე:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= p^{k-1}(x)\, s_1(x) + u_1(x), \\
u_1(x) &= p^{k-2}(x) s_2(x) + u_2(x), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{k-2}(x) &= p(x)\, s_{k-1}(x) + u_{k-1}(x).
\end{aligned}
$$

ამასთანავე, რადგან $u(x)$-ის ხარისხი, პირობის თანახმად, ნაკლებია $p^k(x)$-ის ხარისხზე, ხოლო ყოველი $u_i(x)$ ნაშთის, $i=1, 2, \ldots, k-1$, ხარისხი ნაკლებია სათანადო $p^{k-i}(x)$ გამყოფის ხარისხზე, ამიტომ ყველა $s_1(x), s_2(x), \ldots, s_{k-1}(x)$ განაყოფის ხარისხი მკაცრად ნაკლებია $p(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. უკანასკნელი $u_{k-1}(x)$ ნაშთის ხარისხი აგრეთვე ნაკლებია $p(x)$-ის ხარისხზე. მიღებულ ტოლობათაგან გამომდინარეობს:

$$u(x) = p^{k-1}(x)\, s_1(x) + p^{k-2}(x)\, s_2(x) + \ldots + p(x) s_{k-1}(x) + u_{k-1}(x).$$

აქედან მივალთ საძიებელ წარმოდგენამდე $\dfrac{u(x)}{p^k(x)}$ რაციონალური წილადისა უმარტივეს წილადთა ჯამის სახით

$$\frac{u(x)}{p^k(x)} = \frac{u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{s_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \ldots + \frac{s_2(x)}{p^2(x)} + \frac{s_1(x)}{p(x)}.$$

ძირითადი თეორემა დამტკიცებულია. იგი შეიძლება შევავსოთ ე რ თ ა დ-ე რ თ ო ბ ი ს შემდეგი თ ე ო რ ე მ ი თ:

ყ ო ვ ე ლ წ ე ს ი ე რ რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ წ ი ლ ა დ ს ა ქ ვ ს ე რ თ ა დ ე რ თ ი დ ა შ ლ ა უ მ ა რ ტ ი ვ ე ს წ ი ლ ა დ თ ა ჯ ა მ ი ს ს ა ხ ი თ.

მართლაც, ვთქვათ, რომელიმე წესიერი წილადის წარმოდგენა უმარტივეს წილადთა ჯამის სახით შესაძლებელია ორგვარი სახით. ამ წარმოდგენათაგან ერთის მეორიდან გამოკლებით და მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ უმარტივეს წილადთა ჯამს, რომელიც იგივურად ნულის ტოლია. ვთქვათ, ამ ჯამის შემადგენელი უმარტივეს წილადთა მნიშვნელები არიან განსხვავებულ დაუყვანად $p_1(x); p_2(x), \ldots, p_s(x)$ მრავალწევრთა რაიმე ხარისხები და ვთქვათ, $p_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, s$, მრავალწევრის უმაღლესი ხარისხი, რომელიც არის ამ მნიშვნელთაგან ერთ-ერთი, არის $p_i^{k_i}(x)$. განსახილველი ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $p_1^{k_1-1}(x)\, p_2^{k_2}(x) \ldots p_s^{k_s}(x)$ ნამრავლზე. ამასთანავე, ჩვენი ჯამის ყველა შესაკრები, გარდა ერთისა გადაიქცევა მრავალწევრად. რაც შეეხება $\dfrac{u(x)}{p_1^{k_1}(x)}$ შესაკრებს, იგი გადაიქცევა წილადად, რომლის მნიშვნელი იქნება $p_1(x)$, მრიცხველი კი — $u(x)\, p_2^{k_2}(x) \ldots p_s^{k_s}(x)$ ნამრავლი. მრიცხველი უნაშთოდ არ იყოფა მნიშვნელზე, რადგან $p_1(x)$ მრავალ-

(წევრი დაუყვანადია, მრიცხველის ყველა მამრავლი კი მასთან თანამარტივია. თუ შევასრულებთ ნაშთით გაყოფას, მივიღებთ, რომ მრავალწევრისა და ნულისაგან განსხვავებული წესიერი წილადის ჯამი ნულის ტოლია, მაგრამ ეს შეუძლებელია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავშალოთ უმარტივეს წილადთა ჯამად $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ნამდვილი წესიერი წილადი, სადაც

$$f(x)=2x^4-10x^3+7x^2+4x+3,$$
$$g(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2.$$

ადვილად შემოწმდება, რომ

$$g(x)=(x+2)(x-1)^2(x^2+1),$$

ამასთანავე $x+2$, $x-1$, x^2+1 მრავალწევრთაგან თითოეული დაუყვანადია. ზემოთ დამტკიცებული თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ საძიებელ დაშლას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}, \tag{4}$$

სადაც A, B, C, D და E რიცხვები დარჩა მოსაძებნი.

(4) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$f(x)=A(x-1)^2(x^2+1)+B(x+2)(x^2+1)+C(x+2)(x-1)(x^2+1)+$$
$$+Dx(x+2)(x-1)^2+E(x+2)(x-1)^2, \tag{5}$$

(5) ტოლობის ორივე მხარეში x უცნობთან მდგომი ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ ხუთ წრფივ განტოლებათა სისტემას A, B, C, D, E ხუთი უცნობის მიმართ, ამასთანავე, როგორც ზემოთ დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, ამ სისტემას აქვს ამოხსნა და ამასთანავე ერთადერთი. მაგრამ ჩვენ წავალთ სხვა გზით.

(5) ტოლობაში თუ ვიგულისხმებთ $x=-2$, მივიღებთ $45A=135$ ტოლობას, საიდანაც

$$A=3. \tag{6}$$

შემდეგ, (5)-ში თუ ვიგულისხმებთ $x=1$, მივიღებთ $6B=6$, ე. ი.

$$B=1. \tag{7}$$

ამის შემდეგ (5) ტოლობაში დავუშვათ მიმდევრობით $x=0$ და $x=-1$. თუ გამოვიყენებთ (6) და (7)-ს, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} -2C+2E&=-2,\\ -4C-4D+4E&=-8 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

განტოლებებს, საიდანაც

$$D=1. \tag{9}$$

დაბოლოს, (5) ტოლობაში დავუშვათ $x=2$. თუ გამოვიყენებთ (6), (7) და (9), მივალთ განტოლებამდე

$$20C+4E=-52,$$

რომელიც (8) განტოლებათაგან პირველთან ერთად გვაძლევს

$$C=-2,\ E=-3.$$

ამრიგად,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{x-3}{x^2+1}.$$

თავი მეექვსე

კვადრატული ფორმები

§ 26. კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე

კვადრატულ ფორმათა თეორიის სათავე ანალიზურ გეომეტრიაშია, სახელდობრ მეორე რიგის წირთა (და ზედაპირთა) თეორიაში. ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მეორე რიგის ცენტრალური წირის განტოლებას, სწორკუთხოვან კოორდინატთა სათავის ამ წირის ცენტრში გადატანის შემდეგ, აქვს სახე

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=D. \tag{1}$$

შემდეგ, ცნობილია, რომ შესაძლებელია კოორდინატთა ღერძების რაიმე α კუთხით ისეთი მობრუნება, ე. ი. x, y კოორდინატებიდან x', y' კოორდინატებზე ისეთი გადასვლა:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

რომ ახალ კოორდინატებში ამ წირის განტოლებას ჰქონდეს „კანონიკური“ სახე

$$A'x'^2+C'y'^2=D; \tag{3}$$

მაშასადამე, ამ განტოლებაში უცნობთა $x'y'$ ნამრავლის კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ცხადია, კოორდინატთა (2) გარდაქმნა შეგვიძლია გავიგოთ, როგორც უცნობთა წრფივი გარდაქმნა (იხ. § 13), ამასთანავე გადაუგვარებელი, რადგან მისი კოეფიციენტთაგან შედგენილი დეტერმინანტი ერთის ტოლია. ეს გარდაქმნა გამოიყენება (1) განტოლების მარცხენა ნაწილში, და ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (1) განტოლების მარცხენა ნაწილი (2) გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით (3) განტოლების მარცხენა ნაწილად გარდაიქმნება.

მრავალრიცხოვანმა გამოყენებამ მოითხოვა ანალოგიური თეორიის აგება იმ შემთხვევისათვის, როცა უცნობთა რიცხვი ორის ნაცვლად ნებისმიერი n რიცხვის ტოლია, კოეფიციენტები კი ან ნამდვილი ანდა ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვები არიან.

თუ განვაზოგადებთ გამოსახულებას, რომელიც (1) განტოლების მარცხენა ნაწილში დგას, მივალთ შემდეგ ცნებამდე.

f კვადრატული ფორმა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n უცნობის მიმართ ეწოდება ჯამს, რომლის ყოველი წევრი ან ამ უცნობთაგან ერთი რომელიმეს კვადრატია, ან ორი განსხვავებული უცნობის ნამრავლი. კვადრატულ ფორმას ეწოდება ნამდვილი ან კომპლექსური იმისდა მიხედვით, მისი კოეფიციენტები ნამდვილია თუ ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვები.

ვიგულისხმოთ, რომ f კვადრატულ ფორმაში უკვე შესრულებული მსგავსი წევრების შეერთება და შემოვიღოთ ამ ფორმის კოეფიციენტებისათვის შემდეგი აღნიშვნები: x_i^2-ის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ a_{ii}-თი, $x_i x_j$ $(i \neq j)$ ნამრავლის კოეფიციენტი კი—$2a_{ij}$-თი (შეად. (1) !). მაგრამ, რადგან $x_i x_j = x_j x_i$, ამიტომ ამ ნამრავლის კოეფიციენტი შეგვეძლო აღგვენიშნა $2a_{ji}$-თაც; ე. ი. ჩვენს მიერ შემოღებული აღნიშვნები გულისხმობს

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{4}$$

ტოლობის სამართლიანობას. ახლა, $2a_{ij} x_i x_j$ წევრი შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$2a_{ij} x_i x_j = a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i$$

სახით, მთელი f კვადრატული ფორმა კი—ყველა შესაძლებელ $a_{ij} x_i x_j$ წევრთა ჯამის სახით, სადაც i და j უკვე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად იღებენ მნიშვნელობებს 1-დან n-მდე:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j; \tag{5}$$

კერძოდ, როცა $i = j$, მიიღება $a_{ii} x_i^2$ წევრი.

ცხადია, a_{ij} კოეფიციენტებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ n რიგის კვადრატული $A = (a_{ij})$ მატრიცი; მას ეწოდება f კვადრატული ფორმის მატრიცი, ხოლო მის r რანგს – ამ კვადრატული ფორმის რანგი. კერძოდ, თუ $r = n$, ე. ი. მატრიცი გადაუგვარებელია, მაშინ f კვადრატულ ფორმასაც გადაუგვარებელი ეწოდება. (4) ტოლობის გამო A მატრიცის მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიული ელემენტები ტოლია, ე. ი. A მატრიცი სიმეტრიულია. პირიქით, ნებისმიერი n-ური რიგის სიმეტრიული A მატრიცისათვის შეგვიძლია ვაჩვენოთ n უცნობის მიმართ სავსებით განსაზღვრული (5) კვადრატული ფორმა, რომელსაც კოეფიციენტებად ექნება A მატრიცის ელემენტები.

თუ გამოვიყენებთ § 14-ში შემოღებულ სწორკუთხოვან მატრიცთა გამრავლებას, მაშინ (5) კვადრატული ფორმა შეგვიძლია ჩავწეროთ სხვა სახით, თავდაპირველად შევთანხმდეთ შემდეგ აღნიშვნაში: თუ მოცემულია კვადრატული, ან საზოგადოდ სწორკუთხოვანი, A მატრიცი, მაშინ A'-ით აღვნიშნოთ A მატრიცის ტრანსპონირებით მიღებული მატრიცი. თუ A და B მატრიცები ისეთებია, რომ მათი ნამრავლი განსაზღვრულია, მაშინ ადგილი აქვს

$$(AB)' = B'A' \tag{6}$$

ტოლობას, ე. ი. ნამრავლის ტრანსპონირებით მიღებული მატრიცი ტოლია შებრუნებული რიგით აღებულ თანამამრავლთა ტრანსპონირებით მიღებულ მატრიცთა ნამრავლისა.

მართლაც, თუ AB ნამრავლი განსაზღვრულია, მაშინ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, განისაზღვრება $B'A'$ ნამრავლიც: B' მატრიცის სვეტების რიცხვი ტოლია A' მატრიცის სტრიქონების რიცხვისა. $(AB)'$ მატრიცის i-ურ სტრიქონსა და j-ურ სვეტში მდგომი ელემენტი AB მატრიცში ძევს j-ურ სტრიქონსა და i ურ სვეტში. ამიტომ იგი ტოლია A მატრიცის j-ური სტრიქონისა და B მატრიცის i-ური სვეტის სათანადო ელემენტების ნამრავლთა ჯამის, ე. ი. ტოლია A' მატრიცის j-ური სვეტისა და B' მატრიცის i-ური სტრიქონის სათანადო ელემენტების ნამრავლთა ჯამის, რითაც (6) ტოლობა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის სიმეტრიული, თუ იგი ემთხვევა თავის ტრანსპონირებულს, ე. ი. თუ

$$A' = A.$$

ახლა, უცნობთაგან შედგენილი სვეტი აღვნიშნოთ X-ით,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

X არის n სტრიქონისა და ერთი სვეტის მქონე მატრიცი. ამ მატრიცის ტრანსპონირებით მივიღებთ ერთი სტრიქონისაგან შედგენილ

$$X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

მატრიცს.

(5) კვადრატული ფორმა მატრიცით $A = (a_{ij})$ ახლა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ნამრავლის სახით:

$$f = X'AX. \tag{7}$$

მართლაც, AX ნამრავლი იქნება მატრიცი, რომელიც შედგება ერთი სვეტისაგან:

$$AX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

თუ ამ მატრიცს მარცხნიდან გავამრავლებთ X' მატრიცზე, მივიღებთ „მატ-რიცს", რომელიც შედგება ერთი სტრიქონისა და ერთი სვეტისაგან, სახელდობრ (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს.

რა მოუვა f კვადრატულ ფორმას, თუ მასში შემავალ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებს გარდავქმნით $Q=(q_{ik})$ მატრიცით მოცემულ

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} q_{ik}\, y_k, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

წრფივი გარდაქმნით? ჩავთვალოთ, რომ, თუ f ფორმა ნამდვილია, მაშინ Q მატრიცის ელემენტებიც ნამდვილია. თუ აღვნიშნავთ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობთა სვეტს Y-ით, მაშინ (8) წრფივ გარდაქმნას ჩავწერთ მატრიცული ტოლობის სახით

$$X=QY. \tag{9}$$

აქედან, (6)-ის ძალით,

$$X'=Y'Q'. \tag{10}$$

თუ (9) და (10)-ს ჩავსვამთ f ფორმის (7) ჩაწერაში, მივიღებთ:

$$f=Y'(Q'AQ)Y,$$

ანუ

$$f=Y'BY,$$

სადაც

$$B=Q'AQ.$$

B მატრიცი იქნება სიმეტრიული, რადგან (6) ტოლობის გამო, რომელიც, ცხადია, სამართლიანია მამრავლთა ნებისმიერი რიცხვისათვის, და $A'=A$ ტოლობის გამო, რაც A მატრიცის სიმეტრიულობის ტოლფასია, გვაქვს:

$$B'=Q'A'Q=Q'AQ=B.$$

ამრიგად, დამტკიცდა შემდეგი თეორემა:

A მატრიცის მქონე კვადრატული ფორმა n უცნობის მიმართ უცნობთა წრფივი გარდაქმნის შემდეგ, რომლის მატრიცია Q, გარდაიქმნება ახალ უცნობთა მიმართ კვადრატულ ფორმად, რომლის მატრიცი $Q'AQ$ ნამრავლია.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ვასრულებთ *გადაუგვარებელ* წრფივ გარდაქმნას, ე. ი. Q და ამიტომ Q'-ც გადაუგვარებელი მატრიცებია. ამ შემთხვევაში $Q'AQ$ ნამრავლი მიიღება A მატრიცის გამრავლებით გადაუგვარებელ მატრიცებზე, რის გამოც, როგორც § 14-ის შედეგებიდან გამომდინარეობს, ამ ნამრავლის რანგი უდრის A მატრიცის რანგს. ამრიგად, *კვადრატული ფორმის რანგი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით არ იცვლება.*

ახლა განვიხილოთ, ამ პარაგრაფში მითითებულ მეორე რიგის ცენტრალური წირის (3) კანონიკურ სახეზე დაყვანის გეომეტრიული ამოცანის ანალოგიურად, საკითხი ნებისმიერი კვადრატული ფორმის რომელიმე გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით უცნობთა კვადრატების ჯამის სახით წარმოდ-

გენის შესახებ, ე. ი. ისეთი სახით წარმოდგენის შესახებ, როცა განსხვავებულ უცნობების ნამრავლთა ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია; კვადრატული ფორმის ამ განსაკუთრებულ სახეს ეწოდება *კანონიკური*. თავდაპირველად ვიგულისხმოთ, რომ f კვადრატული ფორმა $x_1, x_2, \dots, x_n$ n უცნობის მიმართ გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით უკვე დაყვანილია კანონიკურ სახეზე

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\dots+b_ny_n^2, \tag{11}$$

სადაც $y_1, y_2, \dots, y_n$ ახალი უცნობებია. რა თქმა უნდა, $b_1, b_2, \dots, b_n$ კოეფიციენტებიდან რამდენიმე შეიძლება ნული იყოს. დავამტკიცოთ, რომ (11)-ში *ნულისაგან განსხვავებულ კოეფიციენტთა რიცხვი უსათუოდ f ფორმის r რანგის ტოლია.*

მართლაც, რადგან (11)-მდე მივედით გადაუგვარებელი გარდაქმნის საშუალებით, ამიტომ (11) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი კვადრატული ფორმაც აგრეთვე უნდა იყოს r რანგის. მაგრამ ამ კვადრატული ფორმის მატრიცს აქვს დიაგონალური სახე

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}$$

და მოთხოვნა, რომ ამ მატრიცს ჰქონდეს r რანგი, ტოლფასია იმისა, რომ მის მთავარ დიაგონალზე იდგეს ზუსტად r ნულისაგან განსხვავებული ელემენტი.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი *ძირითადი თეორემა კვადრატული ფორმების შესახებ*.

ყოველი კვადრატული ფორმა შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე რომელიმე გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით. ამასთანავე, თუ განიხილება ნამდვილი კვადრატული ფორმა, მაშინ აღნიშნული წრფივი გარდაქმნის ყველა კოეფიციენტიც ნამდვილად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

ეს თეორემა სამართლიანია ერთუცნობიანი კვადრატული ფორმის შემთხვევაში, რადგან ყოველ ასეთ ფორმას აქვს სახე ax^2, რომელიც კანონიკურია. მაშასადამე, დამტკიცება შეგვიძლია ჩავატაროთ ინდუქციით უცნობთა რიცხვის მიმართ, ე. ი. დავამტკიცოთ თეორემა კვადრატული ფორმებისათვის n უცნობის მიმართ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ იგი უკვე დამტკიცებულია ფორმებისათვის უცნობთა ნაკლები რიცხვის მიმართ.

ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{12}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ n უცნობის მიმართ. ჩვენ შევეცდებით მოვძებნოთ ისეთი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა, რომელიც f-დან გამოყოფს ერთ-ერთი უცნობის კვადრატს, ე. ი. f-ს მიიყვანს ამ კვადრატისა და დანარჩენ უცნობთა

მიმართ რაიმე კვადრატული ფორმის ჯამის სახემდე. ეს მიზანი ადვილად მიიღწევა იმ შემთხვევაში, თუ f ფორმის მატრიცში მთავარ დიაგონალზე მდგომ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ კოეფიციენტთა შორის არიან ნულისაგან განსხვავებული, ე. ი. თუ (12)-ში შედის ერთი მაინც x_i უცნობის კვადრატი ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტით.

ვთქვათ, მაგალითად, $a_{11} \neq 0$. მაშინ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, $a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2$ გამოსახულება, რომელიც წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას, შეიცავს x_1 უცნობის მიმართ ისეთივე წევრებს, როგორსაც f ფორმა, ამიტომ სხვაობა

$$f - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 = g$$

იქნება კვადრატული ფორმა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ $x_2, \ldots, x_n$ უცნობებს, მაგრამ არა x_1-ს. აქედან

$$f = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + g.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \quad y_i = x_i, \text{ როცა } i = 2, 3, \ldots, n, \tag{13}$$

მაშინ მივიღებთ

$$f = a_{11}^{-1} y_1^2 + g, \tag{14}$$

სადაც ახლა g იქნება კვადრატული ფორმა $y_2, y_3, \ldots, y_n$ უცნობების მიმართ. (14) გამოსახულება არის f ფორმისათვის საძიებელი გამოსახულება, რადგან იგი მიიღება (12)-დან გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით, სახელდობრ კი (13) წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნით, რომლის დეტერმინანტია a_{11} და ამიტომ არ არის გადაგვარებული.

თუკი ადგილი აქვს $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$ ტოლობებს, მაშინ წინასწარ უნდა შევასრულოთ დამხმარე წრფივი გარდაქმნა, რომელიც f ფორმაში წარმოშობს უცნობთა კვადრატებს. რადგან ამ ფორმის (12) ჩაწერის კოეფიციენტებს შორის უნდა იყოს ნულისაგან განსხვავებული, — წინააღმდეგ შემთხვევაში არაფერი არ იქნებოდა დასამტკიცებელი, — ამიტომ ვთქვათ, მაგალითად, $a_{12} \neq 0$, ე. ი. f წარმოადგენს ჯამს $2a_{12}x_1x_2$ წევრისა და იმ წევრებისა, რომელთაგან თითოეულში შედის $x_3, \ldots, x_n$ უცნობთაგან ერთი მაინც.

ახლა შევასრულოთ წრფივი გარდაქმნა

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_i = z_i, \text{ როცა } i = 3, \ldots, n. \tag{15}$$

იგი იქნება გადაუგვარებელი, რადგან აქვს

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

დეტერმინანტი. ამ გარდაქმნის შედეგად ჩვენი ფორმის $2a_{12}x_1x_2$ წევრი მიიღებს სახეს

$$2a_{12}x_1x_2=2a_{12}(z_1-z_2)(z_1+z_2)=2a_{12}z_1^2-2a_{12}z_2^2,$$

ე. ი. f ფორმაში გამოჩნდა, ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტით, ერთბაშად ორი უცნობის კვადრატი, ამასთანავე ისინი არ შეიძლება შეიკვეცონ დანარჩენ წევრთაგან არც ერთთან, რადგან ამ უკანასკნელთაგან თითოეულში შედის $z_3, \ldots, z_n$ უცნობთაგან ერთი მაინც. ახლა უკვე ჩვენ ვიმყოფებით ზემოთ განხილული შემთხვევის პირობებში, ე. ი. კიდევ ერთი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით f ფორმა შეგვიძლია მივიყვანოთ (14) სახეზე.

დამტკიცების დამთავრებისათვის დაგვრჩა აღვნიშნოთ, რომ g კვადრატული ფორმა დამოკიდებულია უცნობთა n-ზე ნაკლებ რიცხვზე და ამიტომ, ინდუქციური დაშვების ძალით, $y_2, y_3, \ldots, y_n$ უცნობთა რომელიმე გადაუგვარებელი გარდაქმნით იგი დაიყვანება კანონიკურ სახეზე. მაშასადამე, ეს გარდაქმნა, როგორც ყველა n უცნობის ისეთი (როგორც ადვილი სანახავია გადაუგვარებელი) გარდაქმნა, რომლის დროსაც y_1 უცვლელად რჩება, მიგვიყვანს (14) კანონიკურ სახეზე. ამრიგად, f კვადრატული ფორმა ორი ან სამი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით, რომელნიც შეიძლება შევცვალოთ ერთი გადაუგვარებელი გარდაქმნით—მათი ნამრავლით, დაიყვანება უცნობთა კვადრატების ჯამის სახეზე რაიმე კოეფიციენტებით. ამ კვადრატთა რიცხვი, როგორც ვიცით, ტოლია r ფორმის რანგისა. უფრო მეტიც, თუ f კვადრატული ფორმა ნამდვილია, მაშინ f ფორმის როგორც კანონიკური სახის, ასევე f-ის ამ სახეზე მიმყვანი წრფივი გარდაქმნის კოეფიციენტებიც ნამდვილნი იქნებიან; მართლაც, (13)-ის შებრუნებულ წრფივ გარდაქმნასაც და (15) წრფივ გარდაქმნასაც ნამდვილი კოეფიციენტები აქვთ.

ძირითადი თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია. ამ დამტკიცებაში გამოყენებული მეთოდით შეიძლება ვისარგებლოთ კერძო მაგალითებში კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე კონკრეტულად დასაყვანად; ოღონდ ინდუქციის ნაცვლად, რომლითაც ვისარგებლეთ დამტკიცებაში, ზემოთ გადმოცემული მეთოდით თანმიმდევრობით უნდა გამოვყოთ უცნობთა კვადრატები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე

$$f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1 \tag{16}$$

კვადრატული ფორმა.

ამ ფორმაში უცნობთა კვადრატების უქონლობის გამო თავდაპირველად შევასრულოთ გადაუგვარებელი

$$x_1=y_1-y_2,\ x_2=y_1+y_2,\ x_3=y_3$$

წრფივი გარდაქმნა, მატრიცით

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

რის შემდეგაც მივიღებთ:

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_2-8y_2y_3.$$

ახლა, y_1^2-ის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან და ამიტომ ჩვენი ფორმიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ერთი უცნობის კვადრატი. თუ ვიგულისხმებთ,

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$

ე. ი. თუ შევასრულებთ წრფივ გარდაქმნას, რომლისთვისაც შებრუნებულს ექნება მატრიცი

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

f-ს მივიყვანთ სახეზე

$$f = \frac{1}{2} z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_2z_3.$$

ჯერჯერობით გამოიყო მხოლოდ z_1 უცნობის კვადრატი, რადგან ფორმა კიდევ შეიცავს ორი სხვა უცნობის ნამრავლს. ვისარგებლოთ იმით, რომ z_2^2-ის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია და კიდევ ერთხელ გამოვიყენოთ ზემოთ გადმოცემული მეთოდი. თუ შევასრულებთ წრფივ გარდაქმნას

$$t_1 = z_1,\ t_2 = -2z_2 - 4z_3,\ t_3 = z_3,$$

რომლისთვისაც შებრუნებულს აქვს

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცი, დაბოლოს, f ფორმას მივიყვანთ კანონიკურ სახეზე

$$f = \frac{1}{2} t_1^2 - \frac{1}{2} t_2^2 + 6t_3^2. \tag{17}$$

წრფივი გარდაქმნის, რომელიც (16)-ს უშუალოდ მიიყვანს (17) სახეზე, მატრიცი იქნება ნამრავლი

$$ABC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

უშუალო ჩასმითაც შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ გადაუგვარებელი $\left(\text{რადგან დეტერმინანტი ტოლია } -\frac{1}{2}\right)$ წრფივი გარდაქმნა

$$x_1 = \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2 + 3t_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} t_1 - \frac{1}{2} t_2 - t_3,$$

$$x_3 = t_3$$

(16)-ს გარდაქმნის (17)-ში.

კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანის თეორია აგებულია მეორე რიგის ცენტრალური წირების გეომეტრიული თეორიის ანალოგიურად, მაგრამ იგი არ შეიძლება ჩავთვალოთ ამ უკანასკნელი თეორიის განზოგადებად. მართლაც, ჩვენს თეორიაში დასაშვებია ვისარგებლოთ ნებისმიერი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით, მაშინ როცა მეორე რიგის წირის კანონიკურ სახეზე დაყვანა მიიღება წრფივ გარდაქმნათა მეტად სპეციალური (2) სახით, რომელიც სიბრტყის ბრუნვას წარმოადგენს. ამ გეომეტრიული თეორიის განზოგადებაც შესაძლებელია n უცნობის ნამდვილ კოეფიციენტებიან კვადრატული ფორმების შემთხვევაში. ეს განზოგადება, რომელიც იწოდება *კვადრატული ფორმების დაყვანად მთავარი ღერძების მიმართ*, გადმოცემული იქნება მე-8 თავში.

§ 27. ინერციის კანონი

კანონიკური სახე, რომელზედაც მიიყვანება მოცემული კვადრატული ფორმა, სრულიად არ არის მისთვის ცალსახად განსაზღვრული: ყოველი კვადრატული ფორმა შეიძლება დაყვანილ იქნას კანონიკურ სახეზე მრავალი განსხვავებული ხერხით. ასე მაგალითად, წინა პარაგრაფში განხილული $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$ კვადრატული ფორმა გადაუგვარებელი წრფივი

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1+3t_2+2t_3,\\ x_2 &= t_1-t_2-2t_3,\\ x_3 &= \phantom{t_1-{}} t_2 \end{aligned}$$

გარდაქმნით დაიყვანება

$$f=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2$$

კანონიკურ სახეზე, რომელიც განსხვავდება ადრე მიღებულისაგან.

ისმება კითხვა, რა აქვთ საერთო იმ განსხვავებულ კანონიკურ კვადრატულ ფორმებს, რომლებზედაც დაიყვანება მოცემული f ფორმა? ეს კითხვა, როგორც ვნახავთ, მჭიდროდ არის დაკავშირებული ასეთ კითხვასთან: რა პირობებშია შესაძლებელი ორი მოცემული კვადრატული ფორმიდან ერთის გადაყვანა მეორეში გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით? ამ კითხვებზე პასუხი დამოკიდებულია იმაზე, კომპლექსურ კვადრატულ ფორმებს განვიხილავთ თუ ნამდვილს.

თავდაპირველად ვიგულისხმოთ, რომ განიხილება ნებისმიერი *კომპლექსური* კვადრატული ფორმები და, ამასთან ერთად, ვიგულისხმოთ, რომ გამოიყენება აგრეთვე ნებისმიერი კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნები. ვიცით, რომ r რანგის მქონე ყოველი n უცნობიანი f კვადრატული ფორმა დაიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$f=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\ldots+c_ry_r^2,$$

სადაც ყველა $c_1, c_2, \ldots, c_r$ კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან. ვისარგებლოთ იმით, რომ ყოველი კომპლექსური რიცხვიდან ამოდის კვადრატული ფესვი და შევასრულოთ შემდეგი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა:

$$z_i = \sqrt{c_i}\, y_i, \text{ როცა } i = 1, 2, \ldots, r; \quad z_j = y_j, \text{ როცა } j = r+1, \ldots, n,$$

იგი f ფორმას მიიყვანს სახეზე

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2, \qquad (1$$

რომელსაც ნორმალური ფორმა ეწოდება. ეს არის უბრალოდ r უცნობი კვადრატების ჯამი ერთის ტოლი კოეფიციენტებით.

ნორმალური სახე დამოკიდებულია f ფორმის მხოლოდ r რანგზე, ე. r რანგის ყველა კვადრატული ფორმა დაიყვანება ერთი და იმავე (1) ნორმა ლურ სახეზე. მაშასადამე, თუ n უცნობიან f და g ფორმებს აქვთ ერთნაირ r რანგი, მაშინ შესაძლებელია f-ის გადაყვანა (1)-ში, შემდეგ კი (1)-ისა g-ში ე. ი. არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა, რომელიც f g-ში გადაიყვანს. რადგან, მეორე მხრივ, არც ერთი გადაუგვარებელი წრფივ გარდაქმნა არ ცვლის ფორმის რანგს, ამიტომ მივედით შემდეგ შედეგამდე

ორი კომპლექსური კვადრატული n უცნობიანი ფორმ მაშინ და მხოლოდ მაშინ მიიყვანება ერთიმეორემდე კომ ლექსურ კოეფიციენტებიანი გადაუგვარებელი წრფივ გარდაქმნით, თუ ამ ფორმებს აქვთ ერთი და იგივე რანგი.

ამ თეორემიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ r რანგის მქონ კომპლექსურ კვადრატულ ფორმას კანონიკურ სახედ შეი ლება ჰქონდეს r უცნობის კვადრატების ყოველი ჯამი ნულ საგან განსხვავებული ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიც ენტებით.

მდგომარეობა რამდენიმედ უფრო რთულია იმ შემთხვევაში, თუ განიხ ლება ნამდვილი კვადრატული ფორმები და, რაც განსაკუთრებით საყუ რადღებოა, თუ განიხილება მხოლოდ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი წრფივ გარდაქმნები. ამ შემთხვევაში ყველა ფორმის მიყვანა (1) სახეზე უკვე შეუძ ლებელია, რადგან ეს მოითხოვდა უარყოფითი რიცხვიდან კვადრატულ ფესვის ამოღებას. მაგრამ, თუ კვადრატული ფორმის ნორმალურ სახე ახლა ვუწოდებთ რამდენიმე უცნობის კვადრატების ჯამს, კოეფიციენტებით $+1$ ან -1, მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ ყოველი ნამდვილი კვადრატული ფორმა ნამდვილ კოეფიციენტებიანი გადაუ გვარებელი წრფივი გარდაქმნით შეიძლება მიყვანილ იქნე ნორმალურ სახეზე.

მართლაც, r რანგის მქონე n უცნობიანი f ფორმა დაიყვანება კანონი კურ სახეზე, რომელიც შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად (თუ საჭირო იქნება, უცნობთა დანომვრას შევცვლით):

$$f = c_1 y_1^2 + \cdots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \cdots - c_r y_r^2, \quad 0 \leqslant k \leqslant r,$$

სადაც ყველა $c_1, \ldots, c_k; c_{k+1}, \ldots, c_r$ რიცხვი დადებითია და განსხვავებული ნულ საგან. მაშინ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნ

$$z_i = \sqrt{c_i}\, y_i, \text{ როცა } i = 1, 2, \ldots, r; \quad z_j = y_j, \text{ როცა } j = r+1, \ldots, n,$$

f-ს მიიყვანს კანონიკურ სახეზე

$$f=z_1^2+\dots+z_k^2-z_{k+1}^2-\dots-z_r^2.$$

ამ ჯამში შემავალ კვადრატთა საერთო რიცხვი ფორმის რანგის ტოლია.

ნამდვილი კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე შეიძლება დაყვანილ იქნას მრავალ სხვადასხვა გარდაქმნით, მაგრამ უცნობთა ნუმერაციამდე სიზუსტით იგი დაიყვანება მხოლოდ ერთ ნორმალურ სახეზე. ამას აჩვენებს შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელსაც ეწოდება ნამდვილ კვადრატულ ფორმათა ინერციის კანონი:

ნორმალურ სახეში, რომელზედაც დაიყვანება მოცემული ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა ნამდვილი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით, დადებით კვადრატთა და უარყოფით კვადრატთა რიცხვი დამოკიდებული არ არის ამ გარდაქმნის არჩევაზე.

მართლაც, ვთქვათ, r რანგის კვადრატული f ფორმა $x_1, x_2, \dots, x_n$ n უცნობის მიმართ ორი გზით არის დაყვანილი ნორმალურ სახეზე:

$$f=y_1^2+\dots+y_k^2-y_{k+1}^2-\dots-y_r^2=z_1^2+\dots+z_l^2-z_{l+1}^2-\dots-z_r^2. \tag{2}$$

რადგან $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობებიდან $y_1, y_2, \dots, y_n$ უცნობებზე გადასვლა იყო გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა, ამიტომ, პირიქით, მეორე უცნობებიც აგრეთვე წრფივად გამოისახებიან პირველის საშუალებით ნულისაგან განსხვავებული დეტერმინანტით:

$$y_i=\sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s, \quad i=1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

ანალოგიურად

$$z_j=\sum_{t=1}^{n} b_{jt}x_t, \quad j=1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

ამასთანავე, კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი კვლავ განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო კოეფიციენტები როგორც (3)-ში, ისე (4)-შიც ნამდვილი რიცხვებია.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $k<l$, და დავწეროთ ტოლობათა სისტემა

$$y_1=0, \dots, y_k=0, \quad z_{l+1}=0, \dots, z_r=0, \dots, z_n=0. \tag{5}$$

თუ ამ ტოლობათა მარცხენა ნაწილებს შევცვლით (3) და (4)-დან მათი გამოსახულებით, მივიღებთ $n-l+k$ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას n უცნობით $x_1, x_2, \dots, x_n$. ამ სისტემაში განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, ამიტომ, როგორც § 1-დან ვიცით, ჩვენს სისტემას აქვს არანულოვანი ნამდვილი ამონახსენი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

ახლა (2) ტოლობაში ყველა y და ყველა z შევცვალოთ მათი (3) და (4) გამოსახულებით, შემდეგ კი უცნობების ნაცვლად ჩავსვათ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვები. თუ სიმოკლისათვის $y_i(\alpha)$ და $z_j(\alpha)$-თი აღვნიშნავთ y_i და z_j

უცნობთა მნიშვნელობებს, რომლებიც მიღებულია ასეთი ჩასმის შემდეგ. მაშინ (2), (5)-ის გამო, გარდაიქმნება ტოლობად

$$-y^2_{k+1}(\alpha) - \ldots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \ldots + z_l^2(\alpha). \tag{6}$$

რადგან (2) და (4)-ში ყველა კოეფიციენტი ნამდვილია, ამიტომ (6) ტოლობაში შემავალი ყველა კვადრატი დადებითია, რის გამო (6) თავის მხრივ გამოიწვევს ყველა ამ კვადრატთა ნულთან ტოლობას; აქედან გამომდინარეობს ტოლობები

$$z_1(\alpha) = 0, \ldots, z_l(\alpha) = 0. \tag{7}$$

მეორე მხრივ, თვით $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვების არჩევის გამო,

$$z_{l+1}(\alpha) = 0, \ldots, z_r(\alpha) = 0, \ldots, z_n(\alpha) = 0. \tag{8}$$

ამრიგად, n ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$z_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

n უცნობით $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (7) და (8)-ის გამო, აქვს $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ არანულოვანი ამონახსენი, ე. ი. ამ სისტემის დეტერმინანტი უნდა იყოს ნულის ტოლი, მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება იმას, რომ (4) გარდაქმნა იგულისხმებოდა როგორც გადაუგვარებელი. ასეთივე წინააღმდეგობამდე მივალთ, როცა $l < k$. აქედან გამომდინარეობს $k = l$ ტოლობა, რაც ამტკიცებს თეორემას.

დადებით კვადრატთა რიცხვს იმ ნორმალურ სახეში, რომელზედაც დაიყვანება მოცემული ნამდვილი f კვადრატული ფორმა, ეწოდება ამ ფორმის *ინერციის დადებითი ინდექსი*, უარყოფით კვადრატთა რიცხვს — *ინერციის უარყოფითი ინდექსი*, ინერციის დადებით და უარყოფით ინდექსთა შორის სხვაობას კი — f ფორმის *სიგნატურა*. გასაგებია, რომ ფორმის მოცემული რანგისათვის ახლახან განსაზღვრული სამი რიცხვიდან ერთი რომელიმეს მოცემა სავსებით განსაზღვრავს დანარჩენ ორს, და ამიტომ შემდგომ ფორმულირებებში შეგვიძლია ვილაპარაკოთ ამ სამი რიცხვიდან ერთ ნებისმიერზე.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი *თეორემა*:

ორი ნამდვილ კოეფიციენტებიანი n უცნობიანი კვადრატული ფორმა მაშინ და მხოლოდ მაშინ გადავა ერთიმეორეში გადაუგვარებელი ნამდვილი წრფივი გარდაქმნით, თუ ამ ფორმებს აქვთ ერთი და იგივე რანგი და ერთი და იგივე სიგნატურა.

მართლაც, ვთქვათ, f ფორმა გადაუგვარებელი ნამდვილი გარდაქმნით გადადის g ფორმაში. ვიცით, რომ ეს გარდაქმნა არ ცვლის ფორმის რანგს. მას არ შეუძლია შეცვალოს სიგნატურაც, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში f და g დაიყვანებოდნენ განსხვავებულ ნორმალურ სახეებზე და მაშინ f ფორმა დაიყვანებოდა, ინერციის კანონის საწინააღმდეგოდ, ორივე ამ ნორმალურ სახეზე. პირიქით, თუ f და g ფორმებს აქვთ ერთი და იგივე რანგი და ერთი და იგივე სიგნატურა, მაშინ ისინი დაიყვანებიან ერთსა და იმავე ნორმალურ სახეზე და ამიტომ შესაძლებელია, რომ ისინი გადავიდნენ ერთმანეთში.

თუ g კვადრატული ფორმა მოცემულია კანონიკური სახით

$$g = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_r y_r^2, \tag{9}$$

სადაც კოეფიციენტები ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ცხადია, რომ ამ ფორმის რანგი არის r. შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ ასეთი ფორმის ნორმალურ სახეზე დაყვანის უკვე ზემოთ გამოყენებულ წესს, ადვილი სანახავია, რომ g ფორმის ინერციის დადებითი ინდექსი ტოლია (9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დადებით კოეფიციენტთა რიცხვისა. აქედან და წინა თეორემიდან გამომდინარეობს ასეთი შედეგი:

f კვადრატულ ფორმას მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება (9) ფორმა თავის კანონიკურ სახედ, თუ f ფორმის რანგი არის r, ხოლო ამ ფორმის ინერციის დადებითი ინდექსი კი ემთხვევა დადებით კოეფიციენტთა რიცხვს (9)-ში.

დაშლადი კვადრატული ფორმები. თუ გადავამრავლებთ n ცვლადის მიმართ ნებისმიერ ორ წრფივ ფორმას

$$\varphi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad \psi = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n,$$

მივიღებთ, ცხადია, რაიმე კვადრატულ ფორმას. მაგრამ ყოველი კვადრატული ფორმა არ წარმოიდგინება ორი წრფივი ფორმის ნამრავლის სახით, და ჩვენ გვსურს გამოვიყვანოთ პირობები, რომლის დროსაც ამას ექნება ადგილი, ე. ი. რომლის დროსაც კვადრატული ფორმა *დაშლადია*.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ კომპლექსური კვადრატული ფორმა იშლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი რანგი ნაკლებია ან უდრის ორს. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ნამდვილი კვადრატული ფორმა იშლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი რანგი ან არ აღემატება ერთს, ან კიდევ იგი ტოლია ორისა, ხოლო სიგნატურა კი უდრის ნულს.

თავდაპირველად განვიხილოთ φ და ψ წრფივ ფორმათა ნამრავლი. თუ ამ ფორმათაგან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ მათი ნამრავლი იქნება ნულოვან კოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმა, ე. ი. მას ექნება რანგი 0. თუ φ და ψ წრფივი ფორმები პროპორციულია

$$\psi = c\varphi,$$

ამასთანავე $c \neq 0$ და φ ფორმა არანულოვანია; ვთქვათ, მაგალითად, a_1 კოეფიციენტი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა

$$y_1 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \quad y_i = x_i, \text{ როცა } i = 2, 3, \dots, n$$

$\varphi\psi$ კვადრატულ ფორმას მიიყვანს

$$\varphi\psi = c y_1^2$$

სახეზე. მარჯვნივ დგას კვადრატული ფორმა რანგით 1 და ამიტომ $\varphi\psi$ კვადრატულ ფორმასაც ექნება რანგი 1. ბოლოს, თუკი φ და ψ წრფივი ფორმები არ არიან პროპორციული, ვთქვათ, მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ წრფივი გარდაქმნა

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

$$y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$

$$y_i = x_i, \text{ როცა } i = 3, 4, \ldots, n$$

იქნება გადაუგვარებელი; იგი $\varphi\psi$ კვადრატულ ფორმას მიიყვანს სახეზე

$$\varphi\psi = y_1y_2.$$

მარჯვნივ დგას კვადრატული ფორმა რანგით 2, რომელსაც ნამდვილი კოეფიციენტების შემთხვევაში აქვს სიგნატურა 0.

გადავიდეთ შებრუნებული დებულების დამტკიცებაზე. რა თქმა უნდა, 0 რანგის მქონე კვადრატული ფორმა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორი ისეთი წრფივი ფორმის ნამრავლი, რომელთაგან ერთი ნულოვანია. შემდეგ 1 რანგის მქონე $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ კვადრატული ფორმა გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება

$$f = cy_1^2, \ c \neq 0,$$

სახეზე, ე. ი.

$$f = (cy_1)y_1$$

სახეზე. თუ გამოვსახავთ y_1-ს წრფივად $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის საშუალებით, მივიღებთ f ფორმის წარმოდგენას ორი წრფივი ფორმის ნამრავლის სახით. ბოლოს, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ნამდვილი კვადრატული ფორმა, რომლის რანგია 2 და სიგნატურა 0, გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება

$$f = y_1^2 - y_2^2$$

სახეზე; ამავე სახეზე შეგვიძლია დავიყვანოთ ნებისმიერი 2 რანგიანი კომპლექსური კვადრატული ფორმა. მაგრამ

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

სადაც მარჯვნივ, y_1 და y_2-ის შეცვლის შემდეგ მათი წრფივი გამოსახულებებით $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის საშუალებით, დადგება ორი წრფივი ფორმის ნამრავლი. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 28. დადებითად განსაზღვრული ფორმები

ნამდვილ კოეფიციენტებიან n უცნობიან f კვადრატულ ფორმას ეწოდება *დადებითად განსაზღვრული*, თუ იგი დაიყვანება ისეთ ნორმალურ სახეზე, რომელიც შედგება n *დადებითი* კვადრატისაგან, ე. ი. თუ ამ ფორმის რანგიც და ინერციის დადებითი ინდექსიც ტოლია უცნობთა რიცხვისა.

შემდეგი თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავახასიათოთ დადებითად განსაზღვრული ფორმები იმის გარეშე, რომ ისინი დავიყვანოთ ნორმალურ ან კანონიკურ სახეზე.

ნამდვილ კოეფიციენტებიანი f კვადრატული ფორმა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n უცნობის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინაა დადებითად განსაზღვრული, თუ ამ უცნობთა ყოველი ისეთი ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, ეს ფორმა იღებს დადებით მნიშვნელობებს.

დამტკიცება. ვთქვათ, f ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, ე. ი. დაიყვანება ნორმალურ სახეზე

$$f=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2, \tag{1}$$

ამასთანავე,

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

სადაც a_{ij} ნამდვილი კოეფიციენტები ნულისაგან განსხვავებულ დეტერმინანტს ქმნიან. თუ გვსურს ჩავსვათ f-ში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობანი, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ თავდაპირველად იგი შეგვიძლია ჩავსვათ (2)-ში, შემდეგ კი ყველა y_i-სათვის მიღებული მნიშვნელობანი ჩავსვათ (1)-ში. შევნიშნოთ, რომ $y_1, y_2, \ldots, y_n$-სათვის (2)-დან მიღებული მნიშვნელობანი არ შეიძლება ყველა ერთდროულად უდრიდეს ნულს, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0, \quad i=1, 2, \ldots, n$$

სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი, თუმცა მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. $y_1, y_2, \ldots, y_n$-სათვის მიღებულ მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (1)-ში, მივიღებთ f ფორმის მნიშვნელობას, რომელიც ტოლია n ნამდვილი რიცხვის კვადრატების ჯამისა, რომელთაგან ყველა არ უდრის ნულს, მაშასადამე, ეს მნიშვნელობა მკაცრად დადებითი იქნება.

პირიქით, ვუქვათ, f ფორმა არ არის დადებითად განსაზღვრული, ე. ი. მისი ან რანგი, ან ინერციის დადებითი ინდექსი ნაკლებია n-ზე. ეს ნიშნავს, რომ ამ ფორმის ნორმალურ სახეში, რომელზედაც იგი დაიყვანება, ვთქვათ, გადაუგვარებელი (2) წრფივი გარდაქმნით, ერთი მაინც ახალი უცნობის, მაგალითად y_n-ის, კვადრატი ან სავსებით არ შედის, ან შედის მინუს ნიშნით. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთათვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი ნამდვილი მნიშვნელობანი, რომ ყველა ისინი ნულს არ უდრიდეს და რომ f ფორმის მნიშვნელობა უცნობთა ამ მნიშვნელობებისათვის იყოს ნული ან უარყოფითიც კი. ასეთი იქნებიან, მაგალითად, $x_1, x_2, \ldots, x_n$-სათვის ის მნიშვნელობანი, რომლებსაც მივიღებთ, თუ კრამერის წესით ამოვხსნით წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომელიც მიღებულია (2)-დან, როცა $y_1=y_2=\ldots=y_{n-1}=0$, $y_n=1$. მართლაც, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ამ მნიშვნელობებისათვის f ფორმა უდრის ნულს, თუ y^2_n არ შედის ამ ფორმის ნორმალურ სახეში, და უდრის -1-ს, თუ y^2_n შედის ნორმალურ სახეში მინუს ნიშნით.

ახლა დამტკიცებული თეორემით ვსარგებლობთ ყველგან, სადაც გამოიყენება დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმები. მაგრამ მისი დახმარებით ფორმის კოეფიციენტების მიხედვით არ შეგვიძლია დავადგინოთ იქნება თუ არა ეს ფორმა დადებითად განსაზღვრული. ამ მიზანს ემსახურება მეორე თეორემა რომელსაც ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ მას შემდეგ, როცა შემოვიღებთ ერთ დამხმარე ცნებას.

ვთქვათ, მოცემულია f კვადრატული ფორმა n უცნობის მიმართ მატრიცით $A=(a_{ij})$. ამ მატრიცის $1, 2, \ldots, n$ რიგის მინორებს, რომელნიც განლაგებული არიან მის მარცხენა ზედა კუთხეში, ე. ი. მინორებს

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

რომელთაგან უკანასკნელი ემთხვევა, ცხადია, A მატრიცის დეტერმინანტს, ეწოდება f ფორმის მთავარი მინორები.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

ნამდვილ კოეფიციენტებიანი n უცნობიანი f კვადრატული ფორმა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის დადებითად განსაზღვრული, თუ მისი ყველა მთავარი მინორი მკაცრად დადებითია.

დამტკიცება. როცა $n=1$ თეორემა სამართლიანია, რადგან ამ შემთხვევაში ფორმას აქვს სახე ax^2 და ამიტომ დადებითად განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $a>0$. ამიტომ თეორემას დავამტკიცებთ n უცნობის შემთხვევაში იმ დაშვებით, რომ იგი უკვე დამტკიცებულია კვადრატული ფორმებისათვის $n-1$ უცნობის მიმართ.

თავდაპირველად გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნა:

თუ f კვადრატულ ფორმაზე ნამდვილი კოეფიციენტებით, რომლებიც ადგენენ A მატრიცს, შესრულებულია გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა ნამდვილი Q მატრიცით, მაშინ ფორმის დეტერმინანტის (ე. ი. მისი მატრიცის დეტერმინანტის) ნიშანი არ იცვლება.

მართლაც, გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ კვადრატულ ფორმას მატრიცით $Q'AQ$, მაგრამ, $|Q'|=|Q|$ ტოლობის გამო,

$$|Q'AQ|=|Q'|\cdot|A|\cdot|Q|=|A|\cdot|Q|^2,$$

ე. ი. $|A|$ დეტერმინანტი მრავლდება დადებით რიცხვზე.

ახლა, ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

მისი ჩაწერა შეიძლება

$$f=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2 \tag{3}$$

სახით, სადაც φ იქნება კვადრატული ფორმა $n-1$ უცნობის მიმართ, რომელიც შედგება f ფორმის იმ წევრებისაგან, რომლებშიც არ შედის x_n უცნობი. ცხადია, φ ფორმის მთავარი მინორები ემთხვევიან f ფორმის ყველა მთავარ მინორს, გარდა უკანასკნელისა.

ვთქვათ, f ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, ამ შემთხვევაში φ ფორმაც იქნება დადებითად განსაზღვრული: რომ არსებობდნენ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ უცნობთა ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც ყველა არ უდრის ნულს და რომელთათვისაც φ ფორმა იღებს არამკაცრად დადებით მნიშვნელობას, მაშინ, თუ ვიგულისხმებთ დამატებით, რომ $x_n=0$, მივიღებთ, (3)-ის გამო, f ფორმის აგრეთვე არამკაცრად დადებით მნიშვნელობას, თუმც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ყველა მნიშვნელობა არ უდრის ნულს. ამიტომ, ინდუქციური დაშვების ძალით, φ ფორმის ყველა მთავარი მინორი, ე. ი. f ფორმის ყველა მთავარი მინორი, გარდა უკანასკნელისა, მკაცრად დადებითია. რაც შეეხება f ფორმის უკანასკნელ მთავარ მინორს, ე. ი. თვით A მატრიცის დეტერმინანტს, მისი დადებითობა გამომდინარეობს შემდეგი მოსაზრებიდან: f ფორმა, მისი დადებითად განსაზღვრულობის გამო, გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით დაიყვანება ნორმალურ სახეზე, რომელიც შედგება n დადებითი კვადრატისაგან. ამ ნორმალური სახის დეტერმინანტი მკაცრად დადებითია და ამიტომ, ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის გამო, დადებითია თვით f ფორმის დეტერმინანტიც.

ვთქვათ ახლა, f ფორმის ყველა მთავარი მინორი მკაცრად დადებითია. აქედან გამომდინარეობს φ ფორმის ყველა მთავარი მინორის დადებითობა, ე. ი., ინდუქციური დაშვებით, ამ ფორმის დადებითად განსაზღვრულობა. მაშასადამე, არსებობს $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ უცნობთა ისეთი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა, რომელიც φ ფორმას დაიყვანს $n-1$ დადებით კვადრატთა ჯამის სახეზე $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ახალ უცნობთა მიმართ. ეს წრფივი გარდაქმნა შეიძლება შევავსოთ ყველა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობის (გადაუგვარებელ) წრფივ გარდაქმნამდე, თუ ვიგულისხმებთ, რომ $x_n=y_n$. (3)-ის ძალით, f ფორმა მითითებული გარდაქმნით დაიყვანება

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in}y_i y_n+b_{nn}y_n^2 \tag{4}$$

სახეზე; ჩვენთვის b_{in} კოეფიციენტთა ზუსტი გამოსახულებანი არაა არსებითი. რადგან

$$y_i^2+2b_{in}y_i y_n=(y_i+b_{in}y_n)^2-b_{in}^2y_n^2,$$

ამიტომ გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა

$$\begin{aligned} z_i &= y_i+b_{in}y_n, \quad i=1, 2, \ldots, n-1, \\ z_n &= \qquad y_n, \end{aligned}$$

(4)-ის ძალით, f ფორმას დაიყვანს კანონიკურ სახეზე

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2+cz_n^2. \tag{5}$$

f ფორმის დადებითად განსაზღვრულობის დასამტკიცებლად დაგვრჩა c რიცხვის დადებითობის დამტკიცება. (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი ფორმის დეტერმინანტი უდრის c-ს. მაგრამ ეს დეტერმინანტი უნდა იყოს დადებითი, რადგან (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიიღება f ფორმიდან ორი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნით, ხოლო f ფორმის დეტერმინანტი დადებითი იყო, როგორც ამ ფორმის მთავარ მინორთაგან უკანასკნელი.

თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი: 1. კვადრატული ფორმა

$$f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

დადებითად განსაზღვრულია, რადგან მისი მთავარი მინორები

$$5,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1$$

დადებითია.

2. კვადრატული ფორმა

$$f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

არ იქნება დადებითად განსაზღვრული, რადგან მისი მეორე მთავარი მინორი უარყოფითია:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

შევნიშნოთ, რომ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმების მსგავსად შეგვიძლია შემოვიტანოთ უ ა რ ყ ო ფ ი თ ა დ გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ ო რ მ ე ბ ი, ე. ი. ნამდვილი კოეფიციენტებიანი ისეთი გადაუგვარებელი კვადრატული ფორმები, რომელთა ნორმალური სახე მოიცავს უცნობთა მხოლოდ უარყოფით კვადრატებს. გადაგვარებულ კვადრატულ ფორმებს, რომელთა ნორმალური სახე შედგება ერთი ნიშნის კვადრატებისაგან, ზოგჯერ უწოდებენ ნ ა ხ ე ვ რ ა დ გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ს. ბოლოს, გ ა ნ უ ზ ღ ვ რ ე ლ ი იქნებიან ისეთი კვადრატული ფორმები, რომელთა ნორმალური სახე მოიცავს უცნობთა როგორც დადებით, ასევე უარყოფით კვადრატებს.

თავი მეშვიდე

წრფივი სივრცეები

§ 29. წრფივი სივრცის განმარტება. იზომორფიზმი

მე-8 პარაგრაფში მოცემული n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის განმარტება იწყებოდა n-განზომილებიანი ვექტორის, როგორც n რიცხვთა დალაგებული სისტემის, განმარტებით. შემდეგ, n-განზომილებიანი ვექტორებისათვის შემოვიტანეთ შეკრება და რიცხვებზე გამრავლება, რამაც მიგვიყვანა n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ცნებამდე. სიბრტყეზე ან სამგანზომილებიან სივრცეში კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი მონაკვეთ-ვექტორების ერთობლიობები წარმოადგენენ ვექტორული სივრცის პირველ მაგალითები. მაგრამ, როდესაც ამ მაგალითებს ვხვდებით გეომეტრიის კურსში, ჩვენ ყოველთვის საჭიროდ არ ვთვლით ვექტორები წარმოვიდგინოთ კომპონენტების საშუალებით რომელიმე ფიქსირებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რადგან ვექტორების როგორც შეკრება, ისე მათი სკალარზე გამრავლება განისაზღვრება გეომეტრიულად, კოორდინატთა სისტემის ამორჩევისაგან დამოუკიდებლად. სახელდობრ, ვექტორების შეკრება სიბრტყეზე და სივრცეში ხდება პარალელოგრამის წესით, ხოლო ვექტორის α რიცხვზე გამრავლება ნიშნავს მის α-ჯერ გაჭიმვას (ვექტორის მიმართულება უნდა შეიცვალოს საწინააღმდეგო მიმართულებით, როცა α უარყოფითია). მიზანშეწონილია ზოგად შემთხვევაშიც მოვიყვანოთ ვექტორული სივრცის „უკოორდინატო“ განმარტება, ე. ი. განმარტება, რომელიც არ მოითხოვს ვექტორების მოცემას რიცხვთა დალაგებული სისტემების საშუალებით. ახლა მოყვანილი იქნება ასეთი განმარტება. ეს განმარტება არის აქსიომატიკური: მასში არაფერი იქნება ნათქვამი ცალკეული ვექტორის თვისებებზე, მაგრამ იქნება ჩამოთვლილი ის თვისებები, რომლებიც უნდა ჰქონდეთ ვექტორებზე მომქმედ ოპერაციებს.

ვთქვათ, მოცემულია V სიმრავლე; მის ელემენტებს აღვნიშნავთ მცირე ლათინური ასოებით: $a, b, c, \ldots$[1]. ვთქვათ, შემდეგ, სიმრავლეში განმარტებულია

[1] იმისაგან განსხვავებით, რაც მიღებული იყო მე-2 თავში, ამ თავსა და შემდეგ თავში ვექტორებს აღვნიშნავთ მცირე ლათინური ასოებით, ხოლო რიცხვებს—მცირე ბერძნული ასოებით.

შეკრების ოპერაცია, რომელიც a, b ელემენტების ყოველ წყვილს V-დან უთანადებს ცალსახად განსაზღვრულ $a+b$ ელემენტს V-დან, რომელსაც მათი ჯამი ეწოდება, და ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია, ამასთან αa ნამრავლი a ელემენტისა α რიცხვზე განსაზღვრულია ცალსახად და ეკუთვნის V-ს.

V სიმრავლის ელემენტებს ეწოდებათ ვექტორები, ხოლო თვითონ V-ს — ნამდვილი წრფივი (ანუ ვექტორული, ანუ აფინური) სივრცე, თუ აღნიშნულ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი I—VIII თვისებები:

I. შეკრება კომუტატურია, $a+b=b+a$.

II. შეკრება ასოციაციურია, $(a+b)+c=a+(b+c)$.

III. V-ში არსებობს ნულოვანი 0 ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $a+0=a$ ყველა a-სათვის V-დან.

თუ ვისარგებლებთ I-ით, ადვილად მტკიცდება ნულოვანი ელემენტის ერთადერთობა: თუ 0_1 და 0_2 — ორი ნულოვანი ელემენტია, მაშინ

$$0_1+0_2=0_1,$$
$$0_1+0_2=0_2+0_1=0_2,$$

საიდანაც $0_1=0_2$.

IV. ყოველი a ელემენტისათვის V-დან არსებობს მოპირდაპირე $-a$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $a+(-a)=0$.

II და I-ის გამო ადვილად მოწმდება მოპირდაპირე ელემენტის ერთადერთობა: თუ $(-a)_1$ და $(-a)_2$ a-ს ორი მოპირდაპირე ელემენტია, მაშინ

$$(-a)_1+[a+(-a)_2]=(-a)_1+0=(-a)_1,$$
$$[(-a_1)+a]+(-a)_2=0+(-a)_2=(-a)_2,$$

საიდანაც $(-a)_1=(-a)_2$.

I—IV აქსიომებიდან მიიღება $a-b$ სხვაობის არსებობა და ერთადერთობა, ე. ი. ისეთი ელემენტისა, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$b+x=a. \tag{1}$$

მართლაც, შეიძლება დავუშვათ, რომ

$$a-b=a+(-b),$$

ვინაიდან

$$b+[a+(-b)]=[b+(-b)]+a=0+a=a.$$

ხოლო, თუ კიდევ არსებობს ისეთი c ელემენტი, რომელიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებს, ე. ი.

$$b+c=a,$$

მაშინ, თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ $-b$ ელემენტს, მივიღებთ, რომ

$$c=a+(-b).$$

შემდეგი $V-VIII$ აქსიომები (შეად. § 8) აკავშირებენ რიცხვზე გამრავლებას შეკრებასთან და რიცხვებზე ოპერაციებთან. სახელდობრ, ნებისმიერი a, b ელემენტებისათვის V-დან, ნებისმიერი ნამდვილი α, β რიცხვებისათვის და ნამდვილი 1 რიცხვისათვის ადგილი უნდა ჰქონდეთ ტოლობებს:

V. $$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b;$$

VI. $$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a;$$

VII. $$(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a);$$

VIII. $$1\cdot a=a$$

მივუთითოთ ამ აქსიომებიდან გამომდინარე ზოგიერთ უმარტივეს შედეგზე.

[1]. $$\alpha\cdot 0=0.$$

მართლაც, რომელიმე a-სათვის V-დან

$$\alpha a=\alpha(a+0)=\alpha a+\alpha\cdot 0,$$

ე. ი.

$$\alpha\cdot 0=\alpha a-\alpha a=\alpha a+[-(\alpha a)]=0.$$

[2]. $$0\cdot a=0,$$

სადაც მარცხნივ დგას რიცხვი ნული, ხოლო მარჯვნივ—V-ის ნულოვანი ელემენტი.

დამტკიცებისათვის ავიღოთ ნებისმიერი α რიცხვი. მაშინ

$$\alpha a=(\alpha+0)a=\alpha a+0\cdot a,$$

საიდანაც

$$0\cdot a=\alpha a-\alpha a=0.$$

[3]. თუ $\alpha a=0$, მაშინ ან $\alpha=0$, ან $a=0$.

მართლაც, თუ $\alpha\neq 0$, ე. ი. α^{-1} რიცხვი არსებობს, მაშინ

$$a=1\cdot a=(\alpha^{-1}\alpha)a=\alpha^{-1}(\alpha a)=\alpha^{-1}\cdot 0=0.$$

[4]. $$\alpha(-a)=-\alpha a.$$

მართლაც,

$$\alpha a+\alpha(-a)=\alpha[a+(-a)]=\alpha\cdot 0=0,$$

ე. ი. $\alpha(-a)$ ელემენტი არის αa ელემენტის მოპირდაპირე.

[5]. $$(-\alpha)a=-\alpha a.$$

მართლაც,

$$\alpha a+(-\alpha)a=[\alpha+(-\alpha)]a=0\cdot a=0,$$

ე. ი. $(-\alpha)a$ ელემენტი არის αa ელემენტის მოპირდაპირე.

[6]. $$\alpha(a-b)=\alpha a-\alpha b.$$

მართლაც, [4]-ის თანახმად,

$$\alpha(a-b)=\alpha[a+(-b)]=\alpha a+\alpha(-b)=\alpha a+(-\alpha b)=\alpha a-\alpha b.$$

[7]. $$(\alpha-\beta)a=\alpha a-\beta a.$$

მართლაც,

$$(\alpha-\beta)a=[\alpha+(-\beta)]a=\alpha a+(-\beta)a=\alpha a+(-\beta)a=\alpha a-\beta a.$$

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ ჩამოთვლილ აქსიომებს და მათ შედეგებს შემდეგში გამოვიყენებთ სპეციალური აღნიშვნის გარეშე.

ზემოთ მოყვანილია ნამდვილი წრფივი სივრცის განმარტება. თუ დავუშვებდით, რომ V სიმრავლეში განმარტებულია გამრავლება არა მარტო ნამდვილ, არამედ ნებისმიერ კომპლექსურ რიცხვებზეც, მაშინ I—VIII აქსიომების შენარჩუნებით მივიღებდით **კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ი ს** განმარტებას. გარკვეულობისათვის ქვემოთ განიხილება ნამდვილი წრფივი სივრცეები, მაგრამ რაც იქნება ნათქვამი ამ თავში სიტყვა სიტყვით გადაიტანება კომპლექსური წრფივი სივრცეების შემთხვევაზე.

ადვილად შეიძლება ნამდვილი წრფივი სივრცეების მაგალითების მოყვანა. ასეთები იქნებიან, უწინარეს ყოვლისა, ის n-განზომილებიანი ნამდვილი ვექტორული სივრცეები, შედგენილი სტრიქონ-ვექტორებისაგან, რომლებიც შეისწავლებოდნენ მე-2 თავში. წრფივ სივრცეებს წარმოადგენენ აგრეთვე სიბრტყეზე ან სამგანზომილებიან სივრცეში კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი მონაკვეთ-ვექტორების სიმრავლეები, თუ შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები გაგებულია იმ გეომეტრიული აზრით, რომელიც მოყვანილ იქნა პარაგრაფის დასაწყისში.

არსებობენ აგრეთვე ე. წ. „უსასრულოგანზომილებიანი" წრფივი სივრცეების მაგალითები. განვიხილოთ ნამდვილი რიცხვების ყველა შესაძლო მიმდევრობა; მათ აქვთ სახე

$$a=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots).$$

მიმდევრობებზე ოპერაციებს ვაწარმოებთ კომპონენტობრივად: თუ

$$b=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots),$$

მაშინ

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n, \ldots);$$

მეორე მხრივ, ნებისმიერი ნამდვილი γ რიცხვისათვის

$$\gamma a=(\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n, \ldots)$$

სრულდება ყველა I—VIII აქსიომა, ე. ი. ვღებულობთ ნამდვილ წრფივ სივრცეს.

უსასრულოგანზომილებიანი სივრცის მაგალითს წარმოადგენს აგრეთვე ნამდვილი ცვლადის ყოველგვარ ნამდვილ ფუნქციათა სიმრავლე, თუ ფუნქციების შეკრება და მათი ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება გვესმის ისე, როგორც ეს ფუნქციათა თეორიაშია მიღებული, ე. ი. როგორც ფუნქციათა მნიშვნელობების შეკრება ან რიცხვზე გამრავლება დამოუკიდებელი ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

იზომორფიზმი. ჩვენი უახლოესი მიზანი იქნება ყველა წრფივი სივრციდან გამოვყოთ ისეთები, რომლებსაც, ბუნებრივია, ვუწოდოთ სასრულოგანზომილებიანი. შემოვიტანოთ ჯერ ერთი ზოგადი ცნება,

წრფივი სივრცის განმარტებაში ლაპარაკი იყო ვექტორებზე, ოპერაციების თვისებებზე, მაგრამ არაფერი არ იყო ნათქვამი თვით ამ ვექტორების თვისებებზე. ამის გამო შეიძლება მოხდეს, რომ რომელიმე ორი მოცემული წრფივი სივრცის ვექტორები საესებით განსხვავდებიან თავისი ბუნებით ერთმანეთისაგან, მაგრამ ეს ორი სივრცე ოპერაციების თვისებების თვალსაზრისით ერთმანეთისაგან არ განირჩევა. ზუსტი განმარტება ასეთია:

ორ ნამდვილ წრფივ V და V' სივრცეს ეწოდება **იზომორფული**, თუ მათ ვექტორებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა თანადობა— ყოველ a ვექტორს V-დან ეთანადება a' ვექტორი V'-დან, a ვექტორის **ანასახი**, ამასთან განსხვავებულ ვექტორებს V-დან აქვთ განსხვავებული ანასახები და V'-ის ყოველი ვექტორი წარმოადგენს V-ს რომელიმე ვექტორის ანასახს,—და თუ ამ თანადობის დროს **ორი ვექტორის ჯამის ანასახი არის ამ ვექტორების ანასახების ჯამი**,

$$(a+b)'=a'+b', \tag{2}$$

ხოლო ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ანასახი არის ამ ვექტორის ანასახის ამავე რიცხვზე ნამრავლი,

$$(\alpha a)'=\alpha a'. \tag{3}$$

აღვნიშნოთ, რომ V და V' სივრცეებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობას, რომელიც (2) და (3) პირობებს აკმაყოფილებს, ეწოდება **იზომორფული თანადობა**.

ასე მაგალითად, სიბრტყეზე კოორდინატთა სათავიდან გამომავალ მონაკვეთ-ვექტორთა სივრცე იზომორფულია ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილებისაგან შედგენილი ორგანზომილებიანი ვექტორული სივრცისა: ამ სივრცეებს შორის მივიღებთ იზომორფულ თანადობას, თუ სიბრტყეზე დავაფიქსირებთ რომელიმე კოორდინატთა სისტემას და ყოველ მონაკვეთ-ვექტორს შევუთანადებთ მისი კოორდინატების დალაგებულ წყვილს.

დავამტკიცოთ წრფივი სივრცეების იზომორფიზმის შემდეგი თვისება: **V და V' სივრცეებს შორის იზომორფული თანადობის დროს V სივრცის ნულის ანასახია V' სივრცის ნული.**

ვთქვათ, მართლაც, a არის V-ს რაიმე ვექტორი, ხოლო a'—მისი ანასახი V'-ში. მაშინ, (2)-ის გამო,

$$a'=(a+0)'=a'+0',$$

ე. ი. $0'$ იქნება V' სივრცის ნული.

§ 30. სასრულგანზომილებიანი სივრცეები. ბაზისები

როგორც მკითხველს ადვილად შეუძლია შეამოწმოს, მე-9 პარაგრაფში მოცემული სტრიქონ-ვექტორთა **წრფივი დამოკიდებულების** როგორც ორივე განმარტება, ისე მათი ექვივალენტობის დამტკიცებაც იყენებენ მხოლოდ ოპერაციებს ვექტორებზე და ამიტომ შესაძლებელია მათი გადატანა ნებისმიერი წრფივი სივრცეების შემთხვევაზე. მაშასადამე, აქსიომატიკურად

განსაზღვრულ წრფივ სივრცეებში შეიძლება ლაპარაკი ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემებზე, მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემებზე, თუ ასეთები არსებობენ, და ა. შ.

თუ წრფივი V და V' სივრცეები იზომორფულია, მაშინ V-ს $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წრფივად დამოკიდებულია მათი V'-ში $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ ანასახების სისტემა.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $a \to a'$ თანადობა (ყველა a-სათვის V-დან) არის იზომორფული თანადობა V და V'-ს შორის, მაშინ შებრუნებული $a' \to a$ თანადობაც იქნება იზომორფული. ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_1, a_2, \ldots, a_k$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. ვთქვათ, არსებობს ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, რომ

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0.$$

განხილული იზომორფიზმის დროს ტოლობის მარჯვენა მხარის ანასახია, როგორც ვიცით, V' სივრცის $0'$ ნული. თუ ავიღებთ მარცხენა მხარის ანასახს და რამდენჯერმე გამოვიყენებთ (2)-ს და (3)-ს, მივიღებთ

$$\alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a_2' + \ldots + \alpha_k a'_k = 0',$$

ე. ი. $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ სისტემა აგრეთვე აღმოჩნდა წრფივად დამოკიდებული.

სასრულოგანზომილებიანი სივრცეები. წრფივ V სივრცეს ეწოდება *სასრულოგანზომილებიანი*, თუ მასში შეიძლება მოინახოს ვექტორთა სასრული მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა; ვექტორთა ყოველ ასეთ სისტემას ეწოდება V სივრცის *ბაზისი*.

სასრულოგანზომილებიან წრფივ სივრცეს შეიძლება გააჩნდეს მრავალი განსხვავებული ბაზისები. ასე მაგალითად, სიბრტყეზე მონაკვეთ-ვექტორების სივრცეში ბაზისად გამოდგება ნულისაგან განსხვავებული და ერთ წრფეზე არამდებარე ვექტორთა ნებისმიერი წყვილი. შევნიშნოთ, რომ ჩვენი განმარტება სასრულოგანზომილებიანი სივრცისა ჯერ არ იძლევა პასუხს კითხვაზე, შეიძლება თუ არა ამ სივრცეში იარსებონ ბაზისებმა, რომლებიც ვექტორთა სხვადასხვა რიცხვისაგან შედგებიან. უფრო მეტიც, შეგვეძლო იმის დაშვებაც კი, რომ ზოგიერთ სასრულოგანზომილებიან სივრცეში არსებობენ ვექტორთა რაგინდ დიდი რიცხვისაგან შედგენილი ბაზისები. ახლა ჩვენ შევუდგებით იმის გარკვევას, თუ რა მდგომარეობაა სინამდვილეში.

ვთქვათ წრფივ V სივრცეს აქვს

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{1}$$

ბაზისი, რომელიც n ვექტორისაგან შედგება. თუ a არის V-ს ნებისმიერი ვექტორი, მაშინ წრფივად დამოუკიდებელი (1) სისტემის მაქსიმალურობიდან გამომდინარეობს, რომ a წრფივად გამოისახება ამ სისტემის საშუალებით,

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n. \tag{2}$$

მეორე მხრივ, (1) სისტემის წრფივი დამოუკიდებლობის გამო, a ვექტორისათვის (2) გამოსახულება იქნება ერთადერთი: თუ

$$a = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \ldots + \alpha'_n e_n,$$

მაშინ

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) e_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n) e_n = 0,$$

საიდანაც

$$\alpha_i = \alpha'_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

ამრიგად, a ვექტორს ცალსახად ეთანადება (1) ბაზისის საშუალებით მისი (2) გამოსახულების კოეფიციენტების

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{3}$$

სტრიქონი ანუ, როგორც ვიტყვით, (1) ბაზისში მისი კოორდინატთა სტრიქონი. პირიქით, (3) სახის ყოველი სტრიქონი, ე. ი. ყოველი n-განზომილებიანი ვექტორი მე-2 თავის აზრით, არის (1) ბაზისში კოორდინატთა სტრიქონი V სივრცის რომელიმე ვექტორისათვის, სახელდობრ იმ ვექტორისათვის, რომელიც ჩაიწერება (2) სახით (1) ბაზისის საშუალებით.

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ურთიერთცალსახა თანადობა სივრცის ყველა ვექტორსა და სტრიქონთა n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ყველა ვექტორს შორის. ვაჩვენოთ, რომ ეს თანადობა, რომელიც, გასაგებია, დამოკიდებულია (1) ბაზისის არჩევაზე, არის იზომორფიზმი.

V სივრცეში ავიღოთ, გარდა a ვექტორისა, რომელიც (1) ბაზისის საშუალებით გამოისახება (2) სახით, კიდევ b ვექტორი, რომლის გამოსახულება (1) ბაზისის საშუალებით არის

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n.$$

მაშინ

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$

ე. ი. a და b ვექტორების ჯამს შეესაბამება (1) ბაზისში მათი კოორდინატთა სტრიქონების ჯამი. მეორე მხრივ,

$$\gamma a = (\gamma \alpha_1) e_1 + (\gamma \alpha_2) e_2 + \ldots + (\gamma \alpha_n) e_n,$$

ე. ი. a ვექტორის ნამრავლს γ რიცხვზე შეესაბამება (1) ბაზისში მისი კოორდინატთა სტრიქონის ნამრავლი ამავე γ რიცხვზე.

ამით დამტკიცდა შემდეგი თეორემა:

n ვექტორისაგან შედგენილი ბაზისის მქონე ყოველი წრფივი სივრცე იზომორფულია სტრიქონთა n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცისა.

როგორც ვიცით, წრფივ სივრცეებს შორის იზომორფული თანადობის დროს ვექტორთა წრფივად დამოკიდებული სისტემა გადადის წრფივად დამოკიდებულ სისტემაში და პირიქით. ამიტომ წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა გადადის წრფივად დამოუკიდებელში. აქედან გამომდინარეობს, რომ იზომორფული თანადობის დროს ბაზისი გადადის ბაზისში.

მართლაც, ვთქვათ, V და V' სივრცეებს შორის იზომორფული თანადობის დროს V სივრცის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი გადადის V' სივრცის $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ვექტორების სისტემაში, რომელიც თუმცა წრფივად დამოუკიდებელია, მაგრამ

არ არის მაქსიმალური. მაშასადამე V'-ში შეიძლება მოინახოს ისეთი f' ვექტორი, რომ $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, f'$ სისტემა დარჩება წრფივად დამოუკიდებელი. მაგრამ f' ვექტორი არის V-ს რომელიმე f ვექტორის ანასახი განხილული იზომორფიზმის დროს. ვღებულობთ, რომ $e_1, e_2, \ldots, e_n, f$ ვექტორთა სისტემა უნდა იყოს წრფივად დამოუკიდებელი, რაც ეწინააღმდეგება ბაზისის განმარტებას.

შემდეგ, ჩვენ ვიცით (იხ. § 9), რომ სტრიქონთა n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში ყველა მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა შედგება n ვექტორისაგან, რომ $n+1$ ვექტორისაგან შედგენილი ყოველი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და რომ ვექტორების ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა შედის რომელიმე მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემაში. თუ გამოვიყენებთ იზომორფული თანადობების ზემოთ დამყარებულ თვისებებს, მივალთ შემდეგ შედეგებამდე:

სასრულოგანზომილებიანი წრფივი V სივრცის ყველა ბაზისი შედგება ვექტორთა ერთი და იგივე რიცხვისაგან. თუ ეს რიცხვი უდრის n-ს, მაშინ V-ს ვუწოდებთ *n-განზომილებიან წრფივ სივრცეს*, ხოლო n რიცხვს — ამ სივრცის *განზომილებას*.

n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის $n+1$ ვექტორისაგან შედგენილი ყოველი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ვექტორთა ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა შედის ამ სივრცის რომელიმე ბაზისში.

ახლა ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნამდვილი წრფივი სივრცეების ზემოთ მოყვანილი მაგალითები — მიმდევრობების სივრცე და ფუნქციების სივრცე — არ არიან სასრულოგანზომილებიანი სივრცეები: თითოეულ ამ სივრცეთაგანში მკითხველი ადვილად მონახავს წრფივად დამოუკიდებელ სისტემებს, რომლებიც შედგებიან ვექტორთა რაგინდ დიდი რიცხვისაგან.

ბაზისებს შორის კავშირი. შესწავლის ობიექტს ჩვენთვის სასრულოგანზომილებიანი წრფივი სივრცეები წარმოადგენენ. გასაგებია, რომ n-განზომილებიანი წრფივი სივრცეების შესწავლისას სინამდვილეში ვსწავლობთ სტრიქონთა იმ n განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს, რომელიც შემოტანილი იყო მე-2 თავში. მაგრამ ადრე ამ სივრცეში გამოყოფილი იყო ერთი ბაზისი — სახელდობრ ბაზისი, შედგენილი ერთეულოვანი ვექტორებისაგან, ე. ი. ვექტორებისაგან, რომელთა ერთი კოორდინატი ერთის ტოლია, ხოლო ყველა დანარჩენი ნულია — და ამ სივრცის ყველა ვექტორი მოცემული იყო ამ ბაზისში თავისი კოორდინატების სტრიქონით; ახლა კი ჩვენთვის სივრცის ყველა ბაზისი ტოლფასია.

ვნახოთ, თუ რამდენად ბევრი ბაზისის მონახვა შეიძლება n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში და როგორ არიან ეს ბაზისები დაკავშირებული ერთმანეთთან.

ვთქვათ, n-განზომილებიან წრფივ V სივრცეში მოცემულია ბაზისები

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{4}$$

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n. \tag{5}$$

(5) ბაზისის ყოველი ვექტორი, ისევე როგორც V სივრცის ნებისმიერი ვექტორი, ცალსახად ჩაიწერება (4) ბაზის საშუალებით

$$e'_i=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}e_j, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

$$T=\begin{pmatrix} \tau_{11} \ldots \tau_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \tau_{n1} \ldots \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცს, რომლის სტრიქონები წარმოადგენენ (5) ვექტორების კოორდინატთა სტრიქონებს (4) ბაზისში, ეწოდება (4) ბაზისიდან (5) ბაზისზე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს მ ა ტ რ ი ც ი.

კავშირი (4) და (5) ბაზისებსა და გადასვლის T მატრიცს შორის შეიძლება ჩაიწეროს, (6)-ის გამო,

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

მატრიცული ტოლობის სახით ან, თუ სვეტებად დაწერილ (4) და (5) ბაზისებს აღვნიშნავთ შესაბამისად e-თი და e'-ით,

$$e'=Te$$

სახით.

მეორე მხრივ, თუ T' არის (5) ბაზისიდან (4) ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, მაშინ

$$e=T'e'.$$

აქედან

$$e=(T'T)e,$$
$$e'=(TT')e',$$

ე. ი., e და e' ბაზისების წრფივად დამოუკიდებლობის გამო,

$$T'T=TT'=E,$$

საიდანაც

$$T'=T^{-1}.$$

ამით დამტკიცდა, რომ ე რ თ ი ბ ა ზ ი ს ი დ ა ნ მ ე ო რ ე ბ ა ზ ი ს ზ ე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს მ ა ტ რ ი ც ი ყ ო ვ ე ლ თ ვ ი ს გ ა დ ა უ გ ვ ა რ ე ბ ე ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი ა.

ყ ო ვ ე ლ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ა ნ ი n-უ რ ი რ ი გ ი ს გ ა დ ა უ გ ვ ა რ ე ბ ე ლ ი კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი ა რ ი ს n-გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ი ს მ ო ც ე მ უ ლ ი ბ ა ზ ი ს ი დ ა ნ რ ო მ ე ლ ი მ ე ს ხ ვ ა ბ ა ზ ი ს ზ ე გ ა დ ა ს ვ ლ ი ს მ ა ტ რ ი ც ი.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია (4) ბაზისი და n-ური რიგის გადაუგვარებელი T მატრიცი. (5)-ად ავიღოთ სისტემა ვექტორებისა, რომელთა

კოორდინატთა სტრიქონებია (4) ბაზისში T მატრიცის სტრიქონები; მაშასადამე, ადგილი აქვს (7) ტოლობას. (5) ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია — მათ შორის წრფივი დამოკიდებულება გამოიწვევდა T მატრიცის სტრიქონთა წრფივ დამოკიდებულებას, რაც ეწინააღმდეგება მის გადაუგვარებლობას. ამიტომ (5) სისტემა, როგორც წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, რომელიც შედგება n ვექტორისაგან, წარმოადგენს ჩვენი სივრცის ბაზისს, ხოლო T მატრიცი არის (4) ბაზისიდან (5) ბაზისზე გადასვლის მატრიცი.

ვხედავთ, რომ n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში შეიძლება მოინახოს იმდენი განსხვავებული ბაზისი, რამდენი განსხვავებული n-ური რიგის გადაუგვარებელი კვადრატული მატრიციც არსებობს. მართალია, მაშინ ორი ბაზისი, შედგენილი ერთი და იგივე ვექტორებისაგან, ოღონდ სხვა თანმიმდევრობით ჩაწერილი, ითვლება განსხვავებულად.

ვექტორის კოორდინატთა გარდაქმნა. ვთქვათ, n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში მოცემულია (4) და (5) ბაზისები $T=(\tau_{ij})$ გადასვლის მატრიცით,

$$e' = Te.$$

მოვნახოთ კავშირი ნებისმიერი a ვექტორის ამ ბაზისებში კოორდინატთა სტრიქონებს შორის.

ვთქვათ,

$$a=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \tag{8}$$

$$a=\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i.$$

თუ გამოვიყენებთ (6)-ს, მივიღებთ:

$$a=\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{ij} \right) e_j.$$

თუ (8)-ს შევადარებთ და გამოვიყენებთ ბაზისის საშუალებით ვექტორის ჩაწერის ერთადერთობას, მივიღებთ:

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{ij},\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

ე. ი. ადგილი აქვს

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)T$$

მატრიცულ ტოლობას.

ამრიგად, *e ბაზისში a ვექტორის კოორდინატთა სტრიქონი უდრის e' ბაზისში ამ ვექტორის კოორდინატთა სტრიქონს, მარჯვნიდან გამრავლებულს e ბაზისიდან e' ბაზისზე გადასვლის მატრიცზე.*

გასაგებია, აქედან გამომდინარეობს

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)T^{-1}$$

ტოლობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ სამგანზომილებიანი ნამდვილი წრფივი სივრცე

$$e_1, e_2, e_3 \tag{9}$$

ბაზისით.

$$\left.\begin{aligned} e'_1&=5e_1-e_2-2e_3,\\ e'_2&=2e_1+3e_2,\\ e'_3&=-2e_1+e_2+e_3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ვექტორები აგრეთვე ქმნიან ამ სივრცის ბაზისს, ამასთან (9)-დან (10)-ზე გადასვლის მატრიცია

$$T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}.$$

ამიტომ (10) ბაზისში

$$a=e_1+4e_2-e_3$$

ვექტორის კოორდინატთა სტრიქონია

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)=(1, 4, -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -4\\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13, 6, -27),$$

ე. ი.

$$a=-13e'_1+6e'_2-27e'_3.$$

§ 31. წრფივი გარდაქმნები

მე-3 თავში ჩვენ უკვე შევხვდით უცნობთა წრფივი გარდაქმნის ცნებას. ცნება, რომელსაც ახლა შემოვიტანთ, ატარებს ამავე სახელწოდებას, მაგრამ სხვა ხასიათი აქვს. თუმცა, შეიძლებოდა მიგვეთითებინა ზოგიერთ კავშირზე ამ ორ ერთსახელა ცნებებს შორის.

ვთქვათ, მოცემულია n-განზომილებიანი ნამდვილი წრფივი სივრცე, რომელსაც აღვნიშნავთ V_n-ით. განვიხილოთ ამ სივრცის გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა, ე. ი. ასახვა, რომელსაც V_n სივრცის ყ ო ვ ე ლ ი a ვექტორი გადაყავს ამავე სივრცის რომელიღაც a' ვექტორში. a' ვექტორს ეწოდება a ვექტორის ა ნ ა ს ა ხ ი განხილული გარდაქმნის დროს.

თუ გარდაქმნა აღნიშნულია φ-თი, მაშინ შევთანხმდეთ a ვექტორის ანასახი ჩაიწეროს არა $\varphi(a)$-თი, ან φa-თი, რაც მკითხველისათვის უფრო ჩვეული იქნებოდა, არამედ $a\varphi$-თი. ამრიგად.

$$a'=a\varphi.$$

წრფივი V_n სივრცის φ გარდაქმნას ეწოდება ამ სივრცის **წრფივი გარდაქმნა**, თუ მას ნებისმიერი a, b ვექტორების ჯამი გადაჰყავს ამ ვექტორების ანასახების ჯამში,

$$(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi, \tag{1}$$

ხოლო ნებისმიერი a ვექტორის α რიცხვზე ნამრავლი გადაჰყავს a ვექტორის ანასახის ნამრავლში ამავე α რიცხვზე,

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi). \tag{2}$$

ამ განმარტებიდან მაშინვე გამომდინარეობს, რომ *წრფივი სივრცის წრფივ გარდაქმნას მოცემულ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ვექტორთა ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია გადაჰყავს ამ ვექტორთა ანასახების წრფივ კომბინაციაში (იმავე კოეფიციენტებით)*,

$$(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_k a_k)\varphi=\alpha_1(a_1\varphi)+\alpha_2(a_2\varphi)+\dots+\alpha_k(a_k\varphi). \tag{3}$$

დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

წრფივი V_n სივრცის ნებისმიერი წრფივი φ გარდაქმნის დროს ნულოვანი 0 ვექტორი რჩება უძრავი,

$$0\varphi=0,$$

ხოლო მოცემული a ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორის ანასახია a ვექტორის ანასახის მოპირდაპირე ვექტორი,

$$(-a)\varphi=-a\varphi.$$

მართლაც, თუ b ნებისმიერი ვექტორია, მაშინ, (2)-ის გამო,

$$0\varphi=(0\cdot b)\varphi=0\cdot(b\varphi)=0.$$

მეორე მხრივ,

$$(-a)\varphi=[(-1)a]\varphi=(-1)(a\varphi)=-a\varphi.$$

წრფივი სივრცის წრფივი გარდაქმნის ცნება წარმოიშვა როგორც განზოგადება ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილი სიბრტყის ან სამგანზომილებიანი სივრცის აფინური გარდაქმნის ცნებისა; მართლაც, (1) და (2) პირობები სრულდება აფინური გარდაქმნებისათვის. ეს პირობები სრულდება აგრეთვე სიბრტყეზე ან სამგანზომილებიან სივრცეში ვექტორთა პროექციებისათვის რომელიმე წრფეზე (ან რომელიმე სიბრტყეზე). ამრიგად, მაგალითად, სიბრტყის კოორდინატთა სათავიდან გამომავალ მონაკვეთ-ვექტორთა ორგანზომილებიან წრფივ სივრცეში გარდაქმნა, რომელსაც ყოველი ვექტორი გადაჰყავს მის პროექციაში სათავეზე გამავალ რომელიმე ღერძზე, იქნება წრფივი.

ნებისმიერ V_n სივრცეში წრფივი გარდაქმნების მაგალითებია **იგივური** ε **გარდაქმნა**, რომელიც ყოველ a ვექტორს უძრავად ტოვებს,

$$a\varepsilon=a,$$

და **ნულოვანი** ω **გარდაქმნა**, რომელსაც ყოველი a ვექტორი გადაჰყავს ნულში,

$$a\omega=0.$$

ახლა ჩვენ მოვახდენთ წრფივი V_n სივრცის ყველა წრფივი გარდაქმნის ერთგვარ მიმოხილვას. ვთქვათ ამ სივრცის ბაზისია

$$e_1, e_2, \ldots, e_n; \tag{4}$$

როგორც ადრე, სვეტში მოთავსებულ (4) ბაზისს აღვნიშნავთ e-თი. ვინაიდან V_n სივრცის ყოველი a ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება (4) ბაზისის ვექტორთა წრფივი კომბინაციის სახით, ამიტომ, (3)-ის გამო, a ვექტორის ანასახი ცალსახად გამოისახება (4) ვექტორთა ანასახების საშუალებით. სხვა სიტყვებით, V_n სივრცის ყოველი წრფივი φ გარდაქმნა ცალსახად განისაზღვრება ფიქსირებული (4) ბაზისის ყველა ვექტორის $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ ანასახების მოცემით.

როგორიც არ უნდა იყოს V_n სივრცის n ვექტორთა დალაგებული სისტემა,

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \tag{5}$$

არსებობს ამ სივრცის ისეთი წრფივი, ამასთან ერთადერთი φ გარდაქმნა, რომ (5) არის (4) ბაზისის ვექტორთა ანასახების სისტემა ამ გარდაქმნის დროს,

$$e_i\varphi = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

φ გარდაქმნის ერთადერთობა ზემოთ უკვე დამტკიცებულია და საჭიროა დამტკიცდეს მხოლოდ მისი არსებობა. φ გარდაქმნა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: თუ a სივრცის ნებისმიერი ვექტორია და

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

არის მისი ჩაწერა (4) ბაზისში, მაშინ დავუშვათ

$$a\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i. \tag{7}$$

დავამტკიცოთ ამ გარდაქმნის წრფივობა. თუ

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

სივრცის ნებისმიერი სხვა ვექტორია, მაშინ

$$(a+b)\varphi = \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) c_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i = a\varphi + b\varphi.$$

ხოლო, თუ γ ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ

$$(\gamma a)\varphi=\left[\sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i)e_i\right]\varphi=\sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i)c_i=\gamma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i=\gamma(a\varphi).$$

რაც შეეხება (6) ტოლობების სამართლიანობას, ის გამომდინარეობს φ გარდაქმნის (7) განმარტებიდან, ვინაიდან (4) ბაზისში e_i ვექტორის ყველა კოორდინატი ნულის ტოლია, გარდა i-ური კოორდინატისა, რომელიც ერთს უდრის.

მაშასადამე, ჩვენ დავამყარეთ ურთიერთცალსახა თანადობა წრფივი V_n სივრცის ყველა წრფივ გარდაქმნასა და ამ სივრცის n ვექტორისაგან შედგენილ დალაგებულ (5) სისტემებს შორის.

მაგრამ ყოველ c_i ვექტორს გააჩნია გარკვეული ჩაწერა (4) ბაზისში,

$$c_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{8}$$

(4) ბაზისში c_i ვექტორების კოორდინატებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ

$$A=(\alpha_{ij}) \tag{9}$$

კვადრატული მატრიცი, თუ მის i-ურ სტრიქონად ავიღებთ c_i ვექტორის კოორდინატთა სტრიქონს, $i=1,2,\dots,n$. ვინაიდან (5) სისტემა ნებისმიერი იყო, ამიტომ A მატრიცი იქნება ნებისმიერი n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი ნამდვილი ელემენტებით.

ამრიგად, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა V_n სივრცის ყველა წრფივ გარდაქმნასა და n-ური რიგის ყველა კვადრატულ მატრიცს შორის; გასაგებია, ეს თანადობა დამოკიდებულია (4) ბაზისის არჩევაზე.

ვიტყვით, რომ A მატრიცი იძლევა (4) ბაზისში წრფივ φ გარდაქმნას, ანუ, უფრო მოკლედ, რომ A არის წრფივი φ გარდაქმნის მატრიცი (4) ბაზისში. თუ $e\varphi$-თი აღვნიშნავთ სვეტს, შედგენილს (4) ბაზისის ვექტორთა ანასახებისაგან, მაშინ (6), (8) და (9)-დან გამომდინარეობს შემდეგი მატრიცული ტოლობა, რომელიც მთლიანად აღწერს არსებულ კავშირებს წრფივ φ გარდაქმნას, e ბაზისსა და ამ ბაზისში ამ წრფივი გარდაქმნის მომცემ A მატრიცს შორის:

$$e\varphi=Ae. \tag{10}$$

ვაჩვენოთ, როცა ვიცით (4) ბაზისში წრფივი φ გარდაქმნის A მატრიცი, თუ როგორ უნდა მოინახოს ამ ბაზისში a ვექტორის კოორდინატების მიხედვით მისი $a\varphi$ ანასახის კოორდინატები. თუ

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,$$

მაშინ

$$a\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i\varphi),$$

რაც ტოლფასია

$$a\varphi=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(e\varphi)$$

მატრიცული ტოლობისა.

თუ გამოვიყენებთ (10)-ს და გავითვალისწინებთ, რომ მატრიცთა გამრავლების ასოციაციურობა ადვილად მოწმდება იმ შემთხვევაშიც, როცა ერთ-ერთი მატრიცი არის ვექტორებისაგან შედგენილი სვეტი, მივიღებთ:

$$a\varphi=[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A]e.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $a\varphi$ ვექტორის კოორდინატთა სტრიქონი უდრის a ვექტორის კოორდინატთა სტრიქონს, გამრავლებულს მარჯვნიდან წრფივი φ გარდაქმნის A მატრიცზე, სადაც ყველაფერი განხილული (4) ბაზისში.

მაგალითი. ვთქვათ, სამგანზომილებიანი წრფივი სივრცის e_1, e_2, e_3 ბაზისში წრფივი φ გარდაქმნა მოიცემა

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცით. თუ

$$a=5e_1+e_2-2e_3,$$

მაშინ

$$(5, 1, -2)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}=(-9, 16, 0),$$

ე. ი.

$$a\varphi=-9e_1+16e_2.$$

კავშირი წრფივი გარდაქმნის მატრიცებს შორის სხვადასხვა ბაზისში. თავისთავად იგულისხმება, რომ მატრიცი, რომელიც იძლევა წრფივ გარდაქმნას, დამოკიდებულია ბაზისის არჩევაზე. ვაჩვენოთ, თუ როგორია კავშირი სხვადასხვა ბაზისში ერთი და იგივე წრფივი გარდაქმნის მომცემ მატრიცებს შორის.

ვთქვათ, მოცემულია e და e' ბაზისები გადასვლის T მატრიცით,

$$e'=Te, \tag{11}$$

და, ვთქვათ, წრფივი φ გარდაქმნა ამ ბაზისებში მოიცემა შესაბამისად A და A' მატრიცებით,

$$e\varphi=Ae, \quad e'\varphi=A'e'. \tag{12}$$

(11)-ის გამო, (12)-ის მეორე ტოლობა გვაძლევს

$$(Te)\varphi=A'(Te)$$

ტოლობას. მაგრამ

$$(Te)\varphi = T(e\varphi).$$

მართლაც, თუ $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{in})$ არის T მატრიცის i-ური სტრიქონი, მაშინ

$$(\tau_{i1}e_1 + \tau_{i2}e_2 + \cdots + \tau_{in}e_n)\varphi = \tau_{i1}(e_1\varphi) + \tau_{i2}(e_2\varphi) + \cdots + \tau_{in}(e_n\varphi).$$

ამრიგად, (12)-ის გამო,

$$(Te)\varphi = T(e\varphi) = T(Ae) = (TA)e,$$

$$A'(Te) = (A'T)e,$$

ე. ი.

$$(TA)e = (A'T)e.$$

თუ ერთი მაინც i-სათვის, $1 \leqslant i \leqslant n$, TA მატრიცის i-ური სტრიქონი განსხვავდება $A'T$ მატრიცის i-ური სტრიქონისაგან, მაშინ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორების ორი სხვადასხვა წრფივი კომბინაცია იქნება ერთმანეთის ტოლი, რაც ეწინააღმდეგება e ბაზისის წრფივ დამოუკიდებლობას. ამრიგად,

$$TA = A'T,$$

საიდანაც, გადასვლის T მატრიცის გადაუგვარებლობის გამო,

$$A' = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}A'T. \tag{13}$$

შევნიშნოთ, რომ კვადრატულ B და C მატრიცებს ეწოდებათ **მსგავსი**, თუ ისინი დაკავშირებული არიან

$$C = Q^{-1}BQ$$

ტოლობით, სადაც Q—რომელიღაც გადაუგვარებელი მატრიცაა. ამასთან ამბობენ, რომ C მატრიცი მიღებულია B მატრიცისაგან Q მატრიცით **ტრანსფორმირების** საშუალებით.

ამრიგად, ზემოთ დამტკიცებული (13) ტოლობები შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემის სახით:

სხვადასხვა ბაზისში ერთი და იგივე წრფივი გარდაქმნის მომცემი მატრიცები ერთმანეთის მსგავსია. ამასთან, e' ბაზისში წრფივი φ გარდაქმნის მატრიცი მიიღება e ბაზისში ამ გარდაქმნის მატრიცის ტრანსფორმირებით e' ბაზისიდან e ბაზისზე გადასვლის მატრიცის საშუალებით.

ხაზი გავუსვათ იმას, რომ, თუ A მატრიცი იძლევა e ბაზისში წრფივ φ გარდაქმნას, მაშინ ნებისმიერი, A მატრიცის მსგავსი, B მატრიცი,

$$B = Q^{-1}AQ,$$

აგრეთვე იძლევა φ გარდაქმნას რომელიმე ბაზისში, სახელდობრ იმ ბაზისში, რომელიც მიიღება e ბაზისიდან Q^{-1} გადასვლის მატრიცის საშუალებით.

ოპერაციები წრფივ გარდაქმნებზე. თუ V_n სივრცის ყოველ წრფივ გარდაქმნას შევუთანადებთ მის მატრიცს ფიქსირებულ ბაზისში, მივიღებთ, როგორც უკვე დამტკიცდა, ურთიერთცალსახა თანადობას ყველა წრფივ გარდაქ-

მნასა და ყველა n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცს შორის. ბუნებრივია მოველოდეთ, რომ მატრიცების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს, აგრეთვე მატრიცის რიცხვზე გამრავლებას, შეესაბამებათ ანალოგიური ოპერაციები წრფივ გარდაქმნებზე.

ვთქვათ, V_n სივრცეში მოცემულია წრფივი φ და ψ გარდაქმნა. $\varphi+\psi$ გარდაქმნას, განსაზღვრულს

$$a(\varphi+\psi)=a\varphi+a\psi \tag{14}$$

ტოლობით, ვუწოდოთ ამ გარდაქმნების ჯამი; მაშასადამე, მას ნებისმიერი a ვექტორი გადაყავს φ და ψ გარდაქმნების დროს მისი ანასახების ჯამში.

$\varphi+\psi$ გარდაქმნა წრფივია. მართლაც, ნებისმიერი a და b ვექტორებისათვის და ნებისმიერი α რიცხვისათვის

$$(a+b)(\varphi+\psi)=(a+b)\varphi+(a+b)\psi=a\varphi+b\varphi+a\psi+b\psi=$$
$$=a(\varphi+\psi)+b(\varphi+\psi);$$
$$(\alpha a)(\varphi+\psi)=(\alpha a)\varphi+(\alpha a)\psi=\alpha(a\varphi)+\alpha(a\psi)=$$
$$=\alpha(a\varphi+a\psi)=\alpha[a(\varphi+\psi)].$$

მეორე მხრივ, $\varphi\psi$ გარდაქმნას, განსაზღვრულს

$$a(\varphi\psi)=(a\varphi)\psi \tag{15}$$

ტოლობით, ვუწოდოთ φ და ψ გარდაქმნების ნამრავლი; ე. ი. ეს ის გარდაქმნაა, რომელიც მიიღება φ და ψ გარდაქმნების თანმიმდევრობით შესრულების შედეგად.

$\varphi\psi$ გარდაქმნა წრფივია:

$$(a+b)(\varphi\psi)=[(a+b)\varphi]\psi=(a\varphi+b\varphi)\psi=$$
$$=(a\varphi)\psi+(b\varphi)\psi=a(\varphi\psi)+b(\varphi\psi);$$
$$(\alpha a)(\varphi\psi)=[(\alpha a)\varphi]\psi=[\alpha(a\varphi)]\psi=\alpha[(a\varphi)\psi]=\alpha[a(\varphi\psi)].$$

ბოლოს, $\varkappa\varphi$ გარდაქმნას, განსაზღვრულს

$$a(\varkappa\varphi)=\varkappa(a\varphi) \tag{16}$$

ტოლობით, ვუწოდოთ წრფივი φ გარდაქმნის ნამრავლი $\varkappa$ რიცხვზე; მაშასადამე, ყველა ვექტორის ანასახი φ გარდაქმნის დროს მრავლდება $\varkappa$ რიცხვზე.

$\varkappa\varphi$ გარდაქმნა წრფივია:

$$(a+b)(\varkappa\varphi)=\varkappa[(a+b)\varphi]=\varkappa(a\varphi+b\varphi)=$$
$$=\varkappa(a\varphi)+\varkappa(b\varphi)=a(\varkappa\varphi)+b(\varkappa\varphi);$$
$$(\alpha a)(\varkappa\varphi)=\varkappa[(\alpha a)\varphi]=\varkappa[\alpha(a\varphi)]=\alpha[\varkappa(a\varphi)]=\alpha[a(\varkappa\varphi)].$$

ვთქვათ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში φ და ψ გარდაქმნები მოიცემიან, შესაბამისად, $A=(\alpha_{ij})$ და $B=(\beta_{ij})$ მატრიცებით,

$$e\varphi=Ae,\quad e\psi=Be.$$

მაშინ, (14)-ის გამო,

$$e_i(\varphi+\psi)=e_i\varphi+e_i\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,e_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\,e_j=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})e_j,$$

ე. ი.

$$e(\varphi+\psi)=(A+B)e.$$

ამრიგად, ნებისმიერ ბაზისში წრფივ გარდაქმნათა ჯამის მატრიცი ტოლია ამავე ბაზისში ამ გარდაქმნათა მატრიცების ჯამისა.

მეორე მხრივ, (15)-ის გამო,

$$e_i(\varphi\psi)=(e_i\varphi)\psi=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,e_j\right)\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,(e_j\psi)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}\,e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{jk}\right)e_k,$$

ე. ი.

$$e(\varphi\psi)=(AB)e.$$

სხვა სიტყვებით, ნებისმიერ ბაზისში წრფივ გარდაქმნათა ნამრავლის მატრიცი ტოლია ამავე ბაზისში ამ გარდაქმნათა მატრიცების ნამრავლისა.

ბოლოს, (16)-ის გამო,

$$e_i(\varkappa\varphi)=\varkappa(e_i\varphi)=\varkappa\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,e_j=\sum_{j=1}^{n}(\varkappa\alpha_{ij})e_j,$$

ე. ი.

$$e(\varkappa\varphi)=(\varkappa A)e.$$

მაშასადამე, რომელიმე ბაზისში $\varkappa$ რიცხვზე წრფივი φ გარდაქმნის ნამრავლის მომცემი მატრიცი ტოლია ამ ბაზისში თვით წრფივი φ გარდაქმნის მატრიცის ნამრავლისა $\varkappa$ რიცხვზე.

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ ოპერაციებს წრფივ გარდაქმნებზე ისეთივე თვისებები აქვთ, როგორც ოპერაციებს მატრიცებზე. ასე მაგალითად, წრფივი გარდაქმნების შეკრება კომუტატიური და ასოციაციური, ხოლო გამრავლება ასოციაციურია, მაგრამ როცა $n>1$, იგი არ არის კომუტატური. წრფივი გარდაქმნებისათვის არსებობს ცალსახა გამოკლება. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ იგივური ε გარდაქმნა წრფივ გარდაქმნებს შორის ერთეულის როლს ასრულებს, ხოლო ნულოვანი ω გარდაქმნა კი ნულის როლს. მართლაც, ნებისმიერ ბაზისში ε გარდაქმნა მოიცემა ერთეულოვანი მატრიცით, ხოლო ω-გარდაქმნა კი—ნულოვანი მატრიცით.

§ 32.* წრფივი ქვესივრცეები

წრფივი V სივრცის L ქვესიმრავლეს ეწოდება ამ სივრცის **წრფივი ქვესივრცე**, თუ ის თვითონ არის წრფივი სივრცე V-ში განსაზღვრული ვექტორების შეკრებისა და ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ. ასე მაგალითად, სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი და სათავეზე გამავალ რომელიმე სიბრტყეზე (ან რომელიმე წრფეზე) მდებარე ვექტორების ერთობლიობა იქნება წრფივი ქვესივრცე.

იმისათვის, რომ წრფივი V სივრცის არაცარიელი L ქვესიმრავლე იყოს მისი წრფივი ქვესივრცე, საკმარისია სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

1. თუ a და b ვექტორები ეკუთვნის L-ს, მაშინ L-ში შედის $a+b$ ვექტორიც.

2. თუ a ვექტორი ეკუთვნის L-ს, მაშინ L-ში შედის αa ვექტორიც α რიცხვის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

მართლაც, 2 პირობის გამო, L სიმრავლე შეიცავს ნულოვან ვექტორს: თუ a ვექტორი ეკუთვნის L-ს, მაშინ L შეიცავს $0 \cdot a=0$ ვექტორსაც. შემდეგ, კვლავ 2 პირობის გამო, L სიმრავლე თავის a ვექტორთან ერთად შეიცავს მის მოპირდაპირე $-a=(-1)a$ ვექტორსაც; ამიტომ 1 თვისების გამო L-ს ეკუთვნის L-ის ნებისმიერი ორი ვექტორის სხვაობაც. რაც შეეხება წრფივი სივრცის განმარტებაში შემავალ ყველა დანარჩენ მოთხოვნილებას, ისინი, სრულდება რა V-ში, შესრულდება L-შიც.

V სივრცის წრფივი ქვესივრცეების მაგალითებია თვითონ V სივრცე და აგრეთვე მხოლოდ ნულოვანი ვექტორისაგან შედგენილი სიმრავლე,— ეგრეთ წოდებული **ნულოვანი ქვესივრცე**. უფრო საინტერესოა შემდეგი მაგალითი: V სივრცეში ავიღოთ

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \tag{1}$$

ვექტორთა ნებისმიერი სასრული სისტემა და აღვნიშნოთ L-ით სიმრავლე ყველა იმ ვექტორისა, რომლებიც წარმოადგენენ (1) ვექტორების წრფივ კომბინაციებს. დავამტკიცოთ, რომ L იქნება წრფივი ქვესივრცე. მართლაც, თუ

$$b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_r a_r, \quad c=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\ldots+\beta_r a_r,$$

მაშინ

$$b+c=(\alpha_1+\beta_1)a_1+(\alpha_2+\beta_2)a_2+\ldots+(\alpha_r+\beta_r)a_r,$$

ე. ი. $b+c$ ვექტორი L-ს ეკუთვნის; L-ს ეკუთვნის

$$\gamma b=(\gamma\alpha_1)a_1+(\gamma\alpha_2)a_2+\ldots+(\gamma\alpha_r)a_r$$

ვექტორიც ნებისმიერი γ რიცხვისათვის.

ამბობენ, რომ ეს წრფივი L ქვესივრცე **წარმოქმნილია** (1) ვექტორთა სისტემით; კერძოდ, L-ს ეკუთვნის თვით (1) ვექტორები.

სხვათაშორის, სასრულოგანზომილებიანი წრფივი სივრცის ყოველი წრფივი ქვესივრცე წარმოიქმნება ვექტორთა რაიმე სასრული სისტემით, რადგან, თუ ის არ არის ნულოვანი, მას გააჩნია სასრული ბაზისიც კი. წრფივი L ქვესივრცის განზომილება არ აღემატება თვითონ V_n სივრცის განზომილებას, ამასთან უდრის n-ს მხოლოდ მაშინ, როცა $L=V_n$. რასაკვირველია, ნულოვანი ქვესივრცის განზომილებად უნდა ჩაითვალოს 0 რიცხვი.

ყოველი k-სათვის, $0<k<n$, V_n სივრცეში არსებობს k-ური განზომილების წრფივი ქვესივრცეები—საკმარისია ავიღოთ ქვესივრცე, წარმოქმნილი k წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ნებისმიერი სისტემით.

ვთქვათ, V სივრცეში მოცემულია წრფივი L_1 და L_2 ქვესივრცეები. L_0 ერთობლიობა ვექტორებისა, რომლებიც ეკუთვნიან როგორც L_1-ს, ისე L_2-ს, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, იქნება წრფივი ქვესივრცე; მას ეწოდება L_1 და L_2 ქვესივრცეების თანაკვეთა. მეორე მხრივ, წრფივი ქვესივრცე იქნება L_1 და L_2 ქვესივრცეების $\overline{L}$ ჯამიც, ე. ი. ერთობლიობა V-ს ყველა იმ ვექტორისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან ორი შესაკრების ჯამის სახით, რომელთაგან ერთი ეკუთვნის L_1-ს, ხოლო მეორე—L_2-ს. თუ L_1, L_2, L_0 და $\overline{L}$ ქვესივრცეების განზომილებებია, შესაბამისად, d_1, d_2, d_0 და $\overline{d}$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\overline{d}=d_1+d_2-d_0, \tag{2}$$

ე. ი. ორი ქვესივრცის ჯამის განზომილება უდრის ამ ქვესივრცეთა განზომილებების ჯამს, შემცირებულს მათი თანაკვეთის განზომილებით.

დამტკიცებისათვის ავიღოთ L_0 ქვესივრცის ნებისმიერი ბაზისი

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d_0} \tag{3}$$

და შევავსოთ იგი L_1 ქვესივრცის

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d_0}, b_{d_0+1}, \ldots, b_{d_1} \tag{4}$$

ბაზისამდე და L_2 ქვესივრცის

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d_0}, c_{d_0+1}, \ldots, c_{d_2} \tag{5}$$

ბაზისამდე. თუ გამოვიყენებთ $\overline{L}$ ქვესივრცის განმარტებას, ადვილი სანახავია, რომ ეს ქვესივრცე წარმოიქმნება

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d_0}, b_{d_0+1}, \ldots, b_{d_1}, c_{d_0+1}, \ldots, c_{d_2} \tag{6}$$

ვექტორთა სისტემით. მაშასადამე (2) ფორმულა იქნება დამტკიცებული, თუ დავამტკიცებთ (6) სისტემის წრფივ დამოუკიდებლობას.

ვთქვათ, ადგილი აქვს

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_{d_0} a_{d_0}+\beta_{d_0+1} b_{d_0+1}+\ldots+\beta_{d_1} b_{d_1}+$$
$$+\gamma_{d_0+1} c_{d_0+1}+\ldots+\gamma_{d_2} c_{d_2}=0$$

ტოლობას რაიმე რიცხვითი კოეფიციენტებით. მაშინ

$$d=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_{d_0}a_{d_0}+\beta_{d_0+1}b_{d_0+1}+\ldots+\beta_{d_1}b_{d_1}=$$
$$=-\gamma_{d_0+1}c_{d_0+1}-\ldots-\gamma_{d_2}c_{d_2}. \qquad (7)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე ეკუთვნის L_1-ს, მარჯვენა კი L_2-ს, ამიტომ d ვექტორი, რომელიც უდრის ამ ტოლობის როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა მხარეს, ეკუთვნის L_0-ს და, მაშასადამე, წრფივად გამოისახება (3) ბაზისის საშუალებით. მაგრამ (7) ტოლობის მარჯვენა მხარე გვიჩვენებს, რომ d ვექტორი წრფივად გამოისახება $c_{d_0+1},\ldots,c_{d_2}$ ვექტორების საშუალებითაც. აქედან გამომდინარეობს, (5) სისტემის წრფივი დამოუკიდებლობის გამო, რომ ყველა $\gamma_{d_0+1},\ldots,\gamma_{d_2}$ კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ე. ი. $d=0$ და ამიტომ, (4) სისტემის წრფივი დამოუკიდებლობის გამო, ყველა $\alpha_1,\ldots,\alpha_{d_0}$, $\beta_{d_0+1},\ldots,\beta_{d_1}$ კოეფიციენტი აგრეთვე ნულის ტოლია. ამით (6) სისტემის წრფივი დამოუკიდებლობა დამტკიცებულია.

მკითხველს ვანდობთ შეამოწმოს, რომ ჩვენი დამტკიცება რჩება ძალაში იმ შემთხვევაშიც, როცა L_0 ქვესივრცე ნულოვანია, ე. ი. $d_0=0$.

მნიშვნელობათა არე და წრფივი გარდაქმნის ბირთვი. ვთქვათ, წრფივ V_n სივრცეში მოცემულია წრფივი φ გარდაქმნა. თუ L არის V_n სივრცის ნებისმიერი წრფივი ქვესივრცე, *მაშინ $L\varphi$ ერთობლიობა L-ის ყველა ვექტორთა ანასახებისა φ გარდაქმნის დროს აგრეთვე იქნება წრფივი ქვესივრცე*, როგორც ეს მაშინვე გამომდინარეობს წრფივი ქვესივრცისა და წრფივი გარდაქმნის განმარტებებიდან. კერძოდ, V_n სივრცის ყველა ვექტორის ანასახის $V_n\varphi$ ერთობლიობაც წრფივი ქვესივრცე იქნება; მას ეწოდება გარდაქმნის *მნიშვნელობათა არე*.

ვიპოვოთ მნიშვნელობათა არის განზომილება. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან სხვადასხვა ბაზისში ერთი და იგივე φ გარდაქმნის მომცემი მატრიცები ერთმანეთის მსგავსია, ამიტომ, § 14-ის უკანასკნელი თეორემის გამო, მათ ყველას აქვთ ერთი და იგივე რანგი. მაშასადამე, ამ რიცხვს შეგვიძლია ვუწოდოთ წრფივი φ გარდაქმნის *რანგი*.

წრფივი φ გარდაქმნის მნიშვნელობათა არის განზომილება უდრის ამ გარდაქმნის რანგს.

მართლაც, ვთქვათ, φ მოიცემა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში A მატრიცის საშუალებით. $V_n\varphi$ ქვესივრცე წარმოიქმნება

$$e_1\varphi,\ e_2\varphi,\ \ldots,\ e_n\varphi \qquad (8)$$

ვექტორებით და ამიტომ $V_n\varphi$ ქვესივრცის ბაზისი იქნება (8) სისტემის ნებისმიერი მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა. მაგრამ (8) სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალური რიცხვი უდრის A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა მაქსიმალურ რიცხვს, ე. ი. უდრის ამ მატრიცის რანგს. თეორემა დამტკიცებულია.

ჩვენ ვიცით, რომ წრფივი φ გარდაქმნის დროს ნულოვანი ვექტორი გადადის თავის თავში. მაშასადამე V_n სივრცის $N(\varphi)$ ერთობლიობა ყველა ვექტორისა, რომლებიც φ-ს დროს აისახებიან ნულოვან ვექტორში, არ

იქნება ცარიელი და ცხადია წარმოადგენს წრფივ ქვესივრცეს. ამ ქვესივრცეს ეწოდება φ გარდაქმნის *ბირთვი*, ხოლო მის განზომილებას—ამ გარდაქმნის *დეფექტი*.

V_n სივრცის ნებისმიერი წრფივი φ გარდაქმნისათვის ამ გარდაქმნის რანგისა და დეფექტის ჯამი უდრის მთელი სივრცის n განზომილებას.

მართლაც, თუ r არის φ გარდაქმნის რანგი, მაშინ $V_n\varphi$ ქვესივრცეს გააჩნია ბაზისი, შედგენილი r რაოდენობის

$$a_1, a_2, \dots, a_r \tag{9}$$

ვექტორისაგან. V_n სივრცეში შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი

$$b_1, b_2, \dots, b_r \tag{10}$$

ვექტორები, რომ

$$b_i\varphi=a_i, \quad i=1, 2, \dots, r;$$

რასაკვირველია, (10) ვექტორების არჩევა არ არის ცალსახა. (10) ვექტორების რომელიმე არატრივიალური წრფივი კომბინაცია რომ ასახულიყო φ გარდაქმნით ნულში, კერძოდ, (10) ვექტორები რომ ყოფილიყვნენ წრფივად დამოკიდებული, მაშინ (9) ვექტორები თვითონ იქნებოდნენ წრფივად დამოკიდებული, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამიტომ (10) ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი L ქვესივრცის განზომილებაა r, ხოლო მისი თანაკვეთა $N(\varphi)$ ქვესივრცესთან უდრის ნულს.

მეორე მხრივ, L და $N(\varphi)$ ქვესივრცეების ჯამი ემთხვევა მთელ V_n სივრცეს. მართლაც, თუ c არის სივრცის ნებისმიერი ვექტორი, მაშინ $d=c\varphi$ ვექტორი ეკუთვნის, რა თქმა უნდა, $V_n\varphi$ ქვესივრცეს. მაშინ L ქვესივრცეში მოიძებნება ისეთი b ვექტორი, რომ

$$b\varphi=d.$$

—b ვექტორი ჩაიწერება (10) სისტემის საშუალებით იმავე კოეფიციენტებით, როგორითაც d ვექტორი ჩაიწერება (9) ბაზისის საშუალებით. აქედან

$$c=b+(c-b),$$

ამასთან $c-b$ ვექტორი ეკუთვნის $N(\varphi)$ ქვესივრცეს, ვინაიდან

$$(c-b)\varphi=c\varphi-b\varphi=d-d=0.$$

მიღებული შედეგებიდან და ზემოთ დამტკიცებული (2) ფორმულიდან გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნები. წრფივი V_n სივრცის წრფივ φ გარდაქმნას ეწოდება *გადაუგვარებელი*, თუ ის აკმაყოფილებს ერთ-ერთს შემდეგი პირობებიდან, რომელთა ტოლფასობა მაშინვე გამომდინარეობს ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან:

1. φ გარდაქმნის რანგი უდრის n-ს.

2. φ გარდაქმნის მნიშვნელობათა არეა მთელი V_n სივრცე.

3. φ გარდაქმნის დეფექტი უდრის ნულს.

გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნებისათვის შეიძლება მივუთითოთ მრავალი სხვა განმარტება, რომელიც ზემოთ მითითებული განმარტებების ტოლფასია, კერძოდ 4—6 განმარტებები.

4. V_n სივრცის განსხვავებულ ვექტორებს აქვთ φ გარდაქმნის დროს განსხვავებული ანასახები.

მართლაც, თუ φ გარდაქმნას აქვს 4 თვისება, მაშინ ამ გარდაქმნის ბირთვი შედგება მხოლოდ ნულოვანი ვექტორისაგან, ე. ი. სრულდება 3 თვისებაც. ხოლო, თუ a და b ვექტორები ისეთია, რომ $a \neq b$, მაგრამ $a\varphi = b\varphi$, მაშინ $a-b \neq 0$, მაგრამ $(a-b)\varphi = 0$, ე. ი. 3 თვისება არ სრულდება.

2-დან და 4-დან გამომდინარეობს

5. φ გარდაქმნა წარმოადგენს V_n სივრცის ურთიერთცალსახა ასახვას მთელ ამ სივრცეზე.

5-დან გამომდინარეობს, რომ გადაუგვარებელი წრფივი φ გარდაქმნისათვის არსებობს შებრუნებული φ^{-1} გარდაქმნა, რომელსაც ყოველი $a\varphi$ ვექტორი გადაჰყავს a ვექტორში,

$$(a\varphi)\varphi^{-1} = a.$$

φ^{-1} გარდაქმნა იქნება წრფივი, ვინაიდან

$$(a\varphi + b\varphi)\varphi^{-1} = [(a+b)\varphi]\varphi^{-1} = a+b,$$
$$[\alpha(a\varphi)]\varphi^{-1} = [(\alpha a)\varphi]\varphi^{-1} = \alpha a.$$

φ^{-1} გარდაქმნის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon; \tag{11}$$

თვით (11) ტოლობები შეიძლება მივიღოთ შებრუნებული გარდაქმნის განმარტებად. აქედან და წინა პარაგრაფის უკანასკნელი შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ გადაუგვარებელი წრფივი φ გარდაქმნა მოიცემა რომელიმე ბაზისში A მატრიცით, რომელიც გადაუგვარებელია 1 თვისების გამო, მაშინ φ^{-1} გარდაქმნა მოიცემა ამ ბაზისში A^{-1} მატრიცით.

ამრიგად, მივედით გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნის შემდეგ განმარტებამდე:

6. φ გარდაქმნისათვის არსებობს შებრუნებული წრფივი φ^{-1} გარდაქმნა.

§ 33. მახასიათებელი ფესვები და საკუთრივი მნიშვნელობები

ვთქვათ, $A=(a_{ij})$ არის n-ური რიგის ნამდვილელემენტებიანი კვადრატული მატრიცი. ვთქვათ, მეორე მხრივ, λ არის რაიმე უცნობი. მაშინ $A-\lambda E$ მატრიცს, სადაც E არის n-ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცი, ეწოდება A მატრიცის მახასიათებელი მატრიცი. ვინაიდან λE მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულია λ, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი ნულის ტოლია, ამიტომ

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

$A-\lambda E$ მატრიცის დეტერმინანტი იქნება λ-ს მრავალწევრი, ამასთან n-ური რიგისა. მართლაც, მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული ელემენტების ნამრავლი იქნება λ-ს მრავალწევრი, რომლის უფროსი წევრია $(-1)^n\lambda^n$, დეტერმინანტის ყველა დანარჩენი წევრი კი არ შეიცავს მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულ ელემენტებიდან ორს მაინც და ამიტომ მათი ხარისხი λ-ს მიმართ არ აღემატება $n-2$-ს. ადვილად შეიძლებოდა ამ მრავალწევრის კოეფიციენტების მონახვა. ასე მაგალითად, λ^{n-1}-თან მდგომი კოეფიციენტი უდრის $(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\dots+\alpha_{nn})$-ს, ხოლო თავისუფალი წევრი ემთხვევა A მატრიცის დეტერმინანტს.

n-ური ხარისხის $|A-\lambda E|$ მრავალწევრს ეწოდება A მატრიცის **მახასიათებელი მრავალწევრი**, ხოლო მის ფესვებს, რომლებიც შეიძლება იყვნენ როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური, ეწოდება ამ მატრიცის **მახასიათებელი ფესვები**.

მსგავს მატრიცებს გააჩნიათ ერთი და იგივე მახასიათებელი მრავალწევრები და, მაშასადამე, ერთი და იგივე მახასიათებელი ფესვები.

ვთქვათ, მართლაც,

$$B=Q^{-1}AQ.$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ λE მატრიცი გადაადგილებადია Q მატრიცთან, ხოლო $|Q^{-1}|=|Q|^{-1}$, მივიღებთ:

$$|B-\lambda E|=|Q^{-1}AQ-\lambda E|=|Q^{-1}(A-\lambda E)Q|=$$
$$=|Q|^{-1}\cdot|A-\lambda E|\cdot|Q|=|A-\lambda E|,$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, § 31-ში დამტკიცებული იმ თეორემის გამო, რომელიც სხვადასხვა ბაზისში წრფივი გარდაქმნის მომცემ მატრიცებს შორის კავშირს ამყარებს, რომ **თუმცა წრფივი φ გარდაქმნა შეიძლება მოცემულ იქნას სხვადასხვა ბაზისში განსხვავებული მატრიცებით, მაგრამ ყველა ამ მატრიცს აქვს მახასიათებელი ფესვების ერთი და იგივე ერთობლიობა.** ამიტომ ამ ფესვებს შეიძლება ვუწოდოთ **თვითონ φ გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები.** ამ მახასიათებელ ფესვთა ერთობლიობას, ამასთან ყოველი ფესვი ჯერადობით, რომელიც მას აქვს მახასიათებელ მრავალწევრში, ეწოდება აიღება იმ წრფივი φ გარდაქმნის **სპექტრი.**

წრფივი გარდაქმნების შესწავლის დროს მახასიათებელი ფესვები ძალიან დიდ როლს თამაშობენ. მკითხველს ბევრჯერ ექნება შესაძლებლობა, რომ ამაში დარწმუნდეს. ჩვენ ახლა მივუთითებთ მახასიათებელი ფესვების გამოყენებათაგან ერთ-ერთზე.

ვთქვათ, ნამდვილ წრფივ V_n სივრცეში მოცემულია წრფივი φ გარდაქმნა. თუ ნულისაგან განსხვავებული b ვექტორი φ გარდაქმნით გადადის თვით b-ს პროპორციულ ვექტორში,

$$b\varphi = \lambda_0 b, \tag{1}$$

სადაც λ_0—რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ b ვექტორს ეწოდება φ გარდაქმნის *საკუთრივი ვექტორი*, ხოლო λ_0 რიცხვს—ამ გარდაქმნის *საკუთრივი მნიშვნელობა*, ამასთან, ამბობენ, რომ საკუთრივი b ვექტორი *მიეკუთვნება* საკუთრივ λ_0 მნიშვნელობას.

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $b \neq 0$, ამიტომ λ_0 რიცხვი, რომელიც (1) პირობას აკმაყოფილებს, b ვექტორისათვის განისაზღვრება ცალსახად. შემდეგ, გავუსვათ ხაზი იმას, რომ ნულოვანი ვექტორი არ ითვლება φ გარდაქმნის საკუთრივ ვექტორად, თუმცა ის აკმაყოფილებს (1) პირობას, თანაც ნებისმიერი λ_0-სათვის.

კოორდინატთა სათავის გარშემო ევკლიდური სიბრტყის ბრუნვა კუთხით, რომელიც არ არის π-ს ჯერადი, წარმოადგენს მაგალითს წრფივი გარდაქმნისა, რომელსაც არ გააჩნია საკუთრივი ვექტორები. მეორე უკიდურესი შემთხვევის მაგალითია სიბრტყის გაჭიმვა, რომლის დროს კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი ყველა ვექტორი იჭიმება, ვთქვათ, ხუთჯერ. ეს იქნება წრფივი გარდაქმნა, ამასთან სიბრტყის ყველა არანულოვანი ვექტორი მისთვის საკუთრივი იქნება; ყველა ისინი მიეკუთვნება საკუთრივ მნიშვნელობას 5.

წრფივი φ გარდაქმნის ნამდვილი მახასიათებელი ფესვები, თუ ისინი არსებობენ, და მხოლოდ ისინი არიან ამ გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობები.

ვთქვათ, მართლაც, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში φ გარდაქმნის მატრიცაა $A = (\alpha_{ij})$, და, ვთქვათ,

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$$

ვექტორი არის φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი,

$$b\varphi = \lambda_0 b. \tag{2}$$

როგორც ეს დამტკიცებულია § 31-ში,

$$b\varphi = [(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A]e. \tag{3}$$

(2) და (3) ტოლობები გვაძლევენ

$$\begin{aligned} \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{21} + \ldots + \beta_n\alpha_{n1} &= \lambda_0\beta_1, \\ \beta_1\alpha_{12} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{n2} &= \lambda_0\beta_2, \\ \vdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \beta_1\alpha_{1n} + \beta_2\alpha_{2n} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} &= \lambda_0\beta_n \end{aligned} \tag{4}$$

ტოლობათა სისტემას. ვინაიდან $b \neq 0$, ამიტომ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ამრიგად, (4)-ის გამო,

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\alpha_{21}x_2+\ldots+\alpha_{n1}x_n&=0,\\
\alpha_{12}x_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\ldots+\alpha_{n2}x_n&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\alpha_{1n}x_1+\alpha_{2n}x_2+\ldots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n&=0
\end{aligned} \tag{5}
$$

წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსენი და ამიტომ მისი დეტერმინანტი უდრის ნულს,

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_{11}-\lambda_0, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}\\
\alpha_{12}, & \alpha_{22}-\lambda_0, & \ldots, & \alpha_{n2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_{1n}, & \alpha_{2n}, & \ldots, & \alpha_{nn}-\lambda_0
\end{vmatrix}=0. \tag{6}
$$

ტრანსპონირების შედეგად მივიღებთ

$$
|A-\lambda_0 E|=0, \tag{7}
$$

ე. ი. საკუთრივი λ_0 მნიშვნელობა მართლაც აღმოჩნდა A მატრიცის და, მაშასადამე, წრფივი φ გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვი, ამასთან, გასაგებია, ნამდვილი.

პირიქით, ვთქვათ, λ_0 არის φ გარდაქმნის და, მაშასადამე, A მატრიცის ნებისმიერი ნამდვილი მახასიათებელი ფესვი. მაშინ ადგილი აქვს (7) ტოლობას და ამიტომ მისგან ტრანსპონირებით მიღებულ (6) ტოლობასაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა (5) სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსენი, ამასთან ნამდვილიც კი, ვინაიდან ამ სისტემის ყველა კოეფიციენტი ნამდვილია. თუ ამ ამონახსენს აღვნიშნავთ

$$
(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\text{-ით}, \tag{8}
$$

მაშინ ადგილი აქვს (4) ტოლობებს. b-თი აღვნიშნოთ V_n სივრცის ვექტორი, რომლის კოორდინატთა სტრიქონი $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში არის (8); ცხადია, რომ $b\neq 0$. მაშინ (3) ტოლობა სამართლიანია, ხოლო (4) და (3)-დან გამომდინარეობს (2). ამრიგად, b ვექტორი აღმოჩნდა φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, რომელიც მიეკუთვნება საკუთრივ λ_0 მნიშვნელობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ განვიხილავდით *კომპლექსურ* წრფივ სივრცეს, მაშინ მახასიათებელი ფესვის ნამდვილობის მოთხოვნა ზედმეტი იქნებოდა, ე. ი. დამტკიცდებოდა თეორემა: *კომპლექსური წრფივი სივრცის წრფივი გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები და მხოლოდ ისინი არიან ამ გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობები*. აქედან გამომდინარეობს, რომ *კომპლექსურ წრფივ სივრცეში ყოველ წრფივ გარდაქმნას გააჩნია საკუთრივი ვექტორები*.

თუ დავუბრუნდებით ჩვენს მიერ განხილულ ნამდვილ შემთხვევას, აღვნიშნავთ, რომ ერთობლიობა წრფივი φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისა, რომლებიც მიეკუთვნებიან საკუთრივ λ_0 მნიშვნელობას, ემთხვევა წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა (5) სისტემის არანულოვან ნამდვილ ამონახსენთა ერთობლიობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ *ერთობლიობა*

წრფივი φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისა, რომლებიც ეკუთვნიან საკუთრივ λ_0 მნიშვნელობას, იქნება, ნულოვანი ვექტორის დამატების შემდეგ, V_n სივრცის წრფივი ქვესივრცე. მართლაც, § 12-ში დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, რომ n უცნობიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა ნებისმიერი სისტემის (ნამდვილ) ამონახსენთა ერთობლიობა იქნება V_n სივრცის წრფივი ქვესივრცე.

წრფივი გარდაქმნები მარტივი სპექტრით. ბევრ შემთხვევაში საჭირო ხდება ვიცოდეთ, შეუძლია თუ არა მოცემულ წრფივ φ გარდაქმნას ჰქონდეს რომელიმე ბაზისში *დიაგონალური* მატრიცი. სინამდვილეში საკმაოდ ბევრია წრფივი გარდაქმნა, რომელიც არ შეიძლება მოიცეს დიაგონალური მატრიცით. ამის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მითითებული იქნება § 61-ში, ხოლო ახლა ჩვენ გვინდა მოვიყვანოთ ერთი საკმარისი პირობა.

დავამტკიცოთ ჯერ შემდეგი დამხმარე შედეგები:

წრფივი φ გარდაქმნა მოიცემა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში დიაგონალური მატრიცით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ბაზისის ყველა ვექტორი არის φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი.

მართლაც,

$$e_i\varphi = \lambda_i e_i$$

ტოლობა ტოლფასია იმისა, რომ ამ ბაზისში φ გარდაქმნის მომცემი მატრიცის i-ურ სტრიქონში მთავარ დიაგონალის გარეთ მოთავსებული ყველა ელემენტი უდრის ნულს, ხოლო მთავარ დიაგონალზე (ე. ი. i-ურ ადგილზე) დგას λ_i რიცხვი.

წრფივი φ გარდაქმნის საკუთრივი $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ვექტორები, რომლებიც მიეკუთვნებიან სხვადასხვა საკუთრივ მნიშვნელობებს, ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას.

ამ დებულებას დავამტკიცებთ ინდუქციით k-ს მიმართ, ვინაიდან როცა $k=1$ ის სამართლიანია — ერთი საკუთრივი ვექტორი, არის რა ნულისაგან განსხვავებული, ქმნის წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. ვთქვათ,

$$b_i\varphi = \lambda_i b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

და

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ როცა } i \neq j.$$

თუ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_k b_k = 0, \tag{9}$$

სადაც, მაგალითად, $\alpha_1 \neq 0$, მაშინ, თუ (9) ტოლობის ორივე მხარის მიმართ გამოვიყენებთ φ გარდაქმნას, მივიღებთ

$$\alpha_1\lambda_1 b_1 + \alpha_2\lambda_2 b_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k b_k = 0.$$

თუ აქედან გამოვაკლებთ (9) ტოლობას, გამრავლებულს λ_k-ზე, მივიღებთ

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)b_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)b_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)b_{k-1} = 0,$$

რაც იძლევა $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ ვექტორებს შორის არატრივიალურ წრფივ დამოკიდებულებას, ვინაიდან $\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)\neq 0$.

ამბობენ, რომ ნამდვილი წრფივი V_n სივრცის წრფივ φ გარდაქმნას აქვს *მარტივი სპექტრი*, თუ ყველა მისი მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია და ერთმანეთისაგან განსხვავებული. მაშასადამე, φ გარდაქმნას აქვს n განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობა და ამიტომ, დამტკიცებული თეორემის თანახმად, V_n სივრცეში არსებობს ამ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგენილი ბაზისი. ამრიგად, *ყოველი წრფივი გარდაქმნა მარტივი სპექტრით შეიძლება მოიცეს დიაგონალური მატრიცით.*

თუ წრფივი გარდაქმნიდან გადავალთ მის მომცემ მატრიცებზე, მივიღებთ შემდეგ შედეგს:

ყოველი მატრიცი, რომლის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია და ერთმანეთისაგან განსხვავებული, მსგავსია დიაგონალური მატრიცისა, ანუ, როგორც ამბობენ, ასეთი მატრიცი დაიყვანება დიაგონალურ სახეზე.

თ ა ვ ი მ ე რ ვ ე

ევკლიდური სივრცეები

§ 34. ევკლიდური სივრცის განმარტება. ორთონორმირებული ბაზისები

n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ცნება საკმაოდ არასრულად ანზოგადებს სიბრტყის ან სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ცნებებს — n-ური განზომილების შემთხვევაში, როცა $n>3$, არ არის განმარტებული არც ვექტორის სიგრძე, არც ვექტორებს შორის კუთხე და ამიტომ შეუძლებელია განვითარება იმ მდიდარი გეომეტრიული თეორიისა, რომელიც კარგად ცნობილია მკითხველისათვის $n=2$ და $n=3$-სათვის. თურმე შეიძლება მდგომარეობის გამოსწორება, და აი ასეთი გზით.

ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზეც და სამგანზომილებიან სივრცეშიც შეიძლება ვექტორების სკალარული გამრავლების შემოტანა. ის განისაზღვრება ვექტორების სიგრძეებით და მათ შორის მოთავსებული კუთხით. მაგრამ, თურმე, ვექტორის სიგრძეც და ვექტორებს შორის კუთხეც თავის მხრივ შეიძლება გამოისახოს სკალარული გამრავლების საშუალებით. ამიტომ ჩვენ განვმარტავთ სკალარული გამრავლების ცნებას ნებისმიერ n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში, ამასთან განვმარტავთ აქსიომატიკურად იმ ზოგიერთი თვისების დახმარებით, რომლებიც, როგორც კარგად ცნობილია, სიბრტყის ან სამგანზომილებიან სივრცის ვექტორთა სკალარულ გამრავლებას მართლაც გააჩნია. ამასთან, ვითვალისწინებთ რა იმ უშუალო მიზნებს, რომელთათვის ეს ნაწილი შეტანილია უმაღლესი ალგებრის კურსში, არ შევიტანთ ვექტორისა და ვექტორებს შორის კუთხის განმარტებებს. n-განზომილებიან სივრცეებში გეომეტრიის აგებით დაინტერესებულ მკითხველს ვთავაზობთ სპეციალურ ლიტერატურას, პირველ რიგში წრფივი ალგებრის უფრო სრულ წიგნებს.

აღვნიშნოთ, რომ ყველგან ამ თავში, გარდა ამ პარაგრაფის დასასრულისა, განიხილება ნ ა მ დ ვ ი ლ ი წრფივი სივრცეები.

ვიტყვით, რომ n-განზომილებიან ნამდვილ წრფივ V_n სივრცეში განმარტებულია ს კ ა ლ ა რ უ ლ ი გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა, თუ a, b ვექტორთა ყოველ

წყვილს ეთანადება ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც აღვნიშნავთ (a, b) სიმბოლოთი და რომელსაც a და b ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება; ამასთან, სრულდება შემდეგი პირობები (აქ $a, b, c - V_n$ სივრცის ნებისმიერი ვექტორებია, α—ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია):

I. $$(a, b)=(b, a);$$

II. $$(a+b, c)=(a, c)+(b, c);$$

III. $$(\alpha a, b)=\alpha(a, b);$$

IV. თუ $a\neq 0$, მაშინ a ვექტორის სკალარული კვადრატი მკაცრად დადებითია,

$$(a, a)>0.$$

აღვნიშნოთ, რომ III-დან, როცა $\alpha=0$, გამომდინარეობს

$$(0, b)=0 \tag{1}$$

ტოლობა, ე. ი. ნულოვანი ვექტორის ნებისმიერ b ვექტორზე სკალარული ნამრავლი უდრის ნულს; კერძოდ, ნულს უდრის ნულოვანი ვექტორის სკალარული კვადრატი.

II და III-დან მაშინვე გამომდინარეობს შემდეგი ფორმულა ვექტორთა ორი სისტემის წრფივ კომბინაციათა სკალარული ნამრავლისათვის:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i, \sum_{j=1}^{l}\beta_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j(\alpha_i, b_j). \tag{2}$$

თუ n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში განმარტებულია სკალარული გამრავლება, მაშინ ამ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე.

n-განზომილებიან წრფივ V_n სივრცეში ნებისმიერი n-სათვის შეიძლება განიმარტოს სკალარული გამრავლება, ე. ი. ეს სივრცე შეიძლება გადაიქცეს ევკლიდურ სივრცედ.

მართლაც, ავიღოთ V_n სივრცეში ნებისმიერი $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი. თუ

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \quad b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i,$$

მაშინ დავუშვათ

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i. \tag{3}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ სრულდება I—IV პირობები, ე. ი. (1) ტოლობა განსაზღვრავს სკალარულ გამრავლებას V_n სივრცეში.

ვხედავთ, რომ, საერთოდ, n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში სკალარული გამრავლება შეიძლება მოიცეს მრავალი სხვადასხვა წესით — (3) განმარტება, გასაგებია, დამოკიდებულია ბაზისის არჩევაზე, ხოლო ჩვენ ჯერ არ ვიცით, გარდა ამისა, შეიძლება თუ არა სკალარული გამრავლების შემოტანა რაიმე

პრინციპიალურად განსხვავებული წესითაც. ჩვენი უახლოესი მიზანია n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ევკლიდურ სივრცედ გადაქცევის ყველა შესაძლო წესების მიმოხილვა და დადგენა იმისა, რომ ყოველი n-სათვის გარკვეული აზრით არსებობს ერთადერთი n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე.

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი n-განზომილებიანი ევკლიდური E_n სივრცე, ე. ი. n-განზომილებიან წრფივ სივრცეში ნებისმიერი წესით შემოტანილია სკალარული გამრავლება. a და b ვექტორებს ეწოდებათ **ორთოგონალური**, თუ მათი სკალარული ნამრავლი უდრის ნულს,

$$(a, b)=0.$$

(1)-დან გამომდინარეობს, რომ ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის ორთოგონალურია; მაგრამ შეიძლება არსებობდნენ არანულოვანი ორთოგონალური ვექტორებიც.

ვექტორთა სისტემას ეწოდება **ორთოგონალური სისტემა**, თუ ამ სისტემის ყველა ვექტორი წყვილ-წყვილად ერთმანეთის ორთოგონალურია.

არანულოვან ვექტორთა ყოველი ორთოგონალური სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ვთქვათ, მართლაც, E_n-ში მოცემულია $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ვექტორთა სისტემა, ამასთან $a_i \neq 0$, $i=1, 2, \ldots, k$, და

$$(a_i, a_j)=0, \quad \text{როცა } i \neq j. \tag{4}$$

თუ

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k=0,$$

მაშინ, თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ სკალარულად a_i ვექტორზე, $1 \leqslant i \leqslant k$, (1), (2) და (4)-ის გამო მივიღებთ:

$$0=(0, a_i)=(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k, a_i)=$$

$$=\alpha_1(a_1, a_i)+\alpha_2(a_2, a_i)+\ldots+\alpha_k(a_k, a_i)=\alpha_i(a_i, a_i).$$

ვინაიდან, IV-ის თანახმად, $(a_i, a_i)>0$, აქედან გამომდინარეობს $\alpha_i=0$, $i=1, 2, \ldots, k$, რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

ახლა აღწერილი იქნება **ორთოგონალიზაციის პროცესი**, ე. ი. რაიმე გადასვლის წესი ევკლიდური E_n სივრცის k რაოდენობის

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{5}$$

ვექტორთა ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემიდან ორთოგონალურ სისტემაზე, რომელიც აგრეთვე შედგება k არანულოვან ვექტორისაგან; ამ ვექტორებს აღვნიშნავთ $b_1, b_2, \ldots, b_k$-თი.

დავუშვათ $b_1=a_1$, ე. ი. (5) **სისტემის პირველი ვექტორი შევა ჩვენს მიერ აგებულ ორთოგონალურ სისტემაში.** შემდეგ, დავუშვათ

$$b_2=\alpha_1 b_1+a_2.$$

ვინაიდან $b_1=a_1$, ხოლო a_1 და a_2 ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი არიან, ამიტომ b_2 ვექტორი ნულისაგან განსხვავებულია ნებისმიერი α_1 რიცხვისათვის.

ავირჩიოთ ეს რიცხვი იმ პირობით, რომ b_2 ვექტორი იყოს b_1 ვექტორის ორთოგონალური:

$$0=(b_1, b_2)=(b_1, \alpha_1 b_1+a_2)=\alpha_1(b_1, b_1)+(b_1, a_2),$$

საიდანაც, IV-ის გამო,

$$\alpha_1=-\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}.$$

ვთქვათ, უკვე აგებულია არანულოვანი $b_1, b_2, \ldots, b_l$ ვექტორთა ორთოგონალური სისტემა; დამატებით დავუშვათ, რომ ყოველი i-სათვის $1 \leqslant i \leqslant l$, b_i ვექტორი არის $a_1, a_2, \ldots, a_i$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია. ეს დაშვება შესრულდება b_{l+1} ვექტორისათვისაც, თუ მას ავირჩევთ

$$b_{l+1}=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\ldots+\alpha_l b_l+a_{l+1}$$

სახით. ამასთან b_{l+1} ვექტორი იქნება ნულისაგან განსხვავებული, ვინაიდან (5) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო a_{l+1} ვექტორი არ შედის $b_1, b_2, \ldots, b_l$ ვექტორთა გამოსახულებებში. ავირჩიოთ α_i, $i=1, 2, \ldots, l$, კოეფიციენტები იმ პირობით, რომ b_{l+1} ვექტორი იყოს ორთოგონალური ყველა b_i ვექტორისა, $i=1, 2, \ldots, l$:

$$0=(b_i, b_{l+1})=(b_i, \alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\ldots+\alpha_l b_l+a_{l+1})=$$
$$=\alpha_1(b_i, b_1)+\alpha_2(b_i, b_2)+\ldots+\alpha_l(b_i, b_l)+(b_i, a_{l+1});$$

აქედან, ვინაიდან $b_1, b_2, \ldots, b_l$ ვექტორები ერთმანეთის ორთოგონალურია,

$$\alpha_i(b_i, b_i)+(b_i, a_{l+1})=0,$$

ე. ი.

$$\alpha_i=-\frac{(b_i, a_{l+1})}{(b_i, b_i)},\ i=1, 2, \ldots, l.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, ავაგებთ საძიებელ ორთოგონალურ $b_1, b_2, \ldots, b_k$ სისტემას.

თუ გამოვიყენებთ ორთოგონალიზაციის პროცესს E_n სივრცის ნებისმიერი ბაზისის მიმართ, მივიღებთ n არანულოვანი ვექტორისაგან შედგენილ ორთოგონალურ სისტემას, ე. ი., ვინაიდან ეს სისტემა, დამტკიცებულის თანახმად, წრფივად დამოუკიდებელია, ორთოგონალურ ბაზისს. ამასთან, თუ გამოვიყენებთ ორთოგონალიზაციის პროცესის პირველ ნაბიჯთან დაკავშირებით გაკეთებულ შენიშვნას და აგრეთვე გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი არანულოვანი ვექტორი შეიძლება შევიტანოთ სივრცის რომელიმე ბაზისში, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ კიდევ შემდეგი დებულება:

ყოველ ევკლიდურ სივრცეს გააჩნია ორთოგონალური ბაზისები, ამასთან ამ სივრცის ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორი შედის რომელიმე ორთოგონალური ბაზისის შემადგენლობაში.

შემდგომში მნიშვნელოვან როლს ითამაშებს ორთოგონალური ბაზისების ერთი სპეციალური სახე; ამ სახის ბაზისები შეესაბამებიან კოორდინატთა დე-

კარტის მართკუთხოვან სისტემებს, რომლებიც გამოიყენებიან ანალიზურ გეომეტრიაში.

b ვექტორს ვუწოდოთ ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი, თუ მისი სკალარული კვადრატი უდრის ერთს,

$$(b, b)=1.$$

თუ $a\neq 0$, საიდანაც $(a, a)>0$, მაშინ a ვექტორის ნ ო რ მ ი რ ე ბ ა ეწოდება

$$b=\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\, a$$

ვექტორზე გადასვლას. b ვექტორი იქნება ნორმირებული, ვინაიდან

$$(b, b)=\left(\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\, a, \quad \frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\, a\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{(a, a)}}\right)^2 (a, a)=1.$$

ევკლიდური E_n სივრცის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისს ეწოდება ო რ თ ო ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი, თუ ის ორთოგონალურია, ხოლო ყველა მისი ვექტორი ნორმირებულია, ე. ი.

$$\begin{aligned} &(e_i, e_j)=0, \text{ როცა } i\neq j, \\ &(e_i, e_i)=1, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

ყ ო ვ ე ლ ე ვ კ ლ ი დ უ რ ს ი ვ რ ც ე ს გ ა ა ჩ ნ ი ა ო რ თ ო ნ ო რ მ ი რ ე ბ ული ბ ა ზ ი ს ე ბ ი.

დამტკიცებისათვის საკმარისია ავიღოთ ნებისმიერი ორთოგონალური ბაზისი და მოვახდინოთ ყველა მისი ვექტორის ნორმირება. ამასთან, ბაზისი დარჩება ორთოგონალური, ვინაიდან ნებისმიერი α და β-სათვის $(a, b)=0$-დან გამომდინარეობს

$$(\alpha a, \beta b)=\alpha\beta(a, b)=0.$$

ე ვ კ ლ ი დ უ რ ი E_n ს ი ვ რ ც ი ს $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბ ა ზ ი ს ი ი ქ ნ ე ბ ა ო რ თ ო ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი მ ა შ ი ნ დ ა მ ხ ო ლ ო დ მ ა შ ი ნ, რ ო ც ა ს ი ვ რ ც ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ო რ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ს კ ა ლ ა რ უ ლ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი უ დ რ ი ს მ ი თ ი თ ე ბ უ ლ ბ ა ზ ი ს შ ი ა მ ვ ე ქ ტ ო რ თ ა შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ი ს ჯ ა მ ს, ე. ი.

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \qquad b=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j \tag{7}$$

ტ ო ლ ო ბ ე ბ ი დ ა ნ გ ა მ ო მ დ ი ნ ა რ ე ო ბ ს

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i. \tag{8}$$

მართლაც, თუ ბაზისისათვის სრულდება (6) ტოლობები, მაშინ

$$(a, b)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \quad \sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\right)=\sum_{i, j=1}^{n}\alpha_i\beta_j(e_i, e_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i.$$

პირიქით, თუ ბაზისი ისეთია, რომ ნებისმიერი a და b ვექტორებისათვის, რომლებიც ამ ბაზისში წარმოიდგინებიან (7) სახით, სამართლიანია (8) ტოლობა, მაშინ, თუ a და b ვექტორებად ავიღებთ ამ ბაზისის ნებისმიერ ორ, ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ან ერთი და იგივე e_i და e_j ვექტორს, (8)-დან გამოვიყვანთ (6) ტოლობებს.

თუ ამ მიღებულ შედეგს შევადარებთ ნებისმიერი n-სათვის n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცეების არსებობის ადრე გადმოცემულ დამტკიცებას, შეიძლება გამოვთქვათ შემდეგი დებულება: თუ n-განზომილებიან წრფივ V_n სივრცეში არჩეულია ნებისმიერი ბაზისი, მაშინ V_n-ში შეიძლება ისე მოიცეს სკალარული გამრავლება, რომ მიღებულ ევკლიდურ სივრცეში ამორჩეული ბაზისი იქნება ერთ-ერთი ორთონორმირებული ბაზისთაგანი.

ევკლიდური სივრცეების იზომორფიზმი. ევკლიდურ E და E' სივრცეებს ეწოდებათ იზომორფული, თუ ამ სივრცეების ვექტორებს შორის შეიძლება დამყარდეს ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომ სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

1) ეს თანადობა წარმოადგენს იზომორფულ თანადობას E და E' სივრცეებს შორის, თუ ესენი განხილულია როგორც წრფივი სივრცეები (იხ. § 29);

2) ეს თანადობა ინარჩუნებს სკალარულ ნამრავლს; სხვა სიტყვებით, თუ E-ს a და b ვექტორების ანასახებია E'-ის შესაბამისად a' და b' ვექტორები, მაშინ

$$(a, b)=(a', b'). \tag{9}$$

1) პირობიდან მაშინვე გამომდინარეობს, რომ იზომორფულ ევკლიდურ სივრცეებს აქვთ ერთი და იგივე განზომილება. დავამტკიცოთ შებრუნებული დებულება:

ნებისმიერი ევკლიდური E და E' სივრცეები, რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე განზომილება n, ერთმანეთის იზომორფულია.

მართლაც, E და E' სივრცეებში ამოვირჩიოთ ორთონორმირებული ბაზისები

$$e_1, e_2, \cdots, e_n \tag{10}$$

და, შესაბამისად,

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n. \tag{11}$$

თუ E-დან ყოველ

$$a=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

ვექტორს შევუთანადებთ E'-დან

$$a'=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i$$

ვექტორს, რომელსაც (11) ბაზისში იგივე კოორდინატები აქვს, რაც a ვექტორს (10) ბაზისში, ცხადია, მივიღებთ იზომორფულ თანადობას წრფივ E და E' სივრცეებს შორის. ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (9) ტოლობაც: თუ

$$b=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i, \qquad b'=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e'_i,$$

მაშინ, (8)-ის ძალით—გავითვალისწინოთ (10) და (11) ბაზისების ორთონორმირებულობა! —

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=(a', b').$$

ბუნებრივია იზომორფული ევკლიდური სივრცეები არ ჩავთვალოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებულად. ამიტომ ყოველი n-სათვის არსებობს ერთადერთი n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე იმავე აზრით, როგორც ყოველი n-სათვის არსებობს ერთადერთი n-განზომილებიანი ნამდვილი წრფივი სივრცე.

კომპლექსური წრფივი სივრცეების შემთხვევაზე ამ პარაგრაფის ცნებები და შედეგები გადაიტანება შემდეგნაირად. კომპლექსურ წრფივ სივრცეს ეწოდება *უნიტარული სივრცე*, თუ მასში მოცემულია სკალარული გამრავლება, ამასთან (a, b) იქნება, საზოგადოდ, კომპლექსური რიცხვი; ამავე დროს უნდა სრულდებოდეს **II—IV** აქსიომები (უკანასკნელი აქსიომის ჩამოყალიბებაში ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ არანულოვანი ვექტორის სკალარული კვადრატი ნამდვილია და მკაცრად დადებითი), ხოლო **I** აქსიომა იცვლება

$$\mathrm{I}' \qquad (a, b)=\overline{(b, a)}$$

აქსიომით, სადაც, ჩვეულებისამებრ, ხაზი აღნიშნავს შეუღლებულ კომპლექსურ რიცხვზე გადასვლას.

მაშასადამე, სკალარული გამრავლება უკვე აღარ იქნება კომუტატური. მიუხედავად ამისა, II აქსიომის სიმეტრიული ტოლობა სამართლიანი რჩება,

$$\mathrm{II}' \qquad (a, b+c)=(a, b)+(a, c),$$

ვინაიდან

$$(a, b+c)=\overline{(b+c, a)}=\overline{(b, a)+(c, a)}=\overline{(b, a)}+\overline{(c, a)}=(a, b)+(a, c).$$

მეორე მხრივ

$$\mathrm{III}' \qquad (a, \alpha b)=\bar{\alpha}(a, b),$$

ვინაიდან

$$(a, \alpha b)=\overline{(\alpha b, a)}=\overline{\alpha (b, a)}=\bar{\alpha}\,\overline{(b, a)}=\bar{\alpha}(a, b).$$

ვექტორთა სისტემის ორთოგონალობისა და ორთონორმირების ცნებები გადაიტანება უნიტარული სივრცეების შემთხვევაზე ყოველგვარი ცვლილებების გარეშე. ისევე როგორც ზემოთ, მტკიცდება ორთონორმირებული ბაზისების არსებობა ყოველ სასრულგანზომილებიან უნიტარულ სივრცეში. მაგრამ, ამასთან, თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის ორთონორმირებული ბაზისი და a, b ვექტორებს ამ ბაზისში აქვთ (7) ჩაწერა, მაშინ

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i.$$

ამ თავის შემდგომი პარაგრაფების შედეგები აგრეთვე შეიძლება გადატანილ იქნას ევკლიდურიდან უნიტარულ სივრცეებზე. ჩვენ ამას არ გავაკეთებთ და დაინტერესებულ მკითხველს ვთავაზობთ სპეციალურ წიგნებს წრფივ ალგებრაში.

§ 35. ორთოგონალური მატრიცები, ორთოგონალური გარდაქმნები

ვთქვათ, მოცემულია n უცნობის ნამდვილი წრფივი გარდაქმნა:

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} q_{ik}y_k,\ i=1, 2, \dots, n; \tag{1}$$

ამ გარდაქმნის მატრიცი აღვნიშნოთ Q-თი. ამ გარდაქმნას გადაყავს x_1, $x_2, \dots, x_n$ უცნობთა კვადრატების ჯამი, ე. ი. $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ კვადრატული ფორმა, რომელიც წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმათა ნორმალურ სახეს (იხ. § 28), $y_1, y_2, \dots, y_n$ უცნობთა რომელიღაც კვადრატულ ფორმაში. შემთხვევით ეს ახალი კვადრატული ფორმა თვითონ შეიძლება აღმოჩნდეს $y_1, y_2, \dots, y_n$ უცნობთა კვადრატების ჯამი, ე. ი. შეიძლება ადგილი ჰქონდეს

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2 \tag{2}$$

ტოლობას, რომელიც იგივურია $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების მათი (1) გამოსახულებებით შეცვლის შემდეგ. უცნობთა (1) წრფივ გარდაქმნას, რომელსაც ეს თვისება გააჩნია, ე. ი., როგორც ამბობენ, რომელიც უცნობთა კვადრატების ჯამს ინვარიანტულს ტოვებს, ეწოდება **უცნობების ორთოგონალური გარდაქმნა**, ხოლო მის Q მატრიცს — **ორთოგონალური მატრიცი.**

არსებობს ბევრი სხვა, ზემოთ მოყვანილი განმარტების ეკვივალენტური, განმარტება ორთოგონალური გარდაქმნის და ორთოგონალური მატრიცისა. მივუთითოთ ზოგიერთ მათგანზე, რომლებიც აუცილებელია შემდგომში.

§ 26-დან ვიცით კანონი, რომლითაც გარდაიქმნება კვადრატული ფორმის მატრიცი უცნობთა წრფივი გარდაქმნის შესრულების დროს. თუ მას ჩვენ შემთხვევაში გამოვიყენებთ და გავითვალისწინებთ, რომ მატრიცი კვადრატული ფორმისა, რომელიც წარმოადგენს ყველა უცნობის კვადრატთა ჯამს, არის ერთეულოვანი მატრიცი, მივიღებთ, რომ (2) ტოლობა ტოლფასია მატრიცული

$$Q'EQ=E$$

ტოლობისა, ე. ი.

$$Q'Q=E, \tag{3}$$

საიდანაც

$$Q'=Q^{-1} \tag{4}$$

და ამიტომ სამართლიანია

$$QQ'=E \tag{5}$$

ტოლობაც.

ამრიგად, (4)-ის გამო, **ორთოგონალური** Q **მატრიცი** შეიძლება **განისაზღვროს როგორც ისეთი მატრიცი, რომლისა-**

თვის ტრანსპონირებული Q' მატრიცი უდრის შებრუნებულ Q^{-1} მატრიცს. თითოეული (3) და (5) ტოლობათაგანი აგრეთვე შეიძლება მიღებულ იქნას ორთოგონალური მატრიცის განმარტებად.

ვინაიდან Q' მატრიცის სვეტები არიან Q მატრიცის სტრიქონები, ამიტომ (5)-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება: კვადრატული Q მატრიცი ორთოგონალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ნებისმიერი სტრიქონის ყველა ელემენტის კვადრატების ჯამი უდრის ერთს, ხოლო მისი ნებისმიერი ორი განსხვავებული სტრიქონის შესაბამის ელემენტთა ნამრავლების ჯამი უდრის ნულს. (3)-დან გამომდინარეობს ანალოგიური დებულება მატრიცის სვეტებისათვის.

თუ (3) ტოლობაში დეტერმინანტებზე გადავალთ, მივიღებთ, იმის გამო რომ $|Q'| = |Q|$,

$$|Q^2| = 1$$

ტოლობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორთოგონალური მატრიცის დეტერმინანტი უდრის ± 1. ამრიგად, უცნობთა ყოველი ორთოგონალური გარდაქმნა გადაუგვარებელია. თავისთავად იგულისხმება, რომ შებრუნებულის თქმა არ შეიძლება; აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ არა ყოველი მატრიცი, რომლის დეტერმინანტი უდრის ± 1, იქნება ორთოგონალური.

ორთოგონალურის შებრუნებული მატრიცი თვითონ იქნება ორთოგონალური. მართლაც, თუ (4)-ში გადავალთ ტრანსპონირებულ მატრიცებზე, მივიღებთ:

$$(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}.$$

მეორე მხრივ, ორთოგონალური მატრიცების ნამრავლი თვითონ ორთოგონალურია. მართლაც, თუ Q და R მატრიცები ორთოგონალურია, მაშინ, თუ გამოვიყენებთ (4)-ს, აგრეთვე § 26-ის (6) ტოლობას და შებრუნებული მატრიცისათვის სამართლიან ანალოგიურ ტოლობას, მივიღებთ

$$(QR)' = R'Q' = R^{-1}Q^{-1} = (QR)^{-1}.$$

§ 37-ში გამოყენებული იქნება შემდეგი დებულება:

ევკლიდური სივრცის ორთონორმირებული ბაზისიდან მის ნებისმიერ სხვა ორთონორმირებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი ორთოგონალურია.

ვთქვათ, მართლაც, E_n სივრცეში მოცემულია ორი ორთონორმირებული $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისი გადასვლის $Q=(q_{ij})$ მატრიცით,

$$e' = Qe.$$

ვინაიდან e ბაზისი ორთონორმირებულია, ამიტომ ნებისმიერი ორი ვექტორის, კერძოდ e' ბაზისის ნებისმიერი ორი ვექტორის, სკალარული ნამრავლი უდრის ამ ვექტორების e ბაზისში შესაბამის კოორდინატთა ნამრავლების ჯამს. მაგრამ,

ვინაიდან e' ბაზისიც ორთონორმირებულია, ამიტომ e'-ის ყოველი ვექტორის სკალარული კვადრატი უდრის ერთს, ხოლო e'-ის ნებისმიერი ორი განსხვავებული ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ნულს. აქედან, e' ბაზისის ვექტორების კოორდინატთა სტრიქონებისათვის e ბაზისში, ე. ი. Q მატრიცის სტრიქონებისათვის, გამომდინარეობს ის დებულებები, რომლებიც, როგორც ზემოთ გამოყვანილია (5) ტოლობიდან, დამახასიათებელია ორთოგონალური მატრიცისათვის.

ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნები. ახლა დროულია შევისწავლოთ ევკლიდური სივრცეების წრფივ გარდაქმნათა ერთი საინტერესო სპეციალური ტიპი, თუმცა ამ ტიპის გარდაქმნებს შემდეგ არ გამოვიყენებთ.

ევკლიდური E_n სივრცის წრფივ φ გარდაქმნას ეწოდება ამ *ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნა*, თუ ის ინახავს ყოველი ვექტორის სკალარულ კვადრატს, ე. ი. ნებისმიერი a ვექტორისათვის

$$(a\varphi,\ a\varphi)=(a,\ a). \tag{6}$$

აქედან მიიღება შემდეგი უფრო ზოგადი დებულება, რომელიც, გასაგებია, აგრეთვე შეიძლება მიღებულ იქნას ორთოგონალური გარდაქმნის განმარტებად:

ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური φ გარდაქმნა ინახავს ნებისმიერი ორი a, b ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

$$(a\varphi,\ b\varphi)=(a,\ b). \tag{7}$$

მართლაც, (6)-ის გამო

$$((a+b)\varphi,\ (a+b)\varphi)=(a+b,\ a+b).$$

მაგრამ

$$((a+b)\varphi,\ (a+b)\varphi)=(a\varphi+b\varphi,\ a\varphi+b\varphi)=$$

$$=(a\varphi,\ a\varphi)+(a\varphi,\ b\varphi)+(b\varphi,\ a\varphi)+(b\varphi,\ b\varphi),$$

$$(a+b,\ a+b)=(a,\ a)+(a,\ b)+(b,\ a)+(b,\ b).$$

აქედან, თუ როგორც a-სათვის, ისე b-სათვის გამოვიყენებთ (6)-ს და გავითვალისწინებთ სკალარული გამრავლების კომუტატურობას, მივიღებთ

$$2\,(a\varphi,\ b\varphi)=2\,(a,\ b)$$

და ამიტომ ადგილი აქვს (7)-აც.

ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნის დროს ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისის ყველა ვექტორის ანასახი თვითონ ქმნის ორთონორმირებულ ბაზისს. პირიქით, თუ ევკლიდური სივრცის წრფივ გარდაქმნას გადაყავს ერთი ორთონორმირებული ბაზისი მაინც კვლავ ორთონორმირებულ ბაზისში, მაშინ ეს გარდაქმნა ორთოგონალურია.

მართლაც, ვთქვათ, φ არის E_n სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნა, ხოლო $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ამ სივრცის ნებისმიერი ორთონორმირებული ბაზისი. (7)-ის გამო

$$(e_i, e_i)=1, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$
$$(e_i, e_j)=0 \text{ როცა } i\neq j$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$(e_i\varphi, e_i\varphi)=1, \ i=1, 2, \ldots, n,$$
$$(e_i\varphi, e_j\varphi)=0 \text{ როცა } i\neq j$$

ტოლობები, ე. ი. $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ ვექტორთა სისტემა აღმოჩნდა ორთოგონალური და ნორმირებული და ამიტომ ის იქნება E_n სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი.

პირიქით, ვთქვათ, E_n სივრცის წრფივ φ გარდაქმნას გადაყავს ორთონორმირებული $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი ისევ ორთონორმირებულ ბაზისში, ე. ი. $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ ვექტორთა სისტემა არის E_n სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი. თუ

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

არის E_n სივრცის ნებისმიერი ვექტორი, მაშინ

$$a\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i\varphi),$$

ე. ი. $a\varphi$ ვექტორს $e\varphi$ ბაზისში აქვს ის კოორდინატები, რაც a ვექტორს e ბაზისში. მაგრამ ორივე ეს ბაზისი არის ორთონორმირებული და ამიტომ ნებისმიერი ვექტორის სკალარული კვადრატი უდრის ნებისმიერ ამ ბაზისთაგანში მისი კოორდინატების კვადრატების ჯამს. ამრიგად,

$$(a, a)=(a\varphi, a\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,$$

ე. ი. (6) ტოლობა მართლაც სრულდება.

ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნა ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში მოიცემა ორთოგონალური მატრიცით. პირიქით, თუ ევკლიდური სივრცის წრფივი გარდაქმნა ერთ ორთონორმირებულ ბაზისში მაინც მოიცემა ორთოგონალური მატრიცით, მაშინ ეს გარდაქმნა ორთოგონალურია.

მართლაც, თუ φ გარდაქმნა ორთოგონალურია, ხოლო $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი ორთონორმირებული, მაშინ $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ ვექტორთა სისტემაც იქნება ორთონორმირებული ბაზისი. e ბაზისში φ გარდაქმნის A მატრიცი,

$$e\varphi=Ae, \tag{8}$$

იქნება, მაშასადამე, ორთონორმირებული e ბაზისიდან ორთონორმირებულ $e\varphi$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, ე. ი. როგორც ზემოთ დამტკიცებულია, იქნება ორთოგონალური.

პირიქით, ვთქვათ, წრფივი φ გარდაქმნა მოიცემა ორთონორმირებულ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში ორთოგონალური A მატრიცით; მაშასადამე, ადგილი აქვს (8) ტოლობას. ვინაიდან e ბაზისი ორთონორმირებულია, ამიტომ ნებისმიერი ვექტორების, კერძოდ $e_1\varphi, e_2\varphi, \ldots, e_n\varphi$ სისტემის ნებისმიერი ვექტორების, სკალარული ნამრავლი უდრის e ბაზისში ამ ვექტორთა შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლების ჯამს. ამიტომ, ვინაიდან A მატრიცი ორთოგონალურია,

$$(e_i\varphi, e_i\varphi)=1, \ i=1, 2, \ldots, n,$$

$$(e_i\varphi, e_j\varphi)=0 \text{ როცა } i \neq j,$$

ე. ი. $e\varphi$ სისტემა თვითონ აღმოჩნდა E_n სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი. აქედან გამომდინარეობს φ გარდაქმნის ორთოგონალობა.

როგორც მკითხველმა იცის ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან, სიბრტყის ყველა აფინურ გარდაქმნათა შორის, რომლებიც უძრავად ტოვებს კოორდინატთა სათავეს, ბრუნვები (შეერთებული, შესაძლოა, სარკისებურ ასახვებთან) წარმოადგენენ ერთადერთ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის შემნახველ გარდაქმნებს. ამრიგად, n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ სივრცის „ბრუნვები“.

ევკლიდური სივრცის ორთოგონალურ გარდაქმნათა რიცხვს, ცხადია, ეკუთვნის იგივური გარდაქმნა. მეორე მხრივ, ჩვენს მიერ დამყარებული კავშირი ორთოგონალურ გარდაქმნებსა და ორთოგონალურ მატრიცებს შორის და აგრეთვე § 31-ში გადმოცემული კავშირი წრფივ გარდაქმნებზე და მატრიცებზე ოპერაციებს შორის საშუალებას იძლევა ორთოგონალური მატრიცების ცნობილი თვისებებიდან გამოვიყვანოთ ევკლიდური სივრცის ორთოგონალური გარდაქმნების შემდეგი თვისებები, რომლებიც უშუალოდაც ადვილად მოწმდება:

ყოველი ორთოგონალური გარდაქმნა გადაუგვარებელია და მისი შებრუნებული გარდაქმნა აგრეთვე ორთოგონალურია.

ნებისმიერი ორთოგონალური გარდაქმნების ნამრავლი ორთოგონალურია.

§ 36. სიმეტრიული გარდაქმნები

n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის წრფივ φ გარდაქმნას ეწოდება *სიმეტრიული* (ანუ *თვითშეუღლებული*), თუ ამ სივრცის ნებისმიერი ორი a, b ვექტორისათვის ადგილი აქვს

$$(a\varphi, b)=(a, b\varphi) \tag{1}$$

ტოლობას, ე. ი. სიმეტრიული გარდაქმნის სიმბოლო სკალარული გამრავლების დროს შეიძლება გადავიტანოთ ერთი მამრავლიდან მეორეზე.

სიმეტრიული გარდაქმნების მაგალითებია, ცხადია, იგივური ε გარდაქმნა და ნულოვანი ω გარდაქმნა. უფრო ზოგად მაგალითს წარმოადგენს წრფივი

გარდაქმნა, რომლის დროს ყოველი ვექტორი მრავლდება ფიქსირებულ α რიცხვზე,

$$a\varphi = \alpha a.$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში

$$(a\varphi, b) = (\alpha a, b) = \alpha(a, b) = (a, \alpha b) = (a, b\varphi).$$

სიმეტრიული გარდაქმნების როლი ძალიან დიდია და ჩვენთვის აუცილებელია მათი საკმაოდ დეტალურად შესწავლა.

ევკლიდური სივრცის სიმეტრიული გარდაქმნა ნებისმიერ ორთონორმირებულ ბაზისში მოიცემა სიმეტრიული მატრიცით. პირიქით, თუ ევკლიდური სივრცის წრფივი გარდაქმნა ერთ ორთონორმირებულ ბაზისში მაინც მოიცემა სიმეტრიული მატრიცით, მაშინ ეს გარდაქმნა სიმეტრიულია.

მართლაც, ვთქვათ, სიმეტრიული φ გარდაქმნა მოიცემა ორთონორმირებული $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში $A=(\alpha_{ij})$ მატრიცით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ორთონორმირებულ ბაზისში ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ამ ვექტორთა შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლების ჯამს, მივიღებთ:

$$(e_i\varphi, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} e_k, e_j\right) = \alpha_{ij},$$

$$(e_i, e_j\varphi) = \left(e_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} e_k\right) = \alpha_{ji},$$

ე. ი. (1)-ის გამო,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

ყველა i და j-სათვის. ამრიგად, A მატრიცი აღმოჩნდა სიმეტრიული.

პირიქით, ვთქვათ, წრფივი φ გარდაქმნა მოიცემა ორთონორმირებულ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში სიმეტრიული $A=(\alpha_{ij})$ მატრიცით,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ ყველა } i \text{ და } j \text{ სათვის.} \tag{2}$$

თუ

$$b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \qquad c = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j$$

სივრცის ნებისმიერი ვექტორებია, მაშინ

$$b\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (e_i\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij}\right) e_j,$$

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (e_j\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_{ji}\right) e_i.$$

თუ გამოვიყენებთ e ბაზისის ორთონორმირებას, მივიღებთ

$$(b\varphi, c) = \sum_{j,i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j,$$

$$(b, c\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \alpha_{ji}.$$

(2)-ის გამო უკანასკნელი ტოლობების მარჯვენა მხარეები ერთმანეთს ემთხვევა და ამიტომ

$$(b\varphi, c) = (b, c\varphi),$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

მიღებული შედეგიდან გამომდინარეობს სიმეტრიული გარდაქმნების შემდეგი თვისება, რომელიც უშუალოდაც ადვილად მოწმდება:

სიმეტრიული გარდაქმნების ჯამი და აგრეთვე სიმეტრიული გარდაქმნის რიცხვზე ნამრავლი წარმოადგენს სიმეტრიულ გარდაქმნებს.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა:

სიმეტრიული გარდაქმნის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია.

ვინაიდან ნებისმიერი წრფივი გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები ემთხვევიან ნებისმიერ ბაზისში ამ გარდაქმნის მატრიცის მახასიათებელ ფესვებს, ხოლო სიმეტრიული გარდაქმნა მოიცემა ორთონორმირებულ ბაზისებში სიმეტრიული მატრიცებით, ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება:

სიმეტრიული მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია.

მართლაც, ვთქვათ, λ_0 არის სიმეტრიული $A = (\alpha_{ij})$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვი (შესაძლოა კომპლექსური),

$$|A - \lambda_0 E| = 0.$$

მაშინ კომპლექსურ კოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \lambda_0 x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

განტოლებათა სისტემას აქვს ნულის ტოლი დეტერმინანტი, ე. ი. გააჩნია არანულოვანი $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ამონახსნები, საზოგადოდ კომპლექსური; ამრიგად,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = \lambda_0 \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

თუ (3) ტოლობების ყოველი i-ურის ორივე მხარეს გავამრავლებთ β_i რიცხვის შეუღლებულ $\overline{\beta_i}$ რიცხვზე და მიღებული ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს ცალცალკე შევკრებთ, მივიღებთ

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta_i} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\beta_i} \tag{4}$$

ტოლობამდე.

(4)-ში λ_0-ის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია, როგორც ჯამი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებისა, რომელთაგან ერთი მაინც მკაცრად დადებითია. ამიტომ λ_0 რიცხვის ნამდვილობა დამტკიცდება, თუ (4) ტოლობის მარცხენა მხარის ნამდვილობას დავამტკიცებთ, რისთვისაც საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ეს კომპლექსური რიცხვი ემთხვევა თავის შეუღლებულს. აქ პირველად იქნება გამოყენებული (ნამდვილი) A მატრიცის სიმეტრიულობა.

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta_i}} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta_i}} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\beta_j} \beta_i =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji} \overline{\beta_j} \beta_i = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\beta_i} \beta_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta_i}.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელის წინა ტოლობა მიღებულია აჯამვის ინდექსებისათვის აღნიშვნების უბრალო შეცვლით: i-ს ნაცვლად წერია j, ხოლო j-ს ნაცვლად წერია i. მაშასადამე, თეორემა დამტკიცებულია.

ევკლიდური E_n სივრცის წრფივი φ გარდაქმნა სიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E_n სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი, შედგენილი ამ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან.

ერთი მხრიდან ეს დებულება თითქმის ცხადია: თუ E_n-ში არსებობს ორთონორმირებული $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი, ამასთან

$$e_i\varphi = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

მაშინ e ბაზისში φ გარდაქმნა მოიცემა

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

დიაგონალური მატრიცით. მაგრამ დიაგონალური მატრიცი სიმეტრიულია და ამიტომ φ გარდაქმნა მოიცემა ორთონორმირებულ e ბაზისში სიმეტრიული მატრიცით, ე. ი. იქნება სიმეტრიული.

თეორემის ძირითად შებრუნებულ დებულებას დავამტკიცებთ ინდუქციით E_n სივრცის n განზომილების მიმართ. მართლაც, როცა $n=1$, E_1 სივრცის ყოველ წრფივ φ გარდაქმნას აუცილებლად გადაჰყავს ნებისმიერი ვექტორი მის პროპორციულ ვექტორში. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი არანულოვანი a ვექტორი იქნება φ-ს საკუთრივი ვექტორი (როგორც, სხვათა-

შორის, გამომდინარეობს ისიც, რომ E_1 სივრცის ყოველი წრფივი გარდაქმნა იქნება სიმეტრიული). თუ მოვახდენთ a ვექტორის ნორმირებას, მივიღებთ E_1 სივრცის საძიებელ ორთონორმირებულ ბაზისს.

ვთქვათ, დებულება უკვე დამტკიცებულია $(n-1)$ განზომილებიანი ევკლიდური სივრცისათვის და, ვთქვათ, E_n სივრცეში მოცემულია სიმეტრიული φ გარდაქმნა. ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ φ სათვის არსებობს ნამდვილი მახასიათებელი λ_0 ფესვი. მაშასადამე, ეს რიცხვი იქნება φ გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობა. თუ a არის φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, რომელიც მიეკუთვნება ამ საკუთრივ მნიშვნელობას, მაშინ a ვექტორის ყოველი პროპორციული არანულოვანი ვექტორიც იქნება φ ს საკუთრივი ვექტორი, რომელიც მიეკუთვნება იმავე საკუთრივ λ_0 მნიშვნელობას, ვინაიდან

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)=\alpha(\lambda_0 a)=\lambda_0(\alpha a).$$

კერძოდ, a ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ ისეთ e_1 ვექტორს, რომ

$$e_1\varphi=\lambda_0 e_1,$$
$$(e_1, e_1)=1.$$

როგორც დამტკიცებულია § 34-ში, არანულოვანი e_1 ვექტორი შეიძლება შევიტანოთ E_n სივრცის ორთონორმირებულ

$$e_1, e'_2, \ldots, e'_n \tag{5}$$

ბაზისში. ის ვექტორები, რომელთა პირველი კოორდინატი (5) ბაზისში უდრის ნულს, ე. ი. $\alpha_2 e'_2+\ldots+\alpha_n e'_n$ სახის ვექტორები, ცხადია ქმნიან E_n სივრცის $(n-1)$-განზომილებიან წრფივ ქვესივრცეს, რომელსაც L-ით აღვნიშნავთ. ის იქნება $(n-1)$-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცეც კი, ვინაიდან სკალარული ნამრავლი, განსაზღვრულია რა E_n-ის ყველა ვექტორისათვის, განსაზღვრულია, კერძოდ, L-ის ვექტორებისათვის, ამასთან გააჩნია ყველა აუცილებელი თვისება.

L ქვესივრცე შედგება E_n სივრცის ყველა იმ ვექტორისაგან, რომლებიც e_1 ვექტორის ორთოგონალურია. მართლაც, თუ

$$a=\alpha_1 e_1+\alpha'_2 e'_2+\ldots+\alpha'_n e'_n,$$

მაშინ, (5) ბაზისის ორთოგონალობისა და e_1 ვექტორის ნორმირების გამო,

$$(e_1, a)=\alpha_1(e_1, e_1)+\alpha'_2(e_1, e'_2)+\ldots+\alpha'_n(e_1, e'_n)=\alpha_1,$$

ე. ი. $(e_1, a)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1=0$.

თუ a ვექტორი ეკუთვნის L ქვესივრცეს, ე. ი. $(e_1, a)=0$, მაშინ $a\varphi$ ვექტორიც ეკუთვნის L-ს. მართლაც, φ გარდაქმნის სიმეტრიულობის გამო,

$$(e_1, a\varphi)=(e_1\varphi, a)=(\lambda_0 e_1, a)=\lambda_0(e_1, a)=\lambda_0 0=0,$$

ე. ი. $a\varphi$ ვექტორი e_1-ის ორთოგონალურია და ამიტომ ეკუთვნის L-ს. L ქვესივრცის ეს თვისება, რომელსაც φ გარდაქმნის მიმართ მისი ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ო ბ ა ეწოდება, საშუალებას იძლევა ჩავთვალოთ φ, გ ა ნ ხ ი ლ უ ლ ი მ ხ ო ლ ო დ L-ი ს ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ზ ე გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ ა შ ი, ამ $(n-1)$-განზომილე-

ბიანი ევკლიდური სივრცის წრფივ გარდაქმნად. ის იქნება L სივრცის სიმეტრიული გარდაქმნაც კი, ვინაიდან (1) ტოლობა, რომელიც სრულდება E_n-ის ნებისმიერი ვექტორებისათვის, შესრულდება, კერძოდ, L-ში შემავალი ვექტორებისათვის.

ინდუქციური დაშვების ძალით, L სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი, შედგენილი φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან; აღვნიშნოთ იგი $e_2, \ldots, e_n$-ით. ყველა ეს ვექტორი e_1 ვექტორის ორთოგონალურია და ამიტომ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ იქნება E_n სივრცის საძიებელი ორთონორმირებული ბაზისი, შედგენილი φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 37. კვადრატული ფორმის მთავარ ღერძებზე დაყვანა. ფორმათა წყვილები

გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის უკანასკნელი თეორემა შემდეგი მატრიცული თეორემის დასამტკიცებლად:

ყოველი სიმეტრიული A მატრიცისათვის შეიძლება მოინახოს ისეთი ორთოგონალური Q მატრიცი, რომელსაც A მატრიცი დაყავს დიაგონალურ სახეზე, ე. ი. $Q^{-1}AQ$ მატრიცი, მიღებული A მატრიცის ტრანსფორმირებით Q მატრიცის საშუალებით, იქნება დიაგონალური.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის სიმეტრიული A მატრიცი. თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის n-განზომილებიანი ევკლიდური E_n სივრცის რაიმე ორთონორმირებული ბაზისი, მაშინ A მატრიცი იძლევა ამ ბაზისში სიმეტრიულ φ გარდაქმნას. როგორც დამტკიცებულია, E_n-ში არსებობს ორთონორმირებული $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ბაზისი, შედგენილი φ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან; ამ ბაზისში φ მოიცემა დიაგონალური B მატრიცით (იხ. § 33). მაშინ, § 31-ის თანახმად,

$$B = Q^{-1}AQ, \tag{1}$$

სადაც Q არის f ბაზისიდან e ბაზისზე გადასვლის მატრიცი,

$$e = Qf. \tag{2}$$

ეს მატრიცი, როგორც ერთი ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორე ასეთსავე ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, იქნება ორთოგონალური — იხ. § 35. თეორემა დამტკიცებულია.

ვინაიდან ორთოგონალური Q მატრიცისათვის მისი შებრუნებული მატრიცი უდრის ტრანსპონირებულს, $Q^{-1} = Q'$, ამიტომ (1) ტოლობა შეიძლება გადაიწეროს

$$B = Q'AQ$$

სახით. მაგრამ § 26-დან ცნობილია, რომ სწორედ ასე გარდაიქმნება სიმეტრიული A მატრიცი კვადრატული ფორმისა, რომელიც განიცდის ცვლადთა წრფივ გარდაქმნას Q მატრიცით. ხოლო თუ გავითვალისწინებთ, რომ ორთოგონალური მატრიცით უცნობთა წრფივი გარდაქმნა წარმოადგენს ორთოგო-

ნალურ გარდაქმნას (იხ. § 35) და რომ კანონიკურ სახეზე დაყვანილ კვადრატულ ფორმას აქვს დიაგონალური მატრიცი. წინა თეორემის საფუძველზე ვღებულობთ შემდეგ თეორემას ნამდვილი კვადრატული ფორმის მთავარ ღერძებზე დაყვანის შესახებ:

ყოველი ნამდვილი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ კვადრატული ფორმა უცნობთა რაიმე ორთოგონალური გარდაქმნით შეიძლება დაყვანილ იქნას კანონიკურ სახეზე.

თუმცა შეიძლება არსებობდეს უცნობთა ბევრი სხვადასხვა ორთოგონალური გარდაქმნა, რომლებსაც მოცემული კვადრატული ფორმა დაყავთ კანონიკურ სახეზე, მაგრამ თვით ეს კანონიკური სახე სინამდვილეში განისაზღვრება ცალსახად:

როგორიც არ უნდა იყოს ორთოგონალური გარდაქმნა, რომელსაც დაყავს კანონიკურ სახეზე A მატრიცის მქონე $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ კვადრატული ფორმა, ამ კანონიკური სახის კოეფიციენტები იქნება A მატრიცის მახასიათებელი ფესვები, აღებული თავიანთი ჯერადობით.

ვთქვათ, მართლაც, f ფორმა რაიმე ორთოგონალური გარდაქმნით დაყვანილია

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_1 y^2{}_1 + \mu_2 y^2{}_2 + \cdots + \mu_n y^2{}_n$$

კანონიკურ სახეზე. ეს ორთოგონალური გარდაქმნა ინვარიანტულს ტოვებს უცნობთა კვადრატების ჯამს და ამიტომ, თუ λ არის ახალი უცნობი, მაშინ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

თუ გადავალთ ამ კვადრატული ფორმების დეტერმინანტებზე და გავითვალისწინებთ, რომ წრფივი გარდაქმნის შესრულების შემდეგ კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი მრავლდება გარდაქმნის დეტერმინანტის კვადრატზე (იხ. § 28), ხოლო ორთოგონალური გარდაქმნის დეტერმინანტის კვადრატი უდრის ერთს (იხ. § 35), მივიღებთ

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \mu_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 - \lambda & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda)$$

ტოლობას, რომლიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

ამ შედეგს შეიძლება მიეცეს მატრიცული ჩამოყალიბებაც:

როგორიც არ უნდა იყოს ორთოგონალური მატრიცი, რომელსაც დაყავს სიმეტრიული A მატრიცი დიაგონალურ სახეზე, მიღებული დიაგონალური მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული იქნება A მატრიცის მახასიათებელი ფესვები, აღებული თავიანთი ჯერადობით.

კვადრატული ფორმის მთავარ ღერძებზე დამყვანი ორთოგონალური გარდაქმნის პრაქტიკული მონახვა. ზოგიერთ ამოცანაში აუცილებელია ვიცო-

ღეთ არა მარტო ის კანონიკური სახე, რომელზედაც დაიყვანება ნამდვილი კვადრატული ფორმა ორთოგონალური გარდაქმნით, არამედ თვით ის ორთოგონალური გარდაქმნაც, რომელიც ანხორციელებს ამ დაყვანას. გაძნელდებოდა ამ გარდაქმნის მონახვა, თუ გამოვიყენებდით მთავარ ღერძებზე დაყვანის შესახებ თეორემის დამტკიცებას, და გვინდა მივუთითოთ სხვა გზაზე, სახელდობრ, საჭიროა მხოლოდ ვისწავლოთ მონახვა ორთოგონალური Q მატრიცისა, რომელსაც მოცემული სიმეტრიული A მატრიცი დაჰყავს დიაგონალურ სახეზე ან, რაც იგივეა, მონახვა მისი შებრუნებული Q^{-1} მატრიცისა. (2)-ის გამო ეს იქნება e ბაზისიდან f ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, ე. ი. მისი სტრიქონები არიან e ბაზისში A მატრიცით განსაზღვრული სიმეტრიული φ გარდაქმნის n საკუთრივი ვექტორისაგან შედგენილი ორთონორმირებული სისტემის საკოორდინატო სტრიქონები (e ბაზისში). დაგვრჩენია მოვნახოთ საკუთრივი ვექტორების ასეთი სისტემა.

ვთქვათ, λ_0 არის A მატრიცის ნებისმიერი მახასიათებელი ფესვი და, ვთქვათ, მისი ჯერადობა უდრის k_0-ს. § 33-დან ვიცით, რომ φ გარდაქმნის საკუთრივი λ_0 მნიშვნელობის შესაბამისი ყველა საკუთრივი ვექტორის საკოორდინატო სტრიქონების ერთობლიობა ემთხვევა წრფივ ერთგვაროვან

$$(A-\lambda_0 E)X=0 \tag{3}$$

განტოლებათა სისტემის არანულოვან ამონახსენთა ერთობლიობას; A მატრიცის სიმეტრიულობა საშუალებას იძლევა აქ A'-ს ნაცვლად დავწეროთ A. სიმეტრიული A მატრიცის დიაგონალურ სახეზე დამყვანი ორთოგონალური მატრიცის არსებობისა და ამ დიაგონალური სახის ერთადერთობის ზემოთ დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ (3) სისტემისათვის ყოველ შემთხვევაში შეიძლება k_0 წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენის მონახვა. ამონახსენთა ასეთ სისტემას ვეძებთ § 12-დან ცნობილი მეთოდებით, ხოლო შემდეგ ვახდენთ მიღებული სისტემის ორთოგონალიზაციას და ნორმირებას § 34-ის თანახმად.

თუ λ_0-ად თანმიმდევრობით ავიღებთ სიმეტრიული A მატრიცის ყველა განსხვავებულ მახასიათებელ ფესვს და გავითვალისწინებთ, რომ ამ ფესვთა ჯერადობების ჯამი უდრის n-ს, მივიღებთ φ გარდაქმნის n საკუთრივი ვექტორისაგან შედგენილ სისტემას, რომლებიც მოცემულია მათი კოორდინატებით e ბაზისში. იმის დასამტკიცებლად, რომ ეს იქნება საკუთრივი ვექტორების საძიებელი ორთონორმირებული სისტემა, დაგვრჩენია დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი φ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს ს ა კ უ თ რ ი ვ ი ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ი, რ ო მ ლ ე ბ ი ც მ ი ე კ უ თ ვ ნ ე ბ ა ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა ს ა კ უ თ რ ი ვ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ე ბ ს, ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ა.

ვთქვათ, მართლაც,

$$b\varphi=\lambda_1 b, \quad c\varphi=\lambda_2 c,$$

ამასთან $\lambda_1 \neq \lambda_2$. ვინაიდან

$$(b\varphi, c)=(\lambda_1 b, c)=\lambda_1 (b, c),$$

$$(b, c\varphi)=(b, \lambda_2 c)=\lambda_2 (b, c),$$

ამიტომ

$$(b\varphi, c)=(b, c\varphi)$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lambda_1(b, c)=\lambda_2(b, c)$$

ანუ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$-ის გამო,

$$(b, c)=0,$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავიყვანოთ მთავარ ღერძებზე

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

კვადრატული ფორმა.

ამ ფორმის A მატრიცს აქვს სახე:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

მოვნახოთ მისი მახასიათებელი მრავალწევრი:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3).$$

ამრიგად, A მატრიცს აქვს სამჯერადი მახასიათებელი ფესვი 1 და მარტივი მახასიათებელი ფესვი -3. მაშასადამე, უკვე შეგვიძლია დავწეროთ ის კანონიკური სახე, რომელზედაც დაიყვანება f ფორმა ორთოგონალური გარდაქმნით:

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2.$$

ვიპოვოთ ორთოგონალური გარდაქმნა, რომელიც ანხორციელებს ამ დაყვანას. წრფივ ერთგვაროვან (3) განტოლებათა სისტემა, როცა $\lambda_0=1$, ღებულობს სახეს:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

ამ სისტემის რანგი უდრის 1-ს და ამიტომ მისთვის შეიძლება მოინახოს სამი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენი. ასეთები იქნებიან, მაგალითად,

$$b_1=(1, 1, 0, 0),$$
$$b_2=(1, 0, 1, 0),$$
$$b_3=(-1, 0, 0, 1).$$

თუ მოვახდენთ ვექტორთა ამ სისტემის ორთოგონალიზაციას, მივიღებთ

$$c_1=b_1=(1, 1, 0, 0),$$
$$c_2=-\frac{1}{2}c_1+b_2=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$
$$c_3=\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2+b_3=\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

ვექტორთა სისტემას.

მეორე მხრივ, წრფივ ერთგვაროვან (3) განტოლებათა სისტემა, როცა $\lambda_0=-3$, ღებულობს სახეს:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

ამ სისტემის რანგი უდრის 3 ს. მისი არანულოვანი ამონახსნია

$$c_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$$

ვექტორი.

c_1, c_2, c_3, c_4 ვექტორთა სისტემა ორთოგონალურია. თუ მოვახდენთ მის ნორმირებას, მივალთ

$$c'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right),$$

$$c'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\right),$$

$$c'_3=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c'_4=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

ვექტორთა ორთონორმირებულ სისტემამდე. ამრიგად, f ფორმა დაიყვანება მთავარ ღერძებზე

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,$$

$$y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1-\frac{1}{\sqrt{6}}x_2+\sqrt{\frac{2}{3}}x_3,$$

$$y_3=-\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{2\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}x_4,$$

$$y_4=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$$

ორთოგონალური გარდაქმნით.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჯერადი საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი წრფივად დამოუკიდებელ საკუთრივ ვექტორთა სისტემის არჩევა არის ძალზედ არაცალსახა და ამიტომ არსებობს ბევრი სხვადასხვა ორთოგონალური გარდაქმნა, რომელსაც დაყავს f ფორმა კანონიკურ სახეზე. ჩვენ მოვნახეთ მხოლოდ ერთი მათგანი.

ფორმათა წყვილები. ვთქვათ, მოცემულია n უცნობის ნამდვილი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ კვადრატული ფორმების წყვილი. არსებობს თუ არა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების ისეთი გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც შეეძლოს ერთდროულად ორივე ამ ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე?

ზოგად შემთხვევაში პასუხი იქნება უარყოფითი. მაგალითად, განვიხილოთ:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2, \quad g(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

ფორმათა წყვილი. ვთქვათ, არსებობს გადაუგვარებელი წრფივი

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11} y_1 + c_{12} y_2, \\ x_2 &= c_{21} y_1 + c_{22} y_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

გარდაქმნა, რომელსაც დაყავს ორივე ეს ფორმა კანონიკურ სახეზე. იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს (4) გარდაქმნით f ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე, c_{11}, c_{12} კოეფიციენტებიდან ერთ-ერთი უნდა იყოს ნულის ტოლი, სხვანაირად გვექნებოდა $2c_{11}c_{12}\, y_1 y_2$ წევრი. y_1, y_2 უცნობთა ნუმერაციის შეცვლით, თუ საჭიროა, შეიძლება დავუშვათ, რომ $c_{12} = 0$ და ამიტომ $c_{11} \neq 0$. მაგრამ ახლა მივიღეთ, რომ

$$g(x_1, x_2) = c_{11} y_1 (c_{21} y_1 + c_{22} y_2) = c_{11} c_{21} y_1^2 + c_{11} c_{22}\, y_1 y_2.$$

ვინაიდან g ფორმა აგრეთვე უნდა გადავიდეს კანონიკურ სახეში, ამიტომ $c_{11} c_{22} = 0$, ე. ი. $c_{22} = 0$, რაც $c_{12} = 0$-თან ერთად ეწინააღმდეგება წრფივი (4) გარდაქმნის გადაუგვარებლობას.

სულ სხვა მდგომარეობა გვექნება, თუ დავუშვებთ, რომ ერთი ჩვენი ფორმათაგანი, მაგალითად $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, არის დადებითად განსაზღვრული[1]. სახელდობრ, სამართლიანია თეორემა:

თუ f და g არის n უცნობის ნამდვილი კვადრატული ფორმების წყვილი, რომელთაგან მეორე დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ არსებობს გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც ერთდროულად დაყავს g ფორმა ნორმალურ სახეზე, ხოლო f ფორმა კანონიკურ სახეზე.

დამტკიცებისათვის შევასრულოთ ჯერ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა

$$X = TY,$$

რომელსაც დადებითად განსაზღვრული g ფორმა დაყავს

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

ნორმალურ სახეზე. ამ დროს f ფორმა გადავა ახალი ცვლადების რაღაც φ ფორმაში,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

მოვახდინოთ ახლა $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობების ორთოგონალური გარდაქმნა,

$$Y = QZ,$$

---

[1] ეს პირობა არ არის, რა თქმა უნდა, აუცილებელი; ასე მაგალითად, ორივე $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ და $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ ფორმას უკვე აქვს კანონიკური სახე, თუმცა მათ შორის არ არის დადებითად განსაზღვრული ფორმა.

რომელსაც φ ფორმა დაყავს მთავარ ღერძებზე,

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\ldots+\lambda_n z_n^2.$$

ამ გარდაქმნას (იხ. განმარტება § 35-ში) გადაყავს $y_1, y_2, \ldots, y_n$ უცნობთა კვადრატების ჯამი $z_1, z_2, \ldots, z_n$ უცნობთა კვადრატების ჯამში. ამის შედეგად ვღებულობთ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\ldots+\lambda_n z_n^2,$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2,$$

ე. ი. წრფივი

$$X=(TQ)Z$$

გარდაქმნა არის საძიებელი გარდაქმნა.

თავი მეცხრე

მრავალწევრთა ფესვების გამოთვლა

§ 38. მეორე, მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებები

§ 23-ში დამტკიცებული ძირითადი თეორემა რიცხვითი კოეფიციენტებიანი n-ური ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრისათვის ადგენს კომპლექსური ფესვის არსებობას. მაგრამ მისი დამტკიცებანი (როგორც ზემოთ მოყვანილი, ისე აქამდე ცნობილი სხვა ნებისმიერი) წმინდა „არსებობის დამტკიცებანია" და არ იძლევა ფესვთა პრაქტიკული ძიების არავითარ მეთოდს. ამ მეთოდების ძიება დაიწყო, ბუნებრივია, კვადრატული განტოლების ამოხსნის ანალოგიური ფორმულის გამოყვანის ცდით, რომელიც ნამდვილ კოეფიციენტებიან შემთხვევაში ცნობილია მკითხველთათვის ალგებრის სასკოლო კურსიდან. ახლა ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს ფორმულა სამართლიანი რჩება კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლებისათვის და რომ ანალოგიური ფორმულები, თუმცა ბევრად უფრო რთული, შეიძლება გამოყვანილ იქნეს მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებებისთვისაც.

კვადრატული განტოლებები. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული განტოლება

$$x^2+px+q=0$$

ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით; უფროსი კოეფიციენტი ზოგადობის შეუზღუდველად შეიძლება ჩავთვალოთ ერთის ტოლად. ეს განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად გადაიწეროს

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0.$$

როგორც ვიცით, $\frac{p^2}{4}-q$ კომპლექსური რიცხვიდან შეიძლება კვადრატული ფესვის ამოღება კომპლექსურ რიცხვთა სისტემიდან გამოუსვლელად. ამ

ფესვის ორ მნიშვნელობას, რომელნიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან, ჩვენ ჩავწერთ $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ სახით. ამიტომ

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,,$$

ე. ი. მოცემული განტოლების ფესვები შეიძლება მოიძებნოს ჩვეულებრივი ფორმულით

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^2-3x+(3-i)=0.$$

თუ გამოვიყენებთ გამოყვანილ ფორმულას, მივიღებთ:

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-(3-i)}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3+4i}\,.$$

§ 19-ის მეთოდების დახმარებით ვპოულობთ:

$$\sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i)$$

და ამიტომ $x_1=2+i$, $x_2=1-i$.

კუბური განტოლებები. კვადრატულ განტოლებათა შემთხვევისაგან განსხვავებით კუბური განტოლებების ამოხსნისათვის აქამდე არ გვქონდა მეთოდი ნამდვილ კოეფიციენტებიან შემთხვევაშიც კი. ჩვენ გამოვიყვანთ კვადრატული განტოლების ფორმულის ანალოგიურ ფორმულას კუბური განტოლებისათვის, ამასთანავე თავიდანვე დავუშვებთ, რომ კოეფიციენტები ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია.

ვთქვათ მოცემულია კუბური განტოლება

$$y^3+ay^2+by+c=0 \tag{1}$$

ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით. შევცვალოთ (1) განტოლებაში უცნობი y ახალი x უცნობით, რომელიც y-თან დაკავშირებულია ტოლობით

$$y=x-\frac{a}{3}\,. \tag{2}$$

მივიღებთ განტოლებას x-ის მიმართ, რომელიც არ შეიცავს, რაც ადვილი შესამოწმებელია, ამ უცნობის კვადრატს, ე. ი.

$$x^3+px+q=0 \tag{3}$$

სახის განტოლებას. თუ იქნება ნაპოვნი (3) განტოლების ფესვები, მაშინ, (2)-ის გამო მივიღებთ მოცემული (1) განტოლების ფესვებსაც. ჩვენ დაგვრჩენია, მაშასადამე, ვისწავლოთ ნებისმიერ კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი „არასრული“ კუბური (3) განტოლების ამოხსნა.

ძირითადი თეორემის თანახმად, (3) განტოლებას სამი კომპლექსური ფესვი აქვს. ვთქვათ x_0 არის ნებისმიერი მათგანი. შემოვიტანოთ დამხმარე უცნობი u და განვიხილოთ მრავალწევრი

$$f(u)=u^2-x_0u-\frac{p}{3}.$$

მისი კოეფიციენტები კომპლექსური რიცხვებია და ამიტომ მას გააჩნია ორი კომპლექსური ფესვი α და β, ამასთან, ვიეტას ფორმულების თანახმად,

$$\alpha+\beta=x_0, \tag{4}$$

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}. \tag{5}$$

თუ ჩავსვამთ (3)-ში x_0 ფესვის (4) გამოსახულებას, მივიღებთ:

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$

ან

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0.$$

მაგრამ (5)-დან გამომდინარეობს $3\alpha\beta+p=0$, და ამიტომ ვღებულობთ:

$$\alpha^3+\beta^3=-q. \tag{6}$$

მეორე მხრივ (5)-დან გამომდინარეობს

$$\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{7}$$

(6) და (7) ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ α^3 და β^3 რიცხვები არიან

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \tag{8}$$

კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვები.

თუ ამოვხსნით (8)-ს, მივიღებთ:

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

საიდანაც[1]

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{9}$$

მივდივართ შემდეგ **კარდანოს ფორმულამდე**, რომელიც გამოსახავს (3) განტოლების ფესვებს მისი კოეფიციენტებისაგან კუბური და კვადრატული რადიკალების საშუალებით:

---

[1] სულ ერთია (8) განტოლების რომელ ფესვს მივიჩნევთ α^3-ად და რომელს β^3-ად, რადგან α და β (6) და (7) ტოლობებში და აგრეთვე x_0-სათვის (4) გამოსახულებაში შედიან სიმეტრიულად.

$$x_0=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

რადგან კომპლექსურ რიცხვთა ველში კუბურ რადიკალს აქვს სამი მნიშვნელობა, ამიტომ (9) ფორმულები იძლევიან სამ მნიშვნელობას α-სთვის და სამს β-სთვის. მაგრამ, როდესაც ვიყენებთ კარდანოს ფორმულას, არ შეიძლება ავიღოთ α რადიკალის და β რადიკალის მნიშვნელობების ნებისმიერი კომბინაცია: α-ს მოცემული მნიშვნელობისთვის უნდა ავიღოთ β-ს სამი მნიშვნელობისგან მხოლოდ ის, რომელიც აკმაყოფილებს (5)-ს.

დავუშვათ, α_1 არის α რადიკალის სამი მნიშვნელობისგან ნებისმიერი. მაშინ ორი სხვა შეიძლება, როგორც დამტკიცებულია § 19-ში, მივიღოთ α_1-ის გამრავლებით ერთიანიდან ε და ε^2 კუბურ ფესვებზე:

$$\alpha_2=\alpha_1, \varepsilon, \quad \alpha_3=\alpha_1\varepsilon^2.$$

აღვნიშნოთ β_1-ით β რადიკალის სამი მნიშვნელობისგან ის, რომელიც შეესაბამება α რადიკალის α_1 მნიშვნელობას (5)-ის ძალით, ე. ი. $\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3}$. β-ს ორი სხვა მნიშვნელობა იქნება

$$\beta_2=\beta_1\varepsilon, \quad \beta_3=\beta_1\varepsilon^2.$$

რადგან, $\varepsilon^3=1$ გამო,

$$\alpha_2\beta_3=\alpha_1\varepsilon\cdot\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1\beta_1\varepsilon^3=\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3},$$

ამიტომ α რადიკალის α_2 მნიშვნელობას შეესაბამება β რადიკალის β_3 მნიშვნელობა; ანალოგიურად α_3 მნიშვნელობას შეესაბამება β_2 მნიშვნელობა. ამგვარად, (3) განტოლების სამივე ფესვი შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\alpha_1+\beta_1,\\ x_2&=\alpha_2+\beta_3=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2,\\ x_3&=\alpha_3+\beta_2=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კუბური განტოლებები. ვნახოთ რა შეიძლება ითქვას

$$x^3+px+q=0 \tag{11}$$

არასრული კუბური განტოლების ფესვების შესახებ თუ მისი კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია. თურმე ამ შემთხვევაში მთავარ როლს ასრულებს კარდანოს ფორმულაში კვადრატული რადიკალის ქვეშ მდგომი $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ გამოსახულების ნიშანი. შევნიშნოთ, რომ ამ გამოსახულების ნიშანი შებრუნებულია

$$D=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$$

გამოსახულების ნიშნისა, რომელსაც (11) განტოლების დისკრიმინანტს უწოდებენ (შეადარეთ ქვევით § 54); შემდგომ ფორმულირებებში გამოყენებული იქნება დისკრიმინანტის ნიშანი.

1) ვთქვათ $D<0$. ამ შემთხვევაში კარდანოს ფორმულის ყოველი კვადრატული რადიკალის ქვეშ დგას დადებითი რიცხვი და ამიტომ ყოველი კუბური რადიკალის ქვეშ იქნება ნ ა მ დ ვ ი ლ ი რიცხვი. მაგრამ ნამდვილი რიცხვის კუბურ ფესვს აქვს ერთი ნამდვილი და ორი შეუღლებული კომპლექსური მნიშვნელობა. ვთქვათ α_1 არის α რადიკალის ნამდვილი მნიშვნელობა; მაშინ α_1-ის შესაბამისი β რადიკალის β_1 მნიშვნელობაც (5) ფორმულის ძალით ნამდვილი იქნება, რადგან რიცხვი p ნამდვილია. ამგვარად (11) განტოლების $x_1=\alpha_1+\beta_1$ ფესვი აღმოჩნდა ნამდვილი. ორ სხვა ფესვს ვიპოვით, თუ შევცვლით ამ პარაგრაფის (10) ფორმულაში $\varepsilon=\varepsilon_1$ და $\varepsilon^2=\varepsilon_2$ ფესვებს ერთეულიდან მათი (7) გამოსახულებებით § 19-დან:

$$x_2=\alpha_1\varepsilon+\beta_1\varepsilon^2=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1-\beta_1}{2},$$

$$x_3=\alpha_1\varepsilon^2+\beta_1\varepsilon=\alpha_1\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\beta_1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1-\beta_1}{2};$$

რადგან α_1 და β_1 ნამდვილი რიცხვებია, ეს ფესვები იქნებიან შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები, ამასთან წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია, რადგან $\alpha_1\neq\beta_1$ რიცხვები სხვადასხვა კუბური რადიკალების მნიშვნელობებია.

ამგვარად, თუ $D<0$, (11) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ა ქ ვ ს ე რ თ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი დ ა ო რ ი შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ი ფ ე ს ვ ი.

2) ვთქვათ $D=0$. ამ შემთხვევაში

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\qquad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

დაე α_1 იყოს α რადიკალის ნამდვილი მნიშვნელობა; მაშინ β_1 იქნება, (5)-ის ძალით, ნამდვილი, ამასთანავე $\alpha_1=\beta_1$. თუ შევცვლით (10) ფორმულაში β_1-ს α_1-ით და გამოვიყენებთ ცხად ტოლობას $\varepsilon+\varepsilon^2=-1$, მივიღებთ.

$$x_1=2\alpha_1,\ x_2=\alpha_1(\varepsilon+\varepsilon^2)=-\alpha_1,\ x_3=\alpha_1(\varepsilon^2+\varepsilon)=-\alpha_1.$$

ამგვარად, თ უ $D=0$, მ ა შ ი ნ (11) გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ყ ვ ე ლ ა ფ ე ს ვ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ა, ა მ ა ს თ ა ნ ო რ ი მ ა თ გ ა ნ ი ე რ თ მ ა ნ ე თ ი ს ტ ო ლ ი ა.

3) დაბოლოს ვთქვათ $D>0$. ამ შემთხვევაში კარდანოს ფორმულაში კვადრატული რადიკალის ნიშნის ქვეშ დგას უარყოფითი ნამდვილი რიცხვი, და ამიტომ კუბური რადიკალის ნიშნების ქვეშ დგანან შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. ამგვარად, ახლა α და β რადიკალების ყველა მნიშვნელობა კომპლექსური იქნება. თუმცა (11) განტოლების ფესვთა შორის ერთი მაინც უნდა იყოს ნამდვილი. დაე ეს იყოს ფესვი

$$x_1=\alpha_0+\beta_0.$$

რადგან α_0 და β_0 რიცხვთა ჯამიც და მათი ნამრავლიც, რომელიც $-\frac{p}{3}$ უდრის, ნამდვილია, ამიტომ α_0 და β_0 ერთმანეთის შეუღლებულნი არიან როგორც ნამდვილ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ფესვები. მაგრამ მაშინ $\alpha_0\varepsilon$ და $\beta_0\varepsilon^2$ რიცხვებიც ერთმანეთის შეუღლებულია, ისე, როგორც $\alpha_0\varepsilon^2$ და $\beta_0\varepsilon$ რიცხვებიც, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (11) განტოლების

$$x_2=\alpha_0\varepsilon+\beta_0\varepsilon^2, \quad x_3=\alpha_0\varepsilon^2+\beta_0\varepsilon$$

ფესვებიც ნამდვილი იქნება.

მივიღეთ, რომ (11) განტოლების სამივე ფესვი ნამდვილია, ამასთან ადვილი საჩვენებელია, რომ მათ შორის ტოლი არ არის. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლებოდა x_1 ფესვის არჩევანი ისე გაგვეხორციელებინა, რომ ადგილი ჰქონოდა $x_2=x_3$ ტოლობას, საიდანაც

$$\alpha_0(\varepsilon-\varepsilon^2)=\beta_0(\varepsilon-\varepsilon^2),$$

ე. ი. $\alpha_0=\beta_0$, რაც აშკარად შეუძლებელია.

ამგვარად, თუ $D>0$, მაშინ (11) განტოლებას აქვს სამი განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

ეს უკანასკნელი შემთხვევა გვიჩვენებს, რომ კარდანოს ფორმულის პრაქტიკული მნიშვნელობა ძალზედ მცირეა. მართლაც, თუმცა როცა $D>0$ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი (11) განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილი რიცხვია, მაინც მათი მოძებნა კარდანოს ფორმულის საშუალებით მოითხოვს კუბური ფესვის ამოღებას კომპლექსური რიცხვიდან, რისი გაკეთებაც შეგვიძლია მხოლოდ ამ რიცხვთა ტრიგონომეტრიულ ფორმაზე გადასვლით. ამიტომ ფესვთა რადიკალების საშუალებით ჩაწერა კარგავს პრაქტიკულ მნიშვნელობას. მეთოდების საშუალებით, რომელიც ამ წიგნის ფარგლებს სცდება, შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ განხილულ შემთხვევაში (11) განტოლების ფესვები საერთოდ არანაირად არ შეიძლება რადიკალების საშუალებით კოეფიციენტებით გამოისახოს, ისე რომ რადიკალების ქვეშ იყოს ნამდვილი გამოსახულებები. (11) განტოლების ამოხსნის ეს შემთხვევა დაუყვანად იწოდება (არ აურიოთ მრავალწევრის დაუყვანადობასთან!).

მაგალითები: 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$y^3+3y^2-3y-14=0. \tag{12}$$

ჩასმას $y=x-1$ ეს განტოლება მიჰყავს

$$x^3-6x-9=0$$

სახემდე. აქ $p=-6$, $q=-9$, ამიტომ

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{49}{4}>0,$$

ე. ი. (12) განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი და ორი შეუღლებული კომპლექსური ფესვი. (9)-ის მიხედვით $\alpha=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{8}$, $\beta=\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{1}$. ამიტომ

$\alpha_1=2$, $\beta_1=1$, ე. ი. $x_1=3$. ორი სხვა ფესვი მოიძებნება (10) ფორმულით: $x_2=-\frac{3}{2}+$

$+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad x_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული განტოლების ფესვებია

$$y_1=2,\ y_2=-\frac{5}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y_3=-\frac{5}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

რიცხვები.

2. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^3-12x+16=0.$$

აქ $p=-12$, $q=16$, ამიტომ

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

აქედან გამომდინარეობს: $\alpha=\sqrt[3]{-8}$, ე. ი. $\alpha_1=-2$, ამიტომ

$$x_1=-4,\ x_2=x_3=2.$$

3. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^3-19x+30=0.$$

აქ $p=-19$, $q=30$, ამიტომ

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{784}{27}<0.$$

ამგვარად, თუ დავრჩებით ნამდვილ რიცხვთა ფარგლებში, კარდანოს ფორმულა ამ განტოლებისათვის გამოუსადეგარია, თუმცა მისი ფესვებია 2,3 და —5 ნამდვილი რიცხვები.

მეოთხე ხარისხის განტოლებები. მეოთხე ხარისხის ნებისმიერი კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0 \tag{13}$$

განტოლების ამოხსნა დაიყვანება რომელიღაც მესამე ხარისხის დამხმარე განტოლების ამოხსნაზე. ეს ხერხდება შემდეგი მეთოდის საშუალებით, რომელიც ფ ე რ ა რ ი ს ეკუთვნის.

წინასწარ (13) განტოლება $y=x-\frac{a}{4}$ ჩასმით დაიყვანება

$$x^4+px^2+qx+r=0 \tag{14}$$

სახეზე. შემდეგ ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი შემდეგნაირად იგივურად გარდაიქმნება დამხმარე α პარამეტრის საშუალებით:

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha x^2-p\alpha$$

ანუ

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0. \tag{15}$$

ახლა α ისე შევარჩიოთ, რომ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრი სრულ კვადრატად იქცეს. ამისათვის მას ერთი ორჯერადი ფესვი უნდა ჰქონდეს, ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0 \tag{16}$$

ტოლობას. (16) ტოლობა α უცნობის მიმართ კომპლექსურ კოეფიციენტებიან კუბურ განტოლებას წარმოადგენს. ამ განტოლებას, როგორც ვიცით, სამი კომპლექსური ფესვი აქვს. ვთქვათ α_0 ერთ-ერთი მათგანია; ის გამოისახება, კარდანოს ფორმულის გამო, (16) განტოლების კოეფიციენტებით რადიკალების დახმარებით, ე. ი. (14) განტოლების კოეფიციენტებით.

α-ს მნიშვნელობის ამ არჩევისას (15)-ში კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულ მრავალწევრს ორჯერადი $\frac{q}{4\alpha_0}$ ფესვი აქვს და ამიტომ (15) განტოლება ასეთ სახეს იღებს

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0\right)^2 - 2\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right)^2 = 0,$$

ე. ი. იგი ორ კვადრატულ განტოლებად იშლება:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}\, x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0, \\ x^2 + \sqrt{2\alpha_0}\, x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

რადგან (14) განტოლებიდან (17) განტოლებამდე იგივური გარდაქმნების დახმარებით მივედით, ამიტომ (17) განტოლების ფესვები (14) განტოლების ფესვებიც იქნება. ამასთანავე ადვილი დასანახია, რომ (14) განტოლების ფესვები გამოისახებიან კოეფიციენტებით რადიკალების დახმარებით. ჩვენ არ ამოვწერთ შესაბამის ფორმულებს მათი სირთულის და პრაქტიკული გამოუსადეგარობის გამო, არ გამოვიკვლევთ აგრეთვე ცალკე შემთხვევას, როცა (14) განტოლებას ნამდვილი კოეფიციენტები აქვს.

შენიშვნა უმაღლესი ხარისხის განტოლებათა შესახებ. მაშინ როცა კვადრატულ განტოლებათა ამოხსნის მეთოდებს ჯერ კიდევ ძველი ბერძნები ფლობდნენ, მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებათა ამოხსნის ზემოთ გადმოცემული მეთოდების აღმოჩენა XVI საუკუნეს ეკუთვნის. ამის შემდეგ თითქმის სამი საუკუნე გრძელდებოდა უშედეგო ცდები გადაედგათ შემდეგი ნაბიჯი, ე. ი. ეპოვნათ ფორმულები, რომლებიც რადიკალების დახმარებით გამოსახავდნენ ნებისმიერი მეხუთე ხარისხის განტოლების (ე. ი. ასოებიანი კოეფიციენტებით მოცემულ მეხუთე ხარისხის განტოლების) ფესვებს მისი კოეფიციენტების საშუალებით. ეს ცდები მხოლოდ მას შემდეგ შეწყდა, რაც გასული საუკუნის ოციან წლებში აბელმა დაამტკიცა, რომ ნებისმიერი n-ური ხარისხის განტოლებისათვის, როცა $n \geqslant 5$, ასეთი ფორმულების პოვნა შეუძლებელია.

მაგრამ აბელის ეს შედეგი არ გამორიცხავდა იმის შესაძლებლობას, რომ რიცხვითი კოეფიციენტებიანი ყოველი კონკრეტული მრავალწევრის ფესვები რამენაირად მაინც გამოისახებიან კოეფიციენტებით რადიკალთა რაიმე კომბინაციის დახმარებით, ე. ი., როგორც იტყვიან, ყოველი განტოლება ამოხსნადია რადიკალებში. მოცემული განტოლების რადიკალებში ამოხსნადობის პირობების საკითხი მთლიანად გამოიკვლია გალუამ გასული საუკუნის ოცდაათიან წლებში. აღმოჩნდა, რომ ყოველი n-ისათვის დაწყებული $n=5$-დან შესაძლებელია მივუთითოთ რადიკალებში ამოუხსნად n-ური ხარისხის განტოლებაზე, მთელრიცხოვანი კოეფიციენტებითაც კი. ასეთი იქნება მაგალითად განტოლება

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

გალუას გამოკვლევებმა გადამწყვეტი გავლენა იქონია ალგებრის შემდგომ განვითარებაზე. მაგრამ მათი გადმოცემა ჩვენს ამოცანებში არ შედის.

§ 39. ფესვების საზღვრები

ჩვენ ვიცით, რომ არ არსებობს რიცხვით კოეფიციენტებიან მრავალწევრთა ფესვების ზუსტი მნიშვნელობების ძიების მეთოდი. მიუხედავად ამისა, მექანიკის, ფიზიკისა და ტექნიკის ყოველი დარგის სრულიად სხვადასხვა პრობლემები დაიყვანება მრავალწევრთა, რომლებიც ხანდახან საკმარისად მაღალი ხარისხისაა, ფესვების საკითხზე. ეს მდგომარეობა გახდა მიზეზი მრავალი გამოკვლევისა, რომელთა მიზანი იყო შესაძლებელი გაეხადათ ამა თუ იმ დებულების გამოთქმა რიცხვითი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვების შესახებ, მათი ცოდნის გარეშე. სწავლობდნენ, მაგალითად, საკითხს თუ როგორი განლაგება აქვს ფესვებს კომპლექსურ სიბრტყეზე (პირობები, როდესაც ყველა ფესვი ერთეულოვანი წრის შიგნითაა, ე. ი. ერთზე ნაკლები მოდულისაა, როდესაც ყველა ფესვი მარცხენა ნახევარ სიბრტყეშია, ე. ი. უარყოფით ნამდვილ ნაწილიანია, და ა. შ.). ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებისათვის მუშავდებოდა ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის განსაზღვრის მეთოდები, ეძებდნენ საზღვრებს, რომელთა შორისაც ეს ფესვები უნდა ყოფილიყო მოთავსებული და, ბოლოს, მრავალი გამოკვლევა მიეძღვნა ფესვთა მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდებს: ტექნიკურ გამოყენებებში ჩვეულებრივ საკმარისია ვიცოდეთ ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობა რაიმე წინასწარ მოცემული სიზუსტით, და რომც იყოს მრავალწევრის ფესვები რადიკალებში გამოსახული, ეს რადიკალები მაინც შეიცვლებოდა მათი მიახლოებითი მნიშვნელობებით.

ყველა ეს გამოკვლევა თავის დროზე უმაღლესი ალგებრის მთავარ შინაარს შეადგენდა. ჩვენ კურსში ვათავსებთ ამ შედეგების ძალიან მცირე ნაწილს, ამასთან, ვიღებთ რა მხედველობაში გამოყენების პირველად მოთხოვნებს, ვიფარგლებით ნამდვილ კოეფიციენტებიანი განტოლებებით, აგრეთვე მათი ნამდვილი ფესვებით და მხოლოდ ზოგჯერ ვცილდებით ამ ფარგლებს. ამასთანავე ჩვენ სისტემატურად განვიხილავთ ნამდვილ კოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს როგორც ნამდვილი x ცვლადის (უწყვეტ) ნამდვილ ფუნქ-

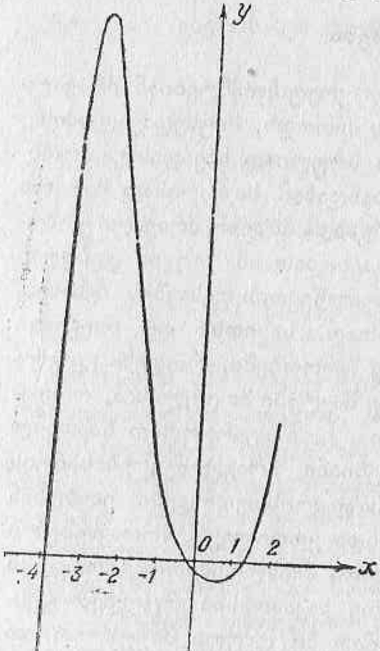
ციის და, სადაც კი ეს სასარგებლო იქნება, მოვიხმართ მათემატიკური ანალიზის შედეგებსა და მეთოდებს.

ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების გამოკვლევა სასარგებლოა დავიწყოთ ამ მრავალწევრის გრაფიკის განხილვით: ცხადია, მრავალწევრის ნამდვილი ფესვები იქნება x ღერძთან მისი გრაფიკის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები და მხოლოდ ისინი.

განვიხილოთ, მაგალითად, მეხუთე ხარისხის

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

მრავალწევრი. § 24-ის შედეგების საფუძველზე ამ მრავალწევრის ფესვების შესახებ შეგვიძლია ვთქვათ შემდეგი: რადგან მისი ხარისხი კენტია, $h(x)$-ს ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც გააჩნია; თუკი ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა ერთზე მეტია, მაშინ იგი უდრის სამს ან ხუთს, რადგან კომპლექსური ფესვები წყვილ-წყვილად შეუღლებულია.



ნახ. 9

$h(x)$ მრავალწევრის გრაფიკის განხილვა ნებას გვაძლევს მეტი ვთქვათ მის ფესვებზე. ავაგოთ ეს გრაფიკი (ნახ. 9)[1] x-ის მხოლოდ მთელი მნიშვნელობების აღებით და გამოვთვალოთ $h(x)$-ის მნიშვნელობები თუნდაც ჰორნერის მეთოდით:

x	$h(x)$
.	.
.	.
.	.
—4	—39
—3	144
—2	83
—1	18
0	—3
1	—4
2	39
.	.
.	.

ჩვენ ვხედავთ, რომ $h(x)$ მრავალწევრს სამი ნამდვილი ფესვი მაინც გააჩნია—დადებითი ფესვი α_1 და ორი უარყოფითი ფესვი α_2 და α_3, ამასთანავე

$$1<\alpha_1<2,\ -1<\alpha_2<0,\ -4<\alpha_3<-3.$$

გრაფიკის განხილვით მრავალწევრის (ნამდვილ) ფესვებზე მიღებული ინფორმაცია პრაქტიკისათვის, ჩვეულებრივ, საკმაოდ დამაკმაყოფილებელია.

[1] ნახაზზე y ღერძის მიმართ მასშტაბი აღებულია ათჯერ ნაკლები, ვიდრე x ღერძის მიმართ.

მაგრამ ყოველთვის რჩება ეჭვი ნამდვილად ნაპოვნია თუ არა ყველა ფესვი. ასე, განხილულ მაგალითში ჩვენ არ ვაჩვენეთ, რომ $x=2$ წერტილის მარჯვნივ და $x=-4$ წერტილის მარცხნივ აღარ არსებობს მრავალწევრის ფესვები. უფრო მეტიც, რადგან ჩვენ ვიღებდით x-ის მხოლოდ მთელ მნიშვნელობებს, შეიძლება დავუშვათ, რომ ჩვენს მიერ აგებული გრაფიკი სავსებით ზუსტად ვერ ასახავს $h(x)$ ფუნქციის ჭეშმარიტ ყოფაქცევას, შესაძლოა არ ასახავს მის უფრო წვრილ რხევებს და ამიტომ კარგავს ზოგ ფესვს.

მართალია, გრაფიკის აგების დროს შეგვეძლო აგვეღო არა მარტო x-ის მთელი მნიშვნელობები, არამედ x-ის მნიშვნელობები 0,1 ან 0,01 სიზუსტით. ამით სამაგიეროდ მაშინვე ძალზე გართულდებოდა $h(x)$-ის მნიშვნელობების გამოთვლა, ამავე დროს ზემოთ აღნიშნული ეჭვები სრულიადაც არ იქნებოდა ლიკვიდირებული. მეორე მხრივ, შეიძლებოდა მათემატიკური ანალიზის მეთოდებით $h(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმთა და მინიმუმთა გამოკვლევა და ამ გზით ჩვენი გრაფიკის შედარება ფუნქციის ჭეშმარიტ ყოფაქცევასთან; მაგრამ ეს მიგვიყვანდა $h'(x)$ წარმოებულის ფესვების საკითხამდე, ე. ი. ისეთივე ამოცანამდე, როგორსაც ჩვენ ვარჩევთ.

აქედან გამომდინარეობს, რომ საჭიროა იმ საზღვრების საძებნად, რომელთა შორისაც იმყოფება ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ნამდვილი ფესვები, და ამ ფესვთა რაოდენობის განსასაზღვრავად უფრო სრულყოფილი მეთოდები ვეძიოთ. ახლა ჩვენ შევუდგებით *ნამდვილ ფესვთა საზღვრების* საკითხის შესწავლას, მათი რაოდენობის საკითხი კი შემდეგ პარაგრაფში გადაგვაქვს.

უფროსი წევრის მოდულის ლემის დამტკიცება (§ 23) მრავალწევრის ფესვთა მოდულისათვის უკვე იძლევა რაღაც საზღვარს. მართლაც, თუ დავუშვებთ § 23-ის (3) უტოლობაში $k=1$, მივიღებთ, რომ, როცა

$$|x|\geqslant 1+\frac{A}{|a_0|}, \tag{1}$$

სადაც a_0 უფროსი კოეფიციენტია, ხოლო A დანარჩენი კოეფიციენტების მოდულთა მაქსიმუმი, მაშინ მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდული მეტია ყველა დანარჩენ წევრთა ჯამის მოდულზე და ამიტომ (1) უტოლობის დამაკმაყოფილებელი x-ის არავითარი მნიშვნელობა არ შეიძლება იყოს ამ მრავალწევრის ფესვი.

ამგვარად, *ნებისმიერ რიცხვით კოეფიციენტებიანი* $f(x)$ *მრავალწევრისათვის რიცხვი* $1+\frac{A}{|a_0|}$ *არის მის ყველა, ნამდვილ და კომპლექსურ, ფესვთა მოდულების ზედა საზღვარი.* ასე, ზემოთ განხილული $h(x)$ მრავალწევრისათვის ეს საზღვარი არის რიცხვი 9, რადგან $a_0=1$, $A=8$.

მაგრამ ეს საზღვარი, ჩვეულებრივ, ძალზედ მაღალია, განსაკუთრებით როცა გვაინტერესებს მხოლოდ ნამდვილ ფესვთა საზღვრები. ახლა გადმოცემული იქნება სხვა, უფრო ზუსტი, მეთოდები. ამასთან უნდა გვახსოვდეს, რომ თუ მითითებულია საზღვრები, რომელთა შორისაც უნდა იმყოფებოდნენ

მრავალწევრის ნამდვილი ფესვები, ეს სრულიადაც არ ამტკიცებს, რომ ასეთი ფესვები მართლაც არსებობენ.

ვაჩვენოთ ჯერ, რომ საკმარისია მხოლოდ ნებისმიერი მრავალწევრის დადებით ფესვთა ზემო საზღვრის მონახვა. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია n-ური ხარისხის მრავალწევრი $f(x)$ და დაე N_0 იყოს მის დადებით ფესვთა ზემო საზღვარი. განვიხილოთ

$$\varphi_1(x)=x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x)=f(-x),$$

$$\varphi_3(x)=x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

მრავალწევრები და ვიპოვოთ მათ დადებით ფესვთა ზემო საზღვრები; დაე ესენი იყვნენ შესაბამისად N_1, N_2, N_3 რიცხვები. მაშინ $\frac{1}{N_1}$ რიცხვი იქნება $f(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ქვედა საზღვარი: თუ α არის $f(x)$-ის დადებითი ფესვი, მაშინ $\frac{1}{\alpha}$ იქნება $\varphi_1(x)$-ის დადებითი ფესვი და $\frac{1}{\alpha}<N_1$-დან გამომდინარეობს $\alpha>\frac{1}{N_1}$. ანალოგიურად, $-N_2$ და $-\frac{1}{N_3}$ რიცხვები $f(x)$ მრავალწევრის უარყოფით ფესვთა ქვედა და ზედა საზღვრებია. ამრიგად, $f(x)$ მრავალწევრის ყველა დადებითი ფესვი აკმაყოფილებს $\frac{1}{N_1}<x<N_0$ უტოლობას, ყველა უარყოფითი ფესვი კი $-N_2<x<-\frac{1}{N_3}$ უტოლობას.

დადებითი ფესვების ზედა საზღვრის განსასაზღვრავად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი მეთოდი. დავუშვათ მოცემულია ნამდვილ კოეფიციენტებიანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

მრავალწევრი, ამასთან $a_0>0$. შემდგომ ვთქვათ a_k, $k\geqslant 1$, უარყოფით კოეფიციენტთაგან პირველია; ასეთი კოეფიციენტი სულ რომ არ ყოფილიყო, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრს საერთოდ არ ექნებოდა დადებითი ფესვი. დაბოლოს, დაე B უარყოფითი კოეფიციენტების აბსოლუტურ მნიშვნელობათაგან უდიდესი იყოს. მაშინ

$$1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

რიცხვი იქნება $f(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ზედა საზღვარი.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $x>1$ და $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ კოეფიციენტიდან ყველას შევცვლით ნულით, ხოლო $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ კოეფიციენტიდან ყველას — B რიცხვით, ჩვენ მრავალწევრის მნიშვნელობის მხოლოდ შემცირებას შევძლებთ, ე. ი.

$$f(x) \geqslant a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \dots + x + 1) = a_0x^n - B\,\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1},$$

ე. ი., რადგან $x>1$,

$$f(x) > a_0x^n - \frac{Bx^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1) - B\right]. \quad (2)$$

თუ

$$x \geqslant 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \quad (3)$$

მაშინ, რადგან

$$a_0x^{k-1}(x-1) - B > a_0(x-1)^k - B,$$

(2) ფორმულაში კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება დადებითია, ე. ი. $f(x)$-ის მნიშვნელობა, (2)-ის გამო, მკაცრად დადებითია. ამგვარად, (3) უტოლობის დამაკმაყოფილებელი x-ის მნიშვნელობები ვერ იქნება $f(x)$-ის ფესვები, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ეს მეთოდი ზემოთ განხილული $h(x)$ მრავალწევრისათვის იძლევა, $k=2$ და $B=7$-ის გამო, დადებით ფესვთა ზედა საზღვრად $1+\sqrt{7}$ რიცხვს, რაც შეიძლება შევცვალოთ უახლოესი მეტი რიცხვით 4.

დადებით ფესვთა ზედა საზღვრის ძიების სხვა მრავალრიცხოვანი მეთოდებიდან ჩვენ გადმოვცემთ მხოლოდ **ნიუტონის მეთოდს**. ეს მეთოდი უფრო რთულია, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი, სამაგიეროდ, ჩვეულებრივ, უფრო კარგ შედეგს იძლევა.

ვთქვათ მოცემულია ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი დადებითი უფროსი a_0 კოეფიციენტით. თუ **მრავალწევრი და ყველა მისი თანმიმდევრობითი წარმოებული** $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ **იღებს დადებით მნიშვნელობებს როცა** $x=c$, **მაშინ რიცხვი** c **იქნება დადებით ფესვთა ზედა საზღვარი.**

მართლაც, ტეილორის ფორმულის თანახმად (იხ. § 23)

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)^2\frac{f''(c)}{2!} + \dots + (x-c)^n\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ თუ $x \geqslant c$, მაშინ მარჯვნივ იქნება მკაცრად დადებითი რიცხვი, ე. ი. x-ის ასეთი მნიშვნელობა ვერ იქნება $f(x)$-ის ფესვი.

მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის შესაბამის c რიცხვის საპოვნელად სასარგებლოა შემდეგნაირად მოვიქცეთ. წარმოებული $f^{(n)}(x) = n!\,a_0$ დადებითი რიცხვია, ამიტომ $f^{(n-1)}(x)$ მრავალწევრი x-ის ზრდადი ფუნქციაა. მაშასადამე, არსებობს ისეთი რიცხვი c_1, რომ, როცა $x \geqslant c_1$, წარმოებული $f^{(n-1)}(x)$ დადებითია. აქედან გამომდინარეობს, რომ, როცა $x \geqslant c_1$, წარმოებული $f^{(n-2)}(x)$ იქნება x-ის ზრდადი ფუნქცია, ამიტომ არსებობს ისეთი რიცხვი c_2, $c_2 \geqslant c_1$,

რომ, როცა $x \geqslant c_2$, წარმოებული $f^{(n-2)}(x)$-იც დადებითი იქნება. თუ ასე გავაგრძელებთ, ბოლოს მივალთ საძიებელ c რიცხვამდე.

გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი ზემოთ განხილულ $h(x)$ მრავალწევრისათვის. ჩვენ გვაქვს:

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$

$$h'(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,$$

$$h''(x)=20x^2+24x^2-30x+16,$$

$$h'''(x)=60x^2+48x-30,$$

$$h^{IV}(x)=120x+48,$$

$$h^{V}(x)=120.$$

ადვილი შესამოწმებელია (თუგინდ ჰორნერის მეთოდით), რომ, როცა $x=2$, ყველა ეს მრავალწევრი დადებითია. ამგვარად რიცხვი 2 $h(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ზედა საზღვარია. ეს შედეგი ბევრად უფრო ზუსტია, ვიდრე ზემოთ სხვა მეთოდებით მიღებული.

$h(x)$ მრავალწევრის უარყოფით ფესვთა ქვედა საზღვრის საპოვნელად განვიხილოთ მრავალწევრი $\varphi_2(x)=-h(-x)$[1]. რადგან

$$\varphi_2(x)=x^5-2x^4-5x^3-8x^2-7x+3,$$

$$\varphi_2'(x)=5x^4-8x^3-15x^2-16x-7,$$

$$\varphi_2''(x)=20x^3-24x^2-30x-8,$$

$$\varphi_2'''(x)=60x^2-48x-30,$$

$$\varphi_2^{IV}(x)=120x^2-48,$$

$$\varphi_2^{V}(x)=120,$$

ამიტომ ყველა მრავალწევრი დადებითია, როცა $x=4$, რაც ადვილი შესამოწმებელია. ამიტომ რიცხვი 4 არის $\varphi_2(x)$-სათვის დადებით ფესვთა ზედა საზღვარი და რიცხვი -4 იქნება $h(x)$-სათვის უარყოფით ფესვთა ქვედა საზღვარი.

დაბოლოს თუ განვიხილავთ

$$\varphi_1(x)=-x^5h\left(\frac{1}{x}\right)=3x^5+7x^4-8x^3+5x^2-2x-1,$$

$$\varphi_3(x)=-x^5h\left(-\frac{1}{x}\right)=3x^5-7x^4-8x^3-5x^2-2x+1$$

მრავალწევრებს, ნიუტონის მეთოდის დახმარებით მათთვის ვიპოვით დადებით ფესვთა ზედა საზღვრად შესაბამისად რიცხვებს 1 და 4, ამიტომ $h(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ქვედა საზღვარი იქნება $\frac{1}{1}=1$, უარყოფით ფესვთა ზედა საზღვარი კი $-\frac{1}{4}$ რიცხვი.

ამგვარად, $h(x)$ მრავალწევრის დადებითი ფესვები მოთავსებულია 1 და 2 რიცხვებს

---

[1] ჩვენ $-h(-x)$-ს ვიღებთ $h(-x)$-ის ნაცვლად, რადგან ნიუტონის მეთოდის გამოსაყენებლად უფროსი კოეფიციენტი დადებითი უნდა იყოს. $\varphi_2(x)$ მრავალწევრის ფესვებზე ნიშნის ეს შეცვლა, გასაგებია, არავითარ გავლენას არ ახდენს.

შორის, უარყოფითი ფესვები -4 და $-\frac{1}{4}$ რიცხვებს შორის. ეს შედეგი ძალიან კარგად ეთანხმება იმას, რაც ზემოთ გრაფიკის განხილვით იყო ნაპოვნი.

§ 40. შტურმის თეორემა

ახლა გადავდივართ *ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რიცხვის საკითხზე.* ჩვენ გვაინტერესებს როგორც ნამდვილ ფესვთა საერთო რიცხვი, ისე ცალ-ცალკე დადებით ფესვთა რიცხვი, უარყოფით ფესვთა რიცხვი და საერთოდ მოცემულ a და b საზღვრებს შორის მოთავსებულ ფესვთა რიცხვი. არსებობს რამდენიმე მეთოდი ფესვთა ზუსტი რაოდენობის საძიებლად, ამასთანავე ყველა ისინი საკმარისად რთულია; მათ შორის ყველაზე მოსახერხებელი *შტურმის მეთოდია*, რომელსაც ქვემოთ გადმოვცემთ.

შემოვიტანოთ ჯერ ერთი განსაზღვრა, რომელიც შემდეგ პარაგრაფშიც იქნება გამოყენებული.

ვთქვათ მოცემულია ნულისაგან განსხვავებული რიცხვების რაიმე სასრული დალაგებული სისტემა, მაგალითად

$$1,\ 3,\ -2,\ 1,\ -4,\ -8,\ -3,\ 4,\ 1. \tag{1}$$

ამოვწეროთ თანმიმდევრობით ამ რიცხვთა ნიშნები:

$$+,\ +,\ -,\ +,\ -,\ -,\ -,\ +,\ +. \tag{2}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ნიშანთა (2) სისტემაში ერთიმეორის გვერდზე ოთხჯერ დგას საწინააღმდეგო ნიშანი. ამის გამო ამბობენ, რომ (1) დალაგებულ სისტემაში ადგილი აქვს *ოთხ ნიშანცვლას.* გასაგებია, შეგვიძლია დავითვალოთ *ნიშანცვლათა რიცხვი* ნულისაგან განსხვავებულ ნამდვილ რიცხვთა ყოველ დალაგებულ სასრულო სისტემისათვის.

განვიხილოთ ახლა ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი, ამასთანავე დავუშვათ, რომ $f(x)$ მრავალწევრს *არა აქვს ჯერადი ფესვები*, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია იგი გავყოთ მისა და მისი წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფზე. ნამდვილ კოეფიციენტებიან, ნულისაგან განსხვავებულ მრავალწევრთა სასრულო დალაგებულ სისტემას

$$f(x)=f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x), \tag{3}$$

ეწოდება $f(x)$ მრავალწევრის *შტურმის სისტემა*, თუ შესრულებულია შემდეგი მოთხოვნები:

1) (3) სისტემის მეზობელ მრავალწევრებს არა აქვთ საერთო ფესვები.

2) უკანასკნელ $f_s(x)$ მრავალწევრს არა აქვს ნამდვილი ფესვები.

3) თუ α (3) სისტემის რომელიმე შუალედური $f_k(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვია, $1 \leqslant k \leqslant s-1$, მაშინ $f_{k-1}(\alpha)$ და $f_{k+1}(\alpha)$-ს აქვთ სხვადასხვა ნიშანი.

4) თუ α არის $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვი, მაშინ ნამრავლი $f(x)f(x_1)$ *იზრდება*, როცა $x=\alpha$; სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ x ზრდისას გაივლის α წერტილზე, ეს ნამრავლი იცვლის ნიშანს მინუსიდან პლუსზე.

საკითხი იმის შესახებ, გააჩნია თუ არა ყოველ მრავალწევრს შტურმის სისტემა, განხილული იქნება ქვემოთ; ახლა კი ვთქვათ $f(x)$-ს აქვს ასეთი სისტემა და ვაჩვენოთ თუ როგორ შეიძლება მისი გამოყენება ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის საპოვნელად.

თუ ნამდვილი რიცხვი c არ არის მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, ხოლო (3) ამ მრავალწევრის შტურმის სისტემაა, მაშინ ავიღოთ

$$f(c),\ f_1(x),\ f_2(c),\ \ldots,\ f_s(c)$$

ნამდვილ რიცხვთა სისტემა, ამოვშალოთ იქიდან ნულის ტოლი რიცხვები და ავღნიშნოთ $W(c)$-თი დარჩენილ სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი; ვუწოდოთ $W(c)$-ს $f(x)$ მრავალწევრის შტურმის (3) სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი, როცა $x=c$[1].

სამართლიანია შემდეგი

შტურმის თეორემა. *თუ a და b ნამდვილი რიცხვები, $a<b$, არ არიან $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები, რომელსაც არ გააჩნია ჯერადი ფესვები, მაშინ $W(a) \geqslant W(b)$ და სხვაობა $W(a)-W(b)$ უდრის $f(x)$ მრავალწევრის a და b-ს შორის მდებარე ნამდვილ ფესვთა რიცხვს.*

ამგვარად, $f(x)$ მრავალწევრის a და b-ს შორის მდებარე ნამდვილ ფესვთა რიცხვის განსაზღვრისათვის (გახსენებთ, რომ $f(x)$-ს პირობის თანახმად არა აქვს ჯერადი ფესვები) საჭიროა მხოლოდ დავადგინოთ თუ რამდენად მცირდება ამ მრავალწევრის შტურმის სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი a-დან b-ზე გადასვლისას.

თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ თუ როგორ იცვლება $W(x)$ რიცხვი x-ის ზრდისას. სანამ x ზრდისას არ შეხვდება შტურმის (3) სისტემის არც ერთი მრავალწევრის ფესვს, ამ სისტემის მრავალწევრთა ნიშნები არ შეიცვლება, და ამიტომ $W(c)$ რიცხვი უცვლელი დარჩება. ამის გამო და აგრეთვე 2) პირობის გამო შტურმის სისტემის განმარტებიდან ჩვენ დაგვრჩენია განვიხილოთ ორი შემთხვევა: როცა x გადის ერთ-ერთ შუალედურ $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$, მრავალწევრის ფესვზე და როცა x გადის თვით $f(x)$ მრავალწევრის ფესვზე.

ვთქვათ α არის $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$, მრავალწევრის ფესვი. მაშინ 1) პირობის თანახმად $f_{k-1}(\alpha)$ და $f_{k+1}(\alpha)$ განსხვავდებიან ნულისაგან. მაშასადამე, შეიძლება მოიძებნოს ისეთი დადებითი რიცხვი ε, შესაძლებელია ძალზედ მცირეც, რომ $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ მონაკვეთში $f_{k-1}(x)$ და $f_{k+1}(x)$ მრავალწევრებს არა ჰქონდეთ ფესვები და ამიტომ შეინარჩუნონ მუდმივი ნიშანი. ამასთანავე 3) პირობის ძალით ეს ნიშნები სხვადასხვა იქნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ რიცხვთა

$$f_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\ f_k(\alpha-\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha-\varepsilon) \tag{4}$$

[1] თავისთავად ცხადია, რომ $f(x)$ მრავალწევრის შტურმის სისტემაში ნიშანცვლას არაფერი აქვს საერთო თვით $f(x)$ მრავალწევრის ნიშანცვლასთან, როდესაც x გაივლის ამ მრავალწევრის ფესვზე.

და

$$f_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\ f_k(\alpha+\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha+\varepsilon) \qquad (5)$$

ყოველ სისტემას აქვს ზუსტად ერთი ნიშანცვლა იმისდა მიუხედავად, თუ როგორია $f_k(\alpha-\varepsilon)$ და $f_k(\alpha+\varepsilon)$ რიცხვთა ნიშნები. ასე მაგალითად, თუ $f_{k-1}(x)$ მრავალწევრი განხილულ მონაკვეთზე უარყოფითია, ხოლო $f_{k+1}(x)$ მრავალწევრი დადებითი და თუ $f_k(\alpha-\varepsilon)>0$, $f_k(\alpha+\varepsilon)<0$, მაშინ (4) და (5)-ს შეესაბამებათ ნიშანთა სისტემები

$$-,+,+;\ -,-,+;$$

ამგვარად, x-ის გავლისას შტურმის სისტემის ერთ-ერთ შიგა მრავალწევრის ფესვზე ნიშანცვლები ამ სისტემაში შეიძლება მხოლოდ გადაადგილდნენ, მაგრამ არა ჩნდებიან და არ იკარგებიან; ამიტომ რიცხვი $W(x)$ ასეთი გადასვლის დროს არ იცვლება.

მეორე მხრივ, ვთქვათ α თვით მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვია. 1) პირობის თანახმად α არ იქნება $f_1(x)$-ის ფესვი. არსებობს, მაშასადამე, ისეთი დადებითი რიცხვი ε, რომ $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ არ შეიცავს $f_1(x)$ მრავალწევრის ფესვებს, და ამიტომ $f_1(x)$ ინარჩუნებს ამ მონაკვეთზე ნიშანს. თუ ეს ნიშანი დადებითია, მაშინ 4) პირობის თანახმად თვით $f(x)$ მრავალწევრი $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ მონაკვეთზე x-ის ზრდადი ფუნქცია იქნება და ამიტომ $f(\alpha-\varepsilon)<0$, $f(\alpha+\varepsilon)>0$.

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f_1(\alpha-\varepsilon) \text{ და } f(\alpha+\varepsilon),\ f_1(\alpha+\varepsilon) \qquad (6)$$

რიცხვთა სისტემებს, მაშასადამე, შეესაბამებათ ნიშანთა

$$-,+ \text{ და } +,+$$

სისტემები, ე. ი. შტურმის სისტემაში იკარგება ერთი ნიშანცვლა. თუკი $f_1(x)$-ის ნიშანი $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ მონაკვეთზე უარყოფითია, მაშინ, ისევ 4) პირობის გამო, $f(x)$ მრავალწევრი ამ მონაკვეთზე კლებადია, საიდანაც $f(\alpha-\varepsilon)>0$, $f(\alpha+\varepsilon)<0$; რიცხვთა (6) სისტემებს შეესაბამება ახლა ნიშანთა

$$+,- \text{ და } -,-$$

სისტემები, ე. ი. შტურმის სისტემაში ისევ იკარგება ერთი ნიშანცვლა.

ამგვარად, $W(x)$ რიცხვი იცვლება (x-ის ზრდისას) მხოლოდ როცა x გაივლის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვზე, ამასთან ამ შემთხვევაში იგი კლებულობს ზუსტად ერთეულით.

ამით შტურმის თეორემა, ცხადია, დამტკიცებულია. იმისათვის, რომ იგი გამოვიყენოთ $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა საერთო რიცხვის საძიებლად, საკმარისია a-ს მნიშვნელობად ავიღოთ უარყოფით ფესვთა ქვედა საზღვარი, ხოლო b ს მნიშვნელობად დადებით ფესვთა ზედა საზღვარი, მაგრამ უფრო მარტივია თუ მოვიქცევით შემდეგნაირად. § 23-ში დამტკიცებული ლემის თანახმად, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი N, შეიძლება საკმაოდ დიდიც, რომ, როცა $|x|>N$, შტურმის სისტემის ყველა მრავალწევრის

ნიშანი დაემთხვევა მათ უფროს წევრთა ნიშანს. სხვანაირად რომ ვთქვათ, არსებობს x უცნობის იმდენად დიდი დადებითი მნიშვნელობა, რომ შტურმის სისტემის ყველა მრავალწევრის მისი შესაბამისი მნიშვნელობის ნიშანი ემთხვევა მათ უფროს *კოეფიციენტთა* ნიშანს; x-ის ეს მნიშვნელობა, რომლის გამოთვლა საჭირო არაა, პირობითად ავღნიშნოთ სიმბოლოთი ∞. მეორე მხრივ, არსებობს x-ის აბსოლუტური მნიშვნელობით იმდენად დიდი უარყოფითი მნიშვნელობა, რომ შტურმის სისტემის მრავალწევრთა მისი შესაბამისი მნიშვნელობების ნიშნები ემთხვევიან მათ უფროს კოეფიციენტთა ნიშნებს ლუწ ხარისხიან მრავალწევრთათვის და შებრუნებულს კენტ ხარისხიან მრავალწევრთათვის; შევთანხმდეთ x-ის ეს მნიშვნელობა ავღნიშნოთ $-\infty$-ით. ცხადია, $(-\infty, \infty)$ მონაკვეთში მოთავსდება შტურმის სისტემის ყველა მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი და, კერძოდ, $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ნამდვილი ფესვი. თუ გამოვიყენებთ შტურმის თეორემას ამ მონაკვეთზე, ჩვენ ვიპოვით ამ ფესვთა რაოდენობას, შტურმის თეორემის გამოყენება კი $(-\infty, 0)$ და $(0, \infty)$ მონაკვეთებზე მოგვცემს $f(x)$ მრავალწევრის სათანადოდ დადებით და უარყოფით ფესვთა რაოდენობას.

ჩვენ დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ *ყოველ ნამდვილ კოეფიციენტებიან* $f(x)$ *მრავალწევრს, რომელსაც არა აქვს ჯერადი ფესვები, გააჩნია შტურმის სისტემა*; ასეთი სისტემის აგებისათვის გამოყენებული სხვადასხვა მეთოდებიდან ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ ერთს, ყველაზე უფრო ხმარებულს. დავუშვათ $f_1(x)=f'(x)$, რითაც უზრუნველყოფილია შტურმის სისტემის განმარტების 4) პირობის შესრულება. მართლაც, თუ α არის $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვი და თუ $f(x)$ ზრდადია, როცა $x=\alpha$, მაშინ $f'(\alpha)$ ამ წერტილში დადებითია და ამიტომ $f(x)f'(x)$ ნამრავლი ზრდადია: თუკი $f(x)$ მრავალწევრი კლებადია, როცა $x=\alpha$, მაშინ $f'(\alpha)<0$, და ამიტომ $f(x)f'(x)$ ნამრავლი ისევ ზრდადი იქნება. შემდგომ ვყოფთ $f(x)$-ს $f'(x)$-ზე და ამ გაყოფის შედეგად მიღებულ ნაშთს, *აღებულს შებრუნებული ნიშნით*, მივიჩნევთ $f_2(x)$-ად:

$$f(x)=f_1(x)\,q_1(x)-f_2(x).$$

საერთოდ, თუ $f_{k-1}(x)$ და $f_k(x)$ მრავალწევრები უკვე ნაპოვნია, მაშინ $f_{k+1}(x)$ იქნება $f_{k-1}(x)$-ს $f_k(x)$-ზე გაყოფისაგან მიღებული ნაშთი, აღებული შებრუნებული ნიშნით:

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)\,q_k(x)-f_{k+1}(x). \tag{7}$$

აქ აღწერილი მეთოდი $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრთათვის გამოყენებული ევკლიდეს ალგორითმისაგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ნაშთს ყოველთვის ეცვლება ნიშანი შებრუნებულით და შემდგომი გაყოფა წარმოებს უკვე ამ ნაშთზე შებრუნებული ნიშნით. რადგან უდიდესი საერთო გამყოფის ძიებისას ნიშნის ასეთ შეცვლას მნიშვნელობა არა აქვს, ამიტომ ჩვენი პროცესი შეჩერდება რაიმე $f_s(x)$-ზე, რომელიც $f(x)$ და $f'(x)$-ის უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება. მაგრამ რადგან $f(x)$-ს არა აქვს ჯერადი ფესვები, ე. ი. ის ურთიერთ მარტივია $f'(x)$-თან, ამიტომ $f_s(x)$ სინამდვილეში იქნება რაიმე ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვი.

აქედან გამომდინარეობს რომ, ჩვენ მიერ აგებული

$$f(x)=f_0(x),\ f'(x)=f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_s(x)$$

მრავალწევრთა სისტემა აკმაყოფილებს, აგრეთვე, შტურმის სისტემის განსაზღვრის 2) პირობასაც. 1) პირობის შესრულების დასამტკიცებლად დავუშვათ რომ, მეზობელ $f_k(x)$ და $f_{k+1}(x)$ მრავალწევრებს გააჩნიათ საერთო α ფესვი, მაშინ (7)-ის ძალით α იქნება აგრეთვე $f_{k-1}(x)$ მრავალწევრის ფესვიც.

$$f_{k-2}(x)=f_{k-1}(x)\,q_{k-1}(x)-f_k(x)$$

ტოლობაზე გადასვლით მივიღებთ რომ, α არის $f_{k-2}(x)$-ის ფესვიც. თუ გავაგრძელებთ, დავინახავთ, რომ, α არის $f(x)$ და $f'(x)$-ის საერთო ფესვი, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებებს. დაბოლოს 3) პირობის შესრულება გამომდინარეობს პირდაპირ (7) ტოლობიდან: თუ $f_k(\alpha)=0$, მაშინ $f_{k-1}(\alpha)=-f_{k+1}(\alpha)$.

მოვიხმაროთ შტურმის მეთოდი წინა პარაგრაფში განხილული

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

მრავალწევრისათვის. ჩვენ წინასწარ არ შევამოწმებთ აქვს თუ არა $h(x)$-ს ჯერადი ფესვები, რადგან შტურმის სისტემის აგების ზემოთ აღწერილი მეთოდი, ერთდროულად ემსახურება მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის თანამარტივობის შემოწმებასაც.

აღნიშნული მეთოდით ვიპოვოთ შტურმის სისტემა $h(x)$-ისათვის; ამასთან ევკლიდეს ალგორითმისაგან განსხვავებით გაყოფის პროცესში შევკვეცთ და გავამრავლებთ მხოლოდ ნებისმიერ დადებით რიცხვებზე, რადგან ნაშთთა ნიშნები შტურმის მეთოდში მთავარ როლს ასრულებენ. ჩვენ მივიღებთ ასეთ სისტემას:

$$\begin{aligned}
h(x)&=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,\\
h_1(x)&=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,\\
h_2(x)&=66x^3-150x^2+172x+61,\\
h_3(x)&=-464x^2+1135x+723,\\
h_4(x)&=-32599\,453x-8486\,093,\\
h_5(x)&=-1\cdot
\end{aligned}$$

განვსაზღვროთ ამ სისტემის მრავალწევრთა ნიშნები, როცა $x=-\infty$ და $x=\infty$, რისთვისაც, როგორც მითითებული იყო, უნდა ვუყუროთ მხოლოდ უფროსი კოეფიციენტების ნიშნებს და ამ მრავალწევრთა ხარისხებს. ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

	h(x)	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	ნიშანცვლათა რიცხვი
$-\infty$	—	+	—	—	+	—	4
∞	+	+	+	—	—	—	1

ამგვარად, x-ის გადასვლისას $-\infty$-დან ∞-მდე შტურმის სისტემა კარგავს სამ ნიშანცვლას, ამიტომ $h(x)$-ს აქვს ზუსტად სამი ნამდვილი ფესვი. აქედან ჩანს, რომ წინა პარაგრაფში ამ მრავალწევრის გრაფიკის აგების დროს ჩვენ არ დაგვიკარგავს არც ერთი ფესვი.

მოვიხმაროთ შტურმის მეთოდი სხვა, უფრო მარტივი მრავალწევრისათვის. ვთქვათ მოცემულია მრავალწევრი

$$f(x)=x^3+3x^2-1.$$

ვიპოვოთ მის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა, აგრეთვე მთელი საზღვრები, რომელთა შორისაც მოთავსებულია ყოველი ამ ფესვთაგანი. ამასთან ნუ ავაგებთ თავიდან ამ მრავალწევრის გრაფიკს.

$f(x)$-ს მრავალწევრის შტურმის სისტემა იქნება

$$f(x)=x^3+3x^2-1,$$

$$f_1(x)=3x^2+6x,$$

$$f_2(x)=2x+1,$$

$$f_3(x)=1.$$

ვიპოვოთ ამ სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი, როცა $x=-\infty$ და $x=\infty$

	f(x)	f_1(x)	f_2(x)	f_3(x)	ნიშანცვლათა რიცხვი
$-\infty$	—	+	—	+	3
∞	+	+	+	+	0

$f(x)$ მრავალწევრს აქვს, მაშასადამე, სამი ნამდვილი ფესვი. ამ ფესვთა მდებარეობის უფრო ზუსტი დადგენისათვის გავაგრძელოთ წინა ცხრილი:

	f(x)	f_1(x)	f_2(x)	f_3(x)	ნიშანცვლათა რიცხვი
$x=-3$	—	+	—	+	3
$x=-2$	+	0	—	+	2
$x=-1$	+	—	—	+	2
$x=0$	—	0	+	+	1
$x=1$	+	+	+	+	0

ამგვარად, $f(x)$ მრავალწევრის შტურმის სისტემა კარგავს თითო-თითო ნიშანცვლას, როცა x გადადის —3-დან —2-მდე, —1-დან 0-მდე და 0-დან 1-მდე. მაშასადამე, ამ მრავალწევრის ფესვები α_1, α_2 და α_3 აკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$-3<\alpha_1<-2,\ -1<\alpha_2<0,\ 0<\alpha_3<1.$$

§ 41. სხვა თეორემები ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის შესახებ

შტურმის თეორემა ბოლომდე წყვეტს საკითხს მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის შესახებ. მაგრამ, მისი მნიშვნელოვანი ნაკლია შტურმის სისტემის აგებისათვის საჭირო რთული გამოთვლები, როგორც მკითხველს შეეძლო დარწმუნებულიყო, თუკი ჩაატარებდა ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან პირველისათვის საჭირო ყველა გამოთვლებს. ამის გამო ახლა დავამტკიცებთ ორ თეორემას, რომლებიც არ იძლევიან ნამდვილ ფესვთა ზუსტ რიცხვს და მხოლოდ შემოსაზღვრავენ ამ რიცხვს ზ ე მ ო დ ა ნ. ეს თეორემები, რომლებსაც იყენებენ როცა ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა გრაფიკის მეოხებით ქვემოდანაა შემოსაზღვრული, ხანდახან იძლევიან საშუალებას ვიპოვოთ ნამდვილ ფესვთა ზუსტი რიცხვი შტურმის მეთოდის გარეშე.

ვთქვათ მოცემულია ნამდვილ კოეფიციენტებიანი n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, ამასთან ვუშვებთ, რომ მას შეიძლება ჰქონდეს ჯერადი ფესვები. განვიხილოთ მისი თანმიმდევრობითი წარმოებულების სისტემა

$$f(x)=f^{(0)}(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x), \tag{1}$$

რომელთა შორისაც უკანასკნელი უდრის $f(x)$ მრავალწევრის უფროს a_0 კოეფიციენტს გამრავლებულს $n!$-ზე და ამიტომ ყოველთვის ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს. თუ ნამდვილი რიცხვი c არ არის (1) სისტემის არც ერთი მრავალწევრის ფესვი, მაშინ $S(c)$-თი აღვნიშნოთ

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c), \ldots, f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c)$$

რიცხვთა დალაგებულ სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი. ამგვარად შეიძლება განვიხილოთ მთელრიცხვოვანი ფუნქცია $S(x)$, განსაზღვრული x-ის იმ მნიშვნელობათათვის, რომელნიც არ აქცევენ ნულად (1) სისტემის არც ერთ მრავალწევრს.

ვნახოთ თუ როგორ იზრდება $S(x)$ რიცხვი x-ის ზრდასთან ერთად. სანამ x არ გაივლის (1)-ის არც ერთი მრავალწევრის ფესვზე, $S(x)$ რიცხვი არ შეიძლება შეიცვალოს. ამის გამო ჩვენ უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა: x-ის გავლა $f(x)$ მრავალწევრის ფესვზე და x-ის გავლა რომელიმე $f^{(k)}(x)$ წარმოებულის ფესვზე, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

ვთქვათ α არის $f(x)$ მრავალწევრის l-ჯერადი ფესვი, $l \geqslant 1$, ე. ი.

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(l-1)}(\alpha)=0,\ f^{(l)}(\alpha)\neq 0.$$

და ε იყოს იმდენად მცირე დადებითი რიცხვი, რომ $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ მონაკვეთი არ შეიცავდეს $f(x), f'(x), \ldots, f^{(l-1)}(x)$ მრავალწევრთა ფესვებს განსხვავებულს α-საგან და აგრეთვე არ შეიცავდეს $f^{(l)}(x)$ მრავალწევრის არც ერთ ფესვს. დავამტკიცოთ რომ რიცხვთა

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f'(\alpha-\varepsilon), \ldots, f^{(l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ f^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$$

სისტემაში ყველა ორ მეზობელ რიცხვს აქვს სხვადასხვა ნიშანი, მაშინ, როცა ყველა

$$f(\alpha+\varepsilon),\ f'(\alpha+\varepsilon), \ldots, f^{(l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ f^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$$

რიცხვს აქვს ერთი და იგივე ნიშანი. რადგან (1) სისტემის ყოველი მრავალწევრი არის წინას წარმოებული, ამიტომ საჭიროა მხოლოდ დავამტკიცოთ, რომ თუ x გადის $f(x)$ მრავალწევრის α ფესვზე, მაშინ, ამ ფესვის ჯერადობისაგან დამოუკიდებლად, გადასვლამდე $f(x)$-სა და $f'(x)$-ს ჰქონდათ სხვადასხვა ნიშანი, ხოლო გადასვლის შემდეგ მათი ნიშნები ემთხვევიან. თუ $f(\alpha-\varepsilon)>0$, მაშინ $f(x)$ კლებულობს $(\alpha-\varepsilon, \alpha)$ მონაკვეთზე, და ამიტომ $f'(\alpha-\varepsilon)<0$; თუკი $f(\alpha-\varepsilon)<0$, მაშინ $f(x)$ ზრდადია და ამიტომ $f'(\alpha-\varepsilon)>0$. მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში ნიშნები განსხვავებულია. მეორე მხრივ, თუ $f(\alpha+\varepsilon)>0$, მაშინ $f(x)$ ზრდადია $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ მონაკვეთზე, ამიტომ $f'(\alpha+\varepsilon)>0$; ანალოგიურად $f(\alpha+\varepsilon)<0$-დან გამომდინარეობს $f'(\alpha+\varepsilon)<0$. ამგვარად, α ფესვზე გადასვლის შემდეგ $f(x)$-ისა და $f'(x)$-ის ნიშნები უნდა ემთხვეოდნენ.

დამტკიცებულიდან გამომდინარეობს, რომ, როდესაც x გაივლის $f(x)$ მრავალწევრის l-ჯერად ფესვზე,

$$f(x),\ f'(x), \ldots, f^{(l-1)}(x),\ f^{(l)}(x)$$

სისტემა კარგავს l ნიშანცვლას.

ვთქვათ ახლა α არის

$$f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x), \ldots, f^{(k+l-1)}(x),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ l \geqslant 1,$$

წარმოებულთა ფესვი, მაგრამ არ არის არც $f^{(k-1)}(x)$-ის და არც $f^{(k+l)}(x)$-ის ფესვი. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, x-ის გავლა α-ზე იწვევს

$$f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x), \ldots, f^{(k+l-1)}(x),\ f^{(k+l)}(x)$$

სისტემაში l ნიშანცვლის დაკარგვას. მართალია, ამ გადასვლამ შეიძლება შექმნას ახალი ნიშანცვლა $f^{(k-1)}(x)$-სა და $f^{(k)}(x)$-ს შორის, მაგრამ რადგან $l \geqslant 1$, x-ის გავლისას α რიცხვზე

$$f^{(k-1)}(x),\ f^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x), \ldots, f^{(k+l-1)}(x),\ f^{(k+l)}(x)$$

სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი ან არ იცვლება, ან იკლებს. იგი შეიძლება შემცირდეს მხოლოდ ლუწი რიცხვით, რადგან $f^{(k-1)}(x)$ და $f^{(k+l)}(x)$ მრავალწევრები არ იცვლიან ნიშანს, როცა x გაივლის α მნიშვნელობაზე.

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ a და b რიცხვები, $a<b$, **არ არიან (1) სისტემის არც ერთი მრავალწევრის ფესვები**, მაშინ **$f(x)$ მრავალწევრის a-სა და b-ს შორის მოთავსებულ ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა, დათვლილი ყოველი იმდენჯერ, რამდენიც მისი ჯერადობაა, უდრის $S(a)-S(b)$ სხვაობას ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით.**

იმისათვის, რომ შევასუსტოთ a და b რიცხვებზე დადებული პირობები, შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები. ვთქვათ ნამდვილი რიცხვი c არ არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, თუმცა იგი შეიძლება იყოს (1) სისტემის რომელიმე სხვა მრავალწევრის ფესვი. აღვნიშნოთ $S_+(c)$-თი

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c), \ldots, f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c) \tag{2}$$

რიცხვთა სისტემაში შემდეგნაირად დათვლილი ნიშანცვლათა რიცხვი: თუ

$$f^{(k)}(c)=f^{(k+1)}(c)=\ldots=f^{(k+l-1)}(c)=0, \tag{3}$$

მაგრამ

$$f^{(k-1)}(c)\neq 0,\ f^{k+l}(c)\neq 0, \tag{4}$$

მაშინ ვთვლით, რომ $f^{(k)}(c)$, $f^{(k+1)}(c),\ldots,f^{(k+l-1)}(c)$ აქვთ ისეთივე ნიშანი, რაც $f^{(k+l)}(c)$; ეს, ცხადია, ტოლფასია იმისა, რომ (2) სისტემის ნიშანცვლათა რიცხვის დათვლისას ნულები ამოშლილებად ჩავთვალოთ. მეორე მხრივ, $S_-(c)$-თი ავღნიშნოთ (2) სისტემის ნიშანცვლათა რიცხვი შემდეგნაირად დათვლილი: თუ ადგილი აქვს (3) და (4) პირობებს, მაშინ ვთვლით, რომ $f^{(k+i)}(c)$, $0<i\leqslant l-1$, აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f^{(k+l)}(c)$-ს თუკი სხვაობა $l-i$ ლუწია და შებრუნებული ნიშანი—თუკი ეს სხვაობა კენტია.

ახლა თუ გვინდა გავიგოთ $f(x)$ მრავალწევრის a-სა და b-ს, $a<b$, შორის მოთავსებულ ნამდვილ ფესვთა რიცხვი, ამასთან a და b არ არიან $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები, მაგრამ შეიძლება იყვნენ (1) სისტემის სხვა მრავალწევრთა ფესვები, მაშინ ვიქცევით შემდეგნაირად. ვთქვათ ε იმდენად მცირეა, რომ $(a, a+2\varepsilon)$ მონაკვეთი არ შეიცავს $f(x)$ მრავალწევრის ფესვს და აგრეთვე (1) სისტემის ყველა დანარჩენ მრავალწევრთა a-საგან განსხვავებულ ფესვებს; მეორე მხრივ, η იყოს იმდენად მცირე რიცხვი, რომ $(b-2\eta, b)$ მონაკვეთი არ შეიცავდეს $f(x)$-ის ფესვებს და (1) სისტემის დანარჩენ მრავალწევრთა b-საგან განსხვავებულ ფესვებს. მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რიცხვი, რომელიც ჩვენ გვაინტერესებდა, ტოლი იქნება ამ მრავალწევრის $a+\varepsilon$-სა და $b-\eta$-ს შორის მოთავსებულ ნამდვილ ფესვთა რიცხვისა, ე. ი. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, უდრის $S(a+\varepsilon)-S(b-\eta)$ სხვაობას ან ნაკლებია ამ სხვაობაზე ლუწი რიცხვით. მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$S(a+\varepsilon)=S_+(a),\ S(b-\eta)=S_-(b)$$

ამით დამტკიცდა შემდეგი

ბიუდან-ფურიეს თეორემა. თუ a და b, $a<b$, ნამდვილი რიცხვები არ არიან ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები, მაშინ ამ მრავალწევრის a-სა და b-ს შორის მოთავსებულ ნამდვილ ფესვთა რიცხვი, თვითეული იმდენჯერ დათვლილი, რამდენჯერაც მისი ჯერადობაა, უდრის $S_+(a)-S_-(b)$ სხვაობას ან ნაკლებია ამ სხვაობაზე ლუწი რიცხვით.

ავღნიშნოთ ∞ სიმბოლოთი x უცნობის იმდენად დიდი დადებითი მნიშვნელობა, რომ (1) სისტემის ყველა მრავალწევრის მისი შესაბამისი მნიშვნელობების ნიშნები დაემთხვეს მათ უფროს კოეფიციენტთა ნიშნებს. რადგან ამ კოეფიციენტებად იქნება თანმიმდევრობით a_0, na_0, $n(n-1)a_0, \ldots, n!\,a_0$ რიცხვები, რომელთა ნიშნებიც ერთმანეთს ემთხვევიან, ამიტომ $S(\infty)=S_-(\infty)=0$, მეორე მხრივ, რადგან

$$f(0)=a_n,\ f'(0)=a_{n-1},\ f''(0)=a_{n-2}2!$$
$$f'''(0)=a_{n-3}3!,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=a_0\cdot n!,$$

სადაც $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებია, ამიტომ $S_+(0)$ ემთხვევა $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების სისტემის ნიშანცვლათა რიცხვს, ამასთან ნულის ტოლი კოეფიციენტები მხედველობაში არ მიიღება. ამგვარად თუ გამოვიყენებთ ბიუდან-ფურიეს თეორემას $(0, \infty)$ მონაკვეთისათვის, მივიღებთ შემდეგ თეორემას:

დეკარტის თეორემა. $f(x)$ *მრავალწევრის დადებით ფესვთა რიცხვი, დათვლილი ყოველი იმდენჯერ, რამდენიც მისი ჯერადობაა, უდრის ამ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვს (ამასთან ნულის ტოლი კოეფიციენტები მხედველობაში არ მიიღება), ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით.*

$f(x)$ მრავალწევრის უარყოფით ფესვთა რიცხვის განსაზღვრისათვის, ცხადია, საკმარისია გამოვიყენოთ დეკარტის თეორემა $f(-x)$ მრავალწევრისათვის. ამასთანავე, თუ $f(x)$ მრავალწევრის არც ერთი კოეფიციენტი არ უდრის ნულს, მაშინ, ცხადია, $f(-x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლებს შეესაბამება $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშნების *შენარჩუნება* და პირიქით. ამგვარად, *თუ* $f(x)$ *მრავალწევრს არა აქვს ნულის ტოლი კოეფიციენტი, მაშინ მის უარყოფით ფესვთა რიცხვი (დათვლილი თავისი ჯერადობიანად) უდრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშნის შენარჩუნებათა რიცხვს ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით.*

მივუთითოთ *დეკარტის თეორემის კიდევ ერთ დამტკიცებაზე*, რომელიც ბიუდან-ფურიეს თეორემას არ ეყრდნობა. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

თუ $c > 0$, $f(x)$ *მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი ნაკლებია* $(x-c)f(x)$ *ნამრავლის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვზე კენტი რიცხვით.*

მართლაც, თუ შევაგროვებთ ფრჩხილებში ერთმანეთის გვერდით მდგომ წევრებს, რომელთაც ერთნაირი ნიშნები აქვთ, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრს, რომლის უფროს კოეფიციენტსაც დადებითად ვთვლით, შემდეგნაირად ჩავწერთ

$$f(x)=(a_0x^n+\ldots+b_1x^{k_1+1})-(a_1x^{k_1}+\ldots+b_2x^{k_2+1})+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^s(a_sx^{k_s}+\ldots+b_{s+1}x^t). \tag{5}$$

აქ $a_0>0,\ a_1>0, \ldots, a_s>0$, მაშინ როცა $b_1, b_2, \ldots, b_s$ დადებითი ან ნულის ტოლია, მაგრამ b_{s+1} ვთვლით მკაცრად დადებითად, ე. ი. x^t, სადაც $t \geqslant 0$, არის $f(x)$ მრავალწევრის x უცნობის უმცირესი ხარისხი ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტით. შემთხვევით შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ფრჩხილი

$$(a_0x^n+\ldots+b_1x^{k_1+1})$$

შეიცავს მხოლოდ ერთ შესაკრებს, სახელდობრ, მაშინ, როცა $k_1+1=n$. ანალოგიური შემჩნევა შეიძლება გაკეთდეს (5) ფორმულის სხვა ფრჩხილების შესახებაც.

ჩავწეროთ ახლა $(x-c)f(x)$ ნამრავლის ტოლი მრავალწევრი, ამასთან გამოვყოთ მხოლოდ ის წევრები, რომელნიც შეიცავენ x-ს ხარისხად $n+1$, $k_1+1, \ldots, k_s+1$ და t. ჩვენ მივიღებთ:

$$(x-c)f(x)=(a_0x^{n+1}+\ldots)-(a'_1x^{k_1+1}+\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^s(a'_s x^{k_s+1}+\ldots-cb_{s+1}x^t), \tag{6}$$

სადაც $a'_i=a_i+cb_i$, $i=1, 2, \ldots, s$, და ამიტომ, რადგან $c>0$, ყველა a'_i მკაცრად დადებითია, ამგვარად, $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში a_0x^n და $-a_1x^{k_1}$ წევრთა (აგრეთვე $-a_1x^{k_1}$ და $a_2x^{k_2}$ წევრთა და ა. შ.) შორის იქნება ერთი ნიშანცვლა, ხოლო $(x-c)f(x)$ მრავალწევრის შესაბამის a_0x^{n+1} და $-a'_1x^{k_1+1}$ წევრებს შორის (შესაბამისად $-a'_1x^{k_1+1}$ და $a_2x^{k_2+1}$ წევრებს შორის და ა. შ.) იქნება ან ერთი ნიშანცვლა ან მეტი, მაგრამ აუცილებლად ლ უ წ ი რიცხვით. ამასთან ამ ნიშანცვლების ზუსტი ადგილები ჩვენ არ გვაინტერესებს; შეიძლება, მაგალითად, მოხდეს, რომ x^{k_1+2}-ის კოეფიციენტი (6)-ში უარყოფითი იყოს, ოოგორც $-a'_1$ კოეფიციენტი, ამიტომ ამ ორ მეზობელ კოეფიციენტს შორის არ იქნება ნიშანცვლა, ე. ი. პირველ ფრჩხილში ნიშანცვლები სადღაც უფრო ადრე იქნებოდა მოთავსებული. შევნიშნოთ ახლა, რომ უკანასკნელი ფრჩხილი (5)-ში არავითარ ნიშანცვლას არ შეიცავდა, იმ დროს, როცა უკანასკნელი ფრჩხილი (6)-ში მას შეიცავს, თანაც კ ე ნ ტ რიცხვს: საკმარისია მხედველობაში მივიღოთ, რომ $f(x)$ და $(x-c)f(x)$ მრავალწევრთა უკანასკნელ ნულისაგან განსხვავებულ კოეფიციენტებს, ე. ი. $(-1)^s b_{s+1}$ და $(-1)^{s+1}b_{s+1}c$, სხვადასხვა ნიშნები აქვთ. ამგვარად $f(x)$-დან $(x-c)f(x)$-ზე გადასვლისას ნიშანცვლათა საერთო რიცხვი კოეფიციენტთა სისტემაში აუცილებლად მატულობს, თანაც კენტი რიცხვით (რამდენიმე შესაკრების ჯამი, რომელთა შორის ერთი კენტია, დანარჩენები კი—ლუწი, გასაგებია, კენტი იქნება!). ლემა დამტკიცებულია.

დეკარტის თეორემის დასამტკიცებლად აღვნიშნოთ $f(x)$ მრავალწევრის ყველა დადებითი ფესვი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$-თი. ამრიგად,

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრია, რომელსაც უკვე აღარ აქვს დადებითი ნამდვილი ფესვები. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(x)$ მრავალწევრის პირველი და უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტები ერთი და იმავე ნიშნისა არიან, ე. ი. ამ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემა ლუწ რიცხვ ნიშანცვლას შეიცავს. თუ მოვიხმართ ზემოთ დამტკიცებულ ლემას

$$\varphi(x),\ (x-\alpha_1)\varphi(x),\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\varphi(x), \ldots, f(x)$$

მრავალწევრებისათვის, მივიღებთ, რომ კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი ყოველთვის იზრდება კენტი რიცხვით. ე. ი. ერთეულით პლუს ლუწი რიცხვი და ამიტომ $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი მეტია k რიცხვზე ლუწი რიცხვით.

გამოვიყენოთ დეკარტისა და ბიუდან-ფურიეს თეორემები ზემოთ განხილული

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

მრავალწევრისათვის.

კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვი უდრის სამს და ამიტომ დეკარტის თეორემის თანახმად $h(x)$-ს შეიძლება ჰქონდეს სამი ან ერთი დადებითი ფესვი. მეორე მხრივ, $h(x)$-ს არა აქვს ნულის ტოლი კოეფიციენტი, და რადგან კოეფიციენტთა სისტემაში ორი ნიშნის შენარჩუნებაა, ამიტომ $h(x)$-ს აქვს ორი უარყოფითი ფესვი ან არა აქვს არც ერთი. თუ შევადარებთ გრაფიკის საშუალებით ადრე მიღებულ შედეგებს, მივიღებთ, რომ ორი არის ზუსტი რიცხვი ჩვენი მრავალწევრის უარყოფითი ფესვებისა.

დადებით ფესვთა რიცხვის ზუსტი განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ბიუდან-ფურიეს თეორემით, ამასთან გამოვიყენოთ იგი $(1, \infty)$ მონაკვეთზე, რადგან § 39-ში უკვე ნაჩვენები იყო, რომ 1 არის $h(x)$ მრავალწევრის დადებით ფესვთა ქვედა საზღვარი. $h(x)$-ის თანმიმდევრობითი წარმოებულებიც უკვე იყო ჩამოწერილი § 39-ში. ვიპოვოთ მათი ნიშნები როცა $x=1$ და $x=\infty$.

	$h(x)$	$h^{I}(x)$	$h^{II}(x)$	$h^{III}(x)$	$h^{IV}(x)$	$h^{V}(x)$	ნიშანცვლათა რიცხვი
$x=1$	−	+	+	+	+	+	1
$x=\infty$	+	+	+	+	+	+	0

აქედან გამომდინარეობს, რომ წარმოებულთა სისტემა x-ის გადასვლისას 1-დან ∞-ზე კარგავს ერთ ნიშანცვლას, ამიტომ $h(x)$-ს აქვს ზუსტად ერთი დადებითი ფესვი.

ამ მაგალითთან დაკავშირებით შევნიშნავთ, რომ საერთოდ *მრავალწევრის ნამდვილ დადებით ფესვთა რიცხვის ძებნისას უნდა დავიწყოთ გრაფიკის აგებით და ბიუდან-ფურიესა და დეკარტის თეორემების გამოყენებით, მხოლოდ უკიდურეს შემთხვევაში უნდა გადავიდეთ შტურმის სისტემის აგებაზე.*

დეკარტის თეორემა უშვებს ზოგიერთ დაზუსტებას იმ კერძო შემთხვევაში, როცა თავიდან ცნობილია, რომ ყველა ფესვი ნამდვილია, როგორც ამას ადგილი აქვს, მაგალითად, სიმეტრიული მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრისათვის. სახელდობრ:

თუ $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ფესვი ნამდვილია, თავისუფალი წევრი კი ნულისაგან განსხვავებული, მაშინ ამ მრავალწევრის დადებით ფესვთა რიცხვი k_1 უდრის მის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა s_1 რიცხვს, ხოლო უარყოფით ფესვთა რიცხვი k_2 უდრის $f(-x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტთა სისტემაში ნიშანცვლათა რიცხვს s_2.

მართლაც, ჩვენ დაშვებებში

$$k_1+k_2=n, \tag{7}$$

სადაც n არის $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი, და, დეკარტის თეორემის თანახმად,

$$k_1 \leqslant s_1,\ k_2 \leqslant s_2. \tag{8}$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$s_1 + s_2 \leqslant n. \tag{9}$$

დამტკიცებას ჩავატარებთ ინდუქციით n-ის მიმართ, რადგან, როცა $n=1$, იმის გამო რომ $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$, მხოლოდ ერთ

$$f(x)=a_0x+a_1,\ f(-x)=-a_0x+a_1$$

მრავალწევრთაგანს აქვს ნიშანცვლა, ე. ი. ამ შემთხვევაში $s_1+s_2=1$. ვთქვათ ფორმულა (9) უკვე დამტკიცებულია მრავალწევრთათვის, რომელთა ხარისხიც ნაკლებია n-ზე. თუ

$$f(x)=a_0x^n+a_{n-l}x^l+\dots+a_n,$$

სადაც $l \leqslant n-1$, $a_{n-l} \neq 0$, მაშინ დავუშვათ, რომ

$$g(x)=a_{n-l}x^l+\dots+a_n.$$

ამ შემთხვევაში

$$f(x)=a_0x^n+g(x),$$

$$f(-x)=(-1)^n a_0x^n+g(-x).$$

თუ s'_1 და s'_2 არიან შესაბამისად $g(x)$ და $g(-x)$ მრავალწევრების კოეფიციენტთა სისტემების ნიშანცვლათა რიცხვები, მაშინ, ინდუქციის დაშვების თანახმად (ცხადია, რომ $l \geqslant 1$),

$$s'_1+s'_2 \leqslant l.$$

თუ $l=n-1$, მაშინ ნიშანცვლა პირველ ადგილზე, ე. ი., $f(x)$-ისათვის a_0 და $a_1=a_{n-l}$ შორის, ექნება მხოლოდ ერთს $f(x)$ და $f(-x)$ მრავალწევრთაგანს. ამიტომ

$$s_1+s_2=s'_1+s'_2+1 \leqslant l+1=n.$$

თუკი $l \leqslant n-2$, მაშინ შესაძლებელია ნიშანცვლა პირველ ადგილზე ჰქონდეს ორივე $f(x)$, $f(-x)$ მრავალწევრს, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც

$$s_1+s_2 \leqslant s'_1+s'_2+2 \leqslant l+2 \leqslant (n-2)+2=n.$$

განვიხილავთ რა (7), (8) და (9), მივიღებთ, რომ

$$k_1=s_1,\ k_2=s_2,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

§ 42. ფესვთა მიახლოებითი გამოთვლა

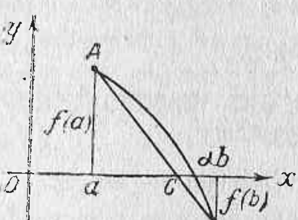
წინა პარაგრაფებში გადმოცემული მეთოდები საშუალებას გვაძლევს გამოვყოთ ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვები, ე. ი. ყოველი ფესვისათვის მივუთითოთ საზღვრები, რომელთა შორისაც მხოლოდ ეს ერთი ფესვი იმყოფება. თუ ეს საზღვრები საკმაოდ ვიწროა, მაშინ მათ შორის მოთავსებული ნებისმიერი რიცხვი შეიძლება ჩავ-

თვალით საძიებელი ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად. ამგვარად, მას შემდეგ, რაც შტურმის მეთოდით (ან რაიმე სხვა უფრო ეკონომიური საშუალებით) დადგენილი იქნება, რომ a და b რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ რიცხვთა შორის $f(x)$ მრავალწევრის მხოლოდ ერთი ფესვი იმყოფება, რჩება ამოცანა იმდენად შევამციროთ ეს საზღვრები, რომ ახალ a' და b' საზღვრებს ერთნაირი ჰქონდეთ წინასწარ მოცემული რაოდენობა ათწილადის პირველი ნიშნებისა; ამით საძიებელი ფესვი გამოთვლილი იქნება მოცემული სიზუსტით.

არსებობს ბევრი მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს საკმაოდ სწრაფად და საჭირო სიზუსტით ვიპოვოთ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ჩვენ მივუთითებთ ორ მათგანზე, თეორიულად უფრო უბრალოსა და ზოგადზე, რომელთა ერთდროულად გამოყენებით საკმაოდ სწრაფად ვაღწევთ მიზანს. უნდა აღინიშნოს, რომ მეთოდები, რომლებიც ახლა იქნება გადმოცემული, გამოიყენება არა მარტო მრავალწევრთათვის, არამედ **უწყვეტ** ფუნქციათა უფრო ფართო კლასისათვისაც.

შემდეგში დავუშვებთ, რომ α არის $f(x)$ მრავალწევრის მ ა რ ტ ი ვ ი ფესვი, რადგან ჯერადი ფესვისაგან ყოველთვის შეგვიძლია განვთავისუფლდეთ, და, რომ α ფესვი უკვე გამოყოფილია a და b საზღვრებით, $a<\alpha<b$; აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ $f(a)$-ს და $f(b)$-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვს.

წრფივი ინტერპოლაციის მეთოდი (რომელსაც აგრეთვე ც რ უ მ დ გ ო მ ა რ ე ო ბ ი ს მეთოდი ეწოდება). α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად შეიძლება მივიღოთ, მაგალითად a და b საზღვრების ნახევარჯამი, $\frac{a+b}{2}$, ე. ი. მონაკვეთის შუა ადგილი, რომელსაც ბოლოებად a და b აქვს. მაგრამ უფრო ბუნებრივია დავუშვათ, რომ ფესვი იმ a, b საზღვართან უფრო ახლოსაა, რომელსაც შეესაბამება მრავალწევრის აბსოლუტური სიდიდით უფრო მცირე მნიშვნელობა. წრფივი ინტერპოლაციის მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად აიღება რიცხვი c, რომელიც (a, b) მონაკვეთს ჰყოფს $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვების აბსოლუტური სიდიდეების პროპორციონალურ ნაწილებად, ე. ი.



ნახ. 10

$$\frac{c-a}{b-c}=-\frac{f(a)}{f(b)};$$

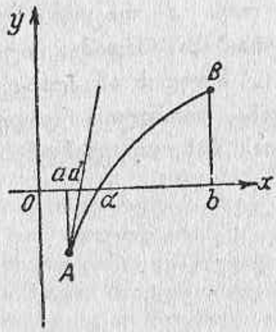
ნიშანი მინუსი მარჯვენა მხარეს იმიტომაა დასმული, რომ $f(a)$ და $f(b)$-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ. აქედან

$$c=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}. \tag{1}$$

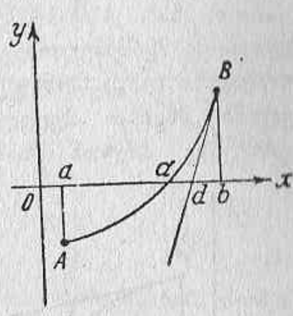
გეომეტრიულად, როგორც ნახ. 10 გვიჩვენებს, წრფივი ინტერპოლაციის მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ (a, b) მონაკვეთზე მრუდი $y=f(x)$ იცვლება მისი $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$ წერტილების შემაერთებელი ქორ-

დით და α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად აიღება ამ ქორდისა და x ღერძის თანაკვეთის წერტილის აბსცისი.

ნიუტონის მეთოდი. რადგან α არის $f(x)$ მრავალწევრის მარტივი ფესვი, ამიტომ $f'(\alpha) \neq 0$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ $f''(\alpha) \neq 0$, რადგან სხვაგვარად საკითხი დაიყვანება $f''(x)$ მრავალწევრის, რომელსაც ნაკლები ხარისხი აქვს, ვიდრე $f(x)$-ს, ფესვის გამოთვლამდე. შემდეგ დავუშვათ, რომ (a, b) მონაკვეთი

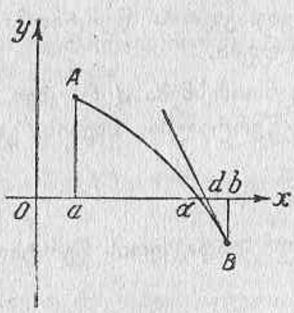


ნახ. 11

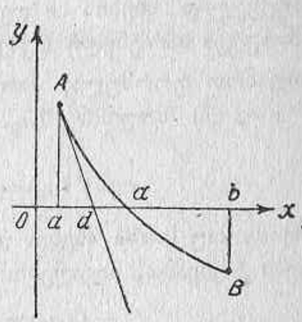


ნახ. 12

არა მარტო არ შეიცავს $f(x)$-ის α-საგან განსხვავებულ ფესვებს, არამედ არ შეიცავს $f'(x)$ მრავალწევრისა და აგრეთვე $f''(x)$ მრავალწევრის არც ერთ ფესვს[1]. ამრიგად, როგორც მათემატიკური ანალიზის კურსიდან გამომდინარეობს, (a, b) მონაკვეთზე $y=f(x)$ მრუდი ან მონოტონურად იზრდება, ან



ნახ. 13



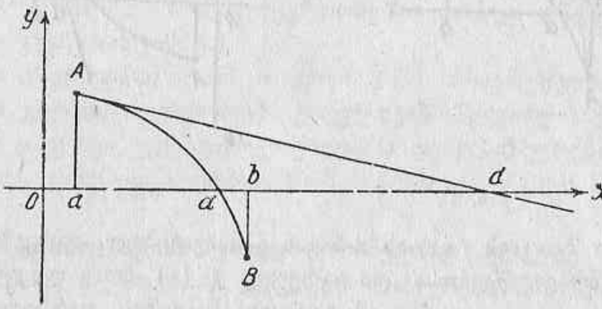
ნახ. 14

მონოტონურად მცირდება, აგრეთვე ან მონაკვეთის ყველა წერტილში ამოზნექილობით ზევითაა მიმართული, ან ყოველ წერტილში ამოზნექილობით ქვევითაა მიმართული. მაშასადამე, (a, b) მონაკვეთზე მრუდის მდგომარეობა შეიძლება ოთხნაირი იყოს (ისინი მოცემულია 11 — 14 ნახაზებზე).

---

[1] საზღვრების შევიწროებას, რომელსაც ამ პირობის დაკმაყოფილებამდე მივყავართ, ჩვეულებრივად ყოველგვარი დაბრკოლების გარეშე ვაღწევთ, რადგან ადრე გადმოცემული მეთოდები საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ $f'(x)$ და $f''(x)$ მრავალწევრის ფესვთა რიცხვი ნებისმიერ მონაკვეთში.

აღვნიშნოთ a_0-ით a და b საზღვრებიდან ის, რომელშიც $f(x)$-ის ნიშანი ემთხვევა $f''(x)$-ის ნიშანს. რადგან $f(a)$-სა და $f(b)$-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, $f''(x)$ კი ინარჩუნებს ნიშანს მთელ (a, b) მონაკვეთზე, ამიტომ ასეთ a_0-ზე შეიძლება მივუთითოთ. 11 და 14 ნახაზებზე მოყვანილ შემთხვევებში $a_0=a$, ორ სხვა შემთხვევაში $a_0=b$. $y=f(x)$ მრუდის a_0 აბსცისიან წერტილში, ე. ი. $(a_0, f(a_0))$ კოორდინატებიან წერტილში, გავავლოთ ამ მრუდის მხები და ამ მხების x ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისი აღვნიშნოთ d-თი. ნახ. 11—14 გვიჩვენებს, რომ d რიცხვი შეიძლება α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად ჩავთვალოთ. მაშასადამე, ნიუტონის მეთოდი მდგომარეობს (a, b) მონაკვეთზე $y=f(x)$ მრუდის ამ მონაკვეთის ერთ-ერთ საზღვარში მხებით შეცვლაში. პირობა, რომელიც დადებულია a_0 წერტილის არჩევაზე, ძალიან მნიშვნელოვანია. ნახ. 15 გვიჩვენებს, რომ ამ



ნახ. 15

პირობის დაუცველად მხების x ღერძთან გადაკვეთის წერტილმა შეიძლება სულაც არ მოგვცეს საძიებელი ფესვის მიახლოება.

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც მოიძებნება d რიცხვი. როგორც ცნობილია, $y=f(x)$ მრუდის $(a_0, f(a_0))$ წერტილში მხების განტოლება შეიძლება

$$y-f(a_0)=f'(a_0)(x-a_0)$$

სახით ჩაიწეროს. თუ მასში მხების x ღერძთან გადაკვეთის წერტილის $(d, 0)$ კოორდინატებს ჩავსვამთ, მივიღებთ:

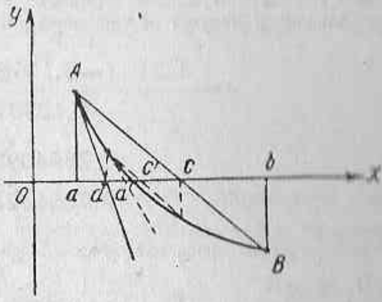
$$-f(a_0)=f'(a_0)(d-a_0),$$

საიდანაც

$$d=a_0-\frac{f(a_0)}{f'(a_0)}. \qquad (2)$$

თუ მკითხველი ნახ. 11—14-ზე ქორდებით შეაერთებს A და B წერტილებს, აღმოაჩენს, რომ წრფივი ინტერპოლაციისა და ნიუტონის მეთოდები ყველა შემთხვევაში α ფესვის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის მიახლოებას იძლევა სხვადასხვა მხრიდან. თუ (a, b) მონაკვეთი უკვე ისეთია, როგორიც ნიუტონის მეთოდშია საჭირო, მიზანშეწონილია ამ ორი მეთოდის კომბინირება. ამ გზით ჩვენ მივიღებთ

α ფესვისათვის ბევრად უფრო ვიწრო c და d საზღვრებს. თუ ისინი ჯერ კიდევ არ გვაძლევენ მიახლოების საჭირო სიზუსტეს, მაშინ ამ საზღვრებისათვის კიდევ უნდა ვიხმაროთ ორივე აღნიშნული მეთოდი (იხ. ნახ. 16) და ა. შ., ამასთან შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს პროცესი ნამდვილად გვაძლევს საშუალებას α ფესვი ნებისმიერი სიზუსტით გამოვთვალოთ.



ნახ. 16

გამოვიყენოთ ეს მეთოდები წინა პარაგრაფში განხილული

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$$

მრავალწევრისათვის.

ჩვენ ვიცით, რომ ამ მრავალწევრს აქვს მარტივი α_1 ფესვი, რომელიც $1<\alpha_1<2$ საზღვრებშია მოთავსებული. შეიძლება წინდაწინ ვთქვათ, რომ ეს საზღვრები ძალზედ ფართოა იმისათვის, რომ მხოლოდ ერთხელ გამოყენებულმა ინტერპოლაციისა და ნიუტონის მეთოდებმა კარგი შედეგი მოგვცეს. მაგრამ გამოვიყენოთ ისინი იმიტომ, რომ გვქონდეს ერთი მაგალითი, რომელიც არ მოითხოვს რთულ გამოთვლებს.

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, $h'(x), h''(x), \dots, h^{V}(x)$ წარმოებულები იღებენ დადებით მნიშვნელობას, როცა $x=1$. აქედან § 39-ის შედეგების საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ $x=1$ მნიშვნელობა არის $h'(x)$-ის და აგრეთვე $h''(x)$-ის დადებითი ფესვთა ზედა საზღვარი. მაშასადამე, (1,2) მონაკვეთი არ შეიცავს ამ წარმოებულთა ფესვებს და ამიტომ მისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი. ამის გარდა ამ მონაკვეთში $h''(x)$ ყველგან დადებითია და რადგან

$$h(1)=-4,\ h(2)=39,$$

ამიტომ უნდა ჩავთვალოთ, რომ $a_0=2$. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $h'(2)=109$, (2) ფორმულიდან გვექნება:

$$d=2-\frac{39}{109}=\frac{179}{109}=1,64\dots$$

მეორე მხრივ (1) ფორმულა გვაძლევს

$$c=\frac{2\cdot(-4)-1\,.\,39}{-4-39}=\frac{47}{43}=1,09\dots$$

და მაშასადამე α_1 ფესვი მოთავსებულია

$$1,09<\alpha_1<1,65$$

საზღვრებში

ჩვენ მივიღეთ საზღვრების მეტად უმნიშვნელო შევიწროება, რომ ეს შედეგი დამაკმაყოფილებლად ჩავთვალოთ. რასაკვირველია, შეიძლებოდა ახლად მიღებული საზღვრებისათვის კიდევ ერთხელ გამოგვეყენებინა ჩვენი მეთოდები. მაგრამ მიზანშეწონილია თავიდანვე ვიპოვოთ α_1-სათვის საკმაოდ ვიწრო საზღვრები, მაგალითად 0,1-მდე სიზუსტით, ან 0,01-მდეც კი და მხოლოდ შემდეგ გამოვიყენოთ ეს მეთოდები. გასაგებია, რომ ყველაფერი ეს გამოთვლას საკმაოდ გაართულებს, მაგრამ კონკრეტული ამოცანების გადაწყვეტის დროს, რომლებიც მოითხოვენ მრავალწევრთა ფესვების საკმაოდ ზუსტ ცოდნას, უნდა დავთანხმდეთ ამაზე.

დავუბრუნდეთ $h(x)$ მრავალწევრს და მის α_1 ფესვს, თანაც აღვნიშნოთ, რომ ქვემოთ მოყვანილ მრავალწევრთა ყველა მნიშვნელობა ჰორნერის მეთოდითაა გამოთვლილი, რადგან

$$h(1{,}3) = -0{,}13987,\ h(1{,}31) = 0{,}0662923851,$$

ამიტომ

$$1{,}3 < \alpha_1 < 1{,}31,$$

ე. ი. ჩვენ ვიპოვეთ α_1 ფესვის მნიშვნელობა 0,01-ის სიზუსტით. გამოვიყენოთ ახლა ამ ახალი საზღვრებისათვის წრფივი ინტერპოლაციის მეთოდი:

$$c = \frac{1{,}31 \cdot (-0{,}13987) - 1{,}3 \cdot 0{,}0662923851}{-0{,}13987 - 0{,}0662923851} =$$

$$= \frac{0{,}26940980063}{0{,}2061623851} = 1{,}30678\ldots$$

გამოვიყენოთ ამავე საზღვრებისათვის ნიუტონის მეთოდი, ამასთანავე უნდა დავუშვათ $\alpha_0 = 1{,}31$. რადგან

$$h'(1{,}31) = 20{,}92822405,$$

ამიტომ

$$d = 1{,}31 - \frac{0{,}0662923851}{20{,}92822405} = \frac{27{,}3496811204}{20{,}92822405} = 1{,}30683\ldots$$

ამგვარად,

$$1{,}30678 < \alpha_1 < 1{,}30684$$

და ამიტომ, თუ დავუშვებთ, რომ $\alpha_1 = 1{,}30681$, მოგვივა 0,00003-ზე ნაკლები შეცდომა.

ჩვენ აქამდე არ გვიჩვენებია, რომ ზევით გადმოცემული მეთოდები ნამდვილად იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ ფესვი ნებისმიერი სიზუსტით, ე. ი. არ დაგვიმტკიცებია ამ მეთოდების კრებადობა. დავამტკიცოთ ეს ნიუტონის მეთოდისათვის მაინც.

ვთქვათ, როგორც ზემოთ, $f(x)$ მრავალწევრის მარტივი α ფესვი მოთავსებულია (a, b) მონაკვეთში, რომელიც ისეა ამორჩეული, როგორც ეს აუცილებელია ნიუტონის მეთოდის გამოსაყენებლად. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს ისეთი დადებითი A და B რიცხვების არსებობა, რომ ყველგან (a, b) მონაკვეთზე

$$|f'(x)| > A,\quad |f''(x)| < B. \tag{3}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$C = \frac{B}{2A}$$

და დავუშვათ, რომ

$$C(b-a) < 1. \tag{4}$$

ამ უტოლობის შესასრულებლად, შეიძლება α ფესვის (a, b) საზღვრების უფრო ვიწრო საზღვრებით შეცვლა; მაგრამ ეს არ დაარღვევს (3) უტოლობათა სამართლიანობას. დაე, a_0 იყოს a, b საზღვრებიდან ის, რომელშიც უნდა გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი. (2) ფორმულის თანახმად ჩვენ მივიღებთ α ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად თანმიმდევრობით $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ რიცხვებს, რომლებიც (a, b) მონაკვეთში მდებარეობენ და დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან

$$a_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

ტოლობებით.

დაე

$$\alpha = a_k + h_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

მაშინ

$$0 = f(\alpha) = f(a_k) + h_k f'(a_k) + \frac{h^2_k}{2} f''(a_k + \theta h_k),$$

სადაც $0 < \theta < 1$, რადგან $f'(a_k) \neq 0$, (a, b) მონაკვეთზე დადებული პირობის თანახმად. ამიტომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ (5) და (6)-ს, მივიღებთ

$$-\frac{h^2_k}{2} \frac{f''(a_k + \theta h_k)}{f'(a_k)} = h_k + \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} = \alpha - \left(a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}\right) = \alpha - a_{k+1} = h_{k+1}.$$

აქედან

$$|h_{k+1}| = h^2_k \left| \frac{f''(a_k + \theta h_k)}{2f'(a_k)} \right| < h^2_k \frac{B}{2A} = Ch^2_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ამგვარად

$$|h_{k+1}| < Ch^2_k < C^3 h^4_{k-1} < C^7 h^8_{k-2} < \ldots < C^{2^{k+1}-1} h_0^{2^{k+1}}$$

ან, რადგან $|h_0| = |\alpha - a_0| < b - a$,

$$|h_{k+1}| < C^{-1}[C(b-a)]^{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

აქედან (4) პირობის თანახმად გამომდინარეობს, რომ h_k სხვაობა α ფესვსა და მის a_k მიახლოებით მნიშვნელობას შორის, რომელიც მიღებულია ნიუტონის მეთოდის თანმიმდევრობითი გამოყენებით, ნულისკენ მიისწრაფვის k-ს ზრდის დროს, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

აღვნიშნოთ, რომ (7) ფორმულა შეფასებას აძლევს $(k+1)$ ნაბიჯის ცდომილებას, რაც მნიშვნელოვანია, თუ ნიუტონის მეთოდი მარტო გამოიყენება და არა წრფივი ინტერპოლაციის მეთოდთან კომბინაციაში.

მიახლოებითი გამოთვლის თეორიის კურსებში მკითხველს შეუძლია გაეცნოს ზემოთ გადმოცემული მეთოდებით გამოთვლების უფრო რაციონალური განლაგების საშუალებებს, რომლებიც აადვილებენ მათ გამოყენებას. ამავე კურსებში შეიძლება ნახოს ფესვთა მიახლოებითი გამრთვლის ბევრი სხვა მეთოდის აღწერა. მათ შორის ყველაზე უფრო სრულყოფილია ლობაჩევსკის მეთოდი (რომელსაც ხანდახან შეცდომით გრეფეს მეთოდს უწოდებენ). ეს მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ერთად ვიპოვნოთ ყველა ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა, მათ შორის კომპლექსურისაც, თანაც არ მოითხოვს ფესვების წინდაწინ გამოყოფას; მაგრამ იგი დაკავშირებულია ძალზედ რთულ გამოთვლებთან. ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს ქვემოთ მე-11 თავში განხილული სიმეტრიულ მრავალწევრთა თეორია.

თავი მეათე

ველები და მრავალწევრები

§ 43. რიცხვითი რგოლები და ველები

კურსის წინა განყოფილებებში მასალის გადმოცემისას ხშირად ჩვენ განვიხილავდით ან ნებისმიერ კომპლექსურ რიცხვებს, ან მხოლოდ ნამდვილ რიცხვებს და თან აღვნიშნავდით, რომ მიღებული შედეგები სამართლიანი რჩებოდა მხოლოდ მაშინ, თუ შემოვიფარგლებოდით ნამდვილი რიცხვებით (ან, შესაბამისად, რომ ისინი სიტყვასიტყვით გადაიტანებოდნენ ნებისმიერ კომპლექსურ რიცხვთა შემთხვევაზე). როგორც წესი, ყველა ამ შემთხვევაში შეგვეძლო შეგვენიშნა, რომ გადმოცემული თეორია მთლიანად შეინახებოდა იმ შემთხვევაშიც კი თუ მხოლოდ რაციონალურ რიცხვებს განვიხილავდით. დადგა დრო ვაჩვენოთ მკითხველს ამ პარალელიზმის ჭეშმარიტი მიზეზი, გადმოვცეთ შემდეგი მასალა მისთვის დამახასიათებელ ბუნებრივ ზოგადობაში, ე. ი. საერთოდ მიღებულ ალგებრულ ენაზე. ამ მიზნით შემოვიღოთ ველის ცნება და, აგრეთვე, უფრო ვრცელი — რგოლის ცნება, რომელიც ჩვენს კურსში მხოლოდ დამხმარე როლს ასრულებს.

ცხადია, რომ ყველა კომპლექსურ, ყველა ნამდვილ და ყველა რაციონალურ რიცხვთა სისტემებს, ისევე როგორც ყველა მთელ რიცხვთა სისტემას აქვს ის საერთო თვისება, რომ ყოველ მათგანში არა მარტო შეკრება და გამრავლება, არამედ გამოკლებაც შეიძლება შესრულდეს ამ სისტემიდან გამოუსვლელად. აღნიშნული რიცხვითი სისტემების ეს თვისება განასხვავებს მათ, მაგალითად, მთელ დადებით ან ნამდვილ დადებით რიცხვთა სისტემებისაგან.

კომპლექსურ ან, კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა ყოველ სისტემას, რომელიც შეიცავს თავისი ორი ნებისმიერი რიცხვის ჯამს, სხვაობას და ნამრავლს, ეწოდება რიცხვითი რგოლი. ამგვარად, ყველა მთელ, რაციონალურ, ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა წარმოადგენს რიცხვით რგოლს. მეორე მხრივ, დადებით რიცხვთა არავითარი სისტემა არ იქნება რგოლი, რადგან თუ a და b ორი სხვადასხვა დადებითი რიცხვია, მაშინ ან $a-b$ ან $b-a$ უარყოფითია. უარყოფით რიცხვთა არავითარი სისტემაც არ იქნება

რგოლი, თუნდაც იმიტომ რომ ორი უარყოფითი რიცხვის ნამრავლი დადებითია.

რიცხვითი რგოლები სულაც არ ამოიწურება ზემოთ განხილული ოთხი მაგალითით. მითითებული იქნება ზოგიერთი სხვა მაგალითიც. ამასთანავე იმის შემოწმებას, რომ რიცხვთა განხილული სისტემა ნამდვილად რგოლია, ყოველთვის მივანდობთ მკითხველს.

ლუწი რიცხვები შეადგენენ რგოლს; საერთოდ, ყოველი ნატურალური n-ისათვის ერთობლიობა რიცხვებისა, რომელნიც უნაშთოდ იყოფიან n-ზე, იქნება რგოლი. კენტი რიცხვები რგოლს არ შეადგენენ, რადგან ორი კენტი რიცხვის ჯამი ლუწია.

რგოლი იქნება რაციონალურ რიცხვთა ერთობლიობა, რომელთა შეუკვეცადი წილადის სახით ჩაწერის მნიშვნელი იქნება 2-ის რომელიმე ხარისხი; ამ ერთობლიობას ეკუთვნის, კერძოდ, ყველა მთელი რიცხვი, რადგან მათ შეუკვეცად ჩანაწერს მნიშვნელად აქვს 1, ე. ი. ორი ნულ ხარისხში. ამ მაგალითში 2-ის ნაცვლად შეიძლება, რასაკვირველია, ავიღოთ ნებისმიერი მარტივი რიცხვი p. საერთოდ, თუ ავიღებთ მარტივ რიცხვთა ნებისმიერ სიმრავლეს, სასრულოს ან უსასრულოსაც კი, და თუ განვიხილავთ რაციონალურ რიცხვთა სისტემას, რომელთა შეუკვეცადი ჩაწერის მნიშვნელი იყოფა მხოლოდ აღებული სიმრავლის მარტივ რიცხვებზე, ჩვენ მივიღებთ აგრეთვე რგოლს. მეორე მხრივ, რაციონალურ რიცხვთა ერთობლიობა, რომელთა შეუკვეცადი ჩაწერის მნიშვნელი არ იყოფა არავითარი მარტივი რიცხვის კვადრატზე, არ იქნება რგოლი, რადგან რიცხვთა აღნიშნული თვისება არ ინახება გამრავლების შემდეგ.

გადავდივართ რიცხვითი რგოლების მაგალითებზე, რომელნიც არ შედიან მთლიანად რაციონალურ რიცხვთა რგოლში.

$$a+b\sqrt{2} \tag{1}$$

სახის რიცხვთა ერთობლიობა, სადაც a და b ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია, იქნება რგოლი. ამ რგოლს ეკუთვნის, კერძოდ, ყველა რაციონალური რიცხვი (როცა $b=0$), აგრეთვე რიცხვი $\sqrt{2}$ (როცა $a=0$, $b=1$). ჩვენ მივიღებდით რგოლს მაშინაც, თუ შემოვიფარგლებოდით (1) სახის რიცხვებით მთელი კოეფიციენტებით a, b. ამ მაგალითებში შეიძლება, რასაკვირველია, $\sqrt{2}$ რიცხვის მაგივრად ავჲელო $\sqrt{3}$ ან $\sqrt{5}$ და ა. შ.

ნებისმიერი რაციონალური (ან მარტო მთელი) a, b კოეფიციენტებიანი

$$a+b\sqrt[3]{2} \tag{2}$$

სახის რიცხვთა სისტემა არ იქნება რგოლი, რადგან $\sqrt[3]{2}$ რიცხვის თავის თავზე ნამრავლი არ შეიძლება, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, ჩაიწეროს (2) სახით [1]. მაგრამ ნებისმიერი a, b რაციონალურ კოეფიციენტებიანი

[1] მართლაც ვთქვათ

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}, \tag{2'}$$

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \tag{3}$$

სახის რიცხვების სისტემა უკვე რგოლი იქნება, იგივეს ექნება ადგილი თუ შემოვიფარგლებით მთელ კოეფიციენტებიანი შემთხვევით.

განვიხილოთ ახლა ყველა ნამდვილი რიცხვი, რომელიც შეიძლება მიღებულ იქნეს შეკრების, გამრავლების და გამოკლების ოპერაციის რამოდენიმეჯერ ჩატარებით მკითხველისათვის კარგად ცნობილ π რიცხვსა და რომელიმე რაციონალურ რიცხვს შორის. ესენი იქნებიან რიცხვები, რომელნიც შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწერონ

$$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\ldots+a_n\pi^n, \tag{4}$$

სადაც $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n$ რაციონალური რიცხვებია, $n \geqslant 0$. აღვნიშნოთ, რომ არავითარ რიცხვს არა აქვს (4) სახის ორი სხვადასხვა ჩაწერა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ ავიღებთ ორი ასეთი ჩაწერის სხვაობას, მივიღებთ, რომ რიცხვი π აკმაყოფილებს რომელიმე განტოლებას რაციონალური კოეფიციენტებით; მაგრამ მათემატიკური ანალიზის მეთოდებით მტკიცდება, რომ π არ შეუძლია დააკმაყოფილოს სინამდვილეში არც ერთი განტოლება რაციონალური კოეფიციენტებით, ე. ი. არის ტრანსცენდენტული რიცხვი. თუმცა ამ შედეგის გამოუყენებლად, ე. ი. იმის დაუშვებლად, რომ (4) სახის რიცხვის ჩაწერა ცალსახაა, მაინც შეიძლება ჩვენება, რომ (4) სახის რიცხვები შეადგენენ რგოლს.

რგოლი იქნება აგრეთვე ერთობლიობა რიცხვებისა, რომელნიც მიიღებიან π რიცხვისა და რაციონალური რიცხვებისაგან შეკრების, გამრავლების, გამოკლებისა და გაყოფის ოპერაციების მეშვეობით, რომლებიც რამდენიმეჯერაა მოხმარებული. დასამტკიცებლად არ არის აუცილებელი მოვძებნოთ განხილული რიცხვებისათვის რაიმე სპეციალური კარგი ჩაწერა (თუმცა იგი შეიძლება მოინახოს): თუ α და β რიცხვები მიღებული არიან π-სა და რაციონალური

სადაც a და b რაციონალურებია. თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $\sqrt[3]{2}$-ზე მივიღებთ:

$$2=a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}.$$

თუ ჩავსვამთ აქ (2') გამოსახულებას $\sqrt[3]{4}$-ისათვის, აშკარა გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ ტოლობას

$$(a+b^2)\sqrt[3]{2}=2-ab. \tag{2''}$$

თუ $a+b^2 \neq 0$, მაშინ

$$\sqrt[3]{2}=\frac{2-ab}{a+b^2},$$

რაც შეუძლებელია, რადგან მარჯვნივ დგას რაციონალური რიცხვი. თუკი $a+b^2=0$, მაშინ, (2'') გამო, და $2-ab=0$, ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს $b^3=-2$, რაც ისევ შეუძლებელია b რიცხვის რაციონალობის გამო.

რიცხვებისაგან აღნიშნული ოპერაციებით, მაშინ იგივეა სამართლიანი, გასაგებია, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ რიცხვებისათვისაც, აგრეთვე (როცა $\beta \neq 0$) $\frac{\alpha}{\beta}$ რიცხვისათვისაც.

ბოლოს, თუ ავიღებთ ნებისმიერი a, b რაციონალურ კოეფიციენტებიანი $a+bi$ კომპლექსური რიცხვების ერთობლიობას, მივიღებთ რგოლს; იგივეს ექნება ადგილი თუ შემოვიფარგლებით *მთელი* a, b კოეფიციენტებით.

განხილულ მაგალითებს არ შეუძლიათ მოგვცენ სრული წარმოდგენა თუ რამდენად მრავალგვარია რიცხვითი რგოლები, მაგრამ ჩვენ ჯერჯერობით არ ვაგრძელებთ მაგალითების სიას და გადავალთ რიცხვითი რგოლების ერთი სპეციალური და ძალიან მნიშვნელოვანი ტიპის განხილვაზე. რასაკვირველია, ვიცით, რომ ყველა რაციონალურ, ყველა ნამდვილ და ყველა კომპლექსურ რიცხვთა სისტემებში შეიძლება შეუზღუდავად ვაწარმოოთ გაყოფა (გარდა ნულზე გაყოფისა), მაშინ როცა მთელ რიცხვთა გაყოფას გამოვყავართ ამ რიცხვთა სისტემიდან. აქამდე ჩვენ ყურადღებას არ ვაქცევდით ამ განსხვავებას, სინამდვილეში კი ის ძალიან მნიშვნელოვანია და მივყავართ შემდეგ განმარტებამდე.

რიცხვით რგოლს ეწოდება *რიცხვითი ველი*, თუკი მისი ორი ნებისმიერი რიცხვის განაყოფი (გამყოფი იგულისხმება, რასაკვირველია, ნულისაგან განსხვავებულად) მასვე ეკუთვნის. მაშასადამე, შეიძლება ვილაპარაკოთ რაციონალურ რიცხვთა ველზე, ნამდვილ რიცხვთა ველზე, კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, მაშინ როცა მთელ რიცხვთა რგოლი არ არის ველი.

რიცხვითი რგოლების ზემოთ განხილული ზოგიერთი მაგალითი სინამდვილეში ველია. თავდაპირველად აღვნიშნოთ, რომ არ არსებობენ რაციონალურ რიცხვთა ველისაგან განსხვავებული და მთლიანად მასში შემავალი რიცხვითი ველები (მარტო ნულისაგან შემდგარ სისტემას არ ჩავთვლით ველად). სამართლიანია შემდეგი უფრო ზოგადი დებულებაც:

რაციონალურ რიცხვთა ველი მთლიანად შედის ყოველ რიცხვით ველში.

მართლაც ვთქვათ, მოცემულია რაიმე რიცხვითი ველი, რომელსაც ჩვენ ავღნიშნავთ P ასოთი. თუ a არის P ველის ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვი, მაშინ P შეიცავს a რიცხვის თავის თავზე განაყოფსაც, ე. ი. რიცხვ ერთიანს. თუ შევკრებთ ერთიანს თავის თავთან რამდენიმეჯერ, მივიღებთ, რომ ყველა ნატურალური რიცხვი შედის P ველში. მეორე მხრივ, P ველი უნდა შეიცავდეს $a-a$ სხვაობას, ე. ი. რიცხვ ნულს, და ამიტომ P-ს ეკუთვნის ნულისაგან ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის გამოკლების შედეგი, ე. ი. ნებისმიერი მთელი უარყოფითი რიცხვი. დაბოლოს, P ველში შედის მთელ რიცხვთა განაყოფებიც, ე. ი. საერთოდ ყველა რაციონალური რიცხვი.

კომპლექსურ რიცხვთა ველი შეიცავს ბევრ სხვადასხვა ველს, და რაციონალურ რიცხვთა ველი იქნება მათ შორის მხოლოდ უმცირესი. ამგვარად, ზემოთ განხილული

$$a+b\sqrt{2} \tag{5}$$

სახის რიცხვთა რგოლი *ნებისმიერი რაციონალური* (და არა მარტო მთელი) კოეფიციენტებით a, b იქნება ველი. მართლაც, განვიხილოთ (5) სახის ორი რიცხვის, $a+b\sqrt{2}$ და $c+d\sqrt{2}$, განაყოფი, ამასთან მეორე რიცხვი ნულისაგან განსხვავებულად ჩავთვალოთ; მაშასადამე, ნულისაგან განსხვავდება $c-d\sqrt{2}$ რიცხვიც, და ამიტომ

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

ჩვენ ისევ მივიღეთ (5) სახის რიცხვი, ამასთან კოეფიციენტები რაციონალური რჩება. გასაგებია, რომ ამ მაგალითში $\sqrt{2}$ რიცხვი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი რაციონალური რიცხვის კვადრატული ფესვით, რომლისგანაც არ ამოიღება კვადრატული ფესვი თვით რაციონალურ რიცხვთა ველში. ამრიგად, $a+bi$ სახის რიცხვები რაციონალურ a, b-თი შეადგენენ ველს.

§ 44. რგოლი

მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, აგრეთვე ტექნიკასა და ბუნებისმეტყველებაში მათემატიკის გამოყენებისას საკმაოდ ხშირად ვხვდებით ისეთ მდგომარეობას, როდესაც ალგებრული ოპერაციები წარმოებენ არა რიცხვებზე, არამედ სულ სხვა ბუნების ობიექტებზე. ასეთი მაგალითების დიდი რიცხვის პოვნა შეიძლება წიგნის წინა თავებში—მოგაგონებთ მატრიცთა გამრავლებასა და შეკრებას, ვექტორთა შეკრებას, ოპერაციებს მრავალწევრებზე, ოპერაციებს წრფივ გარდაქმნებზე. *ალგებრული ოპერაციის* ზოგადი განსაზღვრა, რომელსაც აკმაყოფილებენ რიცხვით რგოლებში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები, აგრეთვე ოპერაციები მითითებულ მაგალითებში, შემდეგში მდგომარეობს.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე სიმრავლე M, შემდგარი ან რიცხვებისაგან, ან გეომეტრიული ბუნების ობიექტებისაგან, საერთოდ რაიმე საგნებისაგან, რომლებსაც ჩვენ ვუწოდებთ ამ სიმრავლის *ელემენტებს*. ამბობენ, რომ M *სიმრავლეში განსაზღვრულია ალგებრული ოპერაცია*, თუ მითითებულია კანონი, რომლის მეშვეობითაც ელემენტების *ნებისმიერ* a, b წყვილს ამ სიმრავლიდან *ცალსახად შეესაბამება* (შეუსაბამდება) რაიმე მესამე ელემენტი c, რომელიც აგრეთვე M-ს ეკუთვნის. ამ ოპერაციას შეიძლება დაერქვას *შეკრება* და მაშინ c-ს ეწოდება a და b ელემენტების *ჯამი* და აღინიშნება სიმბოლოთი $c=a+b$; ამ ოპერაციას შეიძლება ეწოდოს *გამრავლება*, ე. ი. c იქნება a და b ელემენტების *ნამრავლი*, $c=ab$; ბოლოს, შესაძლებელია, რომ M სიმრავლეში განმარტებული ოპერაციისათვის შემოღებულ იქნეს ახალი ტერმინოლოგია და სიმბოლიკა.

ყოველ რიცხვით რგოლში განმარტებულია ორი დამოუკიდებელი ოპერაცია—შეკრება და გამრავლება. რაც შეეხება გამოკლებასა და გაყოფას, ეს მოქმედებები არ შეიძლება ჩავთვალოთ ახალ ოპერაციებად, რადგან ისინი შესაბამისად შეკრებისა და გამრავლების შებრუნებული მოქმედებები არიან, თუ მივიღებთ *შებრუნებული ოპერაციის* შემდეგ საერთო განმარტებას.

ვთქვათ M სიმრავლეში განმარტებულია ალგებრული ოპერაცია, მაგალითად შეკრება. ამბობენ, რომ *ამ ოპერაციისათვის არსებობს შებრუნებული ოპერაცია*—გამოკლება, თუ a, b ელემენტების *ნებისმიერი* წყვილისათვის M-დან არსებობს M-ში ისეთი ელემენტი d, ამასთან მხოლოდ *ერთადერთი*, რომელიც აკმაყოფილებს $b+d=a$ ტოლობას; მაშინ ელემენტ d-ს ეწოდება a და b ელემენტების *სხვაობა* და აღინიშნება $d=a-b$ სიმბოლოთი.

რიცხვით ველებში შებრუნებული ოპერაცია გააჩნია, ცხადია, როგორც შეკრებას, ისე გამრავლებას (უკანასკნელი, მართალია, შეზღუდულია: გამყოფი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან). რიცხვით რგოლებში კი, რომლებიც არ არიან ველები (როგორც, მაგალითად, მთელ რიცხვთა რგოლში), შებრუნებული ოპერაცია გააჩნია მხოლოდ შეკრებას.

მეორე მხრივ, x უცნობის ყველა მრავალწევრთა სისტემაში, რომელთა კოეფიციენტებიც ეკუთვნიან ფიქსირებულ რიცხვით P ველს, განმარტებულია, აგრეთვე, ორი ოპერაცია—შეკრება და გამრავლება, ამასთან შეკრებას გააჩნია შებრუნებული ოპერაცია—გამოკლება.

რიცხვით რგოლებშიაც და მრავალწევრთა სისტემაშიც შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებს, როგორც ცნობილია, აქვთ შემდეგი თვისებები (a, b, c—ნებისმიერი რიცხვებია განხილული რიცხვითი რგოლიდან ან ნებისმიერი მრავალწევრებია განხილული სისტემიდან):

I. შეკრება კომუტატურია: $a+b=b+a$.

II. შეკრება ასოციაციურია: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

III. გამრავლება კომუტატურია: $ab=ba$.

IV. გამრავლება ასოციაციურია: $a(bc)=(ab)c$.

V. შეკრება და გამრავლება დაკავშირებულნი არიან დისტრიბუციის კანონით:

$$(a+b)c=ac+bc.$$

ჩვენ უკვე მომზადებულნი ვართ რგოლის ცნების, ალგებრის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნების, ზოგადი განსაზღვრისათვის.

R სიმრავლეს ეწოდება *რგოლი*, თუ მასში განმარტებულია ორი ოპერაცია—შეკრება და გამრავლება, ორივე კომუტატური და ასოციაციური, დაკავშირებულნი, აგრეთვე, დისტრიბუციის კანონით, ამასთან შეკრებას აქვს შებრუნებული ოპერაცია—გამოკლება.

ამგვარად, რგოლის მაგალითებია რიცხვითი რგოლები და x უცნობის მრავალწევრთა რგოლები კოეფიციენტებით მოცემული რიცხვითი ველიდან ან მოცემული რიცხვითი რგოლიდანაც კი. მივუთითოთ კიდევ ერთ მაგალითზე, რომელიც კარგად ამჟღავნებს რგოლის ცნების სიფართოვეს.

მათემატიკური ანალიზის კურსი იწყება ნამდვილი x ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრით. განვიხილოთ ერთობლიობა ფუნქციათა, რომელნიც განსაზღვრულნი არიან x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის და იღებენ ნამდვილ მნიშვნელობებს, და შემდეგნაირად განვმარტოთ ამ ერთობლიობაში ალგებრული ოპერაციები: ორი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციის *ჯამი* იყოს ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა ნებისმიერი $x=x_0$-ისათვის ტოლია მოცემული ფუნქციების მნიშვნელობების ჯამისა, ე. ი. უდრის $f(x_0)+g(x_0)$, ამ ფუნქციების *ნამრავლი* იქნება ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა $x=x_0$-ისათვის ტოლია ნამრავლისა $f(x_0)\cdot g(x_0)$. ჯამი და ნამრავლი, ცხადია, არსებობს განხილული ერთობლიობის ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის. I—V თვისებების სამართლიანობა შეიძლება შემოწმდეს ყოველგვარი დაბრკოლების გარეშე—ფუნქციათა შეკრება და გამრავლება დაიყვანება ყოველ x ზე მათ მნიშვნელობათა შეკრებასა და გამრავლებაზე, ე. ი. ნამდვილ რიცხვთა ოპერაციებზე, რომელთათვისაც I—V თვისებებს ადგილი აქვთ. ბოლოს, თუ ჩავთვლით $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათა *სხვაობად* ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა ყოველ $x=x_0$-ზე უდრის $f(x_0)-g(x_0)$ სხვაობას, ჩვენ მივალთ შეკრების შებრუნებულ — გამოკლების — ოპერაციამდე. *ამით დამტკიცებულია, რომ ყველა x-სათვის განმარტებულ ფუნქციათა ერთობლიობა ზემოთ მოთხრობილი წესით შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების შემოყვანის შემდეგ, ხდება რგოლი.*

ფუნქციათა რგოლების სხვა მაგალითებს მივიღებთ, თუ შევინახავთ ფუნქციებზე ოპერაციების ზემოთ მოცემულ განმარტებებს, მაგრამ განვიხილავთ ფუნქციებს განმარტებულს, მაგალითად, x ცვლადის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის, ან ფუნქციებს განმარტებულს x-ის მნიშვნელობებისათვის [0, 1] მონაკვეთიდან. საერთოდ რგოლი იქნება სისტემა ყველა ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ განსაზღვრის რაიმე მოცემული არე. შესაძლებელია აგრეთვე რგოლის მაგალითი მივიღოთ ისე, რომ არ გაგვეხილა მოცემულ არეზე განსაზღვრული ყველა ფუნქცია, არამედ მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც მათემატიკურ ანალიზში შეისწავლებიან. მეორე მხრივ, შეიძლებოდა გაგვეხილა კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციები. საერთოდ ფუნქციათა სხვადასხვა რგოლები, როგორც სხვადასხვა რიცხვითი რგოლები, ძალიან ბევრია.

გადავდივართ რგოლის განმარტებიდან პირდაპირ გამომდინარე *რგოლის ზოგიერთ უმარტივეს თვისებათა* დადგენაზე. ეს თვისებები რიცხვთა შემთხვევაში ძალიან ჩვეულია, მაგრამ შესაძლოა მკითხველს ეჩვენოს მოულოდნელად, რომ ისინი მხოლოდ I — V პირობებისა და ცალსახა გამოკლების არსებობის შედეგია.

თავდაპირველად რამოდენიმე შენიშვნა I — V პირობების შესახებ. *კომუტატურობის კანონის* როლი არ მოითხოვს განმარტებას. *ასოციაციურობის კანონის* როლი შემდეგია: ალგებრული ოპერაციის განმარტებაში მხოლოდ ორი ელემენტის ჯამსა ან ნამრავლზეა ლაპარაკი. თუ ჩვენ მოვინდომებთ, მაგალითად, სამი a, b, c ელემენტის ნამრავლის განმარტებას, შემდეგ დაბრკოლებას წავაწყდებით: au და vc ნამრავლები, სადაც $bc=u$,

$ab = v$ შეიძლება საერთოდ არ ემთხვეოდნენ ერთმანეთს, ე. ი. $a(bc) \neq (ab)c$ *ასოციაციურობის კანონი* მოითხოვს, რომ ეს ნამრავლები იყვნენ ტოლი რგოლის ერთი და იმავე ელემენტისა: ეს ელემენტი ბუნებრივია მივიღოთ abc ნამრავლად, რომელიც უკვე ყოველგვარი ფრჩხილების გარეშე ჩაიწერება. უფრო მეტიც, *ასოციაციურობის კანონი* საშუალებას გვაძლევს ცალსახად განვსაზღვროთ რგოლის ელემენტთა ნებისმიერი სასრულო რიცხვის ნამრავლი (შესაბამისად, ჯამი), ე. ი. საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ ნებისმიერი n ელემენტის ნამრავლის დამოუკიდებლობა ფრჩხილების თავდაპირველი განაწილებისაგან.

დავამტკიცოთ ეს დებულება ინდუქციით n რიცხვის მიმართ. როცა $n=3$, იგი უკვე დამტკიცებულია, ამიტომ ვუშვებთ, რომ $n > 3$, ამასთან ვთვლით, რომ n-ზე ნაკლები ყოველი რიცხვისათვის ჩვენი დებულება უკვე დამტკიცებულია. დაე, მოცემული იყოს ელემენტები $a_1, a_2, \ldots, a_n$ და დაე ამ სისტემაში როგორღაც განაწილებული იყოს ფრჩხილები, რომლებიც მიუთითებენ თუ როგორი მიმდევრობით უნდა შესრულდეს გამრავლება. უკანასკნელი ნაბიჯი იქნება პირველი k ელემენტის (სადაც $1 \leqslant k \leqslant n-1$) ნამრავლის გამრავლება $a_{k+1}, a_{k+2} \ldots a_n$ ნამრავლზე. რადგან ეს ნამრავლები შედგება n-ზე ნაკლებ რიცხვ მამრავლისაგან და ამიტომ დაშვების თანახმად ცალსახად განსაზღვრულია, ამიტომ ჩვენ დაგვრჩენია ნებისმიერი k და l-სათვის დავამტკიცოთ ტოლობა

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)(a_{k+1} a_{k+2}, \ldots a_n) = (a_1 a_2 \cdots a_l)(a_{l+1} a_{l+2} \cdots a_n).$$

ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა $l = k+1$. მაგრამ ამ შემთხვევაში თუ დავუშვებთ, რომ

$$a_1 a_2 \ldots a_k = b, \quad a_{k+2} a_{k+3} \ldots a_n = c,$$

ასოციაციურობის კანონზე დაყრდნობით მივიღებთ

$$b(a_{k+1} c) = (b a_{k+1}) c.$$

ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

კერძოდ შეიძლება ვილაპარაკოთ n ერთმანეთის ტოლ ელემენტთა ნამრავლზე, ე. ი. შემოვიტანოთ a ელემენტის a^n *ხარისხის* ცნება მთელი დადებითი მაჩვენებლით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა ჩვეულებრივი წესი მაჩვენებლებზე სამართლიანი რჩება ნებისმიერ რგოლში. ანალოგიურად შეკრების ასოციაციურობის კანონს მივყავართ a ელემენტის na *ჯერადის* ცნებამდე მთელი დადებითი n კოეფიციენტით.

დისტრიბუციის კანონი, ე. ი. ფრჩხილების გახსნის ჩვეულებრივი წესი, რგოლის ცნებაში ერთადერთი მოთხოვნაა, რომელიც შეკრებასა და გამრავლებას აკავშირებს; მხოლოდ ამ კანონის გამოა, რომ ორი ოპერაციის ერთდროული შესწავლა იძლევა მეტს, ვიდრე მათი ცალ-ცალკე შესწავლა. დისტრიბუციის კანონის ფორმულირებაში მონაწილეობას იღებს მხოლოდ ორი შესაკრების ჯამი. მაგრამ ყოველგვარი სიძნელის გარეშე მტკიცდება ნებისმიერი k-სათვის

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_k b$$

ტოლობის სამართლიანობა, შემდეგ კი ჯამის ჯამზე გამრავლების ზოგადი წესი.

ყოველ რგოლში სრულდება დისტრიბუციის კანონი სხვაობისათვისაც. მართლაც, სხვაობის განმარტების თანახმად $a-b$ ელემენტი აკმაყოფილებს

$$b+(a-b)=a$$

ტოლობას. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ c-ზე და მარცხენა ნაწილისათვის გამოვიყენებთ დისტრიბუციის კანონს, მივიღებთ:

$$bc+(a-b)c=ac.$$

$(a-b)c$ ელემენტი არის, მაშასადამე, ac და bc ელემენტთა სხვაობა:

$$(a-b)c=ac-bc.$$

რგოლთა ძალიან მნიშვნელოვანი თვისებები გამომდინარეობენ გამოკლების არსებობიდან. თუ a არის R რგოლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $a-a$ სხვაობა რგოლის რომელიღაცა სრულიად გარკვეული ელემენტია. მისი როლი რიცხვით რგოლებში ნულის როლის ანალოგიურია, მაგრამ განმარტების თანახმად იგი შესაძლოა დამოკიდებულია a ელემენტის არჩევანზე, ამიტომ ჩვენ მას ჯერჯერობით ალვნიშნავთ 0_a-თი.

დავამტკიცოთ, რომ სინამდვილეში 0_a ელემენტები ყოველი a-სათვის ერთმანეთის ტოლია. მართლაც, თუ b არის R რგოლის ნებისმიერი სხვა ელემენტი, მაშინ,

$$a+(b-a)=b$$

ტოლობის ორივე მხარისადმი 0_a ელემენტის მიმატებითა და $0_a+a=a$ ტოლობის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$0_a+b=0_a+a+(b-a)=a+(b-a)=b.$$

ამგვარად, $0_a=b-b=0_b$.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ყოველ R რგოლს გააჩნია ცალსახად განსაზღვრული ელემენტი, რომლის ჯამიც ამ რგოლის ნებისმიერ a ელემენტთან უდრის a-ს. ვუწოდოთ ამ ელემენტს R რგოლის ნ უ ლ ი და ავღნიშნოთ 0 სიმბოლოთი, მის არევას რიცხვ ნულთან სერიოზულად არ ვთვლით. ამგვარად

$$a+0=a \quad \text{ყოველი } a\text{-სათვის } R\text{-დან.}$$

შემდეგ, ყოველ რგოლში ნებისმიერი a ელემენტისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული შებრუნებული ელემენტი $-a$, რომელიც აკმაყოფილებს

$$a+(-a)=0$$

ტოლობას, სახელდობრ, ეს ელემენტი იქნება $0-a$ სხვაობა; ცალსახობა გამოკლების ცალსახობიდან გამომდინარეობს. ცხადია, რომ $-(-a)=a$. რგოლის ორი ნებისმიერი ელემენტის სხვაობა $b-a$ შეგვიძლია ახლა

$$b-a=b+(-a)$$

სახით ჩავწეროთ. მართლაც,

$$[b+(-a)]+a=b+[(-a)+a]=b+0=b.$$

რგოლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის და ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის ადგილი აქვს

$$n(-a)=-(na)$$

ტოლობას. მართლაც, შესაკრებთა დაჯგუფებით მივიღებთ:

$$na+n(-a)=n[a+(-a)]=n\cdot 0=0.$$

ჩვენ მოგვეცა შესაძლებლობა განვსაზღვროთ რგოლის ელემენტის უარყოფითი ჯერადები: თუ $n>0$, მაშინ ერთმანეთის ტოლ $n(-a)$ და $-(na)$ ელემენტებს აღვნიშნავთ $(-n)a$-თი. ბოლოს შევთანხმდეთ, რომ ნებისმიერი a ელემენტის ნულოვან $0a$ ჯერადად ჩავთვლით განხილული რგოლის ნულს.

ჩვენს მიერ ნულის განსაზღვრა მოცემულია მხოლოდ შეკრებისა და მისი შებრუნებული ოპერაციის დახმარებით, ე. ი. გამრავლების გამოუყენებლად. მაგრამ რიცხვთა შემთხვევაში რიცხვ ნულს გამრავლების მიმართაც აქვს ერთი დამახასიათებელი და ძალიან მნიშვნელოვანი თვისება. თურმე ეს თვისება გააჩნია ნებისმიერი რგოლის ნულს: ნებისმიერ რგოლში ნებისმიერი ელემენტის ნამრავლი ნულზე ნულის ტოლია. დამტკიცება პირდაპირ დისტრიბუციის კანონს ეყრდნობა: თუ a არის R რგოლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ როგორიც არ უნდა იყოს ამ რგოლის დამხმარე ელემენტი x მივიღებთ:

$$a\cdot 0=a(x-x)=ax-ax=0.$$

თუ გამოვიყენებთ ნულის ამ თვისებას, შეიძლება დამტკიცება, რომ ყოველ რგოლში ნებისმიერი a, b ელემენტებისათვის სამართლიანია

$$(-a)b=-ab$$

ტოლობა. მართლაც,

$$ab+(-a)b=[a+(-a)]b=0\cdot b=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ კარგად ცნობილი და მაინც ცოტაოდენ საიდუმლო წესი უარყოფითი რიცხვების გამრავლებისა—„მინუსი მინუსზე იძლევა პლუსს"—აგრეთვე რგოლის განმარტებიდან გამომდინარეობს, ე. ი. ნებისმიერ რგოლში ადგილი აქვს

$$(-a)(-b)=ab$$

ტოლობას. მართლაც,

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-(-ab)=ab.$$

მკითხველი გაუჭირვებლად დაამტკიცებს, რომ ყოველ რგოლში ნებისმიერი ელემენტის ჯერადებისათვის (მათ შორის უარყოფითებისათვისაც) სამართლიანი რჩება რაიმე რიცხვის ჯერადზე მოქმედების ყველა წესი.

ამგვარად, ნებისმიერ რგოლში ალგებრულ ოპერაციებს აქვთ ბევრი ჩვენთვის ჩვეული თვისება ოპერაციებისა რიცხვებზე. მაგრამ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ყოველი რგოლი ინარჩუნებს რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ნებისმიერ თვისებას. ასე, რიცხვთა გამრავლებას აქვს ზემოთ განხილულის შებრუნებული თვისება: **თუ ორი რიცხვის ნამრავლი უდრის ნულს, მაშინ მამრავლთაგან ერთი მაინც უდრის ნულს.** ეს თვისება უკვე აღარ შეიძლება გავრცელდეს ნებისმიერ რგოლზე — ზოგიერთ რგოლში შეიძლება მივუთითოთ ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტთა ისეთ წყვილზე, რომელთა ნამრავლი ნულის ტოლია, ე. ი. $a \neq 0$, $b \neq 0$, მაგრამ $ab=0$; ამ თვისებიან a, b ელემენტებს **ნულის გამყოფებს** უწოდებენ.

ნულის გამყოფებიანი რგოლის მაგალითების პოვნა, ცხადია, არ შეიძლება რიცხვით რგოლებში. არ შეიცავს ნულის გამყოფებს არც რიცხვით კოეფიციენტებიან მრავალწევრთა რგოლი. მაგრამ ფუნქციათა ბევრი რგოლი შეიცავს ნულის გამყოფებს. პირველყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ ფუნქციათა ყოველ რგოლში ნული იქნება ფუნქცია, რომელიც x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის უდრის ნულს. ავიგოთ ახლა შემდეგი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები, რომლებიც განსაზღვრულია x-ის ყველა ნამდვილი მნიშვნელობისათვის:

$$f(x)=0, \text{ როცა } x \leqslant 0, \quad f(x)=x, \text{ როცა } x>0;$$

$$g(x)=x, \text{ როცა } x \leqslant 0, \quad g(x)=0, \text{ როცა } x>0.$$

ორივე ეს ფუნქცია ნულისაგან განსხვავებულია, რადგან მათი მნიშვნელობა x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის არ უდრის ნულს; ამ ფუნქციების ნამრავლი კი ნულის ტოლია.

რგოლის განმარტებაში შემავალი I—V თვისებებიდან ყველა ერთნაირად აუცილებელი არ არის. მეცნიერების განვითარება გვიჩვენებს, რომ მაშინ, როცა შეკრების I და II თვისებებს და დისტრიბუციის V კანონს ადგილი აქვს ყველა გამოყენებაში, რგოლის განმარტებაში გამრავლების III და IV თვისებების შეტანა ხშირად ძალზე შემბოჭველია, რადგან ავიწროვებს ამ ცნების შესაძლო გამოყენების არეს. ასე, n-ური რიგის ნამდვილ ელემენტებიან კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე, განხილული მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით, აკმაყოფილებს რგოლის განმარტებაში შემავალ ყველა თვისებას, გარდა გამრავლების კომუტატურობის კანონისა, არაკომუტატურ გამრავლებას ვხვდებით იმდენად ხშირად და ისეთ მნიშვნელოვან შემთხვევებში, რომ ამჟამად ტერმინ „რგოლის" ქვეშ ჩვეულებრივ ესმით **არაკომუტატური რგოლი** (უფრო ზუსტად, არა აუცილებლად კომუტატური რგოლი, გამრავლების შესაძლო არაკომუტატურობის აზრით), ხოლო რგოლის იმ კერძო ტიპს, რომელშიაც სრულდება III მოთხოვნა, უწოდებენ **კომუტატურ რგოლს.**

უკანასკნელ ხანებში იზრდება ინტერესი არაასოციაციურ გამრავლებიანი რგოლებისადმი და რგოლის ზოგადი თეორია იგება უკვე როგორც არაასოციაციურ (ე. ი. არა აუცილებლად ასოციაციურ) რგოლთა თეორია. ასეთი რგოლის უმარტივესი მაგალითია სამგანზომილებიანი ევკლიდის სივრცის ვექტორთა სიმრავლე შეკრებისა და (ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილი) ვექტორთა ვექტორული გამრავლების მიმართ.

§ 45. ველი

მსგავსად იმისა, როგორც რიცხვით რგოლთა შორის გამოიყო და იწოდა რიცხვით ველებად ის რგოლები, რომლებშიაც შესაძლებელია გაყოფის შეს-

რულება (გარდა ნულზე გაყოფისა), ბუნებრივია გავაქეთოთ ეს ზოგად შემთხვევაშიაც. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ *არავითარ რგოლში* არაა შესაძლებელი ნულზე გაყოფა გამრავლების მიმართ ნულის ზემოთ დამტკიცებული თვისების გამო: a ელემენტის გაყოფა ნულზე ნიშნავს რგოლში ისეთი x ელემენტის პოვნას, რომ $0 \cdot x = a$, რაც, როცა $a \neq 0$, შეუძლებელია, რადგან მარცხენა მხარე ნულის ტოლია.

შემოვიტანოთ შემდეგი განმარტება:

P რგოლს ეწოდება *ველი*, თუ იგი შედგება არა მარტო ნულისაგან და თუ მასში შესაძლებელია გაყოფა (ამასთან ცალსახად) ყოველ შემთხვევაში, გარდა ნულზე გაყოფის შემთხვევისა, ე. ი. თუ ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის P-დან, *რომელთაგან* b *განსხვავებულია ნულისაგან*, არსებობს P-ში ისეთი ელემენტი q, ამასთან მხოლოდ *ერთადერთი*, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $bq = a$. ელემენტი q იწოდება a და b ელემენტთა *განაყოფად* და აღინიშნება $q = \frac{a}{b}$ სიმბოლოთი[1].

ველის მაგალითია, ცხადია, ყველა რიცხვითი ველი. რგოლი, რომელიც შედგარია x უცნობის მრავალწევრებისაგან ნამდვილი კოეფიციენტებით ან საერთოდ კოეფიციენტებით რაიმე რიცხვითი ველიდან, არ წარმოადგენს ველს — მრავალწევრთა ნაშთით გაყოფა განსხვავდება, რასაკვირველია, „უნაშთოდ" გაყოფისაგან, რომელიც იგულისხმება ველის განმარტებაში. მეორე მხრივ, ადვილი დასანახია, რომ *ნამდვილ კოეფიციენტებიანი წილად-რაციონალური ყველა ფუნქციის ერთობლიობა* (იხ. § 25) *იქნება ველი*, რომელიც შეიცავს მრავალწევრთა რგოლს იმის მსგავსად, როგორც რაციონალურ რიცხვთა ველი შეიცავს მთელ რიცხვთა რგოლს.

ფუნქციათა რგოლებს შორის შეიძლება ველთა ზოგიერთ სხვა მაგალითზე მივუთითოთ; მაგრამ ჩვენ მათზე არ გავჩერდებით და გადავალთ სულ სხვა სახის მაგალითებზე.

ყველა რიცხვითი რგოლი და საერთოდ რგოლები, რომელთაც ჩვენ აქამდე ვიხილავდით, შეიცავს უსასრულოდ ბევრ ელემენტს. მაგრამ არსებობს რგოლები და ველებიც კი, რომელნიც ელემენტთა სასრულო რიცხვს შეიცავენ. *სასრული რგოლისა* და *სასრული ველის* უმარტივესი მაგალითები, რომელნიც არსებითად გამოიყენებიან მათემატიკის განსაკუთრებულ დარგში — რიცხვთა თეორიაში, შემდეგნაირად აიგება.

ვიღებთ 1-ისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ ნატურალურ n რიცხვს. a და b მთელი რიცხვები იწოდებიან n *მოდულით შედარებადებად*,

$$a \equiv b \pmod{n},$$

---

[1] ველში გაყოფის ერთადერთობა, ისე როგორც რგოლის განმარტებაში ნაგულისხმევი გამოკლების ერთადერთობა, სინამდვილეში შეიძლება გაუჭირვებლად დავამტკიცოთ სხვა მოთხოვნათა დახმარებით, რომლებიც შედიან ველის ან, სათანადოდ, რგოლის განმარტებაში.

თუ ეს რიცხვები n-ზე გაყოფისას ერთი და იმავე ნაშთს იძლევა ე. ი. თუ მათი სხვაობა უნაშთოდ იყოფა n-ზე. მთელ რიცხვთა მთელი რგოლი იშლება n არათანამკვეთ

$$C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \tag{1}$$

n მოდულით ერთმანეთთან შედარებად რიცხვთა კლასებად, ამასთან C_k კლასი, $k=0, 1, \ldots, n-1$, შედგება იმ რიცხვებისაგან, რომელნიც n-ზე გაყოფისას ნაშთში k-ს იძლევიან. შესაძლებელია თურმე სრულიად ბუნებრივი წესით განვმარტოთ ამ კლასთა შეკრება და გამრავლება.

ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი (ამასთან არა აუცილებლად განსხვავებული) C_k და C_l კლასები (1) სისტემიდან. თუ მივუმატებთ C_k კლასის ნებისმიერ რიცხვს C_l კლასის ნებისმიერ რიცხვს, მივიღებთ რიცხვს, რომელიც ძევს ერთ სრულიად გარკვეულ კლასში, სახელდობრ C_{k+l} კლასში, თუ $k+l<n$, ან C_{k+l-n} კლასში, თუ $k+l \geqslant n$. ამას მივყევართ კლასთა შეკრების შემდეგ განმარტებამდე:

$$\begin{aligned} C_k + C_l &= C_{k+l}, \text{ როცა } k+l<n, \\ C_k + C_l &= C_{k+l-n}, \text{ როცა } k+l \geqslant n. \end{aligned} \tag{2}$$

მეორე მხრივ, თუ გავამრავლებთ C_k კლასის ნებისმიერ რიცხვს C_l კლასის ნებისმიერ რიცხვზე, მივიღებთ რიცხვს, რომელიც აგრეთვე ძევს სრულიად გარკვეულ კლასში, სახელდობრ C_r კლასში, სადაც r არის kl ნამრავლის n-ზე გაყოფის ნაშთი. ამიტომ ჩვენ ვიღებთ, კლასთა გამრავლების ასეთ განმარტებას:

$$C_k \cdot C_l = C_r, \text{ სადაც } kl = nq + r, \; 0 \leqslant r < n. \tag{3}$$

n მოდულით ერთმანეთთან შედარებად მთელ რიცხვთა კლასების (1) სისტემა იქნება რგოლი (2) და (3) პირობებით განმარტებული ოპერაციების მიმართ. მართლაც, რგოლის განმარტების I—V მოთხოვნების სამართლიანობის დადგენა ადვილად შეიძლება უშუალო შემოწმებით, მაგრამ იგი გამომდინარეობს აგრეთვე მთელ რიცხვთა რგოლში ამ მოთხოვნების სამართლიანობისა და მთელ რიცხვებზე ოპერაციებსა და კლასებზე ოპერაციებს შორის კავშირიდან, რომელიც ზემოთაა მითითებული. ნულის როლს ასრულებს, ცხადია, კლასი C_0, რომელიც შედგება ისეთი რიცხვებისაგან, რომლებიც n-ზე უნაშთოდ იყოფიან. C_k კლასის, $k=1, 2, \ldots, n-1$, შებრუნებული იქნება C_{n-k} კლასი. მაშასადამე, კლასთა (1) სისტემაში შეიძლება გამოკლების განსაზღვრა, ე. ი. ეს სისტემა აკმაყოფილებს ყველა მოთხოვნას, რომელიც რგოლის განმარტებაში შედის. შევთანხმდეთ, მიღებული რგოლი აღვნიშნოთ Z_n.

თუ n შედგენილი რიცხვია, მაშინ Z_n რგოლს გააჩნია ნულის გამყოფები და ამიტომ, როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, არ შეიძლება იყოს ველი. მართლაც თუ $n=kl$, სადაც $1<k<n$, $1<l<n$, მაშინ C_k და C_l კლასები განსხვავდებიან ნულოვანი C_0 კლასისაგან, მაგრამ კლასების გამრავლების განმარტების (იხ. (3)) ძალით $C_k \cdot C_l = C_0$.

თუკი n მარტივი რიცხვია, მაშინ Z_n რგოლი ველი იქნება.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია C_k და C_m კლასები, ამასთან $C_k \neq C_0$, ე. ი. $1 \leqslant k \leqslant n-1$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ შეიძლება C_m გავყოთ C_k-ზე, ე. ი. ვიპოვოთ ისეთი C_l კლასი, რომ $C_k \cdot C_l = C_m$. თუ $C_m = C_0$, მაშინ $C_l = C_0$, თუკი $C_m \neq C_0$ მაშინ განვიხილოთ

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ (n-1)k \tag{4}$$

რიცხვთა სისტემა. ყველა ეს რიცხვი ნულოვან C_0 კლასს გარეთა ძევს, რადგან ორი, მარტივ n რიცხვზე ნაკლები ნატურალური რიცხვის ნამრავლი არ შეიძლება n-ზე გაიყოს. შემდეგ, არავითარი ორი sk და tk რიცხვი (4) სისტემიდან, $s < t$, არ შეიძლება იყოს ერთ კლასში, რადგან მაშინ მათი

$$tk - sk = (t-s)k$$

სხვაობა გაიყოფოდა n-ზე, რაც ისევ n რიცხვის სიმარტივეს ეწინააღმდეგება. ამგვარად, ყოველ არანულოვან კლასში ძევს ზუსტად ერთი რიცხვი (4) სისტემიდან. კერძოდ, C_m კლასში ძევს რიცხვი l_k, სადაც $1 \leqslant l \leqslant n-1$, ე. ი. $C_l \cdot C_k = C_m$, მაშინ კი C_l კლასი იქნება საძიებელი განაყოფი C_m-ისა C_k-ზე.

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ უსასრულოდ ბევრი სხვადასხვა სასრული ველი: ველი Z_2, რომელიც მხოლოდ ორი ელემენტისაგან შედგება, აგრეთვე ველები Z_3, Z_5, Z_7, Z_{11} და ა. შ.

გადავდივართ ველთა ზოგიერთი თვისების განხილვაზე, რომელიც გამომდინარეობს გაყოფის არსებობიდან. ეს თვისებები ანალოგიურია რგოლის თვისებებისა, რომელნიც ეყრდნობიან გამოკლების არსებობას, და მტკიცდება ისეთივე მსჯელობით, ამიტომ დამტკიცების ჩატარებას ვანდობთ მკითხველს.

ყოველ P ველს აქვს ცალსახად განსაზღვრული ელემენტი, რომლის ნამრავლი ამ ველის ნებისმიერ a ელემენტზე უდრის a-ს. ეს ელემენტი, რომელიც ემთხვევა ერთმანეთის ტოლ განაყოფებს $\frac{a}{a}$ ყოველი a-სათვის, იწოდება P ველის ერთეულად და აღინიშნება 1 სიმბოლოთი. ამგვარად,

$$a \cdot 1 = a \text{ ყველა } a\text{-სათვის } P\text{-დან.}$$

ყოველ ველში ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ a ელემენტისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული შებრუნებული ელემენტი a^{-1}, რომელიც აკმაყოფილებს

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

ტოლობას, სახელდობრ $a^{-1} = \frac{1}{a}$. ცხადია, რომ $(a^{-1})^{-1} = a$. განაყოფი $\frac{b}{a}$ შეგვიძლია ჩავწეროთ ახლა

$$\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$$

სახით.

ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი a ელემენტისათვის და ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის ადგილი აქვს

$$(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}$$

ტოლობას. თუ ამ ერთმანეთის ტოლ ელემენტებს ავღნიშნავთ a^{-n}-ით, მივიღებთ ველის ელემენტის უარყოფით ხარისხებს, რომელთათვისაც შენარჩუნებულია მოქმედების ჩვეულებრივი წესები. ბოლოს, დავუშვათ $a^0=1$ ყველა a სათვის.

ერთეულის არსებობა არ არის ველის დამახასიათებელი თვისება: ერთეული გააჩნია, მაგალითად, მთელ რიცხვთა რგოლს. ამასთანავე, ლუწ რიცხვთა რგოლის მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ყოველ რგოლს არა აქვს ერთეული. მეორე მხრივ, ყოველი რგოლი, რომელსაც აქვს ერთეული და რომელშიც არის ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ელემენტის შებრუნებული ელემენტი, იქნება ველი. მართლაც, ამ შემთხვევაში განაყოფი $\frac{b}{a}$, $a\neq 0$, იქნება ba^{-1} ნამრავლი. ამ განაყოფის ერთადერთობა ადვილად მტკიცდება.

შევნიშნოთ, რომ არავითარი ველი არ შეიცავს ნულის გამყოფებს. მართლაც, ვთქვათ $ab=0$, მაგრამ $a\neq 0$. თუ გავამრავლებთ ტოლობის ორივე მხარეს a^{-1} ელემენტზე, მივიღებთ მარცხნივ $(a^{-1}a)b=1\cdot b=b$. მარჯვნივ კი $a^{-1}\cdot 0=0$, ე. ი. $b=0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველ ველში ნებისმიერი ტოლობა შეგვიძლია შევკვეცოთ ნულისაგან განსხვავებულ საერთო მამრავლზე. მართლაც, თუ $ac=bc$ და $c\neq 0$, მაშინ $(a-b)c=0$, საიდანაც $a-b=0$, ე. ი. $a=b$.

$\frac{a}{b}$ (სადაც $b\neq 0$) განაყოფის განმარტებიდან და მისი ab^{-1} ნამრავლის სახით ჩაწერის ზემოთ დამტკიცებული შესაძლებლობისაგან დაუბრკოლებლივ შეიძლება გამოვიყვანოთ, რომ ნებისმიერ ველში შენარჩუნებულია წილადებზე მოქმედების ყველა ჩვეულებრივი წესი, სახელდობრ:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $ad=bc$;

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}.$$

ველის მახასიათებელი. რიცხვთა ველების ყველა თვისება არ ინახება ნებისმიერი ველის შემთხვევაში. ასე, თუ მივუმატებთ 1 რიცხვს თავის თავს რამდენიმეჯერ, ე. ი. თუ ავიღებთ ერთეულის მთელ დადებით ჯერადს, ჩვენ

არასდროს არ მივიღებთ ნულს, და საერთოდ ყველა ეს ჯერადები, ე. ი. ყველა ნატურალური რიცხვები, ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. თუკი ავიღებთ ერთეულის მთელ ჯერადებს რაიმე სასრულო ველში, მაშინ მათ შორის აუცილებლად იქნება ტოლები, რადგან ამ ველს ელემენტების მხოლოდ სასრულო რაოდენობა აქვს. თუ P ველის ერთეულის ყველა მთელი ჯერადი P ველის განსხვავებული ელემენტია, ე. ი. $k \cdot 1 \neq l \cdot 1$, როცა $k \neq l$, მაშინ ამბობენ, რომ P ველის მახასიათებელი ნულია; ასეთია, მაგალითად, ყველა რიცხვითი ველი. თუ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვები k და l, რომ $k > l$, მაგრამ P-ში ადგილი აქვს ტოლობას $k \cdot 1 = l \cdot 1$, მაშინ $(k-l) \cdot 1 = 0$, ე. ი. P-ში არსებობს ერთეულის ისეთი დადებითი ჯერადი, რომელიც უდრის ნულს. ამ შემთხვევაში P-ს ეწოდება სასრულო მახასიათებლიანი ველი, სახელდობრ p მახასიათებლიანი, თუ p არის ის პირველი დადებითი კოეფიციენტი, რომლითაც P ველის ერთეული ხდება ნულის ტოლი. სასრულო მახასიათებლიანი ველის მაგალითია ყველა სასრულო ველი; მაგრამ არსებობენ უსასრულო ველებიც, რომელთაც სასრულო მახასიათებელი აქვთ.

თუ P ველს აქვს მახასიათებლად p, მაშინ p რიცხვი მარტივი იქნება.

მართლაც, $p = st$ ტოლობიდან, სადაც $s < p$, $t < p$, გამოვიდოდა $(s \cdot 1)(t \cdot 1) = p \cdot 1 = 0$ ტოლობა, ე. ი., რადგან ველში არ შეიძლება იყოს ნულის გამყოფი, ან $s \cdot 1 = 0$, ან $t \cdot 1 = 0$, რაც ეწინააღმდეგება მახასიათებლის განმარტებას, როგორც უმცირეს დადებით კოეფიციენტს, რომელიც ველის ერთეულს ნულად აქცევს.

თუ P ველის მახასიათებელი უდრის p-ს, მაშინ ნებისმიერი a ელემენტისათვის ამ ველიდან ადგილი აქვს $pa = 0$ ტოლობას. თუკი P ველის მახასიათებელი უდრის 0-ს და a ამ ველის ელემენტია, n—მთელი რიცხვი, მაშინ $a \neq 0$ და $n \neq 0$-დან გამომდინარეობს $na \neq 0$.

მართლაც, პირველ შემთხვევაში pa ელემენტი, ე. ი. a-ს ტოლი p შესაკრების ჯამი, შეიძლება, თუ a-ს ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ, წარმოვადგინოთ

$$pa = a(p \cdot 1) = a \cdot 0 = 0$$

სახით. მეორე შემთხვევაში $na = 0$ ტოლობიდან, ე. ი. $a(n \cdot 1) = 0$, გამოვიდოდა $n \cdot 1 = 0$ ტოლობა, როცა $a \neq 0$, ე. ი., რადგან ველის მახასიათებელი უდრის ნულს, $n = 0$.

ქვეველი, გაფართოება. დაე P ველში მისი ელემენტების რაიმე ნაწილი, რომელიც P' სიმრავლეს შეადგენს, თვითონ იყოს ველი იმ ოპერაციების მიმართ, რომელნიც განმარტებულია P ველში, ე. ი. ნებისმიერი ორი a, b ელემენტისათვის P'-დან P ველში შემავალი $a+b$, ab, $a-b$ და, როცა $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ ელემენტები ეკუთვნიან P'-ს (I — V კანონები, რადგან ისინი სრულდება P-ში, შესრულდება, რასაკვირველია, P'-შიც). მაშინ P'-ს ეწოდება P ველის ქვეველი, ხოლო P-ს — P' ველის გაფართოება. გასაგებია,

რომ P ველის ნული და ერთეული შევა აგრეთვე P'-შიც და იქნება P'-ისათვის ნული და ერთეული. ასე, რაციონალურ რიცხვთა ველი ნამდვილ რიცხვთა ველის ქვეველია; ყველა რიცხვითი ველი იქნება კომპლექსურ რიცხვთა ველის ქვეველი.

ვთქვათ P ველში მოცემულია P' ქვეველი და c ელემენტი, რომელიც P'-ის გარეთა ძევს, და ვთქვათ P ველში ვიპოვეთ მინიმალური P'' ქვეველი, რომელიც შეიცავს P'-საცა და c-საც. ასეთი მინიმალური ქვეველი შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთი, რადგან თუ P''' იქნებოდა კიდევ ერთი ქვეველი ამავე თვისებებით, მაშინ P'' და P''' ქვეველთა თანაკვეთა (ე. ი. ორივე ქვეველის საერთო ელემენტთა ერთობლიობა) შეიცავდა P' და c ელემენტს და ნებისმიერ ორ თავის ელემენტთან ერთად მათ ჯამს (ეს ჯამი უნდა შედიოდეს P''-შიც და P'''-შიც და ამიტომ მათ თანაკვეთაშიც), აგრეთვე მათ ნამრავლს, სხვაობასა და განაყოფს; სხვა სიტყვით, ეს თანაკვეთა თვითონ იქნებოდა ქვეველი P'' ქვეველის მინიმალობის საწინააღმდეგოდ. ჩვენ ვიტყვით, რომ P'' ველი მიღებულია P' ველთან c ელემენტის მიერთებით, და ასე ჩავწერთ $P''=P'(c)$.

გასაგებია, რომ $P'(c)$ ველი შეიცავს c ელემენტისა და P' ველის ყველა ელემენტის გარდა აგრეთვე ყველა იმ ელემენტს, რომელიც მიიღება მათგან შეკრებით, გამრავლებით, გამოკლებითა და გაყოფით. მაგალითის სახით მივუთითებთ § 43-ში განხილულ რაციონალურ რიცხვთა ველის გაფართოებაზე, რომელიც შედგება $a+b\sqrt{2}$ სახის რიცხვებისაგან, სადაც a, b რაციონალურია: ეს გაფართოება მიიღება რაციონალურ რიცხვთა ველისადმი $\sqrt{2}$ რიცხვის მიერთებით.

§ 46*. რგოლთა (ველთა) იზომორფიზმი. კომპლექსურ რიცხვთა ველის ერთადერთობა

რგოლთა თეორიაში დიდ როლს ასრულებს იზომორფიზმის ცნება. სახელდობრ, L და L' რგოლებს ეწოდებათ **იზომორფულნი**, თუ მათ შორის შესაძლებელია დამყარდეს ისეთი ურთიერთ ცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც ნებისმიერი a, b ელემენტებისათვის L-დან და მათი შესაბამისი a', b' ელემენტებისათვის L'-დან $a+b$ ჯამს შეესაბამება $a'+b'$ ჯამი, ხოლო ab ნამრავლს შეესაბამება $a'b'$ ნამრავლი.

ვთქვათ L და L' რგოლებს შორის დამყარებულია იზომორფული თანადობა. **ამ თანადობის დროს L რგოლის 0 ნულს ეთანადება L' რგოლის $0'$ ნული.** მართლაც, დაე 0 ელემენტს ეთანადებოდეს c' ელემენტი L'-დან. ავიღოთ ნებისმიერი a ელემენტი L-დან და მისი შესაბამისი a' ელემენტი L'-დან; მაშინ $a+0$ ელემენტს უნდა შეესაბამებოდეს $a'+c'$ ელემენტი; მაგრამ $a+0=a$, ამიტომ $a'+c'=a'$, საიდანაც $c'=0'$. შემდეგ **$-a$ ელემენტს შეესაბამება $-a'$ ელემენტი.** მართლაც, ვთქვათ $-a$ ელემენტს შეესაბამება ელემენტი d', მაშინ $a+(-a)=0$ ელემენტს უნდა შეესაბამებოდეს $a'+d'$ ელემენტი, ე. ი. $a'+d'=0'$, საიდანაც $d'=-a'$. აქედან გამომდინარეობს, რომ L-ის **ელემენტთა სხვაობას შეესაბამება**

L'-ის *შესაბამის ელემენტთა სხვაობა*. ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ L რგოლს აქვს ერთეული, მაშინ ამ ელემენტის ანასახი (ე. ი. ელემენტი, რომელიც შეესაბამება მას L'-ში განხილული იზომორფიზმისას) იქნება L' რგოლის ერთეული და თუ a ელემენტს L-დან აქვს შებრუნებული ელემენტი a^{-1}, მაშინ a^{-1} ელემენტის ანასახი L'-ში იქნება a'-ის შებრუნებული ელემენტი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ *ველის იზომორფული რგოლი თვით იქნება ველი*. ადვილი დასანახია, აგრეთვე, რომ რგოლის თვისება — არ ჰქონდეს ნულის გამყოფები — ინახება იზომორფული თანადობისას. საერთოდ, იზომორფული რგოლები შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან ელემენტების ბუნებით, მაგრამ ისინი იგივური არიან თავისი ალგებრული თვისებებით; რაიმე რგოლის მიმართ დამტკიცებული ყოველი თეორემა სამართლიანი იქნება მასთან იზომორფული ყოველი რგოლისათვის, თუკი თეორემის დამტკიცებისას გამოვიყენებთ მხოლოდ ოპერაციების თვისებებს და არა ამ რგოლის ელემენტების ინდივიდუალურ თვისებებს. ამ მიზეზის გამო *ჩვენ არ ჩავთვლით სხვადასხვად იზომორფულ რგოლებს ან ველებს*; ჩვენთვის ისინი იქნებიან ერთი და იგივე რგოლის ან ველის სხვადასხვა ეგზემპლარები.

გამოვიყენოთ ეს ცნება კომპლექსურ რიცხვთა ველის აგების საკითხისათვის. კომპლექსურ რიცხვთა ველის § 17-ში გადმოცემული კონსტრუქცია, რომელიც ეყრდნობა სიბრტყის წერტილების გამოყენებას, არ არის ერთადერთი შესაძლებელი. წერტილების მაგივრად შეგვეძლო აგვეღო სიბრტყეზე კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი მონაკვეთები (ვექტორები) და, თუ ვექტორები მოცემული იქნება კოორდინატთა ღერძებზე მათი a, b კომპონენტებით, გაგვესაზღვრა ვექტორთა შეკრება და გამრავლება § 17-ის იმავე (2) და (3) ფორმულებით, როგორც სიბრტყის წერტილების შემთხვევაში. შეიძლებოდა, შემდეგ, უარი გვეთქვა საერთოდ გეომეტრიული მასალის გამოყენებაზე; თუ შევნიშნავთ, რომ სიბრტყის წერტილებიცა და ვექტორებიც სიბრტყეზე მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (a, b) წყვილით, შეიძლება უბრალოდ ავიღოთ ყველა ასეთი წყვილის ერთობლიობა და მასში შემოვიყვანოთ შეკრება და გამრავლება (2) და (3) ფორმულებით მითითებული პარაგრაფიდან.

სინამდვილეში, როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, თავისი ალგებრული თვისებებით ყველა ეს ველი განუსხვავებელია:

ნამდვილ რიცხვთა D ველის ყველა გაფართოება, რომელიც მიიღება D ველისადმი

$$x^2+1=0 \tag{1}$$

განტოლების ფესვის მიერთებით, ერთმანეთის იზომორფულია.

დაე, მართლაც, მოცემული იყოს რაიმე P ველი, რომელიც D ველის გაფართოებაა და შეიცავს (1) განტოლების დამაკმაყოფილებელ ელემენტს. ამ ელემენტის აღნიშვნის არჩევანი ჩვენს ხელშია, და ჩვენ ამ მიზნისათვის ვიხ-

მართ i ასის. ამგვარად, ადგილი აქვს $i^2+1=0$ ტოლობას (საიდანაც $i^2=$ $=-1$), სადაც ხარისხში აყვანა და შეკრება უნდა გავიგოთ P ველში განმარტებული ოპერაციების აზრით. ჩვენ გვინდა ახლა ვიპოვოთ $D(i)$ ველი, რომელიც მიიღება D ველისადმი i ელემენტის მიერთებით, ე. ი. ვიპოვოთ P ველის მინიმალური ქვეველი, რომელიც შეიცავს D ველსაცა და i ელემენტსაც.

ამ მიზნისათვის განვიხილოთ P ველის ყველა ის α ელემენტი, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\alpha=a+bi \tag{2}$$

სახით, სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო b რიცხვის ნამრავლი i ელემენტზე და ჯამი a რიცხვისა ამ ნამრავლთან უნდა გავიგოთ P ველში განსაზღვრული ოპერაციების აზრით. P ველის არავითარ α ელემენტს არ შეიძლება ჰქონდეს ასეთი სახის ორი სხვადასხვა ჩაწერა:

$$\alpha=a+bi=\overline{a}+\overline{b}i$$

და $b\neq\overline{b}$-დან გამოვიდოდა, რომ

$$i=\frac{\overline{a}-a}{b-\overline{b}},$$

ე. ი. i იქნებოდა ნამდვილი რიცხვი; თუკი $b=\overline{b}$, მაშინ $a=\overline{a}$. P ველის ელემენტთა რიცხვს, რომელნიც შეიძლება (2) სახით ჩაიწეროს, ეკუთვნის კერძოდ ყველა ნამდვილი რიცხვი (შემთხვევა $b=0$), აგრეთვე თვით i ელემენტიც (შემთხვევა $a=0$, $b=1$).

ვუჩვენოთ, რომ (2) **სახის ყველა ელემენტის ერთობლიობა შეადგენს P ველის ქვეველს**; ეს იქნება საძიებელი $D(i)$ ველი. დაე მოცემული გვქონდეს ელემენტები $\alpha=a+bi$ და $\beta=c+di$. მაშინ თუ გამოვიყენებთ შეკრების კომუტატურობასა და ასოციაციურობას და დისტრიბუციის კანონს, რომელთაც ადგილი აქვთ P ველში, მივიღებთ:

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(bi+di),$$

საიდანაც

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i, \tag{3}$$

ე. ი. ეს ჯამი ისევ ეკუთვნის ელემენტთა განხილულ სიმრავლეს. შემდეგ,

$$-\beta=(-c)+(-d)i,$$

რადგან (3)-ის გამო სამართლიანი იქნება $\beta+(-\beta)=0+0i=0$ ტოლობა: ამიტომ

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a-c)+(b-d)i, \tag{3'}$$

ე. ი. გამოკლებასაც არ გამოვყავართ განხილული სიმრავლის საზღვრებს გარეთ. თუ ისევ გამოვიყენებთ I—V თვისებებს, რომელთაც ადგილი აქვთ P ველის ოპერაციებისათვის (იხ. § 44), და დავეყრდნობით $i^2=-1$ ტოლობას, მივიღებთ:

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2,$$

ე. ი.

$$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i; \tag{4}$$

ამგვარად, (2) სახის ნებისმიერი ორი ელემენტის ნამრავლი იქნება ისევ იმავე სახის ელემენტი. ბოლოს, დავუშვათ, რომ $\beta\neq0$, ე. ი. c, d რიცხვებიდან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. მაშინ იქნება აგრეთვე $c-di\neq0$ და

$$(c+di)(c-di)=c^2-(di)^2=c^2-d^2i^2=c^2+d^2,$$

ამასთან $c^2+d^2\neq0$. ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში აღნიშნულ დებულებას, რომ ყოველ ველში შენარჩუნებულია წილადებზე მოქმედების ყველა ჩვეულებრივი წესი, და ამიტომ, კერძოდ, წილადი არ იცვლება მისი მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთი და იმავე ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტზე გამრავლებით, მივიღებთ:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

ე. ი.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{4}$$

ელემენტი ისევ (2) სახისა იქნება.

ვუჩვენოთ ახლა, რომ P ველის ჩვენს მიერ მიღებული $D(i)$ ქვეველი იზომორფულია სიბრტყის წერტილების იმ ველისა, რომელიც § 17-ში იყო აგებული. თუ შევუთანადებთ $D(i)$ ველის $a+bi$ ელემენტს (a, b) წერტილს, $D(i)$ ველის ელემენტების (2) სახით ჩაწერის ზემოთ დამტკიცებული ერთადერთობის გამო, ჩვენ მივიღებთ ამ ველის ელემენტებსა და სიბრტყის ყველა წერტილს შორის ურთიერთ ცალსახა თანადობას. ამ თანადობისას ნამდვილ a რიცხვს $a=a+0i$ ტოლობის გამო ეთანადება $(a, 0)$ წერტილი, ხოლო $i=0+i$ ელემენტს ეთანადება $(0, 1)$ წერტილი, მეორე მხრივ, თუ შევადარებთ ამ პარაგრაფის (3) და (4) ფორმულებს § 17-ის (2) და (3) ფორმულებს, მივიღებთ, რომ $D(i)$ ველის α და β ელემენტების ჯამსა და ნამრავლს ეთანადება წერტილები, რომელნიც არიან α და β ელემენტების შესაბამის წერტილთა ჯამი და შესაბამისად ნამრავლი.

ამით, რადგან რაიმე მოცემული ველის იზომორფული ყველა ველი ერთმანეთის იზომორფულია, მთავრდება თეორემის დამტკიცება. კერძოდ, ჩვენ ვხედავთ, რომ წერტილებზე ოპერაციებისათვის § 17-ში (2) და (3) ფორმულების არჩევანი შემთხვევითი არაა და არ შეიძლება შეიცვალოს.

კომპლექსურ რიცხვთა ველის აგების ზემოთ განხილული წესის გარდა არსებობს ბევრი სხვა. მივუთითოთ ერთ მათგანზე, რომელიც იყენებს მატრიცთა გამრავლებასა და შეკრებას.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ველზე მეორე რიგის მატრიცთა არაკომუტატიური რგოლი. ცხადია, რომ

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

მატრიცები შეადგენენ ამ რგოლში ქვეველს, რომელიც იზომორფულია ნამდვილ რიცხვთა ველისა. მაგრამ თურმე ნამდვილ რიცხვთა ველზე მეორე რიგის მატრიცთა რგოლში შეიძლება აგრეთვე ვიპოვოთ ქვეველი, რომელიც იზომორფულია კომპლექსურ რიცხვთა ველისა. მართლაც, შევუთანადოთ ყოველ კომპლექსურ $a+bi$ რიცხვს

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

მატრიცი. ამ გზით კომპლექსურ რიცხვთა მთელი ველი აისახება, ამასთან ურთიერთ ცალსახად, მეორე რიგის მატრიცთა ნაწილზე, ამასთან

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ასახვა იზომორფულია, რადგან მატრიცები, რომლებიც დგანან ტოლობების მარჯვენა ნაწილებში, შეესაბამებიან $(a+c)+(b+d)i=(a+bi)+(c+di)$ და $(ac-bd)+(ad+bc)i=(a+bi)(c+di)$ კომპლექსურ რიცხვებს. კერძოდ, წარმოსახვითი i ერთეულის როლს ასრულებს

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცი.

ჩვენ მიერ მიღებული შედეგი გვიჩვენებს კომპლექსურ რიცხვთა ველის აგების კიდევ ერთ შესაძლებელ წესს, იმდენადვე დამაკმაყოფილებელს როგორც ისინი, რომლებიც ზემოთ იყო განხილული.

§ 47. წრფივი ალგებრა და ნებისმიერ ველზე მრავალწევრთა ალგებრა

წიგნის იმ წინა თავებში, რომლებიც წრფივი ალგებრისადმია მიძღვნილი, ჩვეულებრივ ძირითადი ველის როლს ასრულებს ნამდვილ რიცხვთა ველი. მაგრამ დაბრკოლების გარეშე შეიძლება შემოწმება, რომ ძალიან ბევრი ამ თავებიდან სიტყვასიტყვით გადაიტანება ნებისმიერი ძირითადი ველის შემთხვევაზე.

ასე, ნებისმიერი ძირითადი P ველისათვის სამართლიანი რჩება 1 თავში გადმოცემული გაუსის მეთოდი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის, დეტერმინანტთა თეორია და კრამერის წესი. მხოლოდ შემჩნევა ირიბსიმეტრიულ დეტერმინანტებზე, რომელიც მოყვანილია § 4-ის ბოლოს, მოითხოვს დაშვებას, რომ P ველის მახასიათებელი განსხვავებული იყოს ორისაგან. მაგრამ ამავე პარაგრაფის 4 თვისების დამტკიცებაც კარგავს ძალას, თუ P ველის მახასიათებელი უდრის ორს, თუმცა თვით ეს თვისება სამართლიანი რჩება.

სასარგებლოა შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ 1 თავში არაერთხელ გამოთქმული დებულება, რომ წრფივ განტოლებათა განუზღვრელი სისტემისათვის არსებობს უსასრულო სიმრავლე სხვადასხვა ამონახსნებისა, ინარჩუნებს ძალას ნებისმიერი უსასრულო ძირითადი P ველის შემთხვევაში, მაგრამ აღარ არის სამართლიანი თუ P ველი სასრულოა.

შემდეგ, მთლიანად გადაიტანება ნებისმიერი ძირითადი ველის შემთხვევაზე 2 თავში გადმოცემული ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულების თეორია, მატრიცის რანგის თეორია და წრფივი განტოლებების სისტემათა ზოგადი თეორია, აგრეთვე 3 თავიდან მატრიცთა ალგებრა.

§ 26-ში აგებული კვადრატულ ფორმათა ზოგადი თეორია გადაიტანება ნებისმიერი ძირითადი P ველის შემთხვევაში, რომლის მახასიათებელიც განსხვავდება ორისაგან. ამ შეზღუდვის გარეშე, როგორც ადვილი საჩვენებელია, ამ პარაგრაფის მთავარი თეორემა უკვე აღარაა სამართლიანი.

ვთქვათ, მაგალითად, $P=Z_2$, ე. ი. ორ 0 და 1 ელემენტისაგან შემდგარი ველი, ამასთან $1+1=0$, საიდანაც $-1=1$, ვთქვათ ამ ველზე მოცემულია $f=x_1x_2$ კვადრატული ფორმა. თუ არსებობს წრფივი

$$x_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2,$$
$$x_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2$$

გარდაქმნა, რომელიც f-ს კანონიკურ სახეზე დაიყვანს, მაშინ

$$f=(b_{11}y_1+b_{12}y_2)(b_{21}y_1+b_{22}y_2)=b_{12}b_{21}y_1^2+$$
$$+(b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21})y_1y_2+b_{12}b_{22}y^2_2$$

ტოლობაში y_1y_2 ნამრავლთან მდგარი კოეფიციენტი $b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}$ ნულის ტოლი უნდა იყოს, მაგრამ ეს კოეფიციენტი უდრის ჩვენს მიერ აღებულ წრფივი გარდაქმნის დეტერმინანტს, რადგან იქნება $b_{12}b_{21}=1$ ან $b_{12}b_{21}=0$, ორივე შემთხვევაში $b_{12}b_{21}=-b_{12}b_{21}$. ჩვენი წრფივი გარდაქმნა გადაგვარებული აღმოჩნდა.

6 თავის შემდგომი შინაარსი არსებითად ეხება კომპლექსურ ან ნამდვილ კოეფიციენტებიან კვადრატულ ფორმებს.

ბოლოს, ნებისმიერი მთავარი P ველის შემთხვევაში შეინახება 7 თავში აგებული წრფივი სივრცეებისა და მათი წრფივი გარდაქმნების მთელი თეორია. თუმცა მახასიათებელი ფესვის ცნება დაკავშირებულია ნებისმიერ ველზე მრავალწევრთა თეორიასთან, რომლის შესახებ ლაპარაკი ქვემოთ იქნება. შევნიშნოთ, რომ § 33-ის თეორემა მახასიათებელი ფესვისა და საკუთრივი მნიშვნელობის შორის კავშირის შესახებ მიიღებს ახლა შემდეგ ფორმულირებას: წრფივი φ გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები, რომელნიც ძირითად P ველში მდებარეობენ, და მხოლოდ ისინი არიან ამ გარდაქმნის საკუთრივი მნიშვნელობები.

რაც შეეხება ევკლიდის სივრცეთა თეორიას (8 თავი), იგი არსებითად დაკავშირებულია ნამდვილ რიცხვთა ველთან.

შესაძლებელია ნებისმიერი ძირითადი P ველის შემთხვევაზე მრავალწევრთა ალგებრის ზოგიერთი ზემოთ გადმოცემული ნაწილის გადატანაც. მაგრამ წინასწარ საჭიროა ნებისმიერ ველზე მრავალწევრის ცნებას ზუსტი აზრი მივცეთ.

საქმე იმაშია, რომ § 20-ში მითითებული იყო ორი თვალსაზრისი მრავალწევრის ცნებაზე — ფორმალურ-ალგებრული და ფუნქციონალურ-თეორიული. ამ ორივეს გადატანა შეიძლება ნებისმიერი ძირითადი ველის შემთხვევაზე. თუმცა ისინი სრულფასოვანი არიან რიცხვითი ველების შემთხვევაში (იხ. § 24), და, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, საზოგადოდ უსასრულო ველებისათვის, მაგრამ სასრული ველებისათვის ისინი აღარ არიან სრულფასოვანი.

განვიხილოთ, მაგალითად, § 45-ში შემოტანილი Z_2 ველი, რომელიც შედგება ორი 0 და 1 ელემენტისაგან, ამასთან $1+1=0$. $x+1$ და x^2+1 მრავალწევრები კოეფიციენტებით ამ ველიდან განსხვავებულნი არიან, ე. ი. არ აკმაყოფილებენ მრავალწევრთა ტოლობის ალგებრულ განმარტებას. ამასთანავე, ორივე ეს მრავალწევრი იღებს, როცა $x=0$, მნიშვნელობას 1, ხოლო როცა $x=1$ — მნიშვნელობას 0, ე. ი. როგორც x „ცვლადის" „ფუნქციები" მნიშვნელობებით Z_2 ველში ისინი უნდა ტოლებად ჩაითვალონ. Z_3 ველში, რომელიც შედგება სამი ელემენტისაგან: 0, 1, 2, ამასთან $1+2=0$, იმავე მდგომარეობაში იმყოფება x^3+x+1 და $2x+1$ მრავალწევრები. ასეთი მაგალითები შეიძლება მივუთითოთ საერთოდ ყველა სასრული ველისათვის.

ამგვარად, თეორიაში, რომელიც ნებისმიერი P ველის შემთხვევას ეხება, შეუძლებელია მრავალწევრზე ფუნქციონალურ-თეორიული თვალსაზრისის მიღება. მაშასადამე, აუცილებელია მრავალწევრის ფორმალურ-ალგებრულ განმარტებას მივცეთ სრული სიცხადე. ამ მიზნით ჩვენ ჩავატარებთ ნებისმიერ P ველზე მრავალწევრთა რგოლის ისეთ აგებას, რომელიც თავიდან არ გამოიყენებს მრავალწევრის x „უცნობის" საშუალებით ჩვეულებრივ ჩაწერას.

განვიხილოთ P ველის ელემენტთა ყველა შესაძლებელი სასრული დალაგებული სისტემა, რომელთაც აქვთ

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \tag{1}$$

სახე, ამასთანავე n ნებისმიერია, $n \geqslant 0$, მაგრამ როცა $n>0$ უნდა იყოს $a_n \neq 0$. თუ განვსაზღვრავთ (1) სახის სისტემებისათვის შეკრებასა და გამრავლებას § 20-ის (3) და (4) ფორმულების შესაბამისად, ამ სისტემათა ერთობლიობას გარდავქმნით კომუტატურ რგოლად; ამისათვის საჭირო თვისებების დამტკიცებები სიტყვასიტყვით იმეორებენ იმას, რაც გაკეთებული იყო § 20-ში რიცხვითი მრავალწევრებისათვის.

ჩვენს მიერ აგებულ რგოლში (a) სახის სისტემები ($n=0$ შემთხვევა) შეადგენენ ქვეველს, რომელიც P ველის იზომორფულია. ეს ნებას გვაძლევს ასეთი სისტემები გავაიგივოთ P ველის შესაბამის a ელემენტებთან, ე. ი. ჩავთვალოთ

$$(a)=a \text{ ყველა } a\text{-სათვის } P\text{-დან.} \tag{2}$$

მეორე მხრივ, აღვნიშნოთ (0, 1) სისტემა x ასოთი,

$$x=(0,\ 1).$$

მაშინ, თუ გამოვიყენებთ გამრავლების ზემოთ მითითებულ განსაზღვრებას, მივიღებთ, რომ $x^2=(0,\ 0,\ 1)$ და საერთოდ

$$x^k=(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{k\text{-ჯერ}},\ 1). \tag{3}$$

თუ გამოვიყენებთ ახლა დალაგებული სისტემების შეკრებისა და გამრავლების განსაზღვრას, აგრეთვე (2) და (3) ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n)=\\&=(a_0)+(0,\ a_1)+(0,\ 0,\ a_2)+\ldots\\&\ldots+(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n-1\text{-ჯერ}},\ a_{n-1})+(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n\text{-ჯერ}},\ a_n)=\\&=(a_0)+(a_1)(0,\ 1)+(a_2)(0,\ 0,\ 1)+\ldots\\&\ldots+(a_{n-1})(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,0}_{n-1\text{-ჯერ}},\ 1)+(a_n)(\underbrace{0,\ 0,\ldots,\ 0}_{n\text{-ჯერ}},\ 1)=\\&=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.\end{aligned}$$

ამგვარად, (1) სახის ყოველი დალაგებული სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს x-ის მიმართ მრავალწევრის სახით კოეფიციენტებით P ველიდან, ამასთან ეს ჩაწერა, ცხადია, ცალსახა იქნება. დაბოლოს, თუ დავეყრდნობით შეკრების უკვე დამტკიცებულ კომუტატურობას, შეიძლება გადავიდეთ x-ის კლებადი ხარისხებით ჩაწერაზე.

მაშასადამე ჩვენ ავაგებთ კომუტატურ რგოლს, რომელსაც ბუნებრივია ვუწოდოთ P ველზე x უცნობის მრავალწევრთა რგოლი. ეს რგოლი აღინიშნება $P[x]$ სიმბოლოთი.

$P[x]$ რგოლში შედის თვით P ველი, როგორც ეს უკვე ზემოთ იყო ნაჩვენები. შემდეგ, როგორც რიცხვით ველებზე მრავალწევრთა რგოლების შემთხვევაში (იხ. § 20), $P[x]$ რგოლს აქვს ერთეული, არ შეიცავს ნულის გამყოფებს და არ არის ველი.

თუ P ველი შედის უფრო დიდ $\overline{P}$ ველში, მაშინ $P[x]$ რგოლი $\overline{P}[x]$ რგოლის ქვერგოლი იქნება: ყოველი მრავალწევრი კოეფიციენტებით P-დან, ცხადია, შეიძლება ჩავთვალოთ მრავალწევრად $\overline{P}$ ველზეც. ხოლო მრავალწევრთა ჯამი და ნამრავლი დამოკიდებულია მხოლოდ მათ კოეფიციენტებზე და ამიტომ არ იცვლება დიდ ველზე გადასვლისას.

იმისათვის, რომ უფრო კარგად წარმოვიდგინოთ „P ველზე მრავალწევრთა რგოლის“ ცნების ჭეშმარიტი მოცულობა, შევხედოთ მას კიდევ ერთი მხრიდან.

დაე, P ველი შედიოდეს ქვერგოლის სახით რომელიმე კომუტატურ L რგოლში. L რგოლის α ელემენტს ეწოდება ალგებრული P ველის

მიმართ, თუ არსებობს n-ური ხარისხის ისეთი განტოლება, $n \geqslant 1$, კოეფიციენტებით P ველიდან, რომელსაც α ელემენტი აკმაყოფილებს; თუ ასეთი განტოლება არ არსებობს, მაშინ α ელემენტს ეწოდება ტრანსცენდენტული P ველის მიმართ. გასაგებია, რომ $P[x]$ რგოლის x ელემენტი ტრანსცენდენტულია P ველის მიმართ.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თუ L რგოლის α ელემენტი ტრანსცენდენტულია P ველის მიმართ, მაშინ L' ქვერგოლი, რომელიც მიიღება P ველისადმი α ელემენტის მიერთებით (ე. ი. L რგოლის მინიმალური ქვერგოლი, რომელიც P ველსა და α ელემენტს შეიცავს), იზომორფულია მრავალწევრთა $P[x]$ რგოლისა.

მართლაც, L რგოლის ყოველი β ელემენტი, რომელიც შეიძლება

$$\beta = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n, \quad n \geqslant 0, \tag{4}$$

სახით ჩაიწეროს $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ კოეფიციენტებით P ველიდან, შევა L' ქვერგოლში. β ელემენტს არ შეიძლება ჰქონდეს (4) სახის ორი განსხვავებული ჩაწერა, რადგან თუ გამოვაკლებდით ერთს მეორეს, ჩვენ მივიღებდით, რომ P ველზე არსებობს განტოლება, რომელსაც α ელემენტი აკმაყოფილებს, რაც ეწინააღმდეგება ამ ელემენტის ტრანსცენდენტობას. თუ (4) სახის ელემენტებს შევკრებთ L რგოლში შეკრების წესით, ცხადია, შეიძლება შევკრიბოთ α ელემენტის ერთნაირ ხარისხებთან მდგარი კოეფიციენტები; მაგრამ ეს ემთხვევა მრავალწევრთა შეკრების წესს. მეორე მხრივ, თუ (4) სახის ელემენტებს გადავამრავლებთ L რგოლში გამრავლების წესით, გამოვიყენებთ რა დისტრიბუციის კანონს, ჩვენ შეგვიძლია ჩავატაროთ წევრ-წევრა გამრავლება, ხოლო შემდეგ შევაგროვოთ მსგავსი წევრები; ცხადია, ეს მიგვიყვანს მრავალწევრთა გამრავლების ჩვენთვის ცნობილ წესამდე. ამით დამტკიცებულია, რომ (4) სახის ელემენტები L რგოლში ქვერგოლს შეადგენენ, რომელიც P ველსა და α ელემენტს შეიცავს, ე. ი. რომელიც L'-ს ემთხვევა, და რომ ეს ქვერგოლი მრავალწევრთა $P[x]$ რგოლის იზომორფულია.

ჩვენ ვხედავთ, რომ მრავალწევრთა ოპერაციების განსაზღვრის ზემოთ გაკეთებული არჩევანი შემთხვევითი არ იყო: ის სავსებით განისაზღვრება იმით, რომ $P[x]$ რგოლის x ელემენტი ტრანსცენდენტული უნდა იყოს P ველის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ მრავალწევრთა $P[x]$ რგოლის აგებისას ჩვენ არსად არ გამოგვიყენებია P ველის ელემენტთა გაყოფა და მხოლოდ ერთხელ, სახელდობრ მრავალწევრთა ნამრავლის ხარისხის შესახებ დებულების დამტკიცებისას, უნდა დავყრდნობოდით P ველში ნულის გამყოფების არარსებობას. მაშასადამე, შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერი კომუტატური L რგოლი და, გავიმეორებთ რა ზემოთ მოყვანილ აგებას, მივიღებთ L რგოლზე მრავალწევრთა $L[x]$ რგოლს; თუ ამასთან L რგოლი არ შეიცავს ნულის გამყოფებს, მაშინ მრავალწევრთა ნამრავლის ხარისხი უდრის თანამამრავლთა ხარისხების ჯამს და ამიტომ მრავალწევრთა $L[x]$ რგოლიც აგრეთვე, არ შეიცავს ნულის გამყოფებს.

დავუბრუნდეთ მრავალწევრებს კოეფიციენტებით ნებისმიერი P ველიდან. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაზე გადაიტანება ძირითადად *მრავალწევრთა გაყოფადობის* მთელი თეორია, რომელიც გადმოცემულია ჩვენი წიგნის §§ 20—22-ში. სახელდობრ, $P[x]$ *რგოლში ადგილი აქვს ნაშთით გაყოფის ალგორითმს*, ამასთან განაყოფიცა და ნაშთიც თვითონ ეკუთვნიან $P[x]$ რგოლს. შემდეგ, $P[x]$ *რგოლში აზრი აქვს გამყოფის ცნებას და შეინახება ყველა მისი ძირითადი თვისება*. ამასთან ის გარემოება, რომ გაყოფის ალგორითმს არ გამოვყავართ ძირითადი P ველის ფარგლებიდან, ნებას გვაძლევს ვამტკიცოთ, რომ $\varphi(x)$ *მრავალწევრის ის თვისება, რომ* $f(x)$*-ის გამყოფი იყოს, არ არის დამოკიდებული იმისაგან, ვიხილავთ* P *ველსა თუ მის ნებისმიერ გაფართოებას*.

$P[x]$ *რგოლში შენარჩუნებულია აგრეთვე უდიდესი საერთო გამყოფის განსაზღვრა და ყველა მისი თვისება*, მათ რიცხვში *შენარჩუნებულია ევკლიდეს ალგორითმი და ამ ალგორითმის საშუალებით* § 21-ში *დამტკიცებული თეორემა*. შევნიშნოთ, რომ რადგან ნაშთით გაყოფის ალგორითმი, როგორც ვიცით, დამოკიდებული არაა იმისგან თუ ძირითად ველად რომელია არჩეული, ამიტომ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ *ორი მოცემული მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი აგრეთვე არ არის დამოკიდებული იმაზე, ვიხილავთ ჩვენ* P *ველსა თუ მის ნებისმიერ* $\overline{P}$ *გაფართოებას*.

ბოლოს, P ველზე *მრავალწევრთათვის შენარჩუნებულია ფესვის ცნების აზრი და სამართლიანი რჩება ფესვის ძირითადი თვისებები*. შენარჩუნებულია ჯერად ფესვთა თეორიაც; თუმცა ჩვენ ამ საკითხს კიდევ ერთხელ დავუბრუნდებით შემდეგი პარაგრაფის ბოლოში.

ეს შენიშვნები საშუალებას მოგვცემს შემდგომში ნებისმიერ P ველზე მრავალწევრთა შესწავლისას დავეყრდნოთ §§ 20—22.

§ 48. მრავალწევრის დაშლა დაუყვანად მამრავლებად

§ 24-ის კომპლექსურ და ნამდვილ რიცხვთა ველებისათვის ფესვის არსებობის თეორემის საფუძველზე დამტკიცებული იყო მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის არსებობა და ერთადერთობა. ეს შედეგები ზოგადი თეორემების კერძო შემთხვევებია, რომლებიც ნებისმიერ P ველზე მრავალწევრებს ეხება. ეს პარაგრაფი მიეძღვნება ამ ზოგადი თეორიის გადმოცემას, რომელიც მთელი რიცხვების მარტივ მამრავლებად დაშლის თეორიის პარალელურია.

თავდაპირველად განვსაზღვროთ ის მრავალწევრები, რომლებიც მრავალწევრთა რგოლში იმავე როლს ასრულებენ, რასაც მთელ რიცხვთა რგოლში—მარტივი რიცხვები. თავიდანვე აღვნიშნოთ, რომ ამ განსაზღვრებაში ლაპარაკი იქნება მხოლოდ იმ მრავალწევრებზე, *რომელთა ხარისხი ერთზე მეტი ან ტოლია*; ეს სრულიად ეთანხმება იმას, რომ მარტივ

რიცხვთა განსაზღვრებასა და მთელ რიცხვთა მარტივ მამრავლებად დაშლის
შესწავლისას 1 და —1 რიცხვებს განხილვიდან გამორიცხავენ.
დაე, მოცემული იყოს n-ური, $n \geqslant 1$, ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი კოე-
ფიციენტებით P ველიდან. § 21-ის V თვისების გამო ყველა ნულოვანი ხა-
რისხის მრავალწევრი $f(x)$-ის გამყოფი იქნება. მეორე მხრივ, VII თანახმად,
$f(x)$ ისათვის გამყოფები იქნება, აგრეთვე, ყველა $cf(x)$ მრავალწევრი, სადაც
c ნულისაგან განსხვავებული ელემენტია P-დან, ამასთან მათ მიერ ამოიწუ-
რება $f(x)$ მრავალწევრის n-ური ხარისხის მქონე ყველა გამყოფი. რაც შე-
ეხება $f(x)$-ის გამყოფებს, რომელთა ხარისხი 0-ზე მეტია, მაგრამ n-ზე ნაკ-
ლებია, ისინი შეიძლება $P[x]$ რგოლში არსებობდნენ, და შეიძლება არც
არსებობდნენ. პირველ შემთხვევაში $f(x)$ მრავალწევრს P ველში (ან P ველის
მიმართ) დაყვანადი ეწოდება, მეორე შემთხვევაში—ამ ველში დაუყვა-
ნადი.

თუ გავიხსენებთ გამყოფის განსაზღვრას, შეიძლება ვთქვათ, რომ n-ური
ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია P ველში, თუ იგი
შეიძლება დაიშალოს ამ ველის მიმართ (ე. ი. $P[x]$ რგოლში)
ორი მამრავლის ნამრავლად, რომელთა ხარისხებიც n-ზე
ნაკლებია:

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x), \tag{1}$$

და $f(x)$ დაუყვანადია P ველში, თუ მის (1) სახის ნებისმიერ
დაშლაში ერთ მამრავლთაგანს აქვს ხარისხი 0, მეორეს—
ხარისხი n.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ
მრავალწევრის დაყვანადობის ან დაუყვანადობის შესახებ ლაპარაკი შეიძლება
მხოლოდ მოცემული P ველის მიმართ, რადგან ამ ველში დაუყვანადი მრა-
ვალწევრი შეიძლება დაყვანადი აღმოჩნდეს რაიმე მის $\overline{P}$ გაფართოებაში. ასე,
x^2-2 მრავალწევრი მთელი კოეფიციენტებით დაუყვანადია რაციონალურ
რიცხვთა ველში—იგი არ შეიძლება დაიშალოს რაციონალურ კოეფიციენტე-
ბიანი პირველი ხარისხის ორი მამრავლის ნამრავლად. მაგრამ თურმე ნამ-
დვილ რიცხვთა ველში ეს მრავალწევრი დაყვანადია, როგორც

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

ტოლობა გვიჩვენებს. x^2+1 მრავალწევრი დაუყვანადია არა მარტო რაციო-
ნალურ რიცხვთა ველში, არამედ ნამდვილ რიცხვთა ველშიაც, მაგრამ დაყვა-
ნადი ხდება კომპლექსურ რიცხვთა ველში, რადგან

$$x^2+1=(x-i)(x+i).$$

მივუთითოთ დაუყვანად მრავალწევრთა ზოგიერთ ძირითად თვისებაზე,
ამასთან გვახსოვდეს, რომ ლაპარაკია P ველში დაუყვანად მრავალწევ-
რებზე.

α) პირველი ხარისხის ყოველი მრავალწევრი დაუყვა-
ნადია.

მართლაც, ეს მრავალწევრი რომ ორი ნაკლები ხარისხის მრავალწევრთა ნამრავლად იშლებოდეს, მაშინ ამ მამრავლებს უნდა ჰქონდეთ 0 ხარისხი; მაგრამ ნებისმიერი ნულ ხარისხიანი მრავალწევრების ნამრავლი ისევ ნული ხარისხისა იქნება და არა პირველისა.

β) თუ $p(x)$ მრავალწევრი დაუყვანადია, მაშინ დაუყვანადი იქნება აგრეთვე ყოველი $cp(x)$ მრავალწევრი, სადაც c ნულისაგან განსხვავებული ელემენტია P-დან.

ეს თვისება გამომდინარეობს § 21-ის I და VII თვისებებიდან, იგი ნებას მოგვცემს იქ, სადაც ეს საჭიროა შემოვიფარგლოთ იმ დაუყვანად მრავალწევრთა განხილვით, რომელთა უფროსი კოეფიციენტიც ერთის ტოლია.

γ) თუ $f(x)$ ნებისმიერი, ხოლო $p(x)$ დაუყვანადი მრავალწევრია, მაშინ ან $f(x)$ იყოფა $p(x)$-ზე, ან ეს მრავალწევრები თანამარტივნი არიან.

თუ $(f(x), p(x))=d(x)$, მაშინ $d(x)$-ს, რადგან იგი დაუყვანად $p(x)$ მრავალწევრის გამყოფია, ან აქვს ხარისხი 0, ან კიდევ არის $cp(x)$, $c\neq 0$, სახის მრავალწევრი. პირველ შემთხვევაში $f(x)$ და $p(x)$ თანამარტივია, მეორეში $f(x)$ იყოფა $p(x)$-ზე.

δ) თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ნამრავლი იყოფა დაუყვანად $p(x)$ მრავალწევრზე, მაშინ ერთი მაინც ამ მამრავლთაგან იყოფა $p(x)$-ზე.

მართლაც, თუ $f(x)$ არ იყოფა $p(x)$-ზე, მაშინ თანახმად γ) $f(x)$ და $p(x)$ თანამარტივია, ამ შემთხვევაში კი თანახმად § 21-ის δ) თვისებისა $g(x)$ მრავალწევრი უნდა იყოფოდეს $p(x)$-ზე.

δ) თვისება დაუბრკოლებლივ ვრცელდება ნებისმიერი სასრულო რიცხვი მამრავლთა ნამრავლის შემთხვევაზე.

შემდეგი ორი თეორემა არის მთელი ამ პარაგრაფის მთავარი მიზანი.

$P[x]$ რგოლის ყოველი $f(x)$ მრავალწევრი, რომელსაც n ხარისხი აქვს, $n\geqslant 1$, იშლება დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად.

მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალწევრი თვითონაა დაუყვანადი, მაშინ აღნიშნული ნამრავლი შედგება მხოლოდ ერთი მამრავლისაგან. თუკი ის დაყვანადია, მაშინ შეიძლება დაიშალოს ნაკლები ხარისხის მამრავლთა ნამრავლად. თუ ამ მამრავლთა შორის კიდევ არის დაყვანადი, მაშინ ვახდენთ მათ მამრავლებად შემდგომ დაშლას, და ა. შ. ეს პროცესი უნდა შეჩერდეს სასრულო რიცხვი ნაბიჯის შემდეგ, რადგან $f(x)$-ის მამრავლებად ნებისმიერი დაშლისას ამ მამრავლთა ხარისხების ჯამი უნდა უდრიდეს n-ს და ამიტომ x-ზე დამოკიდებულ მამრავლთა რიცხვი არ უნდა აღემატებოდეს n-ს.

მთელ რიცხვთა მარტივ მამრავლებად დაშლა ცალსახაა, თუ შემოვიფარგლებით მთელი დადებითი რიცხვების განხილვით. მაგრამ ყველა მთელ რიცხვთა რგოლში ცალსახობას ადგილი აქვს მხოლოდ ნიშნის სიზუსტით: ასე, $-6=2\cdot(-3)=(-2)\cdot 3$, $10=2\cdot 5=(-2)\cdot(-5)$ და ა. შ. ანალოგიურ მდგომარეობას აქვს ადგილი მრავალწევრთა რგოლშიც. თუ

$$f(x)=p_1(x)\,p_2(x)\ldots p_s(x)$$

არის $f(x)$ მრავალწევრის დაშლა დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად და P ველის $c_1, c_2, \ldots, c_s$ ელემენტები ისეთებია, რომ მათი ნამრავლი 1 უდრის, მაშინ

$$f(x)=[c_1p_1(x)]\cdot[c_2p_2(x)]\ldots[c_sp_s(x)]$$

აგრეთვე იქნება, β) გამო, $f(x)$-ის დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად დაშლა. თურმე ამით ამოიწურება $f(x)$-ის ყველა დაშლა:

თუ $P[x]$ რგოლის $f(x)$ მრავალწევრი ორნაირად დაიშალა დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად:

$$f(x)=p_1(x)\,p_2(x)\ldots p_s(x)=q_1(x)\,q_2(x)\ldots q_t(x), \tag{2}$$

მაშინ $s=t$ და შესაბამისი ნუმერაციის დროს ადგილი ექნება ტოლობებს

$$q_i(x)=c_ip_i(x),\ i=1, 2, \ldots s, \tag{3}$$

სადაც c_i არის P ველის ნულისაგან განსხვავებული ელემენტი.

ეს თეორემა სამართლიანია პირველი ხარისხის მრავალწევრთათვის, რადგან ისინი დაუყვანადია. ამიტომ ჩვენ დამტკიცებას წავიყვანთ ინდუქციით მრავალწევრის ხარისხის მიმართ, ე. ი. დავამტკიცებთ თეორემას $f(x)$-ისათვის, დაშვებით, რომ უფრო ნაკლები ხარისხის მრავალწევრთათვის იგი უკვე დამტკიცებულია.

რადგან $q_1(x)$ გამყოფია $f(x)$-ისათვის, ამიტომ δ) თვისებისა და (2) ტოლობის გამო, $q_1(x)$ გამყოფი იქნება $p_i(x)$ მრავალწევრთაგან ერთის მაინც, მაგალითად $p_1(x)$-ისა. მაგრამ რადგან მრავალწევრი დაუყვანადია, ხოლო $q_1(x)$-ის ხარისხი ნულზე მეტია, ამიტომ არსებობს ისეთი ელემენტი c_1, რომ

$$q_1(x)=c_1p_1(x). \tag{4}$$

თუ ჩავსვამთ $q_1(x)$-ის ამ გამოსახულებას (2)-ში და შევკვეცთ (რაც კანონიერია, რადგან $P[x]$ რგოლში არ არის ნულის გამყოფები), ჩვენ მივიღებთ

$$p_2(x)\,p_3(x)\ldots p_s(x)=[c_1q_2(x)]\,q_3(x)\ldots q_t(x)$$

ტოლობას. რადგან ამ ნამრავლის ტოლი მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$-ის ხარისხისა, ამიტომ დამტკიცებულია, რომ $s-1=t-1$, საიდანაც $s=t$, და რომ არსებობს ისეთი ელემენტები $c'_2, c_3, \ldots, c_s$, რომ $c'_2p_2(x)=c_1q_2(x)$, საიდანაც $q_2(x)=(c_1^{-1}c'_2)\,p_2(x)$, და $c_ip_i(x)=q_i(x)$, $i=3, \ldots, s$. თუ დავუშვებთ, რომ $c_1^{-1}c'_2=c_2$ და თუ გავითვალისწინებთ (4)-ს, ჩვენ მთლიანად მივიღებთ (3) ტოლობებს.

ახლახან დამტკიცებულ თეორემას შეგვიძლია მივცეთ ასეთი უფრო მოკლე ფორმულირება: ყოველი მრავალწევრი ნული ხარისხის მამრავლამდე სიზუსტით ცალსახად იშლება დაუყვანად მამრავლებად.

მაგრამ ყოველთვის შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგი სპეციალური სახის დაშლა, რომელიც უკვე ყოველი მრავალწევრისათვის სავსებით ცალსახა იქნება: ვიღებთ $f(x)$ მრავალწევრის ნებისმიერ დაშლას

დაუყვანად მამრავლებად და ყოველი ამ მამრავლიდან ფრჩხილებს გარეთ გამოგვაქვს უფროსი კოეფიციენტი. მივიღებთ დაშლას

$$f(x)=a_0p_1(x)\,p_2(x)\dots p_s(x), \tag{5}$$

სადაც ყველა $p_i(x)$, $i=1, 2, \dots, s$, არის დაუყვანადი მრავალწევრი ერთის ტოლი უფროსი კოეფიციენტით. მამრავლი a_0 ტოლი იქნება $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტისა, რაც ადვილი დასამტკიცებელია, თუ შევასრულებთ გამრავლებას (5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში.

(5) დაშლაში შემავალი დაუყვანადი მამრავლები აუცილებელი არ არის ყველა ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს. თუ (5) დაშლაში დაუყვანადი $p(x)$ მრავალწევრი რამდენიმეჯერ გვხვდება, მაშინ მას $f(x)$-ის ჯერადი მამრავლი ეწოდება, სახელდობრ k-ჯერადი (კერძოდ ორჯერადი, სამჯერადი და ა. შ.), თუ (5) დაშლაში $p(x)$-ის ტოლი ზუსტად k მამრავლი შედის. თუკი $p(x)$ მამრავლი (5) დაშლაში მხოლოდ ერთხელ შედის, მაშინ მას $f(x)$-ის მარტივი (ან ერთჯერადი) მამრავლი ეწოდება.

თუ (5) დაშლაში $p_1(x), p_2(x), \dots, p_l(x)$ მამრავლები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, ხოლო ყოველი სხვა მამრავლი უდრის ერთ-ერთ მათგანს, და თუ $p_i(x)$, $i=1, 2, \dots, l$, არის, $f(x)$ მრავალწევრის k_i-ჯერადი მამრავლი, მაშინ (5) დაშლა შეიძლება შემდეგნაირად გადაიწეროს:

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)\,p_2^{k_2}(x)\dots p_l^{k_l}(x). \tag{6}$$

სწორედ ამ ჩაწერას გამოვიყენებთ ჩვეულებრივ შემდგომში, განსაკუთრებით არ აღვნიშნავთ, რომ ხარისხის მაჩვენებლები უდრის შესაბამისი მამრავლის ჯერადობას, ე. ი. რომ $p_i(x)\neq p_j(x)$, როცა $i\neq j$.

თუ მოცემულია $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების დაუყვანად მამრავლებად დაშლა, მაშინ ამ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი $d(x)$ უდრის იმ მამრავლების ნამრავლს, რომელნიც შედიან ერთდროულად ორივე დაშლაში, ამასთან ყოველი მამრავლი აიღება ორივე მოცემულ მრავალწევრში მისი ჯერადობებისაგან უმცირესის ტოლი ხარისხით.

მართლაც, აღნიშნული ნამრავლი გამყოფი იქნება ორივე $f(x)$, $g(x)$ მრავალწევრისათვის და ამიტომ $d(x)$-ისათვისაც. ეს ნამრავლი რომ განსხვავდებოდეს $d(x)$-ისაგან, მაშინ $d(x)$-ის დაუყვანად მამრავლებად დაშლაში ან შევიდოდა მამრავლი, რომელიც არ შედის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ერთის დაშლაში მაინც, რაც შეუძლებელია, ან და ერთ მამრავლთაგანს ექნებოდა მეტი ხარისხი, ვიდრე მასა აქვს $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთაგან ერთ-ერთის დაშლაში, რაც აგრეთვე შეუძლებელია.

ეს თეორემა ანალოგიურია იმ წესისა, რომლითაც ჩვეულებრივ ეძებენ მთელ რიცხვთა უდიდეს საერთო გამყოფს. მაგრამ მას არ შეუძლია მრავალწევრთა შემთხვევაში ევკლიდეს ალგორითმი შესცვალოს. მართლაც, რადგან მოცემულ მთელ დადებით რიცხვზე ნაკლებ მარტივ რიცხვთა რაოდენობა მხოლოდ სასრულოა, ამიტომ მთელი რიცხვის დაშლა მარტივ მამრავლებად

სასრული რაოდენობა გასინჯვით მიიღწევა. ამას უკვე არა აქვს ადგილი უსასრულო მთავარ ველზე მრავალწევრთა რგოლისათვის, და ზოგად შემთხვევაში არ არსებობს მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის პრაქტიკული წესი. უფრო მეტიც, გადაწყვეტა საკითხისა, არის თუ არა $f(x)$ მრავალწევრი მოცემულ P ველში დაუყვანადი, ზოგად შემთხვევაში ძალზედ ძნელია. ასე, ყველა დაუყვანადი მრავალწევრის აღწერა კომპლექსურ და ნამდვილ რიცხვთა ველების შემთხვევაში მიღებული იყო § 24-ში როგორც ფესვების არსებობის ძალიან ღრმა თეორემის შედეგი. რაც შეეხება რაციონალურ რიცხვთა ველს, ამ ველის მიმართ დაუყვანად მრავალწევრთა შესახებ § 56-ში მოყვანილია მხოლოდ კერძო ხასიათის დებულებები.

ჩვენ ვუჩვენეთ, რომ მრავალწევრთა რგოლში, როგორც მთელ რიცხვთა რგოლში, ადგილი აქვს „მარტივ" (დაუყვანად) მამრავლებად დაშლას და რომ ეს დაშლა გარკვეული აზრით ცალსახაა. ისმება კითხვა, შეიძლება თუ არა ამ შედეგების გადატანა რგოლთა უფრო ფართო კლასებზე. ჩვენ შემოვიფარგლებით ისეთი კომუტატური რგოლების შემთხვევით, რომელთაც აქვთ ერთეული და არ შეიცავენ ნულის გამყოფებს.

ვუწოდოთ ე რ თ ე უ ლ ი ს გ ა მ ყ ო ფ ი რგოლის ისეთ a ელემენტს, რომლისათვისაც ამ რგოლში არსებობს შებრუნებული a^{-1} ელემენტი,

$$aa^{-1}=1.$$

მთელ რიცხვთა რგოლში ესენია რიცხვები 1 და —1, მრავალწევრთა $P[x]$ რგოლში—ყველა ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი, ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული რიცხვები P ველიდან. ნულისაგან განსხვავებულ c ელემენტს, რომელიც არაა ერთეულის გამყოფი, ვუწოდოთ რგოლის მ ა რ ტ ი ვ ი ელემენტი, თუ ყოველ მის დაშლაში ორი მამრავლის ნამრავლად, $c=ab$, ამ მამრავლთაგან ერთი აუცილებლად ერთეულის გამყოფია. მთელ რიცხვთა რგოლში მარტივი ელემენტები იქნება მარტივი რიცხვები, მრავალწევრთა რგოლში—დაუყვანადი მრავალწევრები.

დაიშლება თუ არა განსახილველი რგოლის ყოველი ელემენტი, რომელიც განსხვავდება ნულისაგან და არ არის ერთეულის გამყოფი, მარტივ მამრავლთა ნამრავლად? თუ დაიშლება, იქნება თუ არა ეს დაშლა ცალსახა? უკანასკნელი უნდა გავიგოთ შემდეგი აზრით: თუ

$$a=p_1p_2\cdots p_k=q_1q_2\cdots q_l$$

—a ელემენტის ორი დაშლაა მარტივ მამრავლებად, მაშინ $k=l$ და (შესაძლოა ნუმერაციის შეცვლის შემდეგ)

$$q_i=p_ic_i,\ \ i=1,2,\dots k,$$

სადაც c_i ერთეულის გამყოფია.

თურმე ზოგად შემთხვევაში ორივე ამ კითხვას უნდა გავცეთ უარყოფითი პასუხი. ჩვენ შემოვიფარგლებით ერთი მაგალითით, სახელდობრ, მ ი ვ უ თ ი თ ე ბ თ რ გ ო ლ ს, რ ო მ ე ლ შ ი ა ც თ უ მ ც ა მ ა რ ტ ი ვ მ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა დ დ ა შ ლ ა შ ე ს ა ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა, მ ა გ რ ა მ ა რ ა რ ი ს ც ა ლ ს ა ხ ა.

განვიხილოთ

$$\alpha=a+b\sqrt{-3} \tag{7}$$

სახის კომპლექსური რიცხვები, სადაც a და b მთელი რიცხვებია. ყველა ასეთი რიცხვი შეადგენს რგოლს, რომელსაც არა აქვს ნულის გამყოფები და შეიცავს ერთეულს; მართლაც,

$$(a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3})=(ac-3bd)+(bc+ad)\sqrt{-3}. \tag{8}$$

ვუწოდოთ $\alpha = a + b\sqrt{-3}$ რიცხვის ნორმა მთელ დადებით

$$N(\alpha) = a^2 + 3b^2$$

რიცხვს, (8)-ის გამო ნამრავლის ნორმა უდრის ნორმათა ნამრავლს,

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)\, N(\beta), \tag{9}$$

მართლაც,

$$(ac - 3bd)^2 + 3(bc + ad)^2 = a^2c^2 + 9b^2d^2 + 3b^2c^2 +$$
$$+ 3a^2d^2 = (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2).$$

თუ α რიცხვი ჩვენ რგოლში ერთეულის გამყოფია, ე. ი. α^{-1} რიცხვს აქვს (7) სახე, მაშინ, (9) ძალით,

$$N(\alpha)\ \ N(\alpha^{-1}) = N(\alpha\alpha^{-1}) = N(1) = 1$$

და ამიტომ $N(\alpha) = 1$, რადგან $N(\alpha)$ და $N(\alpha^{-1})$ რიცხვები მთელი დადებითია. თუ $\alpha = a + b\sqrt{-3}$, მაშინ $N(\alpha) = 1$-დან გამომდინარეობს

$$N(\alpha) = a^2 + 3b^2 = 1;$$

მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ როცა $b = 0$, $a = \pm 1$. ამგვარად, ჩვენ რგოლში, როგორც მთელ რიცხვთა რგოლში, ერთეულის გამყოფებია მხოლოდ 1 და -1 რიცხვები და მხოლოდ ამ რიცხვებს აქვთ ერთის ტოლი ნორმა.

(9) ტოლობა ნამრავლის ნორმისათვის გადაიტანება, ცხადია, ნებისმიერ სასრული რიცხვ მამრავლთა შემთხვევაზე. აქედან ადვილი გამოსაყვანია, რომ ჩვენი რგოლის ყოველი α რიცხვი შეიძლება დაიშალოს სასრულო რიცხვ მარტივ მამრავლთა ნამრავლად; დამტკიცების ჩატარებას ვანდობთ მკითხველს.

მაგრამ, მარტივ მამრავლებად დაშლის ცალსახობა ჩვენ შეუძლებელია ვამტკიცოთ. სამართლიანია, მაგალითად, ტოლობები

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}).$$

ჩვენ რგოლში არ არის ერთეულის გამყოფი გარდა 1 და -1 რიცხვებისა და ამიტომ $1 + \sqrt{-3}$ (ასევე $1 - \sqrt{-3}$) რიცხვი არ შეიძლება განსხვავდებოდეს 2 რიცხვისაგან მხოლოდ მამრავლით, რომელიც ერთეულის გამყოფია. ჩვენ დაგვრჩენია ვუჩვენოთ, რომ ყოველი 2, $1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$ რიცხვთაგან მარტივია განხილულ რგოლში. მართლაც, ყოველი ამ სამი რიცხვის ნორმა უდრის რიცხვ 4-ს. ვთქვათ α ნებისმიერია ამ რიცხვთაგან და ვთქვათ

$$\alpha = \beta\gamma.$$

მაშინ, (9)-ის თანახმად, სამი შემთხვევიდან შესაძლებელია ერთ-ერთი:

$$1)\ N(\beta) = 4,\ N(\gamma) = 1;\ \ 2)\ N(\beta) = 1;\ N(\gamma) = 4;\ \ 3)\ N(\beta) = N(\gamma) = 2.$$

პირველ შემთხვევაში რიცხვი γ იქნება, როგორც ვიცით, ერთეულის გამყოფი, მეორე შემთხვევაში ერთეულის გამყოფი იქნება β. რაც შეეხება მესამე შემთხვევას, იგი საერთოდ შეუძლებელია

$$a^2 + 3b^2 = 2$$

ტოლობის შეუძლებლობის გამო, როცა a და b მთელებია.

ჯერადი მამრავლები. თუმცა, როგორც უკვე ზემოთ იყო მითითებული, ჩვენ არ შეგვიძლია მრავალწევრის დაშლა დაუყვანად მამრავლებად, მაგრამ არსებობს მეთოდები, რომლის საშუალებით შეგვიძლია გავიგოთ აქვს თუ არა მოცემულ მრავალწევრს ჯერადი მამრავლები და დადებითი პასუხის შემთხვევაში დავიყვანოთ ამ მრავალწევრის შესწავლა ისეთი მრავალწევრის შესწავ-

ლაზე, რომელსაც უკვე აღარა აქვს ჯერადი მამრავლი. მაგრამ ეს მეთოდები მოითხოვენ ძირითად ველზე ზოგიერთი შეზღუდვების დაშვებას. სახელდობრ, ამ პარაგრაფის მთელი შემდგომი შინაარსი გადმოიცემა დაშვებით, რომ P ველს O *მახასიათებელი* აქვს. ამ შეზღუდვის გარეშე თეორემები ჯერად მამრავლთა შესახებ, რომლებიც ქვემოთ იქნება დამტკიცებული, ძალას კარგავს; ამასთანავე, გამოყენების თვალსაზრისით, ნულ მახასიათებლიანი ველის შემთხვევა ყველაზე მნიშვნელოვანია, რადგან მას ეკუთვნის, კერძოდ, ყველა რიცხვითი ველი.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ განსახილველ შემთხვევაზე გადმოიტანება მრავალწევრის *წარმოებულის* ცნებაც, რომელიც შემოტანილი იყო § 22-ში კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებისათვის, და ამ ცნების ძირითადი თვისებები[1]. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თუ $p(x)$ არის $f(x)$ მრავალწევრის k-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი, $k \geqslant 1$, მაშინ იგი ამ მრავალწევრის წარმოებულის $(k-1)$-ჯერადი მამრავლი იქნება. კერძოდ, მრავალწევრის მარტივი მამრავლი არ შედის წარმოებულის დაშლაში.

მართლაც, ვთქვათ

$$f(x)=p^k(x)\,g(x), \tag{10}$$

ამასთან $g(x)$ უკვე არ იყოფა $p(x)$-ზე. თუ (10) ტოლობას გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$$f'(x)=p^k(x)\,g'(x)+kp^{k-1}(x)\,p'(x)\,g(x)=p^{k-1}(x)\,[p(x)\,g'(x)+kp'(x)\,g(x)].$$

ფრჩხილებში მდგომი მეორე შესაკრები არ იყოფა $p(x)$-ზე; მართლაც, $g(x)$ არ იყოფა $p(x)$-ზე პირობის ძალით, $p'(x)$-ს აქვს ნაკლები ხარისხი, ე. ი. აგრეთვე არ იყოფა $p(x)$-ზე, აქედან კი $p(x)$ მრავალწევრის დაუყვანადობისა და ამ პარაგრაფის ბ) და § 21-ის IX თვისებების გამო, გამომდინარეობს ჩვენი დებულება. მეორე მხრივ, ფრჩხილებში მდგომი ჯამის პირველი შესაკრები იყოფა $p(x)$-ზე და ამიტომ მთელი ეს ჯამი არ შეიძლება იყოფოდეს $p(x)$-ზე, ე. ი. $p(x)$ მამრავლი შედის $f'(x)$-ში $k-1$ ჯერადობით.

ჩვენი თეორემიდან და ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფის ძიების ზემოთ აღნიშნული წესისაგან გამომდინარეობს, რომ თუ მოცემულია $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლა:

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)\,p_2^{k_2}(x)\dots p_l^{k_l}(x), \tag{11}$$

მაშინ *$f(x)$ მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფს აქვს შემდეგი დაშლა დაუყვანად მამრავლებად:*

$$(f(x),\, f'(x))=p_1^{k_1-1}(x)\,p_2^{k_2-1}(x)\dots p_l^{k_l-1}(x), \tag{12}$$

სადაც $p_i^{k_i-1}(x)$ მამრავლი, როცა $k_i=1$, უნდა შევცვალოთ ერთეულით. კერძოდ, $f(x)$ *მრავალწევრი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არ შეიცავს*

[1] სასრულო მახასიათებლიან ველთათვის ძალას კარგავს დებულება, რომ n-ური ხარისხის მრავალწევრის წარმოებულის ხარისხია $n-1$.

ჯერად მამრავლებს, როცა იგი თანამარტივია თავის წარმოებულთან.

მაშასადამე, ჩვენ ვისწავლეთ პასუხის გაცემა კითხვაზე: აქვს თუ არა მოცემულ მრავალწევრს ჯერადი ფესვები. უფრო მეტიც, რადგან არც მრავალწევრის წარმოებული, არც ორი მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფი დამოკიდებული არ არის იმაზე, P ველს განვიხილავთ თუ მის ნებისმიერ P გაფართოებას, ამიტომ ახლახან დამტკიცებული რეზულტატის შედეგის სახით ვიღებთ:

თუ ნულ მახასიათებლიანი P ველის კოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს არა აქვს ამ ველის მიმართ ჯერადი მამრავლები, მაშინ მას არ ექნება ჯერადი მამრავლები P ველის არავითარ $\overline{P}$ გაფართოების მიმართაც.

კერძოდ, თუ $f(x)$ დაუყვანადია P-ს მიმართ, ხოლო $\overline{P}$ არის P ველის რაიმე გაფართოება, მაშინ, თუმცა $f(x)$ უკვე შეიძლება დაყვანადი იყოს $\overline{P}$-ს მიმართ, მაგრამ თავიდანვე ცნობილია, რომ იგი არ გაიყოფა დაუყვანადი მრავალწევრის ($\overline{P}$ მიმართ) კვადრატზე.

ჯერადი მამრავლების გამოყოფა. თუ მოცემულია $f(x)$ მრავალწევრი (11) დაშლით და თუ $d_1(x)$-ით ავღნიშნავთ $f(x)$-სა და მისი $f'(x)$ წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფს, მაშინ (12) იქნება $d_1(x)$-ისათვის დაშლა. თუ გავყოფთ (11)-ს (12)-ზე, მივიღებთ:

$$v_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0\,p_1(x)\,p_2(x)\cdots p_l(x),$$

ე. ი. მივიღებთ მრავალწევრს, რომელიც არ შეიცავს ჯერად მამრავლებს, ამასთან $v_1(x)$-ის დაუყვანადი მამრავლი იქნება მამრავლი $f(x)$-სათვისაც. ამით $f(x)$-ისათვის დაუყვანადი მამრავლების ძიება დაიყვანება მათ ძიებაზე $v_1(x)$ მრავალწევრისათვის, რომელსაც საერთოდ უფრო ნაკლები ხარისხი აქვს და, ყოველ შემთხვევაში, შეიცავს მარტივ მამრავლებს. თუ ეს ამოცანა $v_1(x)$-ისათვის გადაწყვეტილი იქნება, მაშინ გვრჩება მხოლოდ ნაპოვნი დაუყვანადი მამრავლების ჯერადობის განსაზღვრა $f(x)$-ში, რასაც მივაღწევთ გაყოფის ალგორითმის გამოყენებით.

თუ ახლახან გადმოცემულ მეთოდს გავართულებთ, შეიძლება მაშინვე გადავიდეთ რამდენიმე მრავალწევრის განხილვაზე, რომელთაც ჯერადი მამრავლები არა აქვთ, ამასთან თუ ვიპოვით ამ მრავალწევრთა დაუყვანად მამრავლებს, ჩვენ არა მარტო ვიპოვით $f(x)$-ის ყველა დაუყვანად მამრავლს, არამედ გვეცოდინება მათი ჯერადობაც.

დაე, (11) იყოს $f(x)$-ის დაშლა დაუყვანად მამრავლებად, ამასთან მამრავლთა უდიდესი ჯერადობაა s, $s \geqslant 1$. ავღნიშნოთ $F_1(x)$-ით $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ერთჯერადი მამრავლის ნამრავლი, $F_2(x)$-ით — ყველა ორჯერადი მამრავლის ნამრავლი, მაგრამ მხოლოდ თითოჯერ აღებული და ა. შ., ბოლოს $F_s(x)$-ით — ყველა s-ჯერადი მამრავლის ნამრავლი, აგრეთვე აღებული მხოლოდ თითოჯერ; ამასთან თუ რომელიმე j-სათვის $f(x)$-ში არ არის j-ჯერადი მამრავლი, მაშინ ვთვლით $F_j(x)=1$. მაშინ $f(x)$ გაიყოფა $F_k(x)$ მრავალწევრის k-ურ ხარისხზე, $k=1, 2,\ldots,s$, და (11) დაშლა მიიღებს

$$f(x)=a_0\,F_1(x)\,F_2^2(x)\,F_3^3(x)\ldots F_s^s(x)$$

სახეს, ხოლო (12) დაშლა $d_1(x)=(f(x), f'(x))$-ისათვის გადაიწერება

$$d_1(x)=F_2(x)\,F_3^2(x)\dots F_s^{s-1}(x)$$

სახით.

თუ აღვნიშნავთ $d_2(x)$-ით $d_1(x)$ მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის უდიდეს საერთო გამყოფს და საერთოდ $d_k(x)$-ით $d_{k-1}(x)$ და $d'_{k-1}(x)$ მრავალწევრების უდიდეს საერთო გამყოფს, ჩვენ იმავე გზით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} d_2(x)&=F_3(x)\,F_4^2\dots F_s^{s-2}(x),\\ d_3(x)&=F_4(x)\,F_5^2\dots F_s^{s-3}(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ d_{s-1}(x)&=F_s(x)\\ d_s(x)&=1. \end{aligned}$$

აქედან

$$v_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0\,F_1(x)\,F_2(x)\,F_3(x)\dots F_s(x),$$

$$v_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=F_2(x)\,F_2(x)\dots F_s(x),$$

$$v_3(x)=\frac{d_2(x)}{d_3(x)}=F_3(x)\dots F_s(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_s(x)=\frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}=F_s(x),$$

და ამიტომ, ბოლოს,

$$F_1(x)=\frac{v_1(x)}{a_0v_2(x)},\quad F_2(x)=\frac{v_2(x)}{v_3(x)},\dots,F_s(x)=v_s(x).$$

ამგვარად, გამოვიყენებთ რა მხოლოდ ისეთ ხერხს, რომელიც არ მოითხოვს $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვანადი მამრავლების ცოდნას, სახელდობრ გაწარმოებას, ევკლიდეს ალგორითმს და გაყოფის ალგორითმს, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ $F_1(x)$, $F_2(x),\dots,F_s(x)$ მრავალწევრები, რომელთაც არა აქვთ ჯერადი მამრავლები, ამასთან $F_k(x)$ მრავალწევრის, $k=1, 2,\dots, s$, ყოველი დაუყვანადი მამრავლი იქნება k-ჯერადი $f(x)$-ისათვის.

აქ მოყვანილი მეთოდი, ცხადია, არ შეიძლება ჩავთვალოთ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის მეთოდად, რადგან, როცა $s=1$, ე. ი. ჯერადი მამრავლების არ მქონე მრავალწევრისათვის, მივიღებთ მხოლოდ $f(x)=F_1(x)$.

§ 49*. ფესვის არსებობის თეორემა

თავისთავად ცხადია, რომ § 23-ში დამტკიცებული ძირითადი თეორემა ყოველი რიცხვითი მრავალწევრისათვის კომპლექსურ რიცხვთა ველში ფესვის არსებობის შესახებ არ შეიძლება გადატანილ იქნეს ნებისმიერი ველის შემთხვევაზე. ამ პარაგრაფში დამტკიცებული იქნება თეორემა, რომელიც რამდენადმე ცვლის ველთა ზოგად თეორიაში კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის მითითებულ ძირითად თეორემას.

ვთქვათ, მოცემულია P ველზე $f(x)$ მრავალწევრი. ბუნებრივია ისმის კითხვა: თუ $f(x)$ მრავალწევრს საერთოდ არა აქვს P ველში ფესვი, მაშინ არსებობს თუ არა P ველის ისეთი $\overline{P}$ გაფართოება, რომელშიაც $f(x)$-ისათვის მოიძებნება თუნდაც ერთი ფესვი? ამასთან შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ერთზე მეტია: ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრთათვის ამ კითხვას აზრი არა აქვს, ხოლო პირველი ხარისხის ყოველ $ax+b$ მრავალწევრს აქვს ფესვი $-\frac{b}{a}$ იმავე P ველში. მეორე მხრივ, ცხადია, შეიძლება შემოვიფარგლოთ ისეთი შემთხვევით, როცა $f(x)$ მრავალწევრი დაუყვანადია: თუ იგი დაყვანადია P-ს მიმართ, მაშინ მისი ნებისმიერი დაუყვანადი მამრავლის ფესვი თვით მისი ფესვიც იქნება.

პასუხს ჩვენთვის საინტერესო კითხვაზე იძლევა ფესვის არსებობის შემდეგი თეორემა:

P ველის მიმართ დაუყვანადი ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისათვის არსებობს ამ ველის ისეთი გაფართოება, რომელშიაც არის ფესვი $f(x)$-ისათვის. ყველა მინიმალური ველი, რომელიც შეიცავს P ველსა და ამ მრავალწევრის რომელიმე ფესვს, ერთმანეთის იზომორფულია.

დავამტკიცოთ ჯერ ამ თეორემის მეორე ნახევარი.

ვთქვათ, მოცემულია P-ს მიმართ დაუყვანადი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

მრავალწევრი, ამასთან $n\geqslant 2$, ე. ი. $f(x)$-ს არა აქვს ფესვი თვით P ველში. დავუშვათ, რომ არსებობს P ველის $\overline{P}$ გაფართოება, რომელიც შეიცავს $f(x)$-ის α ფესვს, და დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა, რომელიც აუცილებელია შემდგომში, მაგრამ რომელიც თავისთავადაც საინტერესოა:

თუ P-ს მიმართ დაუყვანადი $f(x)$ მრავალწევრის $\overline{P}$-ში მდებარე α ფესვი არის აგრეთვე ფესვი $P[x]$ რგოლის რომელიმე $g(x)$ მრავალწევრისა, მაშინ $f(x)$ იქნება $g(x)$-ის გამყოფი.

მართლაც, $\overline{P}$ ველის მიმართ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს აქვთ საერთო გამყოფი $x-\alpha$ და ამიტომ არ არიან თანამარტივი. მაგრამ მრავალწევრთა თვისება არ იყვნენ თანამარტივი არ არის დამოკიდებული ველის არჩევანზე, ამიტომ შეგვიძლია გადავიდეთ P ველზე და გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის γ) თვისება.

ვიპოვოთ ახლა P ველის მინიმალური ქვეველი $P(\alpha)$, რომელიც შეიცავს P ველსა და α ელემენტს. მას აუცილებლად ეკუთვნის ყველა

$$\beta=b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2+\ldots+b_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{2}$$

სახის ელემენტი, სადაც $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ P ველის ელემენტებია. $\overline{P}$ ველის არც ერთ ელემენტს არ შეიძლება ჰქონდეს ორი (2) სახის განსხვავებული ჩაწერა: თუ ადგილი აქვს აგრეთვე

$$\beta=c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\ldots+c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

ტოლობას, ამასთან ერთი k-სათვის მაინც $c_k \neq b_k$, მაშინ α იქნება

$$g(x) = (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2)x^2 + \ldots + (b_{n-1} - c_{n-1})x^{n-1}$$

მრავალწევრის ფესვი, რაც ეწინააღმდეგება ზემოთ დამტკიცებულ ლემას, რადგან $g(x)$-ის ხარისხი $f(x)$-ის ხარისხზე ნაკლებია.

$\overline{P}$ ველის ელემენტთა რიცხვს, რომელთაც აქვთ (2) სახე, ეკუთვნის P ველის ყველა ელემენტი (როცა $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$), აგრეთვე თვით α ელემენტიც (როცა $b_1 = 1$, $b_0 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$). დავამტკიცოთ, რომ (2) სახის ელემენტები შეადგენენ მთელ საძიებელ $P(\alpha)$ ქვეველს. მართლაც, თუ მოცემულია β ელემენტი ((2) ჩაწერით) და

$$\gamma = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1},$$

მაშინ, $\overline{P}$ ველში ოპერაციათა თვისებების გამო,

$$\beta \pm \gamma = (b_0 \pm c_0) + (b_1 \pm c_1)\alpha + (b_2 \pm c_2)\alpha^2 + \ldots + (b_{n-1} \pm c_{n-1})\alpha^{n-1},$$

ე. ი. (2) სახის ორი ელემენტის ჯამი და სხვაობა ისევ იქნება ამავე სახის ელემენტი.

თუ გადავამრავლებთ β-სა და γ-ს, მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს α^n-ისა და α-ს უფრო მაღალ ხარისხებს. მაგრამ (1)-დან და $f(\alpha) = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ α^n და ამიტომ α^{n+1}, α^{n+2} და ა. შ., გამოისახება α ელემენტის ნაკლები ხარისხებით. $\beta\gamma$ გამოსახულების ძიების ყველაზე მარტივი წესი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}, \quad \psi(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1},$$

საიდანაც $\varphi(\alpha) = \beta$, $\psi(\alpha) = \gamma$. გადავამრავლოთ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ მრავალწევრები და გავყოთ ეს ნამრავლი $f(x)$-ზე; მივიღებთ

$$\varphi(x)\psi(x) = f(x)q(x) + r(x), \tag{3}$$

სადაც

$$r(x) = d_0 + d_1x + \ldots + d_{n-1}x^{n-1}.$$

თუ ავიღებთ (3) ტოლობის ორივე ნაწილს, როცა $x = \alpha$, მივიღებთ

$$\varphi(\alpha)\psi(\alpha) = f(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha),$$

ე. ი., $f(\alpha) = 0$ გამო,

$$\beta\gamma = d_0 + d_1\alpha + \ldots + d_{n-1}\alpha^{n-1},$$

ამგვარად, (2) სახის ორი ელემენტის ნამრავლი ისევ ამავე სახის ელემენტია.

დაბოლოს, ვაჩვენოთ, რომ თუ β ელემენტს აქვს (2) სახე, ამასთან $\beta \neq 0$, მაშინ β^{-1} ელემენტი, რომელიც $\overline{P}$ ველში არსებობს, აგრეთვე შეიძლება ჩაიწეროს (2) სახით. ამისათვის ავიღოთ

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$$

მრავალწევრი $P[x]$ რგოლიდან. რადგან $\varphi(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია $f(x)$-ის ხარისხზე, ხოლო $f(x)$ დაუყვანადია P-ს მიმართ, ამიტომ $\varphi(x)$ და $f(x)$

თანამარტივია და ამიტომ, §§ 21 და 47 თანახმად, $P[x]$ რგოლში არსებობს ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომ

$$\varphi(x)\, u(x)+f(x)\, v(x)=1;$$

ამასთან შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $u(x)$-ის ხარისხი n-ზე ნაკლებია:

$$u(x)=s_0+s_1 x+\ldots+s_{n-1} x^{n-1}.$$

აქედან $f(\alpha)=0$ ტოლობის გამო, გამომდინარეობს:

$$\varphi(\alpha)\, u(\alpha)=1$$

და ამიტომ, $\varphi(\alpha)=\beta$ ტოლობის გამო, მივიღებთ:

$$\beta^{-1}=u(\alpha)=s_0+s_1 \alpha+\ldots+s_{n-1} \alpha^{n-1}.$$

ამგვარად, $\overline{P}$ ველის (2) სახის მქონე ელემენტთა ერთობლიობა შეადგენს $\overline{P}$ ველის ქვეველს; ეს იქნება საძიებელი $P(\alpha)$ ველი. შემდგომ, რადგან ჩვენ ვნახეთ, რომ (2) სახის β და γ ელემენტთა ჯამისა და ნამრავლის ძიებისას საჭიროა ვიცოდეთ მხოლოდ ამ ელემენტთა გამოსახულებების კოეფიციენტები α-ს ხარისხების მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია ვამტკიცოთ შემდეგი შედეგის სამართლიანობა: თუ არსებობს $\overline{P}$-ს გარდა P ველის სხვა $\overline{P'}$ გაფართოება, რომელიც აგრეთვე შეიცავს $f(x)$ მრავალწევრის რომელიმე α' ფესვს, და თუ $P(\alpha')$ არის $\overline{P'}$ ველის მინიმალური ქვეველი, რომელიც P-სა და α-ს შეიცავს, მაშინ $P(\alpha)$ და $P(\alpha')$ ველები იზომორფულია. ამასთან მათ შორის იზომორფული თანადობის მისაღებად (2) სახის β ელემენტს $P(\alpha)$-დან უნდა შევუთანადოთ

$$\beta'=b_0+b_1 \alpha'+b_2 \alpha'^2+\ldots+b_{n-1} \alpha'^{n-1}$$

ელემენტი $P(\alpha')$-დან, რომელსაც იგივე კოეფიციენტები აქვს. ამით დამტკიცებულია თეორემის მეორე ნახევარი.

გადავდივართ ამ თეორემის ძირითადი პირველი ნახევრის დამტკიცებაზე, ამასთან ზემოთ გადმოცემული მიგვითითებს საამისო გზებზე. მოცემული გვაქვს $n \geqslant 2$ ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი, დაუყვანადი P ველის მიმართ, და უნდა ავაგოთ P ველის გაფართოება, რომელიც შეიცავს ფესვს $f(x)$-ისათვის. ამისათვის ავიღოთ მრავალწევრთა მთელი $P[x]$ რგოლი და დავყოთ იგი არათანამკვეთ კლასებად, ერთ კლასში მოვათავსოთ მრავალწევრები, რომელნიც მოცემულ $f(x)$ მრავალწევრზე გაყოფისას იძლევიან ერთ და იმავე ნაშთს. სხვა სიტყვებით, $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ მრავალწევრები ეკუთვნიან ერთ და იმავე კლასს, თუ მათი სხვაობა უნაშთოდ იყოფა $f(x)$-ზე.

შევთანხმდეთ, აღვნიშნოთ მიღებული კლასები A, B, C და ა. შ. ასოებით და შემდეგი სრულიად ბუნებრივი წესით განვმარტოთ კლასების ჯამი და ნამრავლი. ავიღოთ ნებისმიერი ორი A და B კლასი, ავირჩიოთ A კლასში რაიმე $\varphi_1(x)$ მრავალწევრი, B კლასში — რაიმე $\psi_1(x)$ მრავალწევრი და აღვნიშნოთ $\chi_1(x)$-ით ამ მრავალწევრთა ჯამი,

$$\chi_1(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x),$$

ხოლო $\theta_1(x)$-ით — მათი ნამრავლი,

$$\theta_1(x) = \varphi_1(x) \cdot \psi_1(x).$$

ავირჩიოთ ახლა A კლასში ნებისმიერი სხვა $\varphi_2(x)$ მრავალწევრი, B კლასში — ნებისმიერი $\psi_2(x)$ მრავალწევრი და აღვნიშნოთ შესაბამისად $\chi_2(x)$-ით და $\theta_2(x)$-ით, მათი ჯამი და ნამრავლი:

$$\chi_2(x) = \varphi_2(x) + \psi_2(x),$$
$$\theta_2(x) = \varphi_2(x) \cdot \psi_2(x).$$

პირობის თანახმად $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ მრავალწევრები არიან ერთ A კლასში და ამიტომ მათი სხვაობა $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ უნაშთოდ იყოფა $f(x)$-ზე. იგივე თვისება აქვს $\psi_1(x) - \psi_2(x)$ სხვაობასაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\chi_1(x) - \chi_2(x) = [\varphi_1(x) + \psi_1(x)] - [\varphi_2(x) + \psi_2(x)] =$$
$$= [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + [\psi_1(x) - \psi_2(x)] \tag{4}$$

სხვაობაც აგრეთვე უნაშთოდ იყოფა $f(x)$-ზე. იგივეა სამართლიანი $\theta_1(x) - \theta_2(x)$ სხვაობისთვისაც, რადგან

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \varphi_1(x)\psi_1(x) - \varphi_2(x)\psi_2(x) =$$
$$= \varphi_1(x)\psi_1(x) - \varphi_1(x)\psi_2(x) + \varphi_1(x)\psi_2(x) - \varphi_2(x)\psi_2(x) =$$
$$= \varphi_1(x)[\psi_1(x) - \psi_2(x)] + [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]\psi_2(x). \tag{5}$$

(4) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\chi_1(x)$ და $\chi_2(x)$ მრავალწევრები ერთ კლასშია. სხვაგვარად, A კლასის ნებისმიერი მრავალწევრის ჯამი B კლასის ნებისმიერ მრავალწევრთან ეკუთვნის სრულიად გარკვეულ C კლასს, რომელიც არ არის დამოკიდებული იმისაგან, თუ სახელდობრ რომელი მრავალწევრია ამორჩეული „წარმომადგენლად“ A და B კლასებიდან; ვუწოდოთ ამ C კლასს A და B კლასთა **ჯამი**:

$$C = A + B.$$

ანალოგიურად, (5)-ის გამო, A და B კლასების წარმომადგენლების არჩევანზე არაა დამოკიდებული ის D კლასიც, რომელშიც ძევს A კლასის ნებისმიერი მრავალწევრის ნამრავლი B კლასის ნებისმიერ მრავალწევრზე: ამ კლასს ვუწოდოთ A და B კლასების **ნამრავლი**:

$$D = AB.$$

ვუჩვენოთ, რომ კლასთა ერთობლიობა, რომელზედაც მრავალწევრთა ჩვენი $P[x]$ რგოლია დაყოფილი, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების აღნიშნული შემოტანის შემდეგ ველად იქცევა. მართლაც, ორივე ოპერაციისათვის **ასოციაციურობისა** და **კომუტატურობის კანონებისა** და **დისტრიბუციის კანონის** სამართლიანობა გამომდინარეობს მათი სამართლიანობიდან $P[x]$ რგოლში, რადგან კლასებზე ოპერაციები დაიყვანება მათში შემავალ მრავალწევრთა ოპერაციებზე. **ნულის** როლს, ცხადია, ასრულებს კლასი შემდგარი მრავალწევრებისაგან, რომელნიც უნაშთოდ იყოფიან $f(x)$ მრავალწევრზე. ამ კლასს ვუწოდოთ **ნულოვანი** და აღვნიშნოთ O სიმ-

ბოლოთი. მოპირდაპირე A კლასისათვის, რომელიც შესდგება მრავალწევრებისაგან, რომელნიც $f(x)$-ზე გაყოფისას ნაშთში $\varphi(x)$-ს იძლევიან, იქნება კლასი შედგენილი მრავალწევრებისაგან, რომელნიც $f(x)$-ზე გაყოფისას იძლევიან ნაშთში $-\varphi(x)$-ს. აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრთა სიმრავლეში სრულდება ცალსახა გამოკლება.

იმის დასამტკიცებლად, რომ კლასთა სიმრავლეში, სრულდება გაყოფა, საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ არსებობს კლასი, რომელიც ერთეულის როლს ასრულებს და რომ ყოველი ნულოვანისაგან განსხვავებული კლასისათვის არსებობს შებრუნებული კლასი. ერთეული იქნება, ცხადია, კლასი მრავალწევრებისა, რომელნიც $f(x)$-ზე გაყოფისას ნაშთში 1-ს იძლევა; ამ კლასს ვუწოდოთ ერთეულოვანი და აღვნიშნოთ E სიმბოლოთი.

ვთქვათ ახლა მოცემულია ნულისაგან განსხვავებული A კლასი. $\varphi(x)$ მრავალწევრი, რომელიც A კლასში წარმომადგენლადაა არჩეული, არ გაიყოფა, მაშასადამე, უნაშთოდ $f(x)$-ზე და ამიტომ, $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვანადობის გამო, ეს ორი მრავალწევრი თანამარტივია. ამგვარად $P[x]$ რგოლში არსებობენ $u(x)$ და $v(x)$ მრავალწევრები, რომელნიც

$$\varphi(x)u(x)+f(x)v(x)=1$$

ტოლობას აკმაყოფილებენ, საიდანაც

$$\varphi(x)u(x)=1-f(x)v(x). \tag{6}$$

(6) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი $f(x)$-ზე გაყოფისას ნაშთში 1-ს იძლევა, ე. ი. ერთეულოვან კლასს ეკუთვნის. თუ კლასს, რომელსაც $u(x)$ მრავალწევრი ეკუთვნის, B-თი აღვნიშნავთ, მაშინ (6) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ

$$AB=E,$$

საიდანაც $B=A^{-1}$. ამით ყოველი არანულოვანი კლასისათვის შებრუნებული კლასის არსებობა დამტკიცდა, ე. ი. დამთავრდა იმის დამტკიცება, რომ კლასები ველს შეადგენენ.

აღვნიშნოთ ეს ველი $\overline{P}$-ით და ვუჩვენოთ, რომ იგი P ველის გაფართოებაა. P ველის ყოველ a ელემენტს შეესაბამება იმ მრავალწევრებისაგან შემდგარი კლასი, რომელნიც $f(x)$-ზე გაყოფისას ნაშთში a-ს იძლევიან; თვითონ a ელემენტი, განხილული როგორც ნულ ხარისხიანი მრავალწევრი, ამ კლასს ეკუთვნის. ამ სპეციალური სახის ყველა კლასი შეადგენს $\overline{P}$ ველში P ველის იზომორფულ ქვეველს. მართლაც, შესაბამისობის ურთიერთ ცალსახობა ცხადია; მეორე მხრივ, ამ კლასებში წარმომადგენლებად შეგვიძლია P ველის ელემენტები ავირჩიოთ და ამიტომ P-ს ელემენტების ჯამს (ნამრავლს) შეესაბამება შესაბამისი კლასების ჯამი (ნამრავლი). მაშასადამე, ნება გვაქვს შემდგომში არ განვასხვაოთ P ველის ელემენტები და მათი შესაბამისი კლასები.

დაბოლოს, X-ით აღვნიშნოთ იმ მრავალწევრებისაგან შემდგარი კლასი, რომელიც $f(x)$-ზე გაყოფისას ნაშთში x-ს იძლევიან. ეს კლასი $\overline{P}$ ველის სრუ-

ლიად გარკვეული ელემენტია და ჩვენ გვინდა ვუჩვენოთ, რომ იგი $f(x)$ მრავალწევრის ფესვია. ვთქვათ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n.$$

აღვნიშნოთ A_i-ით ზემოთ მითითებული აზრით P ველის a_i ელემენტის შესაბამისი კლასი, $i=0, 1,\dots,n$, და ვიპოვოთ რას უდრის $\overline{P}$ ველის

$$A_0X^n+A_1X^{n-1}+\dots+A_{n-1}X+A_n \tag{7}$$

ელემენტი. თუ ჩავთვლით A_i კლასის წარმომადგენლებად a_i ელემენტებს $i=0, 1,\dots,n$, ხოლო X კლასის წარმომადგენლად — x მრავალწევრს და თუ გამოვიყენებთ კლასთა შეკრებისა და გამრავლების განმარტებებს, მივიღებთ, რომ (7) კლასში შედის თვითონ $f(x)$ მრავალწევრი. მაგრამ $f(x)$ უნაშთოდ იყოფა თავის თავზე და ამიტომ (7) კლასი ნულოვანია. ამგვარად, თუ შევცვლით (7)-ში A_i კლასებს P ველის მათი შესაბამისი a_i ელემენტებით, მივიღებთ, რომ $\overline{P}$ ველში ადგილი აქვს,

$$a_0X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_{n-1}X+a_n=0$$

ტოლობას, ე. ი. X კლასი მართლაც არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი.

ამით მთავრდება ფესვის არსებობის თეორემის დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ თუ ავიღებთ P-დ ნამდვილ რიცხვთა ველს და დავუშვებთ $f(x)=x^2+1$, მივიღებთ კომპლექსურ რიცხვთა ველის აგების კიდევ ერთ წესს.

ფესვის არსებობის თეორემიდან შეგვიძლია გამოვიტანოთ იმის ანალოგიური შედეგი, როგორიც გამოვიტანეთ § 24-ში კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის ძირითადი თეორემიდან. თავდაპირველად გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა. რადგან $f(x)$ მრავალწევრის ყოველი წრფივი $x-c$ მამრავლი დაუყვანადია, ამიტომ იგი უნდა შედიოდეს დაუყვანად მამრავლებად იმ ერთადერთ დაშლაში, რომელიც $f(x)$-ს გააჩნია.

მაგრამ $f(x)$-ის დაუყვანად მამრავლებად დაშლაში წრფივ მამრავლთა რიცხვი არ შეიძლება აღემატებოდეს ამ მრავალწევრის ხარისხს. ჩვენ მივდივართ შემდეგ შედეგამდე:

n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს P ველში შეიძლება ჰქონდეს არა უმეტეს n ფესვისა, თუნდაც ყოველი ფესვი დავთვალოთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც მისი ჯერადობაა.

n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრის P ველის მიმართ *დაშლის ველი* ვუწოდოთ P ველის ისეთ Q გაფართოებას, რომელშიაც შედის $f(x)$-ის n ფესვი (ჯერად ფესვებს ვთვლით იმდენჯერ რამდენიც მისი ჯერადობაა). მაშასადამე, $f(x)$ მრავალწევრი P ველის მიმართ დაიშლება წრფივ მამრავლებად, ამასთან Q ველის არავითარი შემდგომი გაფართოება არ გამოავლენს $f(x)$-ის ახალ ფესვებს.

$P[x]$ რგოლის ყოველი $f(x)$ მრავალწევრისათვის არსებობს P ველის მიმართ დაშლის ველი.

მართლაც, თუ n-ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს, $n \geq 1$, თვითონ P ველში აქვს n ფესვი, მაშინ P იქნება დაშლის საძიებელი ველი. თუკი $f(x)$ არ იშლება P-ს მიმართ წრფივ მამრავლებად, მაშინ ვიღებთ მის ერთ-ერთ არაწრფივ დაუყვანად $\varphi(x)$ მამრავლს და ფესვის არსებობის საფუძველზე ვაფართოებთ P-ს $\varphi(x)$-ის ფესვის შემცველ P' ველამდე. თუ P'-ის მიმართ $f(x)$ მრავალწევრი კიდევ არ იშლება წრფივ მამრავლებად, მაშინ ისევ ვაფართოებთ ველს კიდევ ერთი არაწრფივად დარჩენილი დაუყვანადი მამრავლის ფესვის შექმნით. სასრული რიცხვ-ნაბიჯის შემდეგ ჩვენ მივალთ, ცხადია, $f(x)$-ის დაშლის ველამდე.

გასაგებია, $f(x)$-ს შეიძლება ბევრი სხვადასხვა დაშლის ველი ჰქონდეს. შეიძლებოდა დაგვემტკიცებია, რომ P ველისა და $f(x)$ მრავალწევრის n ფესვის (სადაც n ამ მრავალწევრის ხარისხია) შემცველი ყველა მინიმალური ველი ერთმანეთის იზომორფულია. მაგრამ ჩვენ არ გამოვიყენებთ ამ დებულებას და ამიტომ არ მოვიტანთ მის დამტკიცებას.

ჯერადი ფესვები. წინა პარაგრაფში დამტკიცებული იყო, რომ O მახასიათებლიან P ველზე $f(x)$ მრავალწევრს მაშინ და მხოლოდ მაშინ არა აქვს ჯერადი ფესვები, როდესაც იგი თანამარტივია თავის წარმოებულთან. აღნიშნული იყო აგრეთვე, რომ P-ს მიმართ ჯერადი მამრავლების უქონლობა $f(x)$-ისათვის იწვევს ასეთი მამრავლების უქონლობას P ველის ნებისმიერი P' გაფართოების მიმართ. თუ გამოვიყენებთ ამას, ისეთი შემთხვევისათვის, როცა P' არის $f(x)$-ის დაშლის რაიმე ველი, და თუ გავიხსენებთ ჯერადი ფესვის განმარტებას, მივალთ შემდეგ შედეგამდე:

თუ O მახასიათებლიან P ველზე $f(x)$ მრავალწევრს არ აქვს ჯერადი ფესვები დაშლის მოცემულ ველში, მაშინ იგი თანამარტივია თავის $f'(x)$ წარმოებულთან. პირუკუ, თუ $f(x)$ თანამარტივია თავის წარმოებულთან, მაშინ მას არა აქვს ჯერადი ფესვები არც ერთ თავის დაშლის ველში.

კერძოდ აქედან, გამომდინარეობს, რომ *O მახასიათებლიანი ველის მიმართ დაუყვანად $f(x)$ მრავალწევრს არ შეიძლება ჰქონდეს ჯერადი ფესვები ამ ველის არც ერთ გაფართოებაში.* სასრული მახასიათებლიანი ველისათვის ეს დებულება აღარ არის სამართლიანი — მდგომარეობა, რომელიც შესამჩნევ როლს ასრულებს ველთა ზოგად თეორიაში.

შევნიშნოთ, რომ *ნებისმიერი ველის შემთხვევაში შენარჩუნებულია ვიეტას ფორმულებიც* (იხ. § 24); ამასთან მრავალწევრის ფესვები აიღება ამ მრავალწევრის რაიმე დაშლის ველში.

§ 50*. რაციონალური წილადების ველი

§ 25-ში *გადმოცემული რაციონალური წილადების თეორია სავსებით გამოსადეგია ნებისმიერი ძირითადი ველის შემთხვევაში.* მაგრამ ნამდვილ რიცხვთა ველიდან ნებისმიერ P ველ-

გადასვლისას შეხედულება $\frac{f(x)}{g(x)}$ გამოსახულებაზე როგორც x ცვლადის ფუნქციაზე უნდა შეიცვალოს, რადგან, როგორც ვიცით, იგი უკვე გამოუსადეგარია მრავალწევრებისათვის. ჩვენს წინაშე დგას ამოცანა თუ როგორი აზრი უნდა მივანიჭოთ ამ გამოსახულებებს იმ შემთხვევაში, როდესაც კოეფიციენტები ნებისმიერ P ველს ეკუთვნიან. უფრო ზუსტად, ჩვენ გვინდა ავაგოთ ველი, რომელშიაც შედის მრავალწევრთა $P[x]$ რგოლი, ამასთან ისე, რომ ამ ახალ ველში განმარტებული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები, გამოყენებულნი მრავალწევრებზე, ემთხვეოდნენ $P[x]$ რგოლის ოპერაციებს; მოკლედ, $P[x]$ რგოლი ამ ახალი ველის *ქვერგოლი* უნდა იყოს. მეორე მხრივ, ამ ახალი ველის ყოველი ელემენტი უნდა წარმოგვიდგებოდეს (ამ ველში განმარტებული გაყოფის აზრით) ორი მრავალწევრის განაყოფის სახით. როგორც ახლა იქნება ნაჩვენები, ასეთი ველი შეიძლება აიგოს ყოველი P-სათვის; მას აღნიშნავენ $P(x)$ (უცნობი მრგვალ ფრჩხილებშია ჩასმული!) და P ველის მიმართ *რაციონალური წილადების* ველს უწოდებენ.

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $P[x]$ რგოლი უკვე არის რაიმე Q ველის ქვერგოლი. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ნებისმიერი მრავალწევრებია $P[x]$-დან, ამასთან $g(x) \neq 0$, მაშინ Q ველში არსებობს ცალსახად განსაზღვრული ელემენტი, რომელიც უდრის $f(x)$-ის განაყოფს $g(x)$-ზე. თუ აღვნიშნავთ ამ განაყოფს, როგორც ჩვეულებრივ ველის შემთხვევაში, $\frac{f(x)}{g(x)}$-ით, ჩვენ შეგვიძლია განაყოფის განმარტების საფუძველზე დავწეროთ

$$f(x)=g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

ტოლობა, სადაც ნამრავლი უნდა გავიგოთ Q ველში გამრავლების აზრით. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ რაიმე $\frac{f(x)}{g(x)}$ და $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ განაყოფები უდრის Q ველის ერთსა და იმავე ელემენტს; ამის პირობაა წილადების ტოლობის ჩვეულებრივი პირობა:

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $f(x)\psi(x)=\varphi(x)g(x)$.

მართლაც, თუ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\alpha$, მაშინ, (1)-ის თანახმად,

$$f(x)=g(x)\,\alpha, \quad \varphi(x)=\psi(x)\,\alpha,$$

საიდანაც

$$f(x)\psi(x)=g(x)\psi(x)\,\alpha=g(x)\varphi(x).$$

პირუკუ, თუ $f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)=u(x)$ გამრავლების აზრით $P[x]$ რგოლში, მაშინ, თუ გადავალთ Q ველზე, მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ტოლობებს.

შემდეგ, ადვილი დასანახია, რომ Q-ს ნებისმიერი ელემენტების, რომელნიც არიან $P[x]$-ის მრავალწევრთა განაყოფები, ჯამი და ნამრავლი, შესაძლებელია ისევ წარმოვიდგინოთ ასეთივე განაყოფის სახით, ამასთან სამართლიანია წილადების შეკრებისა და გამრავლების ჩვეულებრივი წესები:

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}, \tag{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\psi(x)}. \tag{3}$$

მართლაც, თუ ყოველი ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $g(x)\psi(x)$ ნამრავლზე და გამოვიყენებთ (1)-ს, მივიღებთ $P[x]$ რგოლში სამართლიან ტოლობებს. (2) და (3) ტოლობების სამართლიანობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ Q ველში ნულის გამყოფების არარსებობის გამო მიღებული ტოლობებიდან ყოველის ორივე ნაწილი შეგვიძლია შევკვეცოთ ნულისაგან განსხვავებულ $g(x)\psi(x)$ ელემენტზე ტოლობის დაურღვევლად.

ეს წინასწარი შენიშვნები მიგვითითებენ იმ გზაზე, რომლითაც უნდა წავიდეთ $P(x)$ ველის აგებისას. ვთქვათ მოცემულია ნებისმიერი P ველი და მასზე მრავალწევრთა $P[x]$ რგოლი. ყოველ $f(x)$, $g(x)$ მრავალწევრთა დალაგებულ წყვილს, სადაც $g(x)\neq 0$, ჩვენ შევუსაბამებთ $\frac{f(x)}{g(x)}$ სიმბოლოს, რომელსაც $f(x)$ მრიცხველიანი და $g(x)$ მნიშვნელიანი **რაციონალური წილადი** ეწოდება. ხაზს ვუსვამთ, რომ ეს უბრალოდ სიმბოლოა, რომელიც მრავალწევრთა მოცემულ წყვილს შეესაბამება, რადგან თვით $P[x]$ რგოლში მრავალწევრთა გაყოფა საერთოდ არ სრულდება, ხოლო $P[x]$ რგოლი არავითარ ველში ჯერჯერობით არ შედის; $g(x)$ კიდევაც რომ ჰყოფდეს $f(x)$-ს ახალი $\frac{f(x)}{g(x)}$ სიმბოლო ჯერ უნდა გავარჩიოთ იმ მრავალწევრისაგან, რომელიც მიიღება განაყოფის სახით $f(x)$-ის გაყოფისას $g(x)$-ზე.

ვუწოდოთ $\frac{f(x)}{g(x)}$ და $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ რაციონალურ წილადებს **ტოლი**:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{4}$$

თუ $P[x]$ რგოლში ადგილი აქვს $f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x)$ ტოლობას. ცხადია, რომ ყოველი წილადი თავისი თავის ტოლია, აგრეთვე თუ ერთი წილადი მეორის ტოლია, მაშინ მეორეც უდრის პირველს. დავამტკიცოთ ამ ტოლობის ცნების **ტრანზიტულობა**. ვთქვათ მოცემულია (4) და

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{u(x)}{v(x)} \tag{5}$$

ტოლობები. $P[x]$ რგოლში მათი ტოლფასი

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x),\quad \varphi(x)v(x)=\psi(x)u(x)$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$f(x)\,v(x)\,\psi(x)=g(x)\,\varphi(x)\,v(x)=g(x)\,u(x)\,\psi(x)$$

და ამიტომ, ნულის არატოლ (როგორც ერთ-ერთი წილადის მრიცხველი) $\psi(x)$ მრავალწევრზე შეკვეცის შემდეგ, ვიღებთ:

$$f(x)\,v(x)=g(x)\,u(x),$$

საიდანაც, წილადების ტოლობის განმარტების თანახმად,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{v(x)},$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

გავაერთიანოთ ახლა ერთ კლასში ყველა წილადი, რომელიც რაიმე მოცემულს უდრის, და ამიტომ ტოლობის ტრანზიტულობის გამო ერთმანეთის ტოლია. თუ ერთ კლასში არის ერთი მაინც წილადი, რომელიც არ შედის სხვა კლასში, მაშინ, როგორც ტოლობის ტრანზიტულობიდან გამომდინარეობს, ამ ორ კლასს არა აქვს არც ერთი საერთო ელემენტი.

ამგვარად, $P(x)$ რგოლის მრავალწევრების დახმარებით ჩაწერილი ყველა რაციონალური წილადის ერთობლიობა იშლება ერთმანეთის ტოლი წილადების არაგადამკვეთ კლასებად. ჩვენ გვინდა ახლა ისე განვმარტოთ ალგებრული ოპერაციები ტოლი წილადების *კლასთა ამ სიმრავლეში*, რომ იგი ველი აღმოჩნდეს. ამისათვის განვსაზღვრავთ ოპერაციებს რაციონალურ წილადებზე და ყოველთვის შევამოწმებთ, რომ შესაკრების (ან მამრავლის) შეცვლა მისი ტოლი წილადით ცვლის ჯამს (ან ნამრავლს) აგრეთვე მისი ტოლი წილადით. ეს ნებას გვაძლევს ვილაპარაკოთ ტოლი წილადების კლასების ჯამსა და ნამრავლზე.

თავდაპირველად გავაკეთოთ ასეთი შენიშვნა, რომელსაც შემდგომში არაერთხელ გამოვიყენებთ: *რაციონალური წილადი ტოლ წილადად გადაიქცევა, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთი და იმავე მრავალწევრზე, ან შევკვეცთ ნებისმიერ საერთო მამრავლზე.* მართლაც,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\,h(x)}{g(x)\,h(x)},$$

რადგან $P[x]$ რგოლში

$$f(x)\,[g(x)\,h(x)]=g(x)\,[f(x)\,h(x)].$$

რაციონალურ წილადთა *შეკრებას* ჩვენ (2) ფორმულით განვსაზღვრავთ; რადგან $g(x)\neq 0$ და $\psi(x)\neq 0$-დან გამომდინარეობს, $g(x)\psi(x)\neq 0$, ამიტომ ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილი მართლაც რაციონალური წილადი იქნება. შემდგომ, თუ მოცემულია, რომ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)},\quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

ე. ი.

$$f(x)\,g_0(x)=g(x)\,f_0(x),\quad \varphi(x)\,\psi_0(x)=\psi(x)\,\varphi_0(x), \tag{6}$$

მაშინ, თუ (6) ტოლობებიდან პირველის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $\psi(x)\psi_0(x)$-ზე, ხოლო მეორის ორივე ნაწილს $g(x)g_0(x)$-ზე და შემდეგ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$[f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)]\,g_0(x)\psi_0(x)=[f_0(x)\psi_0(x)+g_0(x)\varphi_0(x)]\,g(x)\psi(x),$$

რაც

$$\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_0(x)\psi_0(x)+g_0(x)\varphi_0(x)}{g_0(x)\psi_0(x)}$$

ტოლობის ტოლფასია.

ამგვარად, თუ მოცემულია ერთმანეთის ტოლი წილადების ორი კლასი, მაშინ ერთი კლასის ნებისმიერი წილადის ჯამი მეორე კლასის ნებისმიერ წილადთან ერთმანეთის ტოლი იქნება, ე. ი. მოთავსდება რომელიღაც სავსებით გარკვეულ მესამე კლასში. ამ კლასს მოცემული ორი კლასის ჯამი ეწოდება.

ამ შეკრების *კომუტატურობა* უშუალოდ გამომდინარეობს (2)-დან, ხოლო *ასოციაციურობა* მტკიცდება შემდეგნაირად:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)\psi(x)v(x)+g(x)\varphi(x)v(x)+g(x)\psi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)v(x)+\psi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}\right].$$

წილადების ტოლობის განმარტებიდან დაუბრკოლებლივ გამომდინარეობს, რომ ყველა $\frac{0}{g(x)}$ სახის წილადი, ე. ი. ნულის ტოლი მრიცხველიანი წილადები, ერთმანეთის ტოლია და რომ ისინი შეადგენენ ტოლი წილადების სრულ კლასს. ამ კლასს ჩვენ ვუწოდებთ *ნულოვანს* და დავამტკიცებთ, რომ იგი ჩვენ შეკრებაში ნულის როლს ასრულებს. მართლაც, თუ მოცემულია ნებისმიერი $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ წილადი, მაშინ

$$\frac{0}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{0\cdot\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

ტოლობიდან

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g^2(x)},$$

რომლის მარჯვენა ნაწილი ნულოვან კლასს ეკუთვნის, გამომდინარეობს, რომ $\frac{-f(x)}{g(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასი $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასის *მოპირდაპირე* იქნება. აქედან, როგორც ვიცით, გამომდინარეობს ცალსახა გამოკლების შესაძლებლობა.

ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$f(x)\,v(x)\,\psi(x)=g(x)\,\varphi(x)\,v(x)=g(x)\,u(x)\,\psi(x)$$

და ამიტომ, ნულის არატოლ (როგორც ერთ-ერთი წილადის მრიცხველი) $\psi(x)$ მრავალწევრზე შეკვეცის შემდეგ, ვიღებთ:

$$f(x)\,v(x)=g(x)\,u(x),$$

საიდანაც, წილადების ტოლობის განმარტების თანახმად,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)}{v(x)},$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

გავაერთიანოთ ახლა ერთ კლასში ყველა წილადი, რომელიც რაიმე მოცემულს უდრის, და ამიტომ ტოლობის ტრანზიტულობის გამო ერთმანეთის ტოლია. თუ ერთ კლასში არის ერთი მაინც წილადი, რომელიც არ შედის სხვა კლასში, მაშინ, როგორც ტოლობის ტრანზიტულობიდან გამომდინარეობს, ამ ორ კლასს არა აქვს არც ერთი საერთო ელემენტი.

ამგვარად, $P(x)$ რგოლის მრავალწევრების დახმარებით ჩაწერილი ყველა რაციონალური წილადის ერთობლიობა იშლება ერთმანეთის ტოლი წილადების არაგადამკვეთ კლასებად. ჩვენ გვინდა ახლა ისე განვმარტოთ ალგებრული ოპერაციები ტოლი წილადების *კლასთა ამ სიმრავლეში*, რომ იგი ველი აღმოჩნდეს. ამისათვის განვსაზღვრავთ ოპერაციებს რაციონალურ წილადებზე და ყოველთვის შევამოწმებთ, რომ შესაკრების (ან მამრავლის) შეცვლა მისი ტოლი წილადით ცვლის ჯამს (ან ნამრავლს) აგრეთვე მისი ტოლი წილადით. ეს ნებას გვაძლევს ვილაპარაკოთ ტოლი წილადების კლასების ჯამსა და ნამრავლზე.

თავდაპირველად გავაკეთოთ ასეთი შენიშვნა, რომელსაც შემდგომში არაერთხელ გამოვიყენებთ: *რაციონალური წილადი ტოლ წილადად გადაიქცევა, თუ მის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთი და იმავე მრავალწევრზე, ან შევკვეცთ ნებისმიერ საერთო მამრავლზე.* მართლაც,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\,h(x)}{g(x)\,h(x)},$$

რადგან $P[x]$ რგოლში

$$f(x)\,[g(x)\,h(x)]=g(x)\,[f(x)\,h(x).$$

რაციონალურ წილადთა *შეკრებას* ჩვენ (2) ფორმულით განვსაზღვრავთ; რადგან $g(x)\neq 0$ და $\psi(x)\neq 0$-დან გამომდინარეობს, $g(x)\,\psi(x)\neq 0$, ამიტომ ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილი მართლაც რაციონალური წილადი იქნება. შემდგომ, თუ მოცემულია, რომ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_0(x)}{g_0(x)},\quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

ე. ი.

$$f(x)\,g_0(x)=g(x)\,f_0(x),\quad \varphi(x)\,\psi_0(x)=\psi(x)\,\varphi_0(x), \tag{6}$$

მაშინ, თუ (6) ტოლობებიდან პირველის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ $\psi(x)\psi_0(x)$-ზე, ხოლო მეორის ორივე ნაწილს $g(x)g_0(x)$-ზე და შემდეგ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$[f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)]\,g_0(x)\psi_0(x)=[f_0(x)\psi_0(x)+g_0(x)\varphi_0(x)]\,g(x)\psi(x),$$

რაც

$$\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{f_0(x)\psi_0(x)+g_0(x)\varphi_0(x)}{g_0(x)\psi_0(x)}$$

ტოლობის ტოლფასია.

ამგვარად, თუ მოცემულია ერთმანეთის ტოლი წილადების ორი კლასი, მაშინ ერთი კლასის ნებისმიერი წილადის ჯამი მეორე კლასის ნებისმიერ წილადთან ერთმანეთის ტოლი იქნება, ე. ი. მოთავსდება რომელიღაც სავსებით გარკვეულ მესამე კლასში. ამ კლასს მოცემული ორი კლასის ჯამი ეწოდება.

ამ შეკრების *კომუტატურობა* უშუალოდ გამომდინარეობს (2)-დან, ხოლო *ასოციაციურობა* მტკიცდება შემდეგნაირად:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)\psi(x)v(x)+g(x)\varphi(x)v(x)+g(x)\psi(x)u(x)}{g(x)\psi(x)v(x)}=$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{\varphi(x)v(x)+\psi(x)u(x)}{\psi(x)v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}\right].$$

წილადების ტოლობის განმარტებიდან დაუბრკოლებლივ გამომდინარეობს, რომ ყველა $\frac{0}{g(x)}$ სახის წილადი, ე. ი. ნულის ტოლი მრიცხველიანი წილადები, ერთმანეთის ტოლია და რომ ისინი შეადგენენ ტოლი წილადების სრულ კლასს. ამ კლასს ჩვენ ვუწოდებთ *ნულოვანს* და დავამტკიცებთ, რომ იგი ჩვენ შეკრებაში ნულის როლს ასრულებს. მართლაც, თუ მოცემულია ნებისმიერი $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ წილადი, მაშინ

$$\frac{0}{g(x)}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{0\cdot\psi(x)+g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{g(x)\varphi(x)}{g(x)\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ტოლობიდან

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)}=\frac{0}{g^2(x)},$$

რომლის მარჯვენა ნაწილი ნულოვან კლასს ეკუთვნის, გამომდინარეობს, რომ $\frac{-f(x)}{g(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასი $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასის *მოპირდაპირე* იქნება. აქედან, როგორც ვიცით, გამომდინარეობს ცალსახა გამოკლების შესაძლებლობა.

რაციონალურ წილადთა გამრავლებას განვმარტავთ (3) ფორმულით, ამასთან, $g(x)\psi(x) \neq 0$ გამო, ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილი მართლაც რაციონალური წილადი იქნება. შემდეგ, თუ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0(x)}{g_0(x)}, \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},$$

ე. ი.

$$f(x)\,g_0(x) = g(x)\,f_0(x), \quad \varphi(x)\,\psi_0(x) = \psi(x)\,\varphi_0(x),$$

მაშინ, თუ ამ უკანასკნელ ტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ:

$$f(x)\,g_0(x)\,\varphi(x)\,\psi_0(x) = g(x)\,f_0(x)\,\psi(x)\,\varphi_0(x),$$

რაც

$$\frac{f(x)\,\varphi(x)}{g(x)\,\psi(x)} = \frac{f_0(x)\,\varphi_0(x)}{g_0(x)\,\psi_0(x)}$$

ტოლობის ტოლფასია. ამგვარად კლასთა ჯამის ზემოთ მოცემული განმარტების ანალოგიურად შეიძლება ვილაპარაკოთ ერთმანეთის ტოლი წილადების კლასთა ნამრავლზე.

ამ გამრავლების კომუტატურობა და ასოციაციურობა უშუალოდ გამომდინარეობს (3)-დან, ხოლო დისტრიბუციის კანონის სამართლიანობა შემდეგნაირად მტკიცდება:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)\,\psi(x) + g(x)\,\varphi(x)}{g(x)\,\psi(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{[f(x)\,\psi(x) + g(x)\,\varphi(x)]\,u(x)}{g(x)\,\psi(x)\,v(x)} = \frac{f(x)\,\psi(x)\,u(x) + g(x)\,\varphi(x)\,u(x)}{g(x)\,\psi(x)\,v(x)} =$$

$$= \frac{f(x)\,\psi(x)\,u(x)\,v(x) + g(x)\,\varphi(x)\,u(x)\,v(x)}{g(x)\,\psi(x)\,v^2(x)} = \frac{f(x)\,u(x)}{g(x)\,v(x)} + \frac{\varphi(x)\,u(x)}{\psi(x)\,v(x)} =$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\frac{f(x)}{f(x)}$ სახის წილადები, ე. ი. წილადები, რომელთა მრიცხველიც მნიშვნელს უდრის, ყველა ერთმანეთის ტოლია და ცალკეულ კლასს შეადგენს. ამ კლასს ერთეულოვანი ეწოდება და ჩვენს გამრავლებაში ერთიანის როლს ასრულებს:

$$\frac{f(x)}{f(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)\,\varphi(x)}{f(x)\,\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

დაბოლოს, თუ $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადი არ ეკუთვნის ნულოვან კლასს, ე. ი. $f(x) \neq 0$, მაშინ არსებობს წილადი $\frac{g(x)}{f(x)}$. რადგან

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f(x)\,g(x)}{g(x)\,f(x)},$$

ხოლო ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ერთეულოვან კლასს ეკუთვნის, ამიტომ $\frac{g(x)}{f(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასი შებრუნებული იქნება $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასისა. აქედან გამომდინარეობს ცალსახა გაყოფის შესაძლებლობა.

ამგვარად, ერთმანეთის ტოლი P ველის კოეფიციენტებიანი რაციონალური წილადების კლასები ოპერაციების ჩვენი განმარტებისას შეადგენს კომუტატიურ ველს. სწორედ ეს ველი იქნება საძიებელი $P(x)$ ველი. თუმცა, ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ჩვენს მიერ აგებულ ველში $P[x]$ რგოლის იზომორფული ქვერგოლი შედის, და რომ ველის ყოველი ელემენტი წარმოგვიდგება ამ ქვერგოლის ორი ელემენტის განაყოფის სახით.

თუ ჩვენ $P[x]$ რგოლის ნებისმიერ $f(x)$ მრავალწევრს შევუსაბამებთ $\frac{f(x)}{1}$ წილადის ტოლი რაციონალური წილადების კლასს (წილადებს შორის, ცხადია, არიან ისეთი წილადებიც, რომელთა მნიშვნელი უდრის ერთეულს), მივიღებთ $P[x]$ რგოლის ურთიერთ ცალსახა ასახვას ჩვენ მიერ აგებული ველის შიგნით, მართლაც,

$$\frac{f(x)}{1} = \frac{\varphi(x)}{1}$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს $f(x) \cdot 1 = 1 \cdot \varphi(x)$, ე. ი. $f(x) = \varphi(x)$. ეს ასახვა იზომორფიზმიც კი იქნება, როგორც

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 1}{1^2} = \frac{f(x) + g(x)}{1},$$

$$\frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)\,g(x)}{1}$$

ტოლობები გვიჩვენებს.

ამგვარად, $\frac{f(x)}{1}$ სახის წილადების ტოლი წილადების კლასები შეადგენენ ჩვენ ველში $P[x]$ რგოლის იზომორფულ ქვერგოლს. ამიტომ $\frac{f(x)}{1}$ წილადი შეიძლება აღვნიშნოთ უბრალოდ $f(x)$-ით. დაბოლოს, რადგან, როცა $g(x) \neq 0$, $\frac{1}{g(x)}$ წილადის ტოლი წილადების კლასი $\frac{g(x)}{1}$ ტოლი წილადების კლასის შებრუნებულია, ამიტომ

$$\frac{f(x)}{1} \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვენი ველის ყველა ელემენტი შეიძლება ჩავთვალოთ (ამ ველში განსაზღვრული ოპერაციების აზრით) $P[x]$ რგოლის მრავალწევრების განაყოფად.

ჩვენ ავაგეთ ნებისმიერი P ველის მიმართ რაციონალური წილადების $P(x)$ ველი. ამავე მეთოდით, თუ ავიღებთ მრავალწევრთა რგოლის მაგივრად მთელ რიცხვთა რგოლს, შეიძლება რაციონალურ რიცხვთა ველის აგება. თუ გავაერთიანებთ ამ ორ შემთხვევას და გამოვიყენებთ იმავე მეთოდს, შეიძლება დამტკიცდეს თეორემა, რომ საზოგადოდ ყოველი კომუტატური რგოლი, რომელსაც არა აქვს ნულის გამყოფები, რაიმე ველის ქვერგოლია.

თავი მეთერთმეტე

რამდენიმე ცვლადის მრავალწევრები

§ 51. რამდენიმე ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი

ხშირად გვიხდება განხილვა მრავალწევრებისა, რომლებიც დამოკიდებულია არა ერთი, არამედ ორი, სამი და საერთოდ რამდენიმე ცვლადისაგან, ასე, წიგნის პირველ თავებში უკვე შევისწავლეთ წრფივი და კვადრატული ფორმები, რომელნიც წარმოადგენენ ასეთი მრავალწევრების მაგალითებს. საზოგადოდ n $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადის $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრი რაიმე P ველის მიმართ ეწოდება $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ (სადაც ყველა $k_i \geqslant 0$) სახის სასრულო რიცხვ წევრების ჯამს კოეფიციენტებით P ველიდან; ამასთან, გასაგებია ვთვლით, რომ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრი არ შეიცავს მსგავს წევრებს და რომ განიხილება მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტებიანი წევრები. n ცვლადის ორი მრავალწევრი, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ტოლებად (ან იგივურად ტოლებად) ითვლება, თუ ტოლია მათი კოეფიციენტები ერთნაირ წევრებთან.

თუ მოცემულია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრი P ველის მიმართ, მაშინ მისი ხარისხი x_i უცნობის მიმართ, $i=1, 2, \ldots, n$, ეწოდება იმ უდიდეს მაჩვენებელს, რომლითაც შედის x_i ამ მრავალწევრის წევრებში. შემთხვევით ეს ხარისხი შეიძლება 0-ის ტოლი იყოს, რაც ნიშნავს, რომ თუმცა f ითვლება n უცნობის $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ მრავალწევრად, მაგრამ x_i უცნობი სინამდვილეში მის ჩაწერაში არ შედის.

მეორე მხრივ, თუ ვუწოდებთ

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

წევრის ხარისხს $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ რიცხვს, ე. ი. უცნობებთან მაჩვენებლების ჯამს, მაშინ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის ხარისხი (ე. ი. ხარისხი უცნობთა ერთობლიობის მიმართ) მისი წევრების ხარისხებიდან უდიდესი იქნება. კერძოდ, ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრები იქნებიან, როგორც ერთი უცნობის შემთხვევაში, მხოლოდ P ველის ნულისაგან განსხვავებული ელემენტები. მეორე მხრივ, როგორც ერთი უცნობის მრავალწევრების შემთხვევაში, ნული იქნება ერთადერთი n ცვლადის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი გაურკვეველია. გასაგებია, რომ საზოგადოდ მრავალწევრს

შეიძლება ჰქონდეს უდიდესი ხარისხის რამდენიმე წევრი, და ამიტომ არ შეიძლება ვილაპარაკოთ მრავალწევრის უფროს (ხარისხის მიხედვით) წევრზე.

P ველის მიმართ n უცნობის მრავალწევრთათვის შემდეგნაირად განისაზღვრება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრთა *ჯამი* ეწოდება მრავალწევრს, რომლის კოეფიციენტები მიიღება f და g მრავალწევრების შესაბამისი კოეფიციენტების შეკრებით; თუ ამასთან რაიმე წევრი შედის მხოლოდ ერთში f, g მრავალწევრებიდან, მაშინ მასთან კოეფიციენტი მეორე მრავალწევრში ითვლება, ცხადია, ნულის ტოლად. ორი „ერთწევრის“ ნამრავლი შემდეგი ტოლობით განიმარტება:

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \cdot bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} = (ab)\, x_1^{k_1+l_1} x_2^{k_2+l_2} \ldots x_n^{k_n+l_n},$$

რის შემდეგაც $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრების ნამრავლი განიმარტება როგორც წევრ-წევრა გადამრავლებისა და შემდეგ მსგავსი წევრების დაყვანის შედეგი.

ოპერაციების ასეთი განმარტებისას P ველის მიმართ n უცნობის მრავალწევრთა ერთობლიობა კომუტატურ რგოლად გადაიქცევა, ამასთან ამ რგოლს არ გააჩნია ნულის გამყოფები. მართლაც, როცა $n=1$, ჩვენი განმარტებები ემთხვევა § 20-ში მოცემულ განმარტებას ერთი უცნობის მრავალწევრთა შემთხვევისათვის. ვთქვათ უკვე დამტკიცებულია, რომ P ველის კოეფიციენტებიანი $n-1$ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ უცნობების მრავალწევრები შეადგენენ რგოლს, რომელშიც არ არის ნულის გამყოფი. n $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობის ყოველი მრავალწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ მხოლოდ ერთადერთი სახით, როგორც x_n უცნობის მრავალწევრი კოეფიციენტებით, რომელნიც $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$-ის მრავალწევრებია; პირუკუ, ყოველი x_n-ის მრავალწევრი კოეფიციენტებით P ველის მიმართ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$-ის მრავალწევრთა რგოლიდან შეიძლება განვიხილოთ, რასაკვირველია, როგორც ამავე P ველის მიმართ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ უცნობების მთელი ერთობლიობის მრავალწევრი. დაუბრკოლებლად მოწმდება, რომ ჩვენს მიერ მიღებული ურთიერთ ცალსახა თანადობა n უცნობის მრავალწევრებსა და $n-1$ უცნობის მრავალწევრთა რგოლის მიმართ ერთი უცნობის მრავალწევრებს შორის იზომორფიზმია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციათა მიმართ. დასამტკიცებელი დებულება გამომდინარეობს იქიდან, რომ $n-1$ უცნობის მრავალწევრთა რგოლის მიმართ ერთი უცნობის მრავალწევრები თვითონ შეადგენენ რგოლს, ამასთან იგი, როგორც ერთი უცნობის მრავალწევრთა რგოლი, უნულგამყოფო რგოლის მიმართ თვითონ არ შეიცავს ნულის გამყოფებს (იხ. § 47).

მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ *P ველის მიმართ n უცნობის მრავალწევრთა რგოლის* არსებობა; ეს რგოლი აღინიშნება $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ სიმბოლოთი.

შემდეგი განხილვები ნებას გვაძლევს n უცნობის მრავალწევრთა რგოლს შევხედოთ ცოტა სხვანაირი თვალსაზრისით. ვთქვათ P ველი შედის რაიმე კომუტატურ L რგოლში ქვერგოლის სახით. ავიღოთ L-ში n ელემენტი

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ და L რგოლის მინიმალური L' ქვერგოლი, რომელიც შეიცავს ამ ელემენტებსა და მთელ P ველს, ე. ი. ქვერგოლი, რომელიც მიიღება P ველისადმი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ელემენტების მიერთების შედეგად. L' ქვერგოლი შესდგება L რგოლის იმ ელემენტებისაგან, რომელნიც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ელემენტებითა და P ველის ელემენტებით გამოისახებიან შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების დახმარებით. ადვილი დასანახია, რომ ესენი იქნებიან L რგოლის ზუსტად ის ელემენტები, რომელნიც შეიძლება ჩაიწეროს (ოპერაციების დახმარებით, რომელთაც L-ში აქვთ ადგილი) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ მრავალწევრების სახით კოეფიციენტებით P-დან, ამასთან ეს ელემენტები როგორც L რგოლის ელემენტები ერთმანეთთან შეიკრიბება და გამრავლდება n უცნობის მრავალწევრთა შეკრებისა და გამრავლების სწორედ ზემოთ მითითებული წესით.

რასაკვირველია, საზოგადოდ, L' ქვერგოლის მოცემულ β ელემენტს ბევრი ჩაწერა აქვს $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ის მრავალწევრის სახით კოეფიციენტებით P ველიდან. თუ L'-ის ყოველი β-სათვის ასეთი ჩაწერა ცალსახაა, ე. ი. თუ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ის სხვადასხვა მრავალწევრი L' რგოლის სხვადასხვა ელემენტია (მაშასადამე, L რგოლისაც), მაშინ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ სისტემას P ველის მიმართ ალგებრულად დამოუკიდებელი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ალგებრულად დამოკიდებული[1]. აქედან შეიძლება შემდეგი დასკვნის გამოტანა:

თუ P ველი კომუტატური L რგოლის ქვერგოლია და თუ L-ის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ელემენტთა სისტემა P-ს მიმართ ალგებრულად დამოუკიდებელია, მაშინ P ველისადმი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ელემენტების მიერთებით შექმნილი L რგოლის L' ქვერგოლი მრავალწევრთა $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის იზომორფულია.

n უცნობის მრავალწევრთა $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის სხვა თვისებებიდან მივუთითოთ შემდეგზე: ეს რგოლი P ველის მიმართ n უცნობის რაციონალურ წილადთა $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ველში შეიძლება ჩაიდგეს. ამ ველის ყოველი ელემენტი შეიძლება $\frac{f}{g}$ სახით ჩაიწეროს, სადაც f და g $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის მრავალწევრებია, ამასთან $\frac{f}{g} = \frac{\varphi}{\psi}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $f\psi = g\varphi$. ამ რაციონალურ წილადთა შეკრება და გამრავლება ხდება წესით, რომელიც, როგორც § 45-შია მითითებული, სამართლიანია ყოველი ველის განაყოფებისათვის. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ველის არსებობის დამტკიცება ტარდება ისე, როგორც ეს გაკეთდა § 50-ში $n=1$ შემთხვევისათვის.

---

[1] $n=1$ შემთხვევისათვის შესაბამისი ცნებები უკვე შემოვიტანეთ § 47-ში; α ელემენტს, რომელიც P ველის მიმართ ალგებრულად დამოუკიდებელია ახლახან მოცემული განსაზღვრებით, ვუწოდეთ ტრანსცენდენტული P-ს მიმართ, წინააღმდეგ შემთხვევაში — ალგებრული P-ს მიმართ.

რამდენიმე უცნობის მრავალწევრებისათვის ავაგოთ გაყოფადობის თეორია, რომელიც ერთი უცნობის მრავალწევრთა გაყოფადობის იმ თეორიას განაზოგადებს, რომელიც ჩვენ შევისწავლეთ მე-5 და მე-10 თავში. მაგრამ რადგან რამდენიმე უცნობის მრავალწევრთა რგოლის დეტალური შესწავლა არ შედის ჩვენს ამოცანებში, ამიტომ შემოვიფარგლებით მხოლოდ მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის საკითხით.

თავდაპირველად შემოვიტანოთ შემდეგი ცნება: თუ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის ყველა წევრს ერთი და იგივე s ხარისხი აქვს, მაშინ ასეთ მრავალწევრს *ერთგვაროვანი მრავალწევრი* ეწოდება, ან, მოკლედ, s ხარისხის *ფორმა*; ჩვენთვის უკვე ცნობილია *წრფივი* და *კვადრატული ფორმები*, შეიძლება განვიხილოთ, შემდგომ, კუბური ფორმები, რომლის ყველა წევრის ხარისხია უცნობთა ერთობლიობის მიმართ 3, და ა. შ. *n უცნობის ყოველი მრავალწევრი ცალსახად წარმოიდგინება ამ უცნობთა რამდენიმე ფორმის ჯამის სახით, ამასთან ყველა განსხვავებული ხარისხისა.* საკმარისია გავაერთიანოთ ის წევრები, რომელთაც ერთი და იგივე ხარისხი აქვთ, რომ მივიღოთ საძიებელი წარმოდგენა. ასე, მეოთხე ხარისხის $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2^2 - 7x_1^2x_3^2 + x_2 - 5x_1x_2x_3 + x_1^4 - 2x_3 - 6 + x_3^3$ მრავალწევრი იქნება მეოთხე ხარისხის $x_1^4 - 7x_1^2x_3^2$ ფორმის, კუბური $3x_1x_2^2 - 5x_1x_2x_3 + x_3^3$ ფორმის, წრფივი $x_2 - 2x_3$ ფორმისა და თავისუფალი წევრის (ნულოვანი ხარისხის ფორმის) -6 ჯამი.

დავამტკიცოთ შემდეგი *თეორემა*:

უცნობის ნულისაგან განსხვავებული ორი მრავალწევრის ნამრავლის ხარისხი უდრის ამ მრავალწევრების ხარისხთა ჯამს.

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს s ხარისხის $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და t ხარისხის $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ფორმები*. φ ფორმის ნებისმიერი წევრის ψ ფორმის ნებისმიერ წევრზე ნამრავლის ხარისხი, ცხადია, $s+t$ იქნება და ამიტომ $\varphi\psi$ ნამრავლი $s+t$ ხარისხის ფორმა იქნება, რადგან მსგავს წევრთა დაყვანას არ შეუძლია ამ ნამრავლის ყველა კოეფიციენტი ნულად აქციოს $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ რგოლში ნულის გამყოფის არყოფნის გამო.

თუ ახლა მოცემულია ნებისმიერი $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრები შესაბამისად s და t ხარისხისა, მაშინ, წარმოვადგენთ რა ყოველ მათგანს განსხვავებული ხარისხების ფორმათა ჯამის სახით, მივიღებთ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots,$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots,$$

სადაც φ და ψ არის შესაბამისად s და t ხარისხების ფორმები, ხოლო მრავალწერტილი ცვლის ნაკლები ხარისხის ფორმებს. მაშინ

$$fg = \varphi\psi + \ldots;$$

$\varphi\psi$ ფორმას დამტკიცებულის თანახმად $s+t$ ხარისხი აქვს, ხოლო რადგან მრავალწერტილით შეცვლილი ყველა წერტილის ხარისხი ნაკლებია, ამიტომ fg ნამრავლის ხარისხი $(s+t)$-ს ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

φ მრავალწევრს ეწოდება f მრავალწევრის *გამყოფი*, ხოლო f-ს — *გაყოფადი* φ-ზე, თუ $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლში არსებობს ისეთი ψ მრავალწევრი, რომ $f = \varphi\psi$. ადვილი სანახავია, რომ გაყოფადობის I—IX თვისებები § 21-დან თავს იჩენს ახლა განხილულ ზოგად შემთხვევაშიც. k ხარისხის f, $k \geqslant 1$, მრავალწევრს ეწოდება *დაყვანადი* P ველის მიმართ, თუ იგი იშლება $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის მრავალწევრთა ნამრავლად, რომელთა ხარისხებიც ნაკლებია k-ზე, და *დაუყვანადი* — წინააღმდეგ შემთხვევაში.

$P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის ყოველი მრავალწევრი, რომელსაც ნულისაგან განსხვავებული ხარისხი აქვს, იშლება დაუყვანად მამრავლ-

თა ნამრავლად. ეს დაშლა ცალსახაა ნულოვანი ხარისხის მამრავთამდე სიზუსტით.

ეს თეორემა ანზოგადოებს § 48-ის შესაბამის შედეგებს, რომლებიც შეეხება ერთი ცვლადის მრავალწევრს. მისი პირველი წინადადება მტკიცდება მითითებული პარაგრაფის მსჯელობის სიტყვა-სიტყვით გამეორებით. მეორე წინადადების დამტკიცება წარმოადგენს [illegible] საგრძნობ სიძნელეს. მის ჩატარებამდე შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემის მეორე წინადადებიდან ასეთი შედეგი გამომდინარეობს: თუ $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ რგოლის ორი f და g მრავალწევრის ნამრავლი იყოფა დაუყვანად p მრავალწევრზე, მაშინ ერთი მაინც ამ მრავალწევრებიდან იყოფა p-ზე. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით fg ნამრავლის ორ დაშლას დაუყვანად მამრავლებად, რომელთაგანაც ერთი არ შეიცავს p-ს, ხოლო მეორე შეიცავს.

ვთქვათ თეორემა უკვე დამტკიცებულია n უცნობის მრავალწევრებისათვის და ჩვენ გვინდა დავამტკიცოთ იგი $n+1$ უცნობის $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ მრავალწევრებისათვის. ჩავწეროთ ეს მრავალწევრი $\varphi(x)$ სახით; მაშასადამე მისი კოეფიციენტები იქნება $x_1, x_2, \dots, x_n$-ის მრავალწევრები. ამ კოეფიციენტებისათვის თეორემა უკვე დამტკიცებულია, ე. ი. ყოველი მათგანი ცალსახად იშლება დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად. ვუწოდოთ $\varphi(x)$ მრავალწევრს პრიმიტიული (უფრო ზუსტად, პრიმიტიული $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ რგოლის მიმართ), თუ მისი კოეფიციენტები არ შეიცავს არც ერთ საერთო დაუყვანად მამრავლს, ე. ი. ერთობლივად თანამარტივნი არიან, და დავამტკიცოთ გაუსის შემდეგი ლემა:

ორი პრიმიტიული მრავალწევრის ნამრავლი თვითონ პრიმიტიული მრავალწევრია.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია პრიმიტიული

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_ix^{k-i}+\dots+a_k,$$
$$g(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\dots+b_jx^{l-j}+\dots+b_l$$

მრავალწევრები კოეფიციენტებით $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ რგოლიდან და ვთქვათ

$$f(x)\,g(x)=c_0x^{k+l}+c_1x^{k+l-1}+\dots+c_{i+j}x^{k+l-(i+j)}+\dots+c_{k+l}.$$

თუ ეს ნამრავლი არ არის პრიმიტიული, მაშინ $c_0, c_1, \dots, c_{k+l}$ კოეფიციენტებს ექნებათ საერთო დაუყვანადი მამრავლი $p=p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. რადგან პრიმიტიული $f(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ვერ გაიყოფა p-ზე, ამიტომ a_i კოეფიციენტი იყოს პირველი, რომელიც არ იყოფა p-ზე; ანალოგიურად b_j-ით ავღნიშნოთ $g(x)$ მრავალწევრის პირველი კოეფიციენტი, რომელიც p-ზე არ იყოფა. თუ $f(x)$-სა და $g(x)$-ს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ და შევაგროვებთ წევრებს, რომელნიც $x^{k+l-(i+j)}$-ს შეიცავენ, მივიღებთ

$$c_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\dots+a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\dots$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი იყოფა დაუყვანად p მრავალწევრზე. მასზე იყოფა აგრეთვე მარჯვენა ნაწილის ყველა შესაკრები, გარდა პირველისა; მართლაც i და j-ს არჩევანზე დამოკიდებული პირობების გამო ყველა კოეფიციენტი $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots$, აგრეთვე $b_{j-1}, b_{j-2}, \dots$ იყოფა p-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ $a_i b_j$ ნამრავლიც უნდა იყოფოდეს p-ზე და ამიტომ, როგორც ზემოთაა აღნიშნული, p-ზე უნდა იყოფოდეს a_ib_j მრავალწევრებიდან ერთი მაინც, რასაც ადგილი არა აქვს. ამით მთავრდება ლემის დამტკიცება იმის დაშვებით, რომ სამართლიანია ძირითადი თეორემა n უცნობის მრავალწევრთათვის.

როგორც ვიცით, $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ რგოლი შედის რაციონალურ წილადთა $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ველში, რომელსაც აღვნიშნავთ Q-თი:

$$Q=P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

განვიხილოთ მრავალწევრთა $Q[x]$ რგოლი. თუ $\varphi(x)$ მრავალწევრი ამ რგოლს ეკუთვნის, მაშინ ყოველი მისი კოეფიციენტი წარმოიდგინება $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის მრავალწევრთა განაყოფის სახით. თუ გამოვიტანთ ფრჩხილებს გარეთ ამ განაყოფთა საერთო მნიშვნელს, ხოლო შემდეგ მრიცხველების საერთო მამრავლებს, $\varphi(x)$ შეიძლება

$$\varphi(x)=\frac{a}{b} f(x)$$

სახით წარმოვიდგინოთ. აქ a და b არიან მრავალწევრები $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლიდან, ხოლო $f(x)$ — x-ის მრავალწევრი კოეფიციენტებით $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-დან, ამასთან პრიმიტიული მრავალწევრიც კი, რადგან მის კოეფიციენტებს არა აქვთ საერთო მამრავლები.

ამ გზით ყოველ $\varphi(x)$ მრავალწევრს $Q[x]$ რგოლიდან თანადობაში აქვს მოყვანილი პრიმიტიული $f(x)$ მრავალწევრი. მოცემული $\varphi(x)$-ისათვის $f(x)$ მრავალწევრი განსაზღვრულია ცალსახად P ველის ნულისაგან განსხვავებული მამრავლის სიზუსტით. მართლაც, ვთქვათ

$$\varphi(x)=\frac{a}{b} f(x)=\frac{c}{d} g(x),$$

სადაც $g(x)$ ისევ პრიმიტიული მრავალწევრია. მაშინ

$$adf(x)=bcg(x).$$

ამგვარად, ad და bc მიღებულია $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის მიმართ ერთი და იგივე მრავალწევრის კოეფიციენტების ყველა საერთო მამრავლის გამოტანით. აქედან გამომდინარეობს, ამ რგოლში (ინდუქციის დაშვებით) ცალსახად დაშლის თეორემის სამართლიანობის გამო, რომ ad და bc შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნულოვანი ხარისხის მამრავლით. მაშასადამე ასეთივე მამრავლით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან პრიმიტიული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები.

$Q[x]$ რგოლის ორი მრავალწევრის ნამრავლს შეესაბამება მათი შესაბამისი პრიმიტიული მრავალწევრების ნამრავლი. მართლაც, თუ

$$\varphi(x)=\frac{a}{b} f(x),\ \psi(x)=\frac{a}{d} g(x),$$

სადაც $f(x)$ და $g(x)$ პრიმიტიული მრავალწევრებია, მაშინ

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{ac}{bd} f(x) g(x).$$

მაგრამ, როგორც ზემოთაა დამტკიცებული, $f(x)g(x)$ ნამრავლი პრიმიტიული მრავალწევრია.

შემდგომ აღვნიშნოთ, რომ თუ $Q[x]$ რგოლის $\varphi(x)$ მრავალწევრი დაუყვანადია Q ველის მიმართ, მაშინ მისი შესაბამისი პრიმიტიული $f(x)$ მრავალწევრი, განხილული როგორც $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მრავალწევრი, აგრეთვე დაუყვანადია და პირუკუ. მართლაც, თუ f მრავალწევრი დაყვანადია, $f=f_1 f_2$, მაშინ ორივე მამრავლი უნდა შეიცავდეს x უცნობს, რადგან სხვაგვარად f მრავალწევრი არ იქნებოდა პრიმიტიული. აქედან გამომდინარეობს $\varphi(x)$ მრავალწევრის დაყვანადობა Q ველის მიმართ;

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x)=\left(\frac{a}{b}f_1\right)f_2.$$

პირუკუ, თუ $\varphi(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია Q-ს მიმართ, $\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, მაშინ პრიმიტიული $f_1(x)$ და $f_2(x)$ მრავალწევრები, რომელნიც შეესაბამებიან $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ მრავალწევრებს, ორივე შეიცავს x-ს, მაგრამ მათი ნამრავლი, როგორც ზემოთაა დამტკიცებული, უდრის $f(x)$-ს (სიზუსტით მამრავლამდე P ველიდან).

ავიღოთ ახლა პრიმიტიული f მრავალწევრი და დავშალოთ იგი დაუყვანად მამრავლებად, $f=f_1 f_2\dots f_k$. ყველა ეს მამრავლი არა თუ შეიცავს x უცნობს, არამედ პრიმიტიული მრავალწევრიც კი იქნება, რადგან წინააღმდეგ f მრავალწევრი არ იქნებოდა პრიმიტიული. პრიმიტიული f მრავალწევრის ეს დაშლა ცალსახა იქნება P ველიდან მამრავლამდე სიზუსტით. მართლაც, წინა ლემის თანახმად, ამ დაშლას შეიძლება შევხედოთ როგორც $f(x)$-ის დაუყვანად მამრავლებად დაშლას Q ველის მიმართ, მაგრამ რაიმე ველზე ერთი უცნობის მრავალწევრებისათვის დაშლის ცალსახობა ჩვენთვის უკვე ცნობილია; ამ ცალსახობას ადგილი აქვს სიზუსტით მამრავლებამდე Q ველიდან; მაგრამ ჩვენ შემთხვევაში, ყველა f_i მამრავლის პრიმიტიულობის გამო, იგი იქნება სიზუსტით მამრავლებამდე P-დან.

ამ ლემების შემდეგ, რომელთა სამართლიანობაც ინდუქციის დაშვებიდან გამომდინარეობს, ჩვენი ძირითადი თეორემის დამტკიცება ტარდება ყოველგვარი დაბრკოლების გარეშე. მართლაც, ყოველი დაუყვანადი მრავალწევრი $P[x, x_1, x_2,\dots, x_n]$ რგოლიდან იქნება ან დაუყვანადი მრავალწევრი $P[x_1, x_2,\dots, x_n]$ რგოლიდან, ანდა დაუყვანადი პრიმიტიული მრავალწევრი. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ მოცემული გვაქვს $\varphi(x, x_1, x_2,\dots, x_n)$ მრავალწევრის რაიმე დაშლა დაუყვანად მამრავლებად, მაშინ თუ გავაერთიანებთ მამრავლებს, φ-ს წარმოვადგენთ

$$\varphi(x, x_1, x_2,\dots, x_n)=a(x_1, x_2,\dots, x_n)f(x, x_1, x_2,\dots, x_n)$$

სახით, სადაც a დამოუკიდებელია x-ისაგან, ხოლო f პრიმიტიული მრავალწევრია. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ ეს დაშლა φ-სათვის ცალსახაა სიზუსტით მამრავლებამდე P-დან. მეორე მხრივ, რადგან n უცნობის a მრავალწევრისათვის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის ცალსახობას ადგილი აქვს ინდუქციის დაშვებით, ხოლო პრიმიტიული f მრავალწევრისათვის დამტკიცებულია წინა ლემაში, ამიტომ ჩვენი თეორემა $n+1$ უცნობის შემთხვევისათვისაც სავსებით დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული ლემებიდან გამომდინარეობს კიდევ ერთი საინტერესო შედეგი: თუ $\varphi(x)$ მრავალწევრი კოეფიციენტებით $P[x_1, x_2,\dots, x_n]$-დან დაუყვანადია $Q=P(x_1, x_2,\dots, x_n)$ ველის მიმართ, მაშინ იგი შეიძლება დავშალოთ მამრავლებად, რომელნიც დამოკიდებულია x-ზე და კოეფიციენტებად $P[x_1, x_2,\dots, x_n]$ რგოლის მრავალწევრები აქვს. მართლაც, თუ $\varphi(x)$ მრავალწევრს შეესაბამება პრიმიტიული $f(x)$ მრავალწევრი, ე. ი. $\varphi(x)=af(x)$, მაშინ, როგორც ვიცით, $\varphi(x)$-ია დაშლადობიდან გამომდინარეობს $f(x)$-ის დაშლადობა, მაგრამ უკანასკნელს მივყევართ $\varphi(x)$-ის დაშლადობამდე $P[x_1, x_2,\dots, x_n]$ რგოლის მიმართ.

ერთი უცნობის მრავალწევრების შემთხვევისაგან განსხვავებით, რომელთა დაშლა წრფივ მამრავლებად, როგორც ვიცით § 49-დან, შეიძლება განსახილველი ველის შესაბამისად შერჩეული გაფართოების მიმართ, ნებისმიერი ველის მიმართ არსებობს რამდენიმე (ორი ან მეტი) უცნობის ნებისმიერი ხარისხის აბსოლუტურ

რად დაუყვანადი მრავალწევრები, ე. ი. მრავალწევრები, რომელნიც დაუყვანადი რჩებიან ამ ველის ნებისმიერი გაფართოებისას.

ასეთია, მაგალითად,

$$f(x, y) = \varphi(x) + y$$

მრავალწევრი, სადაც $\varphi(x)$ ერთი უცნობის ნებისმიერი მრავალწევრია P ველის მიმართ. მართლაც, P ველის რაიმე $\overline{P}$ გაფართოებაში რომ არსებობდეს

$$f(x, y) = g(x, y)\, h(x, y)$$

დაშლა, მაშინ, თუ g-სა და h-ს ჩავწერთ y-ის ხარისხების მიხედვით, მივიღებდით, რომ, მაგალითად,

$$g(x, y) = a_0(x)\, y + a_1(x), \quad h(x, y) = b_0(x),$$

ე. ი. h არაა დამოკიდებული y-ისაგან, ხოლო შემდეგ, $a_0(x)\, b_0(x) = 1$-ის გამო, რომ $b_0(x)$-ს აქვს 0 ხარისხი, ე. ი. h არაა დამოკიდებული x-ისაგანაც.

მრავალწევრის წევრების ლექსიკოგრაფიული დალაგება. ერთი უცნობის მრავალწევრებისათვის ჩვენ გვაქვს წევრების დალაგების ორი ბუნებრივი წესი—უცნობის ხარისხების კლებადობითა და მატებით. რამდენიმე უცნობის მრავალწევრების შემთხვევაში ასეთი წესები უკვე არ არსებობს: თუ მოცემულია სამი უცნობის მეხუთე ხარისხის

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1^4 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3^2$$

მრავალწევრი, მაშინ მისი ჩაწერა შეიძლება

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^2$$

სახითაც და არ არის საფუძველი ერთი ამ ჩაწერათაგანი ვარჩიოთ მეორეს. მაგრამ არსებობს რამდენიმე უცნობის მრავალწევრის წევრების სრულიად გარკვეული დალაგების წესი, თუმცა იგი დამოკიდებულია უცნობთა ნუმერაციის არჩევანისაგან; ერთი უცნობის მრავალწევრთათვის მას მივყავართ უცნობის კლებადი ხარისხებით დალაგებამდე. ეს წესი, რომელსაც ლექსიკოგრაფიული ეწოდება, ნაკარნახევია ლექსიკონებში სიტყვების დალაგების ჩვეულებრივი წესით: თუ ასოებს ანბანის მიხედვით დავალაგებთ, ორი მოცემული სიტყვის ურთიერთ მდებარეობას განსაზღვრავს მათი პირველი ასოები, თუ ეს ასოები ერთნაირია, მაშინ მეორე ასოები და ა. შ.

ვთქვათ მოცემულია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრი $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლიდან და მასში ორი განსხვავებული წევრი:

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \tag{1}$$

$$x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}, \tag{2}$$

რომელთა კოეფიციენტებიც რაიმე ნულისაგან განსხვავებული ელემენტებია P-დან. რადგან (1) და (2) წევრები განსხვავებულია, ამიტომ უცნობთა მაჩვენებლების სხვაობიდან

$$k_i - l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. (1) წევრი ჩაითვლება (2) წევრზე მაღლა ((2) წევრი კი—(1) წევრზე დაბლა), თუ ამ სხვაობებიდან პირველი

ნულისაგან განსხვავებული დიდებითაა, ქ. ი. თუ არსებობს ისეთი i, $1 \leqslant i \leqslant$
$< n$, რომ

$$k_1 = l_1, \; k_2 = l_2, \; \ldots, \; k_{i-1} = l_{i-1}, \text{ მაგრამ } k_i > l_i.$$

სხვაგვარად, (1) წევრი იქნება (2) წევრზე მაღალი, თუ მაჩვენებელი x_1-თან (1)-ში მეტია, ვიდრე (2)-ში, ანუ, თუ ეს მაჩვენებელი ტოლია, მაგრამ მაჩვე-ნებელი x_2-თან (1)-ში მეტია, ვიდრე (2)-ში და ა. შ. ცხადია, იმისაგან, რომ (1) წევრი (2) წევრზე მაღალია, არ გამომდინარეობს უცნობთა ერთობლიო-ბის მიმართ პირველის ხარისხის მეტობა მეორის ხარისხზე:

$$x_1^3 x_2 x_3, \quad x_1 x_2^5 x_3^2$$

წევრებიდან პირველი უფრო მაღალია, თუმცა უფრო ნაკლები ხარისხი აქვს.

ცხადია, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის ნებისმიერი ორი განსხვავებუ-ლი წევრისაგან ერთი მეორეზე მაღალი იქნება. ადვილი შესამოწმებელია აგ-რეთვე, რომ, თუ (1) წევრი (2) წევრზე მაღალია, ხოლო (2) წევრი, თავის მხრივ,

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \tag{3}$$

წევრზე მაღალია, ე. ი. არსებობს ისეთი j, $1 \leqslant j \leqslant n$, რომ

$$l_1 = m_1, \; l_2 = m_2, \; \ldots, \; l_{j-1} = m_{j-1}, \text{ მაგრამ } l_j > m_j$$

მაშინ, იმისდა მიუხედავად i მეტი, ტოლი თუ ნაკლები იქნება j-ზე, (1) წევ-რი (3) წევრზე მაღალი იქნება. ამგვარად, თუ ჯერ იმ წევრს დავაყენებთ, რომელიც უფრო მაღალია, ჩვენ მივიღებთ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის წევრების სავსებით გარკვეულ დალაგებას, რომელსაც ეწოდება ლექსიკო-გრაფიული.

ასე,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + 3x_1^2 x_2^3 x_3 - x_1^2 x_2^3 x_4^2 +$$
$$+ 5x_1 x_3 x_4^2 + 2x_2 + x_2^3 x_4 - 4$$

მრავალწევრი დალაგებულია ლექსიკოგრაფიულად.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის ლექსიკოგრაფიული ჩაწერისას ერთი მი-სი წევრთაგანი დადგება პირველ ადგილზე, ე. ი. ყველა სხვა წევრზე უფრო მაღალი იქნება. ამ წევრს ეწოდება მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს უ მ ა ღ ლ ე ს ი წ ე ვ რ ი; წინა მაგალითში უმაღლესი წევრი იქნება x_1^4 წევრი. უმაღლეს წევრის შესახებ ჩვენ დავამტკიცებთ ლ ე მ ა ს, რომელსაც გამოვიყენებთ შემდგომი პა-რაგრაფის ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას:

n უ ც ნ ო ბ ი ს ო რ ი მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს უ მ ა ღ ლ ე ს ი წ ე ვ რ ი უ დ რ ი ს თ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ლ თ ა უ მ ა ღ ლ ე ს ი წ ე ვ რ ე ბ ი ს ნ ა მ- რ ა ვ ლ ს.

მართლაც, ვთქვათ მრავლდება $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრები. თუ

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \tag{}$$

იქნება $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, ხოლო

$$a' x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n} \tag{}$$

ამ მრავალწევრის ნებისმიერი წევრი, მაშინ იარსებებს ისეთი i, $1 \leqslant i \leqslant n$, რომ

$$k_1 = s_1, \dots, k_{i-1} = s_{i-1}, \; k_i > s_i.$$

მეორე მხრივ, თუ

$$b x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}, \tag{6}$$

$$b' x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \tag{7}$$

იქნებიან $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მრავალწევრის უმაღლესი და ნებისმიერი წევრები, მაშინ იარსებებს ისეთი j, $1 \leqslant j \leqslant n$, რომ

$$l_1 = t_1, \dots, l_{j-1} = t_{j-1}, \; l_j > t_j.$$

თუ გადავამრავლებთ (4) და (6) წევრებს, აგრეთვე (5) და (7) წევრებს, მივიღებთ:

$$ab x_1^{k_1+l_1} x_2^{k_2+l_2} \dots x_n^{k_n+l_n}, \tag{8}$$

$$a'b' x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \dots x_n^{s_n+t_n}, \tag{9}$$

მაგრამ ადვილი დასანახია, რომ (8) წევრი (9) წევრზე მაღალია; თუ, მაგალითად, $i \leqslant j$, მაშინ

$$k_1 + l_1 = s_1 + t_1, \dots, k_{i-1} + l_{i-1} = s_{i-1} + t_{i-1}, \text{ მაგრამ } k_i + l_i > s_i + t_i,$$

რადგან $k_i > s_i$, $l_i \geqslant t_i$. ასევე მოწმდება, რომ (8) წევრი (4) და (7) წევრების ნამრავლზე მაღალი იქნება, აგრეთვე (5) და (6) წევრების ნამრავლზე მაღალიც. ამგვარად, (8) წევრი — f და g მრავალწევრების უმაღლეს წევრთა ნამრავლი — იქნება ყველა სხვა წევრზე მაღალი, რომელნიც მიიღებიან f და g მრავალწევრების წევრ-წევრად გადამრავლების შედეგად და ამიტომ ეს წევრი არ ისპობა მსგავსი წევრების დაყვანისას, ე. ი. რჩება უმაღლეს წევრად fg ნამრავლში.

§ 52. სიმეტრიული მრავალწევრები

რამდენიმე უცნობის მრავალწევრთა შორის გამოიყოფიან ისეთები, რომლებიც არ იცვლებიან უცნობთა არავითარი გადანაცვლებისას. მაშასადამე, ასეთ მრავალწევრებში უცნობები შედიან სრულიად სიმეტრიულად, ამიტომ ეს მრავალწევრები იწოდებიან **სიმეტრიულ მრავალწევრებად** (ან **სიმეტრიულ ფუნქციებად**). უმარტივესი მაგალითები იქნება: ყველა უცნობის ჯამი $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, უცნობთა კვადრატების ჯამი $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, უცნობთა ნამრავლი $x_1 x_2 \dots x_n$ და ა. შ. იმის გამო, რომ n სიმბოლოს ყოველგვარი ჩასმა წარმოიდგინება ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით (იხ. § 3), რაიმე მრავალწევრის სიმეტრიულობის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ იგი არ იცვლება ორი უცნობის არც ერთი ტრანსპოზიციის დროს.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ n უცნობის სიმეტრიულ მრავალწევრებს კოეფიციენტებით რაიმე P ველიდან. ადვილი დასანახია, რომ ორი სიმეტრიული მრავალწევრების **ჯამი**, **სხვაობა** და **ნამრავლი** თვითონ სი-

მეტრიული იქნება, ე. ი. სიმეტრიული მრავალწევრები შეადგენენ ქვერგოლს P ველის მიმართ n უცნობის ყველა მრავალწევრის $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ რგოლში, რომელსაც ეწოდება P *ველის მიმართ* n *უცნობის სიმეტრიულ მრავალწევრთა რგოლი*. ამ რგოლს ეკუთვნის P-ს ყველა ელემენტი (ე. ი. ნულოვანი ხარისხის ყველა მრავალწევრი და აგრეთვე ნულიც), რადგან ისინი, ცხადია, არ იცვლებიან უცნობთა არავითარი ჩასმის დროს. ყოველი სხვა სიმეტრიული მრავალწევრი აუცილებლად შეიცავს ყველა n უცნობს და მათ მიმართ ერთი და იგივე ხარისხიც კი აქვს: თუ სიმეტრიულ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მრავალწევრს გააჩნია წევრი, რომელშიც x_i უცნობი შედის k ხარისხით, მაშინ მას გააჩნია წევრიც, რომელიც მიიღება მისგან x_i და x_j უცნობების ტრანსპოზიციით, ე. ი. x_j უცნობის შემცველი იმავე k ხარისხში.

n უცნობის შემდეგი n სიმეტრიული მრავალწევრები იწოდება *ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებად*:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ \sigma_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{n-1} &= x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n, \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ეს მრავალწევრები, რომელთა სიმეტრიულობაც ცხადია, სიმეტრიულ მრავალწევრთა თეორიაში დიდ როლს ასრულებენ. ისინი ნაკარნახევია ვიეტას ფორმულებით (იხ. § 24) და ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ *უფროს კოეფიციენტად ერთიანის მქონე ერთი უცნობის მრავალწევრის კოეფიციენტები იქნებიან, ნიშნამდე სიზუსტით, მისი ფესვების ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები*. ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების ეს კავშირი ვიეტას ფორმულებთან ძალიან მნიშვნელოვანი იქნება ერთი უცნობის მრავალწევრთა თეორიაში სიმეტრიული მრავალწევრების იმ გამოყენებისათვის, რომლისთვისაც ჩვენ მათ ვსწავლობთ.

რადგან P ველის მიმართ n $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობის სიმეტრიული მრავალწევრები შეადგენენ რგოლს, ამიტომ ცხადია შემდეგი დებულებები: სიმეტრიული მრავალწევრი იქნება ნებისმიერი ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრის ყოველი მთელი დადებითი ხარისხი, აგრეთვე ასეთი ხარისხების ნამრავლი, ამასთან აღებული ნებისმიერი კოეფიციენტით P-დან და ბოლოს, აღნიშნული ნამრავლების ყოველი ჯამი. სხვაგვარად, *ელემენტარულ სიმეტრიულ* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ *მრავალწევრთა ყოველი მრავალწევრი კოეფიციენტებით* P-*დან, განხილული როგორც* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *უცნობების მრავალწევრი, სიმეტრიული იქნება*, ასე, დავუშვათ $n=3$ და ავიღოთ $\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3$ მრავალწევრი. თუ შევცვლით σ_1, σ_2 და σ_3-ს მათი გამოსახულებებით, მივიღებთ:

$$\sigma_1 \sigma_2 + 2\sigma_3 = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + 5 x_1 x_2 x_3;$$

...დგას, ცხადია, x_1, x_2, x_3-ის სიმეტრიული მრავალწევრი.

ამ შედეგის შებრუნებულია სიმეტრიული მრავალწევრების შესახებ შემდეგი ძირითადი თეორემა:

P ველის მიმართ $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობების ყოველი სიმეტრიული მრავალწევრი $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მრავალწევრია კოეფიციენტებით, რომელნიც P ველს ეკუთვნიან.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

სიმეტრიული მრავალწევრი და ვთქვათ მის ლექსიკოგრაფიულ ჩაწერაში უმაღლესია

$$a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \tag{2}$$

წევრი. ამ წევრში უცნობთა მაჩვენებლები უნდა აკმაყოფილებდნენ უტოლობებს

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_n \tag{3}$$

მართლაც, ვთქვათ რომელიღაც i-სათვის $k_i < k_{i+1}$. რადგან $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მრავალწევრი სიმეტრიულია, იგი უნდა შეიცავდეს

$$a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_1^{k_{i+1}} x_{i+1}^{k_i} \dots x_n^{k_n} \tag{4}$$

წევრს, რომელიც მიიღება (2) წევრიდან x_i და x_{i+1} უცნობების ტრანსპოზიციით. ამას მივყავართ წინააღმდეგობამდე, რადგან (4) წევრი ლექსიკოგრაფიული დალაგების აზრით (2) წევრზე მაღალია: $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$-ის მაჩვენებლები ორივე წევრში ემთხვევა, მაგრამ x_i-ს მაჩვენებელი (4) წევრში მეტია, ვიდრე (2) წევრში.

ავიღოთ ახლა ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრთა შემდეგი ნამრავლი ((3) უტოლობების გამო ყველა მაჩვენებელი არაუარყოფითი იქნება):

$$\varphi_1 = a_0 \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n}. \tag{5}$$

ეს იქნება $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა სიმეტრიული მრავალწევრი, ამასთან მისი უმაღლესი წევრი უდრის (2) წევრს, მართლაც, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ მრავალწევრთა უმაღლესი წევრები უდრის შესაბამისად $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2 \dots x_n$, ხოლო რადგან წინა პარაგრაფის ბოლოს დამტკიცებულია, რომ ნამრავლის უმაღლესი წევრი უდრის თანამამრავლთა უმაღლესი წევრების ნამრავლს, ამიტომ φ_1 მრავალწევრის უმაღლესი წევრი იქნება

$$a_0 x_1^{k_1-k_2} (x_1x_2)^{k_2-k_3} (x_1x_2x_3)^{k_3-k_4} \dots (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n} (x_1 x_2 \dots x_n)^{k_n} =$$
$$a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ f-დან φ-ის გამოკლებისას მათი უმაღლესი წევრები გაბათილდებიან, $f - \varphi_1 = f_1$. სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრი (2) წევრზე დაბალი იქნება, რომელიც უმაღლესია f მრავალწევრში. თუ გავიმეორებთ f_1 მრავალწევრისათვის, რომლის კოეფიციენტები, ცხადია, P ველს ეკუთვნის, იმავეს, მივალთ

$$f_1 = \varphi_2 + f_2$$

ტოლობამდე, სადაც φ_2 ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების ხარისხთა ნამრავლია რომელიღაც კოეფიციენტით P ველიდან, ხოლო f_2 — სიმეტრიული მრავალწევრი, რომლის უმაღლესი წევრი f_1-ის უმაღლეს წევრზე დაბალია. აქედან გამომდინარეობს

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + f_2$$

ტოლობა.

თუ განვაგრძობთ ამ პროცესს, რომელიღაც s-სათვის მივიღებთ $f_s = 0$ და ამიტომ მივალთ f-სათვის $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ის მრავალწევრის სახით გამოსახულებამდე კოეფიციენტებით P-დან:

მართლაც, ეს პროცესი რომ უსასრულო იყოს[1] მაშინ ჩვენ მივიღებდით სიმეტრიულ მრავალწევრთა უსასრულო

$$f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots \tag{6}$$

მიმდევრობას, ამასთან ყოველი მრავალწევრის უმაღლესი წევრი წინამდებარე მრავალწევრის უმაღლეს წევრზე დაბალი იქნებოდა და მით უმეტეს (2)-ზე დაბალი. მაგრამ, თუ

$$bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} \tag{7}$$

f_s მრავალწევრის უმაღლესი წევრია, მაშინ ამ მრავალწევრის სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს (3) უტოლობების მსგავსი

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n \tag{8}$$

უტოლობები, მეორე მხრივ, რადგან (2) წევრი (7) წევრზე მაღალია, ამიტომ

$$k_1 \geqslant l_1. \tag{9}$$

მაგრამ ადვილი დასანახია, რომ მთელ არაუარყოფით რიცხვთა $l_1, l_2, \ldots, l_n$ სისტემების, რომელნიც აკმაყოფილებენ (8) და (9) უტოლობებს, ამორჩევა მხოლოდ სასრულო რიცხვნაირად შეიძლება. მართლაც, (8) მოთხოვნაზეც რომ უარი ვთქვათ და მხოლოდ დავუშვათ, რომ ყველა l_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ არ არის k_1-ზე მეტი, მაინც l_i რიცხვთა არჩევანი მხოლოდ $(k_1+1)^n$-ნაირად შეიძლება. აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრთა (6) მიმდევრობა მკაცრად კლებადი უმაღლესი წევრებით არ შეიძლება უსასრულო იყოს.

თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

ზემოთ აღნიშნული კავშირი ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებსა და ვიეტას ფორმულებს შორის ნებას გვაძლევს გამოვიყვანოთ ასეთი მნიშვნელოვანი შ ე დ ე გ ი სიმეტრიულ მრავალწევრთა ძირითადი თეორემიდან:

---

[1] უნდა გავითვალისწინოთ, რომ φ_s მრავალწევრი საერთოდ შეიცავს ისეთ წევრებსაც რომელნიც არ არის f_{s-1} მრავალწევრში და ამიტომ f_{s-1}-დან $f_s = f_{s-1} - \varphi_s$-ზე გადასვლა დაკავშირებულია არა მარტო f_{s-1}-ის რაიმე წევრების მოსპობასთან, არამედ ახალი წევრების გაჩენასთანაც. აქ $s = 1, 2, \ldots$

ვთქვათ $f(x)$ ერთი უცნობის მრავალწევრია Pველის მიმართ, რომელსაც უფროს კოეფიციენტად აქვს ერთეული, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის ფესვების, რომელნიც P-ს მიმართ $f(x)$ მრავალწევრის რაიმე დაშლის ველს ეკუთვნიან, ყოველი სიმეტრიული მრავალწევრი (კოეფიციენტებით P-დან) $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების მრავალწევრი იქნება (კოეფიციენტებით P-დან) და ამიტომ P ველის ელემენტიც.

ძირითადი თეორემის ზემოთ მოყვანილი დამტკიცება ერთდროულად იძლევა სიმეტრიული მრავალწევრებისათვის ელემენტარულებით გამოსახულების ძიების პრაქტიკულ მეთოდს. თავდაპირველად შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები: თუ

$$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \tag{10}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა ხარისხების რაიმე ნამრავლია (ამასთან მაჩვენებლებთა შორის შეიძლება იყოს ნულის ტოლიც), მაშინ

$$S(a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) \tag{11}$$

აღნიშნავს ჯამს ყველა წევრისა, რომელნიც მიიღებიან (10)-დან უცნობთა ყოველგვარი გადაადგილებისას. ცხადია, რომ ეს სიმეტრიული მრავალწევრი იქნება, ამასთან ერთგვაროვანი და რომ n უცნობის ყოველი სიმეტრიული მრავალწევრი, რომელიც (10) წევრს შეიცავს, შეიცავს აგრეთვე (11) მრავალწევრის ყველა სხვა წევრს. მაგალითად, $S(x_1)=\sigma_1$, $S(x_1 x_2)=\sigma_2$, (x_1^2) ყველა უცნობის კვადრატთა ჯამია და ა. შ.

მაგალითი. n უცნობის $f=S(x_1^2 x_2)$ სიმეტრიული მრავალწევრი გამოვსახოთ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით.

აქ უმაღლესი წევრი $x_1^2 x_2$ არის და ამიტომ $\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2=\sigma_1\sigma_2$, ე. ი.

$$\varphi_1=(x_1+x_2+\dots+x_n)(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n)=$$
$$=S(x_1^2 x_2)+3S(x_1 x_2 x_3),$$

საიდანაც

$$f_1=f-\varphi_1=-3S(x_1 x_2 x_3)=-3\sigma_3,$$

ამიტომ

$$f=\varphi_1+f_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

უფრო რთულ მაგალითებში მიზანშეწონილია წინასწარ დავადგინოთ თუ რომელი წევრები შეიძლება შევიდეს ამ მრავალწევრების ელემენტარულობით გამოსახულებაში, ხოლო შემდეგ ვიპოვოთ ამ წევრების კოეფიციენტები განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

მაგალითები. 1. ვიპოვოთ გამოსახულება $f=S(x_1^2 x_2^2)$ სიმეტრიული მრავალწევრისათვის.

ჩვენ ვიცით (იხ. ძირითადი თეორემის დამტკიცება), რომ საძიებელი $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ მრავალწევრის წევრები განისაზღვრება $f_1, f_2, \dots$ სიმეტრიულ მრავალწევრთა უმაღლესი წევრებით, ამასთან ეს უმაღლესი წევრები მოცემული f მრავალწევრის უმაღლეს წევრზე დაბალია, ე. ი. $x_1^2 x_2^2$-ზე დაბალია. ვიპოვოთ ყველა $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ ნამრავლი, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს: 1) იგი $x_1^2 x_2^2$-ზე დაბალი უნდა იყოს, 2) შეიძლება სიმეტრიული მრავალწევრის უმაღლესი წევრი იყოს, ე. ი. აკმაყოფილებდეს $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \dots \geqslant l_n$ უტოლობებს, 3) უცნობთა ერთობლიობის მიმართ მას უნდა ჰქონდეს ხარისხი 4 (რადგან, როგორც ვიცით, ყველა $f_1, f_2, \dots$ მრავალწევრს იგივე ხარისხი აქვს, რაც ერთგვარო-

ვან f მრავალწევრს). თუ ამოვწერთ მაჩვენებელთა მხოლოდ შესაბამის კომბინაციებს და გვერდით მივუთითებთ σ-ს ხარისხების იმ ნამრავლებს, რომლებსაც ისინი განმარტავენ, მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

$$22000 \ldots \sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}=\sigma_2^2,$$

$$21100 \ldots \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=\sigma_1\sigma_3,$$

$$11110 \ldots \sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=\sigma_4.$$

ამგვარად f მრავალწევრს შემდეგი

$$f=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4$$

სახე აქვს. კოეფიციენტი σ_2-თან დავუშვით ერთიანის ტოლად, რადგან ეს წევრი განისაზღვრება f მრავალწევრის უმაღლესი წევრით და, როგორც ძირითადი თეორემის დამტკიცებიდან ვიცით, აქვს იგივე კოეფიციენტი. A და B კოეფიციენტებს შემდეგნაირად ვიპოვით.

დავუშვათ $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=\ldots=x_n=0$. ადვილი მისახვედრია, რომ უცნობთა ამ მნიშვნელობებისას f მრავალწევრი იღებს მნიშვნელობას 3, ხოლო σ_1, σ_2, σ_3 და σ_4 — შესაბამისად 3, 3, 1 და 0 მნიშვნელობებს. ამიტომ

$$3=9+A\cdot 3\cdot 1+B\ 0,$$

საიდანაც $A=-2$. დავუშვათ ახლა $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, $x_5=\ldots=x_n=0$, f, σ_1, σ_2, σ_3, და σ_4 მრავალწევრების მნიშვნელობები იქნება შესაბამისად 6, 4, 6, 4, 1. ამიტომ

$$6=36-2\cdot 4\cdot 4+B\cdot 1,$$

საიდანაც $B=2$. ამგვარად f-სათვის საძიებელი გამოსახულება იქნება

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

2. ვიპოვოთ

$$f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$$

მრავალწევრის ფესვთა კუბების ჯამი.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად ვიპოვოთ $S(x_1^3)$ სიმეტრიული მრავალწევრისათვის ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით გამოსახულება. თუ გამოვიყენებთ იმავე მეთოდს, როგორიც წინა მაგალითში გვქონდა, მივიღებთ

$$3000 \ldots \sigma_1^3,$$

$$2100 \ldots \sigma_1\sigma_2$$

$$1110 \ldots \sigma_3$$

ცხრილს და ამიტომ

$$S(x_1^3)=\sigma_1^3+A\sigma_1\sigma_2+B\sigma_3.$$

დავუშვათ ჯერ $x_1=x_2=1$, $x_3=\ldots=x_n=0$, ხოლო შემდეგ $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=\ldots=x_n=0$, მივიღებთ $A=-3$, $B=3$, ე. ი.

$$S(x_1^3)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3. \qquad (12)$$

მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფესვთა კუბების ჯამის საპოვნელად, ვიეტას ფორმულების თანახმად, ზემოთ ნაპოვნ გამოსახულებაში უნდა შევცვალოთ σ_1 კოეფიციენტით x^3-თან შებრუნებული ნიშნით, ე. ი. (-1)-ით, σ_2 შევცვალოთ კოეფიციენტით x^2-თან, ე. ი. 2-ით, და ბოლოს σ_3 შევცვალოთ კოეფიციენტით x-თან შებრუნებული ნიშნით, ე. ი. -1-ით. ამგვარად, ფესვთა კუბების ჩვენთვის საინტერესო ჯამი უდრის

$$(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot(-1)=2.$$

მკითხველს შეუძლია შეამოწმოს ეს შედეგი, თუ გაითვალისწინებს, რომ $f(x)$-ს ფეს-ვებად $i, -i, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ რიცხვები აქვს. ცხადია აგრეთვე, რომ (12) ფორმულა არ არის დამოკიდებული მოცემულ $f(x)$ მრავალწევრზე და ნებას გვაძ-ლევს ვიპოვოთ ნებისმიერი მრავალწევრის ფესვთა კუბების ჯამი.

სიმეტრიული f მრავალწევრის ელემენტარულებით გამოსახვის მეთოდს, რომელიც მიღებული იყო ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას, მივყავართ სავსებით გარკვეულ მრავალწევრამდე $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-გან. თურმე არავითარი წესით არ შეიძლება f-ისათვის $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ით სხვა გამოსახულების მიღება. ამას გვიჩვენებს ე რ თ ა დ ე რ თ ო ბ ი ს შემდეგი თ ე ო რ ე მ ა:

ყ ო ვ ე ლ ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ს ა ქ ვ ს მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ა დ ე რ თ ი გ ა მ ო ს ა ხ უ ლ ე ბ ა მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს ს ა ხ ი თ ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ე ბ ი ს ა გ ა ნ.

დავამტკიცოთ ეს თეორემა. P ველზე სიმეტრიულ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრა-ვალწევრს რომ ჰქონდეს ორი სხვადასხვა გამოსახულება $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-თაგან:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=\psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

მაშინ

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)-\psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

სხვაობა $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-თა ნულისაგან განსხვავებული მრავალწევრი იქნებოდა, ე. ი. მისი ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლი არ იქნებოდა, მაშინ როცა ამ მრავალწევრში $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ შეცვლა მათი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ გამოსახულებებით მიგ-ვიყვანდა $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის ნულამდე. ჩვენ დაგვრჩენია ამიტომ და-ვამტკიცოთ, რომ თუ $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ მრავალწევრი ნულისაგან განსხვავებუ-ლია, ე. ი. აქვს ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტი, მაშინ $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრიც, რომელიც χ-გან მიიღება $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ სიდი-დეთა მათი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ გამოსახულებებით შეცვლით:

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{13}$$

აგრეთვე ნულისაგან განსხვავებულია.

თუ $a\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\ldots\sigma_n^{k_n}$ ერთერთი წევრია χ მრავალწევრისა, ამასთან $a \neq 0$, მაშინ ყველა σ ს შეცვლა მათი (1) გამოსახულებებით მოგვცემს $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მრავალწევრს, რომლის უმაღლესი წევრიც (ლექსიკოგრაფიული და-ლაგების აზრით), როგორც უკვე ვიცით ძირითადი თეორემის დამტკიცები-დან, იქნება

$$ax_1^{k_1}(x_1 x_2)^{k_2}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{k_n}=ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n},$$

სადაც

$$l_1=k_1+k_2+\ldots+k_n,$$
$$l_2=k_2+\ldots+k_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$l_n=k_n.$$

აქედან

$$k_i=l_i-l_{i+1}, \quad i=1, 2, \ldots, n-1$$
$$k_n=l_n,$$

ე. ი. $l_1, l_2, \ldots, l_n$ მაჩვენებლებით შეიძლება აღვადგინოთ გამოსავალი χ მრავალწევრის $k_1, k_2, \ldots, k_n$ მაჩვენებლები. ამგვარად, χ მრავალწევრის განსხვავებულ წევრებს, რომლებიც განხილულნი არიან როგორც $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მრავალწევრები, აქვთ *სხვადასხვა* უმაღლესი წევრები.

განვიხილოთ ახლა χ მრავალწევრის ყველა წევრი; ყოველი მათგანისათვის ვიპოვოთ მისი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მრავალწევრის სახით წარმოდგენის უმაღლესი წევრი და ავირჩიოთ ამ უმაღლესი წევრებიდან ის, რომელიც *ყველაზე მაღალი* იქნება ლექსიკოგრაფიული დალაგების აზრით. როგორც ზემოთაა ნათქვამი, ამ წევრს არა აქვს მსგავსი უმაღლეს წევრთა შორის, რომელნიც მიიღებიან χ მრავალწევრის სხვა წევრებისაგან, ხოლო რადგან იგი, პირობის თანახმად, ყველა ამ *უმაღლეს* წევრზე მაღალია, ამიტომ მით უმეტეს მაღალია სხვა წევრზე, რომელიც მიიღება χ მრავალწევრის წევრებში $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტების მათი (1) გამოსახულებებით შეცვლით. მაშასადამე ჩვენ ვიპოვეთ ისეთი წევრი, რომელიც ჩნდება (ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტით) $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-დან $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ზე გადასვლისას მხოლოდ ერთხელ და ამიტომ არაფერთან არ შეიძლება შეიკვეცოს. აქედან გამომდინარეობს რომ $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებიდან ყველა ნულს არ უდრის, ე. ი. ეს მრავალწევრი არ არის $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლის ნული, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

დამტკიცებულ თეორემას, ცხადია, შეიძლება მივცეთ შემდეგი ფორმულირება:

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრთა სისტემა, თუკი ეს მრავალწევრები განხილულნი არიან როგორც მრავალწევრთა* $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *რგოლის ელემენტები, ალგებრულად დამოუკიდებელია* P *ველის მიმართ.*

§ 53*. დამატებითი შენიშვნები სიმეტრიულ მრავალწევრებზე

შენიშვნები ძირითად თეორემაზე. სიმეტრიულ მრავალწევრებზე ძირითადი თეორემის დამტკიცება, რომელიც წინა პარაგრაფში იყო ჩატარებული, ნებას გვაძლევს გავაკეთოთ რამდენიმე არსებითი დამატება თეორემის ფორმულირების შესახებ, რომელსაც ჩვენ ქვემოთ გამოვიყენებთ. თავდაპირველად, ჩვენს მიერ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმეტრიული მრავალწევრის ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით გამოსახვად ნაპოვნი $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები არა მარტო P ველს ეკუთვნიან, არამედ *გამოისახებიან* f *მრავალწევრის კოეფიციენტებით შეკრებისა და გამოკლების დახმარებით, ე. ი. ეკუთვნიან* L *რგოლს, რომელიც* f *მრავალწევრის კოეფიციენტებითაა წარმოქმნილი* P *ველში.*

მართლაც, ადვილი დასანახია, რომ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა მიმართ φ_1 მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი (იხ. წინა პარაგრაფის (5) ფორმულა) არის f მრავალწევრის უმაღლეს წევრთან მდგომი a_0 კოეფიციენტის მთელი ჯერადი და ამიტომ L რგოლს ეკუთვნის. ვთქვათ უკვე დამტკიცებულია, რომ L-ს ეკუთვნის $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$ მრავალწევრთა ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ მიმართ) ყველა კო-

ფიციენტი. მაშინ $f_i = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_i$ მრავალწევრის კოეფიციენტებიც აგრეთვე L-ს მიეკუთვნება და ამიტომ L-ში იქნება $x_1, x_2, \dots, x_n$-თა მიმართ φ_{i+1} მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტიც.

მეორე მხრივ, $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ *მრავალწევრის* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$-ის მიმართ *ერთობლივი ხარისხი უდრის ხარისხს, რომელიც აქვს* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *მრავალწევრს ყოველი* x_i *უცნობის მიმართ.* მართლაც, რადგან (2) წინა პარაგრაფიდან არის f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, ამიტომ k_1 იქნება f-ის ხარისხი x_1 უცნობის მიმართ და ამიტომ, სიმეტრიულობის გამო, ნებისმიერი სხვა x_i უცნობის მიმართაც. მაგრამ φ_1-ის ხარისხი σ ერთობლიობის მიმართ წინა პარაგრაფის (5)-ის თანახმად უდრის

$$(k_1 - k_2) + (k_2 + k_3) + \dots + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1$$

რიცხვს. შემდეგ, რადგან f_1 მრავალწევრის უფროსი წევრი f მრავალწევრის უფროს წევრზე დაბალია, ამიტომ f_1-ის ხარისხი ყოველი x_i-ს მიმართ არ აღემატება f-ის ხარისხს ყოველი ამ უცნობის მიმართ. მაგრამ φ_2 მრავალწევრი ისეთივე როლს ასრულებს f_1-თვის, როგორსაც f-თვის φ_1, ამიტომ σ ერთობლიობის მიმართ φ_2-ს ხარისხი უდრის f_1-ის ხარისხს ყოველი x_1-ის მიმართ, ე. ი. იგი არ არის k-ზე მეტი და ა. შ. ამგვარად $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$-ის ხარისხიც k_1-ზე მეტი არ არის. ხოლო რადგან არც ერთ φ_i-ს $i > 1$-ით არ შეუძლია შეიცავდეს ყველა $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ იმავე ხარისხებში, როგორც φ_1, ამიტომ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$-ის ხარისხი ზუსტად k_1-ის ტოლია. ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ბოლოს, ვთქვათ $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\dots\sigma_n^{l_n}$ ერთ-ერთი წევრია $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ მრავალწევრისა. ვუწოდოთ ამ წევრის *წონა*

$$l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n$$

რიცხვს, ე. ი. სათანადო σ_i-ს ინდექსზე გამრავლებულ მაჩვენებლების ჯამს. სხვაგვარად, ეს იქნება ჩვენ მიერ აღებული წევრის ხარისხი $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა ერთობლიობის მიმართ, როგორც ეს გამომდინარეობს § 51-ში დამტკიცებული თეორემიდან მრავალწევრთა ნამრავლის ხარისხის შესახებ. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულება:

თუ ერთგვაროვან სიმეტრიულ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *მრავალწევრს აქვს უცნობთა ერთობლიობის მიმართ ხარისხი* s, *მაშინ* σ-*თი მისი* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ *გამოსახულების ყველა წევრს ექნება ერთი და იგივე* s-*ის ტოლი წონა.*

მართლაც, თუ (2) წინა პარაგრაფიდან არის ერთგვაროვანი f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, მაშინ

$$s = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

მაგრამ φ_1 წევრის წონა წინა პარაგრაფის (5)-ის თანახმად ტოლია რიცხვისა

$$(k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) + \dots + (n-1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = k_1 + \\ + k_2 + k_3 + \dots + k_n,$$

ე. ი. აგრეთვე s-ის ტოლია. შემდეგ, $f_1=f-\varphi_1$ მრავალწევრი, როგორც ორი s ხარისხის ერთგვაროვანი მრავალწევრის სხვაობა, თვითონ იქნება s ხარისხის ერთგვაროვანი მრავალწევრი და ამიტომ φ მრავალწევრის φ_2 წევრი იქნება s წონისა და ა. შ.

სიმეტრიული რაციონალური წილადები. ძირითადი თეორემა სიმეტრიულ მრავალწევრებზე შეიძლება გავრცელებულ იქნეს რაციონალური წილადების შემთხვევაზე. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა $\frac{f}{g}$ რაციონალურ წილადს ვუწოდოთ *სიმეტრიული*, თუ იგი თავისი თავის ტოლი რჩება უცნობთა ნებისმიერი ჩასმისას. ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს განმარტება არ არის დამოკიდებული იმაზე, ვიღებთ $\frac{f}{g}$ წილადს თუ მის ტოლ $\frac{f_0}{g_0}$ წილადს. მართლაც, თუ ω ჩვენი უცნობების რაიმე ჩასმაა, ხოლო φ — ამ უცნობთა ნებისმიერი მრავალწევრი, მაშინ შევთანხმდეთ φ^{ω}-თი აღვნიშნოთ ის მრავალწევრი, რომელშიაც φ გადაყავს ω ჩასმას. დაშვების თანახმად, ნებისმიერი ω-სათვის,

$$\frac{f}{g}=\frac{f^{\omega}}{g^{\omega}},$$

ე. ი. $fg^{\omega}=gf^{\omega}$. მეორე მხრივ, ტოლობიდან

$$\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}$$

გამომდინარეობს $fg_0=gf_0$, საიდანაც $f^{\omega}g^{\omega}{}_0=g^{\omega}f^{\omega}{}_0$. თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ f-ზე, მივიღებთ:

$$ff^{\omega}g_0{}^{\omega}=fg^{\omega}f_0{}^{\omega}=gf^{\omega}f_0{}^{\omega},$$

საიდანაც f^{ω}-ზე შეკვეცის შემდეგ გამომდინარეობს: $fg_0{}^{\omega}=gf^{\omega}{}_0$, ე. ი.

$$\frac{f_0{}^{\omega}}{g_0{}^{\omega}}=\frac{f}{g}=\frac{f_0}{g_0}.$$

სამართლიანია შემდეგი *თეორემა*:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ყოველი სიმეტრიული რაციონალური წილადი კოეფიციენტებით P ველიდან წარმოდგენადია $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების რაციონალური წილადის სახით და თან ისეთი კოეფიციენტებით, რომელნიც ისევ P-ს ეკუთვნიან.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

სიმეტრიული რაციონალური წილადი. თუ დავუშვებთ, რომ იგი უკვეცია, შეიძლება დამტკიცება, რომ f-ც და g-ც სიმეტრიული მრავალწევრებია. მაგრამ შემდეგი გზა უფრო მარტივი იქნება. თუ g მრავალწევრი არ არის სი-

მეტრიული, მაშინ გავამრავლოთ მრიცხველი და მნიშვნელი ყველა იმ $n!-1$ მრავალწევრის ნამრავლზე, რომელიც მიღებულია g-სგან უცნობთა ყოველგვარი არაიგივური ჩასმით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მნიშვნელი ახლა სიმეტრიული მრავალწევრი იქნება. მთელი წილადის სიმეტრიულობის გამო მრიცხველიც სიმეტრიული იქნება და ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვრჩენია მრიცხველი და მნიშვნელი ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით გამოვსახოთ.

ხარისხოვანი ჯამები. გამოყენებებში ხშირად გვხვდება

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k,\quad k=1, 2, \dots,$$

სიმეტრიული მრავალწევრები, ე. ი. $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა k-ური ხარისხების ჯამი. ეს მრავალწევრები, რომელნიც ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ჯ ა მ ე ბ ა დ იწოდებიან, უნდა გამოისახონ, ძირითადი თეორემის ძალით, ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით. მაგრამ, ამ გამოსახულებების ძიება დიდ k-თათვის საკმაოდ რთულია და ამიტომ საინტერესოა $s_1, s_2, \dots$ და $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ მრავალწევრებს შორის ის კავშირი, რომელიც ახლა იქნება დადგენილი.

პირველ ყოვლისა $s_1=\sigma_1$. შემდეგ, თუ $k \leqslant n$, მაშინ ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობები:

$$\left.\begin{array}{c}
s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2)^{[1]}, \\
s_{k-2}\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\dots x_i x_{i+1}), \\
2 \leqslant i \leqslant k-2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s_1\sigma_{k-1} = S(x_1^2x_2\dots x_{k-1}) + k\sigma_k.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

თუ ავიღებთ ამ ტოლობების ალტერნირებულ ჯამს (ე. ი. მორიგეობით სხვადასხვა ნიშნიან ჯამს), ხოლო შემდეგ კი გადავიტანთ ყველა წევრს ტოლობის ერთ ნაწილში, მივიღებთ ფორმულას:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0, \qquad (2)$$
$$(k \leqslant n)$$

თუკი $k > n$, მაშინ ტოლობების (1) სისტემა მიიღებს

$$\begin{array}{c}
s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2), \\
s_{k-2}\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\dots x_i x_{i+1}), \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s_{k-n}\sigma_n = S(x_1^{k-n+1}x_2\dots x_n)
\end{array}$$

[1] იხ. წინა პარაგრაფის (11).

სახეს, საიდანაც გამომდინარეობს ფორმულა

$$s_k - s_{k-1} + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0 \quad (k > n). \tag{3}$$

(2) და (3) ფორმულები ნიუტონის ფორმულებად იწოდება. ისინი აკავშირებენ ხარისხოვან მწკრივებს ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებთან და საშუალებას გვაძლევენ თანმიმდევრობით ვიპოვოთ $s_1, s_2, s_3, \ldots$ თათვის გამოსახულებები $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ით. ასე, ჩვენ ვიცით, რომ $s_1 = \sigma_1$, რაც გამომდინარეობს (2) ფორმულიდანაც. თუ შემდეგ $k = 2 \leqslant n$, მაშინ, (2) ის თანახმად, $s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, საიდანაც

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

შემდეგ, $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$, როცა $k = 3 \leqslant n$, საიდანაც, გამოვიყენებთ რა s_1 და s_2-სათვის უკვე ნაპოვნ გამოსახულებებს, მივიღებთ:

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

რაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია (იხ. (12) წინა პარაგრაფიდან). თუკი $k = 3$, მაგრამ $n = 2$, მაშინ, (3) ის თანახმად, $s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 = 0$, საიდანაც $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. ნიუტონის ფორმულების გამოყენებით შეიძლება ზოგადი ფორმულის მიღება, რომელიც s_k-ს გამოსახავს $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ით, მაგრამ ეს ფორმულა ძალზედ რთულია და ჩვენ მას არ მოვიყვანთ.

თუ ძირითად P ველს 0 მახასიათებელი აქვს და მაშასადამე ნებისმიერ ნატურალურ n რიცხვზე გაყოფას აზრი აქვს[1], მაშინ (2) ფორმულა საშუალებას იძლევა თანმიმდევრობით გამოვსახოთ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები პირველი n ხარისხოვანი $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ჯამებით. ასე, $\sigma_1 = s_1$, ამიტომ

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1\sigma_1 - s_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}(s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2) = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3)$$

და ა. შ. აქედან და ძირითადი თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი:

ნულ მახასიათებლიანი P ველის მიმართ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ყოველი სიმეტრიული მრავალწევრი წარმოდგენადია $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ხარისხოვანი ჯამების მრავალწევრის სახით კოეფიციენტებით P ველიდან.

უცნობთა ორი სისტემის მიმართ სიმეტრიული მრავალწევრები. შემდეგ პარაგრაფში და აგრეთვე § 58-ში გამოყენებული იქნება სიმეტრიული მრა-

---

[1] p მახასიათებლიან ველში $\dfrac{a}{p}$ გამოსახულებას აზრი არა აქვს, როცა $a \neq 0$, რადგან ამ ველში ნებისმიერი x-სათვის $px = 0$.

ველწევრის ცნების ერთი განზოგადება. ვთქვათ მოცემულია $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $y_1, y_2, \dots, y_r$ უცნობთა ორი სისტემა, ამასთან მათი

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_r \tag{4}$$

გაერთიანება P ველის მიმართ ალგებრულად დამოუკიდებელია. P ველზე $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r)$ მრავალწევრი იწოდება უცნობთა ორი სისტემის მიმართ სიმეტრიულად, თუ იგი არ იცვლება $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა ნებისმიერი გადაადგილებისას ერთმანეთში და $y_1, y_2, \dots, y_r$ უცნობთა—ერთმანეთში. თუ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებისათვის შევინარჩუნებთ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ აღნიშვნებს, ხოლო $y_1, y_2, \dots, y_r$ ელემენტარულ სიმეტრიულ მრავალწევრებს აღვნიშნავთ $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$, მაშინ ძირითადი თეორემა შემდეგნაირად განზოგადდება:

P ველზე ყოველი $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r)$ მრავალწევრი, სიმეტრიული $x_1, x_2, \dots, x_n$ და $y_1, y_2, \dots, y_r$ უცნობთა სისტემების მიმართ, უცნობთა ამ ორი სისტემის ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მრავალწევრის სახით წარმოდგენადია (კოეფიციენტებით P-დან)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r).$$

მართლაც, f მრავალწევრი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც $\overline{f}(y_1, y_2, \dots, y_r)$ მრავალწევრი, კოეფიციენტებით, რომელნიც $x_1, x_2, \dots, x_n$-ის მრავალწევრებია. რადგან f არ იცვლება $x_1, x_2, \dots, x_n$ უცნობთა გადაადგილებისას, $\overline{f}$ მრავალწევრის კოეფიციენტები $x_1, x_2, \dots, x_n$ სიმეტრიული მრავალწევრები იქნება და ამიტომ ძირითადი თეორემის ძალით წარმოდგენადია $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$-ის მრავალწევრების სახით (კოეფიციენტებით P-დან). მეორე მხრივ, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ველზე განხილული $\overline{f}(y_1, y_2, \dots, y_r)$ მრავალწევრი სიმეტრიული იქნება $y_1, y_2, \dots, y_r$-ის მიმართ და ამიტომ წარმოდგენადი $\overline{\varphi}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ მრავალწევრის სახით. $\overline{\varphi}$ მრავალწევრის კოეფიციენტები, როგორც ამ პარაგრაფის დასაწყისშია ნაჩვენები, $\overline{f}$ მრავალწევრის კოეფიციენტებით გამოისახება შეკრებისა და გამოკლების დახმარებით და ამიტომ ისინიც $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$-ის მრავალწევრები იქნებიან. ამას, ცხადია, f-სათვის საძიებელ გამოსახულებამდე მივყავართ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$-ით.

მაგალითი.

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1x_2x_3 - x_1x_2y_1 - x_1x_2y_2 - x_1x_3y_1 - \\ - x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 - x_2x_3y_2 + x_1y_1y_2 + x_2y_1y_2 + x_3y_1y_2$$

მრავალწევრი სიმეტრიულია როგორც x_1, x_2, x_3 უცნობთა მიმართ, ისე y_1, y_2 უცნობთა მიმართაც, მაგრამ არ იქნება სიმეტრიული ყველა ხუთი უცნობის ერთობლიობის მიმართ, როგორც გამოირკვევა თუნდაც x_1 და y_1 უცნობების ტრანსპოზიციის დროს. ვიპოვოთ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$-ით გამოსახულება f-სათვის:

$$f = x_1x_2x_3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,y_1 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,y_2 + \\ + (x_1 + x_2 + x_3)\,y_1y_2 = \sigma_3 - \sigma_2 y_1 - \sigma_2 y_2 + \sigma_1 y_1 y_2 = \sigma_3 - \sigma_2\tau_1 + \sigma_1\tau_2.$$

ახლახან დამტკიცებული თეორემა, ცხადია, უცნობთა სამი და მეტი რიცხვი სისტემების შემთხვევაზეც გავრცელდება.

უცნობთა ორი სისტემის მიმართ სიმეტრიული მრავალწევრებისათვის სამართლიანია, აგრეთვე, ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით წარმოდგენის ე რ თ ა დ ე რ თ ო ბ ი ს თ ე ო რ ე მ ა. სხვაგვარად, სამართლიანია შემდეგი თ ე ო რ ე მ ა:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ და $y_1, y_2, \ldots, y_r$ უ ც ნ ო ბ ე ბ ი ს მ ო ც ე მ უ ლ ს ი ს ტ ე მ ა თ ა ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი ს ი მ ე ტ რ ი უ ლ ი მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ე ბ ი ს

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \quad \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$$

გ ა ე რ თ ი ა ნ ე ბ უ ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა P ვ ე ლ ი ს მ ი მ ა რ თ:

მართლაც, ვთქვათ P ველზე არსებობს ნულის ტოლი

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \quad \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$$

მრავალწევრი, თუმცა ყველა მისი კოეფიციენტი არ არის ნული. ეს მრავალწევრი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\psi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ მრავალწევრი კოეფიციენტებით, რომელნიც $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$-ის მრავალწევრებია. მაშასადამე, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ψ არის $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$-ის მრავალწევრი რაციონალურ წილადთა

$$Q=P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ველის მიმართ. $y_1, y_2, \ldots, y_r$ სისტემა ალგებრულად დამოუკიდებელი რჩება Q ველის მიმართ: ამ სისტემისათვის რომ არსებობდეს ალგებრული დამოკიდებულება კოეფიციენტებით Q-დან, მაშინ, განვთავისუფლდებოდით რა მნიშვნელისაგან, მივიღებდით ალგებრულ დამოკიდებულებას (4) სისტემაში, წინააღმდეგ დაშვებისა. ჩვენ ვიღებთ, რომ $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ სისტემა აგრეთვე ალგებრულად დამოუკიდებელი უნდა იყოს Q ველის მიმართ და ამიტომ ψ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია. მაგრამ ეს კოეფიციენტები $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ მრავალწევრებია და ამიტომ, ისევ ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე უცნობთა ერთი სისტემის (ამჯერად $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სისტემის) შემთხვევაში, ამ უკანასკნელი მრავალწევრების ყველა კოეფიციენტი თვითონ ნულის ტოლია. წინააღმდეგ დაშვებისა ამით დამტკიცებულია, რომ φ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

§ 54. რეზულტანტი. უცნობის გამორიცხვა. დისკრიმინანტი.

თუ მოცემულია $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრი $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლიდან, მაშინ მის ამონახსნად იწოდება უცნობთა მნიშვნელობების ისეთი

$$x_1=\alpha_1, \quad x_2=\alpha_2, \ldots, x_n=\alpha_n,$$

სისტემა, აღებული P ველიდან ან ამ ველის რაიმე $\overline{P}$ გაფართოებიდან, რომელიც f მრავალწევრს ნულად აქცევს:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=0.$$

ყოველ f მრავალწევრს, რომლის ხარისხიც ნულზე მეტია, აქვს ამონახსენი: თუ x_1 უცნობი შედის ამ მრავალწევრის ჩაწერაში, მაშინ $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ად არსებითად P ველის ნებისმიერი ელემენტები შეიძლება ავიღოთ, ოღონდ, $f(x_1. \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ მრავალწევრის ხარისხი დარჩეს მკაცრად დადებითი, ხოლო შემდეგ, გამოვიყენებთ რა ფესვის არსებობის თეორემას (§ 49), ავიღოთ P ველის ისეთი $\overline{P}$ გაფართოება, რომელშიაც ერთი x_1 უცნობის $f(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ მრავალწევრს აქვს ფესვი α_1. ამასთან ერთად ჩვენ ვხედავთ, რომ ერთი უცნობის n ხარისხის მრავალწევრის ის თვისება, რომ მას ყოველ ველში ჰქონდეს არა უმეტეს n ფესვისა, რამდენიმე უცნობის მრავალწევრისათვის აღარ არის სამართლიანი.

თუ მოცემულია n უცნობის რამდენიმე მრავალწევრი, მაშინ შეგვიძლია დავსვათ ყველა ამ მრავალწევრთათვის საერთო ამონახსენის პოვნის საკითხი, ე. ი. განტოლებათა იმ სისტემის ამონახსენისა, რომელიც მიიღება მოცემულ მრავალწევრთა ნულთან გატოლების შედეგად. ამ ამოცანის კერძო შემთხვევა, სახელდობრ წრფივ განტოლებათა სისტემა, უკვე იყო დეტალურად განხილული მეორე თავში. მაგრამ ერთი უცნობის ნებისმიერი ხარისხის ერთი განტოლების მეორე—მოპირდაპირე—კერძო შემთხვევაში ჩვენ არაფერი არ ვიცით ფესვების შესახებ იმის გარდა, რომ ისინი არსებობენ ძირითადი ველის რაიმე გაფართოებაში. რამდენიმე ცვლადის განტოლებათა ნებისმიერი არაწრფივი სისტემის ამონახსენის პოვნა და შესწავლა, ცხადია, კიდევ უფრო რთული ამოცანაა, თუმცა იგი ჩვენი კურსის ფარგლებს სცილდება და განსაკუთრებული მათემატიკური მეცნიერების—ალგებრული გეომეტრიის—საგანს წარმოადგენს. ჩვენ აქ შემოვიფარგლებით ორი უცნობის ნებისმიერი ხარისხის ორი განტოლების სისტემის შემთხვევით და ვუჩვენებთ, რომ ეს შემთხვევა დაიყვანება ერთი უცნობის ერთი განტოლების შემთხვევაზე.

განვიხილოთ ჯერ ერთი უცნობის ორი მრავალწევრის საერთო ფესვის არსებობის საკითხი. ვთქვათ მოცემულია

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \\ g(x) &= b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_{s-1} x + b_s \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

მრავალწევრები P ველის მიმართ, ამასთან $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

წინა თავის შედეგებიდან დაუბრკოლებლად გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვთ საერთო ფესვი P ველის რაიმე გაფართოებაში, როცა ისინი არ არიან თანამარტივნი. ამგვარად საკითხი მოცემული მრავალწევრების საერთო ფესვის არსებობის შესახებ შეიძლება გადაწყდეს მათდამი ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით.

ახლა ჩვენ მივუთითებთ სხვა მეთოდზე ამ საკითხზე პასუხის გასაცემად. ვთქვათ $\overline{P}$ არის P ველის რაიმე ისეთი გაფართოება, რომელშიაც $f(x)$-ს აქვს n ფესვი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ხოლო $g(x)$-ს s ფესვი $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$; $\overline{P}$-დ შეიძლება ავიღოთ $f(x)\,g(x)$ ნამრავლის დაშლის ველი. $\overline{P}$ ველის

$$R(f,\ g)=a_0^s\, b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i-\beta_j) \tag{2}$$

ელემენტს ეწოდება $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი. ცხადია, რომ $f(x)$ და $g(x)$-ს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვთ $\overline{P}$-ში საერთო ფესვი, როცა $R(f,\ g)=0$. რადგან

$$g(x)=b_0 \prod_{j=1}^{s} (x-\beta_j),$$

ამიტომ

$$g(\alpha_i)=b_0 \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i-\beta_j);$$

მაშინ $R(f,\ g)$ რეზულტანტი შეიძლება

$$R(f,\ g)=a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \tag{3}$$

სახით ჩაიწეროს.

რეზულტანტის განმარტებაში $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები გამოიყენება არასიმეტრიულად. მართლაც,

$$R(g,\ f)=b_0^n\, a_0^s \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j-\alpha_i)=(-1)^{ns} R(f,\ g). \tag{4}$$

(3)-ის შესაბამისად $R(g,\ f)$ შეიძლება

$$R(g,\ f)=b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j) \tag{5}$$

სახით ჩაიწეროს.

რეზულტანტის (2) გამოსახულება მოითხოვს $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ფესვების ცოდნას და ამიტომ პრაქტიკულად გამოუსადეგარია ამ ორი მრავალწევრის საერთო ფესვების არსებობის საკითხის გადასაწყვეტად. მაგრამ თურმე რეზულტანტი $R(f,\ g)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_s$ კოეფიციენტების მრავალწევრის სახით.

ასეთი წარმოდგენის შესაძლებლობა ადვილად გამომდინარეობს წინა პარაგრაფის შედეგებიდან. მართლაც, (2) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $R(f,\ g)$ რეზულტანტი არის უცნობთა ორი სისტემის მიმართ სიმეტრიული მრავალწევრი: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ სისტემისა და $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ სისტემის. ამიტომ იგი წარმოდგენადია, როგორც წინა პარაგრაფის ბოლოშია დამტკიცებული, უცნობთა ამ ორი სისტემის მიმართ ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრების მრავალწევრის სახით, ე. ი., ვიეტას ფორმულების გამო, $\frac{a_i}{a_0}, i=1, 2, \ldots n,$

და $\dfrac{b_j}{b_0}$, $j=1, 2, \ldots, s$, განაყოფების მრავალწევრების სახით; (2)-ში ჩართული $a_0^s b_0^n$ მამრავლი ანთავისუფლებს მიღებულ გამოსახულებას a_0 და b_0 მნიშვნელებისაგან. თუმცა ძნელი იქნებოდა გვეძებნა კოეფიციენტებით რეზულტანტის გამოსახულება იმ მეთოდების დახმარებით, რომელნიც წინა პარაგრაფში იყო აღწერილი და ჩვენც სხვა ხერხით ვისარგებლებთ.

(1) მრავალწევრების რეზულტანტის გამოსახულება, რომელსაც ჩვენ ვიპოვით, გამოსადეგი იქნება ასეთი მრავალწევრების ნებისმიერი წყვილისათვის. უფრო ზუსტად, ჩვენ ჩავთვლით, რომ (1) მრავალწევრთა ფესვების

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s \tag{6}$$

სისტემა $n+s$ დამოუკიდებელ უცნობთა სისტემაა, ე. ი. § 51-ის აზრით P ველის მიმართ ალგებრულად დამოუკიდებელი $n+s$ ელემენტის სისტემა.

ჩვენ მივიღებთ რეზულტანტისათვის გამოსახულებას, რომელიც, თუ განვიხილავთ როგორც (6) უცნობების მრავალწევრს (ვიეტას ფორმულების თანახმად კოეფიციენტების ფესვებით შეცვლის შემდეგ), ტოლი იქნება (2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილისა, რომელიც აგრეთვე უნდა განვიხილოთ როგორც (6) უცნობთა მრავალწევრი.

გვესმის რა ტოლობა (6) უცნობთა სისტემის მიმართ სწორედ ასეთი იგივური ტოლობის აზრით, ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ (1) მრავალწევრების რეზულტანტი $R(f, g)$ უდრის $n+s$ რიგის შემდეგ დეტერმინანტს:

$$D=\left|\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_s & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_s & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & b_0 & b_1 & \ldots & b_s \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} s \text{ სტრიქონი} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ სტრიქონი} \end{array} \tag{7}$$

(თავისუფალ ადგილზე ნულები დგას). ამ დეტერმინანტის აგებულება საკმაოდ ნათელია; ჩვენ აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ მის მთავარ დიაგონალზე s-ჯერ a_0 კოეფიციენტი, ხოლო შემდეგ n-ჯერ b_0 კოეფიციენტი დგას.

ჩვენი დებულების დასამტკიცებლად ორნაირად გამოვითვლით $a_0^s b_0^n DM$ ნამრავლს, სადაც M არის $n+s$ რიგის შემდეგი დამხმარე დეტერმინანტი:

$$M=\left|\begin{array}{cccccccc} \beta_1^{n+s-1} & \beta_2^{n+s-1} & \ldots & \beta_s^{n+s-1} & \alpha_1^{n+s-1} & \alpha_2^{n+s-1} & \ldots & \alpha_n^{n+s-1} \\ \beta_1^{n+s-2} & \beta_2^{n+s-2} & \ldots & \beta_s^{n+s-2} & \alpha_1^{n+s-2} & \alpha_2^{n+s-2} & \ldots & \alpha_n^{n+s-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_s^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{array}\right|$$

M ვანდერმონდის დეტერმინანტია და ამიტომ, როგორც § 6-შია მითითებული, უდრის მისი ბოლოდან მეორე სტრიქონის ელემენტთა სხვაობების ნამრავლს ამასთან ყოველ წინა ელემენტს აკლდება ნებისმიერი შემდგომი ელემენტი. ამგვარად,

$$M = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (\beta_i - \beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{s} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

და ამიტომ, (4)-ის გამო,

$$a_0^s b_0^n DM = D \cdot R(g, f) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (\beta_i - \beta_j) \cdot$$

$$\cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j). \tag{6}$$

მეორე მხრივ, გამოვთვალოთ DM ნამრავლი მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტის თეორემის საფუძველზე. თუ გადავამრავლებთ შესაბამის მატრიცებს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ ყველა α ფესვია $f(x)$-ისათვის, ხოლო β—ფესვი $g(x)$-ისათვის, მივიღებთ:

$$a_0^s b_0^n DM =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1^{s-1} f(\beta_1) & \beta_2^{s-1} f(\beta_2) & \ldots & \beta_s^{s-1} f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1^{s-2} f(\beta_1) & \beta_2^{s-2} f(\beta_2) & \ldots & \beta_s^{s-2} f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1 f(\beta_1) & \beta_2 f(\beta_2) & \ldots & \beta_s f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f(\beta_1) & f(\beta_2) & \ldots & f(\beta_s) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^{n-1} g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-1} g(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n^{n-1} g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^{n-2} g(\alpha_1) & \alpha_2^{n-2} g(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n^{n-2} g(\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 g(\alpha_1) & \alpha_2 g(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & \ldots & g(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

თუ გამოვიყენებთ ლაპლასის თეორემას, შემდეგ დეტერმინანტის სვეტებიდან გამოვიტანთ საერთო მამრავლებს და გამოვითვლით დარჩენილ დეტერმინანტებს როგორც ვანდერმონდის დეტერმინანტებს, მივიღებთ:

$$a_0^s b_0^n DM = a_0^s b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_s) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (\beta_i - \beta_j) \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

ან, თუ გამოვიყენებთ (3) და (5),

$$a_0^s\, b_0^n\, DM = R(f,\ g)\ R(g,\ f) \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} (\beta_i - \beta_j) \cdot$$

$$\cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j) \tag{9}$$

ჩვენ მივიღეთ, რომ (8) და (9) ტოლობების მარჯვენა ნაწილები, განხილულნი როგორც (6) უცნობების მრავალწევრები, ერთმანეთის ტოლია. მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი შეიძლება შეიკვეცოს საერთო მამრავლებზე, რომელნიც იგივურად ნულები არ არიან. საერთო $R(g,\ f)$ მამრავლი ნულს არ უდრის: $a_0 \neq 0$ და $b_0 \neq 0$, პირობის თანახმად; ამიტომ საკმარისია (6) უცნობებისათვის შევარჩიოთ ერთმანეთის არატოლი მნიშვნელობები (ძირითად ველში ან რაიმე მის გაფართოებაში), რომ (4)-დან მივიღოთ $R(g, f)$ მრავალწევრისათვის ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობა. ასევე მტკიცდება, რომ ორი სხვა საერთო მამრავლიც ნულისაგან განსხვავებულია. თუ შევკვეცავთ ყველა ამ საერთო მამრავლზე, მივალთ ტოლობამდე

$$R(f,\ g) = D, \tag{10}$$

რომლის დამტკიცებაც იყო საჭირო.

უარი ვთქვათ ახლა მოთხოვნაზე, რომ (1) მრავალწევრების უფროსი კოეფიციენტები ნულისაგან განსხვავდებოდნენ[1]. მაშასადამე, ამ მრავალწევრების ჭეშმარიტ ხარისხებზე მხოლოდ იმისი თქმა შეიძლება რომ ისინი არ არიან მეტი „ფორმალურ" n და, შესაბამისად s ხარისხებზე. ახლა რეზულტანტისათვის (2) გამოსახულებას არა აქვს აზრი, რადგან განხილულ მრავალწევრებს შეიძლება ნაკლები ფესვები აქვთ, ვიდრე n ან s. მეორე მხრივ, (7) დეტერმინანტი ახლაც შეიძლება დაიწეროს და რადგან უკვე დამტკიცებულია, რომ ეს დეტერმინანტი უდრის რეზულტანტს, როცა $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, ამიტომ ჩვენ ზოგად შემთხვევაშიც ვუწოდოთ მას $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი და ავღნიშნოთ $R(f, g)$-ით.

მაგრამ ახლა კი აღარ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ რეზულტანტის ნულთან ტოლობა ჩვენი მრავალწევრებისათვის საერთო ფესვის არსებობის ტოლფასია. მართლაც, თუ $a_0 = 0$ და $b_0 = 0$, მაშინ $R(f,\ g) = 0$ დამოუკიდებლად იმისა აქვს თუ არა f და g მრავალწევრებს საერთო ფესვები. მაგრამ თურმე ეს შემთხვევა ერთადერთია, როცა რეზულტანტის ნულთან ტოლობიდან არ შეიძლება გამოვიტანოთ დასკვნა მოცემული მრავალწევრების საერთო ფესვის არსებობის შესახებ[2]. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

---

[1] მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტის შესახებ ამ პირობაზე, რომელსაც ჩვენ აქამდე მივდევდით, ეს დროებითი უარის თქმა გამოწვეულია შემდგომი გამოყენებით: ჩვენ გვინდა განვიხილოთ ორი უცნობის მრავალწევრთა სისტემები და ერთი ამ უცნობთაგანი მივიღოთ კოეფიციენტად. მაშასადამე, ამ უცნობის კერძო მნიშვნელობისათვის უფროსი კოეფიციენტი შეიძლება ნული გახდეს.

[2] (7) დეტერმინანტი ნულის ტოლია, რასაკვირველია, როცა $a_n = b_s = 0$. მაგრამ ამ შემთხვევაში (1) მრავალწევრებს აქვთ საერთო ფესვი 0.

თუ მოცემულია (1) მრავალწევრები ნებისმიერი უფროსი კოეფიციენტებით, მაშინ ამ მრავალწევრების (7) რეზულტანტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ნულს, თუ ამ მრავალწევრებს აქვთ ერთი საერთო ფესვი ანდა მათი უფროსი კოეფიციენტები ნულის ტოლია.

დამტკიცება. $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$ შემთხვევა უკვე განხილულია ზემოთ, ხოლო $a_0=b_0=0$ შემთხვევა გათვალისწინებულია თეორემის ფორმულირებაში. ჩვენ დაგვრჩენია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (1) მრავალწევრების ერთ ერთი უფროსი კოეფიციენტი, მაგალითად a_0, განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო b_0 უდრის ნულს.

თუ $b_i=0$ ყოველი i-სათვის, $i=0, 1,\dots, s$, მაშინ $R(f, g)=0$, რადგან (7) დეტერმინანტი შეიცავს ნულოვან სტრიქონებს. მაგრამ ამ შემთხვევაში $g(x)$ მრავალწევრი იგივურად ნულის ტოლია და ამიტომ მას აქვს საერთო ფესვი $f(x)$ თან. თუკი

$$b_0=b_1=\dots=b_{k-1}=0, \text{ მაგრამ } b_k\neq 0,\ k\leqslant s,$$

და თუ

$$\overline{g}(x)=b_k x^{s-k}+b_{k+1}x^{s-k-1}+\dots+b_{s-1}x+b_s,$$

მაშინ, თუ შევცვლით (7) დეტერმინანტში $b_0, b_1,\dots, b_{k-1}$ ელემენტებს ნულებით და გამოვიყენებთ ლაპლასის თეორემას, ცხადია, მივალთ

$$R(f, g)=a_0^k R(f, \overline{g}) \tag{11}$$

ტოლობამდე. მაგრამ, რადგან ორივე f და $\overline{g}$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტები ნულისაგან განსხვავებულია, ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად $R(f, \overline{g})=0$ ტოლობა აუცილებელი და საკმარისია f და $\overline{g}$ მრავალწევრების საერთო ფესვის არსებობისათვის. მეორე მხრივ, (11)-ის თანახმად, $R(f, g)=0$ და $R(f, \overline{g})=0$ ტოლობები ტოლფასია, ხოლო რადგან g და $\overline{g}$ მრავალწევრებს ერთნაირი ფესვები აქვთ, ამიტომ ვიღებთ, რომ განხილულ შემთხვევაშიც $R(f, g)$ რეზულტანტის ნულთან ტოლობა $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო ფესვის არსებობის ტოლფასია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ვიპოვოთ

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2,\quad g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

კვადრატული მრავალწევრების რეზულტანტი. (7)-ის თანახმად

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2\end{vmatrix},$$

ან, თუ გამოვითვლით დეტერმინანტს პირველი და მესამე სტრიქონების მიმართ, გაშლით

$$R(f, g)=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1). \tag{12}$$

ასე, თუ მოცემულია

$$f(x)=x^2-6x+2, \quad g(x)=x^2+x+5$$

მრავალწევრები, მაშინ, (12)-ის თანახმად, $R(f, g)=233$ და ამიტომ ამ მრავალწევრებს არა აქვთ საერთო ფესვები. თუკი მოცემულია

$$f(x)=x^2-4x-5, \; g(x)=x^2-7x+10.$$

მრავალწევრები, მაშინ $R(f, g)=0$, ე. ი. ამ მრავალწევრებს აქვთ საერთო ფესვი; ეს ფესვი არის რიცხვი 5.

უცნობის გამორიცხვა ორი უცნობის ორი მრავალწევრის სისტემიდან. ვთქვათ მოცემულია x და y უცნობების ორი f და g მრავალწევრი კოეფიციენტებით რაიმე P ველიდან. ჩვენ ჩავწერთ ამ მრავალწევრებს x უცნობის კლებადი ხარისხებით:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y)&=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}(y)x+a_k(y), \\ g(x, y)&=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\ldots+b_{l-1}(y)x+b_l(y); \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

კოეფიციენტები $P[y]$ რგოლის მრავალწევრები იქნება. ვიპოვოთ f და g მრავალწევრების, რომლებიც განხილული არიან როგორც x-ის მრავალწევრები, რეზულტანტი და აღვნიშნოთ იგი $R_x(f, g)$-ით; (7)-ის გამო, იგი ერთი y უცნობის მრავალწევრი იქნება კოეფიციენტებით P ველიდან:

$$R_x(f, g)=F(y). \qquad (14)$$

ვთქვათ მრავალწევრთა (13) სისტემას P ველის რაიმე გაფართოებაში აქვს საერთო ამონახსენი $x=\alpha$, $y=\beta$. თუ ჩავსვამთ (13)-ში y-ის მაგივრად β მნიშვნელობას, მივიღებთ ერთი x უცნობის $f(x, \beta)$ და $g(x, \beta)$ მრავალწევრებს. ამ მრავალწევრებს საერთო α ფესვი აქვთ და ამიტომ მათი რეზულტანტი, რომელიც (14)-ის თანახმად $F(\beta)$-ს უდრის, უნდა უდრიდეს ნულს, ე. ი. β უნდა იყოს $R_x(f, g)$ რეზულტანტის ფესვი. პირუკუ, თუ (13) მრავალწევრების $R_x(f, g)$ რეზულტანტს აქვს β ფესვი, მაშინ $f(x, \beta)$ და $g(x, \beta)$ მრავალწევრების რეზულტანტი ნულის ტოლია, ე. ი. ან ამ მრავალწევრებს საერთო ფესვი აქვთ, ანდა ორივე მათი უფროსი კოეფიციენტი ნულის ტოლია,

$$a_0(\beta)=b_0(\beta)=0.$$

ამ გზით მრავალწევრების (13) სისტემის საერთო ამონახსენის პოვნა დაყვანილია ერთი y უცნობის ერთი (14) მრავალწევრის ფესვის პოვნაზე, ე. ი., როგორც საერთოდ ვამბობთ, x უცნობი გამორიცხულია მრავალწევრთა (13) სისტემიდან.

შემდეგი თეორემა პასუხობს კითხვაზე იმ მრავალწევრის ხარისხის შესახებ, რომელიც მიიღება ორ უცნობიანი ორი მრავალწევრის სისტემიდან ერთი უცნობის გამორიცხვის შემდეგ:

თუ $f(x, y)$ და $g(x, y)$ მრავალწევრების ხარისხი უცნობთა ერთობლიობის მიმართ შესაბამისად n და s უდრის, მაშინ $R_x(f, g)$ მრავალწევრის ხარისხი y უცნობის მიმართ არ აღემატება ns ნამრავლს თუ, რასაკვირველია, ეს მრავალწევრი არ უდრის იგივურად ნულს.

უპირველეს ყოვლისა, თუ ჩვენ განვიხილავთ ერთი უცნობის ორ მრავალწევრს ერთეულის ტოლი უფროსი კოეფიციენტებით, მაშინ მათი $R(f, g)$ რეზულტანტი, (8)-ის თანახმად, ns ხარისხის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$-ის ერთგვაროვანი მრავალწევრი იქნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ რეზულტანტის $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_s$ კოეფიციენტებით გამოსახვაში შედის

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} b_1^{l_1} b_2^{l_2} \ldots b_s^{l_s}$$

წევრი და თუ ამ წევრის წ ო ნ ა დ იწოდება

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n + l_1 + 2l_2 + \ldots + sl_s$$

რიცხვი, მაშინ კოეფიციენტებით $R(f, g)$-ს გამოსახვის ყველა წევრს ერთი და იგივე წონა აქვს, რომელიც ns-ს უდრის. ეს დებულება სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიც, (7) რეზულტანტის წევრებისათვის, თუ $a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_s^{l_s}$ წევრის წ ო ნ ა დ იწოდება

$$0 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 + \ldots + nk_n + 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \ldots + sl_s \qquad (15)$$

რიცხვი. მართლაც, თუ (7) დეტერმინანტის წევრებში a_0 და b_0 მამრავლებს შევცვლით ერთეულით, მივალთ უკვე განხილულ შემთხვევამდე, მაგრამ ამ მამრავლების მაჩვენებლები შედიან (15)-ში 0 კოეფიციენტებით.

ჩავწეროთ ახლა f და g მრავალწევრები შემდეგი სახით:

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_n(y),$$
$$g(x, y) = b_0(y)x^s + b_1(y)x^{s-1} + \ldots + b_s(y).$$

რადგან n არის $f(x, y)$-ის ხარისხი უცნობთა ერთობლიობის მიმართ, ამიტომ $a_r(y)$ კოეფიციენტის, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, ხარისხი არ აღემატება მის r ინდექსს; იგივე სამართლიანია $b_r(y)$-ისთვისაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ $R_x(f, g)$ რეზულტანტის ყოველი წევრის ხარისხი არ აღემატება ამ წევრის წონას, ე. ი. იგი არ აღემატება ns რიცხვს, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

მაგალითები.

1. ვიპოვოთ

$$f(x, y) = x^2y + 3xy + 2y + 3,$$
$$g(x, y) = 2xy - 2x + 2y + 3$$

მრავალწევრთა სისტემის საერთო ამონახსნი.

გამოვრიცხოთ ამ სისტემიდან x უცნობი, რისთვისაც გადავწეროთ იგი

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= y \cdot x^2 + (3y) \cdot x + (2y + 3) \\ g(x, y) &= (2y - 2)x + (2y + 3) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

სახით; მაშინ

$$R_x(f, g) = \begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix} = 2y^2 + 11y + 12.$$

რეზულტანტის ფესვები იქნება $\beta_1 = -4$, $\beta_2 = -\frac{3}{2}$ რიცხვები. y უცნობის ამ მნიშვნელობებისათვის (16) მრავალწევრების უფროსი კოეფიციენტები ნულად არ იქცევა, ამიტომ

ყოველი მათგანი x-ის რაიმე მნიშვნელობასთან ერთად შეადგენს მრავალწევრთა მოცემული სისტემის ამონახსენს.

$$f(x, -4) = -4x^2 - 12x - 5,$$

$$g(x, -4) = -10x - 5$$

მრავალწევრებს აქვთ საერთო ფესვი $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

$$f\left(x_1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x,$$

$$g\left(x_1 - \frac{3}{2}\right) = -5x$$

მრავალწევრებს აქვთ საერთო ფესვი $\alpha_2 = 0$. ამგვარად, მრავალწევრთა მოცემულ სისტემას აქვს ორი ამონახსენი:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = -4 \quad \text{და} \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = -\frac{3}{2}.$$

2. გამოვრიცხოთ ერთი უცნობი მრავალწევრთა

$$f(x, y) = 2x^3y - xy^2 + x + 5,$$

$$g(x, y) = x^2y^2 + 2xy^2 - 5y + 1$$

სისტემიდან.

რადგან ორივე მრავალწევრს y უცნობის მიმართ აქვს ხარისხი 2, მაშინ როცა x უცნობის მიმართ ერთ მათგანს აქვს ხარისხი 3, ამიტომ მიზანშეწონილია გამოვრიცხოთ y. გადავწეროთ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= (-x)\cdot y^2 + (2x^3)\cdot y + (x+5), \\ g(x, y) &= (x^2 + 2x)\,y^2 - 5y + 1 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

სახით და ვიპოვოთ მისი რეზულტანტი (12) ფორმულის გამოყენებით:

$$R_y(f, g) = [(-x)\cdot 1 - (x+5)(x^2+2x)]^2 - [(-x)(-5) - 2x^3(x^2 + 2x)][2x^3\cdot 1 - (x+5)(-5)] = 4x^8 + 8x^7 + 11x^6 + 84x^5 + 161x^4 + 154x^3 + 96x^2 - 125x.$$

რეზულტანტის ერთ-ერთი ფესვია 0, მაგრამ x უცნობის ამ მნიშვნელობაზე (17) მრავალწევრების ორივე უფროსი კოეფიციენტი ნული ხდება, ამასთან როგორც ადვილი დასანახია $f(0, y)$ და $g(0, y)$ მრავალწევრებს არა აქვთ საერთო ფესვი. ჩვენ არა გვაქვს წესი რეზულტანტის სხვა ფესვების საპოვნელად. მხოლოდ შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ისინი რომ გვეპოვნა (მაგალითად $R_y(f, g)$-ის დაშლის ველში), არც ერთი მათგანი არ გადააქცევდა ნულად (17) მრავალწევრების ორივე უფროს კოეფიციენტს და ამიტომ ყოველი ამ ფესვთაგანი y-ის რაიმე მნიშვნელობასთან (ერთ ან რამდენიმესთანაც კი) ერთად შეადგენდა მრავალწევრთა მოცემული სისტემის ამონახსენს.

არსებობს მეთოდები, რომელიც ნებას გვაძლევს თანმიმდევრობით გამოვრიცხოთ უცნობები ნებისმიერ რიცხვ უცნობთა და მრავალწევრთა სისტემებიდან. მაგრამ ეს მეთოდები ძალზედ რთულია და ამიტომ არ შეიძლება ჩვენ კურსში ჩავრთოთ.

დისკრიმინანტი. ანალოგიურად იმ საკითხისა, რომელმაც მიგვიყვანა რეზულტანტის ცნებამდე, შეიძლება დავსვათ საკითხი იმ პირობებზე, რომლის დროსაც $P[x]$ რგოლის n ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აქვს ჯერადი ფესვები. ვთქვათ

$$f(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

და ვთქვათ P ველის რაიმე გაფართოებაში ამ მრავალწევრს აქვს $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ფესვები. ცხადია, რომ ამ ფესვთა შორის მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება ერთმანეთის ტოლი, როცა

$$\begin{aligned}\Delta = &(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_n-\alpha_1)\times \\ &\times(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)\dots(\alpha_n-\alpha_2)\times \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\times(\alpha_n-\alpha_{n-1}) = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)\end{aligned}$$

ნამრავლი უდრის ნულს ან, რაც იგივეა, როცა

$$D = a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

ნამრავლი, რომელსაც $f(x)$ მრავალწევრის დისკრიმინანტი ეწოდება, უდრის ნულს.

Δ ნამრავლისაგან განსხვავებით, რომელმაც შეიძლება ნიშანი შეიცვალოს ფესვების გადაადგილებისას, D დისკრიმინანტი სიმეტრიულია $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$-ის მიმართ და ამიტომ შეიძლება $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებით გამოისახოს. ამ გამოსახულების საპოვნელად იმ დაშვებით, რომ P ველს აქვს მახასიათებელი ნული, შეგვიძლია ვისარგებლოთ კავშირით, რომელიც არსებობს $f(x)$ მრავალწევრის დისკრიმინანტსა და ამ მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის რეზულტანტს შორის. ასეთი კავშირის არსებობა ბუნებრივად მოსალოდნელია: ჩვენ ვიცით § 49-დან, რომ მრავალწევრს მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ჯერადი ფესვები, როცა მას აქვს საერთო ფესვები $f'(x)$ წარმოებულთან, და ამიტომ მაშინ და მხოლოდ მაშინ $D=0$, როცა $R(f, f')=0$.

ამ პარაგრაფის (3) ფორმულის თანახმად

$$R(f, f') = a_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i).$$

თუ გავაწარმოებთ

$$f(x) = a_0 \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$$

ტოლობას, მივიღებთ:

$$f'(x)=a_0 \sum_{k=1}^{n} \prod_{j\neq k} (x-\alpha_j).$$

აქ x-ის მაგივრად α_i ჩასმის შემდეგ ყველა შესაკრები, გარდა i-ურისა ნულდება და ამიტომ

$$f'(\alpha_i)=a^0 \prod_{j\neq i} (\alpha_i-\alpha_j),$$

საიდანაც

$$R(f,\ f')=a_0^{n-1}\cdot a_0^{n} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} (\alpha_i-\alpha_j).$$

ამ ნამრავლში ნებისმიერი i და j-სათვის, $i>j$, შედის ორი მამრავლი: $\alpha_i-\alpha_j$ და $\alpha_j-\alpha_i$. მათი ნამრავლი უდრის $(-1)\cdot(\alpha_i-\alpha_j)^2$, ხოლო რადგან არსებობს i, j ინდექსების $\dfrac{n(n-1)}{2}$ წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს $n\geqslant i>j\geqslant 1$ უტოლობებს, ამიტომ

$$R(f,\ f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-1} \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (\alpha_i-\alpha_j)^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი. რადგან $f'(x)=2ax+b$, ამიტომ

$$R(f,\ f')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=a(-b^2+4ac).$$

ჩვენ შემთხვევაში $\dfrac{n(n-1)}{2}=1$ და ამიტომ

$$D=-a^{-1}R(f,\ f')=b^2-4ac.$$

ეს ემთხვევა იმას, რასაც სასკოლო ალგებრაში ჩვეულებრივ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტს უწოდებენ.

დისკრიმინანტის პოვნის სხვა წესი შემდეგში მდგომარეობს. შევადგინოთ ვანდერმონდის დეტერმინანტი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ფესვების ხარისხებისაგან. როგორც § 6-შია დამტკიცებული,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (\alpha_i-\alpha_j)=\Delta$$

და ამიტომ დისკრიმინანტი უდრის ამ დეტერმინანტის კვადრატს გამრავლებულს a_0^{2n-2}-ზე. თუ გავამრავლებთ ამ დეტერმინანტს თავის ტრანსპონირე-

ბულზე მატრიცთა გამრავლების წესით და გავიხსენებთ წინა პარაგრაფში განმარტებულ ხარისხოვან ჯამებს, მივიღებთ:

$$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

სადაც s_k არის $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ფესვების k-ური ხარისხების ჯამი.

მაგალითი. ვიპოვოთ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ კუბური მრავალწევრის დისკრიმინანტი. (18)-ის თანახმად

$$D=\begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

როგორც წინა პარაგრაფიდან ვიცით,

$$s_1=\sigma_1=-a,$$

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=a^2-2b,$$

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=-a^3+3ab-3c.$$

თუ გამოვიყენებთ ნიუტონის ფორმულას, ჩვენ ვიპოვით აგრეთვე, $\sigma_4=0$-ის გამო, რომ

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2=a^4-4a^2b+4ac+2b^2.$$

საიდანაც

$$D=3s_2s_4+2s_1s_2s_3-s_2^3-s_1^2s_4-3s_3^2=a^2b^2-4b^3-4a^3c+$$
$$+18abc-27c^2. \tag{19}$$

კერძოდ, როცა $a=0$, ე. ი. არასრული კუბური მრავალწევრისათვის ვღებთ

$$D=-4b^3-27c^2;$$

ეს მთლიანად შეესაბამება იმას, რაც § 38-შია ნათქვამი.

§ 55. კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის ძირითადი თეორემის მეორე დამტკიცება

§ 23-ში ჩატარებული ძირითადი თეორემის დამტკიცება სრულიად არაალგებრული იყო. ჩვენ გვინდა ახლა გადმოვცეთ სხვა დამტკიცება, რომელიც დიდ ალგებრულ აპარატს იყენებს — მასში არსებითად გამოიყენება სიმეტრიული მრავალწევრების ძირითადი თეორემა (§ 52), აგრეთვე ყოველი მრავალწევრისათვის დაშლის ველის არსებობის თეორემა (§ 49), — მაშინ როცა ამ დამტკიცების არაალგებრული ნაწილი მინიმალურია და დაყვანილია ერთ ძალიან მარტივ დებულებაზე.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ § 23-ში დამტკიცებულია მრავალწევრის უფროსი წევრის მოდულის ლემა. თუ $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენ-

ტებს ნამდვილად ჩავთვლით და დავუშვებთ $k=1$, ამ ლემიდან ასეთ შედეგს მივიღებთ:

x-ის აბსოლუტური სიდიდით საკმაოდ დიდი ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ნიშანი მისი უფროსი წევრის ნიშანს ემთხვევა.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი:

კენტი ხარისხის ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი აქვს.

მართლაც, ვთქვათ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n,$$

ამასთან ყველა კოეფიციენტი ნამდვილია. n-ის კენტობის გამო x-ის დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებზე a_0x^n უფროს წევრს სხვადასხვა ნიშანი აქვს და ამიტომ, როგორც ზემოთაა დამტკიცებული, x-ის აბსოლუტური სიდიდით საკმაოდ დიდ დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებზე $f(x)$ მრავალწევრს აგრეთვე სხვადასხვა ნიშანი აქვს. მაშასადამე, არსებობს x-ის ისეთი ნამდვილი მნიშვნელობები, მაგალითად a და b, რომ

$$f(a)<0,\quad f(b)>0.$$

მაგრამ ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ $f(x)$ მრავალწევრი (ე. ი. მთელი რაციონალური ფუნქცია) უწყვეტი ფუნქციაა და ამიტომ, უწყვეტ ფუნქციათა ერთ-ერთი ძირითადი თვისების გამო, x-ის a და b-ს შორის მოთავსებულ რაიმე ნამდვილ მნიშვნელობაზე $f(x)$ იღებს ნებისმიერ მოცემულ მნიშვნელობას, რომელიც $f(a)$ და $f(b)$ შორისაა მოთავსებული. კერძოდ არსებობს a და b-ს შორის მდებარე ისეთი α, რომ $f(\alpha)=0$.

ამ შედეგზე დაყრდნობით დავამტკიცებთ ახლა შემდეგ დებულებას:

ნამდვილ კოეფიციენტებიან ნებისმიერი ხარისხის ყოველ მრავალწევრს აქვს ერთი მაინც კომპლექსური ფესვი.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ნამდვილ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრი, რომელსაც $n=2^kq$ ხარისხი აქვს, სადაც q კენტი რიცხვია. რადგან $k=0$ შემთხვევა უკვე განხილულია ზემოთ, ვთვლით, რომ $k>0$, ე. ი. n-ს ლუწ რიცხვად ვთვლით, და დამტკიცებას k-ს მიმართ ინდუქციით წავმართავთ, თუ ჩავთვლით, რომ ჩვენი დებულება უკვე დამტკიცებულია ნამდვილ კოეფიციენტებიანი ყველა იმ მრავალწევრისათვის, რომელთა ხარისხიც იყოფა 2^{k-1}-ზე, მაგრამ არ იყოფა 2^k-ზე[1].

ვთქვათ P არის $f(x)$ მრავალწევრის დაშლის ველი კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ (იხ. § 49) და ვთქვათ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ არის $f(x)$ მრავალწევრის P ველში შემავალი ფესვები. ავირჩიოთ ნებისმიერი ნამდვილი c რიცხვი და ავიღოთ P ველის

$$\beta_{ij}=\alpha_i\alpha_j+c(\alpha_i+\alpha_j),\quad i<j, \tag{1}$$

[1] მაშასადამე, ეს ხარისხი შეიძლება n-ზე მეტიც იყოს.

სახის მქონე ელემენტები. ცხადია, β_{ij} ელემენტთა რიცხვი უდრის

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2^k q\,(2^k q-1)}{2}=2^{k-1}q\,(2^k q-1)=2^{k-1}q', \tag{2}$$

სადაც q' კენტი რიცხვია.

ავაგოთ ახლა $P[x]$ რგოლის $g(x)$ მრავალწევრი, რომელსაც ფესვებად აქვს ყველა β_{ij} ელემენტი და მხოლოდ ისინი

$$g(x)=\prod_{i,\,j,\,i<j}(x-\beta_{ij}).$$

ამ მრავალწევრის კოეფიციენტები β_{ij}-ების ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებია. მაშასადამე, (1)-ის გამო, ისინი იქნებიან $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ის ნამდვილ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები (რადგან c ნამდვილი რიცხვია), ამასთან სიმეტრიული მრავალწევრებიც კი. მართლაც, ორი ნებისმიერი α-ს, მაგალითად α_k და α_l, ტრანსპოზიცია იწვევს ყველა β_{ij} სისტემაში მხოლოდ გადაადგილებას: ყოველი β_{kj}, სადაც j განსხვავებულია k-სგან და l-სგან, გადაიქცევა β_{lj} და პირუკუ, მაშინ როცა β_{kl} და ყველა β_{ij}, თუ i და j განსხვავებულია k და l-სგან, ადგილზე რჩება. მაგრამ $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები არ იცვლება მისი ფესვების გადაადგილებისას.

აქედან გამომდინარეობს, სიმეტრიული მრავალწევრების ძირითადი თეორემის ძალით, რომ $g(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების მრავალწევრები იქნებიან (ნამდვილი კოეფიციენტებით) და ამიტომ თვითონაც ნამდვილი რიცხვები იქნებიან. ამ მრავალწევრის ხარისხი, რომელიც β_{ij} ფესვთა რიცხვს უდრის, იყოფა (2)-ის ძალით, 2^{k-1}-ზე, მაგრამ არ იყოფა 2^k-ზე. ამიტომ ინდუქციის დაშვების ძალით $g(x)$ მრავალწევრის β_{ij} ფესვებიდან ერთი მაინც კომპლექსური რიცხვი უნდა იყოს.

ამგვარად, ნამდვილი c რიცხვის ყოველგვარი არჩევისას შეიძლება მივუთითოთ i, j ინდექსთა ისეთ წყვილზე, სადაც $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, რომ $\alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i+\alpha_j)$ ელემენტი კომპლექსური რიცხვია—გავიხსენოთ, რომ P ველი შეიცავს კომპლექსურ რიცხვთა ველს ქვეველის სახით. გასაგებია, რომ c რიცხვის სხვა არჩევანის დროს მას, საზოგადოდ, აღნიშნული აზრით ინდექსთა სხვა წყვილი შეესაბამება. მაგრამ არსებობს უსასრულოდ ბევრი სხვადასხვა ნამდვილი c რიცხვი, მაშინ როცა ჩვენს განკარგულებაში i, j წყვილების მხოლოდ სასრული რიცხვია. აქედან გამომდინარეობს, რომ შეიძლება ორი ისეთი განსხვავებული ნამდვილი რიცხვი c_1, c_2, $c_1 \neq c_2$, ავირჩიოთ, რომ მათ შეესაბამებოდეს i, j ინდექსთა ერთი და იგივე წყვილი, რომელთათვისაც

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i+\alpha_j) &= a, \\ \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i+\alpha_j) &= b \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

კომპლექსური რიცხვებია.

(3) ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$(c_1 - c_2)(\alpha_i + \alpha_j) = a - b,$$

საიდანაც

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{a - b}{c_1 - c_2},$$

ე. ი. ეს ჯამი თურმე კომპლექსური რიცხვია. აქედან და (3)-ის თუნდაც პირველი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha_i \alpha_j$ ნამრავლიც კომპლექსური რიცხვია. ამგვარად, α_i და α_j ელემენტები აღმოჩნდა კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი

$$x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = 0$$

კვადრატული განტოლების ფესვები და ამიტომ, როგორც კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამონახსნის § 38-ში გამოყვანილი ფორმულიდან გამომდინარეობს, თვითონ უნდა იყვნენ კომპლექსური რიცხვები. მაშასადამე, $f(x)$ მრავალწევრის ფესვებს შორის ვიპოვეთ ორი კომპლექსური ფესვიც კი და ამით დავამტკიცეთ ჩვენი დებულება.

ძირითადი თეორემის სრული დამტკიცებისათვის დაგვრჩენია განვიხილოთ ნებისმიერ კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის შემთხვევა. ვთქვათ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ასეთი მრავალწევრია. ავიღოთ

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_0 x^n + \overline{a}_1 x^{n-1} + \dots + \overline{a}_n$$

მრავალწევრი, რომელიც მიიღება $f(x)$-დან ყველა კოეფიციენტის შეუღლებული კომპლექსური რიცხვით შეცვლით, და განვიხილოთ

$$F(x) = f(x)\,\overline{f}(x) = b_0 x^{2n} + b_1 x^{2n-1} + \dots + b_k x^{2n-k} + \dots + b_{2n}$$

ნამრავლი, სადაც, ცხადია,

$$b_k = \sum_{i+j=k} a_i \overline{a}_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების § 18-დან ცნობილ თვისებებზე დაყრდნობით ვიღებთ, რომ

$$\overline{b_k} = \sum_{i+j=k} \overline{a}_i a_j = b_k,$$

ე. ი. $F(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ნამდვილია.

როგორც ზემოთ დავამტკიცეთ, აქედან გამომდინარეობს, რომ $F(x)$ მრავალწევრს ერთი მაინც β კომპლექსური ფესვი აქვს,

$$F(\beta) = f(\beta)\,\overline{f}(\beta) = 0.$$

ე. ი. ან $f(\beta)=0$, ანდა $\overline{f}(\beta)=0$. პირველ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია. თუკი ადგილი აქვს მეორე შემთხვევას, ე. ი.

$$\overline{a_0}\,\beta^n+\overline{a_1}\,\beta^{n-1}+\ldots+\overline{a_n}=0,$$

მაშინ, თუ ყველა აქ შემავალ კომპლექსურ რიცხვს შეუღლებულით შევცვლით (რაც, როგორც ვიცით, ტოლობას არ არღვევს), მივიღებთ:

$$f(\overline{\beta})=a_0\,\overline{\beta}^n+a_1\overline{\beta}^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

ე. ი. $f(x)$ ფესვად აქვს $\overline{\beta}$ კომპლექსური რიცხვი. ძირითადი თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

თავი მეთოთხმეტე

რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები

§ 56*. რაციონალურ რიცხვთა ველზე მრავალწევრთა დაყვანადობა

მესამე რიცხვითი ველი, რომელიც ნამდვილ და კომპლექსურ რიცხვთა ველებთან ერთად ჩვენთვის განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს, რაციონალურ რიცხვთა ველია; ავღნიშნოთ იგი R-ით. იგი ყველაზე მცირეა რიცხვით ველებს შორის: როგორც § 43-შია დამტკიცებული, R ველი მთლიანად შედის ყოველ რიცხვით ველში. ჩვენ გვაინტერესებს ახლა რაციონალურ რიცხვთა ველზე მრავალწევრის დაყვანადობის საკითხი, ხოლო შემდეგ პარაგრაფში— რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის რაციონალური (მთელი და წილადი) ფესვების საკითხი. კიდევ ერთხელ გავუსვათ ხაზი იმას, რომ ეს ორი განსხვავებული საკითხია:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

მრავალწევრი დაყვანადია რაციონალური ველის მიმართ, თუმცა არა აქვს არც ერთი რაციონალური ფესვი.

რა შეიძლება ვთქვათ R ველზე დაყვანადი მრავალწევრების შესახებ? თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თუ მოცემულია $f(x)$ მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები რაციონალურია, მაგრამ ყველა არ არის მთელი, მაშინ, თუ კოეფიციენტებს საერთო მნიშვნელზე დავიყვანთ და $f(x)$-ს ამ მნიშვნელზე გავამრავლებთ, რომელიც, მაგალითად, k-ს ტოლია, მივიღებთ $kf(x)$ მრავალწევრს, რომლის ყველა კოეფიციენტი უკვე მთელი რიცხვია. ცხადია, რომ $f(x)$ და $kf(x)$ მრავალწევრებს ერთნაირი ფესვები აქვთ; მეორე მხრივ, ისინი ერთდროულად R ველის მიმართ დაყვანადი ან დაუყვანადია.

მაგრამ ჩვენ ჯერ არ მიგვიღია უფლება შემოვიფარგლოთ შემდგომში მთელ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრების განხილვით. მართლაც, ვთქვათ მთელრიცხვოვანი $g(x)$ მრავალწევრი (ე. ი. მრავალწევრი მთელი კოეფიციენტებით) დაყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ, ე. ი. იშლება ნაკლები ხარისხის რაციონალურ (საზოგადოდ, წილად) კოეფიციენტებიან მამრავლებად. გამომდინარეობს თუ არა აქედან $g(x)$-ის დაშლა მთელ კოეფიციენტებიან მამრავლებად? სხვანაირად რომ ვთქვათ, შეიძლება თუ არა რა-

ციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ დაუყვანადი მთელ კოეფიციენტებიანი მრა-
ვალწევრი დაუყვანადი აღმოჩნდეს მთელ რიცხვთა რგოლის მიმართ?

ამ კითხვებზე პასუხი შეიძლება მივიღოთ § 51-ში ჩატარებული ანალო-
გიური განხილვების დახმარებით. მთელ კოეფიციენტებიან $f(x)$ მრავალწევრს ვუწოდოთ პ რ ი მ ი ტ ი უ ლ ი, თუ მისი კოეფიციენტები ერთობლივად თანამარ-
ტივია, ე. ი. არა აქვთ საერთო მამრავლები, რომელნიც განსხვავდებიან 1
და —1. თუ მოცემულია რაციონალურ კოეფიციენტებიანი ნებისმიერი $\varphi(x)$ მრავალწევრი, მაშინ მისი წარმოსახვა, ამასთან ცალსახად, შეიძლება შეუ-
ვეცადი წილადისა და რაიმე პრიმიტიული მრავალწევრის ნამრავლის სახით:

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x); \tag{1}$$

ამისათვის საჭიროა გამოვიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ $\varphi(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტის საერთო მნიშვნელი, ხოლო შემდეგ ამ კოეფიციენტე-
ბის მრიცხველების საერთო მამრავლებიც; შევნიშნოთ, რომ $f(x)$-ის ხარისხი $\varphi(x)$-ის ხარისხს უდრის. (1) წარმოდგენის ცალსახობა (ნიშნამდე სიზუსტით) შემდეგნაირად მტკიცდება. ვთქვათ

$$\varphi(x)=\frac{a}{b}f(x)=\frac{c}{d}g(x),$$

სადაც $g(x)$ ისევ პრიმიტიული მრავალწევრია. მაშინ

$$adf(x)=bc\,g(x).$$

ამგვარად, ad და bc მიღებულია ერთი და იგივე მთელრიცხოვანი მრა-
ვალწევრის კოეფიციენტებიდან ყველა საერთო მამრავლის გამოტანით, ამი-
ტომ ერთმანეთისაგან შეიძლება მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებოდნენ. აქედან გამომდინარეობს, რომ პრიმიტიული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებიც ერთმა-
ნეთისაგან შეიძლება მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებოდნენ.

მთელრიცხოვანი პრიმიტიული მრავალწევრებისათვის სამართლიანი
რჩება გ ა უ ს ი ს ლ ე მ ა:

ო რ ი მ თ ე ლ რ ი ც ხ ო ვ ა ნ ი პ რ ი მ ი ტ ი უ ლ ი მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს ნ ა მ-
რ ა ვ ლ ი თ ვ ი თ ო ნ პ რ ი მ ი ტ ი უ ლ ი მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ა.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ორი პრიმიტიული მთელრიცხოვანი

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_ix^{k-i}+\ldots+a_k,$$
$$g(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\ldots+b_jx^{l-j}+\ldots+b_l$$

მრავალწევრი და ვთქვათ

$$f(x)\,g(x)=c_0x^{k+l}+c_1x^{k+l-1}+\ldots+c_{i+j}x^{(k+l)-(i+j)}+\ldots+c_{k+l}.$$

თუ ეს ნამრავლი არ არის პრიმიტიული, მაშინ არსებობს ისეთი მ ა რ ტ ი ვ ი p რიცხვი, რომელიც ყველა $c_0, c_1, \ldots, c_{k+l}$ კოეფიციენტების საერთო გამყო-
ფია. რადგან პრიმიტიული $f(x)$ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი არ შეი-
ძლება იყოფოდეს p-ზე, ამიტომ a_i კოეფიციენტი იყოს პირველი, რომელიც

p-ზე არ იყოფა; ანალოგიურად b_j-ით ჩვენ აღვნიშნავთ $g(x)$ მრავალწევრის პირველ კოეფიციენტს, რომელიც p-ზე არ იყოფა. თუ $f(x)$-სა და $g(x)$-ს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ და $x^{(k+l)-(i+j)}$-ს შემცველ წევრებს შევაგროვებთ, მივიღებთ:

$$c_{i+j}=a_i b_j+a_{i-1} b_{j+1}+a_{i-2} b_{j+2}+\dots+a_{i+1} b_{j-1}+a_{i+2} b_{j-2}+\dots$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი იყოფა p-ზე. მასზე იყოფა აგრეთვე მარჯვენა ნაწილის ყველა შესაკრები, გარდა პირველისა; მართლაც, პირობის ძალით, რომელიც დადებულია i და j-ს არჩევანზე, ყველა $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots$ და აგრეთვე $b_{j-1}, b_{j-2}, \dots$, კოეფიციენტი იყოფა p-ზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ $a_i b_j$ ნამრავლიც იყოფა p-ზე და ამიტომ, p რიცხვის სიმარტივის გამო, p-ზე უნდა გაიყოს ერთი მაინც a_i, b_j კოეფიციენტებიდან, რასაც ადგილი არა აქვს. ამით მთავრდება ლემის დამტკიცება.

გადავდივართ ზემოთ დასმული კითხვების პასუხზე. ვთქვათ მთელ კოეფიციენტებიანი n-ური ხარისხის $g(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ:

$$g(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x),$$

სადაც $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია და მათი ხარისხები ნაკლებია n-ზე. მაშინ

$$\varphi_i(x)=\frac{a_i}{b_i} f_i(x), \quad i=1,\ 2,$$

სადაც $\frac{a_i}{b_i}$ შეუკვეცადი წილადია, $f_i(x)$—პრიმიტიული მრავალწევრი. აქედან

$$g(x)=\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}\,[f_1(x)\,f_2(x)].$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი მთელრიცხოვანი მრავალწევრია, ამიტომ მარჯვენა ნაწილის $b_1 b_2$ მნიშვნელი უნდა შეიკვეცოს. მაგრამ კვადრატულ ფრჩხილებში მდგომი მრავალწევრი, გაუსის ლემის თანახმად, პრიმიტიულია. ამიტომ $b_1 b_2$-ის ყოველი მარტივი მამრავლი შეიძლება შეიკვეცოს მხოლოდ $a_1 a_2$-ის რაიმე მარტივ მამრავლთან, ხოლო რადგან a_i და b_i თანამარტივია, $i=1,\ 2$, ამიტომ a_2 რიცხვი უნაშთოდ უნდა გაიყოს b_1-ზე, a_1—b_2-ზე:

$$a_2=b_1 a'_2, \quad a_1=b_2 a'_1.$$

აქედან

$$g(x)=a'_1 a'_2 f_1(x) f_2(x).$$

თუ $a'_1 a'_2$ კოეფიციენტს მივუერთებთ $f_1(x)$, $f_2(x)$ მამრავლებიდან ნებისმიერს, მივიღებთ $g(x)$ მრავალწევრის დაშლას ნაკლები ხარისხის მთელ კოეფიციენტებიან მამრავლებად. ამით დამტკიცდა შემდეგი თეორემა:

მთელ რიცხვთა რგოლის მიმართ დაუყვანადი მთელ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრი დაუყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართაც.

ახლა, საბოლოოდ, ჩვენ უფლება გვაქვს იმ საკითხებში, რომლებიც ეხება რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ მრავალწევრის დაყვანადობას, შემოვიფარგლოთ მხოლოდ მთელრიცხოვანი მრავალწევრების დაშლით მამრავლებად, რომლის კოეფიციენტებიც აგრეთვე მთელია.

ჩვენ ვიცით, რომ კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ დაყვანადია ყოველი მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ერთზე მეტია, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ—ყოველი მრავალწევრი (ნამდვილი კოეფიციენტებით), რომლის ხარისხი მეტია ორზე. სულ სხვა მდგომარეობაა რაციონალურ რიცხვთა ველის შემთხვევაში: ნებისმიერი n-სათვის შეიძლება მოვუთითოთ n-ური ხარისხის მრავალწევრზე რაციონალური (მთელითაც კი) კოეფიციენტებით, რომელიც დაუყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ. ამ დებულების დამტკიცება ეყრდნობა ველის მიმართ მრავალწევრის დაუყვანადობის შემდეგ საკმარის ნიშანს, რომელსაც აიზენშტაინის კრიტერიუმი ეწოდება:

ვთქვათ მოცემულია მთელ კოეფიციენტებიანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრი. თუ ერთი წესით მაინც შეიძლება ისეთი მარტივი p რიცხვის შერჩევა, რომ იგი აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს:

1) უფროსი a_0 კოეფიციენტი არ იყოფა p-ზე,

2) ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი იყოფა p-ზე,

3) თავისუფალი წევრი იყოფა რა p-ზე, არ იყოფა p^2-ზე,

მაშინ $f(x)$ მრავალწევრი დაუყვანადია რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ.

მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალწევრი დაყვანადია R ველის მიმართ, მაშინ იგი იშლება ორი ნაკლები ხარისხის მამრავლებად მთელი კოეფიციენტებით:

$$f(x)=(b_0x^k+b_1x^{k-1}+\dots+b_k)(c_0x^l+c_1x^{l-1}+\dots+c_l),$$

სადაც $k<n$, $l<n$, $k+l=n$. აქედან თუ ტოლობის ორივე ნაწილში შევადარებთ კოეფიციენტებს, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
a_n&=b_kc_l,\\
a_{n-1}&=b_kc_{l-1}+b_{k-1}c_l,\\
a_{n-2}&=b_kc_{l-2}+b_{k-1}c_{l-1}+b_{k-2}c_l,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_0&=b_0c_0.
\end{aligned}\right|\qquad(2)$$

რადგან a_n იყოფა p-ზე, ხოლო p რიცხვი მარტივია, (2) ტოლობათაგან პირველიდან გამომდინარეობს, რომ b_k, c_l მამრავლებიდან ერთი უნდა იყოფოდეს p-ზე. ისინი ორივე ერთდროულად არ შეიძლება იყოფოდნენ p-ზე, რადგან a_n, პირობის თანახმად, არ იყოფა p^2-ზე. ვთქვათ, მაგალითად, b_k

იყოფა p-ზე და ამიტომ c_i თანამარტივია p-თან. გადავდივართ ახლა (2) ტოლობებიდან მეორეზე. მისი მარცხენა ნაწილი, აგრეთვე მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები იყოფა p-ზე, ამიტომ p-ზე იყოფა $b_{k-1} c_i$ ნამრავლიც; მაგრამ რადგან c_i არ იყოფა p-ზე, ამიტომ p-ზე გაიყოფა b_{k-1}. ასევე მივიღებთ (2) ტოლობათაგან მესამედან, რომ b_{k-2} იყოფა p-ზე, და ა. შ. ბოლოს, $k+1$ ტოლობიდან მიიღება, რომ b_0 იყოფა p-ზე; მაგრამ მაშინ (2) ტოლობათაგან უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ a_0 იყოფა p-ზე, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ძალიან ადვილია ნებისმიერი n-სათვის დავწეროთ n-ური ხარისხის მთელრიცხოვანი მრავალწევრი, რომელიც აიზენშტაინის კრიტერიუმის პირობებს დააკმაყოფილებს და, მაშასადამე, დაუყვანადი იქნება რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ. ასეთია, მაგალითად, x^n+2 მრავალწევრი; მისთვის გამოდგება აიზენშტაინის კრიტერიუმი, როცა $p=2$.

აიზენშტაინის კრიტერიუმი R ველის მიმართ დაყვანადობის მხოლოდ საკმარისი პირობაა, მაგრამ სრულიადაც არაა აუცილებელი: თუ მოცემული $f(x)$ მრავალწევრისათვის შეუძლებელია ისეთი მარტივი p რიცხვის პოვნა, რომ აიზენშტაინის კრიტერიუმის პირობები დაკმაყოფილდეს, მაშინ იგი შეიძლება დაყვანადი იყოს, როგორც x^2-5x+6, მაგრამ შეიძლება დაუყვანადიც იყოს, როგორც x^2+1. აიზენშტაინის კრიტერიუმის გარდა არსებობს R ველის მიმართ მრავალწევრის დაუყვანადობის ბევრი სხვა საკმარისი კრიტერიუმი, მაგრამ ნაკლებად მნიშვნელოვანი. არსებობს, აგრეთვე მეთოდი, რომელიც კრონეკერს ეკუთვნის და რომელიც საშუალებას გვაძლევს გადავწყვიტოთ მთელ კოეფიციენტებიანი ნებისმიერი მრავალწევრი დაყვანადია თუ არა R ველის მიმართ. მაგრამ ეს მეთოდი ძალზედ რთულია და პრაქტიკულად თითქმის გამოუყენებელი.

მაგალითი. განვიხილოთ

$$f_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$$

მრავალწევრი, სადაც p მარტივი რიცხვია. ამ მრავალწევრის ფესვებია თვით ერთეულისაგან განსხვავებული p-ური ხარისხის ფესვები ერთეულიდან; რადგან ეს ფესვები 1-თან ერთად ჰყოფენ კომპლექსური სიბრტყის ერთეულოვან წრეს ტოლ p ნაწილად, ამიტომ $f_p(x)$ მრავალწევრს *წრის დაყოფის მრავალწევრი* ეწოდება.

ამ მრავალწევრისათვის არ შეიძლება პირდაპირ გამოვიყენოთ აიზენშტაინის კრიტერიუმი. მაგრამ მოვახდინოთ უცნობის შეცვლა, დაშვებით $x=y+1$. მივიღებთ:

$$g(y)=f_p(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}=\frac{1}{y}\left[y^p+py^{p-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-2}+\ldots+py\right]=y^{p-1}+p\,y^{p-2}+$$

$$+\frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3}+\ldots+p.$$

$g(y)$ მრავალწევრის კოეფიციენტებია ბინომიალური კოეფიციენტები და ამიტომ ყველა, გარდა უფროსისა, იყოფა p-ზე, ამასთან თავისუფალი წევრი არ იყოფა p^2-ზე. ამგვარად აიზენშტაინის კრიტერიუმის თანახმად $g(y)$ მრავალწევრი დაუყვანადია R ველის მიმართ, აქედან გამომდინარეობს R ველის მიმართ დაუყვანადობა წრის დაყოფის $f_p(x)$ მრავალწევრისა. მართლაც, თუ

$$f_p(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

მაშინ

$$g(y) = \varphi(y+1)\psi(y+1).$$

§ 57*. მთელრიცხოვან მრავალწევრთა რაციონალური ფესვები

ზემოთ მითითებული იყო, რომ მოცემული მრავალწევრის დაუყვანად მამრავლებად დაშლის საკითხს რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ არა აქვს პრაქტიკულად რამდენადმე დამაკმაყოფილებელი ამოხსნა. მაგრამ ამ საკითხის კერძო შემთხვევა, რომელიც რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის წრფივი მამრავლების გამოყოფას, ე. ი. მისი რაციონალური ფესვების მონახვას ეხება, უკვე ძალზედ მარტივია და ამოიხსნება დიდი გამოთვლების გარეშე. თავისთავად ცხადია, რომ რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის რაციონალური ფესვების მონახვის საკითხი არანაირად არ ამოწურავს ამ მრავალწევრის ნამდვილი ფესვების საერთო საკითხს, ე. ი. მეცხრე თავში გადმოცემული მეთოდები და შედეგები მთლიანად ინარჩუნებენ თავის მნიშვნელობას რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრისათვისაც.

შევუდგებით რა რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის რაციონალური ფესვების ძიების საკითხს, შევნიშნოთ, რომ როგორც წინა პარაგრაფში იყო აღნიშნული, შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ მხოლოდ მთელ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის განხილვით; ჩვენ განვიხილავთ ამასთან ცალკე მთელი ფესვების შემთხვევას და ცალკე წილადი ფესვების შემთხვევას.

თუ მთელი α რიცხვი არის მთელ კოეფიციენტებიანი $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ α იქნება ამ მრავალწევრის თავისუფალი წევრის გამყოფი.

მართლაც, ვთქვათ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

$f(x)$ გავყოთ $(x-\alpha)$-ზე:

$$f(x) = (x-\alpha)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}).$$

თუ გაყოფას შევასრულებთ § 22-ში აღწერილი ჰორნერის მეთოდით, მივიღებთ, რომ განაყოფის ყველა კოეფიციენტი, მათ რიცხვში b_{n-1}-ც, მთელი რიცხვია, ხოლო რადგან

$$a_n = -\alpha b_{n-1} = \alpha(-b_{n-1}),$$

ამიტომ ჩვენი დებულება დამტკიცებულია[1].

[1] შეცდომა იქნებოდა გვემტკიცებინა ეს თეორემა იმაზე დაყრდნობით, რომ თავისუფალი a_n წევრი $f(x)$ მრავალწევრის ყველა ფესვის ნამრავლია (ნიშნამდე სიზუსტით): ამ

ამგვარად, თუ მთელრიცხოვან $f(x)$ მრავალწევრს გააჩნია მთელი ფესვები, მაშინ ისინი მოინახება თავისუფალი წევრის გამყოფთა შორის. საჭიროა, მაშასადამე, გავსინჯოთ თავისუფალი წევრის ყოველგვარი გამყოფები, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი; თუ არც ერთი მათგანი არ არის მრავალწევრის ფესვი, მაშინ ჩვენს მრავალწევრს მთელი ფესვი საერთოდ არა ჰქონია.

თავისუფალი წევრის ყველა გამყოფის გასინჯვა შეიძლება ძალზედ რთული აღმოჩნდეს, მრავალწევრის მნიშვნელობები რომ გამოვთვალოთ თუნდაც ჰორნერის მეთოდით და არა უცნობის მაგივრად ყოველი გამყოფის პირდაპირი ჩასმით. შემდეგი შენიშვნები ნებას გვაძლევს რამდენადმე გავამარტივოთ ეს გამოთვლები. თავდაპირველად, რადგან 1 და -1 ყოველთვისაა თავისუფალი წევრის გამყოფი, გამოვთვლით $f(1)$ და $f(-1)$, რაც არ წარმოადგენს დაბრკოლებას. შემდეგ, თუ მთელი α რიცხვი ფესვია $f(x)$-სათვის:

$$f(x)=(x-\alpha)\,q(x),$$

მაშინ, როგორც ზემოთაა აღნიშნული, $q(x)$ განაყოფის ყველა კოეფიციენტი იქნება მთელი რიცხვი და მაშასადამე

$$\frac{f(1)}{\alpha-1}=-q(1), \qquad \frac{f(-1)}{\alpha+1}=-q(-1)$$

განაყოფები უნდა იყვნენ მთელი რიცხვები. ამგვარად, თავისუფალი წევრის მხოლოდის α გამყოფები უნდა გაისინჯოს (1 და -1-საგან განსხვავებულთა რიცხვიდან), რომელთათვისაც $\frac{f(1)}{\alpha-1}$, $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ განაყოფები მთელი რიცხვებია.

მაგალითები. 1. ვიპოვოთ

$$f(x)=x^3-2x^2-x-6$$

მრავალწევრის მთელი ფესვები.

თავისუფალი წევრის გამყოფებია ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. რადგან, $f(1)=-8$, $f(-1)=-8$, ამიტომ 1 და -1 არ არის ფესვები. შემდეგ,

$$\frac{-8}{2+1}, \quad \frac{-8}{-2-1}, \quad \frac{-8}{6-1}, \quad \frac{-8}{-6-1}$$

რიცხვები წილადებია და ამიტომ 2, -2, 6, -6 გამყოფები უნდა უკუვაგდოთ, მაშინ როცა

$$\frac{-8}{3-1}, \quad \frac{-8}{3+1}, \quad \frac{-8}{-3-1}, \quad \frac{-8}{-3+1}$$

ფესვთა შორის შეიძლება იყოს წილადიც, ირაციონალურიც, კომპლექსურიც და ამიტომ წინასწარ შეუძლებელია ვთქვათ, რომ α-ს გარდა ყველა ამ ფესვთა ნამრავლი მთელია.

რიცხვები მთელია, და ამიტომ 3 და —3 გამყოფები უნდა გავსინჯოთ. გამოვიყენოთ ჰორნერის მეთოდი:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline
-3 & 1 & -5 & 14 & -48
\end{array},
$$

ე. ი. $f(-3)=-48$ და ამიტომ -3 არ არის $f(x)$-ის ფესვი. ბოლოს

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline
3 & 1 & 1 & 2 & 0
\end{array},
$$

ე. ი. $f(3)=0$: რიცხვი 3 არის $f(x)$-ის ფესვი. ერთდროულად ვიპოვეთ $f(x)$-ის $(x-3)$-ზე განაყოფის კოეფიციენტები:

$$f(x)=(x-3)(x^2+x+2).$$

ადვილი დასანახია, რომ x^2+x+2 განაყოფს არა აქვს ფესვად რიცხვი 3, ე. ი. ეს რიცხვი არ არის $f(x)$-ის ჯერადი ფესვი.

2. ვიპოვოთ

$$f(x)=3x^4+x^3-5x^2-2x+2$$

მრავალწევრის მთელი ფესვები.

აქ თავისუფალი წევრის გამყოფებია ± 1 და ± 2. შემდგომ, $f(1)=-1$, $f(-1)=1$, ე. ი. 1 და —1 არ არის ფესვები. ბოლოს, რადგან

$$\frac{1}{2+1} \text{ და } \frac{-1}{-2-1}$$

რიცხვები წილადებია, ამიტომ 2 და —2 აგრეთვე არ არის ფესვები და $f(x)$ მრავალწევრს საერთოდ არ აქვს მთელი ფესვები.

გადავდივართ წილადი ფესვების საკითხზე.

თუ მთელ რიცხოვან მრავალწევრს, რომლის უფროსი კოეფიციენტი ერთის ტოლია, აქვს რაციონალური ფესვი, მაშინ ეს ფესვი იქნება მთელი რიცხვი.

მართლაც, ვთქვათ მთელ კოეფიციენტებიან

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

მრავალწევრს აქვს ფესვად უკვეცი $\frac{b}{c}$ წილადი, ე. ი.

$$\frac{b^n}{c^n}+a_1\frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}+a_2\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}+\ldots+a_n=0.$$

აქედან

$$\frac{b^n}{c}=-a_1b^{n-1}-a_2b^{n-2}c-\ldots-a_nc^{n-1},$$

ე. ი. უკვეცი წილადი უდრის მთელ რიცხვს, რაც შეუძლებელია.

მთელრიცხოვანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

მრავალწევრის ყველა რაციონალური (წილადი და მთელი) ფესვის მისაღებად საჭიროა ვიპოვოთ

$$\varphi(y)=y^n+a_1 y^{n-1}+a_0 a_2 y^{n-2}+\dots+a_0^{n-2} a_{n-1} y+a_0^{n-1} a_n$$

მრავალწევრის ყველა მთელი ფესვი და გავყოთ ისინი a_0-ზე.

მართლაც, $f(x)$ გავამრავლოთ a_0^{n-1}-ზე, ხოლო შემდეგ მოვახდინოთ უცნობის შეცვლა, დავუშვებთ რა $y=a_0 x$. ცხადია, რომ

$$\varphi(y)=\varphi(a_0 x)=a_0^{n-1} f(x).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ მრავალწევრის ფესვები უდრის $\varphi(y)$ მრავალწევრის ფესვებს გაყოფილს a_0-ზე. კერძოდ, $f(x)$-ის რაციონალურ ფესვებს შეესაბამება აგრეთვე $\varphi(y)$-ის რაციონალური ფესვები; მაგრამ, რადგან $\varphi(y)$-ის უფროსი კოეფიციენტი უდრის ერთს, ამიტომ ეს ფესვები შეიძლება მხოლოდ მთელი იყოს და ჩვენ უკვე გვაქვს მათი მონახვისათვის მეთოდი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ

$$f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$$

მრავალწევრის რაციონალური ფესვები.

თუ $f(x)$-ს გავამრავლებთ 3^3-ზე და დავუშვებთ $y=3x$, მივიღებთ:

$$\varphi(y)=y^4+5y^3+3y^2+45y-54.$$

ვეძებთ $\varphi(y)$ მრავალწევრის მთელ ფესვებს.

ვიპოვოთ $\varphi(1)$ ჰორნერის მეთოდით:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 3 & 45 & -54 \\ \hline 1 & 1 & 6 & 9 & 54 & 0 \end{array}.$$

ამგვარად, $\varphi(1)=0$, ე. ი. 1 არის $\varphi(y)$-ის ფესვი, ამასთან

$$\varphi(y)=(y-1)\,q(y),$$

სადაც

$$q(y)=y^3+6y^2+9y+54.$$

ვიპოვოთ $q(y)$ მრავალწევრის მთელი ფესვები. თავისუფალი წევრის გამყოფებია რიცხვები ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, ±27 ±54; აქ

$$q(1)=70, \quad q(-1)=50.$$

თუ გამოვითვლით ყოველი α გამყოფისათვის $\frac{q(1)}{\alpha-1}$ და $\frac{q(-1)}{\alpha+1}$-ს, აღმოვაჩენთ, რომ უნდა გადავაგდოთ ყველა გამყოფი, გარდა $(\alpha=-6)$-სა. ვსინჯავთ ამ გამყოფს

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & 9 & 54 \\ \hline -6 & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}.$$

ამგვარად, $q(-6)=0$, ე. ი. -6 არის $q(y)$-ის ფესვი და ამიტომ $\varphi(y)$-ისაც.

$\varphi(y)$ მრავალწევრს აქვს, მაშასადამე, მთელი 1 და -6 ფესვები. ამგვარად $f(x)$ მრავალწევრის რაციონალური ფესვები იქნება მხოლოდ და მხოლოდ $\frac{1}{3}$ და -2.

კიდევ ერთხელ ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ ზემოთ აღწერილი მეთოდები გამოსადეგია მ ხ ო ლ ო დ მთელ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებისათვის და მ ხ ო ლ ო დ მათი რაციონალური ფესვების მოსაძებნად.

§ 58*. ალგებრული რიცხვები

ყოველ n-ური ხარისხის რაციონალურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრს კომპლექსურ რიცხვთა ველში აქვს n ფესვი, რომელთაგანაც ზოგიერთები (ან ყველაც კი) შეიძლება რაციონალურ რიცხვთა ველის გარეთ იყვნენ. მაგრამ არა ყოველი კომპლექსური ან ნამდვილი რიცხვი არის რაიმე რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვი. ის კომპლექსური (კერძოდ, ნამდვილი) რიცხვები, რომელნიც არიან ასეთი მრავალწევრების ფესვები, იწოდებიან *ალგებრულ* რიცხვებად, *ტრანსცენდენტული* რიცხვების საწინაალმდეგოდ. ალგებრულ რიცხვებს ეკუთვნის ყველა რაციონალური რიცხვი, როგორც პირველი ხარისხის რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვი, აგრეთვე ყოველი $\sqrt[n]{a}$ სახის რადიკალი ფესქვეშა რაციონალური a რიცხვით, როგორც x^n-a ორწევრის ფესვი. მეორე მხრივ, მათემატიკური ანალიზის დიდ კურსებში მტკიცდება ტრანსცენდენტობა e რიცხვისა (ნატურალურ ლოგარითმთა სისტემის ფუძისა), აგრეთვე ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილი π რიცხვისა.

თუ α რიცხვი ალგებრულია, მაშინ იგი იქნება ფესვი რაიმე მთელ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრისაც კი და ამიტომ ამ მრავალწევრის დაუყვანად გამყოფთაგან ერთ-ერთის ფესვი აგრეთვე მთელი კოეფიციენტებით. ის *დაუყვანადი მთელრიცხოვანი მრავალწევრი*, რომლის ფესვიცაა α, *განსაზღვრულია ცალსახად მუდმივი მამრავლის სიზუსტით*, ე. ი. *სავსებით ცალსახად, თუ მოვითხოვთ, რომ ამ მრავალწევრის კოეფიციენტები ერთობლივად თანამარტივნი იყვნენ* (ე. ი. რომ მრავალწევრი პრიმიტიული იყოს). მართლაც, თუ α არის დაუყვანადი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ ამ მრავალწევრების საერთო უდიდესი გამყოფი განსხვავებულია ერთისაგან, და ამიტომ ეს მრავალწევრები, მათი დაუყვანადობის გამო, შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნულოვანი ხარისხის მამრავლით.

ალგებრული რიცხვები, რომელნიც არიან ერთი და იგივე დაუყვანადი (R ველის მიმართ) მრავალწევრის ფესვები, იწოდებიან ერთმანეთის *შეუღლებულად*[1]. მაშასადამე, ალგებრულ რიცხვთა მთელი სიმრავლე იყოფა ერთმანეთის შეუღლებულ რიცხვთა არათანამკვეთ სასრული კლასებად. ყოველ რაციონალურ რიცხვს, როგორც პირველი ხარისხის მრავალწევრის ფესვს, არა აქვს შეუღლებული რიცხვი, რომელიც მისგან განსხვავდება. ეს თვისება დამახასიათებელია რაციონალური რიცხვებისათვის: ყოველი არარაციონალური ალგებრული რიცხვი იქნება დაუყვანადი მრავალწევრის ფესვი, რომლის ხარისხი ერთზე მეტია და მისთვის არსებობს მისგან განსხვავებული შეუღლებული.

ყველა ალგებრული რიცხვის სიმრავლე კომპლექსური რიცხვთა ველის ქვეველია. სხვაგვარად, *ალგებრულ რიცხვთა*

[1] ეს ცნება არ უნდა ავურიოთ კომპლექსურ რიცხვთა შეუღლებლობასთან.

ჯამი, ნამრავლი, სხვაობა და განაყოფი ისევ ალგებრული რიცხვი იქნება.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ალგებრული α და β რიცხვები. აღვნიშნოთ $\alpha_1=\alpha,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n$ ყველა α-ს შეუღლებული რიცხვი, $\beta_1=\beta,\ \beta_2,\dots,\ \beta_s$-ით — β-ს შეუღლებული რიცხვი. $f(x)$-ითა და $g(x)$-ით — რაციონალურ კოეფიციენტებიანი დაუყვანადი მრავალწევრები, რომელთაც ფესვებად შესაბამისად α და β აქვთ. დავწეროთ მრავალწევრი, რომლის ფესვებია ყოველგვარი შესაძლებელი $\alpha_i+\beta_j$ ჯამები; ეს იქნება

$$\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i+\beta_j)].$$

ამ მრავალწევრის კოეფიციენტები, ცხადია, არ შეიცვლება ყველა α_i-ის ერთმანეთში გადანაცვლებისას, აგრეთვე ყველა β_j-სათვის. ისინი არიან, მაშასადამე, ცვლადთა ორი სისტემის მიმართ სიმეტრიული მრავალწევრების თეორემის საფუძველზე (იხ. § 53-ის ბოლო), მრავალწევრები $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების კოეფიციენტების მიმართ. სხვაგვარად, $\varphi(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები რაციონალური რიცხვებია და ამიტომ $\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1$ რიცხვი, რომელიც მისი ერთ-ერთი ფესვია, იქნება ალგებრული.

ამგვარადვე

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-(\alpha_i-\beta_j)]$$

და

$$\chi(x)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}[x-\alpha_i\beta_j]$$

მრავალწევრების დახმარებით მტკიცდება $\alpha-\beta$ და $\alpha\beta$ რიცხვების ალგებრულობა.

განაყოფის ალგებრულობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ α რიცხვი ალგებრულია და ნულისაგან განსხვავებული, მაშინ α^{-1}-იც არის აგრეთვე ალგებრული რიცხვი. ვთქვათ α არის

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვი. მაშინ, ცხადია,

$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

მრავალწევრს, აგრეთვე რაციონალური კოეფიციენტებით, ფესვად ექნება α^{-1} რიცხვი, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლახან დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ რაციონალური რიცხვისა და რადიკალის ნებისმიერი ჯამი, მაგალითად $1+\sqrt[3]{2}$, აგრეთვე რადიკალთა ნებისმიერი ჯამი, მაგალითად $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, იქნება ალ-

გებრული რიცხვები. მაგრამ ჯერჯერობით არ შეგვიძლია ვამტკიცოთ „მრავალსართულიანი“ რადიკალების სახით ჩაწერილი რიცხვების, მაგალითად $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, ალგებრულობა. ეს გამომდინარეობს მხოლოდ შემდეგი თეორემიდან:

თუ ω რიცხვი არის

$$\varphi(x)=x^n+\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\ldots+\lambda x+\mu$$

მრავალწევრის ფესვი, რომლის კოეფიციენტები ალგებრული რიცხვებია, მაშინ ω-ც ალგებრული რიცხვია.

ვთქვათ $\alpha_i, \beta_j, \ldots, \lambda_s, \mu_t$ გაირბენენ შესაბამისად $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$-ს შეუღლებულ რიცხვებს, ამასთან $\alpha_1=\alpha, \beta_1=\beta, \ldots, \lambda_1=\lambda, \mu_1=\mu$. განვიხილოთ

$$\varphi_{i, j, \ldots, s, t}(x)=x^n+\alpha_i x^{n-1}+\beta_j x^{n-2}+\ldots+\lambda_s x+\mu_t$$

სახის ყოველგვარი მრავალწევრი, ასე რომ $\varphi_{1, 1, \ldots, 1, 1}(x)=\varphi(x)$ და ვიპოვოთ ყველა ამ მრავალწევრთა

$$F(x)=\prod_{i, j, \ldots, s, t} \varphi_{i, j, \ldots, s, t}(x)$$

ნამრავლი. $F(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები სიმეტრიულია, ცხადია, $\alpha_i, \beta_j, \ldots \lambda_s, \mu_t$ სისტემებიდან ყოველის მიმართ და ამიტომ (ისევ § 53-ის თეორემის თანახმად) ისინი არიან მრავალწევრები იმ დაუყვანადი (რაციონალურ კოეფიციენტებიანი) მრავალწევრების კოეფიციენტებისა, რომელთა ფესვებიცაა შესაბამისად $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$, ე. ი. თვითონ არიან რაციონალური რიცხვები. მაშასადამე, ω რიცხვი, რადგან იგი $\varphi(x)$-ის ფესვია, იქნება რაციონალურ კოეფიციენტებიანი $F(x)$ მრავალწევრის ფესვი, ე. ი. ალგებრული რიცხვი.

გამოვიყენოთ ეს თეორემა $\omega=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ რიცხვისათვის. $\alpha=1+\sqrt{2}$ რიცხვი ალგებრულია წინა თეორემის თანახმად და ამიტომ ω რიცხვი ალგებრულ კოეფიციენტებიანი $x^2-\alpha$ მრავალწევრის ფესვი იქნება, ე. ი. თვითონაც ალგებრულია. საერთოდ, თუ მკითხველი გამოიყენებს რამდენიმეჯერ ზემოთ დამტკიცებულ ორივე თეორემას, ადვილად მივა შემდეგ შედეგამდე:

ყოველი რიცხვი, რომელიც რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ რადიკალებში ჩაიწერება (ე. ი. რომელიც გამოისახება რადიკალების რამდენადაც გინდა რთული კომბინაციით, საზოგადოდ „მრავალსართულიანით“), ალგებრული რიცხვი იქნება.

ალგებრული რიცხვები, რომლებიც რადიკალებში ჩაიწერებიან, შეადგენენ, ცხადია, ველს. მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, რომ ეს ველი, როგორც § 38-ის ბოლოში გაკეთებული (დაუმტკიცებლად) შენიშვნიდან გამომდინარეობს, ყველა ალგებრულ რიცხვთა ველის მხოლოდ ნაწილია.

ზემოთ აღნიშნული იყო ორი რიცხვის ტრანსცენდენტობა: e და π. მაგრამ სინამდვილეში ტრანსცენდენტული რიცხვები უსასრულოდ ბევრია. უფრო მეტიც, თუ გამოვიყენებთ

სიმრავლეთა თეორიის ცნებებსა და მეთოდებს, ჩვენ ვუჩვენებთ, რომ ტრანსცენდენტული რიცხვები უფრო მეტია, ასე ვთქვათ, ვიდრე ალგებრული რიცხვები; ამ გამოთქმის ზუსტი აზრი ნათელი იქნება ქვემოთ.

უსასრულო M სიმრავლეს ეწოდება *თვლადი*, თუ იგი შეიძლება ურთიერთ ცალსახად შეუსაბამდეს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ე. ი. თუ მისი ელემენტები შეიძლება დაინომროს ყველა ნატურალური რიცხვის დახმარებით, და *არათვლადი*—წინააღმდეგ შემთხვევაში.

ლემა 1. ყოველი უსასრულო M სიმრავლე შეიცავს თვლად ქვესიმრავლეს.

მართლაც, ავიღოთ M-ში ნებისმიერი a_1 ელემენტი. ამოვირჩიოთ შემდეგ a_1-ისაგან განსხვავებული a_2 ელემენტი. საზოგადოდ, ვთქვათ M-ში უკვე ამორჩეულია n სხვადასხვა ელემენტი $a_1, a_2, \ldots, a_n$. რადგან M სიმრავლე უსასრულობის გამო არ შეიძლება ამ ელემენტებით ამოიწუროს, ამიტომ შეიძლება მივუთითოთ მათგან განსხვავებულ a_{n+1} ელემენტზე. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, ჩვენ მოვნახავთ უსასრულო ქვესიმრავლეს, რომელიც

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$$

ელემენტებისაგან შედგება; ამ სიმრავლის თვლადობა ცხადია.

ლემა 2. თვლადი A სიმრავლის ყოველი უსასრულო B ქვესიმრავლე თვითონ თვლადია.

A სიმრავლე, მისი თვლადობის გამო, შეიძლება

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

სახით ჩაიწეროს. ვთქვათ a_{k_1} არის (1) მიმდევრობის პირველი ელემენტი, რომელიც B-ს ეკუთვნის, a_{k_2}—მეორე ელემენტი ამავე თვისებით და ა. შ. თუ დავუშვებთ $a_{kn}=b_n$, $n=1, 2, \ldots$, მივიღებთ, რომ B ქვესიმრავლის ელემენტები შეადგენენ

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

მიმდევრობას, ე. ი. ეს ქვესიმრავლე თვლადია.

ლემა 3. სასრულო სიმრავლეთა თვლადი სიმრავლის გაერთიანება, რომელთაც წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არა აქვთ, თვლადი სიმრავლეა.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია სასრულო

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

სიმრავლეები და ვთქვათ B მათი გაერთიანებაა. ცხადია B სიმრავლის ყველა ელემენტი დაინომრება, თუ ნებისმიერად გადავნომრავთ სასრული A_1 სიმრავლის ელემენტებს, ხოლო შემდეგ განვაგრძობთ ამ ნუმერაციას A_2 სიმრავლის ელემენტებზე გადასვლით და ა. შ.

ლემა 4. ორი თვლადი სიმრავლის გაერთიანება, რომელთაც არა აქვთ საერთო ელემენტები, თვლადი სიმრავლეა.

ვთქვათ მოცემულია თვლადი A სიმრავლე

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

ელემენტებით და B სიმრავლე

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

ელემენტებით და ვთქვათ C ამ სიმრავლეთა გაერთიანებაა. თუ დავუშვებთ

$$a_n=c_{2n-1}, \ b_n=c_{2n}, \ n=1, 2, \ldots,$$

მაშინ C სიმრავლის ყველა ელემენტი წარმოიდგინება

$$c_1,\ c_2, \dots,\ c_{2n-1},\ c_{2n} \dots$$

მიმდევრობის სახით, რაც ამტკიცებს ამ სიმრავლის თვლადობას.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი თეორემა:

ყველა ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

თავდაპირველად დავამტკიცოთ მთელ კოეფიციენტებიანი ერთი ცვლადის ყველა მრავალწევრის სიმრავლის თვლადობა. თუ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

ასეთი მრავალწევრია, ამასთან ნულისაგან განსხვავებული, მაშინ ვუწოდოთ ამ მრავალწევრის სიმაღლე

$$h_f=n+|a_0|+|a_1|+\dots+|a_{n-1}|+|a_n|$$

ნატურალურ რიცხვს. ცხადია, რომ არსებობს მხოლოდ სასრული რიცხვი მთელრიცხოვანი მრავალწევრებისა მოცემული h სიმაღლით; აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე M_h-ით. ამის გარდა, M_0-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე, რომელიც მარტო ნულისაგან შედგება. ყველა მთელრიცხოვანი მრავალწევრების სიმრავლე სასრულ M_0, M_1, $M_2, \dots$ $M_h, \dots$ სიმრავლეთა გაერთიანება იქნება, ე. ი. ლემა 3-ის თანახმად იგი თვლადია.

აქედან, ლემა 2-ის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ ყველა მთელრიცხოვანი პრიმიტიულ დაუყვანად მრავალწევრთა სიმრავლე აგრეთვე თვლადია. ამასთან ჩვენ ვიცით, რომ ყოველი ალგებრული რიცხვი ერთი და მხოლოდ ერთი მრავალრიცხვოვანი პრიმიტიული დაუყვანადი მრავალწევრის ფესვია. მაშასადამე, თუ შევაგროვებთ ყველა ასეთი მრავალწევრის ფესვებს, ე. ი. თუ ავიღებთ სასრულო სიმრავლეთა თვლად სიმრავლეს, მივიღებთ ყველა ალგებრული რიცხვის სიმრავლეს; ამგვარად, ეს სიმრავლე, ლემა 3-ის თანახმად, თვლადი იქნება.

ბოლოს დავამტკიცოთ თეორემა:

ყველა ტრანსცენდენტული რიცხვის სიმრავლე არათვლადია.

თავდაპირველად განვიხილოთ ყველა ნამდვილი x რიცხვის F სიმრავლე, რომელნიც ნულსა და ერთს შორისაა მოთავსებული, $0<x<1$, და დავამტკიცოთ, რომ ეს სიმრავლე არათვლადია. ცნობილია, რომ მითითებული x რიცხვიდან ყოველი შეიძლება

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$$

წესიერი უსასრულო ათწილადის სახით ჩაიწეროს რომ ეს ჩაწერა ცალსახაა, თუ არ დავუშვებთ ისეთ წილადებს, რომლებშიც ყველა n-სათვის დაწყებული რაიმე $n=N$-დან, ყველა $\alpha_n=9$; პირუკუ, ყოველი აღნიშნული სახის წილადი უდრის რაიმე x რიცხვს F სიმრავლიდან. დავუშვათ ახლა, რომ F სიმრავლე თვლადია. ე. ი. რომ ყველა x რიცხვი შეიძლება

$$x_1,\ x_2, \dots,\ x_k, \dots \tag{2}$$

მიმდევრობის სახით ჩავწეროთ. ვთქვათ

$$x_k=0,\ \alpha_{k1}\ \alpha_{k2}\dots\ \alpha_{kn}\dots$$

არის x_k რიცხვის ჩაწერა უსასრულო ათწილადის სახით. დავწეროთ ახლა უსასრულო

$$0,\ \beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots \tag{3}$$

ათწილადი, დავუშვათ, რომ β_1 განსხვავებულია x_1 წილადის პირველი ათწილადის ნიშნისაგან, ე. ი. $\beta_1\neq\alpha_{11}$, β_2 — x_1 წილადის მეორე ათწილადის ნიშნისაგან, ე. ი. $\beta_2\neq\alpha_{22}$, და საერთოდ, $\beta_n\neq\alpha_{nn}$. დავუშვათ, ამას გარდა, რომ β_n ციფრთა შორის უსასრულოდ ბევრია 9-საგან განსხვავებული. ნათელია, რომ არსებობს ყველა ამ მოთხოვნის დამაკმაყოფილებელი (3) წილადი. მაშასადამე, იგი არის რიცხვი F სიმრავლიდან, მაგრამ, თვით აგების

თანახმად, განსხვავებულია (2) მიმდევრობის ყველა რიცხვისგან. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს F' სიმრავლის არათვლადობას.

აქედან გამომდინარეობს *ყველა კომპლექსური რიცხვის სიმრავლის არათვლადობა*: ის რომ თვლადი იყოს, მაშინ, ლემა 2-ის თანახმად ვერ შეიცავდა არათვლად F' სიმრავლეს. ყველა ტრანსცენდენტული რიცხვის სიმრავლის არათვლადობა ახლა ცხადია, რადგან, ლემა 4-ის თანახმად, ამ სიმრავლის გაერთიანება ყველა ალგებრულ რიცხვთა თვლად სიმრავლესთან ყველა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეა, ე. ი. არათვლადია.

ჩვენს მიერ დამტკიცებული ორი თეორემა გვიჩვენებს, ლემა 1-ის გამო, რომ ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლე სინამდვილეში ბევრად უფრო მდიდარია ელემენტებით ე. ი. უფრო „მძლავრია", ვიდრე ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე.

თავი მეცამეტე

მატრიცის ნორმალური ფორმა

§ 59. λ-მატრიცთა ექვივალენტობა

ჩვენ ერთხელ კიდევ ვუბრუნდებით საკითხებს, რომლებიც მიეკუთვნება წრფივ ალგებრას. უკვე მე-7 თავის შესწავლისას მკითხველი დარწმუნდა იმაში, თუ რა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მატრიცთა მსგავსობის ცნება. სახელდობრ, n-ური რიგის ორი კვადრატული მატრიცი მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი იძლევიან (განსხვავებულ ბაზისებში) n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ერთ და იმავე წრფივ გარდაქმნას. მაგრამ ჩვენ ჯერ არ შეგვიძლია ვუპასუხოთ კითხვაზე, მსგავსია თუ არა ორი მოცემული კონკრეტული მატრიცი. მეორე მხრივ, არ შეგვიძლია მოცემული A მატრიცის მსგავს მატრიცთა შორის მოვნახოთ ამა თუ იმ აზრით უმარტივესი სახის მქონე მატრიცი, და ის საკითხიც კი, თუ რა პირობებშია A მატრიცი მსგავსი დიაგონალური მატრიცისა, განხილულ იქნა § 33-ში მხოლოდ ერთ კერძო შემთხვევაში. სწორედ ეს საკითხები იქნება განხილული ამ თავში, ამასთან ერთბაშად ნებისმიერი ძირითადი P ველის შემთხვევაში.

ჯერ დავიწყოთ შესწავლა n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებისა, რომელთა ელემენტები არიან ერთი λ უცნობის ნებისმიერი ხარისხების მრავალწევრები კოეფიციენტებით P ველიდან. ასეთ მატრიცებს ეწოდებათ მრავალწევრული მატრიცები, პოლინომიალური მატრიცები ანუ, მოკლედ, λ მატრიცები. λ-მატრიცის მაგალითია P ველის ელემენტებიანი ნებისმიერი კვადრატული A მატრიცის მახასიათებელი $A-\lambda E$ მატრიცი; ამ მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულია პირველი ხარისხის მრავალწევრები, მთავარი დიაგონალის გარეთ — ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრები ან ნულები. P ველის ელემენტებიანი ყოველი მატრიცი — ასეთ მატრიცებს სიმოკლისათვის ვუწოდებთ რიცხვით მატრიცებს — აგრეთვე იქნება λ-მატრიცის კერძო შემთხვევა: მისი ელემენტები არიან ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრები ან ნულები.

ვთქვათ, მოცემულია

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda)\dots a_{1n}(\lambda) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}(\lambda)\dots a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

λ-მატრიცი. ამ მატრიცის **ელემენტარული გარდაქმნები** ვუწოდოთ შემდეგი ოთხი ტიპის გარდაქმნებს:

1) $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონის გამრავლება P ველის ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ α რიცხვზე;

2) $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი სვეტის გამრავლება P ველის ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ α რიცხვზე;

3) $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი i-ური სტრიქონისათვის მისი ნებისმიერი j-ური სტრიქონის მიმატება, $j\neq i$, რომელიც გამრავლებულია $P[\lambda]$ რგოლის ნებისმიერ $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრზე;

4) $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი i-ური სვეტისათვის მისი ნებისმიერი j-ური სვეტის მიმატება, $j\neq i$, რომელიც გამრავლებულია $P[\lambda]$ რგოლის ნებისმიერ $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრზე.

ადვილი დასანახია, რომ λ-**მატრიცის თითოეული ელემენტარული გარდაქმნისათვის არსებობს შებრუნებული გარდაქმნა, რომელიც აგრეთვე არის ელემენტარული გარდაქმნა.** ასე მაგალითად, 1) გარდაქმნისათვის შებრუნებული იქნება ელემენტარული გარდაქმნა, რომელიც მდგომარეობს იმავე სტრიქონის გამრავლებაში α^{-1} რიცხვზე, რომელიც არსებობს $\alpha\neq 0$ პირობის გამო; 3) გარდაქმნისათვის შებრუნებული იქნება გარდაქმნა, რომელიც მდგომარეობს i-ური სტრიქონისათვის—$\varphi(\lambda)$-ზე გამრავლებული j-ური სტრიქონის მიმატებაში.

$A(\lambda)$ **მატრიცში შეიძლება რამდენიმე ელემენტარული გარდაქმნის საშუალებით გადავანაცვლოთ ნებისმიერი ორი სტრიქონი ან ნებისმიერი ორი სვეტი.**

ვთქვათ, მაგალითად, საჭიროა გადავანაცვლოთ $A(\lambda)$ მატრიცის i-ური და j-ური სტრიქონები. ამის გაკეთება შეიძლება ოთხი ელემენტარული გარდაქმნის საშუალებით, როგორც გვიჩვენებს შემდეგი სქემა:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} i+j \\ -i \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

აქ თანმიმდევრობით სრულდებოდა ასეთი გარდაქმნები: ა) i-ურ სტრიქონს ემატებოდა j-ური; ბ) j-ურ სტრიქონს აკლდებოდა ახალი i-ური; გ) ახალ i-ურ სტრიქონს ემატებოდა ახალი j-ური; დ) ახალი i-ური სტრიქონი მრავლდებოდა—1-ზე.

ჩვენ ვიტყვით, რომ $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ λ-მატრიცები **ექვივალენტურია** (რასაც ჩავწერთ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$ სიმბოლოთი) თუ $A(\lambda)$ მატრიციდან შეიძლება გადასვლა $B(\lambda)$ მატრიცზე ელემენტარულ გარდაქმნათა სასრული რიცხვის საშუალებით. ცხადია ექვივალენტობის ეს დამოკიდებულება არის რეფლექსური და ტრანზიტული, აგრეთვე სიმეტრიულიც ყოველი ელემენტარული

გარდაქმნისათვის შებრუნებული ელემენტარული გარდაქმნის არსებობის გამო. სხვა სიტყვებით, *P ველზე n-ური რიგის ყველა კვადრატული λ-მატრიცი იშლება ექვივალენტურ მატრიცთა ურთიერთარამკვეთ კლასებად.*

ჩვენი უახლოესი მიზანია მოცემული $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა ექვივალენტურ λ-მატრიცს შორის შეძლებისამებრ მარტივი სახის მატრიცის მონახვა. ამისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი ცნება. *კანონიკური λ-მატრიცი* ეწოდება λ მატრიცს, რომელსაც გააჩნია შემდეგი სამი თვისება:

ა) ეს მატრიცი დიაგონალურია, ე. ი. აქვს სახე

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & O \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}; \tag{1}$$

ბ) ყოველი $e_i(\lambda)$ მრავალწევრი, $i=2, 3, \ldots, n$, უნაშთოდ იყოფა $e_{i-1}(\lambda)$ მრავალწევრზე;

გ) ყოველი $e_i(\lambda)$ მრავალწევრის, $i=1, 2, \ldots, n$, უფროსი კოეფიციენტი უდრის ერთს, თუ ეს მრავალწევრი განსხვავდება ნულისაგან.

შევნიშნოთ, რომ თუ (1) კანონიკური λ-მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულ $e_i(\lambda)$ მრავალწევრთა შორის გვხვდება ნულის ტოლები, მაშინ ბ) თვისების გამო, მათ აუცილებლად უკავიათ მთავარ დიაგონალზე უკანასკნელი ადგილები. მეორე მხრივ, თუ $e_i(\lambda)$ მრავალწევრთა შორის გვხვდება ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრები, მაშინ, გ) თვისების თანახმად, ყველა ისინი 1-ის ტოლია და, ბ) თვისების თანახმად, (1) მატრიცის მთავარ დიაგონალზე უკავიათ პირველი ადგილები.

კანონიკურ λ-მატრიცთა რიცხვს ეკუთვნის, კერძოდ, ზოგიერთი რიცხვითი მატრიცი, მათ შორის ერთეულოვანი და ნულოვანი მატრიცები.

ყოველი λ-მატრიცი ექვივალენტურია რომელიმე კანონიკური λ-მატრიცისა, ე. ი. სხვა სიტყვებით, იგი ელემენტარული გარდაქმნებით დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.

ამ თეორემას დავამტკიცებთ ინდუქციით განხილულ λ-მატრიცთა n რიგის მიმართ. მართლაც, როცა $n=1$, გვექნება

$$A(\lambda)=(a(\lambda)).$$

თუ $a(\lambda)=0$, მაშინ ჩვენი მატრიცი უკვე კანონიკურია. ხოლო თუ $a(\lambda)\neq 0$, მაშინ საკმარისია გავყოთ $a(\lambda)$ მრავალწევრი მის უფროს კოეფიციენტზე — ეს იქნება მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნა — და მივიღებთ კანონიკურ მატრიცს.

ვთქვათ, თეორემა უკვე დამტკიცებულია $n-1$ რიგის λ-მატრიცებისათვის. განვიხილოთ ნებისმიერი n-ური რიგის $A(\lambda)$ λ-მატრიცი. თუ ის ნულოვანია, მაშინ უკვე კანონიკურია და არაფერია დასამტკიცებელი. ამიტომ ვუშვებთ, რომ $A(\lambda)$ მატრიცის ელემენტებს შორის არიან არანულოვანები.

თუ საჭიროა, $A(\lambda)$ მატრიცის სტრიქონებისა და სვეტების გადაადგილებით, შეგვიძლია გადავიტანოთ ერთი არანულოვანი ელემენტთაგანი მარც-

ხენა ზედა კუთხეში. ამრიგად, $A(\lambda)$ მატრიცის ექვივალენტურ λ-მატრიცებს შორის არიან ისეთები, რომელთა მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულია არანულოვანი მრავალწევრი. განვიხილოთ ყველა ასეთი მატრიცი. ამ მატრიცების მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულ მრავალწევრებს შეიძლება ჰქონდეთ სხვადასხვა ხარისხი. მაგრამ მრავალწევრის ხარისხი არის ნატურალური რიცხვი, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა ყოველ არაცარიელ სიმრავლეში არსებობს უმცირესი რიცხვი. მაშასადამე, $A(\lambda)$ მატრიცის ექვივალენტურსა და მარცხენა ზედა კუთხეში არანულოვანი ელემენტის მქონე ყველა λ-მატრიცს შორის შეიძლება მოინახოს ერთი ისეთი, რომ მის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულ მრავალწევრს ჰქონდეს უმცირესი შესაძლო ხარისხი. ბოლოს, თუ ამ მატრიცის პირველ სტრიქონს გავყოფთ აღნიშნული მრავალწევრის უფროს კოეფიციენტზე, მივიღებთ $A(\lambda)$ მატრიცის ექვივალენტურ ისეთ λ-მატრიცს,

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \dots & b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

რომ $e_1(\lambda)\neq 0$, ამ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი უდრის 1-ს, და ელემენტარული გარდაქმნების არავითარი კომბინაციით არ შეიძლება გადავიდეთ მიღებული მატრიციდან ისეთ მატრიცზე, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში იქნებოდა ნაკლები ხარისხის მრავალწევრი.

დავამტკიცოთ, რომ მიღებული მატრიცის პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის ყველა ელემენტი უნაშთოდ იყოფა $e_1(\lambda)$-ზე. ვთქვათ, მაგალითად, $2\leqslant j\leqslant n$-სათვის

$$b_{1j}(\lambda)=e_1(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

სადაც $r(\lambda)$-ს ხარისხი ნაკლებია $e_1(\lambda)$-ს ხარისხზე; თუ $r(\lambda)$ განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ, თუ ჩვენი მატრიცის j-ური სვეტიდან გამოვაკლებთ მის პირველ სტრიქონს, გამრავლებულს $q(\lambda)$-ზე, ხოლო შემდეგ გადავანაცვლებთ პირველ და j-ურ სვეტებს, მივალთ $A(\lambda)$ მატრიცის ექვივალენტურ ისეთ მატრიცამდე, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულია $r(\lambda)$ მრავალწევრი, ე. ი. $e_1(\lambda)$-ს ხარისხზე ნაკლები ხარისხის მრავალწევრი, რაც ეწინააღმდეგება ამ მრავალწევრის არჩევას. აქედან გამომდინარეობს $r(\lambda)=0$, რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

თუ ახლა ჩვენი მატრიცის j-ური სვეტიდან გამოვაკლებთ მის პირველ სვეტს, გამრავლებულს $q(\lambda)$-ზე, მაშინ b_{1j} ელემენტს შევცვლით ნულით. თუ ასეთ გარდაქმნებს ჩავატარებთ $j=2, 3\dots, n$-სათვის, ნულებით შევცვლით ყველა $b_{1j}(\lambda)$ ელემენტს. ანალოგიური გზით შეიცვლება ნულებით ყველა $b_{i1}(\lambda)$ ელემენტიც, $i=2, 3, \dots, n$. მაშასადამე მივალთ $A(\lambda)$ მატრიცის ექვივალენტურ ისეთ მატრიცამდე, რომლის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებულია $e_1(\lambda)$ მრავალწევრი, ხოლო პირველი სტრიქო-

ნისა და პირველი სვეტის ყველა დანარჩენი ელემენტი ტოლია ნულის,

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

ინდუქციური დაშვების თანახმად, ჩვენს მიერ მიღებული (2) მატრიცის მარჯვენა ქვედა კუთხეში მოთავსებული $n-1$ რიგის მატრიცი ელემენტარული გარდაქმნებით დაიყვანება კანონიკურ სახეზე:

$$\begin{pmatrix} c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_2(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

თუ ჩავატარებთ ამ გარდაქმნებს (2) მატრიცის შესაბამის სტრიქონებსა და სვეტებზე—ამასთან ამ მატრიცის პირველი სტრიქონი და პირველი სვეტი ცხადია დარჩება უცვლელი—მივიღებთ, რომ

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

იმის დასამტკიცებლად, რომ (3) მატრიცი კანონიკურია, დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ $e_2(\lambda)$ უნაშთოდ იყოფა $e_1(\lambda)$-ზე. ვთქვათ

$$e_2(\lambda) = e_1(\lambda) q(\lambda) + r(\lambda),$$

სადაც $r(\lambda) \neq 0$ და $r(\lambda)$-ს ხარისხი ნაკლებია $e_1(\lambda)$-ს ხარისხზე. მაგრამ თუ (3) მატრიცის მეორე სვეტს მივუმატებთ მის პირველ სვეტს, გამრავლებულს $q(\lambda)$-ზე, ხოლო შემდეგ მეორე სტრიქონიდან გამოვაკლებთ პირველ სტრიქონს, მაშინ $e_2(\lambda)$ ელემენტს შევცვლით $r(\lambda)$ ელემენტით. შემდეგ, თუ გადავსვამთ ადგილებით პირველ ორ სტრიქონსა და პირველ ორ სვეტს, ჩვენ გადავიყვანთ $r(\lambda)$ მრავალწევრს მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში, ეს კი ეწინააღმდეგება $e_1(\lambda)$ მრავალწევრის არჩევას.

თეორემა λ-მატრიცის კანონიკურ სახეზე დაყვანის შესახებ დამტკიცებულია. ეს თეორემა უნდა შეივსოს ერთადერთობის შემდეგი თეორემით:

ყოველი λ-მატრიცი ექვივალენტურია მხოლოდ ერთი კანონიკური მატრიცისა.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ნებისმიერი n-ური რიგის $A(\lambda)$ λ-მატრიცი. დავაფიქსიროთ რომელიმე ნატურალური k რიცხვი, $1 \leqslant k \leqslant n$, და განვიხილოთ $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორი. თუ გამოვითვლით ამ მინორებს, მივიღებთ λ-ს მრავალწევრთა სასრულ სისტემას; მრავალწევრთა ამ სისტემის უდიდესი საერთო გამყოფი, აღებული 1 უფროსი კოეფიციენტით, აღვნიშნოთ $d_k(\lambda)$-თი.

მაშასადამე, გვაქვს

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_n(\lambda) \tag{4}$$

მრავალწევრები, **რომლებიც ცალსახად განსაზღვრულია თვით $A(\lambda)$ მატრიცით.** ამასთან $d_1(\lambda)$ არის $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა ელემენტის უდიდესი საერთო გამყოფი, აღებული კოეფიციენტით 1, ხოლო $d_n(\lambda)$ უდრის $A(\lambda)$ მატრიცის დეტერმინანტს, გაყოფილს მის უფროს კოეფიციენტზე. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ, თუ $A(\lambda)$ მატრიცს აქვს რანგი r, მაშინ

$$d_{r+1}(\lambda) = \ldots = d_n(\lambda) = 0,$$

ხოლო (4) სისტემის ყველა დანარჩენი მრავალწევრი განსხვავებულია ნულისაგან.

$A(\lambda)$ λ-მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის $d_k(\lambda)$ უდიდესი საერთო გამყოფი, $k=1, 2, \ldots, n$, არ იცვლება $A(\lambda)$ მატრიცში ელემენტარული გარდაქმნების შესრულების დროს.

ეს დებულება თითქმის ცხადია იმ შემთხვევისათვის, როცა $A(\lambda)$ მატრიცში სრულდება 1) ან 2) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნა. ასე მაგალითად, თუ მატრიცის i-ური სტრიქონი მრავლდება P ველის α რიცხვზე, $\alpha \neq 0$, მაშინ k-ური რიგის ის მინორები, რომლებზედაც გადის i-ური სტრიქონი, გამრავლდება α-ზე, ხოლო ყველა დანარჩენი k-ური რიგის მინორი დარჩება უცვლელი. მაგრამ რამდენიმე მრავალწევრის უდიდესი საერთო გამყოფის მოძებნისას ნებისმიერი ამ მრავალწევრთაგანი დაუბრკოლებლად შეიძლება გავამრავლოთ P ველის ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვებზე.

განვიხილოთ ახლა 3) ან 4) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნები. ვთქვათ, მაგალითად, რომ $A(\lambda)$ მატრიცის i-ურ სტრიქონს ემატება მისი j-ური სტრიქონი, $j \neq i$, გამრავლებული $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრზე; ამ გარდაქმნის შემდეგ მიღებული მატრიცი აღვნიშნოთ $\overline{A}(\lambda)$-თი, ხოლო მისი ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი, აღებული 1 უფროსი კოეფიციენტით,— $\overline{d}_k(\lambda)$-თი. ვნახოთ, რა ემართებათ აღნიშნული გარდაქმნის დროს $A(\lambda)$ მატრიცის k-ური რიგის მინორებს.

ცხადია, რომ არ შეიცვლება ის მინორები, რომლებზედაც არ გადის i-ური სტრიქონი. არ შეიცვლება ის მინორებიც, რომლებზედაც გადის როგორც i-ური, ისე j-ური სტრიქონები, ვინაიდან დეტერმინანტი არ იცვლება თუ მის ერთ სტრიქონს მივუმატებთ მისი სხვა სტრიქონის ჯერადს. ბოლოს,ავიღოთ ნებისმიერი იმ k-ური რიგის მინორთაგანი, რომლებზედაც გადის i-ური სტრიქონი, მაგრამ არ გადის j-ური; აღვნიშნოთ იგი M-ით. $\overline{A}(\lambda)$ მატრიცის შესაბამისი მინორი, ცხადია, შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჯამი M მინორისა და $A(\lambda)$ მატრიცის $\varphi(\lambda)$-ზე გამრავლებული M' მინორისა, რომელიც მიიღება M მინორიდან, თუ $A(\lambda)$ მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტებს შევცვლით მისი j-ური სტრიქონის შესაბამისი ელემენტებით. ვინაიდან როგორც M, ისე M' იყოფა $d_k(\lambda)$-ზე, ამიტომ $M+\varphi(\lambda)M'$-იც გაიყოფა $d_k(\lambda)$-ზე.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ $\overline{A}(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორი უნაშთოდ იყოფა $d_k(\lambda)$-ზე და ამიტომ $\overline{d}_k(\lambda)$-ც იყოფა $d_k(\lambda)$-ზე. მაგრამ, ვინაიდან განხილული ელემენტარული გარდაქმნისათვის არსებობს იმავე ტიპის შებრუნებული ელემენტარული გარდაქმნა, ამიტომ $d_k(\lambda)$-ც იყოფა $\overline{d}_k(\lambda)$-ზე. ხოლო თუ გავითვალისწინებთ, რომ ორივე ამ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტები უდრის 1-ს, მაშინ $\overline{d}_k(\lambda)=d_k(\lambda)$, რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

ამრიგად, $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტურ ყველა λ-მატრიცს შეესაბამება (4) მრავალწევრების ერთი და იგივე ერთობლიობა. კერძოდ, ეს ეხება $A(\lambda)$-ს ეკვივალენტურ ნებისმიერ (თუ რომელიმე) კანონიკურ მატრიცს. ვთქვათ (3) არის ერთი ასეთი მატრიცთაგანი.

გამოვითვალოთ $d_k(\lambda)$ მრავალწევრი, $k=1, 2, \ldots, n$, (3) მატრიცის გამოყენებით. ცხადია, რომ ამ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებული k-ური რიგის მინორი უდრის

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \ldots e_k(\lambda) \tag{5}$$

ნამრავლს. შემდეგ, თუ (3) მატრიცში ავიღებთ k-ური რიგის მინორს, რომელიც მოთავსებულია $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ნომრიან სტრიქონებში, სადაც $i_1<i_2<\ldots<i_k$, და იმავე ნომრიან სვეტებში, მაშინ ეს მინორი უდრის $e_{i_1}(\lambda)\, e_{i_2}(\lambda) \ldots e_{i_k}(\lambda)$ ნამრავლს, რომელიც იყოფა (5)-ზე. მართლაც, $1\leqslant i_1$ და ამიტომ $e_{i_1}(\lambda)$ იყოფა $e_1(\lambda)$-ზე, $2\leqslant i_2$ და ამიტომ $e_{i_2}(\lambda)$ იყოფა $e_2(\lambda)$-ზე და ა. შ. ბოლოს, თუ (3) მატრიცში აღებულია k-ური რიგის მინორი, რომელზედაც ერთი i-სათვის მაინც გადის ამ მატრიცის i-ური სტრიქონი, მაგრამ არ გადის მისი i-ური სვეტი, მაშინ ეს მინორი შეიცავს ნულოვან სტრიქონს და ამიტომ უდრის ნულს.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ სწორედ (5) ნამრავლი იქნება (3) მატრიცის და ამიტომ გამოსავალი $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი,

$$d_k(\lambda)=e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \ldots e_k(\lambda), \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ $e_k(\lambda)$ მრავალწევრები, $k=1, 2, \ldots, n$, ცალსახად განისაზღვრებიან თვითონ $A(\lambda)$ მატრიცით. ვთქვათ ამ მატრიცის რანგი უდრის r-ს. მაშინ, როგორც ვიცით, $d_r(\lambda)\neq 0$, მაგრამ $d_{r+1}(\lambda)=0$ და ამიტომ, (6)-ის გამო, $e_{r+1}(\lambda)=0$. აქედან, კანონიკური მატრიცის თვისებების გამო, საზოგადოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $A(\lambda)$ მატრიცის r რანგი ნაკლებია n-ზე, მაშინ

$$e_{r+1}(\lambda)=e_{r+2}(\lambda)=\ldots=e_n(\lambda)=0. \tag{7}$$

მეორე მხრივ, $k\leqslant r$-სათვის (6)-დან გამომდინარეობს, $d_{k-1}(\lambda)\neq 0$ გამო, რომ

$$e_k(\lambda)=\frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}. \tag{8}$$

ამით მთავრდება λ-მატრიცის კანონიკური სახის ერთადერთობის დამტკიცება. ერთდროულად მივიღეთ უშუალო მონახვის წესი $e_k(\lambda)$ მრავალწევრე-

ბისა, რომლებსაც ეწოდებათ $A(\lambda)$ მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები.

მაგალითი. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{pmatrix}$$

λ-მატრიცი. თუ შევასრულებთ ელემენტარულ გარდაქმნათა ჯაჭვს, მივიღებთ

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}\lambda^3-\lambda & \frac{2}{3}\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0\\ \lambda^2+5\lambda & \lambda\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{pmatrix}.$$

მეორე მხრივ, შეიძლებოდა უშუალოდ $A(\lambda)$ მატრიცის ინვარიანტული მამრავლების გამოთვლა. სახელდობრ, თუ გამოვითვლით ამ მატრიცის ელემენტების უდიდეს საერთო გამყოფს, მივიღებთ:

$$d_1(\lambda)=e_1(\lambda)=\lambda.$$

ხოლო თუ გამოვითვლით $A(\lambda)$ მატრიცის დეტერმინანტს და შევნიშნავთ, რომ მისი უფროსი კოეფიციენტი უდრის 1-ს, მივიღებთ:

$$d_2(\lambda)=\lambda^4-10\lambda^3-3\lambda^2$$

და ამიტომ

$$e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\lambda^3-10\lambda^2-3\lambda.$$

§ 60. უნიმოდულარული λ-მატრიცები. რიცხვითი მატრიცების მსგავსობის კავშირი მათი მახასიათებელი მატრიცების ექვივალენტობასთან

წინა პარაგრაფის შედეგებიდან გამომდინარეობს λ-მატრიცთა ექვივალენტობის ერთი კრიტერიუმი, რომელსაც შეიძლება მიეცეს ორი თითქმის იგივური ჩამოყალიბება:

ორი λ-მატრიცი ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი დაიყვანება ერთი და იგივე კანონიკურ სახეზე.

ორი λ-მატრიცი ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ გააჩნიათ ერთნაირი ინვარიანტული მამრავლები.

გამოვიყვანოთ კიდევ ერთი კრიტერიუმი, რომელსაც აქვს უკვე სხვა ხასიათი.

ჩვენ ვიცით, რომ კანონიკურ λ-მატრიცთა რიცხვს ეკუთვნის ერთეულოვანი E მატრიცი. $U(\lambda)$ λ-მატრიცს ვუწოდოთ უნიმოდულარული, თუ E მატრიცი არის მისი კანონიკური სახე, ე. ი. თუ ყველა მისი ინვარიანტული მამრავლი უდრის ერთს.

$U(\lambda)$ λ-მატრიცი უნიმოდულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაგრამ არ არის დამოკიდებული λ-ზე, ე. ი. არის ძირითადი P ველის ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი.

მართლაც, თუ $U(\lambda)\sim E$, მაშინ ამ ორ მატრიცს შეესაბამება ერთი და იგივე $d_n(\lambda)$-მრავალწევრი. მაგრამ ერთეულოვანი მატრიცისათვის $d_n(\lambda)=1$, აქედან გამომდინარეობს, რომ $U(\lambda)$ მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც $d_n(\lambda)$-საგან განსხვავდება მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებული რიცხვითი მამრავლით, იქნება P ველის ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი. პირიქით, თუ $U(\lambda)$-მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან და არ არის დამოკიდებული λ-ზე, მაშინ ამ მატრიცისათვის $d_n(\lambda)$ მრავალწევრი იქნება 1-ის ტოლი და ამიტომ, წინა პარაგრაფის (6)-ის თანახმად, $U(\lambda)$ მატრიცის ყველა ინვარიანტული $e_i(\lambda)$ მამრავლი, $i=1, 2,\dots, n$, უდრის ერთს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი გადაუგვარებელი რიცხვითი მატრიცი არის უნიმოდულარული λ-მატრიცი. მაგრამ უნიმოდულარულ λ-მატრიცს შეიძლება ჰქონდეს ძალიან რთული სახე. ასე, მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3+5 \\ \lambda^2-\lambda-4 & \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix}$$

λ-მატრიცი უნიმოდულარულია, ვინაიდან მისი დეტერმინანტი უდრის 20-ს, ე. ი. განსხვავებულია ნულისაგან და არ არის დამოკიდებული λ-ზე.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ უნიმოდულარული λ-მატრიცების ნამრავლი თვითონ უნიმოდულარულია—საკმარისია გავიხსენოთ, რომ მატრიცების გამრავლებისას მრავლდება მათი დეტერმინანტები.

$U(\lambda)$ λ-მატრიცი უნიმოდულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისთვის არსებობს შებრუნებული მატრიცი, რომელიც აგრეთვე λ-მატრიცია.

მართლაც, თუ მოცემულია გადაუგვარებელი λ-მატრიცი, მაშინ, თუ ჩვეულებრივი წესით მოვნახავთ შებრუნებულ მატრიცს, მოგვიხდება მოცემული მატრიცის ელემენტთა ალგებრული დამატებების გაყოფა ამ მატრიცის დეტერმინანტზე, ე. ი. λ-ს რაიმე მრავალწევრზე. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში შებრუნებული მატრიცის ელემენტები იქნება λ-ს რაციონალური წილადები და არა λ-ს მრავალწევრები, ე. ი. ეს მატრიცი არ იქნება λ-მატრიცი. ხოლო თუ მოცემულია უნიმოდულარული მატრიცი, მაშინ ალგებრული დამატებების გაყოფა მოგვიხდება მხოლოდ P ველის ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე, ე. ი. შებრუნებული მატრიცის ელემენტები იქნება λ-ს მრავალწევრები და ამიტომ შებრუნებული მატრიცი თვითონ იქნება λ-მატრიცი. პირიქით, თუ $U(\lambda)$ λ მატრიცს გააჩნია შებრუნებული $U^{-1}(\lambda)$ λ-მატრიცი, მაშინ ორივე ამ მატრიცის დეტერმინანტები არის λ-ს მრავალწევრები, მათი ნამრავლი უდრის 1-ს და ამიტომ ორივე დეტერმინანტი უნდა იყოს ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი.

უკანასკნელი შენიშვნიდან გამომდინარეობს ახლა დამტკიცებული თეორემისადმი შემდეგი დამატება:

უნიმოდულარული λ-მატრიცის შებრუნებული λ-მატრიცი თვითონ უნიმოდულარულია.

უნიმოდულარული მატრიცის ცნება გამოიყენება *λ-მატრიცთა ეკვივალენტობის* შემდეგი ახალი *კრიტერიუმის* ჩამოყალიბებაში:

ორი n-ური რიგის $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ λ-მატრიცი ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს იმავე n-ური რიგის ისეთი უნიმოდულარული $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ λ-მატრიცები, რომ

$$B(\lambda)=U(\lambda)\,A(\lambda)\,V(\lambda). \tag{1}$$

შემოვიტანოთ ჯერ შემდეგი ცნება, რომელიც გამოიყენება ამ კრიტერიუმის დამტკიცების დროს. *ელემენტარული მატრიცი* ვუწოდოთ

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & & & 1 \end{pmatrix} & (i), \end{array} \tag{2}$$

რიცხვით (და, მაშასადამე, λ-) მატრიცს, რომელიც ერთეულოვანი მატრიცისაგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ მთავარი დიაგონალის რომელიმე i-ურ ადგილზე, $1\leqslant i\leqslant n$, დგას P ველის ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი α რიცხვი. მეორე მხრივ, *ელემენტარული მატრიცი* ვუწოდოთ აგრეთვე

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots\ \varphi(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots\ \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix} & (i) \\ \qquad\qquad\qquad (j) & \end{array} \tag{3}$$

λ-მატრიცს, რომელიც განსხვავდება ერთეულოვანი მატრიცისაგან მხოლოდ იმით, რომ i-ური სტრიქონის და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$, ამასთან $i\neq j$, დგას $P[\lambda]$ რგოლის ნებისმიერი $\varphi(\lambda)$ მრავალწევრი.

ყოველი ელემენტარული მატრიცი უნიმოდულარულია. მართლაც, (2) მატრიცის დეტერმინანტი უდრის α-ს, მაგრამ, პირობის თანახმად, $\alpha\neq 0$; (3) მატრიცის დეტერმინანტი კი უდრის 1-ს.

$A(\lambda)$ λ-მატრიცში ნებისმიერი ელემენტარული გარდაქმნის შესრულება ტოლფასია ამ მატრიცის მარცხნიდან ან მარჯვნიდან რომელიმე ელემენტარულ მატრიცზე გამრავლებისა.

მართლაც, მკითხველი ადვილად შეამოწმებს შემდეგი ოთხი დებულების სამართლიანობას: 1) $A(\lambda)$ მატრიცის გამრავლება მარცხნიდან (2) მატრიცზე ტოლფასია $A(\lambda)$ მატრიცის i-ური სტრიქონის α რიცხვზე გამრავლებისა; 2) $A(\lambda)$ მატრიცის გამრავლება მარჯვნიდან (2) მატრიცზე ტოლფასია $A(\lambda)$ მატრიცის i-ური სვეტის a რიცხვზე გამრავლებისა; 3) $A(\lambda)$ მატრიცის გამრავლება მარცხნიდან (3) მატრიცზე ტოლფასია $A(\lambda)$ მატრიცის i-ური სტრიქონისათვის მისი, $\varphi(\lambda)$-ზე გამრავლებული, j-ური სტრიქონის მიმატებისა; 4) $A(\lambda)$ მატრიცის გამრავლება მარჯვნიდან (3) მატრიცზე ტოლფასია $A(\lambda)$ მატრიცის j-ური სვეტისათვის მისი, $\varphi(\lambda)$-ზე გამრავლებული, i-ური სვეტის მიმატებისა.

გადავიდეთ ახლა λ-მატრიცთა ჩვენი კრიტერიუმის დამტკიცებაზე. თუ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$, მაშინ $A(\lambda)$-დან შეიძლება გადავიდეთ $B(\lambda)$-ზე ელემენტარულ გარდაქმნათა სასრული რიცხვის საშუალებით. თუ თითოეულ ამ გარდაქმნათაგანს შევცვლით მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ელემენტარულ მატრიცზე გამრავლებით, მივალთ

$$B(\lambda)=U_1(\lambda)\ldots U_k(\lambda)\,A(\lambda)\,V_1(\lambda)\ldots V_l(\lambda) \tag{4}$$

ტოლობამდე, სადაც ყველა $U_1(\lambda),\ldots, U_k(\lambda), V_1(\lambda),\ldots, V_l(\lambda)$ მატრიცი ელემენტარულია და, მაშასადამე, უნიმოდულარული. ამიტომ უნიმოდულარული იქნებიან

$$U(\lambda)=U_1(\lambda)\ldots U_k(\lambda),\quad V(\lambda)=V_1(\lambda)\ldots V_l(\lambda) \tag{5}$$

მატრიცებიც, რომლებიც წარმოადგენენ უნიმოდულარულ მატრიცთა ნამრავლებს, ხოლო (4) ტოლობა გადაიწერება (1) სახით. შევნიშნოთ, რომ თუ, მაგალითად, $k=0$, ე. ი. ელემენტარული გარდაქმნები სრულდება მხოლოდ სვეტებზე, მაშინ ვუშვებთ უბრალოდ $U(\lambda)=E$.

დამტკიცების ჩვენს მიერ ჩატარებული ნაწილი საშუალებას იძლევა ერთდროულად გამოვთქვათ შემდეგი დებულება:

λ-მატრიცი უნიმოდულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შეიძლება მისი წარმოდგენა ელემენტარულ მატრიცთა ნამრავლის სახით.

მართლაც, ჩვენ ვსარგებლობდით იმით, რომ ელემენტარული მატრიცების ნამრავლი უნიმოდულარულია. პირიქით, თუ მოცემულია ნებისმიერი უნიმოდულარული $W(\lambda)$ მატრიცი, მაშინ ის ეკვივალენტურია ერთეულოვანი E მატრიცისა. თუ გამოვიყენებთ ზემოთ ჩატარებულ დამტკიცებას $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ მატრიცების მაგივრად E და $W(\lambda)$ მატრიცებისათვის, (4)-დან მივიღებთ

$$W(\lambda)=U_1(\lambda)\ldots U_k(\lambda)V_1(\lambda)\ldots V_l(\lambda)$$

ტოლობას, ე. ი. $W(\lambda)$ მატრიცი აღმოჩნდა წარმოდგენილი ელემენტარულ მატრიცთა ნამრავლის სახით.

ახლა ადვილია ჩვენი კრიტერიუმის შებრუნებული დებულების დამტკიცების ჩატარებაც. ვთქვათ $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ მატრიცებისათვის არსებობენ ისეთი უნიმოდულარული $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ მატრიცები, რომ ადგილი აქვს (1) ტოლობას. დამტკიცებულის თანახმად, $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ მატრიცები შეიძლება წარმოიდგინოს ელემენტარულ მატრიცთა ნამრავლების სახით; ვთქვათ, ეს არის (5) წარმოდგენები. (1) ტოლობა ახლა გადაიწერება (4) სახით და, თუ ელემენტარულ მატრიცზე ყოველ გამრავლებას შევცვლით შესაბამისი ელემენტარული გარდაქმნით, ბოლოს მივიღებთ, რომ $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

მატრიცული მრავალწევრები. λ-მატრიცის ცნებას შეიძლება სულ სხვა მხრიდან შევხედოთ. P ველზე n-ური რიგის მატრიცული λ-მრავალწევრი ვუწოდოთ λ-ს მრავალწევრს, რომლის კოეფიციენტები არიან ერთი და იგივე n-ური რიგის კვადრატული მატრიცები ელემენტებით P ველიდან; მისი ზოგადი სახე იქნება

$$A_0\lambda^k+A_1\lambda^{k-1}+\ldots+A_{k-1}\lambda+A_k. \tag{6}$$

§ 15-ის თანახმად, თუ გავიგებთ A_i მატრიცის გამრავლებას λ^{k-i}-ზე, $i=0, 1,\ldots, k$, როგორც A_i მატრიცის ყველა ელემენტის გამრავლებას λ^{k-i}-ზე, ხოლო შემდეგ თუ შევასრულებთ მატრიცთა შეკრებას იმავე § 15-ის შესაბამისად, მივიღებთ, რომ ყოველი n-ური რიგის მატრიცული λ-მრავალწევრი შეიძლება ჩაიწეროს n-ური რიგის λ-მატრიცის სახით.

ასე მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3+\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4\lambda^3+\lambda & -3\lambda^2+2\lambda+1 \\ -\lambda^3 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}.$$

პირიქით, ყოველი n-ური რიგის λ-მატრიცი შეიძლება ჩაიწეროს n-ური რიგის მატრიცული λ-მრავალწევრის სახით. ასე მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5 & \lambda+1 \\ \lambda^4+2\lambda & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda^4+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

ვინაიდან მატრიცების, და მათ შორის λ-მატრიცების, ტოლობა ნიშნავს ამ მატრიცებში ერთნაირ ადგილებზე მდგომი ელემენტების ტოლობას, ამიტომ (6) სახის მატრიცული λ-მრავალწევრების ტოლობა ნიშნავს λ-ს ერთ და იმავე ხარისხებთან მდგომი მატრიცული კოეფიციენტების ტოლობას. ამასთან, ჩვენ ვხედავთ, რომ თანადობა λ-მატრიცებსა და მატრიცულ λ-მრავალწევრებს შორის არის ურთიერთცალსახა.

ვთქვათ მოცემულია $A(\lambda)$ λ-მატრიცი, ამასთან

$$A(\lambda)=A_0\lambda^k+A_1\lambda^{k-1}+\ldots+A_{k-1}\lambda+A_k,$$

სადაც A_0 მატრიცი არ არის ნულოვანი. k რიცხვს ვუწოდოთ $A(\lambda)$ λ-მატრიცის *ხარისხი*; ცხადია, ეს იქნება $A(\lambda)$ მატრიცის ელემენტების უმაღლესი ხარისხი (λ-ს მიმართ).

შეხედულება λ-მატრიცებზე, როგორც მატრიცულ მრავალწევრებზე, საშუალებას იძლევა განვავითაროთ λ-მატრიცებისათვის გაყოფადობის თეორია, რომელიც რიცხვითი მრავალწევრებისათვის გაყოფადობის თეორიის ანალოგიურია, მაგრამ, ბუნებრივია, გართულებულია მატრიცთა გამრავლების არაკომუტატურობით და ნულის გამყოფების არსებობით. ჩვენ შემოვისაზღვრებით მხოლოდ *ნაშთით გაყოფის ალგორითმის* საკითხით.

ვთქვათ, P ველზე მოცემულია n-ური რიგის λ-მატრიცები:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^k+A_1\lambda^{k-1}+\ldots+A_{k-1}\lambda+A_k,$$

$$B(\lambda)=B_0\lambda^l+B_1\lambda^{l-1}+\ldots+B_{l-1}\lambda+B_l,$$

ამასთან დავუშვათ, რომ B_0 მატრიცი გადაუგვარებელია, ე. ი. არსებობს B_0^{-1} მატრიცი; მაშინ P ველზე შეიძლება მოინახოს იმავე n-ური რიგის ისეთი $Q_1(\lambda)$ და $R_1(\lambda)$ λ-მატრიცები, რომ

$$A(\lambda)=B(\lambda)\,Q_1(\lambda)+R_1(\lambda), \tag{7}$$

ამასთან $R_1(\lambda)$-ს ხარისხი ნაკლებია $B(\lambda)$-ს ხარისხზე ან $R_1(\lambda)=0$. მეორე მხრივ, P ველზე შეიძლება მოინახოს n-ური რიგის ისეთი $Q_2(\lambda)$ და $R_2(\lambda)$ λ-მატრიცები, რომ

$$A(\lambda)=Q_2(\lambda)\,B(\lambda)+R_2(\lambda), \tag{8}$$

ამასთან $R_2(\lambda)$-ს ხარისხი ნაკლებია $B(\lambda)$-ს ხარისხზე ან $R_2(\lambda)=0$, $Q_1(\lambda)$ და $R_1(\lambda)$ მატრიცები, და აგრეთვე $\varphi_2(\lambda)$ და $R_2(\lambda)$, რომლებიც ამ პირობებს აკმაყოფილებენ, განისაზღვრებიან ცალსახად.

ამ თეორემის დამტკიცება ტარდება ისევე, როგორც რიცხვითი მრავალწევრებისათვის შესაბამისი თეორემის დამტკიცება (იხ. § 20). ვთქვათ, მაგალითად, (7) პირობას აკმაყოფილებენ აგრეთვე $\overline{Q_1}(\lambda)$ და $\overline{R_1}(\lambda)$ მატრიცები, ამასთან $\overline{R_1}(\lambda)$-ს ხარისხი ნაკლებია $B(\lambda)$-ს ხარისხზე. მაშინ

$$B(\lambda)[Q_1(\lambda)-\overline{Q_1}(\lambda)]=\overline{R_1}(\lambda)-R_1(\lambda).$$

მარჯვენა მხარის ხარისხი ნაკლებია l-ზე, ხოლო მარცხენა მხარის ხარისხი, თუ კვადრატული ფრჩხილი განსხვავებულია ნულისაგან, მეტია ან ტოლი l-ის, ვინაიდან B_0 მატრიცი გადაუგვარებელია. აქედან გამომდინარეობს $Q_1(\lambda)$ და $R_1(\lambda)$ მატრიცების ერთადერთობა.

ამ მატრიცების არსებობის დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ, რომ, როცა $k\geqslant l$,

$$A(\lambda)-B(\lambda)\cdot B_0^{-1}A_0\lambda^{k-l}$$

სხვაობის ხარისხი იქნება მკაცრად ნაკლები k-ზე; ამიტომ $B_0^{-1}A\lambda^{k-l}$ იქნება $Q_1(\lambda)$ მატრიცული λ-მრავალწევრის უფროსი წევრი. შემდეგ გრძელდება ისევე, როგორც § 20-ში. მეორე მხრივ,

$$A(\lambda)-A_0B_0^{-1}\lambda^{k-l}\cdot B(\lambda)$$

სხვაობის ხარისხი აგრეთვე მკაცრად ნაკლებია k-ზე, ე. ი. $A_0B_0^{-1}\lambda^{k-l}$ იქნება $Q_2(\lambda)$ მატრიცული λ-მრავალწევრის უფროსი წევრი. ჩვენ ვხედავთ, რომ $Q_1(\lambda)$ და $Q_2(\lambda)$ λ-მატრიცები (და აგრეთვე $R_1(\lambda)$ და $R_2(\lambda)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემის პირობებს, ზოგად შემთხვევაში მართლაც იქნებიან განსხვავებული.

ძირითადი თეორემა მატრიცთა მსგავსების შესახებ. როგორც უკვე აღინიშნა, ჩვენ ჯერ არ გვაქვს წესი იმ საკითხის ამოხსნისათვის, მსგავსია თუ არა მოცემული რიცხვითი A და B მატრიცები (ე. ი. ძირითადი P ველის ელემენტებიანი მატრიცები). მეორე მხრივ, მათი მახასიათებელი $A-\lambda E$ და $B-\lambda E$ მატრიცები არიან λ-მატრიცები და საკითხი ამ მატრიცების ეკვივალენტობის შესახებ წყდება სავსებით ეფექტურად. ამიტომ ადვილი გასაგებია თუ რამდენად დიდია შემდეგი თეორემის მნიშვნელობა:

P ველის ელემენტებიანი A და B მატრიცები მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი მახასიათებელი $A-\lambda E$ და $B-\lambda E$ მატრიცები ეკვივალენტურია.

მართლაც, ვთქვათ A და B მატრიცები მსგავსია, ე. ი. P ველზე არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი C მატრიცი, რომ

$$B=C^{-1}AC.$$

მაშინ

$$C^{-1}(A-\lambda E)C=C^{-1}AC-\lambda(C^{-1}EC)=B-\lambda E.$$

მაგრამ გადაუგვარებელი რიცხვითი C^{-1} და C მატრიცები არიან უნიმოდულარული λ-მატრიცები. ჩვენ ვხედავთ, რომ $B-\lambda E$ მატრიცი მიღებულია $A-\lambda E$ მატრიცის მარცხნიდან და მარჯვნიდან უნიმოდულარულ მატრიცებზე გამრავლებით, ე. ი. $A-\lambda E\sim B-\lambda E$.

შებრუნებული დებულების დამტკიცება უფრო რთულია. ვთქვათ

$$A-\lambda E\sim B-\lambda E.$$

მაშინ არსებობენ ისეთი უნიმოდულარული $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ მატრიცები, რომ

$$U(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)=B-\lambda E. \tag{9}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ უნიმოდულარული მატრიცებისათვის არსებობენ შებრუნებული მატრიცები და არიან λ-მატრიცები, (9)-დან გამოვიყვანთ შემდეგ ტოლობებს, რომლებიც ქვემოთ გამოგვადგება:

$$\left.\begin{aligned}U(\lambda)(A-\lambda E)&=(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda),\\ (A-\lambda E)V(\lambda)&=U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ვინაიდან $B-\lambda E$ λ-მატრიცს აქვს λ-ს მიმართ 1 ხარისხი, ამასთან შესაბამისი მატრიცული მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი არის გადაუგვარებელი—E მატრიცი, ამიტომ $U(\lambda)$ და $B-\lambda E$ მატრიცებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ნაშთით გაყოფის ალგორითმი: არსებობენ ისეთი $Q_1(\lambda)$ და R_1 მატრიცები—უკანასკნელს, თუ განსხვავებულია ნულისაგან, უნდა ჰქონდეს λ-ს მიმართ 0 ხარისხი, ე. ი. λ-ზე არ არის დამოკიდებული,—რომ

$$U(\lambda)=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1. \tag{11}$$

ანალოგიურად

$$V(\lambda)=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2. \tag{12}$$

თუ გამოვიყენებთ (11)-ს და (12)-ს, (9)-დან მივიღებთ:

$$R_1(A-\lambda E)R_2=(B-\lambda E)-U(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-$$
$$-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E),$$

ანუ, (10) ის გამო,

$$R_1(A-\lambda E)R_2=(B-\lambda E)-(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-$$
$$-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E)+$$
$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)=(B-\lambda E)\times$$
$$\times\{E-[V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)](B-\lambda E)\}.$$

მარჯვნივ მოთავსებული კვადრატული ფრჩხილი სინამდვილეში უდრის ნულს: წინააღმდეგ შემთხვევაში, არის რა λ მატრიცი, ვინაიდან $V^{-1}(\lambda)$-ც და $U^{-1}(\lambda)$-ც არიან λ-მატრიცები, მას ექნებოდა სულ მცირე 0 ხარისხი, ხოლო მაშინ ფიგურული ფრჩხილის ხარისხი იქნებოდა არანაკლები 1-ისა და, მაშასადამე, მთელი მარჯვენა მხარის ხარისხი იქნებოდა არანაკლები 2-ისა. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან მარცხნივ დგას 1 ხარისხის λ-მატრიცი.

ამრიგად,

$$R_1(A-\lambda E)R_2=B-\lambda E,$$

საიდანაც, თუ გავუტოლებთ λ-ს ერთნაირ ხარისხებთან მდგომ მატრიცულ კოეფიციენტებს, მივიღებთ

$$R_1AR_2=B, \tag{13}$$
$$R_1R_2=E. \tag{14}$$

(14) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ რიცხვითი R_2 მატრიცი არა მარტო განსხვავებულია ნულისაგან, არამედ გადაუგვარებელიც არის, ამასთან

$$R_2^{-1}=R_1,$$

ხოლო მაშინ (13) ტოლობა ღებულობს

$$R_2^{-1}AR_2=B$$

სახეს, რაც ამტკიცებს A და B მატრიცების მსგავსებას.

ერთდროულად ჩვენ ვისწავლეთ მონახვა იმ გადაუგვარებელი R_2 მატრიცისა, რომელიც ახდენს A მატრიცის ტრანსფორმირებას B მატრიცში. სახელდობრ, თუ $A-\lambda E$ და $B-\lambda E$ მატრიცები ეკვივალენტურია, მაშინ პირველი ელემენტარულ გარდაქმნათა სასრული რიცხვით გადაიყვანება მეორეში. ვიღებთ ამ გარდაქმნებიდან იმათ, რომლებიც ეხებიან სვეტებს, და იმავე თანმიმდევრობით ალებულ შესაბამის ელემენტარულ მატრიცთა ნამრავლს ალვნიშნავთ $V(\lambda)$-თი. შემდეგ $V(\lambda)$-ს ვყოფთ $B-\lambda E$-ზე, ამასთან ისე, რომ განაყოფი იდგეს გამყოფის მარცხნივ (იხ. (8)). სწორედ ამ გაყოფის ნაშთი იქნება R_2 მატრიცი.

აღნიშნული გაყოფა სინამდვილეში შეიძლება არ შევასრულოთ, არამედ ვისარგებლოთ შემდეგი ლემით, რომელიც პოვებს გამოყენებას აგრეთვე § 62-ში.

ლ ე მ ა: ვ თ ქ ვ ა თ

$$V(\lambda)=V_0\lambda^s+V_1\lambda^{s-1}+\ldots+V_{s-1}\lambda+V_s,\ V_0\neq 0. \tag{15}$$

თ უ

$$\begin{aligned} V(\lambda)&=(\lambda E-B)Q_1(\lambda)+R_1,\\ V(\lambda)&=Q_2(\lambda)(\lambda E-B)+R_2, \end{aligned} \tag{16}$$

მ ა შ ი ნ

$$\begin{aligned} R_1&=B^sV_0+B^{s-1}V_1+\ldots+BV_{s-1}+V_s,\\ R_2&=V_0B^s+V_1B^{s-1}+\ldots+V_{s-1}B+V_s. \end{aligned} \tag{17}$$

საკმარისია დავამტკიცოთ ლემის ამ ორი დებულებიდან თუნდაც პირველი, მეორე დამტკიცდება სავსებით ანალოგიურად. დამტკიცება მდგომარეობს (16) ტოლობის სამართლიანობის უშუალო შემოწმებაში, თუ $V(\lambda)$ მრავალწევრი იქნება შეცვლილი მისი (15) ჩაწერით, R_1-ის მაგივრად იქნება ჩასმული (17), ხოლო $Q_1(\lambda)$-ად აიღება

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda)=V_0\lambda^{s-1}+(BV_0+V_1)\lambda^{s-2}+(B^2V_0+BV_1+V_2)\lambda^{s-3}+\ldots\\ \ldots+(B^{s-1}V_0+B^{s-2}V_1+\ldots+V_{s-1}) \end{aligned}$$

მრავალწევრი. ამ შემოწმებას ვანდობთ მკითხველს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -10 & -4\\ 26 & 11 \end{pmatrix}$$

მატრიცები. მათი მახასიათებელი მატრიცები ეკვივალენტურია, ვინაიდან დაიყვანებიან ერთ და იმავე კანონიკურ სახეზე

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda-6 \end{pmatrix};$$

ამიტომ A და B მატრიცები მსგავსია.

R_2 მატრიცის მონახვისათვის, რომელიც ახდენს A-ს ტრანსფორმირებას B-ში, მოვნახოთ ელემენტარული გარდაქმნების რაიმე ჯაჭვი, რომელსაც $A-\lambda E$ გადაყავს $B-\lambda E$-ში. ასე მაგალითად,

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1\\ -16-8\lambda & 11-\lambda \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 8+4\lambda & -4\\ -16-8\lambda & 11-\lambda \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 40+4\lambda & -4\\ -104 & 11-\lambda \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -10-\lambda & -4\\ 26 & 11-\lambda \end{pmatrix}=B-\lambda E.$$

სვეტებს ეხება უკანასკნელი ორი გარდაქმნა: პირველ სვეტს ემატება მეორე, გამრავლებული -8-ზე, ხოლო შემდეგ პირველი სვეტი მრავლდება $-\frac{1}{4}$-ზე. შესაბამისი ელემენტარული მატრიცების ნამრავლი იქნება

$$V(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცი არ არის დამოკიდებული λ-ზე და ამიტომ ის იქნება კიდევ საძიებელი T_0 მატრიცი.

რა თქმა უნდა, მატრიცი, რომელიც ახდენს A-ს ტრანსფორმირებას B-ში, განსაზღვრული არაცალსახად. მაგალითად, ასეთი იქნება აგრეთვე

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

მატრიცი.

§ 61. ჟორდანის ნორმალური ფორმა

ჩვენ ახლა განვიხილავთ P ველის ელემენტებიან n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცებს. გამოყოფილი იქნება ასეთი მატრიცების ერთი სპეციალური ტიპი, ეგრეთ წოდებული ჟ ო რ დ ა ნ ი ს მატრიცები და ნაჩვენები იქნება, რომ ეს მატრიცები წარმოადგენენ ნორმალურ ფორმას მატრიცთა ძალიან ფართო კლასისათვის, სახელდობრ, მ ა ტ რ ი ც ე ბ ი, რ ო მ ე ლ თ ა ყ ვ ე ლ ა მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი ფ ე ს ვ ი მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი ა ძ ი რ ი თ ა დ P ვ ე ლ შ ი (დ ა მ ხ ო ლ ო დ ა ს ე თ ი მ ა ტ რ ი ც ე ბ ი), მ ს გ ა ვ ს ი ა ჟ ო რ დ ა ნ ი ს რ ო ი მ ე მ ა ტ რ ი ც ი ს ა, ე. ი., რ ო გ ო რ ც ა მ ბ ო ბ ე ნ, ი ს ი ნ ი დ ა ი ყ ვ ა ნ ე ბ ი ა ნ ჟ ო რ დ ა ნ ი ს ნ ო რ მ ა ლ უ რ ფ ო რ მ ა ზ ე. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ P ველად აღებულია კომპლექსურ რიცხვთა ველი, ყ ო ვ ე ლ ი კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ ე ლ ე მ ე ნ ტ ე ბ ი ა ნ ი მ ა ტ რ ი ც ი დ ა ი ყ ვ ა ნ ე ბ ა კ ო მ პ ლ ე ქ ს უ რ რ ი ც ხ ვ თ ა ვ ე ლ შ ი ჟ ო რ დ ა ნ ი ს ნ ო რ მ ა ლ უ რ ფ ო რ მ ა ზ ე.

შემოვიტანოთ აუცილებელი განმარტებები. k რიგის ჟ ო რ დ ა ნ ი ს უ ჯ რ ე დ ი, რომელიც მიეკუთვნება λ_0 რიცხვს, ეწოდება k რიგის მატრიცს, $1\leqslant k\leqslant n$, რომელსაც აქვს

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \mathbf{O}\\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ \mathbf{O} & & & & \lambda_0\end{pmatrix} \tag{1}$$

სახე; სხვა სიტყვებით, მის მთავარ დიაგონალზე დგას P ველის ერთი და იგივე λ_0 რიცხვი; მთავარი დიაგონალის ზემოდან უახლოესი პარალელური ხაზი მთლიანად დაკავებულია 1 რიცხვით; მატრიცის ყველა დანარჩენი ელემენტი ტოლია ნულის. ასე მაგალითად,

$$(\lambda_0),\quad \begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$$

იქნება შესაბამისად პირველი, მეორე და მესამე რიგის ჟორდანის უჯრედები.

n-ური რიგის ჟორდანის მატრიცი ეწოდება n-ური რიგის მატრიცს, რომელსაც აქვს სახე

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & O \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix}; \tag{2}$$

აქ მთავარი დიაგონალის გასწვრივ გვაქვს რომელიღაც რიგების J_1, $J_2, \ldots, J_s$ არა აუცილებლად განსხვავებული ჟორდანის უჯრედები, რომლებიც მიეკუთვნება P ველის აგრეთვე არა აუცილებლად განსხვავებულ რაღაც რიცხვებს; ყველა ადგილი ამ უჯრედების გარეთ დაკავებულია ნულებით. ამასთან $s \geqslant 1$, ე. ი. n-ური რიგის ერთი ჟორდანის უჯრედი ამავე რიგის ჟორდანის მატრიცათა რიცხვს ეკუთვნის, და, გასაგებია, $s \leqslant n$.

შევნიშნოთ, თუმცა ეს არ იქნება შემდეგში გამოყენებული, რომ შეიძლებოდა ჟორდანის მატრიცის აღწერა ისე, რომ არ მიგვემართა ჟორდანის უჯრედის ცნებისათვის. სახელდობრ, ცხადია, რომ J მატრიცი იქნება ჟორდანის მატრიცი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას აქვს

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & & O \\ & \lambda_2 & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ O & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

სახე, სადაც λ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, ნებისმიერი რიცხვებია P ველიდან, ხოლო ყოველი ε_j, $j=1, 2, \ldots, n-1$, ტოლია ერთის ან ნულის, ამასთან, თუ $\varepsilon_j=1$, მაშინ $\lambda_j=\lambda_{j+1}$.

დიაგონალური მატრიცები წარმოადგენენ ჟორდანის მატრიცების კერძო შემთხვევას; ესენი იქნებიან ზუსტად ის ჟორდანის მატრიცები, რომელთათვისაც ყველა ჟორდანის უჯრედს აქვს 1 რიგი.

ჩვენს უახლოეს მიზანს წარმოადგენს n-ური რიგის ნებისმიერი J ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი $J-\lambda E$ მატრიცისათვის კანონიკური სახის მონახვა. თავდაპირველად მოვნახოთ კანონიკური სახე k-ური რიგის ერთი ჟორდანის (1) უჯრედის მახასიათებელი

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & 1 & & & O \\ & \lambda_0-\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ O & & & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \tag{3}$$

მატრიცისათვის. თუ გამოვითვლით ამ მატრიცის დეტერმინანტს და გავითვალისწინებთ, რომ $d_k(\lambda)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი უნდა უდრიდეს 1-ს, მივიღებთ,

$$d_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k.$$

მეორე მხრივ, (3) მატრიცის $k-1$ რიგის მინორებს შორის არის ერთის ტოლი მინორი, სახელდობრ ის, რომელიც მიიღება ამ მატრიცის პირველი სვეტის და უკანასკნელი სტრიქონის ამოშლის შემდეგ. ამიტომ

$$d_k(\lambda)=1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ კანონიკურ სახეს (3) მატრიცისათვის წარმოადგენს k-ური რიგის შემდეგი λ-მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \mathrm{O} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathrm{O} & & & (\lambda-\lambda_0)^k \end{pmatrix}. \tag{4}$$

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი ლემა:

თუ $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_t(\lambda)$ მრავალწევრები $P[\lambda]$ რგოლიდან წყვილ-წყვილად თანამარტივია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ეკვივალენტობას:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & \mathrm{O} \\ & \varphi_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \varphi_t(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \mathrm{O} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathrm{O} & & & \prod_{i=1}^{t} \varphi_i(\lambda) \end{pmatrix}.$$

ცხადია, საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა $t=2$.ვინაიდან $\varphi_1(\lambda)$ და $\varphi_2(\lambda)$ მრავალწევრები თანამარტივია, ამიტომ $P[\lambda]$ რგოლში არსებობენ ისეთი $u_1(\lambda)$ და $u_2(\lambda)$ მრავალწევრები, რომ

$$\varphi_1(\lambda)u_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda)u_2(\lambda)=1.$$

ამიტომ

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & \varphi_1(\lambda)u_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda)u_2(\lambda) \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 1 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ \varphi_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(\lambda) \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

გადავიდეთ ახლა (2) სახის J ჟორდანის მატრიცისათვის მახასიათებელი

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} \boxed{J_1-\lambda E_1} & & & \mathbf{O} \\ & \boxed{J_2-\lambda E_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \boxed{J_s-\lambda E_s} \end{pmatrix} \tag{5}$$

მატრიცის განხილვაზე, აქ E_i, $i=1, 2,\ldots, s$, არის ერთეულოვანი მატრიცი იმავე რიგისა რაც J_i უჯრედი. ვთქვათ, J მატრიცის ჟორდანის უჯრედები მიეკუთვნება შემდეგ განსხვავებულ რიცხვებს: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_t$, სადაც $t\leqslant s$. ვთქვათ, შემდეგ, λ_i, $i=1, 2,\ldots, t$, რიცხვს მიეკუთვნება q_i ჟორდანის უჯრედი, $q_i\geqslant 1$, და ვთქვათ ამ არაზრდად რიგში განლაგებული უჯრედების რიგები არის

$$k_{i1}\geqslant k_{i2}\geqslant\ldots\geqslant k_{iq_i}. \tag{6}$$

აღვნიშნოთ, თუმცა ამით არ ვისარგებლებთ, რომ

$$\sum_{i=1}^{t} q_i = s,$$

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{q_i} k_{ij}=n.$$

თუ ელემენტარულ გარდაქმნებს გამოვიყენებთ (5) მატრიცის იმ სტრიქონებისა და სვეტების მიმართ, რომლებიც გადიან ამ მატრიცის $J_i-\lambda E_i$ უჯრედზე, ცხადია, ჩვენ არ შევეხებით სხვა დიაგონალურ უჯრედებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ (5) მატრიცში შეიძლება ელემენტარული გარდაქმნების დახმარებით ყოველი $J_i-\lambda E_i$, $i=1, 2,\ldots, s$, უჯრედი შეიცვალოს შესაბამისი (4) სახის უჯრედით. სხვა სიტყვებით, $J-\lambda E$ მატრიცი ეკვივალენტურია დიაგონალური მატრიცისა, რომლის დიაგონალზეც ერთიანების რაღაც რიცხვთან ერთად დგანან აგრეთვე შემდეგი მრავალწევრები, რომლებიც შეესაბამებიან J მატრიცის ყველა ჟორდანის უჯრედს:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}},\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}},\ldots,\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}},\\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{21}},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}},\ldots,\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_2}},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}},\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}},\ldots,\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{tq_t}}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

ამასთან ჩვენ არ ვუთითებთ იმ ადგილებს დიაგონალზე, რომლებზეც დგანან (7) მრავალწევრები, ვინაიდან ნებისმიერ დიაგონალურ λ-მატრიცში შეიძლება დიაგონალური ელემენტების ნებისმიერად გადანაცვლება სტრიქონების და

ერთსახელა სვეტების გადანაცვლებების საშუალებით. ეს შენიშვნა უნდა მივიღოთ მხედველობაში შემდეგშიაც.

ვთქვათ q უდიდესია q_i, $i=1, 2,\ldots, t$, რიცხვთა შორის. აღვნიშნოთ $e_{n-j+1}(\lambda)$-თი ნამრავლი მრავალწევრებისა, რომლებიც დგანან (7) ცხრილის j-ურ სვეტში, $j=1, 2,\ldots, q$, ე. ი.

$$e_{n-j+1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}; \qquad (8)$$

ამასთან, თუ j-ურ სვეტში გვაქვს ცარიელი ადგილები—ზოგიერთი i ებისათვის შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $q_i<j$,—მაშინ შესაბამის მამრავლებს (8)-ში ვთვლით ერთის ტოლად. ვინაიდან პირობის თანახმად $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_t$ რიცხვები განსხვავებული არიან, ამიტომ (7) ცხრილის j-ურ სვეტში მოთავსებული წრფივი ორწევრების ხარისხები წყვილ-წყვილად თანამარტივი იქნებიან. ამიტომ, ზემოთ დამტკიცებული ლემის საფუძველზე, ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით შეიძლება მათი შეცვლა განხილულ დიაგონალურ მატრიცში მათი $e_{n-j+1}(\lambda)$ ნამრავლით და ერთიანების გარკვეული რიცხვით.

თუ ამას ჩავატარებთ $j=1, 2,\ldots, q$-სათვის, მივიღებთ, რომ

$$J-\lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & e_{n-1}(\lambda) & \\ \mathbf{O} & & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

ეს კი იქნება $J-\lambda E$ მატრიცის საძიებელი კანონიკური სახე. მართლაც, უფროსი კოეფიციენტები ყველა მრავალწევრისა, რომელიც (9)-ში დგას მთავარ დიაგონალზე, ერთის ტოლია და თითოეული ამ მრავალწევრთაგანი უნაშთოდ იყოფა წინაზე (6) პირობის გამო.

მაგალითი. ვთქვათ

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & & & & \mathbf{O} \\ & \boxed{2} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & \\ \mathbf{O} & & & & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

მე-9 რიგის ამ ჟორდანის მატრიცისათვის მრავალწევრთა (7) ცხრილს აქვს სახე

$$(\lambda-2)^3,\ \lambda-2,\ \lambda-2,$$
$$(\lambda-5)^2,\ (\lambda-5)^2.$$

ამიტომ J მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები იქნება

$$e_9(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-5)^2,$$
$$e_8(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)^2,$$
$$e_7(\lambda)=\lambda-2,$$

მრავალწევრები, მაშინ როცა $e_6(\lambda)=\ldots=e_1(\lambda)=1$.

ახლა, როცა ვისწავლეთ მოცემული ჟორდანის J მატრიცის სახის მიხედვით უცბათ დავწეროთ მისი მახასიათებელი მატრიცის კანონიკური სახე, შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი თეორემა:

ორი ჟორდანის მატრიცი მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი შედგებიან ერთი და იგივე ჟორდანის უჯრედებისაგან, ე. ი. განსხვავდებიან, შესაძლოა, მხოლოდ ამ უჯრედების განლაგებით მთავარი დიაგონალის გასწვრივ.

მართლაც, მრავალწევრთა (7) ცხრილი სავსებით განისაზღვრებოდა ჟორდანის J მატრიცის ჟორდანის უჯრედთა ერთობლიობით და მასში არანაირად არ ისახებოდა ჟორდანის უჯრედების განლაგება ამ მატრიცის მთავარი დიაგონალის გასწვრივ. აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ ჟორდანის J და J' მატრიცებს გააჩნიათ ჟორდანის უჯრედთა ერთი და იგივე ერთობლიობა, მაშინ მათ შეესაბამება მრავალწევრების ერთი და იგივე (7) ცხრილი და ამიტომ ერთი და იგივე (8) მრავალწევოები. ამრიგად, მახასიათებელ $J-\lambda E$ და $J'-\lambda E$ მატრიცებს გააჩნიათ ერთი და იგივე ინვარიანტული მამრავლები, ე. ი. ეკვივალენტური არიან და ამიტომ თვითონ J და J' მატრიცებიც მსგავსია.

პირიქით, თუ ჟორდანის J და J' მატრიცები მსგავსია, მაშინ მათ მახასიათებელ მატრიცებს გააჩნიათ ერთი და იგივე ინვარიანტული მამრავლები. ვთქვათ, (8) მრავალწევრები $j=1, 2, \ldots, q$-სათვის არიან ამ ინვარიანტული მამრავლებიდან ისინი, რომლებიც განსხვავდებიან ერთისაგან. მაგრამ (8) მრავალწევრების მიხედვით აღდგება მრავალწევრთა (7) ცხრილი. სახელდობრ, (8) მრავალწევრები იშლებიან წრფივ მამრავლთა ხარისხების ნამრავლად, ვინაიდან ეს თვისება გააჩნიათ, როგორც უკვე დამტკიცებულია, ნებისმიერი ჟორდანის მატრიცისათვის მახასიათებელი მატრიცის ინვარიანტულ მამრავლებს. (7) ცხრილი შედგება სწორედ წრფივ მამრავლთა ყველა იმ მაქსიმალური ხარისხისაგან, რომლებადაც იშლებიან (8) მრავალწევრები. ბოლოს, (7) ცხრილის მიხედვით აღდგება საწყისი ჟორდანის მატრიცთა ჟორდანის უჯრედები: (7) ცხრილიდან ყოველ $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ მრავალწევრს შეესაბამება k_{ij} რიგის ჟორდანის უჯრედი, რომელიც მიეკუთვნება λ_i რიცხვს. ამით დამტკიცებულია, რომ J და J' მატრიცები შედგებიან ერთი და იგივე ჟორ-

დანის უჯრედებისაგან და განსხვავდებიან, შესაძლოა, მხოლოდ მათი განლაგებით.

კერძოდ, ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ დიაგონალური მატრიცის მსგავსი ჟორდანის მატრიცი თვითონ არის დიაგონალური და რომ ორი დიაგონალური მატრიცი მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთი მეორისაგან მიიღება მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული რიცხვების გადანაცვლებით.

მატრიცის დაყვანა ჟორდანის ნორმალურ ფორმაზე. თუ P ველის ელემენტებიანი A მატრიცი დაიყვანება ჟორდანის ნორმალურ ფორმაზე, ე. ი. მსგავსია ჟორდანის მატრიცისა, მაშინ, როგორც ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, A მატრიცისათვის ჟორდანის ნორმალური ფორმა ცალსახად განისაზღვრება მთავარ დიაგონალზე ჟორდანის უჯრედების განლაგებამდე სიზუსტით. პირობა იმისა, რომ A მატრიცს გააჩნდეს ასეთი დაყვანა, მითითებულია შემდეგ თეორემაში, რომლის დამტკიცება იძლევა ერთდროულად A მატრიცის მსგავსი ჟორდანის მატრიცის მოძებნის პრაქტიკულ წესს, თუ ასეთი ჟორდანის მატრიცი არსებობს. ამასთან, P ველში დაყვანადობა ნიშნავს, რომ ტრანსფორმირების მატრიცის ყველა ელემენტი მოთავსებულია P ველში.

P ველის ელემენტებიანი A მატრიცი დაიყვანება P ველში ჟორდანის ნორმალურ ფორმაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი მოთავსებულია თვით ძირითად P ველში.

მართლაც, თუ A მატრიცი მსგავსია J ჟორდანის მატრიცისა, მაშინ ამ ორ მატრიცს გააჩნია ერთი და იგივე მახასიათებელი ფესვები. მაგრამ J მატრიცის მახასიათებელი ფესვები მოინახება ყოველგვარი დაბრკოლებების გარეშე: ვინაიდან $J-\lambda E$ მატრიცის დეტერმინანტი უდრის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული მისი ელემენტების ნამრავლს, ამიტომ $|J-\lambda E|$ მრავალწევრი იშლება P ველზე წრფივ მამრავლებად და მისი ფესვებია J მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებული რიცხვები, და მხოლოდ ისინი.

პირიქით, ვთქვათ, A მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი მოთავსებულია თვითონ P ველში. თუ $A-\lambda E$ მატრიცის 1-საგან განსხვავებული ინვარიანტული მამრავლები იქნება

$$e_{n-q+1}(\lambda), \ldots, e_{n-1}(\lambda), e_n(\lambda), \qquad (10)$$

მაშინ

$$|A-\lambda E| = (-1)^n e_{n-q+1}(\lambda) \ldots e_{n-1}(\lambda)\, e_n(\lambda).$$

მართლაც, $A-\lambda E$ მატრიცის და მისი კანონიკური მატრიცის დეტერმინანტები ერთმანეთისაგან შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ მუდმივი მამრავლით, რომელიც სინამდვილეში უდრის $(-1)^n$-ს, ვინაიდან სწორედ ასეთია

მახასიათებელი $|A-\lambda E|$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი. ამრიგად, (10) მრავალწევრებს შორის არ არის ნულის ტოლი, ამ მრავალწევრთა ხარისხების ჯამი უდრის n-ს და ყველა ისინი იშლება P ველზე წრფივ მამრავლებად—ეს უკანასკნელი იმის გამო, რომ, პირობის თანახმად, $|A-\lambda E|$ მრავალწევრს გააჩნია ასეთი დაშლა.

ვთქვათ (8) არის (10) მრავალწევრების დაშლები წრფივ მამრავლთა ხარისხების ნამრავლად. e_{n-j+1}, $j=1, 2, \ldots, q$, მრავალწევრის ელემენტარული გამყოფები ვუწოდოთ სხვადასხვა წრფივ ორწევრთა ერთისაგან განსხვავებულ ხარისხებს, რომლებიც შედიან მის (8) დაშლაში, ე. ი.

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{2j}}, \ldots,\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{tj}}.$$

ყველა (10) მრავალწევრის ელემენტარულ გამყოფებს ვუწოდოთ A მატრიცის ელემენტარული გამყოფები და ამოვწეროთ ისინი (7) ცხრილის სახით.

ავიღოთ ახლა n-ური რიგის J ჟორდანის მატრიცი, შედგენილი ჟორდანის უჯრედებისაგან, რომლებიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად: A მატრიცის ყოველ ელემენტარულ $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ გამყოფს მოვუყვანთ თანადობაში k_{ij} რიგის ჟორდანის უჯრედს, რომელიც მიეკუთვნება λ_i რიცხვს. ცხადია, რომ $J-\lambda E$ მატრიცის 1-საგან განსხვავებული ინვარიანტული მამრავლები იქნებიან (10) მრავალწევრები და მხოლოდ ისინი. ამიტომ $A-\lambda E$ და $J-\lambda E$ მატრიცები ეკვივალენტურია და, მაშასადამე, A მატრიცი მსგავსია J ჟორდანის მატრიცისა.

მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია

$$A=\begin{pmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

მატრიცი. თუ ჩვეულებრივი წესით დავიყვანთ $A-\lambda E$ მატრიცს კანონიკურ სახეზე, მივიღებთ, რომ ამ მატრიცის ერთისაგან განსხვავებული ინვარიანტული მამრავლები არიან

$$e_4(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

$$e_3(\lambda)=\lambda-1$$

მრავალწევრები. ჩვენ ვხედავთ, რომ A მატრიცი დაიყვანება ჟორდანის ნორმალურ ფორმაზე რაციონალურ რიცხვთა ველშიც კი. მისი ელემენტარული გამყოფებია $(\lambda-1)^2$, $\lambda-1$ და $\lambda+2$ მრავალწევრები და ამიტომ A მატრიცის ჟორდანის ნორმალური ფორმა არის

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

მატრიცი.

რომ გვდომოდა ისეთი გადაუგვარებელი მატრიცის მონახვა, რომელიც მოახდენდა A მატრიცის ტრანსფორმირებას J მატრიცში, მაშინ უნდა გამოგვეყენებინა წინა პარაგრაფის ბოლოში გაკეთებული მითითებები.

ბოლოს, წინა პარაგრაფების საფუძველზე შეიძლება დამტკიცდეს დიაგონალურ სახეზე მატრიცის დაყვანადობის შემდეგი აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომლიდანაც მაშინვე გამომდინარეობს დიაგონალურ სახეზე დაყვანადობის § 33-ში დამტკიცებული საკმარისი კრიტერიუმი.

P ველის ელემენტებიანი n-ური რიგის A მატრიცი დაიყვანება დიაგონალურ სახეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი მახასიათებელი მატრიცის უკანასკნელი ინვარიანტული $e_n(\lambda)$ მამრავლის ყველა ფესვი მოთავსებულია P ველში, ამასთან ამ ფესვებს შორის არ არის ჯერადები.

მართლაც, დიაგონალურ სახეზე მატრიცის დაყვანადობა ტოლფასია ისეთ ჟორდანის სახეზე დაყვანადობისა, რომლის ყველა ჟორდანის უჯრედს აქვს 1 რიგი. სხვა სიტყვებით, A მატრიცის ყველა ელემენტარული გამყოფი უნდა იყოს პირველი ხარისხის მრავალწევრი. მაგრამ, ვინაიდან $A-\lambda E$ მატრიცის ყველა ინვარიანტული მამრავლი არის $e_n(\lambda)$ მრავალწევრის გამყოფი, ამიტომ უკანასკნელი პირობა ტოლფასია იმისა, რომ $e_n(\lambda)$ მრავალწევრის ყველა ელემენტარულ გამყოფს აქვს 1 ხარისხი, რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

§ 62. მინიმალური მრავალწევრი

ვთქვათ, მოცემულია P ველის ელემენტებიანი n-ური რიგის A კვადრატული მატრიცი. თუ

$$f(\lambda)=\alpha_0\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}\lambda+\alpha_k$$

$P[\lambda]$ რგოლის ნებისმიერი მრავალწევრია, მაშინ

$$f(A)=\alpha_0 A^k+\alpha_1 A^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}A+\alpha_k E$$

მატრიცს ვუწოდებთ $f(\lambda)$ მრავალწევრის მნიშვნელობას, როცა $\lambda=A$; შევაქციოთ ყურადღება იმას, რომ $f(\lambda)$ მრავალწევრის თავისუფალი წევრი მრავლდება A მატრიცის ნულოვან ხარისხზე, ე. ი. ერთეულოვან E მატრიცზე.

ადვილად მოწმდება, რომ თუ

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)$$

ან

$$f(\lambda)=u(\lambda)\,v(\lambda),$$

მაშინ

$$f(A)=\varphi(A)+\psi(A)$$

და, შესაბამისად,

$$f(A)=u(A)\,v(A).$$

თუ $f(\lambda)$ მრავალწევრი ნული ხდება A მატრიცზე, ე. ი.

$$f(A)=0,$$

მაშინ A მატრიცს ვუწოდებთ მატრიცულ ფესვს ანუ, იქ სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობებს, უბრალოდ $f(\lambda)$ მრავალწევრის ფესვს.

ყოველი A მატრიცი არის რომელიმე არანულოვანი მრავალწევრის ფესვი.

მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ n-ური რიგის ყველა კვადრატული მატრიცი ქმნის P ველზე n^2-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს. აქედან გამომდინარეობს, რომ n^2+1 რაოდენობის

$$A^{n^2}, A^{n^2-1}, \ldots, A, E$$

მატრიცთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია P ველზე, ე. ი. P-ში არსებობს ისეთი $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}, \alpha_{n^2+1}$ ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, რომ

$$\alpha_0 A^{n^2} + \alpha_1 A^{n^2-1} + \ldots + \alpha_{n^2} A + \alpha_{n^2+1} E = 0.$$

ამრიგად, A მატრიცი აღმოჩნდა ფესვი არანულოვანი

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 \lambda^{n^2} + \alpha_1 \lambda^{n^2-1} + \ldots + \alpha_{n^2} \lambda + \alpha_{n^2+1}$$

მრავალწევრისა, რომლის ხარისხი არ აღემატება n^2-ს.

A მატრიცი არის აგრეთვე ფესვი ზოგიერთი ისეთი მრავალწევრისა, რომელთა უფროსი კოეფიციენტები უდრის ერთს—საკმარისია ავიღოთ ნებისმიერი არანულოვანი მრავალწევრი, რომელიც ნული ხდება A მატრიცზე, და გავყოთ ეს მრავალწევრი მის უფროს კოეფიციენტზე. უმცირესი ხარისხის მრავალწევრს 1 უფროსი კოეფიციენტით, რომელიც ნული ხდება A მატრიცზე, ეწოდება *A მატრიცის მინიმალური მრავალწევრი*. *შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის მინიმალური მრავალწევრი განსაზღვრულია ცალსახად*, ვინაიდან ორი ასეთი მრავალწევრის სხვაობას ექნებოდა ნაკლები ხარისხი, ვიდრე თითოეულ მათგანს, მაგრამ აგრეთვე გახდებოდა ნული A მატრიცზე.

ყოველი $f(\lambda)$ მრავალწევრი, რომელიც ნული ხდება A მატრიცზე, უნაშთოდ იყოფა ამ მატრიცის მინიმალურ $m(\lambda)$ მრავალწევრზე.

მართლაც, თუ

$$f(\lambda) = m(\lambda)\, q(\lambda) + r(\lambda),$$

სადაც $r(\lambda)$-ს ხარისხი ნაკლებია $m(\lambda)$-ს ხარისხზე, მაშინ

$$f(A) = m(A)\, q(A) + r(A)$$

და $f(A) = m(A) = 0$-დან გამომდინარეობს $r(A) = 0$, რაც ეწინააღმდეგება მინიმალური მრავალწევრის განმარტებას.

დავამტკიცოთ ახლა შემდეგი თეორემა:

A მატრიცის მინიმალური მრავალწევრი ემთხვევა $A-\lambda E$ მახასიათებელი მატრიცის უკანასკნელ ინვარიანტულ $e_n(\lambda)$ მამრავლს.

დამტკიცება. თუ შევინარჩუნებთ აღნიშვნებს და გამოვიყენებთ § 59-ის შედეგებს, შეიძლება დაიწეროს

$$(-1)^n |A - \lambda E| = d_{n-1}(\lambda)\, e_n(\lambda) \tag{1}$$

ტოლობა. აქედან გამომდინარეობს, კერძოდ, რომ $e_n(\lambda)$ და $d_{n-1}(\lambda)$ მრავალწევრები არ არიან ნულოვანი. შემდეგ, $B(\lambda)$-თი აღვნიშნოთ $A-\lambda E$ მატრიცთან მიკავშირებული მატრიცი (იხ. § 14),

$$B(\lambda)=(A-\lambda E)^*.$$

როგორც § 14-ის (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, სამართლიანია

$$(A-\lambda E)\,B(\lambda)=|A-\lambda E|E \tag{2}$$

ტოლობა. მეორე მხრივ, ვინაიდან $B(\lambda)$ მატრიცის ელემენტები არიან პლუს ან მინუს ნიშნით აღებული $A-\lambda E$ მატრიცის $n-1$ რიგის მინორები და მხოლოდ ისინი, ხოლო $d_{n-1}(\lambda)$ მრავალწევრი არის ყველა ამ მინორის უდიდესი საერთო გამყოფი, ამიტომ

$$B(\lambda)=d_{n-1}(\lambda)\,C(\lambda), \tag{3}$$

ამასთან $C(\lambda)$ მატრიცის ელემენტთა უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის 1-ს.

(2), (3) და (1) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$(A-\lambda E)d_{n-1}(\lambda)C(\lambda)=(-1)^n d_{n-1}(\lambda)e_n(\lambda)E$$

ტოლობა. ამ ტოლობის შეკვეცა შეიძლება არანულოვან $d_{n-1}(\lambda)$ მამრავლზე, როგორც შემდეგი ზოგადი დებულებიდან გამომდინარეობს: თუ $\varphi(\lambda)$ არის არანულოვანი მრავალწევრი, $D(\lambda)=(d_{ij}(\lambda))$ — არანულოვანი λ-მატრიცი, ამასთან, ვთქვათ, $d_{st}(\lambda)\neq 0$, მაშინ $\varphi(\lambda)\,D(\lambda)$ მატრიცში (s, t) ადგილზე იქნება მოთავსებული ნულისაგან განსხვავებული $\varphi(\lambda)d_{st}(\lambda)$ ელემენტი. ამრიგად,

$$(A-\lambda E)\,C(\lambda)=(-1)^n\,e_n(\lambda)\,E,$$

საიდანაც

$$e_n(\lambda)\,E=(\lambda E-A)\,[(-1)^{n+1}\,C(\lambda)]. \tag{4}$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\lambda E-A$ ორწევრზე A მატრიცის „მარცხენა" გაყოფის ნაშთი, რომელიც მარცხნივაა, უდრის ნულს. მაგრამ § 60-ის ბოლოში დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ნაშთი უდრის $e_n(A)\,E=e_n(A)$ მატრიცს. მართლაც, $e_n(\lambda)\,E$ მატრიცი შეიძლება ჩაიწეროს როგორც მატრიცული λ-მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები არიან სკალარული მატრიცები, ე. ი. გადაადგილებადია A მატრიცთან. ამრიგად,

$$e_n(A)=0,$$

ე. ი. $e_n(\lambda)$ მრავალწევრი მართლაც ნული ხდება A მატრიცზე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $e_n(\lambda)$ მრავალწევრი უნაშთოდ იყოფა A მატრიცის მინიმალურ $m(\lambda)$ მრავალწევრზე,

$$e_n(\lambda)=m(\lambda)\,q(\lambda). \tag{5}$$

ცხადია, რომ $q(\lambda)$ მრავალწევრის უფროსი კოეფიციენტი უდრის ერთს.

ვინაიდან $m(A)=0$, ამიტომ კვლავ, § 60-ის იმავე ლემის გამო, $m(\lambda)\,E$ λ-მატრიცის $\lambda E-A$ ორწევრზე მარცხენა გაყოფის ნაშთი უდრის ნულს, ე. ი.

$$m(\lambda)E=(\lambda E-A)\,Q(\lambda). \tag{6}$$

(5), (4) და (6) ტოლობებს მივყავართ

$$(\lambda E-A)\,[(-1)^{n+1}\,C(\lambda)]=(\lambda E-A)\,[Q(\lambda)\,q(\lambda)]$$

ტოლობამდე.

ამ ტოლობის ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს საერთო $\lambda E-A$ მამრავლზე, ვინაიდან ამ მატრიცული λ-მრავალწევრის E უფროსი კოეფიციენტი არის გადაუგვარებელი მატრიცი. ამრიგად,

$$C(\lambda)=(-1)^{n+1}\,Q(\lambda)\,q(\lambda).$$

მაგრამ ჩვენ გვახსოვს, რომ $C(\lambda)$ მატრიცის ელემენტთა უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის 1-ს; ამიტომ $q(\lambda)$ მრავალწევრს უნდა ჰქონდეს ნულოვანი ხარისხი, ხოლო ვინაიდან მისი უფროსი კოეფიციენტი უდრის 1-ს, ამიტომ $q(\lambda)=1$. ამრიგად, (5)-ის გამო,

$$e_n(\lambda)=m(\lambda),$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

ვინაიდან, (1)-ის გამო, A მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი უნაშთოდ იყოფა $e_n(\lambda)$ მრავალწევრზე, ამიტომ ახლახან დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

ჰამილტონ-კელის თეორემა. ყოველი მატრიცი არის თავისი მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვი.

წრფივი გარდაქმნის მინიმალური მრავალწევრი. დავამტკიცოთ ჯერ შემდეგი დებულება:

თუ A და B მატრიცები მსგავსია და თუ $f(\lambda)$ მრავალწევრი ნული ხდება A მატრიცზე, მაშინ ის ნული გახდება B მატრიცზეც.

მართლაც, ვთქვათ,

$$B=C^{-1}AC.$$

თუ

$$f(\lambda)=\alpha_0\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}\lambda+\alpha_k,$$

მაშინ

$$\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}A+\alpha_kE=0.$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ორივე მხარის ტრანსფორმირებას C მატრიცით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&C^{-1}(\alpha_0A^k+\alpha_1A^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}A+\alpha_kE)C=\\&=\alpha_0(C^{-1}AC)^k+\alpha_1(C^{-1}AC)^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}(C^{-1}AC)+\alpha_kE=\\&=\alpha_0B^k+\alpha_1B^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}B+\alpha_kE=0,\end{aligned}$$

ე. ი. $f(B)=0$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ მსგავს მატრიცებს გააჩნიათ ერთი და იგივე მინიმალური მრავალწევრი.

ვთქვათ ახლა φ არის P ველზე n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის წრფივი გარდაქმნა; სივრცის სხვადასხვა ბაზისებში ამ გარდაქმნის მომცემი მატრიცები ერთმანეთის მსგავსია. ამ მატრიცთა საერთო მინიმალურ მრა-

ვალწევრს ეწოდება φ წრფივი გარდაქმნის მინიმალური მრავალწევრი.

თუ გამოვიყენებთ წრფივ გარდაქმნებზე ოპერაციებს, რომლებიც შემოტანილ იქნა § 32-ში, შეიძლება შემოვიტანოთ $P[\lambda]$ რგოლის

$$f(\lambda)=\alpha_0\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}\lambda+\alpha_k$$

მრავალწევრის მნიშვნელობის ცნება, როცა λ უდრის φ წრფივ გარდაქმნას: ეს იქნება

$$f(\varphi)=\alpha_0\varphi^k+\alpha_1\varphi^{k-1}+\ldots+\alpha_{k-1}\varphi+\alpha_k\varepsilon$$

წრფივი გარდაქმნა, სადაც ε არის იგივური გარდაქმნა.

შემდეგ, ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(\lambda)$ მრავალწევრი ნული ხდება φ წრფივ გარდაქმნაზე, თუ

$$f(\varphi)=\omega,$$

სადაც ω არის ნულოვანი გარდაქმნა.

თუ გაითვალისწინებს წრფივ გარდაქმნებზე და მატრიცებზე ოპერაციებს შორის კავშირს, მკითხველი ადვილად დაამტკიცებს, რომ φ წრფივი გარდაქმნის მინიმალური მრავალწევრი არის ის ცალსახად განსაზღვრული უმცირესი ხარისხის მრავალწევრი 1 უფროსი კოეფიციენტით, რომელიც ნული ხდება φ გარდაქმნაზე. ამის შემდეგ ზემოთ მიღებული შედეგები, კერძოდ ჰამილტონ-კელის თეორემა, შეიძლება ხელახლა ჩამოყალიბდეს წრფივი გარდაქმნების ენაზე.

თავი მეთოთხმეტე

ჯ გ უ ფ ე ბ ი

§ 63. განმარტება და ჯგუფების მაგალითები

რგოლები და ველები, რომლებიც ასე დიდ როლს ასრულებდნენ წინა თავებში, წარმოადგენდნენ ალგებრულ სისტემებს ორი დამოუკიდებელი ოპერაციით: შეკრებითა და გამრავლებით. მაგრამ მათემატიკის სხვადასხვა დარგში და მის გამოყენებებში ძალიან ხშირად გვხვდება ისეთი ალგებრული სისტემებიც, რომლებშიც განმარტებულია მხოლოდ ერთი ალგებრული ოპერაცია. ასე მაგალითად, თუ შემოვისაზღვრებით ჯერჯერობით იმ მაგალითებით, რომლებიც უკვე გაჩნდა ჩვენს წიგნში, აღვნიშნავთ, რომ n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლეში (იხ. § 3) განვმარტეთ მხოლოდ ერთი ოპერაცია—გამრავლება. მეორე მხრივ, ვექტორული სივრცის განმარტებაში (§ 8) შედის ვექტორების შეკრება, მაშინ როცა ვექტორების გამრავლება ჩვენს მიერ არ იყო განმარტებული (შევნიშნავთ, რომ ვექტორის რიცხვზე გამრავლება არ აკმაყოფილებს ალგებრული ოპერაციის § 44-ში მოცემულ განმარტებას).

ერთ ოპერაციანი ალგებრული სისტემების უმნიშვნელოვანეს ტიპს ჯგუფები წარმოადგენენ. ამ ცნებას აქვს გამოყენებების უაღრესად ფართო არე და არის საგანი დიდი დამოუკიდებელი მეცნიერებისა—ჯგუფთა თეორიისა. ეს თავი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჯგუფთა თეორიის შესავალი—მასში გადმოცემული იქნება ელემენტარული ცნობები ჯგუფებზე, რომლებთან გაცნობა აუცილებელია ყოველი მათემატიკოსისათვის; თავი მთავრდება ერთი უფრო ნაკლებად ელემენტარული თეორემით.

შევთანხმდეთ, როგორც ეს მიღებულია ჯგუფთა ზოგად თეორიაში, რომ განხილულ ალგებრულ ოპერაციას ვუწოდებთ გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა ს და გამოვიყენებთ შესაბამის სიმბოლიკას. გავიხსენოთ (იხ. § 44), რომ ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი ო პ ე რ ა ც ი ა იგულისხმება ყ ო ვ ე ლ თ ვ ი ს შ ე ს რ უ ლ ე ბ ა დ ა დ და ც ა ლ ს ა ხ ა დ—განიილული სიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის არსებობს ab ნამრავლი და არის ამ სიმრავლის ცალსახად განსაზღვრული ელემენტი.

ჯგუფი ეწოდება G სიმრავლეს ერთი ალგებრული ოპერაციით, რომელიც ასოციაციურია (თუმცა არა აუცილებლად კომუტატური), და რომლისთვისაც არსებობს შებრუნებული ოპერაცია.

ჯგუფური ოპერაციის შესაძლო არაკომუტატურობის გამო, შებრუნებული ოპერაციის შესრულებადობა ნიშნავს შემდეგს: ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისათვის G-დან არსებობს G-ში ისეთი ცალსახად განსაზღვრული x ელემენტი და ისეთი ცალსახად განსაზღვრული y ელემენტი, რომ

$$ax=b, \quad ya=b.$$

თუ G ჯგუფი შედგება ელემენტების სასრული რიცხვისაგან, მაშინ მას ეწოდება სასრული ჯგუფი, ხოლო მასში შემავალ ელემენტთა რიცხვს—ჯგუფის რიგი. თუ G ჯგუფში განმარტებული ოპერაცია კომუტატურია, მაშინ G-ს ეწოდება კომუტატური ანუ აბელის ჯგუფი.

მივუთითოთ ჯგუფის განმარტებიდან გამომდინარე უმარტივეს თვისებებზე. § 44-ში ჩატარებული მსჯელობების საფუძველზე შეიძლება ვთქვათ, რომ ასოციაციურობის კანონი საშუალებას იძლევა ცალსახად ვილაპარაკოთ ჯგუფის გარკვეული რიგით მოცემული (ჯგუფური ოპერაციის შესაძლო არაკომუტატურობის გამო) ელემენტების ნებისმიერი სასრული რიცხვის ნამრავლზე.

გადავდივართ შებრუნებული ოპერაციის არსებობიდან გამომდინარე შედეგებზე.

ვთქვათ, G ჯგუფში მოცემულია ნებისმიერი a ელემენტი. ჯგუფის განმარტებიდან გამომდინარეობს G-ში ცალსახად განსაზღვრული ისეთი e_a ელემენტის არსებობა, რომ $ae_a=a$; მაშასადამე, ეს ელემენტი ასრულებს ერთეულის როლს მასზე მარჯვნიდან a ელემენტის გამრავლების დროს. თუ b არის G ჯგუფის ნებისმიერი სხვა ელემენტი და თუ y არის ჯგუფის ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს $ya=b$ ტოლობას (მისი არსებობა გამომდინარეობს ჯგუფის განმარტებიდან), მაშინ მივიღებთ:

$$b=ya=y\,(ae_a)=(ya)\,e_a=be_a.$$

ამრიგად, e_a ელემენტი ასრულებს მარჯვენა ერთეულის როლს G ჯგუფის ყველა ელემენტის მიმართ, და არა მარტო გამოსავალი a ელემენტის მიმართ; ამიტომ მას აღვნიშნავთ e'-ით. შებრუნებული ოპერაციის განმარტების ცალსახობიდან გამომდინარეობს ამ ელემენტის ერთადერთობა.

ასეთივე გზით შეიძლება დამტკიცდეს G ჯგუფში არსებობა და ერთადერთობა e'' ელემენტისა, რომელიც აკმაყოფილებს $e''a=a$ პირობას ყველა a-სათვის G-დან. სინამდვილეში e' და e'' ელემენტები ემთხვევა ერთმანეთს ინაიდან $e''e'=e''$ და $e''e'=e'$ ტოლობებიდან გამომდინარეობს $e''=e'$. ამით, დამტკიცებულია, რომ ყოველ G ჯგუფში არსებობს ცალსახად განსაზღვრული e ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$ae=ea=a$$

პირობას ყველა a-სათვის G-დან. ამ ელემენტს ეწოდება G ჯგუფის *ერთეული* და ჩვეულებრივ აღინიშნება 1 სიმბოლოთი.

შემდეგ, ჯგუფის განმარტებიდან გამომდინარეობს მოცემული a ელემენტისათვის ისეთი a' და a'' ელემენტების არსებობა და ერთადერთობა, რომ

$$aa'=1, \quad a''a=1.$$

სინამდვილეში a' და a'' ელემენტები ემთხვევა ერთმანეთს:

$$a''aa'=a''(aa')=a''\cdot 1=a'',$$

$$a''aa'=(a''a)\,a'=1\cdot a'=a'$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს $a''=a'$. ამ ელემენტს ეწოდება a ელემენტის *შებრუნებული* და აღინიშნება a^{-1}-ით, ე. ი.

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

ამრიგად, *ჯგუფის ყოველ ელემენტს გააჩნია ცალსახად განსაზღვრული შებრუნებული ელემენტი.*

უკანასკნელი ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ a^{-1} ელემენტის შებრუნებული ელემენტი არის თვითონ a ელემენტი. შემდეგ, ადვილი დასანახია, რომ რამდენიმე ელემენტის ნამრავლის შებრუნებული იქნება თანამამრავლთა შებრუნებული და ამასთან შებრუნებული რიგით აღებული ელემენტების ნამრავლი:

$$(a_1a_2 \ldots a_{n-1}\, a_n)^{-1}=a_n^{-1}\, a_{n-1}^{-1} \ldots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

ბოლოს, ერთეულის შებრუნებული ელემენტი იქნება თვითონ ერთეული.

შემოწმება იმისა, მოცემული ერთ ოპერაციანი სიმრავლე არის თუ არა ჯგუფი, ძალიან ადვილდება იმის გამო, რომ ჯგუფის განმარტებაში შებრუნებული ოპერაციის შესრულებადობის მოთხოვნა შეიძლება შეიცვალოს ერთეულისა და შებრუნებული ელემენტების არსებობის დაშვებით, ამასთან მხოლოდ ერთი მხრიდან (მაგალითად, მარჯვნიდან) და მათი ერთადერთობის დაშვების გარეშე. ეს გამომდინარეობს შემდეგი *თეორემიდან:*

სიმრავლე G ერთი ასოციაციური ოპერაციით იქნება ჯგუფი, თუ G-ში არსებობს ერთი მაინც e ელემენტი, რომელსაც აქვს თვისება

$$ae=a \text{ ყველა } a\text{-სათვის } G\text{-დან},$$

და თუ ამ მარჯვენა ერთეულოვან ელემენტებს შორის არსებობს ერთი მაინც ისეთი e_0 ელემენტი, რომლის მიმართ G-ს ყოველ a ელემენტს გააჩნია ერთი მაინც მარჯვენა შებრუნებული a^{-1} ელუმენტი:

$$aa^{-1}=e_0.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, a^{-1} არის a-სათვის ერთი შებრუნებული ელემენტთაგანი. მაშინ

$$aa^{-1}=e_0=e_0e_0=e_0aa^{-1},$$

ე. ი. $aa^{-1}=e_0aa^{-1}$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს მარჯვნიდან გავამრავლებთ a^{-1}-ის ერთ-ერთ მარჯვენა შებრუნებულ ელემენტზე, მივიღებთ $ae_0=$

$=e_0ae_0$, საიდანაც $a=e_0a$, ვინაიდან e_0 არის G-სათვის მარჯვენა ერთეული. ამრიგად, e_0 ელემენტი აღმოჩნდა G-სათვის მარცხენა ერთეულიც. ახლა, თუ e_1 არის ნებისმიერი მარჯვენა ერთეული, e_2—ნებისმიერი მარცხენა ერთეული, მაშინ

$$e_2e_1=e_1 \quad \text{და} \quad e_2e_1=e_2$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს $e_1=e_2$, ე. ი. ნებისმიერი მარჯვენა ერთეული უდრის ნებისმიერ მარცხენას. ამით დამტკიცებულია G სიმრავლეში ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა და ერთადერთობა; მას, როგორც ზემოთ, აღვნიშნავთ 1-ით.

შემდეგ

$$a^{-1}=a^{-1}\cdot 1=a^{-1}aa^{-1},$$

ე. ი. $a^{-1}=a^{-1}aa^{-1}$, სადაც a^{-1} არის a-სათვის ერთ-ერთი მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი. თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს მარჯვნიდან გავამრავლებთ a^{-1}-ის ერთ-ერთ მარჯვენა შებრუნებულ ელემენტზე, მივიღებთ $1=a^{-1}a$, ე. ი. a^{-1} ელემენტი არის a-სათვის მარცხენა შებრუნებული ელემენტიც. ახლა, თუ a_1^{-1} არის a-ს ნებისმიერი მარჯვენა შებრუნებული, a_2^{-1}— ნებისმიერი მარცხენა შებრუნებული, მაშინ

$$a_2^{-1}aa_1^{-1}=(a_2^{-1}a)\,a_1^{-1}=a_1^{-1},$$
$$a_2^{-1}aa_1^{-1}=a_2^{-1}(aa_1^{-1})=a_2^{-1}$$

ტოლობებიდან გამომდინარეობს $a_1^{-1}=a_2^{-1}$, ე. ი. გამომდინარეობს G-ს ყოველი ელემენტისათვის შებრუნებული a^{-1} ელემენტის არსებობა და ერთადერთობა.

ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ G სიმრავლე არის ჯგუფი. მართლაც, $ax=b$, $ya=b$ განტოლებებს აკმაყოფილებენ, როგორც ადვილი სანახავია,

$$x=a^{-1}b,\ y=ba^{-1}$$

ელემენტები. ამ ამონახსნების ერთადერთობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ თუ მაგალითად $ax_1=ax_2$ მაშინ, ამ ტოლობის ორივე მხარის მარცხნიდან a^{-1}-ზე გამრავლებით, მივიღებთ $x_1=x_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

ჩვენ უკვე რამდენჯერმე შევხვდით იზომორფიზმის ცნებას რგოლებისათვის, წრფივი სივრცეებისათვის, ევკლიდური სივრცეებისათვის. ეს ცნება შეიძლება განიმარტოს ჯგუფებისათვისაც, და იგი ჯგუფთა თეორიაში ისეთივე დიდ როლს ასრულებს, როგორსაც რგოლთა თეორიაში. G და G' ჯგუფებს ეწოდებათ **იზომორფული**, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც ნებისმიერი a, b ელემენტებისათვის G-დან და მათი სათანადო a', b' ელემენტებისათვის G'-დან ab ნამრავლს ეთანადება $a'b'$ ნამრავლი. როგორც § 46-ში (ნულისათვის და შებრუნებული ელემენტისათვის რგოლში), შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ G და G' ჯგუფებს შორის იზომორფული თანადობის დროს G ჯგუფის ერთეულს ეთანადება G' ჯგუფის ერთეული, და თუ a ელემენტს G-დან ეთანადება a' ელემენტი G'-დან, მაშინ a^{-1} ელემენტს ეთანადება a'^{-1} ელემენტი.

გადავდივართ რა ჯგუფების მაგალითებზე, აღვნიშნოთ, რომ თუ G ჯგუფში ოპერაციას ვუწოდებდით შეკრებას, მაშინ ჯგუფის ერთეულს ეწოდებოდა ნული და აღინიშნებოდა 0 სიმბოლოთი, ხოლო შებრუნებული ელემენტის მაგივრად ვილაპარაკებდით მოპირდაპირე ელემენტზე და აღვნიშნავდით მას $-a$-თი.

ჯგუფების პირველ მაგალითად მივუთითოთ, რომ შეკრების მიმართ ყოველი რგოლი (და, კერძოდ, ველი) წარმოადგენს ჯგუფს, ამასთან აბელისას; ეს არის ეგრეთწოდებული რგოლის ადიციური ჯგუფი. ეს შენიშვნა იძლევა ჯგუფთა კონკრეტული მაგალითების დიდ რაოდენობას, მათ შორის: მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი, ლუწ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი, რაციონალური რიცხვების, ნამდვილი რიცხვების, კომპლექსური რიცხვების ადიციური ჯგუფები და ა. შ. შევნიშნავთ, რომ მთელი რიცხვების და ლუწი რიცხვების ადიციური ჯგუფები ერთმანეთის იზომორფულია, თუმცა მეორე არის პირველის მხოლოდ ნაწილი: ასახვა, რომელიც ყოველ მთელ k რიცხვს უთანადებს ლუწ $2k$ რიცხვს, იქნება ურთიერთცალსახა და, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, იზომორფულიც კი თანადობა დასახელებული ჯგუფებიდან პირველისა მეორეზე.

გამრავლების მიმართ არც ერთი რგოლი არ წარმოადგენს ჯგუფს, ვინაიდან შებრუნებული ოპერაცია—გაყოფა—ყოველთვის არ არის შესრულებადი. მდგომარეობა არ იცვლება ნებისმიერი რგოლიდან ველზე გადასვლის დროსაც, რადგან ველში რჩება შეუსრულებელი ნულზე გაყოფა. მაგრამ განვიხილოთ ველის ყველა, ნულისაგან განსხვავებული ელემენტის ერთობლიობა. ვინაიდან ველი არ შეიცავს ნულის გამყოფებს, ე. ი. ნულისაგან განსხვავებული ორი ელემენტის ნამრავლი თვითონ განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ განხილული ერთობლიობისათვის გამრავლება იქნება ალგებრული ოპერაცია, თანაც ასოციაციური და კომუტატური, ამასთან გაყოფა უკვე ყოველთვის შესრულებადია და მას არ გამოვყავართ ამ ერთობლიობის ფარგლებს გარეთ. ამრიგად, ნებისმიერი ველის ნულისაგან განსხვავებული ელემენტების ერთობლიობა არის აბელის ჯგუფი; ამ ჯგუფს ეწოდება ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი. აქ შემავალი მაგალითები იქნება რაციონალური რიცხვების, ნამდვილი რიცხვების, კომპლექსური რიცხვების მულტიპლიკაციური ჯგუფები.

გამრავლების მიმართ ჯგუფს ქმნის, ცხადია, ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვი. ეს ჯგუფი იზომორფულია ყველა ნამდვილი რიცხვების ადიციური ჯგუფისა: თუ ყოველ დადებით a რიცხვს შევუთანადებთ ნამდვილ $\ln a$ რიცხვს, მივიღებთ ურთიერთცალსახა ასახვას პირველი ჯგუფისა მეორეზე, რომელიც იქნება იზომორფიზმი

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

ტოლობის გამო.

ავიღოთ, შემდეგ, კომპლექსურ რიცხვთა ველში ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვების ერთობლიობა. § 19-ში იყო დამტკიცებული, რომ ერთეუ-

ლიდან ორი n-ური ხარისხის ფესვის ნამრავლი და აგრეთვე ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვის შებრუნებული რიცხვი თვითონ ეკუთვნის რიცხვთა განხილულ ერთობლიობას. ვინაიდან ერთეული აგრეთვე ეკუთვნის ამ ერთობლიობას და ვინაიდან ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვების გამრავლება ასოციაციურია და კომუტატური, ამიტომ ვღებულობთ, რომ ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვები ქმნიან გამრავლების მიმართ აბელის ჯგუფს, ამასთან სასრულს n-ური რიგისა. ამრიგად, ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს სასრული ჯგუფები n-ური რიგისა.

ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვების ჯგუფი (გამრავლების მიმართ) იზომორფულია § 45-ში აგებული Z_n რგოლის ადიციური ჯგუფისა. მართლაც, თუ ε არის ერთეულიდან n-ური ხარისხის პირველადი ფესვი, მაშინ დასახელებული ჯგუფებიდან პირველის ყველა ელემენტს აქვს ε^k სახე, $k=0, 1, \ldots, n-1$. თუ ყოველ ε^k რიცხვს თანადობაში მოვუყვანთ Z_n რგოლის C_k ელემენტს, ე. ი. კლასს მთელი რიცხვებისა, რომლებიც n-ზე გაყოფისას იძლევიან k ნაშთს, მაშინ მივიღებთ იზომორფულ თანადობას განხილულ ჯგუფებს შორის: თუ $0\leqslant k\leqslant n-1$, $0\leqslant l\leqslant n-1$ და თუ $k+l=nq+r$, სადაც $0\leqslant r\leqslant n-1$, ხოლო q უდრის 0-ს ან 1-ს, მაშინ $\varepsilon^k\cdot\varepsilon^l=\varepsilon^r$ და, ამასთან ერთად, $C_k+C_l=C_r$.

დროა მოვიტანოთ ზოგიერთი მაგალითი რიცხვითი სიმრავლეებისა, რომლებიც ჯგუფებს არ წარმოადგენენ. ასე მაგალითად, ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე არ იქნება ჯგუფი გამრავლების მიმართ, ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე არ იქნება ჯგუფი შეკრების მიმართ, ყველა კენტი რიცხვის სიმრავლე არ იქნება ჯგუფი შეკრების მიმართ, ყველა უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე არ იქნება ჯგუფი გამრავლების მიმართ. ყველა ამ დებულების შემოწმება არ არის ძნელი.

ყველა ზემოთ განხილული რიცხვითი ჯგუფი არის აბელის ჯგუფი. წრფივი სივრცეები წარმოადგენენ აბელის ჯგუფებს, რომლებიც არ შედგებიან რიცხვებისაგან: როგორც მათი განმარტებიდან გამომდინარეობს (იხ. §§ 29, 47), ნებისმიერ P ველზე ყოველი წრფივი სივრცე არის აბელის ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

გადავდივართ არაკომუტატური ჯგუფების მაგალითებზე.

P ველზე ყველა n-ური რიგის მატრიცის სიმრავლე არ იქნება ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ, ვინაიდან ირღვევა მოთხოვნა შებრუნებული ელემენტის არსებობის შესახებ. მაგრამ თუ შემოვისაზღვრებით მხოლოდ გადაუგვარებელი მატრიცებით, მაშინ უკვე მივიღებთ ჯგუფს. მართლაც, ორი გადაუგვარებელი მატრიცის ნამრავლი არის, როგორც ვიცით, გადაუგვარებელი, ერთეულოვანი მატრიცი არის გადაუგვარებელი, ყოველ გადაუგვარებელ მატრიცს გააჩნია შებრუნებული მატრიცი, აგრეთვე გადაუგვარებელი, და, ბოლოს, ასოციაციურობის კანონი, რომელიც სრულდება ყველა მატრიცისათვის, სამართლიანია, კერძოდ, გადაუგვარებელი მატრიცებისათვის. მაშასადამე, შეიძლება ვილაპარაკოთ P ველზე n-ური რიგის გადაუგვარებელ მატ-

რიცხთა ჯგუფზე, რომლის ჯგუფური ოპერაცია არის მატრიცების გამრავლება; ეს ჯგუფი არაკომუტატურია, როცა $n \geqslant 2$.

ჩასმათა § 3-ში შემოტანილ გამრავლებას მივყავართ სასრული არაკომუტატური ჯგუფების ძალიან მნიშვნელოვან მაგალითებამდე. ჩვენ ვიცით, რომ ყველა n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლეში გამრავლება არის ალგებრული ოპერაცია, ამასთან ასოციაციური, თუმცა არაკომუტატური, როცა $n \geqslant 3$, რომ იგივური E ჩასმა არის ამ გამრავლების ერთეული და რომ ყოველი ჩასმისათვის არსებობს შებრუნებული ჩასმა. ამრიგად, n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლე ქმნის ჯგუფს გამრავლების მიმართ, ამასთან სასრულს $n!$ რიგისა. ამ ჯგუფს ეწოდება n-ური ხარისხის სიმეტრიული ჯგუფი; იგი არაკომუტატურია, როცა $n \geqslant 3$.

განვიხილოთ ახლა ყველა n-ური ხარისხის ჩასმათა ერთობლიობის მაგივრად მხოლოდ ლუწი ჩასმების ერთობლიობა, რომელიც შედგება, როგორც ვიცით, $\frac{1}{2}n!$ ელემენტისაგან. თუ გამოვიყენებთ § 3-ში დამტკიცებულ თეორემას იმის შესახებ, რომ ჩასმის ლუწკენტოვნება ემთხვევა ამ ჩასმის ტრანსპოზიციათა ნამრავლად რომელიმე დაშლაში შემავალ ტრანსპოზიციათა რიცხვის ლუწკენტოვნებას, მივიღებთ რომ ორი ლუწი ჩასმის ნამრავლი თვითონ ლუწია; მართლაც, ჩვენ მივიღებთ AB-ს წარმოდგენას ტრანსპოზიციათა ნამრავლის სახით, თუ ჩავწერთ ერთმანეთის მიმდევრობით A-ს და B-ს შესაბამის დაშლებს. შემდეგ, ჩასმათა გამრავლების ასოციაციურობა ჩვენთვის ცნობილია, იგივური ჩასმის ლუწკენტოვნება ცხადია. ბოლოს, ლუწი A ჩასმისათვის A^{-1} ჩასმის ლუწკენტოვნება გამომდინარეობს თუნდაც იქიდან, რომ ამ ჩასმების ჩანაწერები შეიძლება მივიღოთ ერთიმეორიდან, თუ ზედა და ქვედა სტრიქონებს ადგილებს შევუცვლით, ე. ი. ისინი შეიცავენ ინვერსიათა ტოლ რიცხვს. ამრიგად, n-ური ხარისხის ლუწ ჩასმათა სიმრავლე არის გამრავლების მიმართ სასრული ჯგუფი $\frac{1}{2}n!$ რიგისა. ამ ჯგუფს ეწოდება n-ური ხარისხის ნიშანცვლადი ჯგუფი; ადვილი შესამოწმებელია, რომ იგი არაკომუტატურია, როცა $n \geqslant 4$, თუმცა კომუტატურია, როცა $n=3$.

სიმეტრიული და ნიშანცვლადი ჯგუფები ძალიან დიდ როლს ასრულებენ სასრულ ჯგუფთა თეორიაში და აგრეთვე გალუას თეორიაში. შევნიშნავთ, რომ შეუძლებელი იქნებოდა, ნიშანცვლადი ჯგუფების ანალოგიურად, კენტი ჩასმებისაგან ჯგუფის აგება გამრავლების მიმართ, ვინაიდან ორი კენტი ჩასმის ნამრავლი ყოველთვის არის ლუწი ჩასმა.

ჯგუფთა მრავალფეროვანი მაგალითების დიდ რიცხვს იძლევა გეომეტრიის სხვადასხვა განშტოება. მივუთითოთ ასეთი გვარის ერთ უმარტივეს მაგალითზე: თავისი ცენტრის გარშემო სფეროს ყველა ბრუნვის სიმრავლე არის ჯგუფი, ამასთან არაკომუტატური, თუ ორი ბრუნვის ნამრავლს ვუწოდებთ მათი თანმიმდევრობითი შესრულების შედეგს.

§ 64. ქვეჯგუფები

G ჯგუფის A ქვესიმრავლეს ეწოდება ამ ჯგუფის *ქვეჯგუფი*, თუ ის თვითონ არის ჯგუფი იმ ოპერაციის მიმართ, რომელიც განმარტებულია G ჯგუფში.

იმის შემოწმების დროს, არის თუ არა G ჯგუფის A ქვესიმრავლე ამ ჯგუფის ქვეჯგუფი, საკმარისია შემოწმდეს: 1) მოთავსებულია თუ არა A-ში A-ს ნებისმიერი ორი ელემენტის ნამრავლი; 2) შეიცავს თუ არა A თავის ყოველ ელემენტთან ერთად მის შებრუნებულ ელემენტსაც. მართლაც, G ჯგუფში ასოციაციურობის კანონის სამართლიანობიდან გამომდინარეობს მისი სამართლიანობა A-ს ელემენტებისათვის, ხოლო ის, რომ G ჯგუფის ერთეული ეკუთვნის A-ს, გამომდინარეობს 2) და 1)-დან.

წინა პარაგრაფში აღნიშნული ჯგუფებიდან ბევრი წარმოადგენს სხვა, აგრეთვე იქ მითითებული ჯგუფების ქვეჯგუფებს. ასე მაგალითად, ლუწი რიცხვების ადიციური ჯგუფი წარმოადგენს ყველა მთელი რიცხვის ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფს, ხოლო უკანასკნელი თავის მხრივ არის რაციონალური რიცხვების ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფი. ყველა ეს ჯგუფი, ისე როგორც საზოგადოდ რიცხვთა ადიციური ჯგუფები, წარმოადგენს კომპლექსური რიცხვების ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფებს. დადებითი ნამდვილი რიცხვების მულტიპლიკაციური ჯგუფი წარმოადგენს ყველა ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვის მულტიპლიკაციური ჯგუფის ქვეჯგუფს. n-ური ხარისხის ნიშანცვლადი ჯგუფი არის იმავე ხარისხის სიმეტრიული ჯგუფის ქვეჯგუფი.

ხაზი გავუსვათ იმას, რომ ქვეჯგუფის განმარტებაში შემავალი მოთხოვნილება G ჯგუფის A ქვესიმრავლისადმი იყოს ჯგუფი *იმ ჯგუფური ოპერაციის მიმართ, რომელიც განმარტებულია G ჯგუფში* არის არსებითი. ასე მაგალითად, დადებითი ნამდვილი რიცხვების მულტიპლიკაციური ჯგუფი *არ წარმოადგენს* ყველა ნამდვილი რიცხვის ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფს, თუმცა პირველი სიმრავლე შედის, როგორც ქვესიმრავლე, მეორეში.

თუ G ჯგუფში აღებულია A და B ქვეჯგუფები, მაშინ მათი თანაკვეთა $A \cap B$, ე. ი. ერთობლიობა ელემენტებისა, რომლებიც მოთავსებულია როგორც A-ში, ისე B-ში, აგრეთვე იქნება G ჯგუფის ქვეჯგუფი.

მართლაც, თუ x და y ელემენტები შედიან $A \cap B$ თანაკვეთაში, მაშინ ისინი მდებარეობენ A ქვეჯგუფში და ამიტომ A-ს ეკუთვნის xy ნამრავლიც და შებრუნებული x^{-1} ელემენტიც. იმავე მოსაზრებების გამო xy და x^{-1} ელემენტები ეკუთვნიან B ქვეჯგუფსაც და ამიტომ ისინი შედიან $A \cap B$-შიც.

როგორც ადვილი დასანახია, მიღებული შედეგი სამართლიანია არა მარტო ორი ჯგუფისათვის, არამედ ჯგუფთა ნებისმიერი რიცხვისათვისაც, სასრულისათვის ან უსასრულოსათვისაც კი.

G ჯგუფის ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება ერთი 1 ელემენტისაგან, ცხადია, იქნება ამ ჯგუფის ქვეჯგუფი; ამ ჯგუფს, რომელიც შედის G ჯგუფის ნებისმიერ სხვა ქვეჯგუფში, ეწოდება G ჯგუფის *ერთეულოვანი*

ქვეჯგუფი. მეორე მხრივ, თვითონ G ჯგუფი წარმოადგენს ერთ-ერთ თავის ქვეჯგუფს.

ქვეჯგუფების საინტერესო მაგალითს წარმოადგენენ ეგრეთწოდებული *ციკლური ქვეჯგუფები*. შემოვიტანოთ ჯერ G ჯგუფის a ელემენტის *ხარისხის* ცნება. თუ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ a ელემენტის ტოლი n ელემენტის ნამრავლს ეწოდება a ელემენტის n-ური *ხარისხი* და აღინიშნება a^n-ით. a ელემენტის *უარყოფითი ხარისხები* შეიძლება განისაზღვროს ან როგორც ამ ელემენტის დადებითი ხარისხების შებრუნებული ელემენტები G ჯგუფიდან, ან როგორც a^{-1} ელემენტის ტოლი რამდენიმე ელემენტის ნამრავლი. სინამდვილეში ეს განმარტებები ემთხვევიან ერთმანეთს,

$$(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n,\ n>0. \tag{1}$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია ავიღოთ $2n$ თანამამრავლის ნამრავლი, რომელთაგან პირველი n ტოლია a-სი, ხოლო დანარჩენები ტოლია a^{-1}-ის, და მოვახდინოთ ყველა შეკვეცა. ელემენტი, რომელიც ტოლია (1) ტოლობის როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა მხარისა, აღინიშნება a^{-n}-ით. დაბოლოს, შევთანხმდეთ a ელემენტის *ნულოვანი* a^0 *ხარისხის* ქვეშ გვესმოდეს 1 ელემენტი.

შევნიშნავთ, რომ თუ G ჯგუფში ოპერაციას ეწოდება შეკრება, მაშინ a ელემენტის ხარისხების მაგივრად უნდა ვილაპარაკოთ ამ ელემენტის *ჯერადებზე* და აღვნიშნოთ ისინი ka-თი.

ადვილად მოწმდება, რომ ნებისმიერ G ჯგუფში ნებისმიერი a ელემენტის ხარისხებისათვის ნებისმიერი დადებითი, უარყოფითი ან ნულოვანი m და n მაჩვენებლების დროს ადგილი აქვს ტოლობებს

$$a^n\cdot a^m=a^m\ a^n=a^{n+m}, \tag{2}$$

$$(a^n)^m=a^{nm}. \tag{3}$$

აღვნიშნოთ $\{a\}$-თი G ჯგუფის ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება a ელემენტის ყველა ხარისხისაგან; მასში შედის თვითონ a ელემენტიც, რომელიც თავის პირველ ხარისხს წარმოადგენს. $\{a\}$ *ქვესიმრავლე იქნება* G *ჯგუფის ქვეჯგუფი*: თანახმად (2)-სა $\{a\}$-დან ელემენტების ნამრავლი მოთავსებულია $\{a\}$-ში, $\{a\}$-ში შედის 1 ელემენტი, რომელიც უდრის a^0-ს, დაბოლოს, $\{a\}$ ყოველ თავის ელემენტთან ერთად შეიცავს მის შებრუნებულ ელემენტსაც, ვინაიდან (3)-დან გამომდინარეობს ტოლობა

$$(a^n)^{-1}=a^{-n}.$$

$\{a\}$ ქვეჯგუფს ეწოდება G *ჯგუფის ციკლური ქვეჯგუფი, წარმოქმნილი* a *ელემენტით*. როგორც (2) ტოლობა გვიჩვენებს, ის ყოველთვის კომუტატურია, მაშინაც კი, როდესაც თვითონ G ჯგუფი არაკომუტატურია.

ზემოთ არსად იყო ნათქვამი, რომ a ელემენტის ყველა ხარისხი წარმოადგენს ჯგუფის განსხვავებულ ელემენტებს. თუ სინამდვილეში ეს ასეა, მა-

შინ a-ს ეწოდება *უსასრულო რიგის ელემენტი*. მაგრამ ვთქვათ, a ელემენტის ხარისხებს შორის გვაქვს ტოლები, მაგალითად, $a^k=a^l$, როცა $k \neq l$; ამას ყოველთვის აქვს ადგილი სასრული ჯგუფების შემთხვევაში, მაგრამ შეიძლება მოხდეს უსასრულო ჯგუფშიც. თუ $k > l$, მაშინ

$$a^{k-l}=1,$$

ე. ი. არსებობენ a ელემენტის *დადებითი* ხარისხები, ტოლნი ერთეულისა. ვთქვათ, n არის a ელემენტის უმცირესი დადებითი ხარისხი, რომელიც ერთეულის ტოლია, ე. ი.

1) $a^n=1,\ n>0,$

2) თუ $a^k=1,\ k>0$, მაშინ $k \geqslant n$.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a არის *სასრული რიგის ელემენტი*, სახელდობრ, *n რიგისა*.

თუ a ელემენტს აქვს სასრული n რიგი, მაშინ ყველა ელემენტი

$$1,\ a,\ a^2,\ \dots,\ a^{n-1} \tag{4}$$

იქნება, როგორც ადვილი დასანახია, განსხვავებული. a *ელემენტის ყოველი სხვა ხარისხი, დადებითი თუ უარყოფითი, ტოლია ერთ-ერთი* (4) *ელემენტთაგანისა*. მართლაც, თუ k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მაშინ, თუ k-ს გავყოფთ n-ზე, მივიღებთ

$$k=nq+r, \quad 0 \leqslant r < n,$$

ამიტომ, (2)-ის და (3)-ის გამო,

$$a^k=(a^n)^q\ a^r=a^r. \tag{5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ *თუ a ელემენტს აქვს სასრული n რიგი და $a^k=1$, მაშინ k უნაშთოდ უნდა გაიყოს n-ზე*; მეორე მხრივ, ვინაიდან

$$-1=n\,(-1)+(n-1),$$

ამიტომ *სასრული n რიგის a ელემენტისათვის*

$$a^{-1}=a^{n-1}.$$

ვინაიდან (4) სისტემა შეიცავს n ელემენტს, ამიტომ ზემოთ მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ *a ელემენტისათვის, რომელსაც აქვს სასრული რიგი, მისი n რიგი ემთხვევა ციკლური $\{a\}$ ქვეჯგუფის რიგს* (ე. ი. *ელემენტთა რიცხვს*).

ბოლოს, შევნიშნავთ, რომ ყოველ ჯგუფს გააჩნია პირველი რიგის ერთადერთი ელემენტი, ეს იქნება 1 ელემენტი. ციკლური $\{1\}$ ქვეჯგუფი ემთხვევა, ცხადია, ერთეულოვან ქვეჯგუფს.

ციკლური ჯგუფები. G ჯგუფს ეწოდება *ციკლური ჯგუფი*, თუ იგი შედგება თავისი რომელიმე a ელემენტის ხარისხებისაგან, ე. ი. ემთხვევა ერთ-ერთ რომელიმე თავის ციკლურ $\{a\}$ ქვეჯგუფთაგანს; a ელემენტს

ეწოდება ამ შემთხვევაში G ჯგუფის *წარმომქმნელი ელემენტი*. ყოველი ციკლური ჯგუფი, ცხადია, აბელის ჯგუფია.

უსასრულო ციკლური ჯგუფის მაგალითს წარმოადგენს *მთელი რიცხვების ადიციური ჯგუფი* — ყოველი მთელი რიცხვი ჯერადია 1 რიცხვისა, ე. ი. ეს რიცხვი წარმოადგენს განხილული ჯგუფის წარმომქმნელ ელემენტს; წარმომქმნელ ელემენტად შეგვეძლო აგრეთვე აგვეღო -1 რიცხვი.

n-ური რიგის სასრული ციკლური ჯგუფის მაგალითს წარმოადგენს *ერთეულიდან n-ური ხარისხის ფესვების მულტიპლიკაციური ჯგუფი* — § 19-ში ნაჩვენებია, რომ ყველა ეს ფესვი წარმოადგენს რომელიმე მათგანის ხარისხს, სახელდობრ პირველყოფილი ფესვისა.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ სინამდვილეში ამ მაგალითებით ამოიწურება ყველა ციკლური ჯგუფი:

ყველა უსასრულო ციკლური ჯგუფი ერთმანეთის იზომორფულია; ერთმანეთის იზომორფულია აგრეთვე მოცემული n-ური რიგის ყველა სასრული ციკლური ჯგუფი.

მართლაც, უსასრულო ციკლური ჯგუფი, წარმოქმნილი a ელემენტით, აისახება ურთიერთცალსახად მთელ რიცხვთა ადიციურ ჯგუფზე, თუ ამ ჯგუფის ყოველ a^k ელემენტს შეეთანადება k რიცხვი; ეს ასახვა იქნება იზომორფიზმი, ვინაიდან, თანახმად (2)-ისა, a ელემენტის ხარისხების გადამრავლებისას მაჩვენებლები იკრიბება. ხოლო, თუ მოცემულია n-ური რიგის სასრული ციკლური G ჯგუფი წარმოქმნილი a ელემენტით, მაშინ ავღნიშნოთ ε-ით ერთეულიდან n-ური ხარისხის პირველყოფილი ფესვი და შევუთანადოთ G ჯგუფის ყოველ a^k ელემენტს, $0 \leqslant k < n$, რიცხვი ε^k. ეს იქნება G ჯგუფის ურთიერთცალსახა ასახვა 1-დან n-ური ხარისხის ფესვთა მულტიპლიკაციურ ჯგუფზე, რომლის იზომორფულობა გამომდინარეობს (2)-დან და (5)-დან.

ეს თეორემა საშუალებას იძლევა ვილაპარაკოთ უბრალოდ *უსასრულო ციკლურ ჯგუფზე* ან *n-ური რიგის ციკლურ ჯგუფზე*.

დავამტკიცოთ ახლა თეორემა:

ციკლური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი თვითონაც ციკლურია.

მართლაც, ვთქვათ, $G=\{a\}$ არის ციკლური ჯგუფი, რომლის წარმომქმნელია a ელემენტი, უსასრულო ან სასრული, და A იყოს G ჯგუფის ქვეჯგუფი. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ A განსხვავებულია ერთეულოვანი ქვეჯგუფისაგან, ვინაიდან სხვანაირად დასამტკიცებელი არაფერი იქნებოდა. დავუშვათ, რომ a^k არის a ელემენტის უმცირესი დადებითი ხარისხი, რომელიც შედის A-ში; ასეთი არსებობს, რადგან თუ A-ში შედის 1-საგან განსხვავებული a^{-s} ელემენტი, $s>0$, მაშინ მისი შებრუნებული a^s ელემენტიც შედის A-ში. დავუშვათ, რომ A-ში შედის აგრეთვე a^l ელემენტი, $l \neq 0$, ამასთან l არ იყოფა k-ზე. მაშინ, თუ d, $d>0$, არის k და l რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი, არსებობენ ისეთი მთელი u და v რიცხვები, რომ

$$ku+lv=d,$$

და ამიტომ A ქვეჯგუფში უნდა შედიოდეს ელემენტი

$$(a^k)^u \cdot (a^l)^v = a^d,$$

მაგრამ, ვინაიდან ჩვენ დაშვებებში $d<k$, ამიტომ მივდივართ წინააღმდეგობამდე a^k ელემენტის ამორჩევასთან. ამით დამტკიცდა, რომ $A=\{a^k\}$.

ჯგუფის დაშლები ქვეჯგუფის მიმართ. თუ G ჯგუფში აღებულია M და N ქვესიმრავლეები, მაშინ ამ ქვესიმრავლეების MN ნამრავლის ქვეშ გვესმის ერთობლიობა G ჯგუფის ელემენტებისა, რომლებიც ერთი გზით მაინც წარმოიდგინებიან M-დან რაიმე ელემენტის N-დან რაიმე ელემენტზე ნამრავლის სახით. ჯგუფური ოპერაციის ასოციაციურობიდან გამომდინარეობს ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების ასოციაციურობა:

$$(MN)\,P=M\,(NP).$$

ერთი M, N სიმრავლეთაგანი, ცხადია, შეიძლება შედგებოდეს მხოლოდ ერთი a ელემენტისაგან. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვღებულობთ aN ნამრავლს ელემენტისა სიმრავლეზე ან Ma ნამრავლს სიმრავლისა ელემენტზე.

ვთქვათ, G ჯგუფში მოცემულია ნებისმიერი A ქვეჯგუფი. თუ x არის G-ს ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ xA ნამრავლს ეწოდება A ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის მარცხენა მოსაზღვრე კლასი, წარმოქმნილი x ელემენტით. გასაგებია, რომ x ელემენტი შედის მოსაზღვრე xA კლასში, ვინაიდან A ქვეჯგუფი შეიცავს ერთეულს, ხოლო $x \cdot 1=x$.

ყოველი მარცხენა მოსაზღვრე კლასი წარმოიქმნება თავისი ნებისმიერი ელემენტით, ე. ი. თუ y ელემენტი შედის მოსაზღვრე xA კლასში, მაშინ

$$yA=xA. \tag{6}$$

მართლაც, y შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$y=xa,$$

სადაც a არის A ქვეჯგუფის ელემენტი. ამიტომ ნებისმიერი a' და a'' ელემენტებისათვის A-დან გვექნება

$$ya'=x\,(aa'),$$
$$xa''=y\,(a^{-1}a''),$$

რითაც მტკიცდება (6) ტოლობა.

აქედან გამომდინარეობს, რომ G ჯგუფის ორი ნებისმიერი მარცხენა მოსაზღვრე კლასი A ქვეჯგუფის მიმართ ან ემთხვევა ერთმანეთს, ანდა მათ არა აქვთ არც ერთი საერთო ელემენტი. მართლაც, თუ მოსაზღვრე xA და yA კლასები შეიცავენ საერთო z ელემენტს, მაშინ

$$xA=zA=yA.$$

ამრიგად, მთელი G ჯგუფი იშლება არათანამკვეთ მარცხენა მოსაზღვრე კლასებად A ქვეჯგუფის მიმართ, ამ დაშლას ეწოდება G ჯგუფის მარცხენა დაშლა A ქვეჯგუფის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ ამ დაშლის ერთ-ერთი მარცხენა მოსაზღვრე კლასი იქნება თვითონ A ქვეჯგუფი; ეს მოსაზღვრე კლასი წარმოიქმნება 1 ელემენტით ან საზოგადოდ, A-ს ნებისმიერი a ელემენტით, ვინაიდან

$$aA=A.$$

გასაგებია, რომ თუ Ax სიმრავლეს ვუწოდებთ A ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის მარჯვენა მოსაზღვრე კლასს, წარმოქმნილს x ელემენტით, ანალოგიური გზით მივიღებდით G ჯგუფის მარჯვენა დაშლას A ქვეჯგუფის მიმართ. აბელის ჯგუფისათვის მისი ორივე დაშლა ნებისმიერი ქვეჯგუფის მიმართ, მარცხენა და მარჯვენა, გასაგებია, ერთმანეთს დაემთხვევა, ე. ი. შეიძლება უბრალოდ ლაპარაკი ჯგუფის დაშლაზე ქვეჯგუფის მიმართ.

ასე მაგალითად, k რიცხვის ჯერადი რიცხვების ქვეჯგუფის მიმართ მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფის დაშლა შედგება k განსხვავებული მოსაზღვრე კლასისაგან, რომლებიც წარმოიქმნება შესაბამისად რიცხვებით 0, 1, 2,..., $k-1$. ამასთან, l რიცხვით, $0 \leqslant l \leqslant k-1$, წარმოქმნილ კლასში თავმოყრილია ყველა ის რიცხვი, რომელიც k-ზე გაყოფისას იძლევა l ნაშთს.

არაკომუტატიურ შემთხვევაში რაიმე ქვეჯგუფის მიმართ ჯგუფის დაშლები შეიძლება განსხვავებული აღმოჩნდნენ.

განვიხილოთ, მაგალითად, მე-3 ხარისხის სიმეტრიული S_3 ჯგუფი, ამასთან, თანახმად § 3-სა, მის ელემენტებს ჩავწერთ ციკლების საშუალებით. A ქვეჯგუფად ავიღოთ (12) ელემენტის ციკლური ქვეჯგუფი; ის შედგება იგივური ჩასმისაგან და თვითონ (12) ჩასმისაგან. სხვა მარცხენა მოსაზღვრე კლასები იქნებიან: $(13)\cdot A$ კლასი, რომელიც შედგება (13) და (132) ჩასმებისაგან, და $(23)\cdot A$ კლასი, რომელიც შედგება (23) და (123) ჩასმებისაგან. მეორე მხრივ, A ქვეჯგუფის მიმართ S_3 ჯგუფის მარჯვენა კლასები იქნებიან: თვითონ A ქვეჯგუფი, $A\cdot(13)$ კლასი, რომელიც შედგება (13) და (23) ჩასმებისაგან, და $A\cdot(23)$ კლასი, რომელიც შედგება (23) და (132) ჩასმებისაგან. ჩვენ ვხედავთ, რომ განხილულ შემთხვევაში მარჯვენა დაშლა განსხვავდება მარცხენისაგან.

სასრული ჯგუფების შემთხვევისათვის ქვეჯგუფის მიმართ ჯგუფის დაშლების არსებობას მივყავართ შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემამდე.

ლაგრანჟის თეორემა. ყოველ სასრულ ჯგუფში ნებისმიერი ქვეჯგუფის რიგი წარმოადგენს თვითონ ჯგუფის რიგის გამყოფს.

მართლაც, ვთქვათ, n რიგის სასრულ G ჯგუფში მოცემულია k რიგის A ქვეჯგუფი. განვიხილოთ A ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის მარცხენა დაშლა. ვთქვათ, იგი შედგება j კლასისაგან; j რიცხვს ეწოდება A ქვეჯგუფის ინდექსი G ჯგუფში. ყოველი მარცხენა xA კლასი შედგება ზუსტად k ელემენტისაგან, ვინაიდან თუ

$$xa_1=xa_2,$$

სადაც a_1 და a_2 ელემენტებია A-დან, მაშინ $a_1=a_2$. ამრიგად,

$$n=kj, \tag{7}$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

ვინაიდან ელემენტის რიგი ემთხვევა თავისი ციკლური ქვეჯგუფის რიგს, ამიტომ ლაგრანჟის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ **სასრული ჯგუფის ყოველი ელემენტის რიგი წარმოადგენს ჯგუფის რიგის გამყოფს.**

ლაგრანჟის თეორემიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ **ყოველი სასრული ჯგუფი, რომლის რიგი არის მარტივი რიცხვი, იქნება ციკლური.** მართლაც, ეს ჯგუფი უნდა დაემთხვეს ციკლურ ქვეჯგუფს, წარმოქმნილს ერთეულისაგან განსხვავებული მისი ნებისმიერი ელემენტით. აქედან გამომდინარეობს, ციკლური ჯგუფების ზემოთ მიღებული აღწერის გამო, რომ **ყოველი მარტივი p რიცხვისათვის არსებობს ერთად-ერთი, იზომორფიზმამდე სიზუსტით, p რიგის სასრული ჯგუფი.**

§ 65. ნორმალური გამყოფები, ფაქტორ-ჯგუფები, ჰომომორფიზმები

G ჯგუფის A ქვეჯგუფს ეწოდება ამ ჯგუფის **ნორმალური გამყოფი (ანუ ინვარიანტული ქვეჯგუფი)**, თუ A ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის მარცხენა დაშლა ემთხვევა მარჯვენას.

ამრიგად, აბელის ჯგუფის ყველა ქვეჯგუფი წარმოადგენს მასში ნორმალურ გამყოფს. მეორე მხრივ, ყოველ G ჯგუფში როგორც ერთეულოვანი ქვეჯგუფი, ისე თვითონ ეს ჯგუფი იქნებიან ნორმალური გამყოფები: ერთეულოვანი ქვეჯგუფის მიმართ G ჯგუფის ორივე დაშლა ემთხვევა ჯგუფის დაშლას ცალკეულ ელემენტებად, თვითონ ამ ჯგუფის მიმართ G ჯგუფის ორივე დაშლა შედგება ერთი G კლასისაგან.

მოვიყვანოთ არაკომუტატურ ჯგუფებში ნორმალური გამყოფების უფრო საინტერესო მაგალითები. მე 3 ხარისხის სიმეტრიულ S_3 ჯგუფში (123) ელემენტის ციკლური ქვეჯგუფი, რომელიც შედგება იგივური ჩასმისა და (123) და (132) ჩასმებისაგან, იქნება ნორმალური გამყოფი: ამ ქვეჯგუფის მიმართ S_3 ჯგუფის ორივე დაშლაში მეორე მოსაზღვრე კლასი შედგება (12), (13) და (23) ჩასმებისაგან.

საზოგადოდ n-ური ხარისხის სიმეტრიულ S_n ჯგუფში n-ური ხარისხის ნიშანცვლადი A_n ჯგუფი იქნება ნორმალური გამყოფი. მართლაც, A_n ჯგუფს აქვს $\frac{1}{2}n!$ რიგი. ამიტომ A_n ქვეჯგუფის მიმართ S_n ჯგუფის ყოველი მოსაზღვრე კლასი უნდა შედგებოდეს იმდენივე ელემენტისაგან და, მაშასადამე, ასეთი კლასი კიდევ გვექნება მხოლოდ ერთი, სახელდობრ კენტი ჩასმების ერთობლიობა.

n-ური რიგის P ველის ელემენტებიან გადაუგვარებელ კვადრატულ მატრიცთა მულტიპლიკაციურ ჯგუფში ის მატრიცები, რომელთა დეტერმინანტი უდრის 1-ს, ცხადია, ქმნიან ქვეჯგუფს. ის იქნება ნორმალური გამყოფიც კი, ვინაიდან M მატრიცით წარმოქმნილი, ერთდროულად მარცხენა და მარჯვენა, მოსაზღვრე კლასი ამ ქვეჯგუფის მიმართ არის კლასი ყველა მატრიცისა,

რომლის დეტერმინანტი უდრის M მატრიცის დეტერმინანტს—საკმარისია გავიხსენოთ, რომ მატრიცთა გამრავლების დროს მრავლდება მათი დეტერმინანტები.

ნორმალური გამყოფის ზემოთ მოყვანილ განმარტებას შეიძლება მიეცეს შემდეგი ფორმა:

G ჯგუფის A ქვეჯგუფს ეწოდება ამ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი, თუ G-ს ყოველი x ელემენტისათვის

$$xA=Ax, \tag{1}$$

ე. ი. ყოველი x ელემენტისათვის G-დან და a ელემენტისათვის A-დან შეიძლება ვიპოვოთ A-ში ისეთი a' და a'' ელემენტები, რომ

$$xa=a'x, \quad ax=xa''. \tag{2}$$

შეგვიძლია მივუთითოთ ნორმალური გამოყოფის, გამოსავალის ტოლფას, სხვა განმარტებებზეც. ასე მაგალითად, G ჯგუფის a და b ელემენტებს ვუწოდოთ შეუღლებული, თუ G-ში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x ელემენტი, რომ

$$b=x^{-1}ax, \tag{3}$$

ე. ი. როგორც ამბობენ, b ელემენტი მიიღება a ელემენტისაგან x ელემენტით ტრანსფორმირებით. (3)-დან გამომდინარეობს, ცხადია,

$$a=xbx^{-1}=(x^{-1})^{-1}bx^{-1}$$

ტოლობა.

G ჯგუფის A ქვეჯგუფი იქნება G-ში ნორმალური გამყოფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველ თავის a ელემენტთან ერთად ის შეიცავს G-ში მასთან შეუღლებულ ყველა ელემენტსაც.

მართლაც, თუ A არის G-ში ნორმალური გამყოფი, მაშინ (2)-ის თანახმად, ჩვენ მიერ ამორჩეული a ელემენტისათვის A-დან და ნებისმიერი x ელემენტისათვის G-დან შეიძლება ვიპოვოთ A-ში ისეთი a'' ელემენტი, რომ

$$ax=xa''.$$

აქედან

$$x^{-1}ax=a'',$$

ე. ი. a-სთან შეუღლებული ყოველი ელემენტი მოთავსებულია A-ში. პირიქით, თუ A ქვეჯგუფი ყოველ თავის a ელემენტთან ერთად შეიცავს მასთან შეუღლებულ ყველა ელემენტსაც, მაშინ A-ში მოთავსებულია, კერძოდ,

$$x^{-1}ax=a''$$

ელემენტი, საიდანაც გამომდინარეობს (2) ტოლობებიდან მეორე. იმავე მიზეზის გამო A-ში მოთავსებულია

$$(x^{-1})^{-1}ax^{-1}=xax^{-1}=a'$$

ელემენტიც, საიდანაც გამომდინარეობს (2) ტოლობებიდან პირველიც.

თუ გამოვიყენებთ ამ შედეგს, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ G *ჯგუფის ნებისმიერ ნორმალურ გამყოფთა თანაკვეთა თვითონ იქნება ამ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი.* მართლაც, თუ A და B არიან G ჯგუფის ნორმალური გამყოფები, მაშინ, როგორც წინა პარაგრაფში ნაჩვენები, $A \cap B$ თანაკვეთა იქნება G ჯგუფის ქვეჯგუფი. ვთქვათ, c არის ნებისმიერი ელემენტი $A \cap B$-დან, x კი G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ $x^{-1}cx$ ელემენტი უნდა იყოს მოთავსებული A-შიც და B-შიც, ვინაიდან ორივე ეს ნორმალური გამყოფი შეიცავს c ელემენტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ $x^{-1}cx$ ელემენტი შედის $A \cap B$ თანკვეთაში.

ფაქტორ-ჯგუფი. ნორმალური გამყოფის ცნების მნიშვნელობა დამყარებულია იმაზე, რომ ნორმალური გამყოფის მიმართ მოსაზღვრე კლასებიდან— (1)-ის გამო ამ შემთხვევაში მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასები შეიძლება არ განვასხვავოთ—გარკვეული, ძალიან ბუნებრივი წესით, შეიძლება აიგოს ახალი ჯგუფი.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თუ A არის G ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფი, მაშინ

$$AA = A, \tag{4}$$

ვინაიდან A ქვეჯგუფის ნებისმიერი ორი ელემენტის ნამრავლი ეკუთვნის A-ს და, ამასთან ერთად, თუ A-ს ყველა ელემენტს გავამრავლებთ ერთეულზე, უკვე მივიღებთ მთელ A ქვეჯგუფს.

ვთქვათ, ახლა, A არის G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი. *ამ შემთხვევაში A-ს მიმართ G-ს ნებისმიერი ორი მოსაზღვრე კლასის ნამრავლი* (G ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების აზრით) *თვითონ იქნება მოსაზღვრე კლასი A-ს მიმართ.* მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების ასოციაციურობას, (4) ტოლობას და

$$yA = Ay$$

ტოლობას (შეად. (1)-ს), G ჯგუფის ნებისმიერი x და y ელემენტებისათვის მივიღებთ:

$$xA \cdot yA = xyAA = xyA.$$

(5) ტოლობა გვიჩვენებს: იმისათვის, რომ მოიძებნოს A ნორმალური გამყოფის მიმართ G ჯგუფის ორი მოცემული მოსაზღვრე კლასის ნამრავლი, ნებისმიერად უნდა ავირჩიოთ ამ მოსაზღვრე კლასებში თითო *წარმომადგენელი*—გავიხსენოთ, რომ ყოველი მოსაზღვრე კლასი წარმოიქმნება ნებისმიერი თავისი ელემენტით—და ავიღოთ ის მოსაზღვრე კლასი, რომელშიც მოთავსებულია ამ წარმომადგენლების ნამრავლი.

ამრიგად, A ნორმალური გამყოფის მიმართ G ჯგუფის ყველა მოსაზღვრე კლასის სიმრავლეში განმარტებულია გამრავლების ოპერაცია. ვაჩვენოთ რომ *ამასთან სრულდება ჯგუფის განმარტებაში შემავალი ყველა მოთხოვნა.* მართლაც, მოსაზღვრე კლასთა გამრავლების ასოციაციურობა გამომდინარეობს ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გამრავლების ასოციაციურობიდან. ერთეულის როლს ასრულებს თვითონ A ნორმალური გამყოფი, რომელიც წარმოადგენს G-ს დაშლის ერთ-ერთ მოსაზღვრე კლასს A-ს მი-

მართ: სახელდობრ, (4)-ისა და (1)-ის გამო ნებისმიერი x-ისათვის G-დან გვექნება

$$xA\cdot A=xA,\quad A\cdot xA=xAA=xA.$$

ბოლოს, მოსაზღვრე xA კლასისათვის შებრუნებული იქნება მოსაზღვრე $x^{-1}A$ კლასი, ვინაიდან

$$xA\cdot x^{-1}A=1\cdot A=A.$$

ჩვენს მიერ აგებულ ჯგუფს ეწოდება G ჯგუფის *ფაქტორ-ჯგუფი* A ნორმალური გამყოფის მიმართ და აღინიშნება G/A-თი.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველ ჯგუფთან დაკავშირებულია ახალ ჯგუფთა მთელი ერთობლიობა—მისი ფაქტორ-ჯგუფებისა სხვადასხვა ნორმალური გამყოფთა მიმართ. ამასთან G ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი ერთეულოვანი ქვეჯგუფის მიმართ, გასაგებია, იქნება თვითონ G ჯგუფის იზომორფული.

აბელის G ჯგუფის ყოველი G/A ფაქტორ-ჯგუფი თვითონაც აბელურია, ვინაიდან $xy=yx$-დან გამომდინარეობს

$$xA\cdot yA=xyA=yxA=yA\cdot xA.$$

ციკლური G ჯგუფის ყოველი G/A ფაქტორ-ჯგუფი თვითონ არის ციკლური, ვინაიდან თუ G წარმოიქმნება g ელემენტით, $G=\{g\}$, და თუ მოცემულია ნებისმიერი მოსაზღვრე xA კლასი, მაშინ არსებობს ისეთი მთელი k რიცხვი, რომ

$$x=g^k$$

და ამიტომ

$$xA=(gA)^k.$$

სასრული G ჯგუფის ნებისმიერი G/A ფაქტორ-ჯგუფის რიგი არის თვითონ ამ ჯგუფის რიგის გამყოფი. მართლაც, G/A ფაქტორ-ჯგუფის რიგი უდრის A ნორმალური გამყოფის ინდექსს G ჯგუფში, და ამიტომ შეიძლება ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის (7) ტოლობით.

მოვიყვანოთ ფაქტორ-ჯგუფთა ზოგიერთი *მაგალითი*. ვინაიდან მთელ რიცხვთა ადიციურ ჯგუფში ნატურალური k რიცხვის ჯერადი რიცხვების ქვეჯგუფს, როგორც წინა პარაგრაფშია ნაჩვენები, აქვს k ინდექსი, ამიტომ ჩვენი ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი ამ ქვეჯგუფის მიმართ იქნება k-ური რიგის სასრული ჯგუფი, ამასთან ციკლური, ვინაიდან თვითონ განხილული ჯგუფი ციკლურია.

n-ური ხარისხის სიმეტრიული S_n ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი n-ური ხარისხის ნიშანცვლადი A_n ჯგუფის მიმართ იქნება მე-2 რიგის ჯგუფი, ამასთან, 2 რიცხვის მარტივობის გამო, ციკლური ჯგუფი (იხ. წინა პარაგრაფის ბოლო).

ზემოთ მოყვანილია აღწერა n-ური რიგის P ველის ელემენტებიან გადაუგვარებელ მატრიცთა მულტიპლიკაციური ჯგუფის მოსაზღვრე კლასებისა ნორმალური გამყოფის მიმართ, რომელიც შედგენილია 1-ის ტოლი დეტერ-

მინანტის მქონე მატრიცებისაგან. ამ აღწერიდან გამომდინარეობს, რომ შესაბამისი ფაქტორ-ჯგუფი იზომორფულია P ველის ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფისა.

ჰომომორფიზმები. ნორმალური გამყოფისა და ფაქტორ-ჯგუფის ცნებები მჭიდროდ დაკავშირებულია იზომორფიზმის ცნების შემდეგ განზოგადოებასთან.

G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ასახვას, რომელიც უთანადებს ყოველ a ელემენტს G-დან ცალსახად განსაზღვრულ $a'=a\varphi$ ელემენტს G'-დან, ეწოდება G-ს *ჰომომორფული ასახვა* G'-ზე (ანუ უბრალოდ *ჰომომორფიზმი*), თუ ყოველი a' ელემენტი G'-დან არის ამ ასახვის დროს G-დან რომელიმე a ელემენტის ანასახი, $a'=a\varphi$, და თუ G ჯგუფის ნებისმიერი a, b ელემენტებისათვის

$$(ab)\varphi=a\varphi\cdot b\varphi.$$

ცხადია, რომ, თუ დამატებით მოვითხოვდით φ ასახვის ურთიერთცალსახობას, მივიღებდით იზომორფიზმის ჩვენთვის უკვე ცნობილ განმარტებას.

თუ φ არის ჰომომორფიზმი G ჯგუფისა G' ჯგუფზე და 1 და a — შესაბამისად G ჯგუფის ერთეული და ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო $1'$ არის G' ჯგუფის ერთეული, მაშინ

$$1\varphi=1',$$

$$(a^{-1})\varphi=(a\varphi)^{-1}.$$

მართლაც, თუ $1\varphi=e'$ და x' არის G' ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ G-ში არსებობს ისეთი x ელემენტი, რომ $x\varphi=x'$. აქედან

$$x'=x\varphi=(x\cdot 1)\varphi=x\varphi\cdot 1\varphi=x'\cdot e'.$$

ანალოგიურად

$$x'=e'x'$$

და, მაშასადამე, $e'=1'$.

მეორე მხრივ, თუ $(a^{-1})\varphi=b'$, მაშინ

$$1'=1\varphi=(aa^{-1})\varphi=a\varphi\cdot(a^{-1})\varphi=a\varphi\cdot b'$$

და, ანალოგიურად,

$$1'=b'\cdot a\varphi,$$

საიდანაც $b'=(a\varphi)^{-1}$.

G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ჰომომორფიზმის *ბირთვი* ვუწოდოთ ერთობლიობას G ჯგუფის იმ ელემენტებისა, რომლებიც φ-ს დროს აისახებიან G' ჯგუფის $1'$ ერთეულში.

G ჯგუფის ყოველი ჰომომორფიზმის ბირთვი არის G ჯგუფის ნორმალური გამყოფი.

მართლაც, თუ G ჯგუფის a, b ელემენტები შედიან φ ჰომომორფიზმის ბირთვში, ე. ი.

$$a\varphi=b\varphi=1',$$

მაშინ

$$(ab)\varphi=a\varphi\cdot b\varphi=1'\cdot 1'=1',$$

ე. ი. ab ნამრავლიც მოთავსებულია φ ჰომომორფიზმის ბირთვში. მეორე მხრივ, თუ $a\varphi=1'$, მაშინ

$$(a^{-1})\varphi=(a\varphi)^{-1}=1'^{-1}=1',$$

ე. ი. a^{-1}-იც შედის φ ჰომომორფიზმის ბირთვში. ბოლოს, თუ $a\varphi=1'$, ხოლო x არის G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ

$$(x^{-1}ax)\varphi=(x^{-1})\varphi\cdot ax\cdot x\varphi=(x\varphi)^{-1}\cdot 1'\cdot x\varphi=1'.$$

განხილული ჰომომორფიზმის ბირთვი აღმოჩნდა G ჯგუფის ქვეჯგუფი, რომელიც ყოველ თავის ელემენტთან ერთად შეიცავს მასთან შეუღლებულ ყველა ელემენტსაც; მაშასადამე, ის იქნება ნორმალური გამყოფი.

ვთქვათ, ახლა A არის G ჯგუფის ნებისმიერი ნორმალური გამყოფი. თუ G ჯგუფის ყოველ x ელემენტს თანადობაში მოვუყვანთ A ნორმალური გამყოფის მიმართ იმ მოსაზღვრე xA კლასს, რომელშიც მოთავსებულია ეს ელემენტი, მივიღებთ G ჯგუფის ასახვას მთელ G/A ფაქტორ-ჯგუფზე. G/A ჯგუფში გამრავლების განმარტებიდან (იხ. (5)) გამომდინარეობს, რომ ეს ასახვა იქნება ჰომომორფული.

მიღებულ ჰომომორფიზმს ეწოდება ჯგუფის ბუნებრივი ჰომომორფიზმი G/A ფაქტორ-ჯგუფზე. ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი არის, ცხადია, თვითონ A ნორმალური გამყოფი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ G ჯგუფის ნორმალური გამყოფები და მხოლოდ ისინი არიან ამ ჯგუფის ჰომომორფიზმთა ბირთვები. ეს შედეგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნორმალური გამყოფის კიდევ ერთი განმარტება.

თურმე, ყველა ჯგუფი, რომლებზედაც G ჯგუფს შეუძლია ჰომომორფულად აისახოს, სინამდვილეში ამოიწურება ამ ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფებით, ხოლო G ჯგუფის ყველა ჰომომორფიზმი — თავის ფაქტორ-ჯგუფებზე თავისი ბუნებრივი ჰომომორფიზმებით. უფრო ზუსტად, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა ჰომომორფიზმების შესახებ. ვთქვათ, მოცემულია G ჯგუფის G' ჯგუფზე φ ჰომომორფიზმი და ვთქვათ, A არის ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი. მაშინ G' ჯგუფი იზომორფულია G/A ფაქტორ-ჯგუფისა და ამასთან არსებობს ისეთი იზომორფული σ ასახვა პირველი ამ ჯგუფთაგანისა მეორეზე, რომ φ და σ ასახვების თანმიმდევრობითი შესრულების შედეგი ემთხვევა G ჯგუფის ბუნებრივ ჰომომორფიზმს G/A ფაქტორ-ჯგუფზე.

მართლაც, ვთქვათ, x' არის G' ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, ხოლო x არის G ჯგუფის ისეთი ელემენტი, რომ $x\varphi=x'$. ვინაიდან ნებისმიერი a ელემენტისათვის φ ჰომომორფიზმის A ბირთვიდან ადგილი აქვს $a\varphi=1'$ ტოლობას, ამიტომ

$$(xa)\varphi=x\varphi\cdot a\varphi=x'\cdot 1'=x',$$

ე. ი. მოსაზღვრე xA კლასის ყველა ელემენტი φ-ს დროს აისახება x' ელემენტში.

მეორე მხრივ, თუ z არის G ჯგუფის ნებისმიერი ისეთი ელემენტი, რომ $z\varphi=x'$, მაშინ

$$(x^{-1}z)\varphi=x^{-1}\varphi\cdot z\varphi=(x\varphi)^{-1}\cdot z\varphi=x'^{-1}\cdot x'=1',$$

ე. ი. $x^{-1}z$ მოთავსებულია φ ჰომომორფიზმის A ბირთვში. თუ დავუშვებთ $x^{-1}z=a$, მაშინ $z=xa$, ე. ი. z ელემენტი მოთავსებულია მოსაზღვრე xA კლასში. ამრიგად, თუ შევაგროვებთ G ჯგუფის ყველა იმ ელემენტს, რომელიც φ ჰომომორფიზმის დროს აისახება G' ჯგუფის ფიქსირებულ x' ელემენტში, მივიღებთ ზუსტად მოსაზღვრე xA კლასს.

σ თანადობა, რომელიც G'-დან ყოველ x' ელემენტს უთანადებს G ჯგუფის იმ მოსაზღვრე კლასს A ნორმალური გამყოფის მიმართ, რომელიც შედგება G ჯგუფის ყველა ელემენტისაგან, რომელსაც φ-ს დროს აქვს x' თავის ანასახად, იქნება G' ჯგუფის ურთიერთცალსახა ასახვა G/A ფაქტორ-ჯგუფზე. ეს ასახვა იქნება იზომორფიზმი, ვინაიდან თუ

$$x'\sigma=xA, \quad y'\sigma=yA,$$

ე. ი.

$$x\varphi=x', \quad y\varphi=y',$$

მაშინ

$$(xy)\varphi=x\varphi\cdot y\varphi=x'y'$$

და ამიტომ

$$(x'y')\sigma=xyA=xA\cdot yA=x'\sigma\cdot y'\sigma.$$

ბოლოს, თუ x არის ნებისმიერი ელემენტი G-დან და $x\varphi=x'$, მაშინ

$$(x\varphi)\sigma=x'\sigma=xA,$$

ე. ი. φ ჰომომორფიზმისა და σ იზომორფიზმის თანმიმდევრობითი შესრულება მართლაც ასახავს x ელემენტს მის მიერ წარმოქმნილ მოსაზღვრე xA კლასში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 66. აბელის ჯგუფთა პირდაპირი ჯამები

ჩვენ გვინდა ეს თავი დავამთავროთ ერთი ჯგუფურ-თეორიული თეორემით, რომელიც უფრო ღრმაა, ვიდრე ჯგუფთა ის ელემენტარული თვისებები, რომლებიც ზემოთ იყო გადმოცემული. სახელდობრ, თუ დავეყრდნობით ციკლური ჯგუფების § 64-დან ჩვენთვის უკვე ცნობილ აღწერას, შემდეგ პარაგრაფში მივიღებთ სასრულ აბელის ჯგუფთა სრულ აღწერას.

როგორც აბელის ჯგუფთა თეორიაშია მიღებული, ჯგუფური ოპერაციისათვის გამოყენებული იქნება ადიციური ჩაწერა: ჩვენ ვილაპარაკებთ ჯგუფის a და b ელემენტების $a+b$ ჯამზე, ნულოვან O ქვეჯგუფზე, რომელიმე a ელემენტის ka ჯერადებზე და ა. შ.

ამ პარაგრაფში შევისწავლით ერთ კონსტრუქციას, რომელიც გადმოცემული იქნება აბელის ჯგუფებთან შეფარდებით, თუმცა მისი შემოტანა შეიძლებოდა ერთბაშად ნებისმიერი (ე. ი. არა აუცილებლად კომუტატური) ჯგუფებისათვის. ამ კონსტრუქციას გვიკარნახებს შემდეგი მაგალითები. სიბრ-

ტყე, განხილული როგორც ორგანზომილებიანი ნამდვილი წრფივი სივრცე, არის აბელის ჯგუფი ვექტორთა შეკრების მიმართ. ამ სიბრტყეზე კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი წრფე იქნება აღნიშნული ჯგუფის ქვეჯგუფი. თუ A_1 და A_2 არის ორი სხვადასხვა ასეთი წრფე, მაშინ, როგორც ცნობილია, ამ სიბრტყეზე კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი ყოველი ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება A_1 და A_2 წრფეებზე მისი პროექციების ჯამის სახით. ანალოგიურად, სამგანზომილებიანი წრფივი სივრცის ყოველი ვექტორი ცალსახად ჩაიწერება სამი ვექტორის ჯამის სახით, რომლებიც ეკუთვნიან სამ მოცემულ A_1, A_2 და A_3 წრფეს, თუკი ეს წრფეები ერთ სიბრტყეში არ არის მოთავსებული.

აბელის G ჯგუფს ეწოდება თავისი $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ქვეჯგუფების პირდაპირი ჯამი,

$$G = A_1 + A_2 + \cdots + A_k, \qquad (1)$$

თუ G ჯგუფის ყოველი x ელემენტი ჩაიწერება, ამასთან ერთადერთი წესით, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ელემენტთა ჯამის სახით, რომლებიც აღებულია, შესაბამისად, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ქვეჯგუფებში,

$$x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \qquad (2)$$

(1) ჩაწერას ეწოდება G ჯგუფის პირდაპირი დაშლა, A_i ქვეჯგუფებს, $i=1, 2, \ldots, k$,—ამ დაშლის პირდაპირი შესაკრებები, ხოლო a_i ელემენტს (2)-დან $i=1, 2, \ldots, k$,—x ელემენტის კომპონენტი (1) დაშლის A_i პირდაპირ შესაკრებში.

თუ მოცემულია G ჯგუფის (1) პირდაპირი დაშლა და თუ ამ დაშლის ყველა ან ზოგიერთი A_i პირდაპირი შესაკრები თვითონ დაშლილია

$$A_i = A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{ik_i}, \ k_i \geqslant 1, \qquad (3)$$

პირდაპირ ჯამად, მაშინ G ჯგუფი იქნება ყველა თავისი

$$A_{ij}, \ j=1, 2, \ldots, k_i, \ i=1, 2, \ldots, k,$$

ქვეჯგუფის პირდაპირი ჯამი.

მართლაც, G ჯგუფის ნებისმიერი x ელემენტისათვის არსებობს (1) პირდაპირი დაშლის მიმართ (2) ჩაწერა, ხოლო ყოველი a_i კომპონენტისათვის, $i=1, 2, \ldots, k$,—

$$a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{ik_i} \qquad (4)$$

ჩაწერა A_i ჯგუფის (3) პირდაპირი დაშლის მიმართ. ცხადია, რომ x იქნება ყველა a_{ij} ელემენტის ჯამი, $j=1, 2, \ldots, k_i$, $i=1, 2, \ldots, k$. ამ ჩაწერის ერთადერთობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ თუ ავიღებთ x ელემენტის ნებისმიერ ჩაწერას ელემენტების ჯამის სახით, რომლებიც აღებულია A_{ij} ჯგუფებში თითო ქვეჯგუფიდან თითო, და თუ შევკრებთ შესაკრებებს, რომლებიც ეკუთვნიან ერთ და იმავე A_i ქვეჯგუფს, $i=1, 2, \ldots, k$, ჩვენ უნდა მივიღოთ სწორედ (2) ტოლობა; მეორე მხრივ, ყოველ a_i ელემენტს გააჩნია (4) სახის მხოლოდ ერთი ჩაწერა.

პირდაპირი ჯამის განმარტებას შეიძლება მიეცეს სხვა ფორმა. ჯერ შემოვიტანოთ კიდევ ერთი ცნება. თუ აბელის G ჯგუფში მოცემულია რაღაც $B_1, B_2, \dots, B_l$ ქვეჯგუფები, მაშინ $\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$-ით აღვნიშნოთ ერთობლიობა G ჯგუფის y ელემენტებისა, რომლებიც ერთი წესით მაინც შეიძლება ჩაიწეროს $B_1, B_2, \dots, B_l$ ქვეჯგუფებში აღებული, შესაბამისად, $b_1, b_2, \dots, b_l$ ელემენტთა ჯამის სახით,

$$y=b_1+b_2+\dots+b_l. \tag{5}$$

$\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ სიმრავლე იქნება G ჯგუფის ქვეჯგუფი. ამბობენ, რომ ეს ჯგუფი წარმოქმნილია $B_1, B_2, \dots, B_l$ ქვეჯგუფებით.

დამტკიცებისათვის ავიღოთ $\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$-ში y ელემენტი (5) ჩაწერით და აგრეთვე y' ელემენტი, რომელსაც გააჩნია ანალოგიური

$$y'=b'_1+b'_2+\dots+b'_l$$

ჩაწერა, სადაც b'_i არის ელემენტი B_i-დან, $i=1, 2, \dots, l$. მაშინ

$$y+y'=(b_1+b'_1)+(b_2+b'_2)+\dots+(b_l+b'_l),$$
$$-y=(-b_1)+(-b_2)+\dots+(-b_l),$$

ე. ი. $y+y'$ და $-y$ ელემენტებს აგრეთვე ექნებათ ერთი მაინც (5) სახის ჩაწერა და, მაშასადამე, მიეკუთვნებიან $\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ სიმრავლეს, რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

$\{B_1, B_2, \dots, B_l\}$ ქვეჯგუფი შეიცავს თითოეულ B_i ქვეჯგუფთაგანს, $i=1, 2, \dots, l$. მართლაც, G ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი შეიცავს ამ ჯგუფის ნულს და ამიტომ, თუ ავიღებთ, მაგალითად, B_1 ქვეჯგუფში ნებისმიერ b_1 ელემენტს, ხოლო $B_2, \dots, B_l$ ქვეჯგუფებში — o ელემენტს, მივიღებთ b_1 ელემენტისათვის (5) სახის შემდეგ ჩაწერას:

$$b_1=b_1+o+\dots+o,$$

აბელის G ჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება თავისი $A_1, A_2, \dots, A_k$ ქვეჯგუფების პირდაპირი ჯამი, როცა ის წარმოიქმნება ამ ქვეჯგუფებით,

$$G=\{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \tag{6}$$

და როცა ყოველი A_i ქვეჯგუფის, $i=2, \dots, k$, თანაკვეთა ყველა წინა $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ ქვეჯგუფებით წარმოქმნილ ქვეჯგუფთან შეიცავს მხოლოდ ნულს,

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\} \cap A_i=0, \quad i=2, \dots, k. \tag{7}$$

მართლაც, თუ G ჯგუფს გააჩნია (1) პირდაპირი დაშლა, მაშინ G-დან ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს (2) ჩაწერა და ამიტომ ადგილი აქვს (6) ტოლობას. (7) ტოლობების სამართლიანობა გამომდინარეობს ნებისმიერი x ელემენტისათვის (2) ჩაწერის ერთადერთობიდან: რომ რომელიმე i-სათვის $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\} \cap A_i$ თანაკვეთა შეიცავდეს არანულოვან x ელე-

მენტს, მაშინ, ერთი მხრივ, x შეიძლება ჩაიწეროს როგორც a_i ელემენტი A_i-დან, ე. ი. $x=a_i$, და ამიტომ

$$x=0+\dots+0+a_i+0+\dots+0; \tag{8}$$

მეორე მხრივ, x-ს, როგორც ელემენტს $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\}$ ქვეჯგუფიდან, გააჩნია

$$x=a_1+a_2+\dots+a_{i-1}$$

სახის ჩაწერა, ე. ი.

$$x=a_1+a_2+\dots+a_{i-1}+0+\dots+0. \tag{9}$$

(8) და (9) იქნება, ცხადია, x ელემენტისათვის (2) სახის ორი სხვადასხვა ჩაწერა.

პირიქით, ვთქვათ, სრულდება (6) და (7) ტოლობები. (6)-დან გამომდინარეობს, რომ G ჯგუფის ნებისმიერ x ელემენტს გააჩნია ერთი მაინც (2) სახის ჩაწერა. მაგრამ, ვთქვათ, რომელიმე x ელემენტისათვის არსებობს (2) სახის ორი სხვადასხვა ჩაწერა,

$$x=a_1+a_2+\dots+a_k=a'_1+a'_2+\dots+a'_k. \tag{10}$$

მაშინ შეიძლება მოინახოს ისეთი i, $i\leqslant k$, რომ

$$a_k=a'_k,\ a_{k-1}=a'_{k-1},\dots,\ a_{i+1}=a'_{i+1}. \tag{11}$$

მაგრამ

$$a_i\neq a'_i,$$

ე. ი.

$$a_i-a'_i\neq 0. \tag{12}$$

მაგრამ (9) და (11)-დან გამომდინარეობს

$$a_i-a'_i=(a'_1-a_1)+(a'_2-a_2)+\dots+(a'_{i-1}-a_{i-1})$$

ტოლობა, რომელიც ეწინააღმდეგება, (12)-ის გამო, (7) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

პირდაპირი ჯამის ცნებას შეიძლება სულ სხვა მხრიდან შევხედოთ. ვთქვათ, მოცემულია k ნებისმიერი აბელის $A_1, A_2,\dots, A_k$ ჯგუფები, რომელთა შორის შეიძლება იზომორფულებიც იყოს. აღვნიშნოთ G-თი ერთობლიობა

$$(a_1, a_2,\dots, a_k) \tag{13}$$

სახის ყოველგვარი სისტემებისა, რომლებიც შედგება თითოეულ $A_1, A_2,\dots,$ A_k ჯგუფში აღებული თითო ელემენტებისაგან. G სიმრავლე გახდება აბელის ჯგუფი, თუ (13) სახის სისტემათა *შეკრება* იქნება განმარტებული წესით:

$$(a_1, a_2,\dots, a_k)+(a'_1, a'_2,\dots, a'_k)=(a_1+a'_1,\ a_2+a'_2,\dots,\ a_k+a'_k), \tag{14}$$

ე. ი. ელემენტები იკრიბება ცალკე თითოეულ მოცემულ $A_1, A_2,\dots, A_k$ ჯგუფში. მართლაც, ამ შეკრების ასოციაციურობა და კომუტატურობა გამომდინარეობს თითოეულ მოცემულ ჯგუფში ამ თვისებების სამართლიანობიდან; ნულის როლს ასრულებს

$$(0_1, 0_2,\dots, 0_k)$$

სისტემა, სადაც 0_i-თი აღნიშნულია A_i ჯგუფის ნულოვანი ელემენტი, $i=1, 2, \ldots, k$; (13) სისტემისათვის მოპირდაპირე იქნება

$$(-a_1, -a_2, \ldots, -a_k)$$

სისტემა.

აგებულ აბელის G ჯგუფს ეწოდება $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ჯგუფების პირდაპირი ჯამი და ჩაიწერება, როგორც ზემოთ:

$$G=A_1+A_2+\cdots+A_k.$$

ეს სახელწოდება გამართლებულია იმით, რომ G ჯგუფი, რომელიც წარმოადგენს $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამს ახლახან განმარტებული აზრით, შეიძლება დაიშალოს თავის $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებიც შესაბამისად იზომორფულია $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ჯგუფებისა.

სახელდობრ, აღვნიშნოთ A'_i-ით, $i=1, 2, \ldots, k$, ერთობლიობა G ჯგუფის იმ ელემენტებისა, ე. ი. (13) სახის სისტემისა, რომლებშიც i-ურ ადგილზე მოთავსებულია A_i ჯგუფის ნებისმიერი a_i ელემენტი, ხოლო ყველა სხვა ადგილი უკავია შესაბამისი ჯგუფების ნულებს; მაშასადამე, ესენი იქნება

$$(0_1, \ldots, 0_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, 0_k) \tag{15}$$

სახის სისტემები. შეკრების (14) განმარტება გვიჩვენებს, რომ A'_i სიმრავლე იქნება G ჯგუფის ქვეჯგუფი; ჩვენ მივიღებთ ამ ქვეჯგუფის იზომორფიზმს A_i ჯგუფთან, თუ ყოველ (15) სისტემას შევუთანადებთ A_i ჯგუფის a_i ელემენტს.

დაგვრჩენია დავამტკიცოთ, რომ G ჯგუფი არის $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ ქვეჯგუფების პირდაპირი ჯამი. მართლაც, G ჯგუფის ნებისმიერი (13) ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ აღნიშნული ქვეჯგუფების ელემენტების ჯამის სახით:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)=(a_1, 0_2, \ldots, 0_k)+(0_1, a_2, 0_3, \ldots, 0_k)+\ldots+$$
$$(0_1, 0_2, \ldots, 0_{k-1}, a_k).$$

ამ წარმოდგენის ერთადერთობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ (13) სახის სხვადასხვა სისტემები არიან G ჯგუფის სხვადასხვა ელემენტები.

თუ მოცემულია აბელის ჯგუფთა ორი $A_1, A_2, \ldots, A_k$ და $B_1, B_2, \ldots, B_k$ სისტემა, ამასთან A_i და B_i ჯგუფები იზომორფულია, $i=1, 2, \ldots, k$, მაშინ

$$G=A_1+A_2+\cdots+A_k$$

და

$$H=B_1+B_2+\cdots+B_k$$

ჯგუფები აგრეთვე იქნებიან იზომორფული.

მართლაც, თუ $i=1, 2, \ldots, k$-სათვის A_i და B_i ჯგუფებს შორის დამყარებულია φ_i იზომორფიზმი, რომელიც ყოველ a_i ელემენტს A_i-დან უთანადებს $a_i\varphi_i$ ელემენტს B_i-დან, მაშინ φ ასახვა, რომელიც G ჯგუფის ყოველ $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ელემენტს უთანადებს H ჯგუფის ელემენტს, განსაზღვრულს

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)\varphi=(a_1\varphi_1, a_2\varphi_2, \ldots, a_k\varphi_k)$$

ტოლობით, იქნება, ცხადია, G ჯგუფის იზომორფული ასახვა H ჯგუფზე.

თუ მოცემულია სასრული აბელის $A_1, A_2, \dots, A_k$ ჯგუფები, რომლებსაც აქვთ შესაბამისად $n_1, n_2, \dots, n_k$ რიგი, მაშინ ამ ჯგუფების G პირდაპირი ჯამი აგრეთვე იქნება სასრული ჯგუფი და მისი n რიგი უდრის პირდაპირ შესაკრებთა რიგების ნამრავლს,

$$n=n_1 n_2 \cdots n_k. \tag{16}$$

მართლაც, რიცხვი (13) სახის განსხვავებული სისტემებისა, რომელთათვის a_1 ელემენტს შეუძლია მიიღოს n_1 სხვადასხვა მნიშვნელობა, a_2 ელემენტი ღებულობს n_2 სხვადასხვა მნიშვნელობას და ა. შ., განისაზღვრება (16) ტოლობით.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

თუ სასრული ციკლური $\{a\}$ ჯგუფის n რიგი იშლება ორ თანამარტივ ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლად,

$$n=st, \ (s, t)=1,$$

მაშინ $\{a\}$ ჯგუფი იშლება ორ ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებსაც აქვთ, შესაბამისად, s და t რიგი.

$\{a\}$ ჯგუფისათვის გამოვიყენებთ ადიციურ ჩაწერას. თუ დავუშვებთ $b=ta$, მაშინ,

$$sb=(st)\,a=na=0,$$

მაგრამ $0<k<s$-სათვის

$$kb=(kt)\,a\neq 0,$$

ე. ი. ციკლურ $\{b\}$ ქვეჯგუფს აქვს s რიგი. ანალოგიურად $c=sa$ ელემენტის ციკლურ $\{c\}$ ქვეჯგუფს აქვს t რიგი. $\{b\}\cap\{c\}$ თანაკვეთა შეიცავს მხოლოდ ნულს, ვინაიდან თუ $kb=lc$, როცა $0<k<s$, $0<l<t$, მაშინ

$$(kt)\,a=(ls)\,a,$$

საიდანაც, ვინაიდან kt და ls რიცხვები ნაკლებია n-ზე,

$$kt=ls,$$

რაც შეუძლებელია s და t რიცხვების თანამარტივობის გამო. ბოლოს, არსებობს ისეთი u და v რიცხვები, რომ

$$su+tv=1;$$

ამიტომ

$$a=v\,(ta)+u\,(sa)=vb+uc$$

და, მაშასადამე, $\{a\}$ ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოიდგინოს, როგორც $\{b\}$ და $\{c\}$ ქვეჯგუფების ელემენტების ჯამი.

ვუწოდოთ აბელის G ჯგუფს დაუშლადი, თუ არ შეიძლება მისი დაშლა ნულოვანი ქვეჯგუფისაგან განსხვავებული ორი ან რამდენიმე მისი ქვეჯგუფის პირდაპირ ჯამად. სასრულ ციკლურ ჯგუფს, რომლის რიგი არის მარტივი p რიცხვის რაღაც ხარისხი, ეწოდება პრიმარული ციკ-

ლური ჯგუფი, რომელიც მიეკუთვნება მარტივ p რიცხვს. თუ რამდენჯერმე გამოვიყენებთ ზემოთ დამტკიცებულ დებულებას, მივიღებთ, რომ ყოველი სასრული ციკლური ჯგუფი იშლება პრიმარულ ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებიც მიეკუთვნება სხვადასხვა მარტივ რიცხვს. უფრო ზუსტად,

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$$

რიგის ციკლური ჯგუფი, სადაც $p_1, p_2, \ldots, p_s$ განსხვავებული მარტივი რიცხვებია, იშლება s ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებსაც აქვთ შესაბამისად $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_s^{k_s}$ რიგი.

ყოველი პრიმარული ციკლური ჯგუფი დაუშლადია.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია p^k რიგის, სადაც p მარტივი რიცხვია, სასრული ციკლური $\{a\}$ ჯგუფი. ეს ჯგუფი, რომ დაშლადი ყოფილიყო, მაშინ, (7)-ის თანახმად, მას ექნებოდა არანულოვანი ქვეჯგუფები, რომელთა თანაკვეთა უდრის ნულს. მაგრამ, სინამდვილეში, ჩვენი ჯგუფის ყოველი არანულოვანი ქვეჯგუფი შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ

$$b=p^{k-1}a$$

ელემენტს. დამტკიცებისათვის ავიღოთ ჩვენი ჯგუფის ნებისმიერი არანულოვანი x ელემენტი,

$$x=sa,\ 0<s<p^k.$$

s რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს

$$s=p^l s',\ 0\leqslant l<k,$$

სახით, სადაც s' რიცხვი უკვე აღარ იყოფა p-ზე და, მაშასადამე, თანამარტივია მასთან, და ამიტომ არსებობენ ისეთი u და v რიცხვები, რომ

$$s'u+pv=1.$$

მაშინ

$$(p^{k-l-1}u)\,x=(p^{k-l-1}us)\,a=(p^{k-1}us')\,a=p^{k-1}(1-pv)\,a=$$
$$(p^{k-1}-p^k v)\,a=p^{k-1}a-v\,(p^k a)=p^{k-1}a=b,$$

ე. ი. b ელემენტი შედის ციკლურ $\{x\}$ ქვეჯგუფში.

მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი (ე. ი. უსასრულო ციკლური ჯგუფი) და აგრეთვე ყველა რაციონალურ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი წარმოადგენს დაუშლად ჯგუფს.

ორივე მითითებული ჯგუფის დაუშლადობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ თითოეულ ამ ჯგუფში ნებისმიერი ორი არანულოვანი ელემენტისათვის არსებობს არანულოვანი საერთო ჯერადი, ე. ი. ნებისმიერ ორ არანულოვან ციკლურ ქვეჯგუფს აქვს არანულოვანი თანაკვეთა.

შევნიშნოთ, რომ თუ აბელის G ჯგუფში ოპერაციას ეწოდება გამრავლება, მაშინ უნდა ვილაპარაკოთ არა პირდაპირ ჯამზე, არამედ პირდაპირ ნამრავლზე.

ნულისაგან განსხვავებულ ნამდვილ რიცხვთა მულტიპლიკაციური ჯგუფი იშლება დადებით ნამდვილ რიცხვთა

მულტიპლიკაციური ჯგუფისა და გამრავლების მიმართ 1 და —1 რიცხვებისაგან შედგენილი ჯგუფის პირდაპირ ნამრავლად.

მართლაც, ჩვენი ჯგუფის მითითებული ორი ქვეჯგუფის თანაკვეთაში მოთავსებულია მხოლოდ რიცხვი 1—ამ ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. მეორე მხრივ, ყოველი დადებითი რიცხვი არის თავისი თავის ნამრავლი 1 რიცხვზე, ყოველი უარყოფითი რიცხვი—თავისი აბსოლუტური სიდიდის ნამრავლი —1 რიცხვზე.

§ 67. სასრული აბელის ჯგუფები

თუ ავიღებთ პრიმარულ ციკლურ ჯგუფთა ნებისმიერ სასრულ ერთობლიობას, რომელთაგან ზოგიერთი შეიძლება მიეკუთვნოს ერთ და იმავე მარტივ რიცხვს ან ჰქონდეს ერთი და იგივე რიგიც კი, ე. ი. იყოს იზომორფული, მაშინ ამ ჯგუფების პირდაპირი ჯამი იქნება სასრული აბელის ჯგუფი. თურმე, ამით ამოიწურება ყველა სასრული აბელის ჯგუფი:

ძირითადი თეორემა სასრული აბელის ჯგუფების შესახებ. ყოველი სასრული აბელის G ჯგუფი, რომელიც არ არის ნულოვანი ჯგუფი, იშლება პრიმარულ ციკლურ ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად.

ამ თეორემის დამტკიცება დავიწყოთ იმის შენიშვნით, რომ G ჯგუფში აუცილებლად მოინახება არანულოვანი ელემენტები, რომელთა რიგებია მარტივი რიცხვების ხარისხები. მართლაც, თუ G ჯგუფის რომელიმე არანულოვან x ელემენტს აქვს l რიგი, $lx=0$, და თუ p^k, $k>0$, არის მარტივი p რიცხვის ისეთი ხარისხი, რომელზედაც l რიცხვი იყოფა,

$$l=p^k m,$$

მაშინ mx ელემენტი განსხვავებული იქნება ნულისაგან და ექნება p^k რიგი.

ვთქვათ,

$$p_1, p_2, \ldots, p_s \tag{1}$$

ყველა განსხვავებული მარტივი რიცხვებია, რომელთა რაღაც ხარისხები არიან G ჯგუფის ზოგიერთი ელემენტის ხარისხები. p-თი აღვნიშნოთ ნებისმიერი ამ რიცხვთაგანი, ხოლო P-თი ერთობლიობა G ჯგუფის ელემენტებისა, რომელთა რიგებია p რიცხვის ხარისხები.

P სიმრავლე არის G ჯგუფის ქვეჯგუფი. მართლაც, P ში შედის 0 ელემენტი, ვინაიდან მისი ხარისხი არის $1=p^0$. შემდეგ, თუ $p^k x=0$, მაშინ $p^k(-x)=0$. ბოლოს, თუ $p^k x=0$, $p^l y=0$ და თუ, მაგალითად, $k \geqslant l$, მაშინ

$$p^k(x+y)=0,$$

ე. ი. $x+y$ ელემენტის რიგი არის ან p^k რიცხვი, ან ამ რიცხვის გამყოფი, ე. ი. ყოველ შემთხვევაში p რიცხვის რაღაც ხარისხი.

თუ p რიცხვად რიგრიგობით ავიღებთ თითოეულ (1) რიცხვთაგანს, მივიღებთ s არანულოვან

$$P_1, P_2, \dots, P_s \tag{2}$$

ქვეჯგუფს. *G ჯგუფი არის ამ ქვეჯგუფების პირდაპირი ჯამი,*

$$G = P_1 + P_2 + \dots + P_s. \tag{3}$$

მართლაც, თუ x არის G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ მისი l რიგი შეიძლება გაიყოს (1) სისტემის მხოლოდ ზოგიერთ მარტივ რიცხვზე,

$$l = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s},$$

სადაც $k_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, s$. ამიტომ, როგორც ნაჩვენებია წინა პარაგრაფის ბოლოს, ციკლური $\{x\}$ ქვეჯგუფი იშლება პრიმარულ ციკლურ ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, რომლებსაც აქვთ შესაბამისად $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s}$ რიგები. ეს პრიმარული ციკლური ქვეჯგუფები მოთავსებულია შესაბამის (2) ქვეჯგუფებში და, მაშასადამე, x ელემენტი წარმოიდგინება (2) ქვეჯგუფებიდან ყველაში ან ზოგიერთში აღებული თითო ელემენტების ჯამის სახით. ამით დამტკიცებულია წინა პარაგრაფის (6) ტოლობის ანალოგიური

$$G = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$$

ტოლობა.

იმავე პარაგრაფის (7) ტოლობის ანალოგიური ტოლობის დამტკიცებისათვის ავიღოთ ნებისმიერი i, $2 \leqslant i \leqslant s$. მაშინ $\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}\}$ ქვეჯგუფიდან ნებისმიერი y ელემენტი მიიღებს

$$y = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1}$$

სახეს, სადაც a_j ელემენტი, $j = 1, 2, \dots, i-1$, მოთავსებული იქნება P_j ქვეჯგუფში, ე. ი. ექნება $p_j^{k_j}$ რიგი. მაშინ

$$(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_{i-1}^{k_{i-1}})\, y = 0,$$

ე. ი. y ელემენტის რიგი იქნება $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}$ რიცხვის რაღაც გამყოფი და, მაშასადამე, y ელემენტი, თუ ის განსხვავებულია ნულისაგან, არ შეიძლება იყოს მოთავსებული P_i ქვეჯგუფში. ამით დამტკიცებულია, რომ

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}\} \cap P_i = 0,$$

რაც უნდა დამტკიცებულიყო.

შევნიშნოთ, რომ აბელის ჯგუფს, რომლის ყველა ელემენტის რიგი არის ერთი და იგივე მარტივი p რიცხვის ხარისხი, ეწოდება *პრიმარული* p რიცხვის მიმართ. პრიმარული ციკლური ჯგუფები არის პრიმარული ჯგუფების კერძო შემთხვევა. ამრიგად, (2) ქვეჯგუფები პრიმარულია. მათ ეწოდებათ G ჯგუფის *პრიმარული კომპონენტები*, ხოლო (3) პირდაპირ დაშლას — *ამ ჯგუფის დაშლა პრიმარულ კომპონენტებად*. ვინაიდან (2) ქვეჯგუფები განსაზღვრულია G ჯგუფში ცალსახად, ამიტომ *G ჯგუფის დაშლაც პრიმარულ კომპონენტებად განსაზღვრულია ცალსახად.*

ყოველი სასრული აბელის ჯგუფის დაშლადობას პრიმარულ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამად, ცხადია, ძირითადი თეორემის დამტკიცება დაჰყავს სასრული პრიმარული აბელის P ჯგუფის შემთხვევაზე, რომელიც მიეკუთვნება რომელიღაც მარტივ p რიცხვს. განვიხილოთ ეს შემთხვევა.

ვთქვათ, a_1 არის P ჯგუფის ერთი ელემენტთაგანი, რომელსაც მასში აქვს უმაღლესი რიგი. შემდეგ, თუ P ჯგუფში არის არანულოვანი ელემენტები, რომელთა ციკლური ქვეჯგუფები ციკლურ $\{a_1\}$ ქვეჯგუფთან თანაიკვეთება მხოლოდ ნულზე, მაშინ a_2-ით აღვნიშნოთ ამ თვისების მქონე ელემენტთა შორის უმაღლესი რიგის ერთი ელემენტთაგანი; ამრიგად

$$\{a_1\} \cap \{a_2\} = 0.$$

ვთქვათ, უკვე ამორჩეულია $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ელემენტები. მათი ციკლური ქვეჯგუფებით წარმოქმნილი P ჯგუფის ქვეჯგუფი აღვნიშნოთ $\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$-ით,

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_{i-1}\}\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}. \tag{4}$$

ის შედგება, ცხადია, P ჯგუფის ყველა ელემენტისაგან, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ელემენტების ჯერადი ელემენტების ჯამის სახით; ვიტყვით, რომ ეს ქვეჯგუფი წარმოიქმნება $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ელემენტებით. აღვნიშნოთ ახლა a_i-თი უმაღლესი რიგის ერთი ელემენტთაგანი P ჯგუფის იმ ელემენტებს შორის, რომელთა ციკლურ ქვეჯგუფებს აქვთ ნულის ტოლი თანაკვეთა $\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$ ქვეჯგუფთან; ამრიგად

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\} \cap \{a_i\} = 0. \tag{5}$$

P ჯგუფის სასრულობის გამო ეს პროცესი უნდა გაჩერდეს; ვთქვათ, ეს მოხდება იმის შემდეგ, რაც ამორჩეული იქნება $a_1, a_2, \ldots, a_s$ ელემენტები. თუ P'-ით აღვნიშნავთ ამ ელემენტებით წარმოქმნილ ქვეჯგუფებს.

$$P' = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\},$$

ე. ი.

$$P' = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_s\}\}, \tag{6}$$

მაშინ, მაშასადამე, P ჯგუფის ნებისმიერი არანულოვანი ელემენტის ციკლურ ქვეჯგუფს P' ქვეჯგუფთან ექნება არანულოვანი თანაკვეთა.

(6) და (5) ტოლობა (უკანასკნელი სამართლიანია $i=2, 3, \ldots, s$-სათვის) გვიჩვენებს, (4)-ის გამო, რომ P' ქვეჯგუფი არის ციკლური $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_s\}$ ქვეჯგუფების პირდაპირი ჯამი,

$$P' = \{a_1\} + \{a_2\} + \cdots + \{a_s\}. \tag{7}$$

დაგვრჩენია დავამტკიცოთ, რომ P' ქვეჯგუფი სინამდვილეში ემთხვევა მთელ P ჯგუფს.

ვთქვათ, x არის P ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, რომელსაც აქვს p რიგი. ვინაიდან

$$P' \cap \{x\} \neq 0,$$

ხოლო $\{x\}$ ქვეჯგუფს არა აქვს თავისი თავისაგან განსხვავებული არანულოვანი ქვეჯგუფები — გავიხსენოთ, რომ ქვეჯგუფის რიგი არის ჯგუფის რიგის გამყოფი, ხოლო p რიცხვი მარტივია, — ამიტომ სინამდვილეში $\{x\}$ ქვეჯგუფი მოთავსებულია P' ქვეჯგუფში და, მაშასადამე, x ეკუთვნის P'-ს. ამრიგად, P ჯგუფის p რიგის ყველა ელემენტი შედის P' ქვეჯგუფში.

ვთქვათ, უკვე დამტკიცებულია, რომ P' ქვეჯგუფში შედის P ჯგუფის ყველა ელემენტი, რომლის რიგი არ აღემატება p^{k-1} რიცხვს და ვთქვათ, x არის P-ს ნებისმიერი ელემენტი, რომელსაც აქვს p^k რიგი. როგორც a_1, $a_2, \ldots, a_s$ ელემენტების ამორჩევა გვიჩვენებს, მათი რიგი არ იზრდება და ამიტომ შეიძლება მივუთითოთ ისეთი i, $1 < i \leqslant s$, რომ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ელემენტების რიგები მეტია ან ტოლი p^k-სი, ხოლო a_i ელემენტის რიგი მკაცრად ნაკლებია ამ რიცხვზე, ე. ი. ნაკლებია x ელემენტის რიგზე. აქედან გამომდინარეობს, პირობების გამო, რომელთაც ექვემდებარება a_i ელემენტის ამორჩევა, რომ თუ

$$Q = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\},$$

მაშინ

$$Q \cap \{x\} \neq 0.$$

მაგრამ წინა პარაგრაფში დამტკიცებული იყო, რომ p^k რიგის პრიმარული ციკლური $\{x\}$ ჯგუფის ყოველი არანულოვანი ქვეჯგუფი შეიცავს

$$y = p^{k-1} x \tag{8}$$

ელემენტს. მაშასადამე, y ელემენტი შედის $Q \cap \{x\}$ თანაკვეთაში და ამიტომ Q ქვეჯგუფშიც. ეს საშუალებას იძლევა y ჩავწეროთ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ელემენტების ჯერად ელემენტთა ჯამის სახით,

$$y = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \cdots + l_{i-1} a_{i-1}. \tag{9}$$

(8)-დან გამომდინარეობს, რომ y ელემენტს აქვს p რიგი. ამიტომ

$$(pl_1) a_1 + (pl_2) a_2 + \cdots + (pl_{i-1}) a_{i-1} = 0,$$

ე. ი., (7) პირდაპირი დაშლის არსებობის გამო,

$$(pl_j) a_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots, i-1.$$

მაშასადამე, pl_j რიცხვი უნდა გაიყოს a_j ელემენტის რიგზე და ამიტომ p^k რიცხვზეც, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ l_j იყოფა p^{k-1}-ზე,

$$l_j = p^{k-1} m_j, \ j = 1, 2, \ldots, i-1. \tag{10}$$

ვთქვათ,

$$z = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_{i-1} a_{i-1}.$$

ის იქნება ელემენტი Q ქვეჯგუფიდან და ამიტომ P' ქვეჯგუფიდანაც, ამასთან, (9) და (10)-ის გამო,

$$y = p^{k-1} z. \tag{11}$$

(8) და (11)-დან გამომდინარეობს

$$p^{k-1}(x - z) = 0$$

ტოლობა, ე. ი.

$$t = x - z$$

ელემენტის რიგი არ არის p^{k-1}-ზე მეტი და, მაშასადამე, ინდუქციური დაშვების ძალით, t მოთავსებულია P' ქვეჯგუფში. ამიტომ x ელემენტიც, როგორც P'-ის ორი ელემენტის ჯამი, $x=z+t$, ეკუთვნის P' ქვეჯგუფს. ამით დამტკიცებულია, რომ P ჯგუფის p^k რიგის ყველა ელემენტი შედის P'-ში.

ჩვენი ინდუქციური დამტკიცება საშუალებას იძლევა ვთქვათ, მაშასადამე, რომ P ჯგუფის ყველა ელემენტი შედის P' ქვეჯგუფში, ე. ი. $P'=P$. ძირითადი თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

ამრიგად, შედეგად ვღებულობთ, რომ *სასრული აბელის ჯგუფი იქნება პრიმარული მარტივი p რიცხვის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი რიგი არის ამ p რიცხვის ხარისხი.* მართლაც, ნაჩვენები იყო, რომ ყოველი სასრული პრიმარული (p-ს მიმართ) აბელის P ჯგუფი იშლება პრიმარულ (p-ს მიმართ) ციკლურ ჯგუფთა ჯამად და ამიტომ P ჯგუფის რიგი უდრის ამ ციკლურ ჯგუფთა რიგების პირდაპირ ნამრავლს, ე. ი. არის p რიცხვის ხარისხი. პირიქით, თუ სასრულ აბელის ჯგუფს აქვს p^k რიგი, სადაც p მარტივი რიცხვია, მაშინ მისი ნებისმიერი ელემენტის რიგი იქნება ამ რიცხვის გამყოფი, ე. ი. აგრეთვე p რიცხვის რაღაც ხარისხი და ამიტომ ჯგუფი იქნება პრიმარული p-ს მიმართ.

ძირითადი თეორემა კიდევ არ ამოწურავს საკითხს სასრულ აბელის ჯგუფთა სრული აღწერის შესახებ, ვინაიდან ჯერ არ არის გამორიცხული შესაძლებლობა იმისა, რომ რაღაც მარტივი რიცხვების მიმართ პრიმარული ციკლური ჯგუფების ორი სხვადასხვა ერთობლიობის პირდაპირი ჯამები შეიძლება აღმოჩნდეს იზომორფული ჯგუფები. სინამდვილეში ამას ადგილი არა აქვს, როგორც გვიჩვენებს შემდეგი თეორემა:

თუ სასრული აბელის G ჯგუფი დაშლილია ორი წესით პრიმარულ ციკლურ ქვეჯგუფთა პირდაპირ ჯამად,

$$G=\{a_1\}+\{a_2\}+\dots+\{a_s\}=\{b_1\}+\{b_2\}+\dots+\{b_t\}, \qquad (12)$$

მაშინ ორივე პირდაპირ დაშლას გააჩნია პირდაპირ შესაკრებთა ერთი და იგივე რიცხვი, $s=t$, და ამ დაშლების პირდაპირ შესაკრებებს შორის შეიძლება დამყარდეს ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომ თანადი შესაკრებები იყვნენ ერთი და იგივე რიგის ციკლური ჯგუფები, ე. ი. იზომორფული.

შევნიშნოთ ჯერ, რომ თუ (12) პირდაპირი დაშლებიდან, მაგალითად, პირველში მოვაგროვებთ პირდაპირ შესაკრებებს, რომლებიც მიეკუთვნება მოცემულ მარტივ p რიცხვს, მაშინ მათი პირდაპირი ჯამი იქნება G ჯგუფის პრიმარული (p-ს მიმართ) ქვეჯგუფი და ამ ჯგუფის პრიმარული კომპონენტიც კი, ვინაიდან მისი რიგი უდრის p რიცხვის უმაღლეს ხარისხს, რომელზედაც G ჯგუფის რიგი იყოფა. თუ ამ წესით გავაერთიანებთ პირდაპირ შესაკრებებს თითოეულ (12) დაშლათაგანში, ორივე შემთხვევაში მივიღებთ G ჯგუფის დაშლას პრიმარულ კომპონენტებად, რომლის ერთადერთობა ზემოთ უკვე იყო აღნიშნული.

ეს საშუალებას იძლევა დავამტკიცოთ ჩვენი თეორემა იმ დაშვებით, რომ G ჯგუფი თვითონ არის პრიმარული მარტივი p რიცხვის მიმართ. ვთქვათ, თითოეულ (12) დაშლათაგანში პირდაპირ შესაკრებთა ნუმერაცია არჩეულია ისე, რომ ამ შესაკრებების რიგები ზრდადობით არ მიყვებიან ერთმანეთს, ე. ი. $a_1, a_2, \ldots, a_s$ ელემენტებს აქვს შესაბამისად

$$p^{k_1}, \; p^{k_2}, \ldots, \; p^{k_s}$$

რიგები, ამასთან

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_s,$$

ხოლო $b_1, b_2, \ldots, b_t$ ელემენტებს —

$$p^{l_1}, \; p^{l_2}, \ldots, \; p^{l_t}$$

რიგები, ამასთან

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_t.$$

ჩვენს თეორემას რომ არ ჰქონოდა ადგილი, მაშინ მოინახებოდა ისეთი i, $i \geqslant 1$, რომ

$$k_1 = l_1, \ldots, \; k_{i-1} = l_{i-1}, \tag{13}$$

მაგრამ

$$k_i \neq l_i.$$

გასაგებია, რომ $i \leqslant \min(s, t)$, ვინაიდან თითოეული (12) დაშლათაგანისათვის ყველა პირდაპირი შესაკრების რიგების ნამრავლი უდრის G ჯგუფის რიგს. ვაჩვენოთ, რომ ჩვენს დაშვებას მივყავართ წინააღმდეგობამდე.

ვთქვათ, მაგალითად,

$$k_i < l_i. \tag{14}$$

H-ით აღვნიშნოთ ერთობლიობა G ჯგუფის ელემენტებისა, რომელთა რიგები არ აღემატება p^{k_i}-ს. ის იქნება G ჯგუფის ქვეჯგუფი, ვინაიდან თუ x და y არიან H-ის ელემენტები, მაშინ $x+y$-საც და $-x$-საც ექნებათ რიგები, რომლებიც არ აღემატებიან p^{k_i} რიცხვს.

შევნიშნოთ, რომ H ქვეჯგუფს ეკუთვნის, კერძოდ, შემდეგი ელემენტები:

$$p^{k_1-k_i} a_1, \; p^{k_2-k_i} a_2, \ldots, \; p^{k_{i-1}-k_i} a_{i-1}, \; a_i, \; a_{i+1}, \ldots, \; a_s.$$

მეორე მხრივ, თუ $1 \leqslant j \leqslant i-1$, მაშინ $p^{k_j-k_{i-1}} a_j$ ელემენტს ექნება p^{k_i+1} რიგი და ამიტომ H-ში არ შევა. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოსაზღვრე a_j+H კლასს (გავიხსენოთ, რომ ვხმარობთ ადიციურ ჩაწერას!) აქვს, როგორც G/H ფაქტორ-ჯგუფის ელემენტს, $p^{k_j-k_i}$ რიგი; ასეთივეა მისი ციკლური $\{a_j+H\}$ ქვეჯგუფის რიგი. დავამტკიცოთ, რომ G/H ჯგუფი არის ციკლურ $\{a_j+H\}$, $j=1, 2, \ldots, i-1$, ქვეჯგუფთა პირდაპირი ჯამი,

$$G/H = \{a_1+H\} + \{a_2+H\} + \cdots + \{a_{i-1}+H\}, \tag{15}$$

და ამიტომ მისი რიგი უდრის

$$p^{(k_1-k_i)+(k_2-k_i)+\ldots+(k_{i-1}-k_i)} \tag{16}$$

რიცხვს,

თუ x არის G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ არსებობს

$$x = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_s a_s$$

ჩაწერა. ვთქვათ, $j=1, 2, \dots, i-1$-სათვის

$$m_j = p^{k_j - k_i} q_j + n_j,$$

სადაც

$$0 \leqslant n_j < p^{k_j - k_i}. \tag{17}$$

მაშინ

$$m_j a_j = q_j (p^{k_j - k_i} a_j) + n_j a_j,$$

ხოლო ვინაიდან მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები შედის H-ში, ამიტომ

$$m_j a_j + H = n_j a_j + H.$$

მეორე მხრივ,

$$m_i a_i + H = H, \dots, m_s a_s + H = H.$$

ამიტომ

$$x + H = (m_1 a_1 + H) + (m_2 a_2 + H) + \dots + (m_s a_s + H) =$$
$$= (n_1 a_1 + H) + (n_2 a_2 + H) + \dots + (n_{i-1} a_{i-1} + H). \tag{18}$$

ვთქვათ, არსებობს კიდევ ერთი ასეთი ჩაწერა,

$$x + H = (n'_1 a_1 + H) + (n'_2 a_2 + H) + \dots + (n'_{i-1} a_{i-1} + H), \tag{19}$$

სადაც

$$0 \leqslant n'_j < p^{k_j - k_i}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1. \tag{20}$$

მაშინ

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_{i-1} a_{i-1}$$

და

$$n'_1 a_1 + n'_2 a_2 + \dots + n'_{i-1} a_{i-1}$$

ელემენტები მოთავსებული იქნება H-ის მიმართ ერთ მოსაზღვრე კლასში, ე. ი. მათი სხვაობა მიეკუთვნება H-ს და ამიტომ

$$p^{k_i}[(n_1 - n'_1) a_1 + (n_2 - n'_2) a_2 + \dots + (n_{i-1} - n'_{i-1}) a_{i-1}] = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს (ვინაიდან (12) დაშლებიდან პირველი პირდაპირია), რომ

$$p^{k_i}(n_j - n'_j) a_j = 0, \ j = 1, 2, \dots, i-1,$$

და ამიტომ $p^{k_i}(n_j - n'_j)$ რიცხვი უნდა იყოფოდეს a_j ელემენტის p^{k_j} რიგზე და, მაშასადამე, $n_j - n'_j$ სხვაობა გაიყოფა $p^{k_j - k_i}$ რიცხვზე. აქედან, (17) და (20) ის გამო, გამომდინარეობს, რომ

$$n_j = n'_j, \quad j = 1, 2, \dots, i-1,$$

ე. ი. (18) და (19) ჩანაწერები იგივურია. ამით დამტკიცებულია (15) პირდაპირი დაშლის არსებობა.

ანალოგიური განხილვები, ჩატარებული (12) პირდაპირი დაშლებიდან მეორესათვის, გვიჩვენებს, რომ იგივე G/H ფაქტორ-ჯგუფს გააჩნია

$$G/H = \{b_1 + H\} + \{b_2 + H\} + \dots + \{b_{i-1} + H\} + \{b_i + H\} + \dots$$

პირდაპირი და'შლა, ე. ი. (13) და (14)-ის გამო, მისი რიგი უნდა იყოს (16) რიცხვზე მკაცრად მეტი. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

ჩვენ უკვე მივიღეთ სასრული აბელის ჯგუფების სრული აღწერა. სახელდობრ, ვიღებთ ერთისაგან განსხვავებულ, მაგრამ არა აუცილებლად ერთმანეთისაგან განსხვავებულ,

$$(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

ნატურალურ რიცხვთა ყოველგვარ სასრულ ერთობლიობებს, ამასთან თითოეული ამ რიცხვთაგანი უნდა იყოს რომელიმე მარტივი რიცხვის ხარისხი. ყოველ ასეთ ერთობლიობას მოვუყვანთ თანადობაში ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირ ჯამს, რომელთა რიგები იქნებიან ამ ერთობლიობის რიცხვები. ამ წესით მიღებული ყველა სასრული აბელის ჯგუფი იქნება წყვილ-წყვილად არაიზომორფული, ხოლო ნებისმიერი სხვა სასრული აბელის ჯგუფი ერთი ამ ჯგუფთაგანის იზომორფულია.

ლიტერატურის საძიებელი

საძიებელში მოყვანილია წიგნები ალგებრის სხვადასხვა დარგიდან, რომლებიც გამოვიდა რუსულ ენაზე უკანასკნელი ოცი-ოცდახუთი წლის მანძილზე. ზოგიერთი ამ წიგნთაგანი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს ან სასწავლო წიგნს უნივერსიტეტებისა ან პედინსტიტუტების ალგებრის კურსებისათვის, ხოლო სხვები — კრებსით თხზულებებს ან მონოგრაფიებს ცალკეულ საკითხებში, რომლებიც განკუთვნილია კარგად მომზადებული მკითხველისათვის.

უმაღლესი ალგებრა

Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, изд. 4, Гостехиздат, 1941.

Окунев Л. Я., Высшая алгебра, Учпедгиз, 1958.

Шапиро Г. М., Высшая алгебра, изд. 4, Учпедгиз, 1940.

Ляпин Е. С., Курс высшей алгебры, изд. 2, Учпедгиз, 1955.

Фадеев Д. К. и Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, изд. 3, Гостехиздат, 1952.

Виноградов С. П., Основания теории детерминантов, изд. 4, ОНТИ, 1935.

წრფივი ალგებრა

Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 2, Гостехиздат, 1951.

Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, изд. 2, Гостехиздат, 1956.

Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, изд. 2, Гостехиздат, 1956.

Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре, Гостехиздат, 1957.

Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1953.

Бохер М., Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1933.

Шрейер О. и Шпернер Е., Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, т. I, ОНТИ, 1934.

Шрейер О. и Шпернер Е., Теория матриц, ОНТИ, 1936.

Фадеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.

Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.

Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, Гостехиздат, 1948.

ჯგუფთა, რგოლთა და მესერთა თეორია

Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, чч. 1 и 2, Гостехиздат, 1947.
Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, изд. 2, ОНТИ, 1933.
Курош А. Г., Теория групп, изд. 2, Гостехиздат, 1953.
Александров П. С., Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1938.
Джекобсон Н., Теория колец, ИЛ, 1947.
Чеботарев Н. Г., Введение в теорию алгебр, Гостехиздат, 1949.
Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, ГНТИ Украины, 1937.
Окунев Л. Я., Основы современной алгебры, Учпедгиз, 1941.
Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, ИЛ, 1955.

ველთა თეორია

Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. I, ОНТИ, 1934.
Чеботарев Н. Г., Теория Галуа, ОНТИ, 1936.
Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, 1940.
Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, ИЛ, 1947.
Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.
Ходж В. и Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, тт. 1 и 2, ИЛ, 1954, т. 3, ИЛ, 1955.
Граве Д. А., Трактат по алгебраическому анализу, тт. 1 и 2, изд. АН УССР, 1938 — 1939.

უწყვეტი ჯგუფები

Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд. 2, Гостехиздат, 1954.
Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, 1940.
Шевалле К., Теория групп Ли, ч. 1, ИЛ, 1948.
Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, ИЛ, 1950.

საგნობრივი საძიებელი

აბელის ჯგუფი 407
აბელის ჯგუფის პრიმარული კომპონენტე-
ბი 433
აბსოლუტურად დაუყვანადი მრავალწევრი
330
ადიციური ჯგუფის ელემენტის ჯერადი 414
აიზენშტაინის კრიტერიუმი 345
ალგებრული დამატება 45
„ ოპერაცია 278
„ რიცხვი 371
ამონახსნების ფუნდამენტალური სისტემა 87
არათვლადი სიმრავლე 374
არაკომუტატური რგოლი 284
ბიუდან-ფურიეს თეორემა 263
ბუნებრივი ჰომომორფიზმი 424
გადაგვარებული მატრიცი 97
გადანაცვლება 29
გადასვლის მატრიცი 198
გადაუგვარებელი კვადრატული ფორმა 173
გადაუგვარებელი მატრიცი 97
განუზღვრელი კვადრატული ფორმა 189
გაუსის ლემა 327, 363
„ მეთოდი 17, 294
დადებითად განსაზღვრული კვადრატული
ფორმა 185
დალამბერის ლემა 158
დამატებითი მინორი 45
დამოუკიდებელი ციკლები 36
დაუყვანადი მრავალწევრი 167, 300, 326
დაუშლადი აბელის ჯგუფი 430
დაყვანადი მრავალწევრი 300, 326
დაშლადი კვადრატული ფორმა 184
დეკარტის თეორემა 264
დეკრემენტი 37
დეტერმინანტი 24
დეტერმინანტის დაშლა სტრიქონის მიხედ-
ვით 48
დეტერმინანტის წევრი 25
დისკრიმინანტი 244, 355
ევკლიდეს ალგორითმი 143, 299
ევკლიდური სივრცე 219
„ სივრცეების იზომორფიზმი 223
„ სივრცის ორთოგონალური გარდა-
ქმნა 227
„ „ სიმეტრიული გარდაქმ-
ნა 229
ელემენტარული გამყოფები 400
„ λ— მატრიცი 386
„ სიმეტრიული მრავალწევრები
333
ერთგვაროვანი განტოლება 21
„ მრავალწევრი 326
ერთეულიდან პირველყოფილი ფესვი 133
ერთეულის გამყოფი 304
ერთეულოვანი ვექტორები 67
„ მატრიცი 16
„ ქვეჯგუფი 413
ვანდერმონდის დეტერმინანტი 51
ველი 285
ველის გაფართოება 289
„ ელემენტების განაყოფი 285
„ ელემენტის უარყოფითი ხარისხები 288
„ ერთეული 287
„ მახასიათებელი 289
„ მულტიპლიკაციური ჯგუფი 410
ველისადმი ელემენტის მიერთება 290
ველში შებრუნებული ელემენტი 287
ვექტორების ჯამი 62

ვექტორი 62, 191
ვექტორის კომპონენტი 62
„ კოორდინატთა სტრიქონი 196
„ რიცხვზე ნამრავლი 63
ვექტორთა ექვივალენტური სისტემები 69
„ მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა 68
ვექტორთა სისტემის რანგი 71
„ წრფივი დამოკიდებულება 65, 194, 295
„ „ კომბინაცია 65
ვექტორული სივრცე 64
ვიეტას ფორმულები 165, 315
თავისუფალი უცნობები 83
თანამარტივი მრავალწევრები 143, 148
თეორემა დეტერმინანტების გამრავლების შესახებ 95
თვლადი სისტემა 374
იგივური ჩასმა 32
ინერციის დადებითი ინდექსი 183
„ კანონი 182
„ უარყოფითი ინდექსი 183
ინვერსია 30
ირიბსიმეტრიული დეტერმინანტი 44
კანონიკური λ-მატრიცი 379
კარდანოს ფორმულა 243
კვადრატული განტოლება 241
„ მატრიცი 16
„ ფორმა 173
„ ფორმების წყვილი 238
„ ფორმის დაყვანა მთავარ ღერძებზე 235
„ „ კანონიკური სახე 176
„ „ მატრიცი 173
„ „ მთავარი მინორები 187
„ „ ნორმალური სახე 181
„ „ რანგი 173
ქენტი გადანაცვლება 30
„ ჩასმა 33
კომპლექსური კვადრატული ფორმა 173
„ სიბრტყე 118
„ რიცხვები 116, 293
„ რიცხვის მოდული 120
„ „ ნამდვილი ნაწილი 118
„ „ ტრიგონომეტრიული ფორმა 121
„ „ წარმოსახვითი ნაწილი 118
„ წრფივი სივრცე 193
კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის ძირითადი თეორემა 153
კრამერის წესი 25, 28, 58, 102, 294
კრონეკერ-კაპელის თეორემა 80
კუბური განტოლება 242
„ განტოლების ამოხსნის დაუყვანადი შემთხვევა 246
ლაგრანჟის თეორემა 418
„ საინტერპოლაციო ფორმულა 164
ლამბდა-მატრიცი 377
ლაპლასის თეორემა 52
ლემა მრავალწევრის მოდულის ზრდის შესახებ 157
„ უფროსი წევრის მოდულის შესახებ 156
ლუწი გადანაცვლება 30
„ ჩასმა 33
სწორკუთხოვანი მატრიცი 101
მატრიცების გამრავლება 93
„ გაყოფა 100
„ ნამრავლი 93
„ შეკრება 104
„ ჯამი 104
λ-მატრიცებისათვის ერთადერთობის თეორემა 381
λ-მატრიცთა ექვივალენტობის კრიტერიუმი 386
მატრიცთა ნამრავლის რანგი 103
მატრიცი 16
მატრიცით წრფივი გარდაქმნის მოცემა 208
λ-მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები 378
მატრიცის ელემენტები 16
მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები 384
„ მახასიათებელი ფესვები 213
„ მთავარი დიაგონალი 16
„ მინიმალური მრავალწევრი 402
„ რანგი 73, 295
„ რანგის გამოთვლის წესი 75
„ რიცხვზე ნამრავლი 105
„ სტრიქონთა წრფივი კომბინაცია 43
„ ტრანსფორმირება 205
λ-მატრიცის ხარისხი 389
მატრიცული მრავალწევრი 388
მახასიათებელი დეტერმინანტები 81
„ მატრიცი 212
„ მრავალწევრი 213
მთელი რიცხვები 113
მიერთებული მატრიცი 99
მინორი 45, 48
მოპირდაპირე ვექტორი 63
„ ელემენტი რგოლში 282

მრავალწევრების ნამრავლი 137
" რგოლი 297
" ტოლობა 136
" ჯამი 137
მრავალწევრთა გაყოფისას მიღებული განაყოფი 140
" " " ნაშთი 140
" საერთო გამყოფი 142
მრავალწევრი 136
მრავალწევრის დაშლა წრფივ მამრავლებად 162
" დაშლის ველი 314
" გამყოფი 141, 326
" ლექსიკოგრაფიული ჩაწერა 330
" მარტივი მამრავლი 151
" ფესვი 303
" მატრიცული ფესვი 401
" მნიშვნელობა 303
" უმაღლესი წევრი 331
" ფესვთა განცალება 267
" " საზღვრები 251
" ფესვი 149
" წარმოებული 151, 306
" წევრის წონა 340, 353
" ჯერადი მამრავლი 303
" " ფესვი 151
მუავრის ფორმულა 127
ნამდვილი კვადრატული ფორმა 173
" რიცხვები 113
" ღერძი 118
ნაშთით გაყოფის ალგორითმი 139
" " " λ-მატრიცებისათვის 389
ნახევრად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა 189
ნიუტონის ფორმულები 343
ნიშანცვლადი ჯგუფი 412
ნიშანცვლები რიცხვთა სისტემაში 255
ნორმალური გამყოფი 419
ნორმირებული ვექტორი 222
ნულის გამყოფი 284
ნულოვანი ამონახსნი 21
" ვექტორი 63, 191
" მატრიცა 104
" ქვესივრცე 208
" ხარისხის მრავალწევრი 137
ორთოგონალიზაციის პროცესი 220
ორთოგონალური ბაზისი 221
" ვექტორები 220
" მატრიცა 225
ორთონორმირებული ბაზისი 222
ორი განტოლების სისტემიდან უცნობის გამორიცხვა 352
ორმაგი ჯამი 57
პირდაპირი დაშლა 426
" ნამრავლი 431
" ჯამი 426, 429
პირდაპირი ჯამის ელემენტის კომპონენტი 426
პრიმარული ციკლური ჯგუფი 430
პრიმარული ჯგუფი 433
პრიმიტიული მრავალწევრი 327, 363
პროპორციული ვექტორები 64
ჟორდანის მატრიცა 394
" უჯრედი 393
რამდენიმე უცნობის მრავალწევრის ამონახსნი 345
" " " ხარისხი 323
რამდენიმე ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი 324
" " მრავალწევრი 323
რაციონალური რიცხვები 113
" წილადების ველი 316
რაციონალური წილადებისათვის ერთადერთობის თეორემა 170
რაციონალური წილადი 167
რგოლების იზომორფიზმი 290
რგოლზე მრავალწევრების რგოლი 298
რგოლი 279
რგოლის ადიციური ჯგუფი 410
" ალგებრული ელემენტი 297
" ელემენტთა ალგებრული დამოკიდებულება 325
" ელემენტის ნულოვანი ჯერადი 283
" " ხარისხები 281
" " ჯერადი 281
" მარტივი ელემენტი 304
" ნული 282
" ტრანსცენდენტული ელემენტი 298
" უარყოფითი ჯერადი ელემენტები 283
რეზულტანტი 347
რიცხვითი ველი 277
" მატრიცა 377
" მატრიცის დიაგონალური ფორმა 78
" " ელემენტარული გარდაქმნები 75
" რგოლი 274
საკუთრივი ვექტორი 214
" მნიშვნელობა 214
სასრული რგოლი (ველი) 285
" ჯგუფი 407

სასრული ჯგუფის რიგი 407
სასრულოგანზომილებიანი სივრცე 195
სიგნატურა 183
სივრცის ბაზისი 195
" გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა 211
" გარდაქმნა 200
" გარდაქმნისას ვექტორის ანასახი 200
" იგივური წრფივი გარდაქმნა 201
სიმეტრიული მატრიცა 173
" მრავალწევრების ერთადერთობის თეორემა 338
" " რგოლი 333
" მრავალწევრი 332, 344
" რაციონალური წილადი 341
" ჯგუფი 412
სკალარული მატრიცი 107
" ნამრავლი 219
ტეილორის ფორმულა 155
ტრანსპოზიცია 29, 35
ტრანსპონირებული მატრიცები 39
ტრანსცენდენტული რიცხვი 371
უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა 189
უდიდესი საერთო გამყოფი 143, 148
უკვეცი რაციონალური წილადი 167
უმარტივესი რაციონალური წილადი 168
უნიმოდულარული λ– მატრიცი 384
უნიტარული სივრცე 224
უცნობების იგივური წრფივი გარდაქმნა 98
" ორთოგონალური გარდაქმნა 225
" წრფივი გარდაქმნა 91
უცნობთა გადაგვარებული წრფივი გარდაქმნა 97
" გადაუგვარებელი წრფივი გარდაქმნა 97
უწყვეტი ფუნქცია 154
ფაქტორ-ჯგუფი 422
ფესვები ერთეულიდან 131
ფესვების გამოთვლის ნიუტონის მეთოდი 269
ფესვთა საზღვრების მოძებნის ნიუტონის მეთოდი 253
ფორმა 326
ქვევექტორი 289
ქვესივრცეების თანაკვეთა 209
ქვესივრცის ინვარიანტობა 233
ქვეჯგუფი 413
ქვეჯგუფის წარმოქმნა ელემენტებით 434
" " ქვეჯგუფებით 427
შებრუნებული მატრიცი 99
შებრუნებული ოპერაცია 279
" ჩასმა 35
" წრფივი გარდაქმნა 212
შეუღლებული ალგებრული რიცხვები 371
" კომპლექსური რიცხვები 125
შტურმის თეორემა 256
" სისტემა 255
ჩასმა 32
ჩასმების ნამრავლი 34
ციკლი 36
ციკლის სიგრძე 36
ციკლური ქვეჯგუფი 414
" ჯგუფი 415
ძირითადი თეორემა აბელის სასრული ჯგუფების შესახებ 432
" " კვადრატული ფორმების შესახებ 176
" " რაციონალური წილადების შესახებ 168
" " სიმეტრიული მრავალწევრების შესახებ 334
" " წრფივი დამოკიდებულების შესახებ 70
წარმოსახვითი ერთეული 118
" ღერძი 118
წესიერი რაციონალური წილადი 168
წრის დაყოფის მრავალწევრი 366
წრფივ განტოლებათა განსაზღვრული სისტემა 16
" " დაყვანილი სისტემა 90
" " სისტემების ამოხსნის წესი 83
" " სისტემის ამონახსენი 16
" " " გაფართოებული მატრიცი 80
" " " დეტერმინანტი 56
" " " ზოგადი ამონახსენი 84
წრფივი განტოლება 15
" განტოლებების არათავსებადი სისტემა 16
წრფივი განტოლებების განუზღვრელი სისტემა 17
" " თავსებადი სისტემა 16
" " სისტემა 15
წრფივი გარდაქმნების ნამრავლი 206
" " ჯამი 206
" გარდაქმნის ბირთვი 211
" " დეფექტი 211
" " მარტივი სპექტრი 216

წრფივი გარდაქმნის მატრიცი 203
" " მახასიათებელი ფესვები 213
" " მინიმალური მრავალწევ-
რი 404
" " მნიშვნელობათა არე 210
" " რანგი 210
" " რიცხვზე ნამრავლი 206
" " სპექტრი 213
წრფივი ინტერპოლაციის მეთოდი 268
" სივრცე 191, 295
" სივრცეების იზომორფიზმი 194
" სივრცის განზომილება 197
" " ნულოვანი გარდაქმნა 201
" " წრფივი გარდაქმნა 201
" ფორმა 64
" ქვესივრცე 208
ხარისხოვანი ჯამები 342
ჯგუფების იზომორფიზმი 409
ჯგუფი 407
ჯგუფის დაშლა ქვეჯგუფის მიმართ 416
" ელემენტის ნულოვანი ხარისხი 414
" " რიგი 415
" " ტრანსფორმირება 420
" " უარყოფითი ხარისხები
414
" " ხარისხები 414
" ერთეული 408
" მარცხენა დაშლა ქვეჯგუფის მიმართ
417
" მარჯვენა დაშლა ქვეჯგუფის მიმართ
418
" ქვესიმრავლეთა ნამრავლი 417
" შეუღლებული ელემენტები 420
ჯგუფში შებრუნებული ელემენტი 408
ჰამილტონ-კელის თეორემა 404
ჰომომორფიზმი 423
ჰომომორფიზმის ბირთვი 423
ჰორნერის მეთოდი 150

სარჩევი

მეექვსე გამოცემის წინასიტყვაობა 5
შესავალი 5

თავი პირველი. წრფივ განტოლებათა სისტემები. დეტერმინანტები 15

§ 1. უცნობთა მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდი 15
§ 2. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები 23
§ 3. გადანაცვლებები და ჩასმები 28
§ 4. n-ური რიგის დეტერმინანტები. 37
§ 5. მინორები და მათი ალგებრული დამატებანი 44
§ 6. დეტერმინანტთა გამოთვლა 48
§ 7. კრამერის წესი 55

თავი მეორე. წრფივ განტოლებათა სისტემები (ზოგადი თეორია) 61

§ 8. n — განზომილებიანი ვექტორული სივრცე 61
§ 9. ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება 64
§ 10. მატრიცის რანგი 72
§ 11. წრფივ განტოლებათა სისტემები 80
§ 12. წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემები 85

თავი მესამე. მატრიცთა ალგებრა 91

§ 13. მატრიცთა გამრავლება 91
§ 14. შებრუნებული მატრიცი 97
§ 15. მატრიცების შეკრება და მატრიცის გამრავლება რიცხვზე 104
§ 16*. დეტერმინანთა თეორიის აქსიომატიკური აგება 108

თავი მეოთხე. კომპლექსური რიცხვები 113

§ 17. კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა 113
§ 18. კომპლექსური რიცხვების შემდგომი შესწავლა 118
§ 19. კომპლექსური რიცხვებიდან ფესვის ამოღება 126

თავი მეხუთე. მრავალწევრები და მათი ფესვები 135

§ 20. ოპერაციები მრავალწევრებზე 135
§ 21. გამყოფები. უდიდესი საერთო გამყოფი 141
§ 22. მრავალწევრთა ფესვები 149

§ 23. ძირითადი თეორემა 153
§ 24. ძირითადი თეორემის შედეგები 161
§ 25*. რაციონალური წილადები 167

თავი მეექვსე. კვადრატული ფორმები 172

§ 26. კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე 172
§ 27. ინერციის კანონი 180
§ 28. დადებითად განსაზღვრული ფორმები 185

თავი მეშვიდე. წრფივი სივრცეები 190

§ 29. წრფივი სივრცის განმარტება. იზომორფიზმი 190
§ 30. სასრულგანზომილებიანი სივრცეები. ბაზისები 194
§ 31. წრფივი გარდაქმნები 200
§ 32*. წრფივი ქვესივრცეები 208
§ 33. მახასიათებელი ფესვები და საკუთრივი მნიშვნელობები 212

თავი მერვე. ევკლიდური სივრცეები 218

§ 34. ევკლიდური სივრცის განმარტება. ორთონორმირებული ბაზისები . . 218
§ 35. ორთოგონალური მატრიცები, ორთოგონალური გარდაქმნები . . . 225
§ 36. სიმეტრიული გარდაქმნები 229
§ 37. კვადრატული ფორმის მთავარ ღერძებზე დაყვანა. ფორმათა წყვილები . 234

თავი მეცხრე. მრავალწევრთა ფესვების გამოთვლა 241

§ 38*. მეორე, მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებები 241
§ 39. ფესვების საზღვრები 249
§ 40. შტურმის თეორემა 255
§ 41. სხვა თეორემები ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის შესახებ 261
§ 42. ფესვთა მიახლოებითი გამოთვლა 267

თავი მეათე. ველები და მრავალწევრები 274

§ 43. რიცხვითი რგოლები და ველები 274
§ 44. რგოლი 278
§ 45. ველი 284
§ 46*. რგოლთა (ველთა) იზომორფიზმი, კომპლექსურ რიცხვთა ველის ერთადერთობა 290
§ 47. წრფივი ალგებრა და ნებისმიერ ველზე მრავალწევრთა ალგებრა . . 294
§ 48. მრავალწევრების დაშლა დაუყვანად მამრავლებად 299
§ 49*. ფესვის არსებობის თეორემა 306
§ 50*. რაციონალური წილადების ველი 315

თავი მეთერთმეტე. რამდენიმე ცვლადის მრავალწევრები 323

§ 51. რამდენიმე ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი 323
§ 52. სიმეტრიული მრავალწევრები 332
§ 53*. დამატებითი შენიშვნები სიმეტრიულ მრავალწევრებზე 339
§ 54*. რეზულტანტი. უცნობის გამორიცხვა. დისკრიმინანტი 345
§ 55*. კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრის ძირითადი თეორემის მეორე დამტკიცება 357

თავი მეთორმეტე. რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები 362

§ 56*. რაციონალურ რიცხვთა ველზე მრავალწევრთა დაყვანადობა . . . 362
§ 57*. მთელრიცხოვან მრავალწევრთა რაციონალური ფესვები 367
§ 58*. ალგებრული რიცხვები 371

თავი მეცამეტე. მატრიცის ნორმალური ფორმა 377
§ 59. λ-მატრიცთა ეკვივალენტობა 337
§ 60. უნიმოდულარული λ-მატრიცები. რიცხვითი მატრიცების მსგავსობის კავშირი მათი მახასიათებელი მატრიცების ეკვივალენტობასთან . . . 381
§ 61. ჟორდანის ნორმალური ფორმა 393
§ 62. მინიმალური მრავალწევრი 401

თავი მეთოთხმეტე. ჯგუფები 406
§ 63. განმარტება და ჯგუფების მაგალითები 406
§ 64. ქვეჯგუფები 413
§ 65. ნორმალური გამყოფები, ფაქტორ-ჯგუფები, ჰომომორფიზმები 419
§ 66. აბელის ჯგუფთა პირდაპირი ჯამები 425
§ 67. სასრული აბელის ჯგუფები 432

ლიტერატურის საძიებელი 441
საგნობრივი საძიებელი 443

რედაქტორი გ. ჭოლოშვილი

* *

მთარგმნელები:

ლ. რუხაძე — გ. ბერიშვილი
დ. ბალაძე — ხ. ინასარიძე

* * *

ტექრედაქტორი ნ. ბერიძე.

კორექტორი ე. ყვანია

კონტროლიორ-კორექტორი ა. სტურუა

გადაეცა წარმოებას 12/VI 61 წ.
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26/XII 61
ანაწყობის ზომა 7×11
ქაღალდის ზომა 70×108 1/16
საბეჭდ თაბახთა რაოდენობა 39,9
სააღრიცხვო-საგამომცემლო
თაბახთა რაოდენობა 29,17
ტირაჟი 2000
შეკვეთის № 807

ფასი 1 მან. 24 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობის სტამბა,
თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.
Типография Издательства ТГУ,
Тбилиси, проспект И. Чавчавадзе, 1.