ა. ჩახტაური

დიფერენციალური გეომეტრიის საფუძვლები

მესამე გადამუშავებული გამოცემა

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1976

517.4
513.73
ჩ 365

ამ წიგნის პირველ ნაწილში მოთავსებულია დიფერენციალური გეომეტრიის საუნივერსიტეტო კურსის საპროგრამო მასალა. მეორე ნაწილში — ტენზორულ-დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის, როგორც სახელმძღვანელო სათანადო სპეცკურსში.

გარდა ამისა, წიგნი (I ნაწილი) შეიცავს რამდენიმე ზოგად საგანმანათლებლო პარაგრაფს, სადაც მოყვანილია მოკლე მიმოხილვა გ. ნიკოლაძის ზოგიერთი შედეგისა (წირთა უწყვეტი სისტემების თეორიიდან) და ნ. ლობაჩევსკის გეომეტრიული იდეებისა.

Ч $\frac{20203}{\text{М } 608(08)—76}$ 5—76

წინასიტყვაობა

დიფერენციალური გეომეტრია მათემატიკური მეცნიერების ერთ-ერთი დიდი დარგია. მისი სხვადასხვა მიმართულებები იმდენად ვრცელია, რომ სრული აღრიცხვისათვის დიდ ტომებს საჭიროებს. ამიტომ დიფერენციალური გეომეტრიის საფუძვლების გასაცნობად საჭირო ხდება ძირითადი მასალის ამგვარად გამოყოფა, რომ იგი ხელმისაწვდომი იყოს როგორც მოცულობის, ისე აღრიცხვის მხრივ.

სააღრიცხვო მეთოდის მიხედვით დიფერენციალური გეომეტრია ორ ნაწილად იყოფა: 1. კლასიკური დიფერენციალური გეომეტრია, სადაც აღრიცხვის ძირითად დასაყრდენს წარმოადგენს ჩვეულებრივი დიფერენციალური აღრიცხვა და 2. ტენზორული დიფერენციალური გეომეტრია, სადაც აღრიცხვის ძირითადი დასაყრდენია აბსოლუტური დიფერენციალური აღრიცხვა.

ამ წიგნში მოცემულია ამ ორი ნაწილის ელემენტები იმის გათვალისწინებით, რომ იგი გამოდგეს როგორც სახელმძღვანელო უნივერსიტეტში დიფერენციალური გეომეტრიის (II კურსზე) და ფართეულთა თეორიის (V კურსზე) კურსებისათვის. აქ მასალის დალაგება ისეთივეა, როგორც მეორე გამოცემაში (იხ. დიფერენციალური გეომეტრიის საფუძვლები, 1961 წ.). ზოგიერთმა პარაგრაფმა განიცადა ცვლილებები, დაემატა რამდენიმე პარაგრაფი თეორიული მასალიდან და სავარჯიშო მაგალითები, რომელთა საჭიროება გამომჟღავნებულ იქნა კურსის კითხვის დროს.

ა. ჩახტაური

შესავალი

ელემენტარულ გეომეტრიაში განიხილება მარტივი გეომეტრიული ნაკვთები (ფიგურები), რომელთა თვისებები უშუალო თვალსაჩინოების საფუძველზე ირკვევა. ანალიზურ გეომეტრიაში კვლევის არე უფრო ფართოა, ვიდრე ელემენტარულ გეომეტრიაში, მაგრამ აქაც შედარებით მარტივი ნაკვთები განიხილება: წრფე და სიბრტყე, მეორე რიგის წირები და მეორე რიგის ზედაპირები; ყველა ეს დაკავშირებულია მარტივ ალგებრულ განტოლებებთან, — პირველი და მეორე ხარისხის განტოლებებთან.

ნებისმიერი გეომეტრიული ნაკვთი, რომელიც დაკავშირებულია რაიმე (არა მაინცადამაინც პირველი და მეორე ხარისხის) საკმაოდ რთულ განტოლებასთან, არ შეისწავლება არც ელემენტარულ და არც ანალიზურ გეომეტრიაში. საზოგადოდ კი გეომეტრიულ ნაკვთს იმდენად ღრმა თვისებები ახასიათებს, რომ უშუალო ინტუიცია და თვალსაჩინოების პრინციპი ამ შემთხვევაში კვლევის სუსტ საშუალებას წარმოადგენს. ნაკვთთან დაკავშირებულ განტოლებათა სირთულის გამო, სასრულო ალგებრული ოპერაციები ძნელადსაწარმოებელი და ხშირად უნაყოფოცაა. ამ შემთხვევაში გაცილებით უფრო მძლავრ საშუალებას წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის მეთოდები.

სწორედ ამ ნიადაგზე აიგება გეომეტრიის ის დარგი, რომელიც სისტემატურად იყენებს მათემატიკური ანალიზის ძირითად მეთოდებს და რომელსაც დიფერენციალური გეომეტრია ეწოდება. მისი ძირითადი დანიშნულება ასეთია: იგი შეისწავლის ნაკვთის თვისებებს ამ ნაკვთის ნებისმიერი წერტილის უსასრულო მახლობლობაში.

რადგან ნაკვთის შესწავლის დროს მის უსასრულო მცირე ნაწილებთან გვაქვს საქმე, ამიტომ ძირითადი საანგარიშო აპარატი უსასრულოდ მცირეთა ანალიზი (დიფერენციალური აღრიცხვა) არის. ამიტომ ბუნებრივია, რომ დიფერენციალურ გეომეტრიაში განსახილავ ნაკვთთან დაკავშირებული ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდეს საჭირო ანალიზურ პირობებს, მაგალითად, წარმოებადი უნდა იყოს გარკვეულ რიგამდე.

პირველად დიფერენციალური გეომეტრიის საკითხები დიფერენციალურ აღრიცხვასთან ერთად მუშავდებოდა, მაგრამ, როდესაც ეს საკითხები საკმაოდ დაგროვდა, მაშინ საჭირო შეიქნა მათი ცალკე მეცნიერული დისციპლინის სახით ჩამოყალიბება. პირველი ძირითადი თხზულება დიფერენციალურ გეომეტრიაში დაწერა სახელგანთქმულმა ფრანგმა მეცნიერმა და საზოგადო მოღვაწემ გ. მ ო ნ ჟ მ ა (1746—1818) XVIII ს. ბოლოს, საფრანგეთის დიდი რევოლუციის წლებში. მიუხედავად იმისა, რომ მონჟის თხზულება შესანიშნავად აგებულ და მეტად ვრცელ

მასალას შეიცავდა, იგი მაინც მხოლოდ პირველ ნაბიჯს წარმოადგენდა დიფერენციალური გეომეტრიის დაფუძნების საქმეში. კლასიკური დიფერენციალური გეომეტრიის საფუძველი შექმნილია გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსის კ. გაუსის (1777—1855) მიერ. 1827 წელს მან გამოაქვეყნა შრომა „მრუდი ზედაპირების ზოგადი გამოკვლევა", რომელიც საფუძვლად უდევს თანამედროვე დიფერენციალურ გეომეტრიას. ზედაპირთა თეორიის განვითარებას განსაკუთრებით შეუწყო ხელი არაევკლიდური გეომეტრიის შექმნამ (რომელშიაც უმთავრესი როლი შეასრულა დიდმა რუსმა მათემატიკოსმა ნ. ი. ლობაჩევსკიმ 1793—1856), კერძოდ ამ გეომეტრიის კავშირმა ზედაპირთა შინაგან გეომეტრიასთან. ამასთან დაკავშირებით შეიქმნა მუდმივსიმრუდიან ზედაპირთა შინაგანი გეომეტრიის მწყობრი თეორია. ყველაფერი ეს შეადგენს ე. წ. კლასიკურ დიფერენციალურ გეომეტრიას, რომლის ძირითადი საკითხები აღრიცხულია წინამდებარე სახელმძღვანელოს პირველ ნაწილში.

1854 წელს ცნობილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა ბ. რიმანმა (1824—1866), გაუსის იდეებზე დაყრდნობით, მოახდინა სივრცის ცნების განზოგადება ისე, რომ ორი განზომილების შემთხვევაში ეს ახალი სივრცე ემთხვეოდა ზედაპირის შინაგან გეომეტრიას. რიმანის შრომამ მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა ფარდობითობის თეორიის ჩამოყალიბებაშიც. რიმანის სივრცის დამუშავებისათვის წარმოშობილი ტენზორთა ანალიზი წარმატებით იქნა გამოყენებული ზედაპირთა თეორიაში და მან მნიშვნელოვანი შედეგები მოგვცა. ამ საფუძველზე წარმოიშვა ე. წ. ტენზორულ-დიფერენციალური გეომეტრია, რომლის ძირითადი საკითხებისადმია მიძღვნილი ამ სახელმძღვანელოს მეორე ნაწილი.

ნაწილი I

კლასიკური დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები

თავი I

ბრტყელი წირის დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები

§ 1. ბრტყელი წირის სხვადასხვა სახის განტოლებები

ბრტყელი წირი ეწოდება ისეთ წირს ანუ მრუდს, რომელიც ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული, ე. ი. რომლის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს. ამ სიბრტყეს წირის სიბრტყე ეწოდება.

ბრტყელი წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის უმჯობესია დეკარტის კოორდინატთა Oxy სისტემა თვით წირის სიბრტყეში ავიღოთ. წირის ყოველი წერტილი, ამ სისტემის მიმართ, განისაზღვრება რიცხვთა წყვილით, დეკარტის x, y კოორდინატებით. ჩვენ განვიხილავთ ისეთ წირებს, რომლებისთვისაც დამახასიათებელი იქნება რაიმე ფუნქციონალური დამოკიდებულების არსებობა მის წერტილთა x და y კოორდინატებს შორის

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

ე. ი. აქ ბრტყელი წირი წარმოგვიდგება როგორც სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) სახის განტოლებას. გარდა ამისა, F ფუნქციისაგან მოვითხოვთ, რომ მან (და სხვა განსახილავმა ფუნქციებმაც) დააკმაყოფილოს გარკვეული სასურველი პირობები. (1) განტოლებას ეწოდება წირის ზ ო გ ა დ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა.

თუ ამოვხსნით (1) განტოლებას y-ის მიმართ (იგულისხმება, რომ ასეთი შესაძლებლობა არსებობს), მივიღებთ:

$$y=f(x). \tag{2}$$

ამ განტოლებას წირის ც ხ ა დ ი ს ა ხ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ეწოდება.

შესაძლებელია კიდევ x და y-ის შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება დამყარდეს მესამე (შუამავალი) ცვლადის საშუალებით; მართლაც განტოლებები

$$\begin{aligned} x&=\varphi(t), \\ y&=\psi(t) \end{aligned} \tag{3}$$

t პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად მოგვცემს (1) სახის განტოლებას. (3) განტოლებათა სისტემას წირის პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ეწოდება. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ წირის დიფერენციალური გეომეტრიის შესასწავლად პარამეტრის გამორიცხვა არ არის აუცილებელი.

წირის გამოკვლევის დროს ჩვენ შეგვიძლია თავისუფლად ამოვარჩიოთ წირის რომელიმე, ჩვენთვის ხელსაყრელი, ანალიზური მოცემულობა ზემომოყვანილ სამი სახის ანალიზურ მოცემულობათაგან (განტოლებათაგან). ამის საშუალებას გვაძლევს მეტად მარტივი დამოკიდებულება აღნიშნული სამი სახის განტოლებათა შორის. მართლაც, (1) სახის განტოლებიდან (2) სახის განტოლებაზე გადასასვლელად y უნდა ამოვხსნათ. (2) სახის განტოლებიდან (1) სახეზე გადასასვლელად საკმარისია განტოლების ყველა წევრი გადავიტანოთ მარცხნივ, გვექნება:

$$y-f(x)=0.$$

ეს კი პირველი სახის განტოლებაა, სადაც

$$y-f(x)\equiv F(x, y).$$

(3) სახის განტოლებიდან (1) სახეზე გადასასვლელად საკმარისია გამოვრიცხოთ პარამეტრი. საბოლოოდ, (2) სახის განტოლებიდან (3) სახის განტოლებაზე გადასასვლელად, x უნდა განვიხილოთ t პარამეტრის რაიმე ფუნქციად. მაგალითად, საკმარისია თვით x განვიხილოთ პარამეტრად $x=t$; გვექნება:

$$x=t,$$
$$y=f(t).$$

შესაძლებელია ბრტყელი წირის განტოლება მოცემული იყოს კიდევ პოლარ-კოორდინატებში

$$F(\vartheta, r)=0. \tag{4}$$

პოლარ-კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა და პირუკუ, როგორც ანალიზური გეომეტრიიდანაა ცნობილი, შემდეგი ფორმულების საშუალებით ხდება:

$$x=r\cos\vartheta,$$
$$y=r\sin\vartheta.$$

მაგალითები: 1. ე ლ ი ფ ს ი. განვიხილოთ წირი, რომელიც მოცემულია შემდეგი პარამეტრული განტოლებით:

$$x=a\cos t,$$
$$y=b\sin t$$

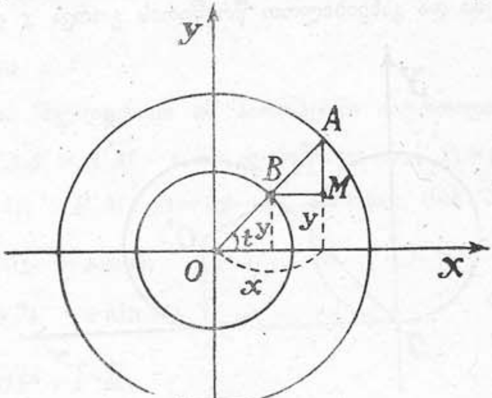
და მოვნახოთ ამ წირის ზოგადი განტოლება. ამისათვის პირველი ტოლობა გავყოთ a-ზე, მეორე b-ზე, ორივე ავამაღლოთ კვადრატში და შევკრიბოთ; მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ამრიგად, მოცემული პარამეტრული განტოლებით განზღვრული წირი ყოფილა ელიფსი. შესაძლებელია ვიფიქროთ, რომ აღებულ ტოლობათა კვადრატში ამაღლება წირს ცვლის და ისე ვღებულობთ ელიფსს. თუ დავუკვირდებით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ კვადრატში ამაღლებით (x, y) წერტილს ემატება $(-x, y)$,

$(x, -y)$ და $(-x, -y)$ წერტილები; მაგრამ ამ შემთხვევაში ეს წერტილები პარამეტრული განტოლებით განსაზღვრულ წირს თავისთავადაც ეკუთვნის, რადგან ისინი მიიღებიან პარამეტრის $\pi-t$, $2\pi-t$ და $\pi+t$ მნიშვნელობათა შესაბამისად. ამრიგად, მოცემული პარამეტრული განტოლებით განსაზღვრული წირი ნამდვილად ელიფსია.

ამ შემთხვევაში t პარამეტრს მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა შეიძლება მიეცეს. კოორდინატთა სათავის გარს შემოვხაზოთ a და b-რადიუსიანი წრეწირები. გავატაროთ კოორდინატთა სათავეზე ნებისმიერი წრფე ორივე წრეწირის თანაკვეთამდე. ამ წრფის მიერ შედგენილი კუთხე x ღერძთან აღვნიშნოთ t-თი, წრეწირებთან თანაკვეთის წერტილები კი A და B-თი. A და B წერტილებზე გავატაროთ შესაბამისად y-ისა და x-ის პარალელური წრფეები. ამ უკანასკნელ წრფეთა თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ $M(x, y)$-ით (ნახ. 1). ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

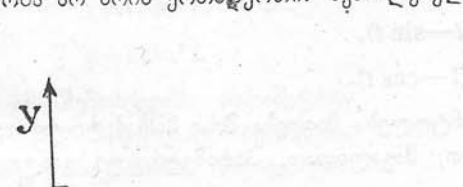


ნახ. 1

$$x=a\cos t,$$
$$y=b\sin t,$$

ე. ი. M წერტილი მდებარეობს ელიფსზე.

უნდა აღინიშნოს, რომ t პარამეტრის აქ მიღებული გეომეტრიული მნიშვნელობა არ არის ერთადერთი. შესაძლებელია იმავე პარამეტრს სხვა გეომეტრიული მნიშვნელობაც ჰქონდეს. ამის დასადასტურებლად განვიხილოთ AB ($|AB|=a+b$) ღერო, რომელიც ბოლო წერტილებით მოძრაობს (ცოცავს) კოორდინატთა ღერძებზე და განვსაზღვროთ ღეროზე აღებულ რაიმე M წერტილის ($AM=b$, $BM=a$) მიერ ღეროს მოძრაობის დროს აღწერილი წირი. AB ღეროს მიერ შედგენილი კუთხე x ღერძთან აღვნიშნოთ t-თი, ხოლო M წერტილის კოორდინატები x, y-ით (ნახ. 2). ადვილი დასამტკიცებელია, რომ



ნახ. 2

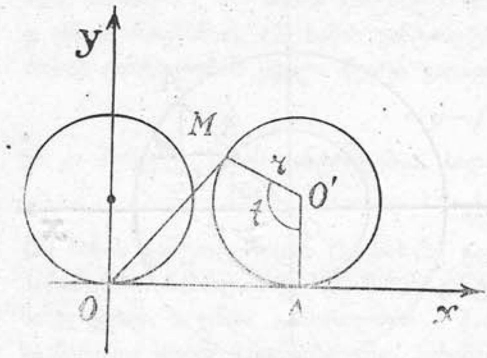
$$x=a\cos t,$$
$$y=b\sin t.$$

ამრიგად, მივიღეთ იგივე პარამეტრული განტოლება, ე. ი. ელიფსის განტოლება.

შენიშვნა. AB ღეროს მოძრაობა, რომელიც მისი ბოლოების კოორდინატთა ღერძებზე ცოცვითაა გამოწვეული, შესაძლებელია განხორციელებულ იქნეს მრუდხარული მექანიზმით. მაშინ M წერტილში დამაგრებული ფანქრის წვერი (ან რაიმე სხვა საწერი საშუალება) ღეროს მოძრაობის დროს აღწერს ელიფსს. ასეთ მრუდხარულ მექანიზმს ელიფსოგრაფს უწოდებენ.

2. ციკლოიდი. ციკლოიდი ეწოდება წრეწირის წრფეზე უსრიალოდ გორვის დროს ამ წრეწირის რაიმე წერტილის მიერ აღწერილ წირს.

განსახილავი წერტილის საწყისი მდებარეობა ავიღოთ კოორდინატთა სათავეში და განვიხილოთ წრეწირის გორვა x ღერძის გასწვრივ. შევადგინოთ ამ პირობებში ციკლოიდის პარამეტრული განტოლება. უსრიალოდ გორვის განმარტების თანახმად, წრეწირის ცენტრის მიერ განვლილი მანძილი, რომელიც უდრის OA-ს, ტოლი იქნება გადაგორებული $\overset{\frown}{AM}$ რკალისა, ე. ი. $OA=\overset{\frown}{AM}=s$. თუ აღვნიშნავთ $(\hat{O'A}, O'M)=t$, მაშინ $s=rt$. განვიხილოთ ვექტორები $\overline{OA}$, $\overline{AO'}$, $\overline{O'M}$. შეგვიძლია დავწეროთ (ნახ. 3)



ნახ. 3

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AO'}+\overline{O'M}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა კოორდინატთა ღერძებზე. რადგან

$$\overline{O'A}=(s, 0),\ \overline{AO'}=(O,\ r),\ \overline{O'M}=(-r\sin t,\ -r\cos t),$$

ხოლო $s=rt$, ამიტომ ვიღებთ

$$x=r(t-\sin t),$$
$$y=r(1-\cos t).$$

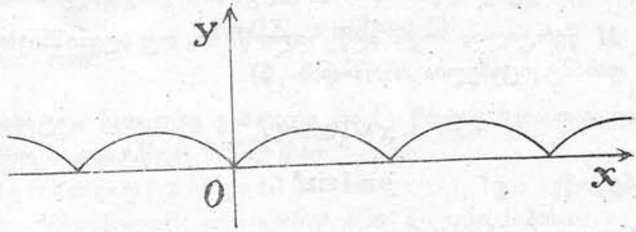
ციკლოიდის არაპარამეტრული განტოლება მიიღება მისი პარამეტრული განტოლებიდან t პარამეტრის გამორიცხვით; მაგალითად, პარამეტრული განტოლების მეორე ტოლობიდან გვექნება:

$$t=\arccos\left(1-\frac{y}{r}\right).$$

ამ მნიშვნელობის შეტანა პირველ ტოლობაში t-ს ნაცვლად მოგვცემს არაპარამეტრულ განტოლებას.

ციკლოიდის ფორმაზე წარმოდგენა შეგვიძლია ვიქონიოთ თვით მისი წარმომშობი პირობების მიხედვით. ეს წირი პერიოდულად აღწევს უმაღლეს წერტილებს: $((2k+1)\pi r, 2r)$ და პერიოდულად ეშვება x ღერძამდე $(2k\pi, 0)$ წერტილებში, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ციკლოიდს დაახლოებით მე-4 ნახაზზე გამოყვანილი სახე აქვს (ნახ. 4).

3. ასტროიდი. ასტროიდი ეწოდება r-რადიუსიანი წრეწირის რაიმე წერტილის მიერ აღწერილ წირს, ამ წრეწირის $4r$-რადიუსიან უძრავ წრეწირზე შიგნიდან გორვის დროს. უძრავი წრეწირის ცენტრში ავიღოთ კოორდინატთა სათავე, ხოლო განსახილველი მოძრავი წერტილის საწყისი მდებარეობა —უძრავი წრეწირის



ნახ. 4

x ღერძთან თანაკვეთის A წერტილში. შევადგინოთ ამ პირობებში ასტროიდის განტოლება. უსრიალოდ გორვის გამო $\overset{\frown}{AA'}=\overset{\frown}{A'M}=s$, თუ აღვნიშნავთ $(\widehat{OA',x})=t$, მაშინ $s=4rt$; ამიტომ $(\widehat{A'P', P'M})=4t$, $(\widehat{P'M, x})=2\pi-3t$. ამრიგად, (ნახ. 5)

$$\overline{OP'}=(3r\cos t,\ 3r\sin t),$$

$$\overline{P'M}=(r\cos 3t,\ -r\sin 3t).$$

რადგან

$$\overline{OM}=\overline{OP'}+\overline{P'M},$$

ამიტომ ამ ტოლობის დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$x=3r\cos t+r\cos 3t,$$

$$y=3r\sin t-r\sin 3t.$$

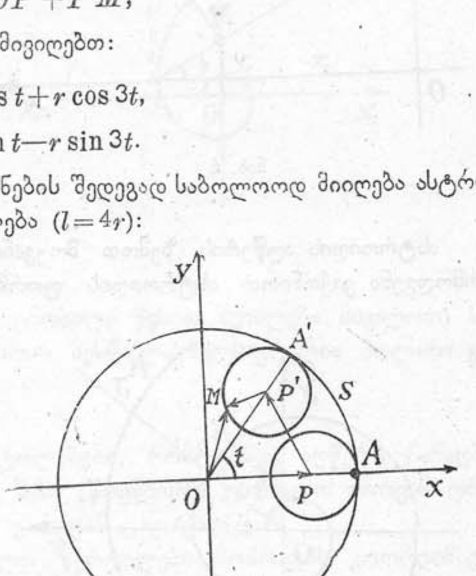
უბრალო ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების შედეგად საბოლოოდ მიიღება ასტროიდის ცნობილი პარამეტრული განტოლება ($l=4r$):

$$x=l\cos^3 t,$$

$$y=l\sin^3 t.$$

ამ შემთხვევაში პარამეტრის გამორიცხვა ადვილად ხერხდება. ამისათვის საკმარისია ორივე ტოლობა ავამაღლოთ 2/3 ხარისხში და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}.$$



ნახ 5

ადვილი მისახვედრია, რომ ამ გამორიცხვის შედეგად პარამეტრული განტოლებით განსაზღვრულ წირს, ე. ი. ასტროიდს სხვა წერტილები არ დაემატება; მაშასადამე, უკანასკნელი განტოლება იქნება ასტროიდის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში არაპარამეტრული სახით.

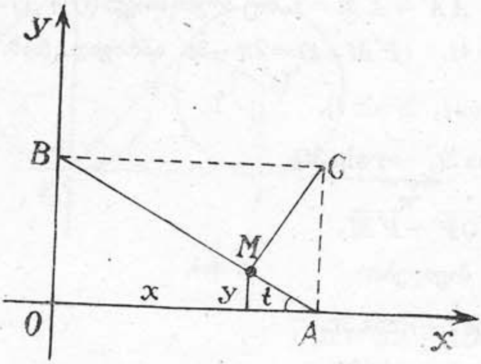
ასტროიდი შესაძლებელია განსაზღვრულ იქნეს კიდევ სხვა მარტივი გეომეტრიული პირობებით: განვიხილოთ l-სიგრძიანი AB ღერო, რომლის ბოლო წერტილები მოძრაობს (ცოცავს) კოორდინატთა ღერძებზე. $OABC$ სწორკუთხე-

დების C წვეროდან AB ღეროზე დავუშვათ მართობი ღეროს ყოველი მდებარეობისათვის. მართობის ფუძე აღვნიშნოთ $M(x, y)$-ით. განვსაზღვროთ ღეროს მოძრაობის დროს M წერტილის მიერ აღწერილი წირი. თუ აღვნიშნავთ $(\widehat{AB}, x)=t$, მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ (ნახ. 6)

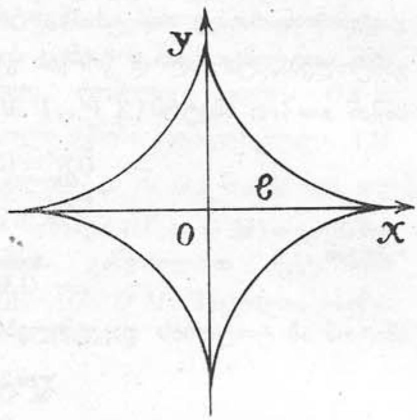
$$x=l\cos^3 t,$$

$$y=l\sin^3 t,$$

ე. ი. M წერტილი აღწერს ასტროიდს.

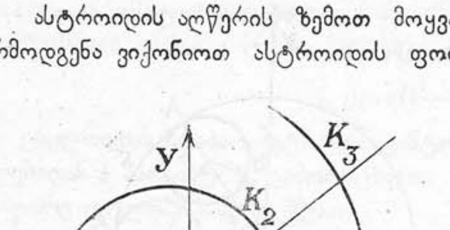


ნახ. 6



ნახ. 7

ასტროიდის აღწერის ზემოთ მოყვანილი ორივე წესი საშუალებას იძლევა წარმოდგენა ვიქონიოთ ასტროიდის ფორმაზე. იგი დაახლოებით მე-7 ნახაზზე მოყვანილი სახით წარმოგვიდგება.



ნახ. 8

4. **არქიმედის ხვია.** არქიმედის ხვია ეწოდება ისეთ წირს, რომლის განტოლება პოლარ-კოორდინატებში არის წრფივი განტოლება:

$$r=a\vartheta+b.$$

როცა $\vartheta=0$, მაშინ $r=b$. თუ პოლარ კოორდინატთა სათავეს გადავიტანთ $(0, b)$ წერტილში, არქიმედის ხვიის განტოლება მიიღებს ე. წ. კანონიკურ სახეს

$$r=a\vartheta.$$

ϑ კუთხის ზრდასთან ერთად r პოლარი რადიუსი იზრდება, ე. ი. პოლარი რადიუსის ბრუნვასთან ერთად ხვიის მდინარე წერტილი შორდება სათავეს და ხდება წირის ხვევა კოორდინატთა სათავის გარს (იხ. ნახ. 8). კოორდინატთა სათავეზე გამავალი რაიმე რადიუსი ხვიას

გადაკვეთს უამრავ K_s წერტილებში, რომელთა პოლარი რადიუსი ასე გამოისახება:

$$r_s = OK_s = a(2\pi s + \vartheta).$$

აქედან აშკარაა, რომ

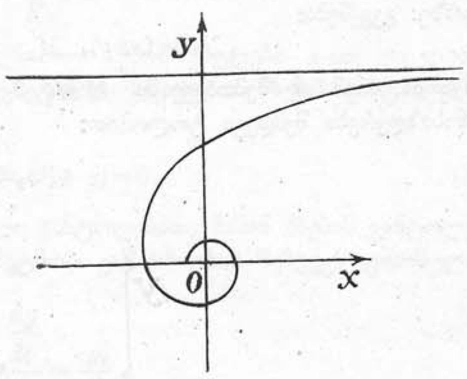
$$r_{s+1} - r_s = 2a\pi,$$

ე. ი. კოორდინატთა სათავეზე გამავალი რაიმე წრფის ხვიასთან თანაკვეთის წერტილები ამ წრფეს თანასწორ ნაწილებად ჰყოფენ.

5. ჰიპერბოლური ხვია. ჰიპერბოლური ხვია ეწოდება ისეთ წირს, რომლის განტოლება პოლარ კოორდინატებში შემდეგი სახისაა:

$$r = \frac{a}{\vartheta}.$$

როცა $\vartheta \to 0$, მაშინ $r \to \infty$, ხოლო როცა $\vartheta \to \infty$, მაშინ $r \to 0$. ამრიგად, წირის დახვევა ხდება სათავის გარს, ოღონდ წირის წერტილი ვერ მიაღწევს მას, იგი მხოლოდ ასიმპტოტურად უახლოვდება სათავეს. წირს აქვს დაახლოებით მე-9 ნახაზზე მოყვანილი სახე (ნახ. 9).



ნახ. 9

6. ლოგარითმული ხვია. ლოგარითმული ხვია ეწოდება ისეთ წირს, რომლის განტოლება პოლარ კოორდინატებში შემდეგი სახისაა:

$$r = ae^{b\vartheta},$$

სადაც a და b მუდმივებია.

სამივე ხვიის აქ მოყვანილი განტოლებები მეტად მარტივია; ხოლო ამავე წირთა განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში (რომლებიც ცნობილი წესით შეიძლება მივიღოთ) საკმაოდ რთულია. ამიტომ აღნიშნულ წირთა შესწავლა ხელსაყრელია პოლარი განტოლების საშუალებით.

ამოცანები:

1. საძიებელია იმ წირების განტოლებები, რომლებსაც აღწერს r-რადიუსიანი წრეწირის რომელიმე წერტილი, მისი (წრეწირის) უსრიალო გორვის დროს R-რადიუსიან წრეწირზე შიგნიდან და გარედან ცალ-ცალკე.

2. l-სიგრძიანი AB ღეროს ბოლო წერტილები მოძრაობს კოორდინატთა ღერძებზე. კოორდინატთა სათავიდან ვატარებთ მართობს ღეროს ყოველი მდებარეობისათვის (სხვანაირად, განიხილება კოორდინატთა სათავის მართობული გეგმილი ღეროზე, მისი ყოველი მდებარეობისათვის). საძიებელია ამ მართობთა ფუძეების (ე. ი. კოორდინატთა სათავის ღეროზე გეგმილების) გეომეტრიული ადგილის (წირის) განტოლება.

§ 2. წირის მხები და ნორმალი

წირის განსახილავ წერტილთან დაკავშირებულია სხვადასხვა მარტივი გეომეტრიული ცნებები. ამათგან პირველ რიგში განიხილება მხები წრფე, რომელიც შემდეგი განმარტებით არის განსაზღვრული.

განმარტება I. წირის M წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფის ზღვრულ წრფეს, როცა მეორე M_1 თანაკვეთის წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, ეწოდება წირის მხები წრფე (ან, მოკლედ, მხები), M წერტილში. M წერტილს ხების (შეხების) წერტილი ეწოდება.

ცხადია, რომ მხები M წერტილზე გაივლის. ამიტომ მისი განსაზღვრისათვის საკმარისია, რომ მისი მიმართულება გავიგოთ. ამისათვის კი საჭიროა გამოვთვალოთ მხების საკუთხო კოეფიციენტი $\operatorname{tg}\alpha$ (სადაც α მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხეა). ეს უკანასკნელი იქნება მკვეთის საკუთხო კოეფიციენტის ზღვარი. თუ მკვეთი x ღერძთან ადგენს α_1 კუთხეს, მაშინ მისი საკუთხო კოეფიციენტი იქნება $\operatorname{tg}\alpha_1$ და, თანახმად ზემომოყვანილი დასკვნისა, გვექნება:

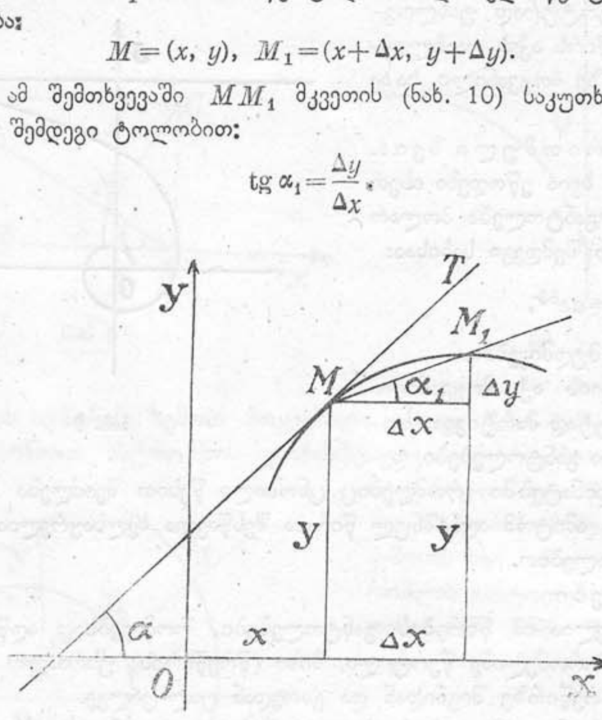
$$\operatorname{tg}\alpha=\lim \operatorname{tg}\alpha_1.$$

დავუშვათ, რომ M_1 არის M წერტილის მახლობელი წერტილი განსახილავ წირზე. გვექნება:

$$M=(x,\ y),\ \ M_1=(x+\Delta x,\ y+\Delta y).$$

აშკარაა, რომ ამ შემთხვევაში MM_1 მკვეთის (ნახ. 10) საკუთხო კოეფიციენტი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



ნახ. 10

ამრიგად, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

რადგან

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'.$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}\alpha=y'. \tag{5}$$

აქედან ჩანს, რომ მხების საკუთხო კოეფიციენტი y-ის წარმოებულია x-ის მიმართ. ამაში მდგომარეობს ფუნქციის წარმოებულის გეო-

მეტრიული მნიშვნელობა, რაც დიფერენციალური აღრიცხვიდანაც არის ცნობილი. ამრიგად, მხები წარმოადგენს M წერტილზე გამავალ წრფეს y' საკუთხო კოეფიციენტით; ამიტომ მისი განტოლება ასე დაიწერება:

$$Y-y=y'(X-x), \tag{6}$$

სადაც X, Y მხების მიმდინარე კოორდინატებია, x, y—ხების წერტილის კოორდინატები, ხოლო y' არის y-ის წარმოებული (გამოთვლილი ხების წერტილზე).

თუ წირის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით, ე. ი.

$$F(x, y)=0,$$

მაშინ მხების განტოლების მისაღებად საკმარისია ამ უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვითვალოთ y' უცხადო ფუნქციის გაწარმოების წესით და ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (6) ფორმულაში. თანახმად უცხადო ფუნქციის გაწარმოებისა, გვექნება:

$$y'=-\frac{F_x}{F_y},$$

სადაც F_x, F_y არის F ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულები x-ით და y-ით. (6) ფორმულაში y'-ის მნიშვნელობის შეტანით მივიღებთ მხების განტოლებას წირის ზოგადი განტოლებისათვის

$$F_x(X-x)+F_y(Y-y)=0. \tag{7}$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული განტოლებით, მაშინ მხების განტოლების მისაღებად უნდა გამოვიყენოთ პარამეტრით გაწარმოების შემდეგი ფორმულა:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y_t'}{x_t'}.$$

(6) ფორმულაში y'-ის მნიშვნელობის შეტანით მივიღებთ:

$$\frac{X-x}{x_t'}=\frac{Y-y}{y_t'}.$$

ამ განტოლებას ხშირად ასე წერენ:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}, \tag{8}$$

სადაც უნდა გვახსოვდეს რომ, გაწარმოება მიმდინარეობს პარამეტრის მიხედვით (ე. ი. x', y' წარმოებულებია t-ს მიმართ). იგულისხმება, რომ x_t' და y_t' წარმოებულები განსახილავ წერტილზე (ე. ი. პარამეტრის განსახილავი მნიშვნელობისათვის) ერთდროულად ნული არ არის ან $\frac{y_t'}{x_t'}$ შეფარდებას აქვს ზღვარი.

წირის წერტილთან, მხები წრფის გარდა, დაკავშირებულია კიდევ მეორე წრფე, რომელსაც წირის ნორმალი ეწოდება. იგი ასე განიმარტება:

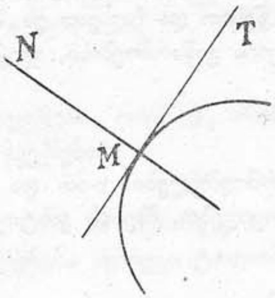
განმარტება II. წირის M წერტილზე გამავალი მხების მართობ წრფეს ეწოდება წირის ნორმალი M წერტილში.

ვინაიდან y' არის მხების საკუთხო კოეფიციენტი, ამიტომ ნორმალის საკუთხო კოეფიციენტი (თანახმად მართობულობის პირობისა) იქნება $-\frac{1}{y'}$. ამრიგად, ნორმალის განტოლება ასე დაიწერება:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x), \tag{9}$$

სადაც X, Y ნორმალის მიმდინარე კოორდინატებია.

წირის ზოგადი განტოლების და პარამეტრული განტოლების შესაბამისი ნორმალის განტოლებას მივიღებთ (9) განტოლებიდან თუ იქ y'-ის ნაცვლად შევიტანთ მის სათანადო მნიშვნელობებს, როგორც ეს მოვახდინეთ მხების განტოლების შემთხვევაში. მხებისა და ნორმალის განლაგების სურათი ნაჩვენებია მე-11 ნახაზზე (T მხებია, N — ნორმალი).



ნახ. 11

მაგალითები: 1. განვსაზღვროთ *წრფის* მხები მის რომელიმე წერტილში. რადგან წრფის M წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფე, რომელსაც წრფესთან აქვს მეორე თანაკვეთის წერტილი, თვით აღებული წრფეა, ამიტომ მისი ზღვარიც, როცა თანაკვეთის მეორე წერტილი M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, იქნება თვით აღებული წრფე. ამგვარად, წრფის მხები მის ყოველ წერტილში არის თვით აღებული წრფე, ანუ წრფე თავისთავის მხებია ყოველ მის წერტილში. პირუკუ, თუ წირს ყოველ წერტილში აქვს ერთი და იგივე მხები, მაშინ ეს წირი წრფე იქნება.

წრფის შესახებ მიღებული დასკვნა ადვილად მტკიცდება ანალიზური გამოთვლებითაც. წრფის განტოლება შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$y=kx+b.$$

აქედან

$$y'=k.$$

ამრიგად, მხების საკუთხო კოეფიციენტია k, ე. ი. თვით აღებული წრფის საკუთხო კოეფიციენტი. ამრიგად, მხები პარალელურია აღებული წრფისა; მაგრამ რადგან ეს უკანასკნელიც გადის M წერტილზე, ამიტომ მხები თვით აღებული წრფე იქნება.

2. გამოვიყვანოთ მეორე რიგის წირთა მხები წრფეების განტოლებები. ჯერ განვიხილოთ კანონიკური განტოლებით აღებული ელიფსი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

აშკარაა, რომ ეს განტოლება (1) სახისაა; ამ შემთხვევაში

$$F\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1.$$

აქედან ვპოულობთ:

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\quad F_y=\frac{2y}{b^2}.$$

(7) ფორმულაში ამ მნიშვნელობათა ჩასმა მოგვცემს

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)=0.$$

აქედან გამარტივებით მივიღებთ

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

მაგრამ, თანახმად ელიფსის განტოლებისა,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ამიტომ ელიფსის მხების განტოლება საბოლოოდ ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

ანალოგიურად მიიღება ჰიპერბოლის მხების განტოლება; მას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}=1.$$

განვიხილოთ ახლა პარაბოლის კანონიკური განტოლება

$$y^2=2px.$$

ამ შემთხვევაში

$$F\equiv 2px-y^2;$$

აქედან ვღებულობთ:

$$F_x=2p,\ F_y=-2y.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (7) ფორმულაში; გვექნება

$$p(X-x)-y(Y-y)=0.$$

გამარტივება მოგვცემს

$$yY=px-px+y^2.$$

თუ აქ ჩავსვამთ პარაბოლის განტოლებიდან მიღებულ y^2-ის მნიშვნელობას

$$y^2=2px,$$

მივიღებთ საბოლოოდ

$$yY=p(X+x).$$

წრეწირის მხების განტოლება მიიღება ელიფსის მხების განტოლებიდან, თუ იქ ჩავსვამთ

$$a=b=r,$$

გვექნება

$$xX+yY=r^2.$$

ამ განტოლების მიხედვით ნორმალის საკუთხო კოეფიციენტი იქნება $\frac{y}{x}$; მაგრამ ეს უკანასკნელი წრეწირის რადიუსვექტორის საკუთხო კოეფიციენტია. ამრიგად, წრეწირის ნორმალები წრეწირის ცენტრზე გადიან. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ, პირუკუ, წირი, რომლის ნორმალები ერთ წერტილზე გადიან, მხოლოდ წრეწირია. მართლაც ზოგადობის შეუმცირებლად შეგვიძლია მივიღოთ, რომ ნორმალები

კოორდინატთა სათავეზე გადიან; მაშინ ნორმალის საკუთხო კოეფიციენტი იქნება $\frac{y}{x}$, ხოლო მხებისა კი $-\frac{x}{y}$. ამრიგად, წირის ყოველი წერტილისათვის გვექნება:

$$y'=-\frac{x}{y};$$

აქედან

$$yy'=-x,$$

ანუ

$$(y^2)'=-(x^2)'.$$

ინტეგრებით მივიღებთ

$$x^2+y^2=\text{const}.$$

ეს უკანასკნელი კი წრეწირის განტოლებაა.

3. **განვიხილოთ წირის განტოლება პოლარ კოორდინატებში**

$$F(\vartheta, r)=0$$

და შევადგინოთ მხები წრფის განტოლება. ამისათვის გამოვიყენოთ დეკარტის კოორდინატებისა და პოლარი კოორდინატების დამაკავშირებელი ფორმულები:

$$x=r\cos\vartheta,$$

$$y=r\sin\vartheta.$$

რადგან r ფუნქციაა ϑ-სი (ეს ფუნქცია განისაზღვრება წირის პოლარი განტოლებიდან), ამიტომ ეს უკანასკნელი ტოლობები განიხილება როგორც წირის პარამეტრული განტოლება, სადაც ϑ არის პარამეტრი (ე. ი. ამ შემთხვევაში $t=\vartheta$). გავაწარმოოთ წინა ტოლობები ϑ-ს მიმართ, გვექნება:

$$x'=x'_t=x'_\vartheta=\frac{dr}{d\vartheta}\cos\vartheta-r\sin\vartheta,$$

$$y'=y'_t=y'_\vartheta=\frac{dr}{d\vartheta}\sin\vartheta+r\cos\vartheta.$$

$\frac{dr}{d\vartheta}$-ს მნიშვნელობა განისაზღვრება თვით წირის პოლარი განტოლებიდან უცხადო ფუნქციის გაწარმოების წესით, ე. ი.

$$\frac{dr}{d\vartheta}=-\frac{F_\vartheta}{F_r}.$$

$\frac{dr}{d\vartheta}$-ს მნიშვნელობის ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს x' და y'-ის მნიშვნელობებს. ეს უკანასკნელი მნიშვნელობები კი, ჩასმული მხების (8) განტოლებაში, მოგვცემს მხების პოლარ განტოლებას. ახლა გამოვითვალოთ მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსი, გვექნება:

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{y'_\vartheta}{x'_\vartheta}=\frac{\frac{dr}{d\vartheta}\sin\vartheta+r\cos\vartheta}{\frac{dr}{d\vartheta}\cos\vartheta-r\sin\vartheta}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{dr}{d\vartheta}=r\operatorname{ctg}\varphi,$$

მივიღებთ:

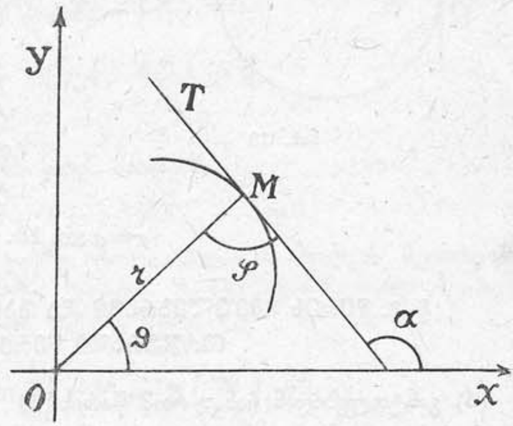
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\cos(\varphi+\vartheta)}=\operatorname{tg}(\varphi+\vartheta).$$

აქედან

$$\varphi=\alpha-\vartheta.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს, რომ φ ყოფილა წირის მხებსა და პოლარ რადიუსს შორის კუთხე (იხ. ნახ. 12). ამრიგად, წირის პოლარ კოორდინატებში მოცემულობის დროს მხების საკუთხო კოეფიციენტის განსასაზღვრავად საკმარისია გამოვთვალოთ φ კუთხე, რაც წინა აღნიშვნის თანახმად ასე განისაზღვრება:

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}.$$



ნახ. 12

ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

$$r=2a\cos\vartheta.$$

გამოვთვალოთ მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი α კუთხე. ჯერ გამოვთვალოთ წირის პოლარ რადიუსსა და მხებს შორის კუთხე, ამისათვის გვაქვს

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}.$$

წირის განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{dr}{d\vartheta}=-2a\sin\vartheta.$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}=-\frac{1}{2a\cos\vartheta}\cdot 2a\sin\vartheta=-\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right),$$

საიდანაც

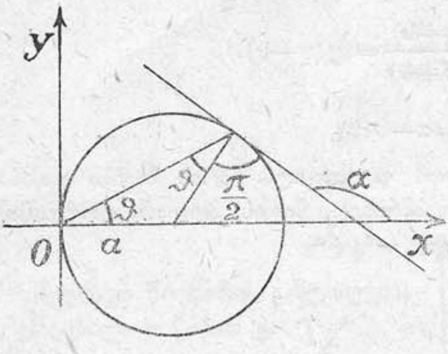
$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\vartheta.$$

თვით α-სათვის გვექნება:

$$\alpha=\varphi+\vartheta=\frac{\pi}{2}+2\vartheta.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ განსახილავი წირი a-რადიუსიანი წრეწირია, რომლის ცენტრი მოთავსებულია $(a, 0)$ წერტილში და მიღებული შედეგი $\varphi=\frac{\pi}{2}+\vartheta$ ადვილი წარმოსადგენია უშუალოდაც (იხ. ნახ. 13).

ამოცანები 1. კანონიკური განტოლებით მოცემულ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელზედაც გავლებული ელიფსის მხები კოორდინატთა ღერძებთან ქმნიდეს მინიმალური ფართობის სამკუთხედს.



ნახ. 13

2. შეადგინეთ გეომეტრიული ადგილის განტოლება ელიფსის ცენტრის გეგმილებისა ელიფსის მხებზე (ელიფსის ფუძწირი).

მითითება: უმჯობესია ელიფსის განტოლება განიხილოთ კანონიკური სახით.

3. განსაზღვრეთ კუთხე მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი შემდეგი განტოლებით მოცემული წირისათვის (პოლარ კოორდინატებში):

$$r=a\sin 2\vartheta.$$

§ 3. წირის ჩვეულებრივი და განკუთრი წერტილები. ორჯერადი წერტილი

(6) განტოლებიდან ჩანს, რომ წირის M წერტილში მხები განსაზღვრულია, თუ ცალსახად განსაზღვრულია y'. ასეთ წერტილს წირის ჩ ვ ე უ ლ ე ბ რ ი ვ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება. თუ წერტილი ჩვეულებრივი არ არის, მას განკუთრი წერტილი ეწოდება. რადგან

$$y'=-\frac{F_x}{F_y},$$

ამიტომ მხები განსაზღვრულია იმ წერტილში, რომელზედაც F_x, F_y ერთდროულად ნული არ არის, ხოლო განუზღვრელია იმ წერტილში, რომელზედაც F_x, F_y ერთდროულად ნულია. ამრიგად, ჩვეულებრივი წერტილის დამახასიათებელი ის იქნება, რომ F_x, F_y ამ წერტილზე ერთდროულად ნული არ იყოს, ხოლო განკუთრი წერტილის დამახასიათებელი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$F_x=0,\ F_y=0. \tag{10}$$

მხების (8) განტოლების მიხედვით ჩვეულებრივი და განკუთრი წერტილი ასე დახასიათდება. ჩვეულებრივ წერტილში $\frac{y'}{x'}$ შეფარდების ზღვარი უნდა არსებობდეს. x', y'-ის ერთდროულად ნულთან ტოლობა იქნება განკუთრი წერტილის არსებობის აუცილებელი პირობა. წირი უმთავრესად მისი ჩვეულებრივი წერტილის მახლობლობაში გამოიკვლევა, განკუთრი წერტილების ზოგიერთი თვისებები კი ცალკე განიხილება.

ვთქვათ (x, y) განკუთრი წერტილია, ხოლო

$$M_1=(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$

მისი მახლობელი წერტილი წირზე. ორივე ეს წერტილი დააკმაყოფილებს წირის განტოლებას, ე. ი. გვექნება:

$$F(x,\ y)=0,$$

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0.$$

გავამწკრივოთ მეორე განტოლების მარცხენა მხარე ტეილორის მწკრივად; მივიღებთ:

$$F+\Delta x F_x+\Delta y F_y+\frac{1}{2!}\left(\Delta x^2 F_{xx}+2\Delta x\Delta y F_{xy}+\Delta y^2 F_{yy}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\Delta x^3 F_{xxx}+\cdots\right)+\ldots=0.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ განკუთრ წერტილზე

$$F=0,\ F_x=0,\ F_y=0,$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\Delta x^2 F_{xx}+2\Delta x\Delta y F_{xy}+\Delta y^2 F_{yy}+\ldots=0.$$

გავყოთ Δx^2-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$. რადგან მეოთხე შესაკრებიდან დაწყებული წევრები ორზე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ჯამს იძლევა, ამიტომ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ გვექნება:

$$F_{xx}+2F_{xy}\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}+F_{yy}\lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2=0.$$

რადგან

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',$$

ამიტომ მივიღებთ საბოლოოდ:

$$F_{xx}+2F_{xy}y'+F_{yy}y'^2=0. \tag{11}$$

როგორც ვხედავთ, მხების საკუთხო კოეფიციენტი განკუთრ წერტილში აკმაყოფილებს კვადრატულ განტოლებას. თუ ამ განტოლების კოეფიციენტები ერთდროულად ნული არაა, მივიღებთ ორ ფესვს:

$$y'=\frac{-F_{xy}\pm\sqrt{F_{xy}^2-F_{xx}F_{yy}}}{F_{yy}}.$$

ეს ფესვები იქნება განკუთრ წერტილზე წირის მხებთა საკუთხო კოეფიციენტები. ამ მხებებს *მთავარი მხებები* ეწოდებათ.

ვგულისხმობთ, რომ (11) განტოლების კოეფიციენტები, ე. ი. მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულები, ერთდროულად ნული არაა. თუ ეს წარმოებულები ერთდროულად ნულია, მაშინ F ფუნქციის გამწკრივება დაიწყება მესამე რიგის წევრებიდან და y'-ის განსასაზღვრავად მოგვეცემა მესამე ხარისხის განტოლება, რომლის კოეფიციენტები იქნება შესაბამისად F ფუნქციის მესამე რიგის ნაწილობითი წარმოებულები. მივიღებთ y'-ის სამ მნიშვნელობას, ე. ი. ასეთ წერტილში წირს სამი მთავარი მხები ექნება.

მსჯელობის ასეთი განგრძობით მივიღებთ შემდეგ დასკვნას: *წირს ექნება განკუთრ წერტილში k მთავარი მხები, თუ F ფუნქციის ნაწი-*

ლობითი წარმოებულები k რიგამდე ამ წერტილში ერთდროულად ნულია, ხოლო k რიგის წარმოებულები ყველა ერთდროულად ნული არ არის.

მთავარ მხებთა რაოდენობის მიხედვით, განკუთრი წერტილის ჯერადობის შემდეგი ცნება შემოდის:

განმარტება III. განკუთრ წერტილს ეწოდება k ჯერადი წერტილი, თუ წირს ამ წერტილზე აქვს k მთავარი მხები.

ზემოთ მიღებული დასკვნიდან მთავარ მხებთა შესახებ უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ k ჯერად წერტილში ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულები k რიგამდე ერთდროულად ნულია, ხოლო k რიგის წარმოებულებიდან ერთი მაინც ვანსხვავდება ნულისაგან.

კერძოდ, როცა წირს განკუთრ წერტილში ორი მთავარი მხები აქვს, მაშინ წერტილს ორჯერადი წერტილი ეწოდება. ამრიგად, ორჯერად წერტილზე ფუნქციის პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულები ერთდროულად ნულია, ხოლო მეორე რიგის წარმოებულებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. ორჯერადი წერტილის კოორდინატები (10) განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება, მთავარ მხებთა საკუთხო კოეფიციენტები კი—(11) კვადრატული განტოლებიდან. ფესვქვეშა გამოსახულების ნიშნის მიხედვით განიხილება სხვადასხვა შემთხვევა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^{2}.$$

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

1) $D<0$: გვექნება ორი ნამდვილი ფესვი და, მაშასადამე, ორი მთავარი მხები; ასეთ წერტილს კვანძითი ორჯერადი წერტილი (ან მოკლედ კვანძი) ეწოდება.

2) $D=0$: გვექნება ჯერადი ფესვი, ე. ი. ორი შეთავსებული მთავარი მხები; წერტილს ეწოდება უკუქცევის ორჯერადი წერტილი.

3) $D>0$: გვექნება ორი წარმოსახვითი ფესვი, ე. ი. ორი წარმოსახვითი მთავარი მხები; წერტილს ეწოდება განხოლოებული ორჯერადი წერტილი.

კვანძით ორჯერად წერტილში მრუდის ორი შტო თანაიკვეთება. უკუქცევის ორჯერად წერტილში მრუდის ერთი შტო მეორეს ეხება, ე. ი. მათ საერთო მხები აქვთ. განხოლოებული ორჯერადი წერტილი თუმცა საერთო წერტილია მრუდის ორი შტოსი, მაგრამ მას არც ერთ შტოზე არა აქვს მეზობელი (უსასრულოდ მახლობელი) წერტილები. იგი განცალკევებულია მრუდის წერტილთაგან და მისი სახელწოდებაც აქედან წარმოდგება. მართლაც, წირზე ამ წერტილის მეზობელი წერტილი

$$M_1 = (x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$

არ შეიძლება ნამდვილი იყოს, რადგან $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდებას წარმოსახვითი y' ზღვარი აქვს.

სამივე განხილული შემთხვევა ორჯერადი წერტილისა გეომეტრიულად მე-14 (a, b, c) ნახაზებზეა წარმოდგენილი შესაბამისად[1].

[1] ბრტყელი წირის ჯერადი წერტილები ვრცლად განხილულია გ. ნიკოლაძის „დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტებში“ და სხვა მის შრომებში. ზოგ მათგანს მოკლედ მიმოვიხილავთ I თავის ბოლოში.

მაგალითები. 1. განვიხილოთ ე ლ ი ფ ს ი კანონიკური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

და გავარკვიოთ აქვს თუ არა მას ორჯერადი წერტილი.

როგორც ვიცით, ორჯერადი წერტილი აკმაყოფილებს (10) პირობებს; ამ შემთხვევაში

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\ \ F_y=\frac{2y}{b^2}\,.$$

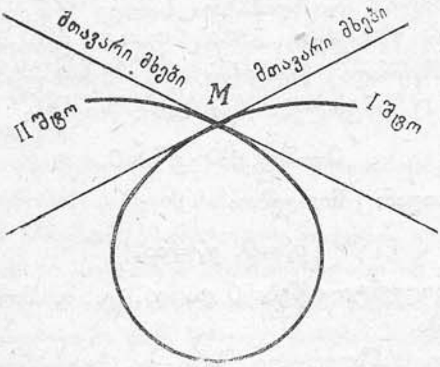
ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{2x}{a^2}=0,\ \ \frac{2y}{b^2}=0,$$

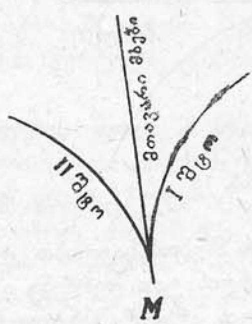
საიდანაც

$$x=0,\ \ y=0.$$

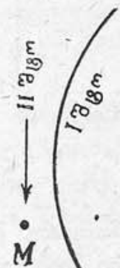
გამოდის, რომ ორჯერადი წერტილი უნდა იყოს (0, 0); მაგრამ ეს წერტილი ელიფსზე არ მდებარეობს და ამიტომ ვერც მისი ორჯერადი წერტილი იქნება. ამრიგად, ელიფსს საზოგადოდ არა აქვს განკუთრი (კერძოდ, ორჯერადი) წერტილი. ასეთივე წირებია ჰიპერბოლი და პარაბოლი, ე. ი. ყველა მეორე რიგის წირი. გამონაკლისს წარმოადგენს ორ წრფედ გადაგვარებული მეორე რიგის წირი. ცხადია, მისი ორჯერადი წერტილი წრფეთა თანაკვეთის წერტილი იქნება.



ნახ. 14 a



ნახ. 14 b



ნახ. 14 c

2. მოვძებნოთ განკუთრი წერტილი

$$x^3+y^3-3axy=0$$

განტოლებით განსაზღვრული წირისა (ამ წირს დ ე კ ა რ ტ ი ს ფ ო თ ო ლ ი ეწოდება; მისი ნახაზი შემდეგში იქნება მოყვანილი; იხ. ნახ. 17).

აქედან ვღებულობთ (გაწარმოებით):

$$F_x=3x^2-3ay,$$

$$F_y=3y^2-3ax.$$

თანახმად (10) პირობებისა, გვექნება:

$$3x^2-3ay=0,$$

$$3y^2-3ax=0,$$

საიდანაც

$$x=0,\ y=0.$$

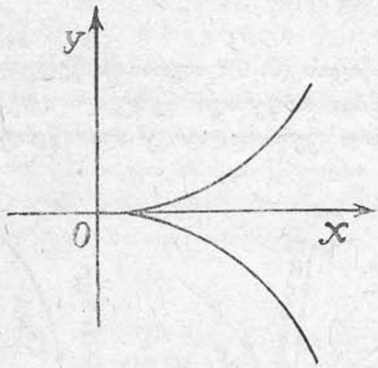
ამრიგად, განკუთრი წერტილი ყოფილა (0, 0) წერტილი, ე. ი. კოორდინატთა სათავე. იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ წერტილის ჯერადობა, გამოვითვალოთ მეორე რიგის წარმოებულები განკუთრ წერტილში (სათავეში); მივიღებთ:

$$F_{xx}=[6x]_{(0,0)}=0,$$

$$F_{xy}=[-3a]_{(0,0)}=-3a,$$

$$F_{yy}=[6y]_{(0,0)}=0.$$

ამრიგად, მეორე რიგის წარმოებულები განკუთრ წერტილში ერთდროულად ნული არ არის ($F_{xy}\neq 0$). მაშასადამე, კოორდინატთა სათავე იქნება აღებული წირის ორჯერადი წერტილი. რადგან, ამ შემთხვევაში,



ნახ. 15

$$D=F_{xx}F_{yy}-F_{xy}^2=$$
$$=0\cdot 0-(3a)^2=-9a^2<0,$$

ამიტომ კოორდინატთა სათავე (განკუთრი წერტილი) იქნება წირის კვანძითი ორჯერადი წერტილი. ამ შემთხვევაში (11) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$0-3ay'+0\cdot y'^2=0,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$y_1'=0,\ y_2'=\infty.$$

მაშასადამე, მთავარ მხებთა საკუთხო კოეფიციენტი იქნება 0 და ∞, ე. ი. მთავარი მხებები კოორდინატთა ღერძები იქნება.

3. განვიხილოთ $y^2=x^3$ განტოლებით განზღვრული წირი და მოვძებნოთ მისი ორჯერადი წერტილი. ამ შემთხვევაში

$$F_x=3x^2,\ F_y=-2y.$$

თანახმად (10) პირობებისა, მივიღებთ:

$$3x^2=0,\ -2y=0,$$

საიდანაც

$$x=0,\ y=0.$$

ვინაიდან წირი გადის (0, 0) წერტილზე, ამიტომ ეს წერტილი ყოფილა წირის განკუთრი წერტილი. იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ორჯერადია თუ არა ეს წერტილი, უნდა გამოვითვალოთ მეორე წარმოებულები ამ წერტილზე; გვექნება:

$$F_{xx}=[6x]_{x=0}=0,\ F_{xy}=0,\ F_{yy}=-2.$$

ამრიგად, მეორე წარმოებულები ერთდროულად ნული არ არის (0, 0) წერტილზე (მაგ., $F_{yy}=-2\neq 0$). ეს წერტილი ზუსტად ორჯერადი ყოფილა. მთავარ მხებთა მისაღებად გამოვიყენოთ საკუთხო კოეფიციენტებისათვის (11) განტოლება; გვექნება:

$$0+2\cdot 0\cdot y'-2y'^2=0,$$

საიდანაც

$$y_1'=0, \ y_2'=0.$$

ამრიგად, გვექნება ორი შეთავსებული მთავარი მხები. ორივე ეს მხები x ღერძს შეეთავსდება. (0, 0) წერტილი იქნება უკუქცევის ორჯერადი წერტილი, რომლის შტოებს საერთო მხებად x ღერძი აქვთ. წირის განტოლებიდან ჩანს, რომ x მიიღებს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, ხოლო y — სიმეტრიულ მნიშვნელობებს. ამრიგად, წირი შედგება ორი შტოსაგან, რომლებიც სიმეტრიულადაა მოთავსებული x ღერძის მიმართ (ნახ. 15).

§ 4. ასიმპტოტი

ჩვენ აქამდე წირის მხები განხილული გვქონდა წირის ისეთ წერტილში რომელიც სასრულო მანძილზე მდებარეობდა. თუ წირს უსასრულოდ შორი წერტილი აქვს, მაშინ ამ წერტილში მხები წრფე სხვანაირად განიმარტება და მას წირის ასიმპტოტი ეწოდება.

განმარტება **IV.** წირის მხები წრფის ზღვრულ წრფეს, როცა ხების წერტილი წირის უსასრულოდ შორი წერტილისაკენ მიისწრაფვის, წირის ასიმპტოტი ეწოდება.

ასიმპტოტის განტოლების მისაღებად საჭიროა ავიღოთ მხების განტოლება და ვიპოვოთ მისი ზღვრული სახე, როცა ხების წერტილი უსასრულეთისაკენ მიისწრაფვის.

იმ შემთხვევაში, როცა წირის განტოლების მარცხენა მხარე n ხარისხის პოლინომია x, y-ის მიმართ, ე. ი. როცა წირი n-ური რიგის ალგებრული წირია, მაშინ არსებობს ასიმპტოტის მოძებნის მეორე წესიც, რომელიც ზღვარის გამოთვლას არ საჭიროებს. ვისარგებლოთ იმ თვისებით, რომ მხებს წირთან შეხების წერტილში აქვს ორი თანაკვეთის (შეთავსებული) წერტილი. ასიმპტოტს, როგორც უსასრულეთში მხებ წრფეს, წირთან უნდა ჰქონდეს უსასრულოდ შორ წერტილში ორი შეთავსებული საერთო (თანაკვეთის) წერტილი. იმისათვის, რომ

$$y=kx+b$$

განტოლება ასიმპტოტის განტოლებას წარმოადგენდეს, საჭიროა ეს განტოლება, წირის განტოლებასთან ერთად ამოხსნილი, x-ისათვის ან y-ისათვის (ან ორივესთვის ერთად) გვაძლევდეს ორ უსასრულო დიდ ამონახსნს (ფესვს). ასე მიღებული თანაკვეთის წერტილები უთუოდ შეთავსებული იქნება, რადგან წრფეს მხოლოდ ერთი უსასრულოდ შორი წერტილი აქვს. თუ წირის განყოფილება

$$P_n(x, y)=0,$$

სადაც P_n-ით აღნიშნულია n ხარისხის პოლინომი, მაშინ ამ განტოლებაში აღებული წრფის განტოლებიდან y-ის მნიშვნელობის შეტანით მივიღებთ:

$$P_n(x, kx+b)=0.$$

ეს განტოლება n ხარისხისა იქნება x-ის მიმართ. მისი პირველი კოეფიციენტი შეიცავს მხოლოდ k-ს, საზოგადოდ n ხარისხში. მეორე კოეფიციენტი კი შეიცავს b-ს, მხოლოდ პირველ ხარისხში. იმისათვის, რომ განტოლებას ჰქონდეს ორი უსასრულოდ დიდი ამონახსნი x-ის მიმართ, საჭიროა რომ მისი პირველი და მეორე კოეფიციენტი ნული იყოს. თუ პირველ და მეორე კოეფიციენტს აღვნიშნავთ

A და A_1-ით შესაბამისად, მაშინ გვექნება: $A=0$, $A_1=0$. ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან მოიძებნება k და b. პირველი განტოლებიდან k-სათვის მივიღებთ n მნიშვნელობას

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

b კი ამოიხსნება მეორე წრფივი განტოლებიდან; k-ს მნიშვნელობათა შესაბამისად, b მიიღებს საზოგადოდ n მნიშვნელობას

$$b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

ამრიგად, n რიგის წირს ექნება n ასიმპტოტი; ამათგან შესაძლებელია ასიმპტოტების ნაწილი იყოს წარმოსახვითი, შეთავსებული ან უსასრულოდ შორეული. თვით ასიმპტოტების განტოლებები მიიღება აღებული წრფის განტოლებაში k-სა და b-ს მნიშვნელობათა შეტანით, გვექნება:

$$\begin{aligned} y&=k_1x+b_1,\\ y&=k_2x+b_2,\\ &\cdots\cdots\\ y&=k_nx+b_n. \end{aligned}$$

შენიშვნა: თუმცა აქ მოყვანილი წესი გამოსადეგია წირის ნებისმიერი ასიმპტოტის განსასაზღვრავად, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა k ღებულობს უსასრულოდ დიდ მნიშვნელობებს, ე. ი. როცა წირს აქვს y ღერძის პარალელური ასიმპტოტები, მაშინ განვიხილოთ y ღერძის პარალელური წრფის განტოლება

$$x=p$$

და ამოვხსნათ წირის განტოლებასთან ერთად. გვექნება:

$$P_n(p, y)=0.$$

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, უნდა მოვითხოვოთ, რომ უკანასკნელ განტოლებას ჰქონდეს 2 უსასრულოდ დიდი ამონახსნი y-სათვის.

მაგალითები. 1. განვიხილოთ ჰიპერბოლი კანონიკური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

და მოვძებნოთ მისი ასიმპტოტი. ამისათვის ავიღოთ ჰიპერბოლის მხების განტოლება

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}=1$$

და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $x\to\infty$. თუ გავყოფთ x-ზე და გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ:

$$\frac{X}{a^2}-\frac{Y}{b^2}\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0.$$

მეორე მხრივ, ჰიპერბოლის განტოლებიდან გვექნება:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

მივიღებთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$

მაშასადამე, მხების განტოლების ზღვრული სახე, ე. ი. ასიმპტოტის განტოლება იქნება:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X.$$

რადგან ჰიპერბოლი ალგებრული წირია, ამიტომ მისი ასიმპტოტები შეგვიძლია მეორე წესითაც მოვძებნოთ. ამისათვის უნდა ავიღოთ წრფის განტოლება

$$y = kx + p$$

და ეს უკანასკნელი ჰიპერბოლის განტოლებასთან ერთად ამოვხსნათ; გვექნება:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx+p)^2}{b^2} = 1,$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\left(\frac{k^2}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2 + \frac{2kpx}{b^2} + \frac{p^2}{b^2} - 1 = 0.$$

იმისათვის, რომ განტოლებას ორი უსასრულოდ დიდი ფესვი ჰქონდეს, როგორც ზემოთაც იყო აღნიშნული, აუცილებელია, რომ პირველი და მეორე კოეფიციენტი ნული იყოს, ე. ი.

$$\frac{k^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0, \quad \frac{2kp}{b^2} = 0.$$

პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$k = \pm \frac{b}{a}.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა მეორე განტოლებაში მოგვცემს p-ს მნიშვნელობებს; ამ შემთხვევაში

$$p_1 = p_2 = 0.$$

ამრიგად, ჰიპერბოლის ასიმპტოტები მიიღება აღებული წრფის განტოლებიდან, თუ იქ შევიტანთ მნიშვნელობებს

$$k = \pm \frac{b}{a}, \quad p = 0;$$

გვექნება:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X.$$

ჰიპერბოლის ორივე შტოს აქვს ორი საერთო ასიმპტოტი და, მაშასადამე, ორი საერთო უსასრულოდ შორი წერტილი. ამიტომ ჰიპერბოლზე მოძრავი წერტილი მისი აღწერის დროს ორჯერ გაივლის უსასრულობაში (ნახ. 16).

2. მოვძებნოთ დეკარტის ფოთლის ასიმპტოტი

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

ეს წირი გადავკვეთოთ წრფით

$$y = kx + b.$$

მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$x^3 + (kx+b)^3 - 3ax(kx+b) = 0.$$

აქედან, x-ის ხარისხებად დალაგებით, მივიღებთ:

$$(1+k^3)x^3+(3k^2b-3ak)x^2+(3kb^2-3ab)x+b^3=0.$$

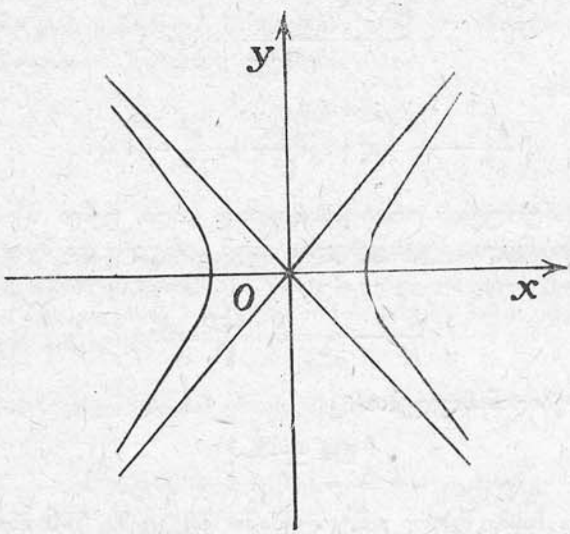
პირველი და მეორე კოეფიციენტი ნულს გავუტოლოთ; გვექნება:

$$1+k^3=0,$$

$$3k^2b-3ak=0.$$

პირველი განტოლებიდან მივიღებთ მხოლოდ ერთ ნამდვილ ფესვს

$$k=-1.$$



ნახ. 16

დანარჩენი ფესვები კომპლექსური იქნება. მეორე ტოლობიდან გვექნება:

$$b=\frac{a}{k}.$$

თუ ჩავსვამთ აქ k-ს ნაპოვნ მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$b=-a.$$

ამრიგად, წირს ექნება შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული ერთი ნამდვილი ასიმპტოტი (k და b-ს მნიშვნელობა უნდა შევიტანოთ აღებული წრფის განტოლებაში):

$$y=-x-a,$$

ანუ

$$x+y+a=0.$$

მაშასადამე, წირის შტოები მიღებულ წრფეს უახლოვდება. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, კოორდინატთა სათავე დეკარტის ფოთოლისათვის ორჯერადი კვანძითი წერტილია, მთავარი მხებები კი x და y ღერძებია: ადვილი მისახვედრია, აგრეთვე, რომ წირს პირველ მეოთხედში უსასრულოდ შორი წერტილი არა აქვს. ამიტომ მას ექნება მე-17 ნახაზზე ნაჩვენები სახე.

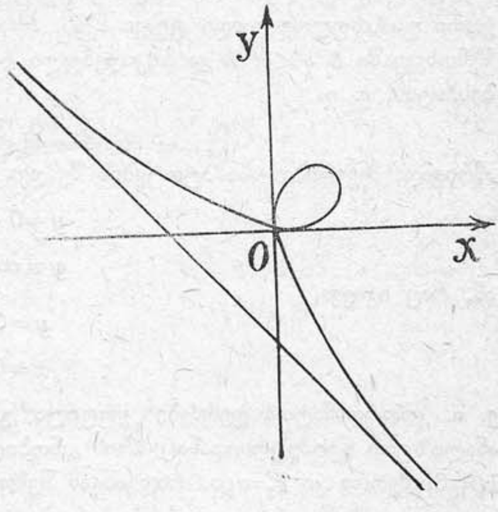
3. მოვძებნოთ ასიმპტოტი ჰიპერბოლური ხვიისა. როგორც აღნიშნული გვქონდა, ჰიპერბოლური ხვია ეწოდება ისეთ წირს, რომლის განტოლებაა (პოლარ-კოორდინატებში)

$$r=\frac{a}{\vartheta},$$

ასიმპტოტის მოსაძებნად შეგვიძლია გადავიდეთ პოლარი კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე და ისე განვსაზღვროთ იგი. მაგრამ შეგვიძლია (და უმჯობესიც არის) ასიმპტოტი მოვძებნოთ უშუალოდ პოლარ კოორდინატებში. პოლარ კოორდინატებში ნებისმიერი წრფის განტოლება შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ (ამისათვის საკმარისია წრფის განტოლებაში დეკარტის კოორდინატები შევცვალოთ პოლარი კოორდინატებით სათანადო ფორმულების თანახმად და მოვახდინოთ მცირე ტრიგონომეტრიული გარდაქმნა):

$$r=\frac{p}{\sin(\vartheta+\vartheta_0)},$$

სადაც p და ϑ_0 წრფის მდებარეობის განმსაზღვრელი მუდმივებია. იმისათვის, რომ აღებული წრფე ჰიპერბოლური ხვიის ასიმპტოტი იყოს, ე. ი. ეხებოდეს მას უსასრულეთში, საჭიროა, რომ მათი პოლარი რადიუსების სხვაობა ნულისაკენ მიისწრაფვოდეს წერტილის უსასრულოდ შორს მისწრაფებასთან ერთად (ϑ ორივესათვის საერთოა), ე. ი. p და ϑ_0 უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:



ნახ. 17

$$\lim_{\vartheta\to 0}\left(\frac{a}{\vartheta}-\frac{p}{\sin(\vartheta+\vartheta_0)}\right)=0.$$

აქედან

$$p=a,\ \ \vartheta_0=0.$$

ამრიგად, ჰიპერბოლური ხვიის ასიმპტოტის პოლარი განტოლება იქნება:

$$r=\frac{a}{\sin\vartheta}.$$

ეს არის x ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც y ღერძზე ჰკვეთს a მონაკვეთს.

4. განვსაზღვროთ ასიმპტოტები შემდეგი განტოლებით განზღვრული წირისათვის (ჰიპერბოლი):

$$xy=h.$$

გამოვიყენოთ ალგებრული წირისათვის ასიმპტოტების განსაზღვრის არსებული წესი, ამისათვის ჩავსვათ აღებულ განტოლებაში y-ის მნიშვნელობა

$$y=kx+b.$$

გვექნება:

$$kx^2+bx=h.$$

აქედან პირველი ორი კოეფიციენტის ნულთან გატოლება მოგვცემს

$$k=0,$$

$$b=0.$$

რადგან წირი მეორე რიგისაა, ამიტომ პირველი განტოლება (უკანასკნელი სისტემის) k-ს მიმართ მეორე რიგის უნდა ყოფილიყო, აქ კი პირველი რიგისაა. მაშასადამე, განტოლების პირველი კოეფიციენტი ნულია, ამიტომ ამ განტოლებას ერთი უსასრულოდ დიდი ფესვი აქვს. ამრიგად $k_1=0$, $k_2=\infty$. გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში b არ არის დამოკიდებული k-ზე, იგი ნულია k-ს ორივე მნიშვნელობისათვის, ე. ი.

$$b_1=0, \ b_2=0.$$

ამრიგად, მივიღებთ ასიმპტოტების შემდეგ განტოლებებს:

$$y=0 \cdot x,$$

$$y=\infty \cdot x.$$

ან, რაც იგივეა,

$$y=0:$$

$$x=0,$$

ე. ი. კოორდინატთა ღერძები ყოფილა განსახილავი წირის ასიმპტოტები (რაც ანალიზური გეომეტრიიდანაც არის ცნობილი). პირველი ასიმპტოტი შეესაბამება $k_1=0$, მეორე კი $k_2=\infty$. რადგან ამ შემთხვევაში მეორე ფესვი უსასრულოდ დიდია, ე. ი. წირს აქვს y ღერძის პარალელური ასიმპტოტი, ამიტომ მეორე ასიმპტოტის მოსაძებნად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კიდევ ზემოთ შენიშვნაში მითითებული წესი, ე. ი. წირის განტოლებაში შევიტანოთ $x=p$; გვექნება: $py=h$. იმისათვის, რომ ამ განტოლებას ჰქონდეს უსასრულოდ დიდი ამონახსნი y-ის მიმართ, საჭიროა y-ის კოეფიციენტი გაუტოლდეს ნულს, ე. ი. $p=0$. ამრიგად, მივიღებთ მეორე ასიმპტოტის განტოლებას

$$x=0.$$

§ 5. წირის რკალის სიგრძე. წირითი ელემენტი

ვთქვათ, აღებულია წირის რაიმე ორი A და B წერტილებით განსაზღვრული AB რკალი ამ წირისა. რკალის სიგრძის ცნება შემდეგნაირად განიმარტება:

განმარტება V. რკალში ჩახაზული ტეხილის სიგრძის ზღვარს, როცა ტეხილის ყოველი გვერდის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფის, რკალის სიგრძე ეწოდება.

რკალის სიგრძეს ჩვეულებრივად s-ით აღნიშნავენ. განმარტების თანახმად (ნახ. 18), გვექნება:

$$s=\lim \sum |MM_1|.$$

ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$|MM_1|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x.$$

ამიტომ

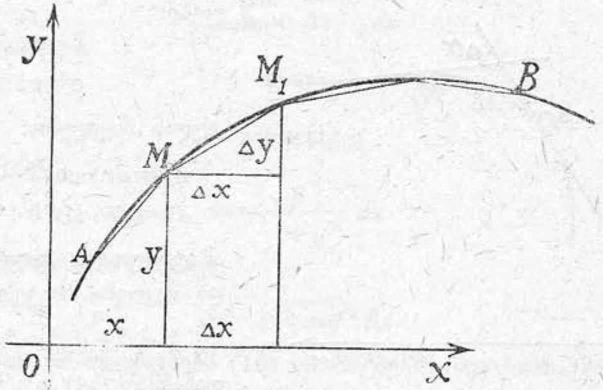
$$s=\lim \sum \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{2}} \Delta x.$$

მაგრამ ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ

$$\lim \sum \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{2}} \Delta x=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

ამრიგად,

$$s=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{12}$$



ნახ. 18

თუ A წერტილს უძრავად დავტოვებთ, ხოლო B წერტილს ვცვლით (ვამოძრავებთ) წირზე, მაშინ (12) ფორმულით მოგვეცემა ყოველგვარი AB რკალის სიგრძე. კერძოდ, თუ $B=M$, ე. ი. $x_2=x$, მაშინ (12) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$s=\int_{x_1}^{x} \sqrt{1+y'^2}\, dx,$$

აქედან მივიღებთ:

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{13}$$

თუ dx-ს რადიკალის შიგნით შევიტანთ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $y'dx=dy$, მაშინ (13) ფორმულა ასე დაიწერება:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{13_1}$$

რადგან რკალში ჩახაზული ტეხილის სიგრძის ზღვარი დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა სისტემის მდებარეობაზე, ამიტომ ცხადია, რომ რკალის სიგრძე ინვარიანტია (უცვლელია) კოორდინატთა სისტემის მოძრაობისა, ან, რაც იგივეა, თვით წირის მოძრაობისა. აქედან კი პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ რკალის სიგრძის დიფერენციალი ინვარიანტია კოორდინატთა სისტემის მოძრაობისა ანუ წირის მოძრაობისა.

ეს თვისება შესაძლებელია უშუალოდ მივიღოთ (13_1) ფორმულიდანაც, თუ მასში მოვახდენთ x, y-ის ორთოგონალურ გარდაქმნას, ამით გამოსახულების მარცხენა მხარე სახეს არ შეიცვლის.

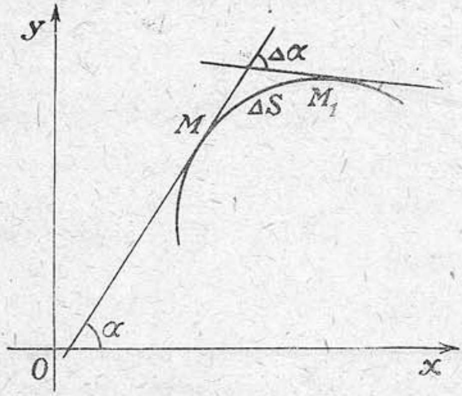
(13_1) ფორმულის კვადრატში ამაღლებით მივიღებთ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{14}$$

დიფერენციალურ გეომეტრიაში რკალის სიგრძის დიფერენციალის გამოსასახავად და შესასწავლად გავრცელებულია (14) ფორმულის გამოყენება. ამგვარად, ნაცვლად რკალის სიგრძის დიფერენციალისა [2], მისი კვადრატი განიხილება. მას წ ი რ ი თ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ეწოდება. რა თქმა უნდა, წირითი ელემენტიც ინვარიანტი იქნება წირის მოძრაობის მიმართ.

მაგალითები. 1. გამოვსახოთ წირითი ელემენტი პ ო ლ ა რ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ შ ი. ამისათვის ავიღოთ დეკარტის კოორდინატებისა და პოლარი კოორდინატების დამაკავშირებელი ფორმულები:

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta.$$



ნახ. 19

აქედან მივიღებთ:

$$dx = dr\cdot\cos\vartheta - r\sin\vartheta\cdot d\vartheta,$$
$$dy = dr\cdot\sin\vartheta + r\cos\vartheta'\cdot d\vartheta.$$

ამ ტოლობის კვადრატში ამაღლება და შეკრება მოგვცემს:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2.$$

თანახმად (14) ფორმულისა, წირით ელემენტს პოლარ კოორდინატებში ასეთი სახე ექნება:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2. \tag{15}$$

2. მოვძებნოთ წ რ ე წ ი რ ი ს რკალის დიფერენციალი. წრეწირის ცენტრი პოლუსში მოვათავსოთ; მაშინ ამ წირის განტოლება პოლარ კოორდინატებში იქნება $r = \text{const}$. (15) ფორმულა ამ შემთხვევაში მოგვცემს:

$$ds^2 = r^2 d\vartheta^2,$$

საიდანაც

$$ds = r d\vartheta.$$

ეს კი ცნობილი ფორმულაა ცენტრალური კუთხისა და სათანადო რკალის დამოკიდებულების შესახებ. თუ ϑ-სათვის ავირჩევთ $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 2\pi$ და ინტეგრებას მოვახდენთ, მაშინ თვით წრეწირის სიგრძეს მივიღებთ:

$$s = 2\pi r.$$

§ 6. წირის სიმრუდე

წირის შინაგან ბუნებას ერთგვარად ახასიათებს მხების მოძრაობის კანონი მის გასწვრივ. როდესაც M წერტილი მეზობელ M_1 წერტილში გადაადგილდება, მაშინ მხები მდებარეობას შეიცვლის და პირველ მდებარეობასთან შეადგენს $\Delta\alpha$

[2] ხშირად წირის რკალის სიგრძეს წირის რკალს უწოდებენ, ხოლო მის დიფერენციალს — რკალის დიფერენციალს.

კუთხეს. ბუნებრივია, რომ მხების ცვლა შევაფასოთ აღნიშნული კუთხისა და სათანადო რკალის შეფარდებით. ამასთან დაკავშირებით შემოდის სიმრუდის ცნება.

განმარტება VI. წირის M წერტილში და მის მეზობელ M_1 წერტილში მხებთა შორის კუთხისა და სათანადო რკალის შეფარდების ზღვარს, როცა ეს რკალი ნულისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წირის სიმრუდე M წერტილში.

სიმრუდის შებრუნებულ სიდიდეს სიმრუდის რადიუსი ეწოდება. თუ ამ უკანასკნელს ρ-თი აღვნიშნავთ, მაშინ სიმრუდე იქნება $\frac{1}{\rho}$. განმარტების თანახმად, გვექნება:

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}. \tag{16}$$

ჩვენ ვიცით ფორმულა

$$\operatorname{tg}\alpha=y'$$

ანუ

$$\alpha=\operatorname{arctg}y',$$

საიდანაც მივიღებთ[3]

$$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\,dx.$$

(13) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

თუ $d\alpha$ და dx-ის მნიშვნელობებს (16) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{17}$$

არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ამ ფორმულაში y-ის წარმოებულები აღებულია x-ის მიმართ.

თუ წირი პარამეტრული განტოლებით არის მოცემული, ე. ი. x, y რაიმე პარამეტრის ფუნქციებია, მაშინ y' და y'' უნდა შევცვალოთ შემდეგი ცნობილი ფორმულების მიხედვით:

$$y'=\frac{y_t'}{x_t'},\quad y''=\frac{y_t''x_t'-x_t''y_t'}{x_t'^3}.$$

ჩასმისა და მცირე გამარტივების შემდეგ, (17) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y_t''x_t'-y_t'x_t''}{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}.$$

უმჯობესია ეს უკანასკნელი სიმრუდის ფორმულა ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \tag{18}$$

ოღონდ უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ ფორმულაში გაწარმოება მიმდინარეობს t პარამეტრის მიმართ.

---

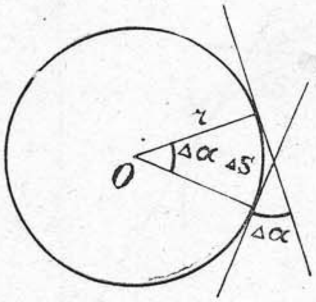
[3] ორ მხებს შორის კუთხეს ვგულისხმობთ სათანადო ნიშნით, რომელიც მხების ბრუნვის მიმართულებაზეა დამოკიდებული.

რადგან კუთხე ორ მხებს შორის და სათანადო რკალი დამოკიდებული არაა კოორდინატთა სისტემის მოძრაობაზე ან, რაც იგივეა, წირის მოძრაობაზე, ამიტომ სიმრუდეც ინვარიანტი იქნება წირის მოძრაობის მიმართ.

მაგალითები. 1. განვიხილოთ წრფე. რადგან წრფის მხები ყოველ წერტილზე თვით აღებული წრფეა, ამიტომ ორ მეზობელ მხებთა შორის კუთხე იქნება ნული, ე. ი. $\Delta\alpha=0$; მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{0}{\Delta s}=0.$$

ამრიგად, წრფის სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია. ეს თვისება მხოლოდ წრფეს ახასიათებს. მართლაც, განვიხილოთ წირი, რომლის სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია, ე. ი. $\frac{1}{\rho}=0$. თანახმად (16) ფორმულისა, მივიღებთ:



ნახ. 20

$$\frac{d\alpha}{ds}=0,$$

აქედან

$$\alpha=\text{const}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წირს ყოველ წერტილში აქვს ერთი და იგივე მიმართულების მხები, ე. ი. ყველა წერტილისათვის საერთო მხები, ე. ი. წირი წრფეა. მივიღეთ წრფისათვის დამახასიათებელი თვისება: წრფის სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია და, პირიქით, ნულსიმრუდიანი წირი წრფეა.

2. განვიხილოთ წრეწირის სიმრუდე. ჩვენ ვიცით, რომ წრეწირის ორ მეზობელ მხებთა შორის კუთხე სათანადო ცენტრალურ კუთხეს უდრის (ნახ. 20) ცენტრალური კუთხე კი მის რკალთან ასეთ დამოკიდებულებაშია:

$$\Delta s=r\Delta\alpha.$$

აქედან

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{r}.$$

თანახმად (16) ფორმულისა, მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{r}=\frac{1}{r}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\quad\text{და}\quad\rho=r.$$

ამრიგად, წრეწირის სიმრუდე მის ყოველ წერტილში მუდმივია და რადიუსის შებრუნებულ სიდიდეს უდრის. ეს თვისება მხოლოდ წრეწირს ახასიათებს, ე. ი. მუდმივსიმრუდიანი წირი მხოლოდ წრეწირია. საზოგადოდ, სიმრუდე მთლიანად განსაზღვრავს წირის ფორმას. ეს ყველაფერი დამტკიცებული იქნება შემდეგ თავში. როგორც დავინახეთ, წრეწირის სიმრუდის რადიუსი თვით წრეწირის რადიუსის ტოლია.

3. გამოვთვალოთ

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

განტოლებით განსაზღვრული წირის, ე. წ. ჯაჭვწირის, სიმრუდე. ამ განტოლებიდან გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$y''=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

სიმრუდის (17) ფორმულაში ამ მნიშვნელობათა ჩასმა მოგვცემს:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a\left[1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a\left(\frac{1}{4}e^{\frac{2x}{a}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{a}}\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{a}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{a}}\right)^{2\cdot 3/2}}=\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}.$$

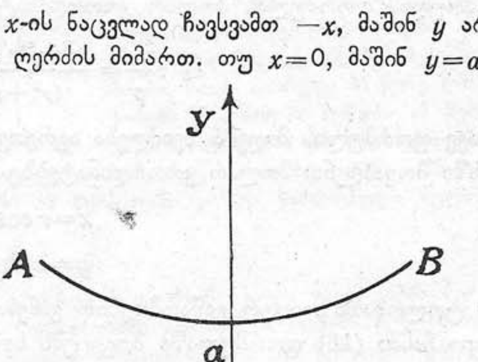
რადგან წირის განტოლების მიხედვით

$$e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=\frac{2y}{a},$$

ამიტომ სიმრუდისათვის საბოლოოდ შემდეგ ფორმულას მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{a}{y^2}.$$

წირის განტოლებიდან ჩანს, რომ როცა x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $-x$, მაშინ y არ იცვლება, ე. ი. მრუდი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ. თუ $x=0$, მაშინ $y=a$, ყველა დანარჩენ შემთხვევაში $y>a$. როცა x იზრდება, y-ც იზრდება. მაშასადამე, მრუდს აქვს დაახლოებით 21-ე ნახაზზე წარმოდგენილი სახე.



ნახ. 21

ცნობილია, რომ ორ წერტილზე დამაგრებული ღუნადი ძაფი (ან ჯაჭვი) სივრცეში დაიკავებს განხილული წირის ფორმას, ამიტომ ამ წირს ჯაჭვწირი ეწოდება.

4. გამოვსახოთ წირის სიმრუდე პოლარ კოორდინატებში. ამისათვის განვიხილოთ ზემოთ მიღებული დამოკიდებულება (გვ. 20).

$$\alpha=\varphi+\vartheta,$$

გვექნება

$$d\alpha = d\varphi + d\vartheta.$$

გარდა ამისა, გავიხსენოთ წირითი ელემენტის ფორმულა პოლარ კოორდინატებში

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

აქედან

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}.$$

ამრიგად, სიმრუდისათვის მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\varphi + d\vartheta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}} = \frac{\varphi' + 1}{\sqrt{r'^2 + r^2}},$$

სადაც

$$r' = \frac{dr}{d\vartheta}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\vartheta}.$$

ახლა გავიხსენოთ ფორმულა

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r'}{r}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება ϑ-ს მიმართ მოგვცემს:

$$-\frac{\varphi'}{\sin^2 \varphi} = -\frac{r'^2}{r^2} + \frac{r''}{r}.$$

აქედან

$$\varphi' = \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) \sin^2 \varphi = \left(\frac{r^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} =$$

$$= \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r^2}} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

φ'-ის მნიშვნელობის ჩასმა სიმრუდის უკანასკნელ გამოსახვაში მოგვცემს სიმრუდის ფორმულას პოლარ კოორდინატებში.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

ამავე ფორმულის მიღება შეიძლება აგრეთვე სიმრუდის (18) ფორმულიდან, თუ მასში მოვახდენთ პოლარ კოორდინატებზე გადასვლას ცნობილი ფორმულებით

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta.$$

ამ ტოლობათა ორჯერ გაწარმოებით განვსაზღვრავთ x', y', x'', y'' სიდიდეებს. მათი ჩასმა (18) ფორმულაში მოგვცემს სიმრუდის საძიებელ ფორმულას პოლარ კოორდინატებში.

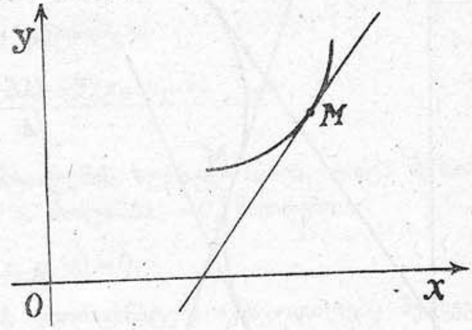
ამოცანები. 1. მოძებნეთ ელიფსის სიმრუდის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

2. დაამტკიცეთ, რომ არქიმედის ხვიის სიმრუდე მაქსიმუმს აღწევს კოორდინატთა სათავეში.

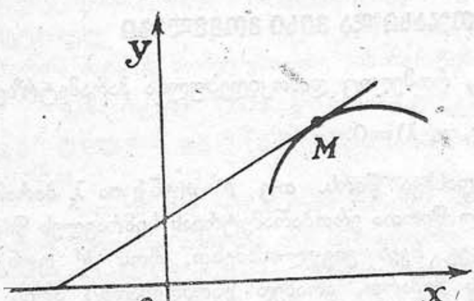
3. დაამტკიცეთ, რომ ლოგარითმული ხვიის სიმრუდის რადიუსი პროპორციულია პოლარი რადიუსისა.

§ 7. წირის ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი

(16) ფორმულიდან ჩანს, რომ წირის სიმრუდე დადებითია იმ შუალედში, რომელშიც $d\alpha>0$, ე. ი. რომელშიც მხები ბრუნავს წირის გასწვრივ საათის ისრის ბრუნვის წინააღმდეგ და უარყოფითია იმ შუალედში, რომელშიც მხები ბრუნავს წირის გასწვრივ საათის ისრის ბრუნვის თანხვდენილი მიმართულებით. პირველ შემთხვევაში იტყვიან, რომ წირი ჩ ა ზ ნ ე ქ ი ლ ი ა, მეორე შემთხვევაში კი, რომ წირი ა მ ო ზ ნ ე ქ ი ლ ი ა. ამრიგად, ჩაზნექილობა და ამოზნექილობა სიმრუდის ნიშანზეა დამოკიდებული. პირველ შემთხვევაში სიმრუდე დადებითია, მეორეში კი უარყოფითი. როდესაც ჩაზნექილობა ამოზნექილობით იცვლება, მაშინ სიმრუდე ნიშანს იცვლის და, მაშასადამე, სიმრუდე ნულს გაუტოლდება. ასეთ წერტილს გ ა დ ა ღ უ ნ ვ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება. (17) ფორმულის თანახმად, სიმრუდის ნიშანი y''-ის ნიშანია, ამიტომ y''-ის მიხედვით წირის შემდეგნაირი დახასიათება გვექნება აღებულ M წერტილში:



ნახ. 22a



ნახ. 22b

1) $y''>0$— წირი ჩაზნექილია (ნახ. 22 a),

2) $y''<0$— წირი ამოზნექილია (ნახ. 22 b),

3) $y''=0$— გადაღუნვის წერტილია (ნახ. 22 c).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: შესაძლებელია სიმრუდე ნულს გაუტოლდეს, მაგრამ ნიშანი არ შეიცვალოს; ეს იმ შემთხვევაში მოხდება, როცა სიმრუდე M წერტილში მაქსიმუმს ან მინიმუმს აღწევს. ამ შემთხვევაში ჩაზნექილობა (ან ამოზნექილობა) არ შეიცვლება. ცხადია, რომ y' აგრეთვე არ შეიცვლის ნიშანს, რაც თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ y' მიაღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს, ამიტომ ამ წერტილში y''-ის წარმოებული ნული უნდა იყოს, ე. ი.

$$(y'')'=0,$$

თუ $y'''=0$ და $y^{IV}\neq 0$, მაშინ y'' აღწევს ექსტრემუმს და M წერტილი გადაღუნვის წერტილი არ იქნება; თუ $y^{IV}=0$ და $y^{V}\neq 0$, მაშინ y'' ექსტრემუმს არ აღწევს (ნიშანს იცვლის) და M წერტილი იქნება გადაღუნვის წერტილი. ამრიგად, იმისათვის, რომ M წერტილი გადაღუნვის წერტილი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $y''=0$ და პირველი ნულისაგან განსხვავებული შემდეგი წარმოებული კენტი რიგის იყოს.

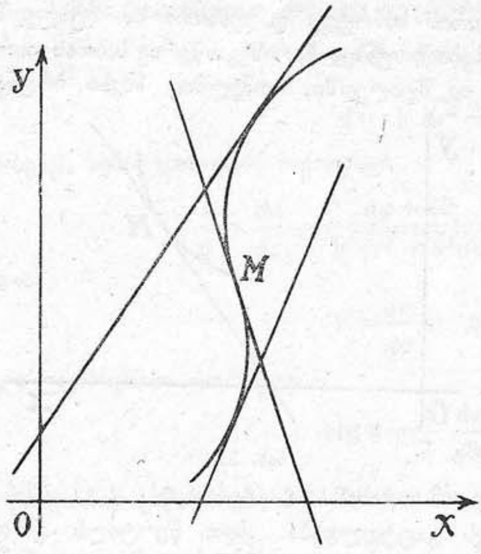
მაგალითი: განვიხილოთ წირი

$$y=x^3.$$

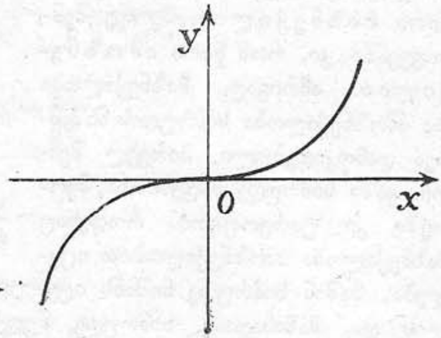
აქედან ორჯერ გაწარმოებით შევიღებთ:

$$y''=6x.$$

აშკარაა რომ, როცა $x>0$, მაშინ $y''>0$, როცა $x<0$, მაშინ $y''<0$ და როცა $x=0$, მაშინ $y''=0$ და $y'''=6$. ამრიგად (იხ. ნახ. 23), წირი ჩაზნექილია, როცა x დადებითია, წირი ამოზნექილია, როცა x უარყოფითია, და წირს აქვს გადაღუნვის წერტილი, როცა $x=0$, ე. ი. კოორდინატთა სათავეში.



ნახ. 22c



ნახ. 23

§ 8. წირთა უწყვეტი ოჯახი და მისი მომვლები

განვიხილოთ წირის განტოლება, რომელიც დამოკიდებულია პარამეტრზე

$$F(x, y, \lambda)=0. \tag{19}$$

λ პარამეტრის ცვლით მივიღებთ სხვადასხვა წირს. თუ F ფუნქცია λ პარამეტრის მიმართ უწყვეტია, მაშინ აღებულ წირთა ერთპარამეტრიან სიმრავლეს წირთა *უწყვეტი ოჯახი* ეწოდება. შემდეგ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ F ფუნქცია არა მარტო უწყვეტია λ პარამეტრის მიმართ, არამედ წარმოებადიც არის მის მიმართ. წირთა ოჯახს მრავალი შესანიშნავი თვისება აქვს. აქ შევეხებით მხოლოდ ზოგიერთ მათგანს. (19) განტოლებით განზღვრულ წირს შემოკლებისათვის (λ) წირს ვუწოდებთ. თუ λ-ს მივცემთ უსასრულოდ მცირე $\Delta\lambda$ ნაზრდს, მივიღებთ ($\lambda+\Delta\lambda$) მეზობელ წირს; მისი განტოლება იქნება:

$$F(x, y, \lambda+\Delta\lambda)=0.$$

განმარტება VII. (λ) *წირის და მისი მეზობელი წირის თანაკვეთის წერტილის ზღვარს, როცა მეზობელი წირი* (λ) *წირისაკენ მიისწრაფვის,* (λ) *წირის დამახასიათებელი წერტილი ეწოდება.*

თუ (λ) წირისა და მისი მეზობელი ($\lambda+\Delta\lambda$) წირის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატებს x_1-ით და y_1-ით ავღნიშნავთ, ხოლო (λ) წირის დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატებს x-ით და y-ით, გვექნება (თანახმად განმარტებისა):

$$\lim x_1=x, \quad \lim y_1=y.$$

ცხადია, რომ თანაკვეთის წერტილის x_1, y_1 კოორდინატები ერთდროულად დააკმაყოფილებს (λ) წირის განტოლებას და მისი მეზობელი წირის განტოლებას, ე. ი. გვექნება:

$$F(x_1,\ y_1,\ \lambda)=0,$$

$$F(x_1,\ y_1,\ \lambda+\Delta\lambda)=0.$$

აქედან შეგვიძლია შევადგინოთ ახალი განტოლება

$$\frac{F(x_1,\ y_1,\ \lambda+\Delta\lambda)-F(x_1,\ y_1,\ \lambda)}{\Delta\lambda}=0.$$

თუ განვიხილავთ ამ უკანასკნელი განტოლების ზღვრულ სახეს, როცა მეზობელი წირი (λ) წირისაკენ მიისწრაფვის, ე. ი. როცა $\Delta\lambda\to 0$, მივიღებთ:

$$F_\lambda(x,\ y,\ \lambda)=0. \tag{20}$$

ამრიგად, დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} F(x,\ y,\ \lambda)&=0,\\ F_\lambda(x,\ y,\ \lambda)&=0. \end{aligned} \tag{21}$$

აქედან ჩანს, რომ დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები λ პარამეტრის ფუნქციებია. როცა λ იცვლება, ჩვენ მივიღებთ დამახასიათებელ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელსაც წირთა ოჯახის **მ ო მ ვ ლ ე ბ ი** ეწოდება. ამრიგად, წირთა ოჯახის მომვლები ასე განიმარტება:

განმარტება VIII: *წირთა ოჯახის წირების დამახასიათებელ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს ამ ოჯახის მომვლები ეწოდება.*

რადგან მომვლები ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წერტილთა სიმრავლისაგან შედგება, ამიტომ იგი საზოგადოდ წირია, ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში კი შესაძლებელია წერტილად გადაგვარდეს. მომვლების განტოლების მისაღებად საჭიროა (21) სისტემიდან გამოვრიცხოთ პარამეტრი. მაგალითად, თუ λ-ს ამოვხსნით ამ სისტემის მეორე განტოლებიდან, გვექნება:

$$\lambda=\lambda(x,\ y).$$

λ-ს მნიშვნელობის პირველ განტოლებაში ჩასმა მოგვცემს მომვლების ზოგად განტოლებას:

$$F(x,\ y,\ \lambda(x,\ y))\equiv\Phi(x,\ y)=0.$$

მომვლებს აქვს შემდეგი შესანიშნავი თვისება: *წირთა ოჯახის მომვლები მხებია ოჯახის ყოველი წირისა მის დამახასიათებელ წერტილში.* ამის დასამტკიცებლად საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ მომვლებს და (λ) წირს დამახასიათებელ წერტილში (ეს წერტილი მათი საერთო წერტილია) საერთო მხები აქვთ. (λ) წირის მხები განზღვრულია, თანახმად (7) განტოლებისა, F_x და F_y კოეფიციენტებით, მომვლების მხები კი Φ_x, Φ_y კოეფიციენტებით. რადგან

$$\Phi=F(x,\ y,\ \lambda(x,\ y)),$$

$$\Phi_x = F_x + F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

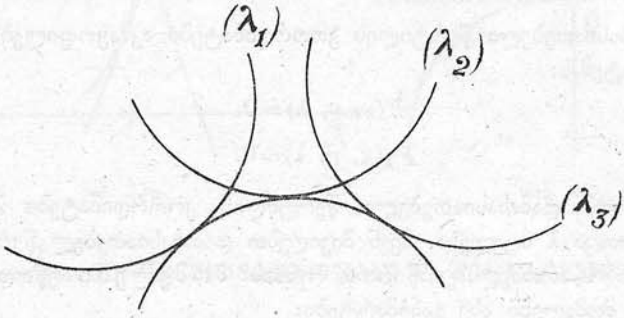
$$\Phi_y = F_y + F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

მაგრამ დამახასიათებელ წერტილში, თანახმად (20) ტოლობისა, $F_\lambda = 0$ და, მაშასადამე,

$$F_x = \Phi_x,$$

$$F_y = \Phi_y.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მომვლებს და (λ) წირს საერთო მხები აქვთ დამახასიათებელ წერტილში და გამოთქმული დებულება დამტკიცებულია. ამ თვისების მიხედვით, სახელწოდება „მომვლები" სავსებით გასაგებია: მომვლები ევლება (ეხება) წირთა



ნახ. 24

ოჯახის წირებს (ნახ. 24). ეს დებულება ძალას კარგავს იმ შემთხვევაში, როცა დამახასიათებელი წერტილები განკუთრი წერტილებია. ამ შემთხვევაში მომვლებს დისკრიმინანტული წირი ეწოდება.

მაგალითები. 1. მოვძებნოთ შემდეგ წრფეთა ოჯახის მომვლები:

$$y = 2\lambda x - \lambda^2.$$

ამ შემთხვევაში

$$F = 2\lambda x - y - \lambda^2.$$

პარამეტრის მიმართ გაწარმოებით მივიღებთ:

$$2x - 2\lambda = 0.$$

აქედან

$$\lambda = x.$$

λ-ს ეს მნიშვნელობა ოჯახის განტოლებაში რომ შევიტანოთ, მომვლების შემდეგ განტოლებას მივიღებთ:

$$y = x^2.$$

ამრიგად, წრფეთა აღებული ოჯახი პარაბოლის მხებთა სიმრავლე ყოფილა.

2. მოვძებნოთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლები, რომელნიც კოორდინატთა ღერძებთან მუდმივფართობიან სამკუთხედებს ქმნიან. წრფის განტოლება ასეთი სახით ავიღოთ (ნახ. 25):

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

წრფის მიერ შედგენილი სამკუთხედის ფართობი იქნება $\frac{1}{2}pq$, ამოცანის პირო-
ის თანახმად, pq უნდა იყოს მუდმივი, ე. ი.

$$pq=k=\text{const.}$$

ქედან

$$q=\frac{k}{p}.$$

მ მნიშვნელობის ჩასმის შემდეგ გვექნება:

$$\frac{x}{p}+\frac{yp}{k}=1.$$

მრიგად, მივიღეთ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ოჯახი.

ეს განტოლება რომ p-ს მიმართ გავაწარმოოთ, გვექნება:

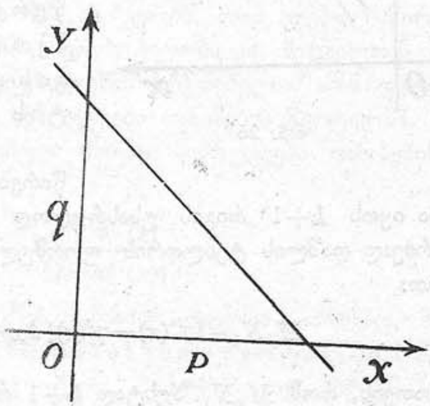
$$-\frac{x}{p^2}+\frac{y}{k}=0.$$

ქედან

$$p=\pm\sqrt{\frac{kx}{y}}.$$

-ს ამ მნიშვნელობის ჩასმა ოჯახის ანტოლებაში მოგვცემს მომვლების ანტოლებას:

$$xy=\frac{k}{4}.$$



ნახ. 25

მრიგად, აღნიშნულ წრფეთა ოჯახი ოფილა ტოლფერდა ჰიპერბოლის ებთა ოჯახი.

ამოცანები. 1. მოძებნეთ კოორდინატთა სათავიდან თანასწორად დაშო-ებულ წრფეთა ოჯახის მომვლების განტოლება.

2. r-რადიუსიანი წრეწირის ცენტრი მოძრაობს ელიფსზე, შეადგინეთ ასე ღებულ წრეწირთა ოჯახის მომვლების განტოლება.

შენიშვნა: საზოგადოდ შესაძლებელია განხილულ იქნეს რამდენიმე პარამეტრზე დამო-დებულ წირთა სიმრავლე. ასეთი სიმრავლეები ვრცლად შესწავლილია გ. ნიკოლაძის „დიფე-ენციალური გეომეტრიის ელემენტებში".

§ 9. წირთა თანახება

განვიხილოთ

$$y=f(x),$$
$$Y=\varphi(x)$$

ნტოლებებით მოცემული ორი წირი. დავუშვათ, რომ მათ აქვთ საერთო M წერ-ილი. ავიღოთ ამ წირებზე M წერტილის მეზობელი M_1, N_1 წერტილები, რომ-ებიც არგუმენტის $x+\Delta x$ მნიშვნელობას ეთანადებიან. მეზობელი წერტილების რდინატები იქნება შესაბამისად (ნახ. 26)

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$
$$y+\Delta Y=\varphi(x+\Delta x).$$

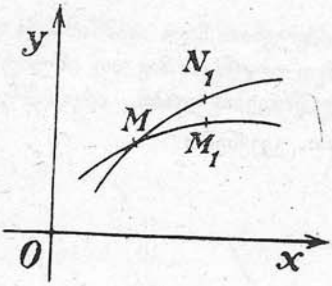
ამრიგად,

$$M_1=(x+\Delta x,\ y+\Delta y),$$
$$N_1=(x+\Delta x,\ y+\Delta Y).$$

აქედან

$$M_1N_1=\Delta y-\Delta Y=f(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x). \tag{22}$$

M_1N_1 უსასრულო მცირე ერთგვარად ახასიათებს აღებულ წირთა სიახლოვეს M წერტილის მახლობლობაში. ამ უსასრულო მცირის რიგის მიხედვით შემოდის აღებულ წირთა თანახების ცნება.



ნახ. 26

განმარტება IX. ორ მოცემულ წირს ეწოდება k რიგის თანამხები მათ საერთო M წერტილში, თუ ამ წირებზე საერთო წერტილის მეზობელი წერტილების ორდინატები ერთიმეორისაგან განსხვავდება $k+1$ რიგის უსასრულოდ მცირით არგუმენტის ნაზრდთან შედარებით.

ამ განმარტების თანახმად, თუ მოცემულ წირებს აქვთ k რიგის თანახება, მაშინ M_1N_1 უნდა იყოს $k+1$ რიგის უსასრულოდ მცირე Δx-თან შედარებით. ფუნქციათა მწკრივად დაშლის ტეილორის ფორმულის გამოყენებით, (22) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$M_1N_1=[f'(x)-\varphi'(x)]\,\Delta x+[f''(x)-\varphi''(x)]\,\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots$$

იმისათვის, რომ M_1N_1 ზუსტად $k+1$ რიგის უსასრულოდ მცირე იყოს Δx-თან შედარებით, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი შესაკრებები მოისპოს (ნულს გაუტოლდეს) k რიგამდე (ჩათვლით), ხოლო $k+1$ რიგის წევრი ნულისაგან განსხვავდებოდეს. ამრიგად, მოცემულ წირთა k რიგის თანახებისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათ საერთო წერტილში შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{aligned}
&f'(x)=\varphi'(x),\\
&f''(x)=\varphi''(x),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&f^{(k)}(x)=\varphi^{(k)}(x),\\
&f^{(k+1)}(x)\neq\varphi^{(k+1)}(x).
\end{aligned} \tag{23}$$

ეს პირობები შეიძლება სიტყვიერად შემდეგნაირად გამოითქვას: k რიგის თანახების დროს თანახების წერტილში მოცემულ წირთა გამომსახველი ფუნქციები და მათი წარმოებულები k რიგამდე ერთიმეორის ტოლია, ხოლო ამ ფუნქციათა $k+1$ რიგის წარმოებულები ერთიმეორისაგან განსხვავდება.

კერძო შემთხვევები. 1) წირთა პირველი რიგის თანახების შემთხვევაში (23) პირობები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$f'(x)=\varphi'(x),$$
$$f''(x)\neq\varphi''(x).$$

რადგან $f'(x)$ და $\varphi'(x)$ აღებულ წირთა მხებების საკუთხო კოეფიციენტებია საერთო წერტილში, ამიტომ აღებულ წირებს საერთო მხები აქვთ საერთო წერტილში, ე. ი. ისინი ერთიმეორეს ეხებიან. ამრიგად, **პირველი რიგის თანახება არის წირთა უბრალო შეხება თანახების წერტილში.** მაგალითად, წირის მხებ წრფეს წირთან აქვს პირველი რიგის თანახება შეხების წერტილში. აქედან აშკარაა, რომ წირის ყოველი ჩვეულებრივი წერტილისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი წრფე, რომელსაც წირთან ექნება პირველი რიგის თანახება ამ წერტილში. ეს იქნება წირის მხები წრფე აღებულ წერტილში.

2) წირთა მეორე რიგის თანახების შემთხვევაში (23) პირობები შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$f'(x)=\varphi'(x),$$
$$f''(x)=\varphi''(x),$$
$$f'''(x)\neq\varphi'''(x).$$

ამ პირობათაგან პირველი კვლავ იმას გვიჩვენებს, რომ აღებულ წირებს საერთო მხები აქვთ თანახების წერტილში. მეორე პირობა კი, პირველთან ერთად, წირთა შორის უფრო მჭიდრო დამოკიდებულების მაჩვენებელია. ამის დასადასტურებლად განვიხილოთ აღებულ წირთა სიმრუდეები თანახების წერტილში. სიმრუდის (17) ფორმულის თანახმად, მოცემულ წირთა სიმრუდეები თანახების წერტილში შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{3/2}},\quad \frac{\varphi''(x)}{[1+\varphi'^2(x)]^{3/2}}.$$

ეს გამოსახულებები, თანახების პირობების თანახმად, ტოლია. ამრიგად, **მეორე რიგის თანახების დროს წირებს თანახების წერტილში საერთო მხები და ერთნაირი სიმრუდე აქვთ.** პირიქით, თუ წირებს საერთო წერტილში საერთო მხები და ერთნაირი სიმრუდე აქვთ, მაშინ მათ ამ წერტილში ექნებათ თანახება არანაკლებ მეორე რიგისა, რადგან, ზემოაღნიშნულ პირობებში, წირების გამომსახველ ფუნქციებს ერთნაირი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები ექნებათ. მეორე რიგის თანამხებ წირებს **მიმხებ წირებსაც** უწოდებენ.

რადგან წრფის სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია, ამიტომ მოცემულ წრფეს რაიმე წირთან შეიძლება ჰქონდეს მეორე რიგის თანახება მხოლოდ იმ წერტილში, რომელზედაც წირის სიმრუდე ნულს უდრის. მაშასადამე, მეორე რიგის თანახების შემთხვევაში წირის განმსაზღვრელი ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ნული უნდა იყოს (სიმრუდე ნულია), ხოლო მესამე რიგის წარმოებული უნდა ნულისაგან განსხვავდებოდეს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თანახების წერტილი გადაღუნვის წერტილია. ამრიგად, **წრფეს მრუდთან ზუსტად მეორე რიგის თანახება ექნება, ე. ი. წრფე წირის მიმხები იქნება მხოლოდ გადაღუნვის წერტილში.**

აღვნიშნოთ წირთა მეორე რიგის თანახების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი თვისება. ავიღოთ თითოეულ წირზე M წერტილის ორ-ორი მეზობელი (უსასრულოდ მახლობელი) წერტილი, რომლებიც არგუმენტის საერთო x_1, x_2 მნიშვნელობებს შეესაბამებიან. ამრიგად, უსასრულოდ მახლობელი წერტილების (ნახ. 25) ორი სამეული განიხილება შესაბამისად:

$$M(x,\ y),\ M_1(x_1,\ y_1),\ M_2(x_2,\ y_2)$$

და

$$M(x,\ y),\ N_1(x_1,\ Y_1),\ N_2(x_2,\ Y_2).$$

თუ აღვნიშნავთ

$$x_1-x=\Delta x,\ x_2-x_1=\delta x_1,$$

გვექნება:

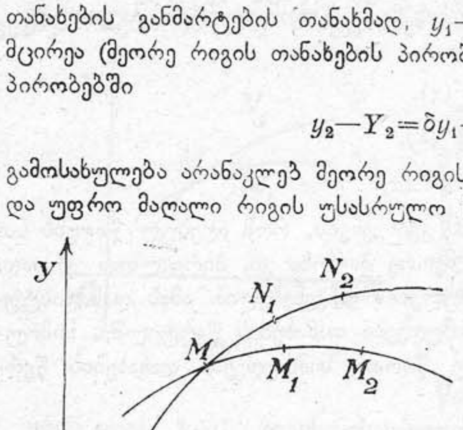
$$y_1=y+\Delta y,\quad y_2=y_1+\delta y_1,$$

$$Y_1=y+\Delta Y,\ Y_2=Y_1+\delta Y_1.$$

თანახების განმარტების თანახმად, $y_1-Y_1=\Delta y-\Delta Y$ მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეა (მეორე რიგის თანახების პირობებში). ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამავე პირობებში

$$y_2-Y_2=\delta y_1-\delta Y_1+y_1-Y_1$$

გამოსახულება არანაკლებ მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეა, ე. ი. თუ მეორე და უფრო მაღალი რიგის უსასრულო მცირეს არ მივიღებთ მხედველობაში, მაშინ $y_1=Y_1$ და $y_2=Y_2$. ამრიგად, შემდეგ დასკვნას მივიღებთ: თუ მეორე რიგის უსასრულო მცირეს გამოვრიცხავთ, მაშინ **წირთა მეორე რიგის თანახების დროს წირებს, თანახების წერტილის გარდა, კიდევ ამ წერტილის მეზობელი ორი საერთო წერტილი აქვს.**



ნახ. 27

ანალოგიურ თვისებას აქვს ადგილი k რიგის თანახების დროსაც. ამ შემთხვევაში M წერტილის მეზობელი წერტილები, k რაოდენობით აღებული, მოცემულ წირებზე ერთიმეორისაგან არანაკლებ მეორე რიგის უსასრულო მცირით განსხვავდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. წირთა თანახების თეორია მეტად მნიშვნელოვანია როგორც თავისთავად ისე უწყვეტი სისტემების შესასწავლად, უმთავრესად კი ალგებრული წირების გამოსაკვლევად. ამ თეორიის ზოგი ძირითადი საკითხი დამუშავებული იყო ცნობილი ქართველი გეომეტრის გ. ნიკოლაძის მიერ მის სადოქტორო დისერტაციაში, 1926—28 წლებში[4]. ამ თავის ბოლო პარაგრაფში მოყვანილი იქნება მოკლე მიმოხილვა გ. ნიკოლაძის მიერ ამ მიმართულებით მიღებული ზოგიერთი შედეგისა.

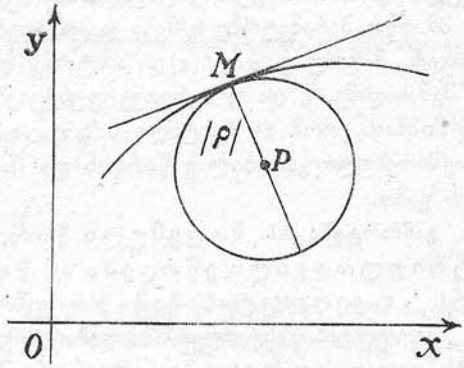
§ 10. სიმრუდის წრეწირი. სიმრუდის ცენტრი

განვიხილოთ წირზე რაიმე ჩვეულებრივი M წერტილი. დავუშვათ, რომ წირის სიმრუდის რადიუსი ამ წერტილში არის ρ. წირის ნორმალზე ავიღოთ P წერტილი $|\rho|$ მონაკვეთით დაშორებული M წერტილიდან წირის ჩაზნექილობისაკენ. შემოვხაზოთ $|\rho|$ რადიუსიანი წრეწირი P წერტილიდან. იგი შეეხება აღებულ წირს M წერტილში, რადგან წირის ნორმალი წრეწირის ნორმალიც იქნება

---

[4] G. Nicoladzé, Sur les systèmes continus des figures géométriques, Paris, 1928, არის ქართული თარგმანი: „გეომეტრიულ ნაკვთთა უწყვეტი თანაწყობების შესახებ", თბილისის მათ. ინსტ. შრომები, ტ. XV, 1947.

(მის ცენტრზე გადის), ხოლო წირის მხები კი — წრეწირის რადიუსის მართობი, რომელიც ცენტრიდან რადიუსის მანძილითაა დაშორებული (ნახ. 26). რადგან წირსა და წრეწირს M წერტილის მახლობლობაში ერთნაირი ჩაზნექილობა აქვს, ამიტომ მათი სიმრუდეების ნიშანი ერთნაირი იქნება. ამრიგად, ზემოაღწერილი წრეწირის სიმრუდის რადიუსი ტოლი იქნება თვით წირის სიმრუდის რადიუსისა განსახილავ M წერტილში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ზემოაღწერილ წრეწირს წირთან მეორე რიგის თანახება ექნება განსახილავ M წერტილში, ან, სხვანაირად, აღნიშნული წრეწირი წირის მიმხები წრეწირი იქნება M წერტილში. მიმხები წრეწირისა და მის ცენტრს მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს წირთა შესწავლისას და ამიტომ ჩვენ მის განხილვაზე დაწვრილებით შევჩერდებით.



ნახ. 28

განმარტება X. წირის მიმხებ წრეწირს M წერტილში ამ წირის სიმრუდის წრეწირი ეწოდება, ხოლო წრეწირის ცენტრს კი სიმრუდის ცენტრი M წერტილში.

სიმრუდის წრეწირის განტოლების შესადგენად საკმარისია განვსაზღვროთ ამ წრეწირის ცენტრის კოორდინატები, ე. ი. P წერტილის კოორდინატები. აღვნიშნოთ P წერტილის კოორდინატები ξ, η-თი. თუ წრეწირის მდინარე წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ X, Y-ით, მაშინ ამ წრეწირის განტოლება ასე დაიწერება:

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=\rho^2.$$

რადგან M წერტილში, მეორე რიგის თანახების პირობების თანახმად, უნდა გვქონდეს $Y'=y'$, $Y''=y''$, ამიტომ თუ გავაწარმოებთ ამ უკანასკნელ ტოლობას x-ით ორჯერ და ჩავსვამთ $X=x$, $Y=y$, მივიღებთ (გაწარმოების დროს ρ განიხილება როგორც მუდმივი:):

$$(x-\xi)+(y-\eta)\,y'=0,$$

$$1+y'^2+(y-\eta)\,y''=0.$$

აქედან ადვილად ამოიხსნება P წერტილის ξ, η კოორდინატები; გვექნება:

$$\begin{aligned} \xi&=x-\frac{1+y'^2}{y''}\,y', \\ \eta&=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \end{aligned} \qquad (24)$$

ზემომოყვანილი განმარტების თანახმად, სიმრუდის წრეწირის ცენტრი წირის სიმრუდის ცენტრია. ამიტომ (24) ფორმულები სიმრუდის ცენტრის კოორდინატებს განსაზღვრავს და სწორედ ამ მნიშვნელობით იქნება ეს ფორმულები განხილული ყოველთვის ამის შემდგომ.

ჩვენ ზემოთ განვმარტეთ წირის სიმრუდის ცენტრი რაიმე M წერტილში. როცა M წერტილი გადაინაცვლებს წირზე, მაშინ მისი შესაბამისი სიმრუდის ცენტრი გადაადგილდება სიბრტყეზე. რადგან M წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია ერთ პარამეტრზე (მაგალითად x-ზე), ამიტომ P წერტილის მდებარეობაც ამ ერთ პარამეტრზე იქნება დამოკიდებული. ეს აშკარად ჩანს (24) ფორმულებიდან. მართლაც, $y=f(x)$ და ამიტომ y' და y'' ფუნქციები იქნება x არგუმენტისა და, მაშასადამე, ξ და η აგრეთვე ფუნქციები იქნება იმავე x არგუმენტისა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ P წერტილი საზოგადოდ წირს აღწერს. ეს წირი მჭიდროდაა დაკავშირებული განსახილავ წირთან და საყურადღებოა თავისი ზოგიერთი თვისების გამო.

განმარტება XI. მოცემული წირის სიმრუდის ცენტრების გეომეტრიულ ადგილს ეწოდება ამ წირის ევოლუტი; თვით აღებულ წირს კი ევოლუტის მიმართ ეწოდება ევოლვენტი.

ევოლუტის განტოლება მიიღება (24) ფორმულებიდან, თუ მათში x არგუმენტს ცვლად პარამეტრად განვიხილავთ. მართლაც, (24) ფორმულები განსაზღვრავს სიმრუდის ცენტრის კოორდინატებს და მასში x-ის ცვლით მივიღებთ სიმრუდის ცენტრების გეომეტრიულ ადგილს, ე. ი. ევოლუტს. ამრიგად, (24) ტოლობები განიხილება როგორც ევოლუტის პარამეტრული განტოლება, სადაც პარამეტრი არის x. პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად მიიღება ξ და η ცვლადთა დამაკავშირებელი განტოლება, ე. ი. ევოლუტის განტოლება არაპარამეტრული სახით. ევოლუტის (24) განტოლება შეესაბამება წირის მოცემულობას ცხადი სახის განტოლებით. თუ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ დიფერენციალური აღრიცხვის ცნობილი ფორმულებით, რომლებიც ფუნქციის წარმოებულებს x-ის მიმართ გამოსახავენ პარამეტრის საშუალებით. ესენია:

$$y'=\frac{y_t'}{x_t'}, \quad y''=\frac{x_t'\,y_t''-y_t'\,x_t''}{x_t'^3}.$$

შევიტანოთ y' და y''-ს ეს მნიშვნელობები (24) ფორმულებში. მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\xi&=x-\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\,y',\\ \eta&=y+\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\,x',\end{aligned} \tag{25}$$

სადაც სიმარტივისათვის t ნიშნაკი (დამოუკიდებელ ცვლადზე მიმთითებელი) უკუგდებულია. ოღონდ უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ ფორმულებში გაწარმოება მიმდინარეობს პარამეტრის მიმართ.

წირის ევოლუტის შესახებ დავამტკიცებთ შემდეგ დებულებებს:

თეორემა 1. წირის ევოლუტი ამ წირის ნორმალთა ოჯახის მომვლებია.

ამ დებულების დასამტკიცებლად განვსაზღვროთ ნორმალთა ოჯახის მომვლები. ამისათვის ავიღოთ ნორმალის განტოლება

$$Y-y=-\frac{1}{y'}\,(X-x).$$

იგი შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$X-x+y'(Y-y)=0.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება x-ის მიმართ (ნორმალთა ოჯახის პარამეტრი არის x) მოგვცემს:

$$-1+y''(Y-y)-y'^2=0.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობიდან განიზღვრება აღებული ნორმალის დამახასიათებელი წერტილის X, Y კოორდინატები:

$$X=x-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot y',$$

$$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

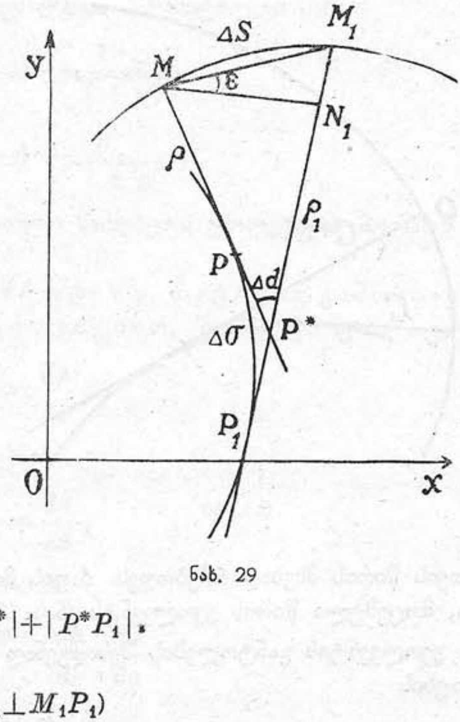
ამ ფორმულებს თუ შევადარებთ (24) **ფორმულებს, დავრწმუნდებით,** რომ აღებული ნორმალის დამახასიათებელი წერტილი **წირის სიმრუდის** ცენტრია M წერტილში. მაშასადამე, სიმრუდის ცენტრების გეომეტრიული ადგილი, ე. ი. ევოლუტი ნორმალთა ოჯახის დამახასიათებელი წერტილების გეომეტრიული ადგილი ანუ ნორმალთა ოჯახის მომვლები ყოფილა. ამით დებულება დამტკიცებულია.

თეორემა 2. *წირის აღებულ წერტილში სიმრუდის რადიუსის დიფერენციალის კვადრატი ტოლია ევოლუტის წირითი ელემენტისა M წერტილის შესაბამის P წერტილში.*

ეს დებულება მარტივად მტკიცდება ევოლუტის ზემოაღნიშნული თვისების გამოყენებით. ამისათვის განვიხილოთ წირის ორი მეზობელი ნორმალი M და N_1 წერტილებში. ეს ნორმალები, თანახმად წინა დებულებისა, ეხება ევოლუტს დამახასიათებელ წერტილებში, ანუ, რაც იგივეა, სიმრუდის ცენტრებში, ე. ი. P და P_1 წერტილებში. ამავე დროს, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული,

$$MP=\rho,\ M_1P_1=\rho_1=\rho+\Delta\rho.$$

ნორმალთა თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ P^*-ით (ნახ. 29). $\Delta\sigma$ იყოს ევოლუტის რკალის დიფერენციალი, ცხადია, რომ



ნახ. 29

$$\Delta\sigma\approx|PP^*|+|P^*P_1|.$$

MM_1N_1 სამკუთხედიდან

$$(MN_1\perp M_1P_1)$$

ვღებულობთ, რომ

$$N_1M_1=MM_1\sin\varepsilon.$$

რადგან MM_1, Δs და ε უსასრულოდ მცირეებია, ამიტომ N_1M_1 იქნება პირველზე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე. ამ პირობებში ნახაზიდან ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკიდებულება

$$|\Delta\rho|=|\rho_1-\rho|\approx|PP^*|+|P^*P_1|\approx\Delta\sigma,$$

საიდანაც აშკარაა, რომ

$$d\sigma^2=d\rho^2. \tag{26}$$

ამით დებულება დამტკიცებულია.

თუ σ-ს ავთვლით ρ-ს მზარდი მიმართულებით, მაშინ (26) ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$d\sigma=d\rho.$$

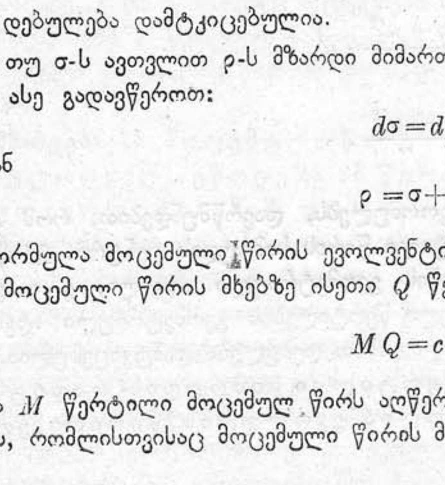
აქედან

$$\rho=\sigma+c. \tag{27}$$

ეს ფორმულა მოცემული წირის ევოლვენტის აგების საშუალებას იძლევა. ამისათვის მოცემული წირის მხებზე ისეთი Q წერტილი უნდა განვსაზღვროთ, რომ

$$MQ=c+\sigma.$$

როცა M წერტილი მოცემულ წირს აღწერს, მაშინ Q წერტილი აღწერს ევოლვენტს, რომლისთვისაც მოცემული წირის მხებ წრფეთა ოჯახი ნორმალთა ოჯახი იქნება. ამგვარად, ევოლვენტი წარმოგვიდგება, როგორც მოცემული წირის მხებ წრფეთა ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორია.



ნახ. 30

(27) ფორმულა საშუალებას იძლევა მოცემული წირის ევოლვენტი შემდეგნაირად იქნეს წარმოდგენილი.

მოცემულ წირზე მოვჭიმოთ ღუნადი (და უჭიმადი) ძაფი და ძაფის ერთ მხარეს დავტოვოთ გადაუჭიმავი ნაწილი, სიგრძით c მუდმივის ტოლი, ისე, რომ ძაფის დატოვებული ნაწილი მხების მდგომარეობაში იყოს წირის მიმართ, მოვახდინოთ ძაფის აცილება წირისაგან ისე, რომ იგი ამასთანავე ყოველთვის წირის მხებად რჩებოდეს. ძაფის მოძრავი ბოლო, თანახმად 27 ფორმულისა, მოცემული წირის ევოლვენტს (ნახ. 30) აღწერს.

ევოლვენტის განტოლების შესადგენად შემდეგნაირად მოვიქცეთ. სიმრუდის რადიუსის

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

ფორმულის თანახმად (24) ფორმულები ასე გადაიწერება:

$$\xi = x - \rho \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\eta = y + \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

როგორც აღნიშნული გვქონდა, ევოლვენტის მხები მართობია ევოლუტის მხებისა, ე. ი. $y' = -\frac{1}{\eta'}$ $\left(\text{სადაც ნაგულისხმევია, რომ } \eta' = \frac{d\eta}{d\xi}, \ y' = \frac{dy}{dx}\right)$. გარდა ამისა, რადგან $\rho = c + \sigma$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობები მოგვცემს:

$$x = \xi - (c+\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}},$$

$$y = \eta - (c+\sigma) \cdot \frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}.$$

სადაც იგულისხმება, რომ ξ, η მოცემული წირის მდინარე წერტილის კოორდინატებია, ხოლო x, y—საძიებელი ევოლვენტის მდინარე წერტილის კოორდინატები. რადგან მოცემული წირის მდინარე წერტილის კოორდინატები ზემოთ ყოველთვის x, y-ით გვქონდა აღნიშნული, ამიტომ, გაუგებრობის თავიდან ასაცილებლად, უკანასკნელ ფორმულებში ადგილი შევუნაცვლოთ x, y და ξ, η წყვილებს. ამავე დროს σ შევცვალოთ s-ით, მივიღებთ $y = f(x)$ განტოლებით მოცემული წირის ევოლვენტის შემდეგ განტოლებას პარამეტრული სახით

$$\begin{aligned} \xi &= x - (c+s) \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \\ \eta &= y - (c+s) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \end{aligned} \tag{28}$$

სადაც მდინარე პარამეტრი არის x, ხოლო საძიებელი ევოლვენტის მდინარე წერტილის კოორდინატებია ξ და η.

თეორემა: 3. ევოლუტის სიმრუდის ρ_1 რადიუსი გამოისახება, მოცემული წირის სიმრუდის რადიუსით, შემდეგი ფორმულით:

$$\rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds}.$$

მართლაც, 30-ე ნახაზის თანახმად გვექნება:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\alpha}{d\sigma},$$

რადგან $d\sigma = d\rho$ (იხ. ფორ. 26), ამიტომ

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\alpha}{d\rho} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{d\rho},$$

მაგრამ (ფორ. 16)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

ამიტომ,

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho}\frac{ds}{d\rho},$$

აქედან მივიღებთ:

$$\rho_1=\rho\frac{d\rho}{ds}.$$

ამით ზემოთ მოყვანილი დებულება დამტკიცებულია.

მაგალითები: 1. წ რ ფ ე. რადგან წრფის სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია, ხოლო სიმრუდის რადიუსი უსასრულოდ დიდია, ამიტომ წრფის სიმრუდის ცენტრები უსასრულეთში იქნება (ევოლუტი იქნება უსასრულოდ შორი წერტილი).

2. წ რ ე წ ი რ ი. რადგან წრეწირის ყოველ წერტილში სიმრუდის რადიუსი თვით წრეწირის რადიუსია, ხოლო ნორმალი წრეწირის ცენტრში გადის, ამიტომ წრეწირის სიმრუდის ცენტრი ყოველი წერტილისათვის თვით წრეწირის ცენტრი იქნება; მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ევოლუტი ერთ წერტილად (წრეწირის ცენტრად) გადაგვარდება.

3. გამოვიყვანოთ ე ლ ი ფ ს ი ს ევოლუტის განტოლება. ელიფსი ავიღოთ პარამეტრული განტოლებით:

$$x=a\cos t,$$

$$y=b\sin t.$$

გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$x'=-a\sin t,\quad x''=-a\cos t,$$

$$y'=b\cos t,\qquad y''=-b\sin t.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა ევოლუტის (25) განტოლებაში მოგვცემს:

$$\xi=a\cos t-\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}\cdot b\cos t=$$

$$=\cos t\left(a-\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{a}\right)=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta+b\sin t+\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}(-a\sin t)=$$

$$=\sin t\left(b-\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

მაშასადამე, ევოლუტის პარამეტრული განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$\xi=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

პარამეტრის გამორიცხვით აქედან მივიღებთ:

$$(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3},$$

ამრიგად, ელიფსის ევოლუტი არის ასტროიდი (ნახ. 31).

4. მოვძებნოთ ც ი კ ლ ო ი დ ი ს ევოლუტი. ამისათვის ავიღოთ ციკლოიდის პარამეტრული განტოლება

$$x=r(t-\sin t),$$
$$y=r(1-\cos t)$$

და გამოვითვალოთ x და y-ის წარმოებულები t-ს მიმართ, გვექნება:

$$x'=r(1-\cos t), \quad x''=r \sin t,$$
$$y'=r\sin t, \quad y''=r \cos t.$$

შევიტანოთ წარმოებულთა ეს მნიშვნელობები ევოლუტის (25) განტოლებაში; მივიღებთ:

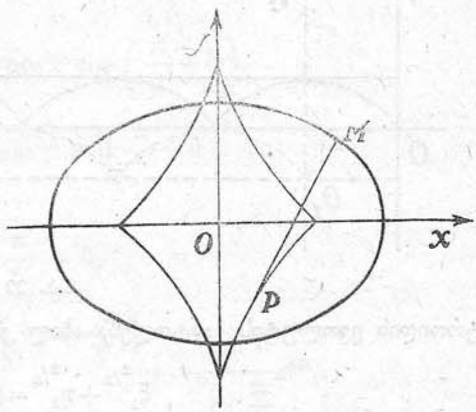
$$\xi=r(t+\sin t),$$
$$\eta=-r(1-\cos t).$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში $t=t_1+\pi$. გვექნება:

$$\xi=r\pi+r(t_1-\sin t_1),$$
$$\eta=-2r+r(1-\cos t_1).$$

მოვახდინოთ კოორდინატთა სისტემის სათავის გადატანა $(r\pi, -2r)$ წერტილში. გარდაქმნის ფორმულები იქნება:

$$\xi=\xi_1+r\pi,$$
$$\eta=\eta_1-2r.$$



ნახ. 31

ამ მნიშვნელობათა შეტანა წინა განტოლებებში მოგვცემს:

$$\xi_1=r(t_1-\sin t_1),$$
$$\eta_1=r(1-\cos t_1).$$

აქედან ჩანს, რომ ციკლოიდის ევოლუტი აგრეთვე ციკლოიდია და თან იმავე ზომისაა, როგორისაც აღებული ციკლოიდი ან, უკეთ რომ ვთქვათ, ციკლოიდის ევოლუტი არის თვით აღებული ციკლოიდი, სიბრტყის სხვა ადგილზე (ნახ. 32) გადატანილი.

5. გამოვიყვანოთ ა ს ტ რ ო ი დ ი ს ევოლუტის განტოლება. ასტროიდის განტოლება ავიღოთ შემდეგი სახით:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

აქედან ვპოულობთ

$$y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}, \quad y''=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^{2/3}}{x^{4/3}\,y^{1/3}}.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა ევოლუტის (25) განტოლებაში მოგვცემს:

$$\xi = x + 3x^{1/3} y^{2/3},$$

$$\eta = y + 3x^{2/3} y^{1/3}.$$

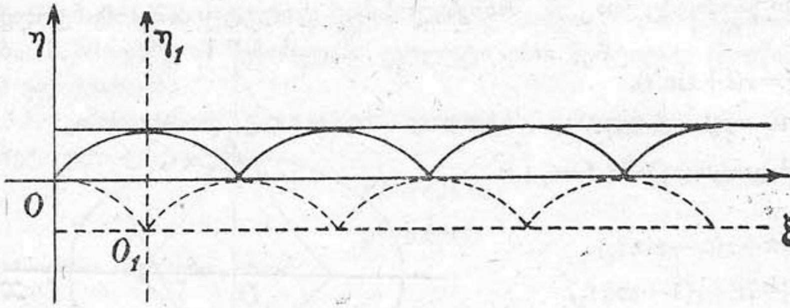
აქედან

$$(\xi+\eta)^{2/3} + (\xi-\eta)^{2/3} = 2a^{2/3}.$$

თუ კოორდინატთა სისტემას 45°-ით მოვაბრუნებთ, შემდეგ გარდაქმნებს მივიღებთ:

$$\xi + \eta = \sqrt{2}\, \xi_1,$$

$$\xi - \eta = \sqrt{2}\, \eta_1.$$



ნახ. 32

ასტროიდის ევოლუტის განტოლება ახალ კოორდინატებში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\xi_1^{2/3} + \eta_1^{2/3} = (2a)^{2/3}.$$

ამრიგად, ასტროიდის ევოლუტი აგრეთვე ასტროიდია, ოღონდ არა აღებული ასტროიდის ზომისა (ნახ. 7). ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ახალი ასტროიდი აღებული ასტროიდის მსგავსია (ნახ. 33).

6. ბოლოს გამოვითვალოთ ლოგარითმული ხვიის ევოლუტის განტოლება.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული ლოგარითმული ხვია შემდეგი განტოლებით (პოლარ კოორდინატებში)

$$r = ae^{b\vartheta}.$$

განსაზღვრულ მრუდს ეწოდება. გადავიდეთ დეკარტის კოორდინატებზე:

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta.$$

აქ r-ის მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს:

$$x = ae^{b\vartheta} \cos \vartheta,$$

$$y = ae^{b\vartheta} \sin \vartheta.$$

ეს არის ლოგარითმული ხვიის პარამეტრული განტოლება, სადაც პარამეტრად განიხილება ϑ. დანარჩენი სიდიდეები კი (a, b, e) მუდმივებია.

გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობები ϑ-ს მიმართ, გვექნება:

$$x' = ae^{b\vartheta}(b\cos\vartheta - \sin\vartheta),$$
$$y' = ae^{b\vartheta}(b\sin\vartheta + \cos\vartheta),$$
$$x'' = ae^{b\vartheta}((b^2-1)\cos\vartheta - 2b\sin\vartheta),$$
$$y'' = ae^{b\vartheta}((b^2-1)\sin\vartheta + 2b\cos\vartheta).$$

აქედან

$$x'^2 + y'^2 = a^2e^{2b\vartheta}(b^2+1),$$
$$x'y'' - y'x'' = a^2e^{2b\vartheta}(b^2+1).$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა ევოლუტის (25) განტოლებაში მოგვცემს:

$$\xi = ae^{b\vartheta}\cos\vartheta - ae^{b\vartheta}(b\sin\vartheta + \cos\vartheta),$$
$$\eta = ae^{b\vartheta}\sin\vartheta + ae^{b\vartheta}(b\cos\vartheta - \sin\vartheta),$$

საიდანაც

$$\xi = -abe^{b\vartheta}\sin\vartheta = abe^{b\vartheta}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right),$$

$$\eta = abe^{b\vartheta}\cos\vartheta = abe^{b\vartheta}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right).$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \vartheta,$$

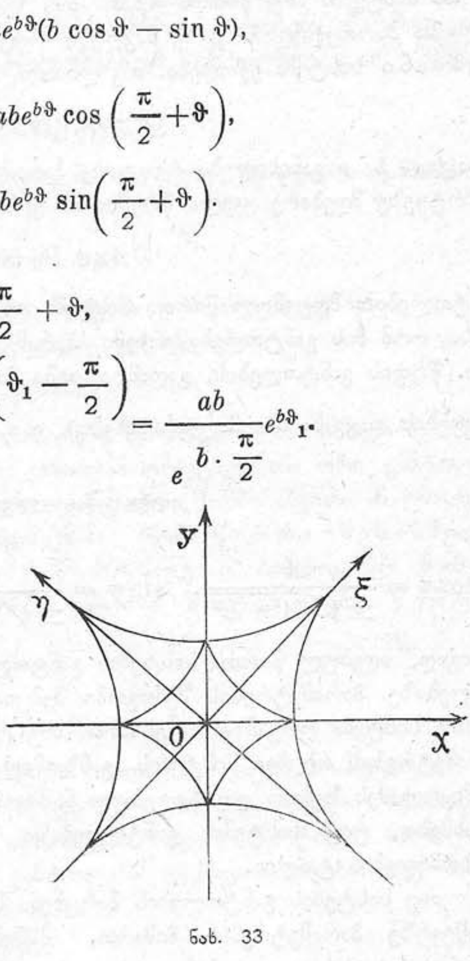
$$r_1 = abe^{b\vartheta} = abe^{b\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{ab}{e^{b\cdot\frac{\pi}{2}}}e^{b\vartheta_1}.$$

მივიღებთ:

$$\xi_1 = r_1\cos\vartheta_1,$$
$$\eta_1 = r_1\sin\vartheta_1.$$

ამრიგად, ϑ_1 და r_1 ყოფილა ევოლუტის წერტილის პოლარი კოორდინატები. ამიტომ განტოლება

$$r_1 = \frac{ab}{e^{\frac{\pi b}{2}}}e^{b\vartheta_1} = ce^{b\vartheta_1}$$



ნახ. 33

წარმოადგენს ევოლუტის განტოლებას პოლარ კოორდინატებში. ეს მრუდი კი, როგორც ჩანს, არის ლოგარითმული ხვია. ამრიგად, ლოგარითმული ხვიის ევოლუტი არის აგრეთვე ლოგარითმული ხვია. კერძოდ, თუ $c = a$, მაშინ ევოლუტი იქნება ისეთივე ფორმის ლოგარითმული ხვია, ე. ი. ევოლუტი განსხვავდება აღებული ლოგარითმული ხვიისაგან მხოლოდ მდებარეობით.

ა მ ო ც ა ნ ა. განსაზღვრეთ ის წირები, რომელთა ევოლუტები მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდება თვით აღებული წირებისაგან.

§ 12. წირთა უწყვეტი სისტემის ჯერადი წერტილების შესახებ

ზემოთ ჩვენ აღვნიშნეთ წირთა ერთპარამეტრიანი სისტემის ზოგიერთი თვისება. ახლა განვიხილავთ წირთა მრავალპარამეტრიან სისტემას. უმთავრესად აღნიშნული იქნება სისტემის ჯერადი წერტილების ზოგი შესანიშნავი თვისება, რომელიც აღმოჩენილი იყო გიორგი ნიკოლაძის მიერ (იხ. § 8-ის ბოლოში დასახელებული შრომა).

განვიხილოთ წირის განტოლება, რომელიც დამოკიდებულია $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ პარამე რებზე

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)=0.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობათა შესაბამისად ვღებულობთ წირთა სისტემას ანუ წირთა ოჯახს. თუ შეუძლებელია წირთა ამ სისტემის წარმოდგენა პარამეტრების p-ზე ნაკლები რიცხვით, მაშინ სისტემას p-განზომილებიანი სისტემა ეწოდება. მაგ ლითად, წირთა სისტემა

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

სადაც a, b, r განიხილება როგორც პარამეტრები, სამგანზომილებიანია. ეს არის სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრეწირთა ერთობლიობა. მაგრამ

$$Ax+By+C=0$$

განტოლებით მოცემულ წირთა სისტემა არ არის სამგანზომილებიანი, მიუხედავად იმისა, რომ მის განტოლებაში სამი პარამეტრი შედის; მართლაც, ამ განტოლების, ე. ი. წრფის განტოლების, გადამრავლება მანორმალებელ მამრავლზე (წრფის განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე), ე. ი. $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$-ზე, მოგვცემს:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-h=0,$$

სადაც

$$\cos\varphi=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\varphi=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad h=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ამრიგად, აღებულ წირთა სისტემის განტოლება დაიყვანება ორპარამეტრიან განტოლებაზე. პარამეტრების შემდგომი შემცირება შეუძლებელია· ამრიგად, აღებულ წირთა სისტემა ორგანზომილებიანია. თუ რა პირობებშია განტოლებაში შემავალი პარამეტრების რიცხვი სისტემის განზომილების ტოლი, ეს გამორკვეული აქვს გ. ნიკოლაძეს ზემოთ დასახელებულ ნაშრომში. ქვემოთ ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ სისტემის განტოლებაში შემავალი პარამეტრების რიცხვი მისი განზომილების ტოლია.

თუ სისტემის განტოლების მარცხენა მხარე დაიყვანება n-ური რიგის მრავალწევრზე პარამეტრების მიმართ, მაშინ სისტემას p-განზომილებიანი n-ური რიგის ალგებრული სისტემა ეწოდება. მისი განტოლება იქნება:

$$\varphi_0(x, y)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varphi_i(x, y)+\sum_{i, j=1}^{p}\lambda_i\lambda_j\varphi_{ij}(x, y)+\ldots=0.$$

კერძოდ, თუ განტოლების მარცხენა მხარის პარამეტრები შედის პირველ ხარისხ-

(ე. ი. $n=1$), მაშინ სისტემას წ რ ფ ი ვ ი სისტემა ეწოდება. წრფივი სისტემის
ნტოლება შემდეგი სახის იქნება:

$$\varphi_0(x, y)+\lambda_1\varphi_1(x, y)+\dots+\lambda_p\varphi_p(x, y)=0.$$

შემთხვევაში სისტემის განზომილება უდრის მის განტოლებაში შემავალი პარა-
ტრების რიცხვს, თუ $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო
ოცა ეს ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ სისტემის განზომილება
ზე ნაკლებია.

თუ სისტემის ყოველი წირი ერთ წერტილზე გადის, მაშინ ამ წერტილს
სტემის ფ უ ძ ე წ ე რ ტ ი ლ ს უწოდებენ. საზოგადოდ, წირთა სისტემას ფუძე
რტილები არა აქვს. ფუძე წერტილის არსებობა რაიმე სისტემისათვის ითვლება
ს ერთგვარ დამახასიათებელ თვისებად. ალგებრული სისტემის შემთხვევაში
უძე წერტილის არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს წარმოადგენს
ნტოლების კოეფიციენტების ნულთან ტოლობები ამ წერტილზე, ე. ი. შემდეგ
ოლობათა დაკმაყოფილება

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_i=0, \ \varphi_{ij}=0, \dots$$

რძოდ, თუ ალგებრული სისტემა წრფივია, მაშინ ფუძე წერტილის დამახასია-
ებელი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_1=0, \ \dots, \ \varphi_p=0.$$

აბოლოს, იმ შემთხვევაში, როცა წრფივი სისტემა ერთგანზომილებიანია, ე. ი.
ოცა ე. წ. წ ი რ თ ა წ რ ფ ი ვ ი კ ო ნ ა გვაქვს, ვღებულობთ:

$$\varphi_0=0, \ \varphi_1=0.$$

შემთხვევაში ფუძე წერტილის კოორდინატები წარმოგვიდგება როგორც ორი
რუცნობიანი განტოლების ამონახსნები. ვინაიდან ორუცნობიანი ორი განტოლე-
ის სისტემას ყოველთვის აქვს ამონახსნები (ნამდვილი, წარმოსახვითი ან უსასრუ-
ოდ დიდი), ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წ ი რ თ ა ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ
რ ფ ი ვ კ ო ნ ა ს მ ო ე პ ო ვ ე ბ ა ფ უ ძ ე წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი, სახელდობრ ნ ა მ დ-
ი ლ ი, წ ა რ მ ო ს ა ხ ვ ი თ ი ა ნ უ ს ა ს რ უ ლ ო დ შ ო რ ი ფ უ ძ ე წ ე რ ტ ი-
ე ბ ი.

მაგალითები. 1. განვიხილოთ

$$1-x-\lambda y+\mu xy-2\lambda\mu xy=0$$

ანტოლებით განსაზღვრული წირთა სისტემა, სადაც λ და μ პარამეტრებია. ეს
რის მეორე რიგის ორგანზომილებიანი ალგებრული სისტემა. ადვილი შესამოწმე-
ელია, რომ (1, 0) წერტილი არის ამ სისტემის ფუძე წერტილი; მართლაც,
ოგორიც არ უნდა იყოს λ და μ, ეს განტოლება დაკმაყოფილდება. თუ მასში
შევიტანთ $x=1$, $y=0$ მნიშვნელობებს.

2. განვიხილოთ წირთა წრფივი კონა

$$1-x+\lambda(y^2-1)=0$$

და მოვძებნოთ მისი ფუძე წერტილები. ამ შემთხვევაში

$$\varphi_0=1-x, \quad \varphi_1=y^2-1.$$

ამიტომ ფუძე წერტილების კოორდინატები ამონახსნები იქნება

$$1-x=0,$$

$$y^2-1=0$$

განტოლებათა სისტემის. აქედან მივიღებთ, რომ

$$x=1, \quad y=\pm 1.$$

ამრიგად, აღებულ სისტემას აქვს ორი ფუძე წერტილი: $M_1(1, 1)$ და $M_2(1, -1)$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ აღებული სისტემა M_1 და M_2 წერტილებზე გამავალი პარაბოლების ოჯახია.

3. ახლა განვიხილოთ წრეწირთა

$$x^2+y^2+\lambda(x-1)=0$$

ოჯახი; ამ შემთხვევაში

$$\varphi_0=x^2+y^2, \quad \varphi_1=x-1.$$

ამ სისტემის ფუძე წერტილების კოორდინატები ამონახსნები უნდა იყოს

$$x^2+y^2=0,$$

$$x-1=0$$

განტოლებათა სისტემისა. ამ ორ განტოლებას აკმაყოფილებს $(1, i)$ და $(1, -i)$ წერტილები. ამრიგად, $(1, i)$ და $(1, -i)$ წერტილები აღებული სისტემის ფუძე წერტილებს წარმოადგენს.

4. ბოლოს, განვიხილოთ პარალელურ წრფეთა ერთობლიობა

$$ax+by=\lambda,$$

სადაც a, b მუდმივებია, ხოლო λ პარამეტრია. როგორც ცნობილია, პარალელურ წრფეებს საერთო უსასრულოდ შორი წერტილი აქვს. ამრიგად, აღებული ფუძე წერტილი უსასრულოდ შორი წერტილი იქნება.

ახლა განვიხილოთ წირთა n-ური რიგის ალგებრული სისტემის რომელიმე გარკვეული (λ_j) წირის, ე. ი. პარამეტრთა λ_j მნიშვნელობების შესაბამისი წირის, მეზობელი $(\lambda_j+d\lambda_j)$ წირის განტოლება

$$\Phi=F(x, y, \lambda_1+d\lambda_1, \quad \lambda_2+d\lambda_2, \ldots, \lambda_p+d\lambda_p)=0.$$

თუ ამ განტოლების მარცხენა მხარეზე მდგომ ფუნქციას ტეილორის მწკრივად დავშლით $d\lambda_1, d\lambda_2, \ldots, d\lambda_p$ დიფერენციალების მიმართ, მივიღებთ:

$$\Phi=F+\sum_j F\lambda_j d\lambda_j+\frac{1}{2!}\sum_{j_1 j_2} F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\,d\lambda_{j_1}\,d\lambda_{j_2}+\cdots$$

$$+\quad \frac{1}{n!}\sum_{j_1\ldots j_n} F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_n}\,d\lambda_{j_1}\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{j_n}=0.$$

გამწკრივების დანარჩენი წევრები მოიხსნება, რადგან F ფუნქცია n-ური რიგისაა $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ პარამეტრების მიმართ და, მაშასადამე, მისი n-ზე მაღალი რიგის წარმოებულები პარამეტრების მიმართ ნულებია. ამიტომ ცხადია, რომ უკანასკნელი გამწკრივება სამართლიანია $d\lambda_1, d\lambda_2, \ldots d\lambda_p$ დიფერენციალების ყოველგვარ მნიშვნელობათათვის.

თუ ამ დიფერენციალებს მივცემთ მნიშვნელობებს $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, მაშინ უკანასკნელი განტოლებიდან აღებული სისტემის ნებისმიერ წირს მივიღებთ.

ამრიგად, უკანასკნელ განტოლებას შეიძლება შევხედოთ, როგორც აღებული სისტემის განტოლებას, სადაც პარამეტრებად განხილულია $d\lambda_1$, $d\lambda_2, \ldots, d\lambda_p$ დიფერენციალები. ოღონდ ვგულისხმობთ, რომ λ_j წირის მეზობელ წირთა სიმრავლე p განზომილებიანია, ე. ი. რომ არავითარი დამოკიდებულება არ არსებობს $d\lambda_1$, $d\lambda_2, \ldots, d\lambda_p$ პარამეტრებს შორის. ასეთ (λ_j) წირს სისტემის ზოგადური წირი ეწოდება.

ჩვენ ზემოთ აღნიშნული გვქონდა, რომ ალგებრული სისტემის ფუძე წერტილზე ნულს გაუტოლდება სისტემის განტოლების კოეფიციენტები (პარამეტრების ხარისხების წინ მდგომი კოეფიციენტები). რადგან მოცემული ალგებრული სისტემა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ უკანასკნელი განტოლებითაც, რომელიც $d\lambda_1$, $d\lambda_2, \ldots, d\lambda_p$ პარამეტრების მიმართაა აღებული, ამიტომ ამ სისტემის ფუძე წერტილისათვის დამახასიათებელი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$F=0,\ \lambda_j F=0,\ \ldots,\ \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_n}F=0.$$

ამგვარად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. იმისათვის, რომ რაიმე წერტილი წირთა n-ური რიგის ალგებრული სისტემის ფუძე წერტილი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილზე ისპობოდეს F ფუნქციის წარმოებულები პარამეტრების მიმართ n-ურ რიგამდე ჩათვლით (დანარჩენი წარმოებულები, ცხადია, თავისთავად მოისპობა).

ახლა დავამტკიცებთ ერთ შესანიშნავ დებულებას ალგებრული სისტემის წირთა ჯერადი წერტილების შესახებ, რომელიც ეკუთვნის გ. ნიკოლაძეს და რომლიდანაც ბერტინის ერთი დებულება გამომდინარეობს კერძო შემთხვევის სახით.

თეორემა 2 (ნიკოლაძის). თუ წირთა n-ური რიგის ალგებრული სისტემის ზოგადურ წირს აქვს k ჯერადი წერტილი და $k>n$, მაშინ ეს წერტილი აღებული სისტემისათვის $k-n$ (ან მეტი) ჯერადი ფუძე წერტილია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $M(x, y)$ წერტილი k ჯერადი წერტილია ზოგადური (λ_j) წირისა. თანახმად k ჯერადი წერტილის დამახასიათებელი პირობებისა, $F(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ ფუნქცია და მისი ნაწილობითი წარმოებულები x-ისა და y-ის მიმართ $M(x, y)$ წერტილში გამოთვლილი, ნული უნდა იყოს $k-1$ რიგამდე (ჩათვლით), ე. ი.

$$F=0,\ F_x=0,\ F_y=0, \ldots, F_{y^{k-1}}=0.$$

აქ $F_{y^{k-1}}$-ით აღნიშნულია F ფუნქციის $k-1$ რიგის ნაწილობითი წარმოებული y-ის მიმართ.

რადგან (λ_j) წირი ზოგადური წირია, ამიტომ მის მეზობელ $(\lambda_j+d\lambda_j)$ წირსაც უნდა ჰქონდეს $M(x, y)$ წერტილის მეზობელი k ჯერადი $M(x+dx,\ y+dy)$ წერტილი. ამრიგად, k ჯერადი წერტილის დამახასიათებელი ზემოთ მოცემული პირობები უნდა დაკმაყოფილდეს, თუკი მათში x, y, λ_j-ის ნაცვლად

$$x+dx,\quad y+dy,\quad \lambda_j+d\lambda_j$$

სიდიდეებს ჩავსვამთ. ჩასმის შემდეგ გვექნება:

$$F(x+dx,\ y+dy,\ \lambda_1+d\lambda_1,\ \lambda_2+d\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p+d\lambda_p)=0,$$

$$F_x(x+dx,\ y+dy,\ \lambda_1+d\lambda_1,\ \lambda_2+d\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p+d\lambda_p)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{yk-1}(x+dx,\ y+dy,\ \lambda_1+d\lambda_1,\ \lambda_2+d\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p+d\lambda_p)=0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლების მარცხენა მხარე დავშალოთ ტეილორის მწკრივად. მივიღებთ:

$$F+F_x dx+F_y dy+\sum_j F\lambda_j\, d\lambda_j+\frac{1}{2}\,(2)+\ldots$$

სადაც (2)-ით აღნიშნულია მეორე რიგის წევრთა ჯამი. მაგრამ, k ჯერადი წერტილის დამახასიათებელი ზემოაღნიშნული პირობების თანახმად, $F=0$, $F_x=0$, $F_y=0$. ამიტომ

$$\sum_j F\lambda_j d\lambda_j+\frac{1}{2}(2)+\ldots=0.$$

აქედან dx-ზე გაყოფისა და ზღვარზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\sum_j F\lambda_j\frac{d\lambda_j}{dx}=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\sum_j F\lambda_j\, d\lambda_j=0.$$

რადგან (λ_j) წირის მეზობელ წირთა სიმრავლე p-განზომილებიანია, ამიტომ $d\lambda_1,\ d\lambda_2,\ \ldots,\ d\lambda_p$ დამოუკიდებელი დიფერენციალებია. ამისათვის კი საჭიროა, რომ უკანასკნელი ტოლობის კოეფიციენტები ნულის ტოლი იყოს, ამრიგად, გვექნება:

$$F\lambda_j=0,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

სრულებით ანალოგიურად, მეორე და მესამე განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$F_{x\lambda j}=0,\ F_{y\lambda j}=0\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

დანარჩენი ტოლობებიდან, ანალოგიური მსჯელობითა და უკვე მიღებული პირობების გამოყენებით, მივიღებთ სხვა მსგავს განტოლებებს. ყველა ერთად გვაძლევს განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$F\lambda_j=0,\ Fx\lambda_j=0,\ Fy\lambda_j=0,\ \ F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}=0,\ \cdots,$$

$$Fy\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{jk-2},\quad F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{jk-1}=0.$$

ეს უკანასკნელი პირობები, k ჯერადი წერტილის პირობებთან ერთად, გვიჩვენებს, რომ თუ $M(x,\ y)$ წერტილი k ჯერადი წერტილია (λ_j) წირისა, მაშინ ამ წერტილზე F ფუნქცია და მისი ნაწილობითი წარმოებულები k რიგამდე x, y და λ_j-ის მიმართ ნულებია. ამ პირობებში, როგორც ნაწილი, შედის F ფუნქციისა და მისი პარამეტრების მიმართ წარმოებულების (k რიგამდე) ნულთან ტოლობა, ე. ი.

$$F=0,\ F\lambda_j=0,\ F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}=0,\ \ldots,\ F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{jk-1}=0.$$

რადგან $n<k$, ამიტომ $n \leqslant k-1$. მაშასადამე, ეს უკანასკნელი პირობები შეი-
ვავს შემდეგ პირობებსაც:

$$F=0,\ F\lambda_j=0,\ F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}=0,\ \ldots,\ F\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_n}=0,$$

რომლებიც წინა დებულების თანახმად, იმას გვიჩვენებენ, რომ $M(x, y)$ წერტილი ლებული n-ური რიგის ალგებრული სისტემის ფუძე წერტილია.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, n-ური რიგის ალგებრული სისტემა შეგ-იძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\Phi=F+\sum_{j} F\lambda_j d\lambda_j+\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{j_1\ldots j_n}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_n}F\,d\lambda_{j_1}d\lambda_{j_2}\cdots d\lambda_{j_n}=0.$$

ემოთ მიღებული პირობების თანახმად, Φ ფუნქციის წარმოებულები x-ისა და -ის მიმართ $k-n-1$ (ან მეტ) რიგამდე ნულებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M(x, y)$ ერტილი $k-n$ (ან მეტი) ჯერადი წერტილია ალგებრული სისტემის ყველა წი-ისათვის, ე. ი. რომ $M(x, y)$ წერტილი არის $k-n$ ან მეტი ჯერადობის ფუძე ერტილი და თეორემაც დამტკიცებულია.

ახლა, თუ დავუშვებთ რომ $n=1$, ე. ი. განვიხილავთ პირველი რიგის ალ-ებრულ სისტემას ანუ წრფივ სისტემას, მაშინ წინა დებულებიდან მივიღებთ მის რძო შემთხვევას, ე. წ. ბერტინის თეორემას.

თეორემა 3 (ბერტინის). თუ წრფივი ალგებრული სისტემის ოგადურ წირს აქვს k ჯერადი წერტილი, მაშინ ეს წერტილი თელი სისტემისათვის $k-1$ (ან მეტი) ჯერადობის ფუძე წერტი-ი იქნება.

თუ წერტილის k ჯერადობა ნაკლებია ალგებრული სისტემის რიგზე ($k<n$), შინ ეს წერტილი შეიძლება სისტემის ფუძე წერტილი აღარ იყოს, მაგრამ იგი ინც გარკვეული კანონზომიერებით იცვლება და ერთგვარად ახასიათებს სისტე-ს. ალგებრულ სისტემებთან დაკავშირებული ეს და აგრეთვე სხვა საინტერესო კითხები დამუშავებულია გ. ნიკოლაძის მიერ და მოთავსებულია მის ზემოთ და-ელებულ ნაშრომებში. ამ საკითხზე ჩვენ აქ ვერ შევჩერდებით; მოვიყვანთ ოლოდ ერთ მაგალითს, რომელიც თვით გ. ნიკოლაძესაც აქვს განხილული „დიფე-ნციალური გეომეტრიის ელემენტებში“. ეს არის სისტემა, რომელიც გამოსახუ-ა შემდეგი განტოლებით:

$$(x^2-y^2)^2-2x^2-2y^2+1+4\lambda xy(x^2-y^2)+\lambda^2(4x^2y^2-2x^2-2y^2+1)=0.$$

სისტემის ზოგადურ წირს ორჯერადი წერტილები აქვს. მართლაც, განტოლების წარმოება x-ისა და y-ის მიმართ მცირე გარდაქმნის შემდეგ მოგვცემს:

$$(x+\lambda y)(x^2-y^2+2\lambda xy)-x(\lambda^2+1)=0,$$

$$(y-\lambda y)(x^2-y^2+2\lambda xy)+y(\lambda^2+1)=0.$$

დან ადვილად მივიღებთ (ამ ორი ტოლობის ერთი მეორეზე გაყოფით), რომ

$$\frac{x+\lambda y}{y-\lambda x}=-\frac{x}{y},$$

საიდანაც

$$x^2-y^2=\frac{2xy}{\lambda}.$$

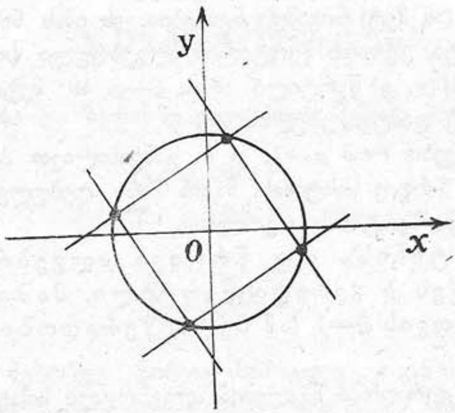
ამ მნიშვნელობის შეტანა წინა განტოლებათა სისტემაში x^2-y^2-ის ნაცვლად, მოგვცემს

$$2xy(x+\lambda y)\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)-x(\lambda^2+1)=0,$$

$$2xy(y-\lambda x)\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+y(\lambda^2+1)=0.$$

აქედან

$$2y(x+\lambda y)-\lambda=0,$$
$$2x(y-\lambda x)+\lambda=0.$$



ნახ. 34

თუ პირველს გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ:

$$2\lambda(x^2+y^2)=2\lambda,$$

საიდანაც

$$x^2+y^2=1.$$

ამრიგად, წირის ორჯერადი წერტილები წრეწირზე მდებარეობს. თვით სისტემის წირები კი გადაგვარებულია წრფეთა ოთხეულებად (კვადრატებად; ნახ. 34).

თ ა ვ ი II

ᲬᲘᲠᲗᲐ ᲖᲝᲒᲐᲓᲘ ᲗᲔᲝᲠᲘᲐ

§ 13. ᲕᲔᲥᲢᲝᲠᲗᲐ ᲐᲜᲐᲚᲘᲖᲘᲡ ᲔᲚᲔᲛᲔᲜᲢᲔᲑᲘ

ჩვენ ვიცით, თუ რამდენად სასარგებლოა ვექტორთა გამოყენება ანალიზურ გეომეტრიაში. კიდევ უფრო მრავალფეროვანია მათი გამოყენება დიფერენციალურ გეომეტრიაში. ანალიზურ გეომეტრიაში შეისწავლება და გამოიყენება ვექტორთა ალგებრის ელემენტები. დიფერენციალურ გეომეტრიაში კი ეს საკმარისი აღარ არის, რადგან აქ ძირითადი საანგარიშო აპარატი ანალიზია (დიფერენციალური აღრიცხვა), ამიტომ საჭიროა ვ ე ქ ტ ო რ თ ა ა ნ ა ლ ი ზ ი ს ძირითად ცნებათა ცოდნა, რაც აადვილებს დიფერენციალური გეომეტრიის მთავარი საკითხების საერთოდ შესწავლას. ვექტორთა ანალიზი ცვლად ვექტორებს შეისწავლის. ცვლადი ვექტორი კი შემდეგნაირად განიმარტება.

განმარტება XII. ვ ე ქ ტ ო რ ს ც ვ ლ ა დ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი ე წ ო დ ე ბ ა, თუ ც ვ ლ ა დ ი ა მ ი ს ი ს ი გ რ ძ ე ა ნ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა, ა ნ დ ა ო რ ი ვ ე ე რ თ ა დ. ვ ე ქ ტ ო რ ს მ უ დ მ ი ვ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი ე წ ო დ ე ბ ა, თ უ მ ი ს ი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა და ს ი გ რ ძ ე მ უ დ მ ი ვ ი ა. ც ხ ა დ ი ა, რ ო მ ც ვ ლ ა დ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ც ვ ლ ა დ ი ა, ხ ო ლ ო მ უ დ მ ი ვ ი ს ა კ ი მ უ დ მ ი ვ ი.

განმარტება XIII. ვ ე ქ ტ ო რ ს t პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა ე წ ო დ ე ბ ა, თ უ მ ი ს ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი t პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ა.

თუ ვექტორი t პარამეტრის ფუნქციაა, ეს ასე ჩაიწერება:

$$\overline{P}=\overline{P}(t). \tag{29}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ

$$\overline{P}=(X,\ Y,\ Z),$$

მაშინ

$$\begin{aligned} X&=X(t),\\ Y&=Y(t),\\ Z&=Z(t). \end{aligned} \tag{30}$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ (30) ტოლობებში ფუნქციებისა და ფუნქციონალური დამოკიდებულების სიმბოლოებად ერთი და იგივე ასოები გვაქვს ნახმარი, მაგალი-

თად, $X=X(t)$; ამ ტოლობაში X მარცხნივ აღნიშნავს ფუნქციას, ხოლო მარჯვნივ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. იგივე ითქმის (29) სიმბოლური ტოლობის შესახებაც: მარცხნივ $\overline{P}$ აღნიშნავს ფუნქციას, მარჯვნივ კი ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას. ასეთი აღნიშვნების გამო (30) ფორმულები წარმოგვიდგება როგორც შედეგი (29) სიმბოლური ტოლობის დაგეგმილებისა კოორდინატთა ღერძებზე. ამიტომ (29) ტოლობიდან (30) ტოლობაზე გადასვლას სიმბოლურ დაგეგმილებას უწოდებენ. სრულიად ანალოგიურად განიმარტება და ჩაიწერება ის ვექტორი, რომელიც ორი u, v პარამეტრის ფუნქციაა

$$\overline{P}=\overline{P}(u, v). \tag{31}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\begin{aligned} X&=X(u, v),\\ Y&=Y(u, v),\\ Z&=Z(u, v). \end{aligned} \tag{32}$$

ისე, როგორც სკალარული ცვლადის შემთხვევაში, ცვლადი ვექტორისათვისაც შემოდის ზღვარის ცნება.

განმარტება XIV. ცვლადი $\overline{P}$ ვექტორის ზღვარი ეწოდება ისეთ მუდმივ $\overline{P}_0$ ვექტორს, რომლის კოორდინატები აღებული $\overline{P}$ ვექტორის შესაბამისი კოორდინატების ზღვრებია.

აღნიშნულ დამოკიდებულებას ასე ჩავწერთ:

$$\lim \overline{P}=\overline{P}_0. \tag{33}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim X=X_0,\ \lim Y=Y_0,\ \lim Z=Z_0.$$

რადგან

$$\overline{P}=(X, Y, Z) \text{ და } \overline{P}_0=(X_0, Y_0, Z_0),$$

ამიტომ (33) ფორმულა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\lim (X, Y, Z)=(\lim X, \lim Y, \lim Z). \tag{34}$$

აქედან ჩანს, რომ ზღვრის ოპერაცია გადანაცვლებადია დაგეგმილების ოპერაციასთან. ამიტომ ზღვარზე გადასვლის ოპერაციის ჩვეულებრივი წესები გავრცელდება ვექტორთა ყველა იმ გამოსახულებებზე, რომლებშიც შემავალი ოპერაციები გადანაცვლებადია დაგეგმილების ოპერაციის მიმართ. მაგალითად,

$$\lim (\overline{P}+\overline{Q})=\lim \overline{P}+\lim \overline{Q},$$

$$\lim (\lambda \overline{P})=\lim\lambda.\lim \overline{P}.$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ზღვარის განხილვა მოგვცემს:

$$\lim(\overline{P}\,\overline{Q})=\lim(|\overline{P}|\ |\overline{Q}|\cos\vartheta)=|\lim \overline{P}|.|\lim \overline{Q}|\cdot\cos(\lim\vartheta)=\lim \overline{P}\cdot\lim \overline{Q}.$$

ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ზღვარი მათი ზღვრების სკალარული ნამრავლის ტოლია, სრულებით ანალოგიუ-

რად დამტკიცდება ასეთივე თვისება ორი ვექტორის გარე (ვექტორული) ნამრავლის შემთხვევაშიც. გარდა ამისა, (34) ფორმულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\lim \overline{P}_0 = \overline{P}_0,$$

ე. ი. მუდმივი ვექტორის ზღვარი თვით აღებული ვექტორია.

ცვლად ვექტორთან დაკავშირებით, ისევე როგორც სკალარული ცვლადების შემთხვევაში, შემოდის უსასრულოდ მცირე ვექტორის ცნება.

განმარტება XV. ვექტორს უსასრულოდ მცირე ეწოდება, თუ მისი კოორდინატები უსასრულოდ მცირეებია.

თუ ვექტორი უსასრულოდ მცირეა, მაშინ, თანახმად განმარტებისა, X, Y, Z უსასრულოდ მცირეები იქნება და, მაშასადამე, მათი ზღვრები ნულებია, ამიტომ

$$\lim \overline{P} = (\lim X,\ \lim Y,\ \lim Z) = (0,\ 0,\ 0),$$

ე. ი.

$$\lim \overline{P} = 0.$$

ამგვარად, უსასრულოდ მცირე ვექტორის ზღვარი ნულია. ამ თვისების გამო უსასრულოდ მცირე ვექტორთა ოპერაციებზე შეგვიძლია გავავრცელოთ ის წესები, რომლებიც ჩვეულებრივი უსასრულოდ მცირე ცვლადების მიმართ გვაქვს. ეს წესები შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:

1) უსასრულოდ მცირე ვექტორთა სასრულო რიცხვის ჯამი უსასრულოდ მცირე ვექტორია;

2) სკალარისა და ვექტორის ნამრავლი უსასრულოდ მცირე ვექტორია, თუ ერთი თანამამრავლთაგანი უსასრულოდ მცირეა;

3) ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა, თუ ერთი თანამამრავლთაგანი უსასრულოდ მცირეა. სკალარული ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა იმ შემთხვევაშიც, როცა თანამამრავლ ვექტორთა შორის მდებარე კუთხე $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$;

4) ორი ვექტორის გარე (ვექტორული) ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა, თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი უსასრულოდ მცირეა. გარე ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა იმ შემთხვევაშიც, როცა თანამამრავლ ვექტორთა შორის მდებარე კუთხე $\vartheta \to 0$.

ისე, როგორც ჩვეულებრივი ცვლადების შემთხვევაში, აქაც შემოდის უსასრულოდ მცირე ვექტორის რიგის ცნება. სახელდობრ, ვექტორის სიგრძის რიგს უწოდებენ თვით ვექტორის რიგს. შემოდის აგრეთვე ტოლფასი უსასრულოდ მცირე ვექტორების ცნება. ორ ვექტორს ტოლფას უსასრულოდ მცირე ვექტორებს უწოდებენ, თუ მათი სხვაობა უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ვექტორია, ვიდრე თვით აღებული ვექტორები.

განვიხილოთ ახლა ვექტორი, როგორც ერთი პარამეტრის ფუნქცია

$$\overline{P} = \overline{P}(t).$$

მივცეთ t-ს ნაზრდი Δt, მაშინ ვექტორიც სხვა მნიშვნელობას მიიღებს და გვექნება:

$$\overline{P}_1=\overline{P}(t+\triangle t).$$

$\overline{P}_1-\overline{P}$ სხვაობას $\overline{P}$ ვექტორის ნაზრდი ეწოდება და $\Delta\overline{P}$-თი აღინიშნება. გვექნება:

$$\triangle\overline{P}=\overline{P}_1-\overline{P}=\overline{P}(t+\triangle t)-\overline{P}(t).$$

თანახმად (30) ტოლობებისა, როცა t მიიღებს Δt ნაზრდს, მაშინ X, Y, Z აგრეთვე მიიღებენ შესაბამისად ΔX, ΔY, ΔZ ნაზრდებს. მაშასადამე, გვექნება:

$$\overline{P}_1=(X+\triangle X,\ Y+\triangle Y,\ Z+\triangle Z).$$

რადგან

$$\overline{P}=(X,\ Y,\ Z),$$

ამიტომ

$$\triangle\overline{P}=\overline{P}_1-\overline{P}=(\triangle X,\ \triangle Y,\ \triangle Z). \tag{35}$$

ამრიგად, ვექტორის ნაზრდის კოორდინატები თვით ვექტორის კოორდინატების ნაზრდებია.

განმარტება XVI. ვექტორის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფვის, ვექტორის წარმოებული ეწოდება.

წარმოებული აღინიშნება სიმბოლოთი $\overline{P}'$ ან $\dfrac{d\overline{P}}{dt}$, სადაც $d\overline{P}$-ს ვექტორის დიფერენციალი ეწოდება. ამგვარად, ვექტორის წარმოებული ისევ ვექტორია.

განმარტების თანახმად

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle\overline{P}}{\triangle t}=\overline{P}'=\frac{d\,\overline{P}}{dt}. \tag{36}$$

(35) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$\frac{\triangle\overline{P}}{\triangle t}=\left(\frac{\triangle X}{\triangle t},\ \ \frac{\wedge Y}{\triangle t},\ \ \frac{\triangle Z}{\triangle t}\right).$$

აქედან

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle\overline{P}}{\triangle t}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle X}{\triangle t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle Y}{\triangle t},\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle Z}{\triangle t}\right).$$

მეორე მხრივ, ანალიზიდან ცნობილია, რომ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle X}{\triangle t}=X';\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle Y}{\triangle t}=Y';\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle Z}{\triangle t}=Z'.$$

მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\overline{P}'=(X',\ V',\ Z'). \tag{37}$$

აქედან ჩანს, რომ ვექტორის წარმოებულის კოორდინატები თვით აღებული ვექტორის კოორდინატების წარმოებულებია.

ამრიგად, გაწარმოების ოპერაცია გადანაცვლებადია დაგეგმილების ოპერა- მიმართ. ეს საშუალებას გვაძლევს დაუმტკიცებლად გავავრცელოთ გაწარ-ის წესები ვექტორულ გამოსახულებებზე.

(37) ფორმულა შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$\frac{d\overline{P}}{dt}=\left(\frac{dX}{dt},\ \frac{dY}{dt},\ \frac{dZ}{dt}\right).$$

ან

$$d\overline{P}=(dX, dY, dZ). \tag{38}$$

გად, ვ ე ქ ტ ო რ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი თ ვ ი თ ვ ე ქ-რ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ე ბ ი ა. გადიფერენციალების რაცია აგრეთვე გადანაცვლებადია დაგეგმილების ოპერაციის მიმართ; რადგან ვექ-ებზე ვრცელდება ზღვრის ოპერაციის წესები, ამიტომ შეგვიძლია დიფერენ-ლისათვის ამოვწეროთ შემდეგი ფორმულები:

1) $d(\overline{P}+\overline{Q}) = d\overline{P}+d\overline{Q},$

2) $d(\lambda\,.\,\overline{Q})=d\lambda\,.\,\overline{Q}+\lambda d\overline{Q},$

3) $d(\overline{P}\cdot\overline{Q})=\overline{P}\cdot d\overline{Q}+\overline{Q}\cdot d\overline{P},$

4) $d[\overline{P},\ \overline{Q}=d\overline{P},\ \overline{Q}]+[\overline{P},\ d\overline{Q}],$

5) $d\overline{P}=0,$ თუ $\overline{P}$ მუდმივია.

ლარული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულის მსგავსად შემოდის ცნება ორის მაღალი რიგის წარმოებულისა. მეორე რიგის წარმოებული ეწოდება ველი რიგის წარმოებულის წარმოებულს და ა. შ. მაღალი რიგის წარმოებუ-ი ასე აღინიშნება: $\overline{P}'',\ \overline{P}''',\dots$

რადგან $\overline{P}'=(X',\ Y',\ Z')$, ამიტომ

$$\overline{P}''=(X'',\ Y'',\ Z''),\ \overline{P}'''=(X'''\cdot\ Y''',\ Z'''),\ \dots$$

ვექტორი ორი u და v პარამეტრის ფუნქციაა, მაშინ ვექტორისათვის შემოდის ლობითი წარმოებულის ცნება ისევე, როგორც ეს ჩვეულებრივი სკალარული ქციებისათვის არის ცნობილი. აღნიშვნები ასეთია:

$$\frac{\partial\overline{P}}{\partial u}=\overline{P}u,\quad \frac{\partial\,\overline{P}}{\partial v}=\overline{P}v,$$

$$\frac{\partial^2\overline{P}}{\partial u^2}=\overline{P}_{uu},\ \frac{\partial^2\overline{P}}{\partial u\partial v}=\overline{P}_{uv},\ \frac{\partial^2\overline{P}}{\partial v^2}=P_{vv},\dots$$

შემოდის აგრეთვე ცნება სრული დიფერენციალისა, რომელიც შემდეგი ფორ-ლით განიმარტება (ორი ცვლადისათვის):

$$d\overline{P}=\overline{P}_u du+\overline{P}_v dv. \tag{39}$$

რე რიგის დიფერენციალი ასე განისაზღვრება:

$$d^2\overline{P}=P_{uu}\,du^2+2\overline{P}_{uv}dudv+\overline{P}_{vv}dv^2. \tag{40}$$

ვექტორის ნაზრდისთვის არსებობს მწკრივად დაშლის შემდეგი ფორმულა:

$$\triangle \overline{P}= d\overline{P} + \frac{1}{2!}d^2\overline{P}+\cdots \tag{41}$$

მართლაც, თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, (ფორმალურად) მივიღებთ ტ ე ი ლ ო რ ი ს სამ ჩვეულებრივ მწკრივს კოორდინატების ნაზრდებისათვის:

$$\begin{aligned} \triangle X &= dX+\frac{1}{2!}d^2X+\cdots, \\ \triangle Y &= dY+\frac{1}{2!}d^2Y+\cdots, \\ \triangle Z &= dZ+\frac{1}{2!}d^2Z+\cdots \end{aligned} \tag{42}$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ (41) ფორმულა გამოსადეგია როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციის, ისე მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში. ერთი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში დიფერენციალები $d\overline{P}, d^2\overline{P},\dots$ ჩვეულებრივი დიფერენციალებია, ე. ი.

$$d\overline{P}=\overline{P}'dt,\ \ d^2\overline{P}=\overline{P}''dt^2,\dots$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში კი $d\overline{P},\ \ d^2\overline{P},\dots$ სრული დიფერენციალებია, რომლებიც (39), (40) ფორმულებითაა მოცემული.

თუმცა კვლევის ობიექტს, ნაკვთზე მოძრავ წერტილს, შეგვიძლია ვექტორი მრავალი წესით დავუკავშიროთ, მაგალითად, დავუკავშიროთ ამ წერტილის რადიუს-ვექტორი $\overline{OM}$, მაგრამ უმჯობესია, კვლევის ობიექტი არ შევცვალოთ და იგი უშუალოდ შევისწავლოთ. ამისათვის საჭიროა ანალიზი თვით კვლევის ობიექტს ანუ ნაკვთის მდინარე წერტილს დავუკავშიროთ. ცხადია, მდინარე წერტილი ცვლადი წერტილია. თუ ნაკვთი წირია, მაშინ მდინარე წერტილი ერთ პარამეტრზე იქნება დამოკიდებული

$$M=M(t). \tag{43}$$

განვიხილოთ M წერტილის მახლობელი წერტილი, რომელიც პარამეტრის ცვლით მიიღება:

$$M_1=M(t_1),$$

სადაც

$$t_1=t+\triangle t.$$

$\overline{MM_1}$ ვექტორს M წერტილის ნაზრდი ეწოდება და $\triangle \overline{M}$-ით აღინიშნება. ამრიგად,

$$\triangle \overline{M}=\overline{MM_1}=M_1-M. \tag{44}$$

მაშასადამე, წერტილის ნაზრდი არის ვექტორი. თუ

$$M=(x,\ y,\ z), \tag{45}$$

მაშინ

$$M_1=(x+\triangle x,\ y+\triangle y,\ z+\triangle z)$$

და ამიტომ

$$\triangle \overline{M}=(\triangle x,\ \triangle y,\ \triangle z). \tag{46}$$

ახლა უკვე შესაძლებელია წერტილის წარმოებულის ცნების შემოყვანა.

განმარტება XVII. წ ე რ ტ ი ლ ი ს ნ ა ზ რ დ ი ს ა და ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი ს ნ ა ზ რ დ ი ს შ ე ფ ა რ დ ე ბ ი ს ზ ღ ვ ა რ ს, რ ო ც ა ა რ გ უ მ ე ნ ტ ი ს ნ ა ზ რ დ ი ნ უ ლ ი ს ა კ ე ნ მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ი ს, წ ე რ ტ ი ლ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ე წ ო დ ე ბ ა.

წერტილის წარმოებული არის ვექტორი (რადგან ნაზრდი ვექტორია) და იგი აღინიშნება

$$\overline{M}' \text{ ან } \frac{d\overline{M}}{dt} \tag{47}$$

სიმბოლოთი, სადაც $d\overline{M}$-ს ეწოდება წერტილის დიფერენციალი. განმარტების თანახმად, გვექნება:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\triangle \overline{M}}{\triangle t}=\overline{M}'=\frac{d\overline{M}}{dt}. \tag{48}$$

(46) ფორმულის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\triangle \overline{M}}{\triangle t}=\left(\frac{\triangle x}{\triangle t},\ \frac{\triangle y}{\triangle t},\ \frac{\triangle z}{\triangle t}\right).$$

ზღვარზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$M'=(x',\ y',\ z'). \tag{49}$$

აქედან ჩანს, რომ წ ე რ ტ ი ლ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი თ ვ ი თ წ ე რ ტ ი ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი ა შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ა დ. შესაძლებელია (49) ფორმულა ასე დავწეროთ:

$$\frac{d\overline{M}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right),$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$d\overline{M}=(dx,\ dy,\ dz). \tag{50}$$

ამრიგად, წ ე რ ტ ი ლ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი თ ვ ი თ წ ე რ ტ ი ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ე ბ ი ა.

მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები (49), (50) ფორმულების მიხედვით ადვილად მიიღება. მაგალითად, მეორე რიგის წარმოებულისა და დიფერენციალისათვის გვექნება:

$$\overline{M}''=(x'',\ y'',\ z''), \tag{51}$$

$$d^2\overline{M}=(d^2x,\ d^2y,\ d^2z). \tag{52}$$

თუ წერტილი ორი u და v პარამეტრის ფუნქციაა, ე. ი.

$$M=M(u,\ v),$$

მაშინ შემოდის ცნება ნაწილობითი წარმოებულებისა, რომლებიც ასე აღინიშნებიან

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial u}=\overline{M}_u,\ \frac{\partial \overline{M}}{\partial v}=\overline{M}_v,$$

$$\frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial u^2}=\overline{M}_{uu},\quad \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial u \partial v}=\overline{M}_{uv},\ \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial v^2}=\overline{M}_{vv},\dots$$

შემოდის აგრეთვე ცნება სრული დიფერენციალებისა შემდეგი ფორმულების მიხედვით:

$$d\overline{M}=\overline{M}_u du+\overline{M}_v dv, \tag{53}$$

$$d^2\overline{M}=\overline{M}_{uu}du^2+2\overline{M}uvdudv+\overline{M}_{vv}dv^2,\dots \tag{54}$$

ვექტორის ნაზრდის ანალოგიურად წერტილის ნაზრდისათვისაც ტეილორის მწკრივი შემდეგი ფორმულით განიმარტება:

$$\triangle \overline{M}=d\overline{M}+\frac{1}{2!}d^2\overline{M}+\cdots \tag{55}$$

თუ ამ ტოლობას კოორდინატთა ღერძებზე დავაგეგმილებთ, მივიღებთ სამ ჩვეულებრივ გამწკრივებას წერტილის კოორდინატების ნაზრდებისათვის

$$\begin{gathered}\triangle x=dx+\frac{1}{2!}d^2x+\cdots,\\ \triangle y=dy+\frac{1}{2!}d^2y+\cdots,\\ \triangle z=dz+\frac{1}{2!}d^2z+\cdots\end{gathered} \tag{56}$$

მაგალითი. განვიხილოთ მუდმივსიგრძიანი ვექტორის წარმოებული. მუდმივსიგრძიანი ვექტორი ასეთ პირობას აკმაყოფილებს:

$$\overline{P}^2=\text{const}.$$

აქედან

$$\overline{P}\frac{d\overline{P}}{dt}=0,$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მუდმივსიგრძიანი ვექტორის წარმოებული და, მაშასადამე, დიფერენციალიც მართობია თვით აღებული ვექტორისა.

შენიშვნა. შემდგომი მსჯელობის გამარტივების მიზნით შევთანხმდეთ, რომ რაიმე სიდიდის პირველი რიგის სიზუსტით განხილვა მეორე რიგის უსასრულოდ მცირის გამორიცხვას აღნიშნავდეს, ორი სიდიდის პირველი რიგის სიზუსტით თანატოლობა მათ შორის მეორე რიგის უსასრულოდ მცირით განსხვავებას აღნიშნავდეს და ა. შ.

§ 14. გრეხილი წირი. მხები წრფე

გრეხილი წირი ეწოდება ისეთ წირს, რომელიც ბრტყელი არ არის, ე. ი. რომლის ყველა წერტილი ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს. გრეხილი წირის მდინარე წერტილს აქვს სამი კოორდინატი x, y, z. გრეხილი წირის სიმბოლური განტოლება იქნება:

$$M = M(t). \tag{57}$$

კოორდინატებში კი (დაგეგმილების შედეგად) გვექნება სამი ჩვეულებრივი განტოლება:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \tag{58}$$

თუ გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ ორ განტოლებას x, y, z შორის

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \tag{59}$$

ამ უკანასკნელ სისტემას ეწოდება გრეხილი წირის ზოგადი განტოლება. ამ განტოლებით წირი წარმოიდგინება როგორც ორი ზედაპირის თანაკვეთა.

გრეხილი წირის მხები ისევე განიმარტება, როგორც ბრტყელი წირის მხები. წირის განტოლება ავიღოთ სიმბოლური სახით და განვიხილოთ ამ წირზე ორი მეზობელი M და M_1 წერტილი

$$M = (x, y, z), \; M_1 = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z).$$

მკვეთ წრფეს განსაზღვრავს M წერტილი და $\overline{MM_1}$ ვექტორი. მაგრამ

$$\overline{MM_1} = \Delta \overline{M}.$$

ამრიგად, $\Delta \overline{M}$ განსაზღვრავს მკვეთი წრფის მიმართულებას; ცხადია, რომ იმავე მიმართულებას განსაზღვრავს ვექტორი $\dfrac{\Delta \overline{M}}{\Delta t}$. რადგან მკვეთის ზღვარი მხებია, ამიტომ $\dfrac{\Delta \overline{M}}{\Delta t}$ ვექტორის ზღვარი განსაზღვრავს მხების მიმართულებას, ე. ი. $\overline{M}'$ განსაზღვრავს მხების მიმართულებას. შეგვიძლია ეს ვექტორი მოვდოთ წერტილს; მაშინ იგი მოთავსდება მხებზე (ნახ. 33).

მხები წრფის მდინარე წერტილი P-თი აღვნიშნოთ. აშკარაა, რომ $\overline{MP} \parallel \overline{M}'$. პარალელობის ეს დამოკიდებულება ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\overline{MP} = \lambda \overline{M}'.$$

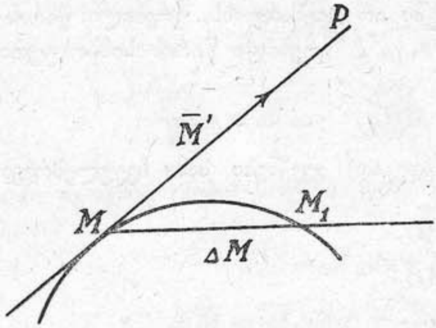
$\overline{MP}$ ვექტორი წარმოვიდგინოთ, როგორც P და M წერტილების სიმბოლური სხვაობა

$$\overline{MP} = P - M.$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ საბოლოოდ:

$$P = M + \lambda \overline{M}'. \tag{60}$$

ამრიგად, მხების მდინარე P წერტილი გამოვსახეთ ცნობილი ელემენტებით: ხების M წერტილითა და წერტილის წარმოებულით, რომელიც გამოთვლილია ხების წერტილზე. ამ განტოლებაში λ მდინარე პარამეტრია, მისი ცვლა იწვევს P წერტილის მოძრაობას მხებზე. მხების ჩვეულებრივი განტოლების მისაღებად უნდა დავაგეგმილოთ მისი სიმბოლური განტოლება კოორდინატთა ღერძებზე და გამოვრიცხოთ პარამეტრი. თუ P წერტილის კოორდინატებს X, Y, Z-ით აღვნიშნავთ და გავიხსენებთ, რომ



ნახ. 35

$$M=(x, y, z), \quad \overline{M}'=(x', y', z'),$$

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} X&=x+\lambda x', \\ Y&=y+\lambda y', \\ Z&=z+\lambda z'. \end{aligned} \tag{61}$$

სამივე განტოლებიდან λ რომ განვსაზღვროთ და ერთიმეორეს შევადაროთ, მივიღებთ:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}. \tag{62}$$

თუ წირის განტოლება ზოგადი სახით არის მოცემული, მაშინ ჯერ გადავიდეთ პარამეტრულ განტოლებაზე და შემდეგ (62) განტოლება გამოვიყენოთ. პარამეტრულ განტოლებაზე გადასასვლელად კი საკმარისია x ავიღოთ t პარამეტრის რაიმე ფუნქციად და სათანადო y და z ამოვხსნათ (59) ტოლობათაგან. y და z-იც იქნება t-ს ფუნქციები. გავაწარმოოთ (59) განტოლებები t პარამეტრის მიმართ (x, y, z ფუნქციებია t პარამეტრისა), გვექნება:

$$\begin{aligned} F_x x' + F_y y' + F_z z' &= 0, \\ \Phi_x x' + \Phi_y y' + \Phi_z z' &= 0. \end{aligned}$$

აქედან ვპოულობთ:

$$\frac{x'}{z'}=\frac{F_y\Phi_z-F_z\Phi_y}{F_x\Phi_y-F_y\Phi_x},$$

$$\frac{y'}{z'}=\frac{F_z\Phi_x-F_x\Phi_z}{F_x\Phi_y-F_y\Phi_x}.$$

მეორე მხრივ. (62) განტოლება ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{X-x}{\dfrac{x'}{z'}}=\frac{Y-y}{\dfrac{y'}{z'}}=\frac{Z-z}{1}.$$

თუ შევიტანთ აქ $\frac{x'}{z'}$ და $\frac{y'}{z'}$-ის მნიშვნელობებს და მცირე გამარტივებას მოვახდენთ, მივიღებთ წირის ზოგადი განტოლების შესაბამის მხები წრფის განტოლებას

$$\frac{X-x}{F_y\Phi_z-F_z\Phi_y}=\frac{Y-y}{F_z\Phi_x-F_x\Phi_z}=\frac{Z-z}{F_x\Phi_y-F_y\Phi_x}. \tag{63}$$

განვიხილოთ ახლა მხებ წრფეზე M წერტილის მეზობელი წერტილი, რომელიც $\lambda=dt$ მნიშვნელობას ეთანადება. სიმბოლური განტოლების მიხედვით გვექნება:

$$P_1=M+dt\overline{M}'=M+d\overline{M}.$$

მეორე მხრივ,

$$M_1-M=\Delta\overline{M}=d\overline{M}+\frac{1}{2!}d^2\overline{M}+\cdots$$

ამწკრივების გამო

$$M_1=M+d\overline{M}+\frac{1}{2!}d^2\overline{M}+\cdots$$

თუ შევადარებთ P_1 და M_1 წერტილებს, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: მხების წერტილის მახლობელი წერტილი წირზე და მხებზე ერთი და იგივეა პირველი რიგის სიზუსტით, ან, რაც იგივეა, M წერტილის მეზობელი წერტილი წირზე ეკუთვნის მხებსაც პირველი რიგის სიზუსტით. ეს იმას ნიშნავს, რომ MM_1 მკვეთი და MP_1 მხები ტოლფასებია.

ამ უკანასკნელი თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს მხები წრფის შემდეგი თვისება: ორ მეზობელ M და M_1 წერტილებში მხები წრფეები ანაიკვეთება პირველი რიგის სიზუსტით. მართლაც, მეორე (M_1 წერტილში გამავალ) მხების შეხების M_1 წერტილი პირველ (M წერტილში გამავალ) მხებსაც ეკუთვნის პირველი რიგის სიზუსტით, ეს კი ნათელყოფს ზემოგამოთქმულ თვისებას.

მაგალითები: 1. მოცემულია წირი შემდეგი განტოლებით:

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=kt.$$

მოვძებნოთ ამ წირის მხები $M_0=M(0)$ წერტილში. ჯერ გამოვიყვანოთ მხების განტოლება ნებისმიერ $M=M(t)$ წერტილში და შემდეგ მიღებულ განტოლებაში ჩავსვათ $t=0$. გავაწარმოოთ აღებული განტოლებები, გვექნება:

$$x'=-r\sin t,\quad y'=r\cos t,\quad z'=k.$$

წარმოებულების ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ მხების (62) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{X-x}{-r\sin t}=\frac{Y-y}{r\cos t}=\frac{Z-z}{k}.$$

თუ შევიტანთ აქ $t=0$ (და ამავე დროს მხედველობაში მივიღებთ, რომ ამ შემთხვევაში $x=r,\ y=0,\ z=0$), მხების საძიებელ განტოლებას ვიპოვით:

$$\frac{X-r}{0}=\frac{Y}{r}=\frac{Z}{k}.$$

2. მოცემულია წირი შემდეგი განტოლებით:

$$x^2+y^2=r^2,$$
$$(x-r)^2+y^2=r^2.$$

საძიებელია მისი მხები წრფის განტოლება $M(x, y, z)$ წერტილში. ამ შემთხვევაში

$$F(x, y, z)=x^2+y^2-r^2,$$
$$\Phi(x, y, z)=(x-r)^2+y^2-r^2.$$

აქედან გაწარმოებით მივიღებთ:

$$F_x=2x, \ F_y=2y, \ F_z=0,$$
$$\Phi_x=2(x-r), \ \Phi_y=2y, \ \Phi z=0.$$

შევიტანოთ ნაწილობით წარმოებულების ეს მნიშვნელობები (63) განტოლებაში; მივიღებთ:

$$\frac{X-x}{0}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1},$$

ან, რაც იგივეა,

$$X=x,$$
$$Y=y.$$

x, y რომ ამოვხსნათ წირის განტოლებიდან, მივიღებთ:

$$x=\frac{r}{2}, \ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

ამრიგად, მხები წრფის განტოლება (ნებისმიერ წერტილში) იქნება:

$$X=\frac{r}{2},$$

$$Y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მხებ წრფეთა ერთობლიობა წარმოადგენს ორ პარალელურ წრფეს, ე. ი. მოცემული წირი გადაგვარებულია ორ პარალელურ (სახელდობრ, z ღერძის პარალელურ) წრფედ. ეს უკანასკნელი ფაქტი უშუალოდ გამომდინარეობს თვით წირის განტოლებიდანაც. მართლაც, წირი წარმოადგენს ორ, პარალელურღერძებიან, ცილინდრის თანაკვეთის წირს, რომელიც, ცხადია, ორი პარალელური წრფეა (სახელდობრ აღნიშნული ცილინდრების საერთო მსახველები).

ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ წირი, რომლის ყველა მხები ერთ წერტილზე გადის, იმავე წერტილზე გამავალ წრფეებად გადაგვარებული წირია.

§ 15. წირის მიმხები სიბრტყე

წირის მოცემულ წერტილთან, მხები წრფის გარდა, მჭიდროდ არის დაკავშირებული ერთი სიბრტყე, რომელიც შემდეგი განმარტებით არის განსაზღვრული.

განმარტება XVIII. წირის M წერტილზე და მის მეზობელ (უსასრულოდ მახლობელ) ორ წერტილზე გამავალი სიბრტყის ზღვარს, როცა მეზობელი წერტილები მიისწრაფვის აღებული M წერტილისაკენ, ეწოდება წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილში.

ვთქვათ M წერტილის მეზობელი წერტილებია M_1 და M_2. ამ სამი წერტილით განსაზღვრული ცვლადი სიბრტყე, რომლის ზღვარსაც წარმოადგენს მიმხები

ბრტყე, გაივლის MM_2 წრფეზე, რომლის ზღვარი, ცხადია, მხები წრფეა. მაშა-
დამე, თუ ჯერ განვიხილავთ $M_2\to M$, მაშინ ცვლადი სიბრტყე წარმოგვიდგება
ოგორც მხებ წრფეზე და M_1 წერტილზე გამავალი სიბრტყე. რადგან $d\overline{M}$ ვექ-
ორი მხებზეა მოთავსებული, მაშ ცვლადი სიბრტყე გაივლის $d\overline{M}$ და $\overline{MM_1}$
ქტორებზე ანუ $d\overline{M}$, $\Delta\overline{M}$ ვექტორებზე. ცხადია იგი გაივლის აგრეთვე $\Delta\overline{M}$
$-d\overline{M}$ ვექტორზე ან, რაც იგივეა

$$\frac{2}{dt^2}(\Delta\overline{M}-d\overline{M})$$

ქტორზე, რომლის ზღვარი, (55) ფორმულის თანახმად, არის $\overline{M}''$. მაშასადამე,
მხები სიბრტყე განისაზღვრება M წერტილით და $\overline{M}'$, $\overline{M}''$ ვექტორებით.

რადგან M წერტილზე მოდებული $\overline{M}'$ ვექტორი მხებზეა მოთავსებული,
ოტომ მიმხები სიბრტყე მხებ წრფეს შეიცავს, ე. ი. მხებ წრფეზე გადის.

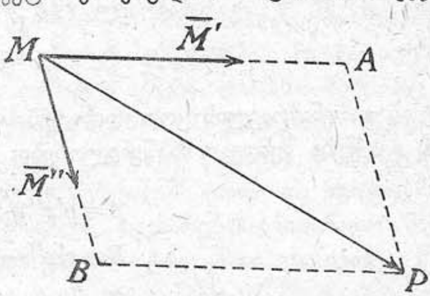
მიმხები სიბრტყის მდინარე წერტილი P-თი აღვნიშნოთ. რადგან მიმხები
იბრტყე M წერტილზე და $\overline{M}'$, $\overline{M}''$ ვექტორებზე გადის, ამიტომ $\overline{MP}$ ვექტო-
ი მოთავსებული იქნება მიმხებ სი-
რტყეში და დაიშლება $\overline{M}'$, $\overline{M}''$
ექტორების მიმართულებებით (ნახ.
6). გვექნება

$$MP=\overline{MA}+\overline{MB}.$$

ორე მხრივ,

$$\overline{MA}\parallel\overline{M}',\quad \overline{MB}\parallel\overline{M}''.$$

არალელობის ეს დამოკიდებულებ-
ი ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:



ნახ. 36

$$\overline{MA}=\lambda\overline{M}',\quad MB=\mu\overline{M}''.$$

მ მნიშვნელობათა შეტანით ზემომოყვანილ ჯამში მივიღებთ:

$$\overline{MP}=\lambda\overline{M}'+\mu\overline{M}''.$$

$\overline{MP}$ ვექტორი წერტილთა სიმბოლური სხვაობის სახით წარმოვიდგინოთ:

$$\overline{MP}=P-M.$$

მ მნიშვნელობათა ჩასმა მოგვცემს

$$P=M+\lambda\overline{M}'+\mu\overline{M}''. \qquad (64)$$

ამრიგად, მიმხები სიბრტყის მდინარე წერტილი გამოისახება ცნობილი ელე-
ენტებით—ხებნის M წერტილით და $\overline{M}'$, $\overline{M}''$ ვექტორებით. λ და μ მდინარე
არამეტრებია, მათი ცვლა იწვევს წერტილის მოძრაობას მიმხებ სიბრტყეზე. (64)
ანტოლებას მიმხები სიბრტყის სიმბოლური განტოლება ეწოდება. ჩვეულებრივი
ანტოლების მისაღებად საკმარისია დავაგეგმილოთ სიმბოლური განტოლება კო-
რდინატთა ღერძებზე და გამოვრიცხოთ λ და μ პარამეტრები. მაგრამ ამის მიღე-
ა კიდევ უფრო მოკლე გზითაც შეიძლება. აღვნიშნოთ ამისათვის

$$[\overline{M}',\ \overline{M}'']=\overline{Q}=(A,\ B,\ C). \qquad (65)$$

ცხადია, $\overline{Q}$ მართობი იქნება მიმხები სიბრტყისა და, მაშასადამე, $\overline{MP}$ ვექ-ტორისაც, ე. ი.

$$\overline{Q} \cdot \overline{MP}=0.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$P=(X,\ Y,\ Z),$$

მაშინ

$$\overline{MP}=(X-x,\ Y-y,\ Z-z).$$

სკალარული ნამრავლის ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$\overline{Q} \cdot \overline{MP}=A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z).$$

ამრიგად, მიმხები სიბრტყის ჩვეულებრივი განტოლება იქნება:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{66}$$

სადაც $A,\ B,\ C$ გარენამრავლ $[\overline{M}',\ \overline{M}'']$ ვექტორის კოორდინატებია. რადგან

$$\overline{M}'=(x'\ y'\ z'),\quad \overline{M}''=(x''\ y''\ z''),$$

ამიტომ გარენამრავლის კოორდინატებისათვის, ე. ი. $A,\ B,\ C$ კოეფიციენტებისა-თვის გვექნება შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} A&=y'z''-z'y'', \\ B&=z'x''-x'z'', \\ C&=x'y''-y'x''. \end{aligned} \tag{67}$$

თუ სამი ვექტორის გარე ნამრავლის განმარტებას გავიხსენებთ, მაშინ შეგვიძ-ლია დავწეროთ

$$\overline{Q} \cdot \overline{MP}=[\overline{M}',\ \overline{M}'']\cdot \overline{MP},\ =[\overline{MP}, \overline{M}',\ \overline{M}''].$$

მაშასადამე, მიმხები სიბრტყის განტოლება ასე დაიწერება:

$$[\overline{MP},\ \ \overline{M}',\ \ \overline{M}'']=0.$$

განმარტებიდანვე ჩანს, რომ წირთან მიმხებ სიბრტყეს უფრო მჭიდრო კავ-შირი უნდა ჰქონდეს, ვიდრე მხებ წრფეს. ამის ნათელსაყოფად გავიხსენოთ წერ-ტილის ნაზრდის გამწკრივება

$$\Delta\overline{M}=d\overline{M}+\frac{1}{2!}\,d^2\overline{M}+\cdots,$$

რადგან

$$\Delta\overline{M}=M_1-M,$$

ამიტომ გვექნება:

$$M_1=M+d\overline{M}+\frac{1}{2!}\,d^2\overline{M}+\cdots$$

ავიღოთ მიმხებ სიბრტყეზე M წერტილის მახლობელი წერტილი, რომელიც პარამეტრების ასეთ მნიშვნელობებს ეთანადება:

$$\lambda = dt, \ \mu = \frac{1}{2} dt^2.$$

(64) განტოლების მიხედვით ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$P_1 = M + dt\overline{M} + \frac{1}{2} dt^2 \overline{M}'',$$

ან, რაც იგივეა,

$$P_1 = M + d\overline{M} + \frac{1}{2} d^2\overline{M}.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ M_1 და P_1 შორის განსხვავება იწყება მესამე რიგის უსასრულოდ მცირიდან, ე. ი. ეს წერტილები ერთი და იგივეა მეორე რიგის სიზუსტით. ამრიგად, M წერტილის მახლობელი წერტილი წირზე მიმხებ სიბრტყესაც ეკუთვნის მეორე რიგის სიზუსტით, ანუ მიმხებ სიბრტყეს მეორე რიგის თანახება აქვს წირთან.

მაგალითები: 1. განვიხილოთ ბრტყელი წირი. რადგან ბრტყელი წირისათვის M წერტილის მეზობელი M_1, M_2 წერტილები იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული, რომელზეც წირი მდებარეობს, ე. ი. წირის სიბრტყეში, ამიტომ აღებულ ამ წერტილზე გამავალი სიბრტყე წირის სიბრტყე იქნება და მისი ზღვარიც წირის სიბრტყე იქნება. ამრიგად, *ბრტყელი წირის მიმხები სიბრტყე მის ყოველ წერტილში ერთი და იგივეა, თვით წირის სიბრტყეა.* პირიქით, თუ წირის მიმხები სიბრტყე ყოველ წერტილში ერთი და იგივეა, მაშინ წირი ბრტყელია. მართლაც, წირის M წერტილი მდებარეობს სათანადო მიმხებ სიბრტყეში და, თუ ყველა წერტილში მიმხები სიბრტყე ერთი და იგივეა, მაშინ ყოველი წერტილი ერთსა და იმავე სიბრტყეზე (საერთო მიმხებ სიბრტყეზე) მოთავსდება და, მაშასადამე, წირი ბრტყელი იქნება.

2. განვიხილოთ წრფე. რადგან წრფის სამი წერტილი არ განსაზღვრავს ერთ გარკვეულ სიბრტყეს, ამიტომ წრფის მიმხები სიბრტყე ყოველ წერტილში გაურკვეველია. ყოველი სიბრტყე, რომელიც წრფეზე გადის, მისი მიმხები სიბრტყეც იქნება. პირიქით, წირი, რომლის მიმხები სიბრტყე ყოველ წერტილში განუზღვრელია, უსათუოდ წრფეა. მართლაც, ასეთი წირი შეგვიძლია ერთდროულად ორ სხვადასხვა სიბრტყეში (საერთო მიმხებ სიბრტყეში) მოვათავსოთ.

§ 16. მთავარი ნორმალი. ბინორმალი. ნორმალი სიბრტყე. გამწრფევი სიბრტყე

მხები წრფისა და მიმხები სიბრტყის საშუალებით გრეხილი წირის M წერტილში კიდევ შემდეგი ელემენტები განიმარტება.

1. M წერტილზე გამავალ მხების მართობ წრფეს, რომელიც მოთავსებულია მიმხებ სიბრტყეში, ეწოდება წირის *მთავარი ნორმალი* M წერტილში.

2. M წერტილზე გამავალ მიმხები სიბრტყის მართობ წრფეს ეწოდება წირის *ბინორმალი* M წერტილში.

3. M წერტილზე გამავალ მხების მართობ სიბრტყეს ეწოდება წირის *ნორმალი სიბრტყე* M წერტილში.

4. M წერტილზე გამავალ მთავარი ნორმალის მართობ სიბრტყეს ეწოდება წირის *გამწრფევი სიბრტყე* M წერტილში.

რადგან მხების მიმმართველი ვექტორია $\overline{M'}$, ამიტომ ნორმალი სიბრტყის მიმმართველი ვექტორი იქნება აგრეთვე $\overline{M'}$. ანალოგიურად, რადგან მიმხები სიბრტყის მიმმართველი ვექტორი არის $\overline{Q}$, ამიტომ იგი ბინორმალის მიმმართველი ვექტორიც იქნება. რადგან მთავარი ნორმალი მიმხებ სიბრტყეში მდებარეობს, იგი ბინორმალის მართობი იქნება; მისი მიმმართველი ვექტორი მართობი უნდა იყოს მხებისა და ბინორმალისა, ე. ი. $\overline{M}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებისა; ასეთ ვექტორად ამ ორი ვექტორის გარენამრავლი გამოდგება. ამრიგად, მთავარი ნორმალის მიმმართველი ვექტორი იქნება $\overline{M'}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების გარენამრავლი, ე. ი.

$$[M', \overline{Q}]=[\overline{M'}, [\overline{M'}, \overline{M''}]].$$

მხების განტოლების მიხედვით, ნორმალი სიბრტყის განტოლება ასე დაიწერება (ამ ორ განტოლებას საერთო კოეფიციენტები აქვს):

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0. \tag{68}$$

მიმხები სიბრტყის განტოლების მიხედვით, ბინორმალის განტოლებას ასეთი სახე ექნება:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}. \tag{69}$$

რადგან

$$\overline{M'}=(x', y', z'), \qquad \overline{Q}=(A, B, C),$$

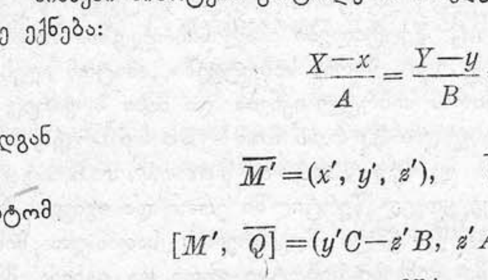
ამიტომ

$$[M', \overline{Q}]=(y'C-z'B, z'A-x'C, x'B-y'A).$$

ამრიგად, მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის შესაბამი განტოლებები შემდეგი სახის იქნება.

$$\frac{X-x}{y'C-z'B}=\frac{Y-y}{z'A-x'C}=\frac{Z-z}{x'B-y'A}, \tag{70}$$

$$(y'C-z'B)(X-x)+(z'A-x'C)(Y-y)+(x'B-y'A)(Z-z)=0. \tag{71}$$



ნახ. 37

არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ყველა ამ განტოლებაში A, B, C კოეფიციენტების მნიშვნელობები მოცემულია (67) ფორმულებით.

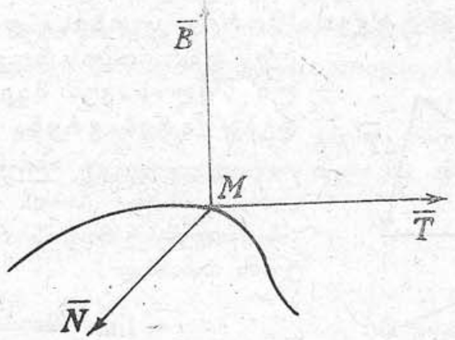
ადვილი შესამჩნევია, რომ გრეხილი წირის M წერტილში განმარტებული სამი წრფე და სამი სიბრტყე ურთიერთმართობული წრფეები და სიბრტყეებია (ნახ. 37). ისინი შეადგენდნენ მართობულ კოორდინატთა სისტემას M სათავით, წრფეები რომ მიგეზული იყოს. წრფეების მოგეზვა მგეზავების საშუალებით ხდება. **მხების მგეზავი** ეწოდება $\overline{M}'$ ვექტორის მგეზავს და აღინიშნება $\overline{T}$-თი, ე. ი.

$$T=\frac{\overline{M}'}{|M'|}. \tag{72}$$

ბინორმალის მგეზავი ეწოდება $\overline{Q}$ ვექტორის მგეზავს და აღინიშნება $\overline{B}$-თი, ე. ი.

$$\overline{B}=\frac{\overline{Q}}{|Q|}=\frac{[\overline{M}',\ \overline{M}'']}{|[\overline{M}',\ M'']|}. \tag{73}$$

მთავარი ნორმალის მგეზავს $\overline{N}$-ით აღვნიშნავთ და ისე მოვგეზავთ, რომ $(M\,\overline{T}\,\overline{N}\,\overline{B})$ სისტემა მარცხენა მოგეზულობისა იყოს, ე. ი. ისეთივე მოგეზულობის, როგორიც აქვს $oxyz$ სისტემას (ნახ. 38). ამიტომ



ნახ. 38

$$\overline{N}=[\overline{B},\ \overline{T}], \tag{74}$$

გარდა ამისა, ჩვენ გვექნება კიდევ შემდეგი დამოკიდებულებები.

$$\overline{T}=[\overline{N},\overline{B}],$$
$$\overline{B}=[\overline{T},\overline{N}].$$

§ 17. წირითი ელემენტი. სიმრუდე და გრეხა

გრეხილი წირის წირითი ელემენტი ბრტყელი წირის წირითი ელემენტის მსგავსად განიმარტება. მაშასადამე, წირითი ელემენტისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{75}$$

რადგან

$$d\overline{M}=(dx,\ dy,\ dz),$$

ამიტომ

$$d\overline{M}^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

ამრიგად, წირითი ელემენტის (75) ფორმულა, შემოკლებული სახით, ასე დაიწერება:

$$ds^2=d\overline{M}^2. \tag{76}$$

ბუნებრივი პარამეტრი ეწოდება ისეთ პარამეტრს, რომლის დიფერენციალი რკალის დიფერენციალის ტოლია. თვით რკალიც, რა თქმა უნდა, ბუნებრივი პარამეტრი იქნება.

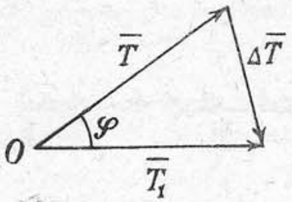
გრეხილი წირის სიმრუდე ისევე განიმარტება, როგორც ბრტყელი წირის, ოღონდ აქ მახლობელ მხებთა შორის კუთხეს ყოველთვის დადებითად ვგულისხ-

მობთ (ამ შეზღუდვის მიზეზი შემდეგში იქნება ნაჩვენები). თუ ამ კუთხეს აღვნიშნავთ φ-ით (ბრტყელი წირის შემთხვევაში $\varphi=|\Delta d|$) გვექნება:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}. \tag{77}$$

გარდა სიმრუდისა, გრეხილი წირისათვის შემოდის კიდევ ერთი ახალი ცნება' რომელიც მიმხები სიბრტყის მოძრაობას ახასიათებს და რომელსაც *წირის გრეხა* ეწოდება. იგი ასე განიმარტება.

განმარტება XIX. *წირის M წერტილში და მის მეზობელ წერტილში მიმხებ სიბრტყეთა შორის კუთხისა და სათანადო რკალის ფარდობის ზღვარს, როცა რკალი ნულისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წირის გრეხა M წერტილში.*



ნახ. 39

წირის გრეხას $\frac{1}{\tau}$-თი აღვნიშნავთ, სადაც τ-ს ეწოდება *გრეხის რადიუსი*. განმარტების თანახმად

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{1}{\tau}, \tag{78}$$

სადაც $\Delta\beta$ ორ მახლობელ მიმხებ სიბრტყეთა შორის კუთხეა ან, რაც იგივეა, ორ მახლობელ ბინორმალს შორის კუთხეა[1].

ორი მახლობელი მხების მგეზავი მოვდოთ ერთ წერტილს; აშკარაა, რომ (ნახ. 39)

$$|\Delta \overline{T}| = 2 \sin\frac{\varphi}{2} \approx \varphi.$$

აქედან

$$\left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overline{T}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s}.$$

თანახმად (77) ფორმულისა, გვექნება:

$$\left| \frac{d\overline{T}}{\alpha s} \right| = \frac{1}{\rho}. \tag{79}$$

მოვდოთ ახლა ორი მახლობელი ბინორმალის მგეზავი ერთ წერტილს (ნახ. 40). მივიღებთ:

$$|\Delta B| = 2 \sin\frac{|\Delta\beta|}{2} \approx |\Delta\beta| = \pm\Delta\beta,$$

საიდანაც

$$\left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overline{B}}{\Delta s} \right| = \pm \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \pm \frac{1}{\tau}$$

ანუ

$$\left| \frac{d\overline{\beta}}{ds} \right| = \pm \frac{1}{\tau}. \tag{80}$$

---

1 ორ მეზობელ მიმხებ სიბრტყეთა შორის კუთხეს ვგულისხმობთ სათანადო ნიშნით, რომელიც მიმხები სიბრტყის მობრუნების მიმართულებაზეა დამოკიდებული.

(79) და (80) ფორმულების მიხედვით დავასკვნით, რომ

1. მხების მგეზავის რკალით წარმოებულის სიგრძე სიმრუდის ტოლია.

2. ბინორმალის მგეზავის რკალით წარმოებულის სიგრძე გრეხისაგან მხოლოდ ნიშნით შეიძლება განსხვავდებოდეს.

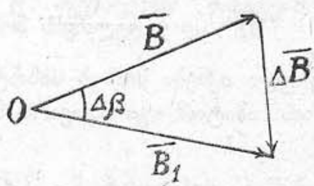
მაგალითები: 1. განვიხილოთ ნულსიმრუდიანი წირი, ე. ი. წირი, რომლის ყოველ წერტილში

$$\frac{1}{\rho}=0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მხები არ იცვლება, ყოველ წერტილში წირს ერთი და იგივე მხები ექნება, მაშასადამე, წირი წრფე იქნება. ამრიგად, ნულსიმრუდიანი წირი ამ შემთხვევაშიც წრფეა.

2. განვიხილოთ ახლა ბრტყელი წირის გრეხა. რადგან ბრტყელი წირის მიმხები სიბრტყე წერტილის გადაადგილებით არ იცვლება, ამიტომ ორ მახლობელ მიმხებ სიბრტყეთა შორის კუთხე ნულია, ე. ი. $\Delta\beta=0$. (78) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$\frac{1}{\tau}=0.$$



ნახ. 40

ამრიგად, ბრტყელი წირის გრეხა ყოველ წერტილში ნულია. პირიქით, თუ წირის გრეხა ყოველ წერტილში ნულია, მაშინ წირი ბრტყელია. მართლაც, თუ $\frac{1}{\tau}=0$, მაშინ $\Delta\beta=0$, ე. ი. წირს ექნება ერთი და იგივე მიმხები სიბრტყე ყოველ წერტილში და, მაშასადამე, იგი ბრტყელი იქნება.

§ 18. ფრენეს ფორმულები

როგორც ვნახეთ, წირის M წერტილში განსაზღვრულია კოორდინატთა ($M\overline{T}\,\overline{N}\,\overline{B}$) სისტემა; მას ეწოდება ბუნებრივი კოორდინატთა სისტემა. წირის ბუნების გამოსარკვევად საჭიროა ვიცოდეთ წირის გასწვრივ ამ სისტემის მოძრაობის კანონი, ამისათვის კი, პირველ ყოვლისა, უნდა განვსაზღვროთ დიფერენციალები:

$$d\overline{M},\ d\overline{T},\ d\overline{N},\ d\overline{B}.$$

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ წირის სიმბოლური განტოლება დაწერილია რკალის მიმართ, ე. ი.

$$M=M(s).$$

გამოვთვალოთ ჯერ $\frac{d\overline{M}}{ds}$; გვექნება:

$$|\overline{M}'| = \left|\frac{d\overline{M}}{ds}\right| = \left|\frac{d\overline{M}}{ds}\right| = \frac{ds}{ds}=1;$$

ამიტომ, თანახმად (72) ფორმულისა, მივიღებთ:

$$\frac{d\overline{M}}{ds}=\overline{T}. \tag{81}$$

ამრიგად, წერტილის წარმოებული რკალით მხების მგეზავის ტოლია.

ახლა მგეზავების წარმოებულები გამოვითვალოთ. რადგან $\overline{T}$ ერთეული სიგრძის (მუდმივსიგრძიანი) ვექტორია, ამიტომ $\frac{d\overline{T}}{ds}$ წარმოებული თვით $\overline{T}$ ვექტორის მართობი იქნება; თუ მას M წერტილს მოვდებთ, იგი ნორმალ სიბრტყეში მოთავსდება და $\overline{N}$ და $\overline{B}$ მგეზავების მიხედვით დაიშლება. მაგრამ, მეორე მხრივ, (81) ფორმულის ძალით

$$\overline{M}''=\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\frac{d\overline{T}}{ds}.$$

$\overline{M}''$ კი ყოველთვის მოთავსებულია მიმხებ სიბრტყეში, ე. ი. $\frac{d\overline{T}}{ds}$-იც მოთავსებული იქნება მიმხებ სიბრტყეში. რადგან ეს უკანასკნელი მხების მართობიც არის, ამიტომ იგი მთავარი ნორმალის პარალელური იქნება, ე. ი.

$$\frac{d\overline{T}}{ds}\parallel\overline{N}.$$

ეს პარალელობა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{d\overline{T}}{ds}=\lambda\overline{N}.$$

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ λ დადებითია. თანახმად (81) ფორმულისა

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\frac{d\overline{T}}{ds}.$$

გარდა ამისა,

$$\overline{N}=[\overline{B},\ \overline{T}].$$

ამიტომ

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\lambda[\overline{B},\ \overline{T}]=\lambda\left[B,\ \frac{d\overline{M}}{ds}\right].$$

$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}$-ზე გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\left(\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right)^2=\lambda\left[\overline{B},\ \frac{d\overline{M}}{ds},\ \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right]=\lambda\,\overline{B}\cdot\left[\frac{d\overline{M}}{ds},\ \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right].$$

მეორე მხრივ,

$$\overline{B}=\frac{\left[\frac{d\overline{M}}{ds},\ \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\overline{M}}{ds},\ \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right]\right|}.$$

ამრიგად,

$$\left(\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right)^2=\lambda\left|\left[\frac{d\,\overline{M}}{ds},\ \ \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}\right]\right|,$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\lambda>0$. დავუბრუნდეთ ახლა ისევ $\frac{d\,\overline{T}}{ds}=\lambda\overline{N}$ ტოლობას. აქედან მივიღებთ:

$$\left|\frac{d\overline{T}}{ds}\right|=|\lambda|\,.\,|\overline{N}|=|\lambda|=\lambda,\ (\lambda>0).$$

თანახმად (79) ფორმულისა, $\lambda=\frac{1}{\rho}$ (აქედან ჩანს სიმრუდის დადებითი მნიშვნელობით განმარტების აზრი) და, მაშასადამე,

$$\frac{d\,\overline{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{N}. \tag{82}$$

სრულიად ანალოგიურად $\frac{d\overline{N}}{ds}$ უნდა დაიშალოს $\overline{T}$ და $\overline{B}$ მგეზავების მიხედვით; გვექნება:

$$\frac{d\overline{N}}{ds}=a\overline{T}+b\overline{B}.$$

$\frac{d\,\overline{B}}{ds}$ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ტოლობიდან $\overline{B}=[\overline{T},\ \overline{N}]$. ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{d\overline{B}}{ds}=\left[\frac{d\overline{T}}{ds},\ \ \overline{N}\right]+\left[\overline{T},\ \frac{d\overline{N}}{ds}\right]=\left[\frac{1}{\rho}\overline{N},\overline{N}\right]+[\overline{T},\ a\overline{T}+b\overline{B}]=$$

$$=b[T,\ \overline{B}]=-b\,[\overline{B},\ \overline{T}]=-b\,\overline{N}.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის კვადრატში ამაღლება მოგვცემს:

$$\left(\frac{d\overline{B}}{ds}\right)^2=b^2\overline{N}^2=b^2,$$

საიდანაც

$$b=\pm\left|\frac{d\overline{B}}{ds}\right|=\frac{1}{\tau}.$$

ამრიგად, შემდეგი ფორმულა გვაქვს $\left(\frac{1}{\tau}\right.$ ენიჭება b-ს ნიშანი$\left.\right)$:

$$\frac{d\overline{B}}{ds}=-\frac{1}{\tau}\overline{N}. \tag{83}$$

ახლა $\frac{d\,\overline{N}}{ds}$-ის გამოსათვლელად ავიღოთ ტოლობა

$$\overline{N}=[\overline{B},\ \ \overline{T}]$$

და გავაწარმოოთ იგი s-ით; მივიღებთ:

$$\frac{d\overline{N}}{ds}=\left[\frac{d\overline{B}}{ds},\ \overline{T}\right]+\left[\overline{B},\ \frac{d\overline{T}}{ds}\right]=\left[-\frac{1}{\tau}\overline{N},\ \overline{T}\right]+$$

$$+\left[\overline{B},\ \frac{1}{\rho}\overline{N}\right]=\frac{1}{\rho}[\overline{B},\ \overline{N}]-\frac{1}{\tau}[\overline{N},\overline{T}]=-\frac{1}{\rho}\overline{T}+\frac{1}{\tau}\overline{B},$$

ე. ი. საბოლოოდ

$$\frac{d\overline{N}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\overline{T}+\frac{1}{\tau}\overline{B}.$$

ამრიგად, $d\overline{T}$, $d\overline{N}$, $d\overline{B}$ დიფერენციალებისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{d\overline{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{N},$$

$$\frac{d\overline{N}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\overline{T}+\frac{1}{\tau}\overline{B}, \tag{84}$$

$$\frac{d\overline{B}}{ds}=-\frac{1}{\tau}\overline{N}.$$

ამ ფორმულებს ეწოდება ფ რ ე ნ ე ს ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ი გრეხილი წირისათვის. ეს ფორმულები განსაზღვრულია სიმრუდით და გრეხით. ისინი წირს ახასიათებენ მოძრაობამდე, ისე რომ, თუ სხვადასხვა წირებს ერთნაირი სიმრუდე და გრეხა აქვს, მათთვის ფრენეს ფორმულებიც ერთნაირი იქნება.

ფ რ ე ნ ე ს ფორმულების გამოყენებით ადვილად შეიძლება წერტილის ნაზრდის განსაზღვრა ბუნებრივ სისტემაში. ჩვენ ვიცით ფორმულა

$$\Delta\overline{M}=d\overline{M}+\frac{1}{2!}d^2\overline{M}+\cdots$$

ან, რაც იგივეა,

$$\Delta\overline{M}=\overline{M}'ds+\frac{ds^2}{2!}\overline{M}''+\cdots$$

გამოვთვალოთ ახლა წერტილის წარმოებულები. გვექნება (ფ რ ე ნ ე ს ფორმულების გამოყენებით):

$$\overline{M}'=\frac{d\overline{M}}{ds}=\overline{T},$$

$$\overline{M}''=\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\overline{N},$$

$$\overline{M}'''=\frac{d^3\overline{M}}{ds^3}=\left(\frac{1}{\rho}\right)'\cdot\overline{N}-\frac{1}{\rho^2}\overline{T}+\frac{1}{\rho\tau}\overline{B};$$

ამრიგად,

$$\Delta\overline{M}=\left(ds-\frac{ds^3}{3!\rho^2}+\cdots\right)\overline{T}+$$

$$+\left(\frac{ds^2}{2!\rho}-\frac{\rho' ds^3}{3!\rho^2}+\cdots\right)\overline{N}+\left(\frac{ds^3}{3!\rho\tau}+\cdots\right)\overline{B}.$$

თუ ბუნებრივ სისტემაში $\triangle \overline{M} = (\triangle x, \ \triangle y, \ \triangle z)$, მაშინ დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\triangle x = ds - \frac{ds^3}{3!\rho^2} = \ldots,$$

$$\triangle y = \frac{ds^2}{2!\rho} - \frac{\rho' ds^3}{3!\rho^2} + \ldots, \tag{85}$$

$$\triangle z = \frac{ds^3}{3!\rho\tau} + \ldots,$$

რადგან ბუნებრივი სისტემის სათავე M წერტილია, ამიტომ $M = (0, 0, 0)$. მაშასადამე,

$$\triangle \overline{M} = (x, \ y, \ z).$$

შეგვიძლია აგრეთვე, შეთანხმებით, s-ის საწყის მნიშვნელობად ნული ავიღოთ: $s_0 = 0$, გვექნება:

$$\triangle s = s - s_0 = s.$$

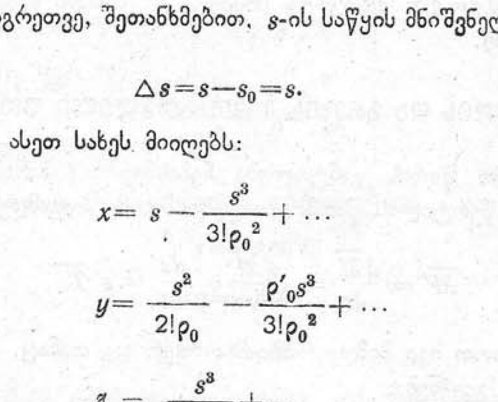
(85) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x = s - \frac{s^3}{3!\rho_0{}^2} + \ldots$$

$$y = \frac{s^2}{2!\rho_0} - \frac{\rho'_0 s^3}{3!\rho_0{}^2} + \ldots \tag{86}$$

$$z = \frac{s^3}{3!\rho_0\tau_0} + \ldots$$

ამ ფორმულებით წარმოგვიდგება წერტილის კოორდინატების გამწკრივება რკა-



ნახ. 41

ლის მიმართ. იმ წირებს, რომელთაც მოცემული სიმრუდე და გრეხა აქვთ, ე. ი. ცნობილია

$$\rho = \rho(s), \ \tau = \tau(s)$$

სიდიდეები, (86) ფორმულებიც საერთო ექნებათ; ეს იმას ნიშნავს, რომ სიმრუდე და გრეხა სავსებით განსაზღვრავს წირის ბუნებას. ამით დამტკიცდა წირთა თეორიის ძირითადი თეორემა.

თეორემა: სიმრუდე და გრეხა, რკალის ფუნქციებად მოცემული, განსაზღვრავს წირს მდებარეობამდე.

ამ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორ წირს შესაბამ წერტილებში აქვს ერთნაირი სიმრუდე და გრეხა (საერთო ბუნებრივი პარამეტრის მიმართ), მაშინ ისინი შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ მდებარეობით, ე. ი. შეგვიძლია ერთი შევუთავსოთ მეორეს მოძრაობით. მაგალითად, წრეწირს აქვს მუდმივი სიმრუდე და ნული გრეხა (ბრტყელი წირია), ამიტომ მუდმივსიმრუდიანი ბრტყელი წირი, თანახმად წირთა თეორიის ძირითადი თეორემისა, იქნება წრეწირი.

(86) მესამე ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ M წერტილში გრეხა ნიშანს იცვლის, მაშინ ამ წერტილზე მრუდი გადის მიმხები სიბრტყის ერთი მხრიდან მეორე მხარეს (რადგან z ნიშანს იცვლის, xoy სიბრტყე კი მიმხებია, ნახ. 39).

§ 19. სიმრუდის და გრეხის გამოსათვლელი ფორმულები

წარმოვიდგინოთ წირის განტოლება ნებისმიერი t პარამეტრის მიმართ და გამოვითვალოთ M წერტილის წარმოებულები მესამე რიგამდე. ავიღოთ:

$$\overline{M'} = \frac{d\overline{M}}{dt} = \frac{d\overline{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = s'\,\overline{T}$$

ტოლობა, გავაწარმოოთ იგი მიმდევრობით ორჯერ და თანაც ფრენეს ფორმულები გამოვიყენოთ, გვექნება:

$$\overline{M''} = s'\frac{d\overline{T}}{dt} + s''\overline{T} = s'\,\frac{d\overline{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + s''\,\overline{T} = \frac{s'^2}{\rho}\overline{N} + s''\overline{T}.$$

$$\overline{M'''} = \left(\frac{s'^2}{\rho}\right)'\overline{N} + \frac{s'^2}{\rho}\,\frac{d\overline{N}}{dt} + s'''\overline{T} + s''\frac{d\overline{T}}{dt} =$$

$$= \left[\left(\frac{s'^2}{\rho}\right)' + \frac{s's''}{\rho}\right]\overline{N} + \left(-\frac{s'^3}{\rho^2} + s'''\right)\overline{T} + \frac{s'^3}{\rho\tau}\overline{B}.$$

გამოვთვალოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$[\overline{M'}],\ [\overline{M'}, \overline{M''}],\quad [\overline{M'}, \overline{M''},\ \overline{M'''}].$$

გვექნება:

$$|\overline{M'}| = |s'\overline{T}| = |s'| = s',$$

$$[\overline{M'} \cdot \overline{M''}] = \frac{s'^3}{\rho}[\overline{T},\ \overline{N}] = \frac{s'^3}{\rho}\overline{B},$$

$$[\overline{M'},\ \overline{M''},\ \overline{M'''}] = \frac{s'^6}{\rho^2\tau}.$$

ამ სამი ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\frac{1}{\rho}$ და $\frac{1}{\tau}$. მეორე ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{|[\overline{M}',\overline{M}'']|}{|\overline{M}'|^3}. \tag{87}$$

მესამე ტოლობიდან, მასში $\frac{1}{\rho}$-ს მნიშვნელობის შეტანის შემდეგ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{[\overline{M}',\overline{M}'',\overline{M}''']}{[\overline{M}',\ \overline{M}'']^2}. \tag{88}$$

სადაც უნდა გვახსოვდეს შემდეგი მნიშვნელობები:

$$|\overline{M}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$|[\overline{M}',\ \overline{M}'']|=\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2},$$

$$[\overline{M}',\overline{M}'',\overline{M}''']=\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}.$$

მაგალითი. ავიღოთ წირი შემდეგი განტოლებით:

$$x=r\cos t,$$
$$y=r\sin t,$$
$$z=kt$$

და გამოვთვალოთ მისი სიმრუდე და გრეხა. ჯერ გამოვითვალოთ წარმოებულები მესამე რიგამდე. გვექნება:

$$x'=-r\sin t,\qquad y'=r\cos t,\qquad z'=k,$$
$$x''=-r\cos t,\qquad y''=-r\sin t,\qquad z''=0,$$
$$x'''=r\sin t,\qquad y'''=-r\cos t,\qquad z'''=0.$$

ამ მნიშვნელობათა შეტანით მივიღებთ:

$$|\overline{M}'|=\sqrt{r^2+k^2}$$

$$|[\overline{M}',\ \overline{M}'']|=r\sqrt{r^2+k^2}$$

$$[\overline{M}',\ \overline{M}'',\overline{M}''']=kr^2.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს სიმრუდის და გრეხის ფორმულებში ჩავსვამთ, გვექნება:

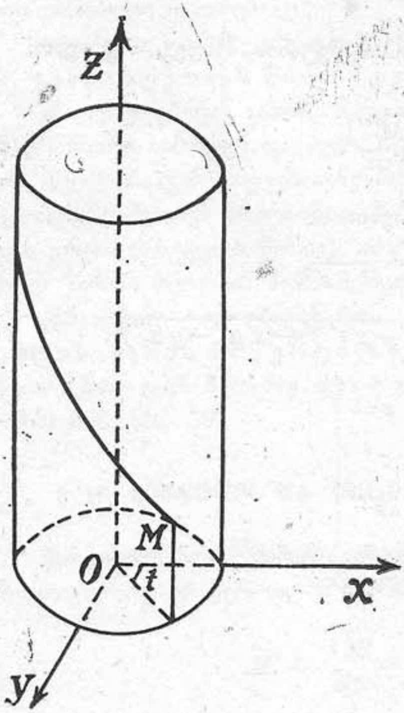
$$\frac{1}{\rho}=\frac{r}{r^2+k^2},$$

$$\frac{1}{\tau}=\frac{k}{r^2+k^2}.$$

ამრიგად, აღებული წირის სიმრუდე და გრეხა მუდმივია. ადვილი შესამჩნევია, რომ აღებული წირი ცილინდრზე მოთავსებული; მართლაც, მისი განტოლების პირველი ორი ტოლობა რომ ავამაღლოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$x^2+y^2=r^2.$$

ეს უკანასკნელი განტოლება კი განსაზღვრავს წრიულ ცილინდრს z ღერძის პარალელური მსახველებით. წირის წერტილის გეგმილი xoy სიბრტყეში ცილინდრის ფუძეზე (წრეწირზე) მოძრაობს თანაბარი კუთხური სიჩქარით (t არის დრო). ხოლო მისი გეგმილი z ღერძზე აგრეთვე თანაბარი სიჩქარით მოძრაობს z-ის გასწვრივ. ასეთ მოძრაობათა შეჯამებით მიღებულ მოძრაობას ხრახნული მოძრაობა ეწოდება, ხოლო ამ მოძრაობის დროს წერტილის მიერ აღწერილ წირს — ხ რ ა ხ ნ წ ი რ ი. ამრიგად, ხრახნწირი არის მუდმივსიმრუდიანი და მუდმივგრეხიანი წირი (ნახ. 40).



ნახ. 42

§ 20. მხებთა და ბინორმალთა სფერული ინდიკატრისები

წირის M წერტილში მხების მგეზავი გადავიტანოთ პარალელურად და მოვდოთ რაიმე უძრავ O წერტილს. რადგან $\overline{T}=\overline{T}(s)$, ამიტომ ამ ვექტორის ბოლო წერტილიც s-ის ფუნქცია იქნება, ე. ი.

$$P=O+\overline{T}(s)=P(s).$$

s-ის ცვლის დროს, ე. ი. M წერტილის მოძრაობის დროს წირზე, P წერტილი აღწერს წირს, რომელიც მოთავსებული იქნება ერთეულრადიუსიან სფეროზე O ცენტრით. ამ წირს ეწოდება მ ხ ე ბ თ ა ს ფ ე რ უ ლ ი ი ნ დ ი კ ა ტ რ ი ს ი. ინდიკატრისის რკალი აღვნიშნოთ σ-თი. გვექნება (ნახ. 41):

$$\overset{\frown}{PP_1}=\Delta\sigma\approx\varphi.$$

საიდან

$$\lim_{\Delta s\to0}\frac{\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to0}\frac{\overset{\frown}{PP}}{\Delta s}.$$

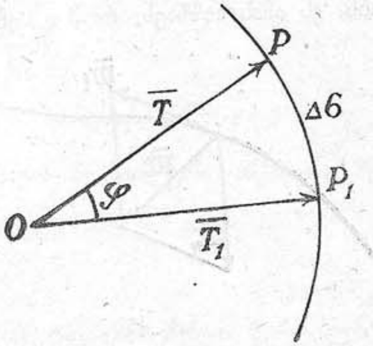
რადგან

$$\lim_{\Delta s\to0}\frac{\varphi}{\Delta s}=\frac{1}{\rho},$$

ამიტომ

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overset{\smile}{PP}}{\Delta s}. \qquad (89)$$

ამრიგად, წირის სიმრუდე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც მხებთა სფერული ინდიკატრისის რკალისა და თვით წირის შესაბამისი რკალის შეფარდების ზღვარი, როცა წირის რკალი ნულისაკენ მიისწრაფვის.



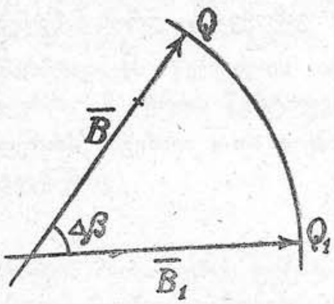
ნახ. 43

სრულებით ასეთივე წესით შემოდის ბინორმალთა სფერული ინდიკატრისის ცნება. ამ შემთხვევაში ინდიკატრისის განტოლება იქნება:

$$Q = O + \overline{B}(s) = Q(s),$$

ხოლო წირის გრეხა წარმოგვიდგება შემდეგი ფორმულით (ნახ. 44):

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \pm \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overset{\smile}{QQ_1}}{\Delta s}.$$



ნახ. 44

ეს იმას ნიშნავს, რომ წირის გრეხა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ბინორმალთა სფერული ინდიკატრისის რკალისა და წირის შესაბამისი რკალის შეფარდების ზღვრის აბსოლუტური მნიშვნელობა, როცა წირის რკალი ნულისაკენ მიისწრაფვის.

§ 21. ფრენეს ფორმულირების კინემატიკური მნიშვნელობა. დარბუს ვექტორი

გრეხილი წირი ჩვენ განვმარტეთ, როგორც მოძრავი წერტილის მიერ სივრცეში გავლილ წერტილთა ერთობლიობა ანუ როგორც მოძრავი წერტილის სასრბოლე (ტრაექტორია). თუ იმ პარამეტრს, რომელიც იწვევს წერტილის მოძრაობას, დროდ მივიღებთ, მაშინ წირის სიმბოლური განტოლება

$$M = M(t)$$

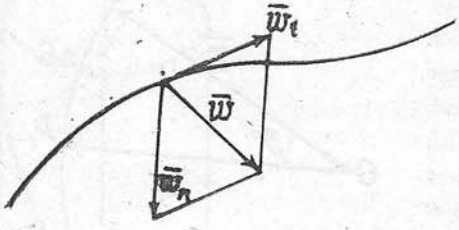
თვით მოძრაობის განტოლება იქნება. როგორც მექანიკიდან არის ცნობილი, მოძრავი წერტილის წარმოებულს დროით წერტილის ვექტორული სიჩქარე ეწოდება, ამგვარად,

$$\overline{v} = \overline{M}'.$$

სიჩქარის წარმოებულს, ე. ი. წერტილის მეორე რიგის წარმოებულს, ეწოდება წერტილის ვექტორული აჩქარება

$$\overline{W}=\overline{v'}=\overline{M''}.$$

ჩვენ ვიცით, რომ M წერტილზე მოდებული $\overline{M'}$ ვექტორი წირის მხებზე მდებარეობს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{v}$ სიჩქარეც მხებზე იქნება მოთავსებული. რადგან $\overline{M''}$ ვექტორი, M წერტილზე მოდებული, მიმხებ სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ $\overline{W}$ აჩქარება მოთავსებული იქნება წირის მიმხებ სიბრტყეში. გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ მხები და მთავარი ნორმალი მდებარეობს მიმხებ სიბრტყეზე; ამიტომ $\overline{W}$ შეიძლება დაშლილ იქნეს ორ მდგენელად მხებისა და მთავარი ნორმალის მიმართულებით. ამ მდგენელებს ეწოდებათ მხები და ნორმალი აჩქარებები და ჩვეულებრივად აღინიშნება W_t და $\overline{W}_n$-ით შესაბამისად. ამრიგად, გვექნება (ნახ. 45)



ნახ. 45

$$\overline{W}=\overline{W}_t+\overline{W}_n.$$

სიმრუდის და გრეხის გამოსათვლელი ფორმულების გამოყვანის დროს ნაჩვენები გვქონდა, რომ

$$\overline{M}=|\overline{M'}|\cdot\overline{T}=s'\overline{T}.$$

$$\overline{M''}=s''\overline{T}+\frac{s'^2}{\rho}\overline{N}.$$

მაშასადამე,

$$\overline{v}=s'\overline{T},$$

$$\overline{W}=s''\overline{T}+\frac{s'^2}{\rho}\overline{N}.$$

ამ უკანასკნელ ტოლობათაგან პირველი გვაძლევს ეგრეთწოდებულ ოდენურ სიჩქარეს $s'=|\overline{v}|=v$. ამ შემთხვევაში მეორე ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\overline{W}=\frac{dv}{dt}\overline{T}+\frac{v^2}{\rho}\overline{N}.$$

აქედან ჩანს, რომ აჩქარების მხები და ნორმალი მდგენელები ასე გამოისახება:

$$\overline{W}_t=\frac{dv}{dt}\overline{T}. \qquad (90)$$

$$\overline{W}_n=\frac{v^2}{\rho}\overline{N}.$$

ახლა, თუ დავუშვებთ, რომ $t=s$, ე. ი. თუ ბუნებრივ პარამეტრს (რკალს) განვიხილავთ როგორც დროს, მაშინ ფრენეს პირველი ფორმულები

$$\frac{d\overline{M}}{ds}=\overline{T},$$

$$\frac{d\overline{M}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{N}$$

გამოსახავს წერტილის მოძრაობის ფორმულებს. ამ შემთხვევაში $v=1$ და $\frac{dv}{ds}=0$; ამის გამო მხები $\overline{W}_t$ აჩქარება ნულია, ხოლო ნორმალური აჩქარება შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$\overline{W}_n=\frac{1}{\rho}\overline{N}.$$

რადგან ფრენეს სისტემა ინვარიანტულად არის დაკავშირებული წერტილის სასრბოლესთან ანუ წირთან, ამიტომ წერტილის ძრაობა განსაზღვრავს აღნიშნული სისტემის ძრაობას და, პირუკუ, აღნიშნული სისტემის ძრაობა ახასიათებს თვით წერტილის ძრაობას, ე. ი. წირს. რადგან ფრენეს სისტემა ისე ძრაობს, როგორც მყარი ტანი, ამიტომ თუ მეზობელ $(M_1\ T_1\ N_1\ \overline{B}_1)$ ფრენეს სისტემის სათავეს გადავიტანთ M წერტილში, ე. ი. განვიხილავთ $(M, \overline{T}_1\ N_1\ \overline{B}_1)$ სისტემას, მაშინ ეს უკანასკნელი მიიღება აღებული სისტემიდან უსასრულო მცირე ბრუნვით უძრავი M წერტილის ირგვლივ. რადგან აღნიშნული ძრაობა მყარი ტანის ბრუნვას წარმოადგენს წერტილის ირგვლივ, ამიტომ უნდა არსებობდეს ბრუნვის მყისა ღერძი. ამ ღერძის წერტილები უძრავი რჩება პირველი რიგის სიზუსტით. მყისა ღერძის მგეზავი $\overline{e}$-თი აღვნიშნოთ და განვსაზღვროთ იგი ბუნებრივ სისტემაში, გვექნება:

$$\overline{e}=\lambda\overline{T}+\mu\overline{N}+\nu\overline{B}.$$

რადგან მყისა ღერძი უძრავი რჩება (პირველი რიგის სიზუსტით) სისტემის უსასრულო მცირე მობრუნების დროს, ამიტომ

$$\frac{d\overline{e}}{ds}=\lambda\frac{d\overline{T}}{ds}+\mu\frac{d\overline{N}}{ds}+\nu\frac{d\overline{B}}{ds}=0.$$

ფრენეს ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$\frac{\lambda}{\rho}\overline{N}-\frac{\mu}{\rho}\overline{T}+\frac{\mu}{\tau}\overline{B}-\frac{\nu}{\tau}\overline{N}=0.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\mu=0,\quad \frac{\lambda}{\rho}-\frac{\nu}{\tau}=0,$$

ეს უკანასკნელი ტოლობები, მყისა ღერძის მგეზავისათვის, შემდეგ ფორმულას მოგვცემს:

$$\overline{e}=\tau\lambda\left(\frac{1}{\tau}\overline{T}+\frac{1}{\rho}\overline{B}\right).$$

ამრიგად,

$$\omega = \frac{1}{\tau}\overline{T} + \frac{1}{\rho}\overline{B} \tag{91}$$

ვექტორი მყისა ღერძის მიმართულებას განსაზღვრავს M წერტილში. მას დ ა რ - ბ უ ს ვ ე ქ ტ ო რ ი ეწოდება. მექანიკური მნიშვნელობით ეს ვექტორი წარმოადგენს მყისა ბრუნვის ვექტორულ კუთხურ სიჩქარეს. როგორც (91) ფორმულიდან ჩანს, დარბუს ვექტორი მდებარეობს გამწრფევ სიბრტყეზე. მისი მდგენელები

$$\frac{1}{\tau}\overline{T} \text{ და } \frac{1}{\rho}\overline{B}$$

ნორმალი სიბრტყისა და მიმხები სიბრტყის მყისა ბრუნვების კუთხურ სიჩქარეებს გამოსახავს (შესაბამისად მხებისა და ბინორმალის ირგვლივ). ამ მდგენელთა ჯამი კი წარმოადგენს გამწრფევი სიბრტყის მყისა ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს.

მაგალითი. განვიხილოთ ცილინდრულ ზედაპირზე მოთავსებული ისეთი წირი, რომელიც ცილინდრის მსახველებთან ერთსა და იმავე კუთხეს შეადგენს. თუ ცილინდრის მსახველის მიმართულებას $\overline{e}$ მგეზავი განსაზღვრავს, მაშინ ამ მგეზავმა ერთი და იგივე კუთხე უნდა შეადგინოს წირის მხებ წრფეებთან, ე. ი.

$$\overline{e} \cdot \overline{T} = \text{const.}$$

აქედან გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\overline{e} \cdot \frac{d\overline{T}}{ds} = 0,$$

ანუ, ფრენეს ფორმულების გამოყენებით,

$$\overline{e} \cdot \overline{\mathrm{N}} = 0.$$

მაშასადამე, წირის მთავარი ნორმალები მართობებია მსახველის მიმართულებისა. აქედან აშკარაა, რომ წირის ბინორმალებიც ერთსა და იმავე კუთხეს შეადგენს მსახველის მიმართულებასთან, ე. ი. $\overline{e}$ მგეზავთან. ამრიგად გვექნება:

$$\overline{e} \cdot \overline{B} = \text{const.}$$

ახლა გავაწარმოოთ

$$\overline{e} \cdot \overline{N} = 0$$

ტოლობა და ფრენეს ფორმულები გამოვიყენოთ, მივიღებთ:

$$-\frac{1}{\rho}\overline{e} \cdot \overline{T} + \frac{1}{\tau}\overline{e} \cdot \overline{B} = 0.$$

რადგან $\overline{e} \cdot \overline{T} = \text{const}$ და $\overline{e} \cdot \overline{B} = \text{const}$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\overline{e} \cdot \overline{T}}{\overline{e} \cdot \overline{B}} = \text{const.} \tag{92}$$

თვით $\overline{e}$ მგეზავი ისე განიზღვრება:

$$\overline{e} = (\overline{e} \cdot \overline{T})\,\overline{T} + (\overline{e} \cdot \overline{\mathrm{B}})\,\overline{B}.$$

ამ ტოლობის შედარება (92) ფორმულასთან მოგვცემს:

$$\overline{e}=(\rho\overline{e}\cdot\overline{B})\left(\frac{1}{\tau}\overline{T}+\frac{1}{\rho}\overline{B}\right).$$

თუ შევადარებთ ამ უკანასკნელ ტოლობას (98) ფორმულასთან, მივიღებთ:

$$\overline{e}=(\rho\overline{e}\cdot\overline{B})\,\overline{\omega}.$$

აქედან ჩანს, რომ დარბუს ვექტორები პარალელურია ცილინდრის მსახველისა და, მაშასადამე, ურთიერთპარალელურიც.

ადვილი დასამტკიცებელია (დამტკიცებას ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის შებრუნებული თანმიმდევრობით ჩატარება მოგვცემს), რომ თუ წირის დარბუს ვექტორები ურთიერთპარალელურია, მაშინ წირის სიმრუდე და გრეხა (92) პირობას აკმაყოფილებს, ე. ი. მათი შეფარდება მუდმივია. ეს წირი მუდმივი კუთხით გადაკვეთს ამ წირზე გამავალ დარბუს ვექტორის პარალელურმსახველებიან ცილინდრის მსახველებს.

რადგან წრიულ კონუსზე დახაზული ხრახნწირი ერთი და იმავე კუთხით ჰკვეთს ცილინდრის მსახველებს, ამიტომ იგი ზემოაღწერილ წირთა ოჯახს მიეკუთვნება. ეს ფაქტი იქიდანაც გამომდინარეობს, რომ ხრახნწირის სიმრუდე და გრეხა მუდმივია და, ცხადია, მათი შეფარდებაც მუდმივი იქნება. დარბუს ვექტორი ხრახნწირისათვის მუდმივია და პარალელურია ხრახნის ღერძისა.

ახლა ბრტყელი წირი განვიხილოთ. რადგან ბრტყელი წირის გრეხა ნულია, ე. ი. $\frac{1}{\tau}=0$, ამიტომ

$$\frac{\rho}{\tau}=0.$$

აქედან ჩანს, რომ ბრტყელი წირი (92) პირობას აკმაყოფილებს. მაშასადამე, ბრტყელი წირი მიეკუთვნება ზემოაღწერილ წირთა ოჯახს. ეს ფაქტი იქიდანაც ჩანს, რომ ბრტყელი წირი მართობია მასზე გამავალ სიბრტყის მართობ მსახველებიანი ცილინდრის მსახველებისა და, მაშასადამე, მსახველებთან ერთსა და იმავე კუთხეს ადგენს.

წირთა ზემოთ აღწერილი ერთობლიობა კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ისეთი წირების სისტემისა, რომელთა სიმრუდე და გრეხა ერთმანეთთან წრფივ დამოკიდებულებაშია, ე. ი.

$$\frac{a}{\rho}+\frac{b}{\tau}=c \tag{93}$$

პირობას აკმაყოფილებს, სადაც a, b, c მუდმივებია. იმ წირებს, რომელთა სიმრუდე და გრეხა (93) პირობას აკმაყოფილებს, **ბ ე რ ტ რ ა ნ ი ს წ ი რ ე ბ ი** ეწოდება.

§ 22. ფრენეს ფორმულები ბრტყელი წირისათვის და მათი მექანიკური მნიშვნელობა

ბრტყელი წირის გრეხა, როგორც აღნიშნული იყო, ნულია, ე. ი. $\frac{1}{\tau}=0$, ამი-

ტომ ბრტყელი წირისათვის ფრენეს ფორმულები (84)-დან მიიღება $\frac{1}{\tau}=0$ ჩასმით. გვექნება:

$$\frac{d\overline{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{N},$$
$$\frac{d\overline{N}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\overline{T}. \tag{94}$$

ამ შემთხვევაშიც ფრენეს ფორმულები განიხილება, როგორც ძრაობის ფორმულები, სადაც s რკალი დროდაა მიღებული. განვსაზღვროთ ამ ძრაობის ბრუნვის მყისა ცენტრი დროის აღებულ მომენტში, ე. ი. ის წერტილი, რომლის სიჩქარე ნულია ანუ რომელიც უძრავია (პირველი რიგის სიზუსტით) ბუნებრივი სისტემის უსასრულო მცირე გადაადგილების დროს M წერტილიდან M_1 წერტილში. აღვნიშნოთ ეს წერტილი P-თი. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overline{MP}=\lambda\overline{T}+\mu\overline{N},$$

საიდანაც

$$P=M+\lambda\overline{T}+\mu\overline{N}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება და ფრენეს ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$\frac{d\overline{P}}{ds}=\overline{T}+\frac{\lambda}{\rho}N-\frac{\mu}{\rho}\overline{T}.$$

თანახმად მყისა ცენტრის იმ თვისებისა, რომ $\frac{d\overline{P}}{ds}=0$ $\left(\frac{d\overline{P}}{ds}\right.$ არის მყისა ცენტრის სიჩქარე), გვექნება:

$$\overline{T}+\frac{\lambda}{\rho}\overline{N}-\frac{\mu}{\rho}\overline{T}=0,$$

საიდანაც

$$\lambda=0,\ \mu=\rho.$$

ამრიგად, მყისა ცენტრი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$P=M+\rho\overline{\mathrm{N}}. \tag{95}$$

აქედან $|\overline{MP}|=|\rho|$, რაც იმას ნიშნავს, რომ P წერტილი მოთავსებულია ნორმალზე და $|\rho|$ მანძილითაა დაშორებული M წერტილიდან. რადგან, გარდა ამისა,

$$\text{გეგ}\ \overline{N}\ \overline{MP}=\rho,$$

ამიტომ P წერტილი მოთავსებულია ნორმალზე წირის ჩაზნექილობის მხარეს, ასეთ წერტილს კი, როგორც ვიცით, სიმრუდის ცენტრი ეწოდება (იხ. § 10).

ამრიგად, ფრენეს სისტემის ძრაობის მყისა ცენტრი არის განსახილავი წირის სიმრუდის ცენტრი M წერტილში. მყისა ცენტრების გეომეტრიული ადგილი, ე. წ. ც ე ნ ტ რ ს ა ვ ა ლ ი, აღებული წირის ევოლუტი იქნება. ამ წირის სიმბოლური განტოლება (95) განტოლებითაა მოცემული, სადაც s მდინარე პარამეტრადაა მიღებული. ამ განტოლებათა დაგეგმილება კოორდინატთა ღერძებზე ევოლუ-

ის უკვე ცნობილ (25) განტოლებას მოგვცემს. მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ამ შემთხვევაში:

$$\overline{T}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$
$$\overline{N}=(-\sin\alpha\ \cos\alpha),$$

სადაც $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'}{x'}$, ადვილი მისახვედრია, რომ უკანასკნელი ფორმულები შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$T=\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right),$$
$$\overline{N}=\left(-\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right). \tag{96}$$

რაც შეეხება სიმრუდეს, იგი მოცემულია (18) ფორმულით. გავაწარმოოთ (95) ტოლობა s-ით და ფრენეს (84) ფორმულები გამოვიყენოთ. გვექნება:

$$\frac{d\overline{P}}{ds}=\frac{d\overline{M}}{ds}+\frac{d\rho}{ds}N+\rho\frac{d\overline{N}}{dr}=\frac{d\rho}{ds}\overline{N'}$$

საიდანაც

$$d\overline{P}=d\rho\overline{N}.$$

აქედან ჩანს, რომ ევოლუტის მხები პარალელურია წირის ნორმალისა. რადგან, გარდა ამისა, P წერტილი (ევოლუტის წერტილი) აღებული წირის ნორმალზე მდებარეობს, ამიტომ ევოლუტის მხები წირის ნორმალია.

რადგან $|d\overline{P}|$ უდრის ევოლუტის რკალის დიფერენციალს, რომელიც $d\sigma$-თი გვაქვს აღნიშნული, ამიტომ

$$d\sigma\overline{T^*}=d\rho\overline{N}.$$

თუ ევოლუტზე რკალის ათვლას ისე ვაწარმოებთ, რომ იგი ρ-ს ზრდას შეესაბამებოდეს, გვექნება:

$$d\sigma=d\rho \text{ და } \overline{T^*}=\overline{N}.$$

ყველაფერი ეს მიღებული გვქონდა I თავშივე, ოღონდ სხვა მეთოდით. ევოლვენტის განტოლების მისაღებად უნდა ამოვხსნათ (95) განტოლება M-ის მიმართ, გვექნება:

$$M=P-\rho\overline{N}.$$

მაგრამ, თანახმად წინა პირობებისა, $\rho=\sigma+c$ და $\overline{N}=\overline{T^*}$; ამიტომ გვექნება

$$M=P-(\sigma+c)\overline{T^*}.$$

არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ამ შემთხვევაში P მოცემული წირის მდინარე წერტილია, $\overline{T^*}$—ამ წირის მხების მგეზავი, σ—მისი რკალი, ხოლო M კი ევოლვენტის მდინარე წერტილი.

მაშასადამე, თუ წირი მოცემულია $M = M(s)$ სიმბოლური განტოლებით, მაშინ მისი ევოლვენტის მდინარე P წერტილი ასე წარმოგვიდგება (წინა განტოლებაში უნდა შევანაცვლოთ როლები P-სა და M-ს შორის, ე. ი. მოცემულსა და საძიებელს შორის):

$$P = M - (s + c)\overline{T}.$$

ეს არის ევოლვენტის სიმბოლური განტოლება. მისი დაგეგმილება კოორდინატთა ღერძებზე და $x = s$ ჩასმა ევოლვენტის უკვე ცნობილ (23) განტოლებას მოგვცემს.

თავი III

ზედაპირთა თეორიის ელემენტები

§ 23. მრუდწირული კოორდინატები ზედაპირზე

როგორც ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან, ერთი განტოლება x, y, z კოორდინატებს შორის ზედაპირს გამოსახავს: ზედაპირი ეწოდება სივრცის ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები რაიმე განტოლებას აკმაყოფილებს. ამრიგად, ზედაპირის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$F(x,\ y, z)=0. \tag{97}$$

ამ განტოლებას ზედაპირის ზოგადი (ან უცხადო) სახის განტოლება ეწოდება. თუ ამოვხსნით z-ის მიმართ (იგულისხმება, რომ ასეთი შესაძლებლობა არსებობს ერთი ცვლადისათვის მაინც), მივიღებთ:

$$z=f(x,\ y). \tag{98}$$

ამ განტოლებას ზედაპირის ცხადი სახის განტოლება ეწოდება. შესაძლებელია კიდევ x, y, z შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება დავამყაროთ რაიმე ორი u, v პარამეტრების საშუალებით; მართლაც, თუ x, y, z ფუნქციებია u, v პარამეტრების, ე. ი.

$$\begin{aligned} x&=x(u,\ v),\\ y&=y(u,\ v),\\ z&=z(u,\ v), \end{aligned} \tag{99}$$

მაშინ ამ სამი ტოლობიდან u და v პარამეტრების გამორიცხვა მოგვცემს x, y, z შორის (97) სახის განტოლებას. (99) სამი ტოლობის ერთობლიობას ზედაპირის პარამეტრული განტოლება ეწოდება. ეს სამი ტოლობა შეგვიძლია სიმბოლურად ასე ჩავწეროთ:

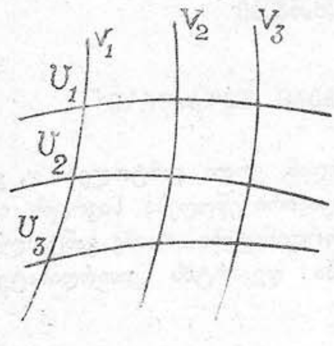
$$M=M(u,\ v). \tag{100}$$

ამ განტოლებას ზედაპირის სიმბოლური განტოლება ეწოდება. u და v პარამეტრების ერთიმეორეზე დამოუკიდებელი ცვლით ზედაპირის ყოველ წერტილს მივიღებთ. თუ u და v-ს ვცვლით ერთიმეორეზე დამოკიდებულად, ე. ი.

თუ ერთი მათგანი მეორის ფუნქციაა ანუ u და v ფუნქციებია ერთი t პარამეტრისა

$$u=u(t), \qquad v=v(t), \tag{101}$$

მაშინ ზედაპირის ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წერტილთა სიმრავლეს მივიღებთ, ე. ი. მივიღებთ ზედაპირზე მდებარე წირს, რომელსაც ზედაპირზე გავლებული წირი ეწოდება. ამრიგად, ზედაპირზე გავლებული წირის განტოლების მისაღებად საკმარისია (100) სიმბოლურ განტოლებაში (101) განტოლებიდან შევიტანოთ u და v პარამეტრები, როგორც t-ს ფუნქციები, ე. ი. ზედაპირზე გავლებული წირის განტოლებები (100) და (101) განტოლებათა სისტემით გამოისახება. კერძოდ, თუ u-ს განვიხილავთ მუდმივად და v-ს მივიჩნევთ პარამეტრად (ე. ი. $v=t$), მივიღებთ წირს, რომლის მდინარე პარამეტრია v. ამ წირს ეწოდება (u) წირი. ანალოგიურად, წირს, რომლის გასწვრივ v მუდმივია, ხოლო u მდინარე პარამეტრი, (v) წირი ეწოდება. როდესაც u და v-ს სხვადასხვა მნიშვნელობას მივანიჭებთ, მივიღებთ (u) და (v) წირთა სისტემებს. ამრიგად, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ ზედაპირი დაფარულია ამ ორი სისტემის წირებით, რომლებიც ზედაპირზე ქმნის წირთა ბადეს (ნახ. 44). ზედაპირის აღებულ წერტილზე გაივლის ერთი წყვილი აღებული სისტემის წირებისა. ამ წყვილში ერთია (u) წირი, ხოლო მეორე—(v) წირი. თვით აღებული წერტილი ამ წყვილის წირთა თანაკვეთის წერტილს წარმოადგენს. ამრიგად, წირთა, წყვილი წერტილისათვის ერთგვარად კოორდინატთა სისტემის როლს ასრულებს. ამიტომ u და v პარამეტრებს მრუდწირული კოორდინატები ეწოდება, თვით წირთა ბადეს კი—საკოორდინატო ბადე. დიფერენციალურ გეომეტრიაში მრუდწირული კოორდინატები პირველად გაუსმა გამოიყენა.



ნახ. 46

მაგალითები. 1. განვიხილოთ სიბრტყე. თუ წარმოვიდგენთ, რომ განსახილავი სიბრტყე xoy სიბრტყესთან არის შეთავსებული, მაშინ მისი განტოლება ასე დაიწერება:

$$z=0.$$

მოვახდინოთ პარამეტრულ განტოლებაზე გადასვლა; ამისათვის x და y პარამეტრებად მივიღოთ. გვექნება:

$$x=u,\ y=v,\ z=0. \tag{102}$$

ეს არის სიბრტყის პარამეტრული განტოლება. ამ შემთხვევაში u მუდმივი გვაძლევს x მუდმივს, რომელიც y ღერძის პარალელურ წრფეს განსაზღვრავს. ანალოგიურად, v მუდმივი x-ის პარალელურ წრფეს მოგვცემს. ამრიგად, (u) და (v) წირები y-ის და x-ის პარალელური წრფეები იქნება შესაბამისად. ამ შემთხვევაში, მაშასადამე, მრუდწირული კოორდინატები დეკარტის წრფივი კოორდინატებია.

2. განვიხილოთ ცილინდრი

$$x^2+y^2=r^2.$$

ავიღეთ პარამეტრულ განტოლებაზე. ამისათვის მივიღოთ $x=r\cos u$, მაშინ $y=r\sin u$, ხოლო z დამოუკიდებელი v პარამეტრი იქნება. ამრიგად, მივიღებთ:

$$x=r\cos u,$$
$$y=r\sin u, \tag{103}$$
$$z=v.$$

არის ცილინდრის პარამეტრული განტოლება. გამოვიკვლიოთ, თუ რას წარმოადგენს მრუდწირული კოორდინატები. თუ $u=\text{const}$, მაშინ პირველი ორი ტოლობიდან გვექნება $y=\text{tg}u\cdot x$; ეს განტოლება z ღერძზე გამავალი სიბრტყის განტოლებაა, რომელიც ცილინდრზე მსახველებს ამოკვეთს; ამრიგად, (u) წირები ცილინდრის მსახველებია. თუ $v=\text{const}$, მაშინ $z=\text{const}$; ეს განტოლება z ღერძის მართობი სიბრტყის განტოლებაა, რომელიც ცილინდრთან თანაიკვეთება წრეწირზე; ამრიგად, (v) წირები ცილინდრის ღერძის მართობი წრეწირებია.

3. განვიხილოთ სფერო შემდეგი პარამეტრული განტოლებით:

$$x=r\cos\varphi\cos\vartheta,$$
$$y=r\sin\varphi\cos\vartheta, \tag{104}$$
$$z=r\sin\vartheta.$$

განტოლება რომ მართლაც სფეროს განტოლებას წარმოადგენს, ამაში შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, თუკი სამივე ტოლობას კვადრატში ავამაღლებთ და მათ შევკრებთ; მივიღებთ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

შემთხვევაში φ და ϑ მრუდწირული კოორდინატებია. გამოვიკვლიოთ ახლა (φ) და (ϑ) წირები. თუ $\varphi=\text{const}$, მაშინ პირველი ორი ტოლობიდან გვეძლევა:

$$y=\text{tg}\,\varphi\cdot x$$

არის z ღერძზე გამავალი სიბრტყის განტოლება, რომელიც სფეროსთან თანაიკვეთება დიდ წრეწირზე. ამრიგად, (φ) წირები ღერძთან თანამკვეთი დიდი წრეწირებია (ე. ი. პოლუსებზე გამავალი დიდი წრეწირებია); მათ მერიდიანები ეწოდება. თუ $\vartheta=\text{const}$, მაშინ მესამე ტოლობა მოგვცემს:

$$z=r\sin\vartheta=\text{const},$$

არის ღერძის მართობი სიბრტყის განტოლება, რომელიც სფეროსთან თანაიკვეთება xoy სიბრტყის პარალელურ წრეწირზე. ამრიგად, (ϑ) წირები xoy სიბრტყის პარალელური წრეწირებია; მათ პარალელები ეწოდება. ამ შემთხვევაში, სფეროზე მრუდწირულ კოორდინატებად გვაქვს მერიდიანები და პარალელები. მათ გეოგრაფიულ კოორდინატებსაც უწოდებენ.

4. განვიხილოთ ბრუნვითი ზედაპირი. ბრუნვის ღერძად ავიღოთ z ღერძი. ზედაპირის განტოლება, როგორც ცნობილია, ასე დაიწერება:

$$z=f(r),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

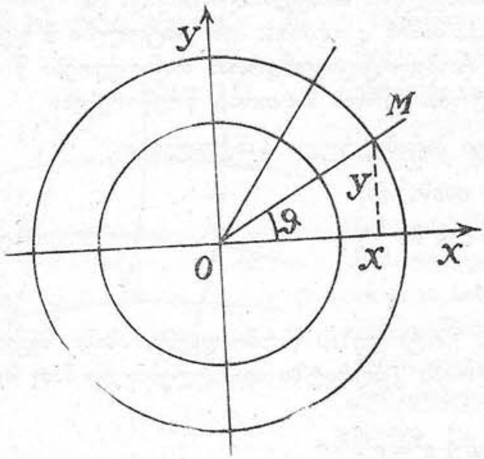
მოვახდინოთ ასეთი ჩასმა:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

მივიღებთ ბრუნვითი ზედაპირის პარამეტრულ განტოლებას

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = f(r).$$

$r=\mathrm{const}$ წირები იქნება ზედაპირის ღერძის მართობული სიბრტყით თანაკვეთის წრეწირები. $\varphi=\mathrm{const}$ წირები იქნება ზედაპირის ღერძზე გამავალი სიბრტყით თანაკვეთის წირები ზედაპირთან (z ღერძის გარს მბრუნავი წირის სხვადასხვა მდებარეობა).



ნახ. 47

5. ახლა განვიხილოთ xoy სიბრტყეზე საკოორდინატო წირთა ბადე, შედგენილი კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფეთა კონისაგან და სათავის გარს შემოხაზული კონცენტრული წრეწირებისაგან. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება, ამ შემთხვევაში ნახაზიდან (ნახ. 47). აშკარაა, რომ

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta.$$

ამრიგად, სიბრტყის პარამეტრული განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta,$$
$$z = 0.$$

ამ შემთხვევაში $r=\mathrm{const}$ წირები კონცენტრული წრეწირებია და $\vartheta=\mathrm{const}$ წირები კი სათავეზე გამავალი წრფეები. ცხადია, რომ ასეთი მრუდწირული კოორდინატები იგივეა, რაც პოლარი კოორდინატები სიბრტყეზე.

6. ბოლოს განვიხილოთ სფეროზე საკოორდინატო ბადე შედგენილი ისეთ დიდ წრეწირთა ორი სისტემისაგან, რომლებიც ამოიკვეთება სფეროზე x ღერძზე გამავალ სიბრტყეთა კონით და y ღერძზე გამავალ სიბრტყეთა კონით შესაბამად. აღნიშნულ სიბრტყეთა კონების განტოლებები იქნება შემდეგი:

$$x - uz = 0,$$
$$y - vz = 0,$$

სადაც u და v პარამეტრებია. ეს განტოლებები სფეროს განტოლებასთან

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ერთად რომ ამოვხსნათ, მივიღებთ:

$$x=\frac{ru}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$y=\frac{rv}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$z=\frac{r}{\pm\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

ეთია სფეროს პარამეტრული განტოლება ზემოაღნიშნულ მრუდწირულ კოორ-
ინატებში. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $u=\text{const}$ და $v=\text{const}$ წირები ზემო-
ღნიშნულ საკოორდინატო ბადეს ჰქმნის.

§ 24. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი წრფე

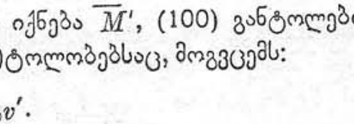
ზედაპირის M წერტილზე გავლებული წირის მხებს ზედაპირის მ ხ ე ბ ი
რ ფ ე ეწოდება. მტკიცდება, რომ ზედაპირის ყველა მხები წრფე მის რომელიმე
M წერტილში (ე. ი. M წერტილზე გავლებულ ყველა წირის მხები წრფეები)
რთ სიბრტყეზე მდებარეობს. ამ სიბრტყეს ეწოდება ზედაპირის მ ხ ე ბ ი ს ი ბ რ ტ-
ე M წერტილში. M წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის მართობ წრფეს
წოდება ზედაპირის ნ ო რ მ ა ლ ი M წერტილში. M წერტილს ეწოდება ხ ე ბ ი ს
ნ შეხების წ ე რ ტ ი ლ ი.

როგორც ვიცით, ზედაპირის M წერტილზე გამავალი წირის განტოლებაა(100)
და (101) ერთად. მხების მიმმართველი ვექტორი იქნება $\overline{M}'$, (100) განტოლების გა-
წარმოება, თუ მხედველობაში მივიღებთ (101)ტოლობებსაც, მოგვცემს:

$$\overline{M}=\overline{M}_u u'+\overline{M}_v v'. \tag{105}$$

აქედან ჩანს, რომ $\overline{M}'$ ვექტორი ყოველთვის მოთავსებულია იმ სიბრტყეში, რო-
მელშიც $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორები მდებარეობს. ამრიგად, მხები სიბრტყე განისაზღვ-
რება M წერტილით და $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორებით. კერძოდ, როცა $u=\text{cons}$
და $v=t$, მაშინ $u'=0$ და $v'=1$ და (105)
ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\overline{M}'=\overline{M}_v.$$



ნახ. 48

ამრიგად, (u) წირის მხების მიმმარ-
თველი ვექტორი იქნება $\overline{M}_v$. სრუ-
ლიად ანალოგიურად, (v) წირის მხების
მიმმართველი ვექტორი იქნება $\overline{M}_u$ (ნახ.
48). რადგან ეს ვექტორები მხებ სიბრტყე-
ში მდებარეობს, ამიტომ მათი გარენამრავლი
$[\overline{M}_u,\overline{M}_v]$ მართობი იქნება მხები სიბრტ-
ყისა და, მაშასადამე, ნორმალის მიმმართ-
ველ ვექტორად გამოდგება. ამ ვექტორის კოორდინატები ნორმალის მიმართუ-
ლების კოეფიციენტები იქნება; მხები სიბრტყის განტოლებისათვის კი ეს კოორ-
დინატები კოეფიციენტები იქნება.

რადგან

$$\overline{M}_u=(x_u,\ y_u,\ z_u),\ \overline{M}_v=(x_v,\ y_v,\ z_v),$$

ამიტომ

$$[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v]=(y_u z_v-z_u y_v,\ z_u x_v-x_u z_v,\ x_u y_v-y_u x_v).$$

მაშასადამე, ნორმალის განტოლება იქნება:

$$\frac{X-x}{y_u z_v-z_u y_v}=\frac{Y-y}{z_u x_v-x_u z_v}=\frac{Z-z}{x_u y_v-y_u x_v}. \tag{106}$$

მხები სიბრტყის განტოლება კი იქნება:

$$(y_u z_v-z_u y_v)(X-x)+(z_u x_v-x_u z_v)(Y-y)+$$
$$+(x_u y_v-y_u x_v)(Z-z)=0. \tag{107}$$

თუ ზედაპირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით:

$$z=f(x,\ y),$$

მაშინ უნდა აღვნიშნოთ

$$x=u,\ y=v.$$

გვექნება:

$$x_u=1,\ y_u=0,\ z_u=\frac{\partial z}{\partial x}=p,$$

$$x_v=0,\ y_v=1,\ z_v=\frac{\partial z}{\partial y}=q.$$

ამ მნიშვნელობათა შეტანის შემდეგ (106) და (107) განტოლებები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{X-x}{-p}=\frac{Y-y}{-q}=\frac{Z-z}{1}, \tag{108}$$

$$-p(X-x)-q(Y-y)+(Z-z)=0. \tag{109}$$

თუ ზედაპირის განტოლება უცხადო სახით არის მოცემული, ე. ი.

$$F(x,\ y,\ z)=0,$$

მაშინ ამ განტოლებიდან უნდა განვსაზღვროთ p და q და შევიტანოთ (108) და (109) განტოლებებში. ცნობილია, რომ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}.$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა და მცირე გამარტივება მოგვცემს ნორმალისა და მხები სიბრტყის შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}=\frac{Z-z}{F_z}, \tag{110}$$

და

$$F_x(X-x)+F_y(Y-y)+F_z(Z-z)=0. \tag{111}$$

ლა მხები სიბრტყის სიმბოლური განტოლება გამოვიყვანოთ. მხები სიბრტყის ინარე წერტილი P-თი აღვნიშნოთ. MP ვექტორი მოთავსებული იქნება მხებ ბრტყეზე და დაიშლება $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორების მიმართულებით. გვექნება:

$$\overline{MP} = \lambda\overline{M}_u + \mu\overline{M}_v,$$

იდან კი (რადგან $\overline{MP}=P-M$)

$$P=M+\lambda\overline{M}_u+\mu\overline{M}_v. \tag{112}$$

არის მხები სიბრტყის სიმბოლური განტოლება. λ და μ მდინარე პარამეტრე-ა, მხებ სიბრტყეზე განვიხილოთ M წერტილის მახლობელი P_1 წერტილი, რო-ლიც ეთანადება პარამეტრების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\lambda=du,\ \mu=dv.$$

ექნება:

$$P_1=M+du\overline{M}_u+dv\overline{M}_v=M+\overline{dM}.$$

ორე მხრივ, წერტილის ნაზრდის მწკრივად დაშლის ფორმულას თუ გავიხ-ნებთ,

$$\Delta\overline{M}=d\overline{M}+\frac{1}{2!}d^2M+\cdots,$$

იდან (რადგან $\Delta\overline{M}=M_1-M$)

$$M_1=M+d\overline{M}+\frac{1}{2!}d^2\overline{M}+\cdots$$

$_1$ და M_1 წერტილების ამ წარმოდგენათა შედარებიდან პირდაპირ ჩანს, რომ თ შორის განსხვავება მეორე რიგის უსასრულო მცირიდან იწყება. ამრიგად, წერტილის მახლობელი წერტილები ზედაპირზე მხებ სიბრ-ყესაც ეკუთვნის პირველი რიგის სიზუსტით.

ისე, როგორც სხვა წრფეებისათვის, ზედაპირის ნორმალისთვისაც შემოგვაქვს ეზავის ცნება. ნორმალის მიმმართველი ვექტორის მგეზავს ნორმალის მგეზავს ეწოდებთ და $\overline{K}$-თი აღვნიშნავთ. რადგან $[\overline{M}_u, \overline{M}_v]$ ნორმალის მიმმართველი ქტორია, ამიტომ

$$K=\frac{[\overline{M}_u, \overline{M}_v]}{|[\overline{M}_u, \overline{M}_v]|}. \tag{113}$$

ეზავის კოორდინატები, ცხადია, ნორმალის მიერ ღერძებთან შედგენილი კუთ-ების კოსინუსები იქნება, ე. ი.

$$\overline{K}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

08) განტოლების მიხედვით, გვექნება:

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos\beta&=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\end{aligned} \tag{114}$$

(110) განტოლების მიხედვით კი შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\qquad(115)$$

$$\cos\gamma=\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}};$$

მხებ სიბრტყესთან დაკავშირებით შემოდის ზედაპირის ჩვეულებრივი და განკუთრი წერტილის ცნება.

განმარტება XX. ზედაპირის ისეთ წერტილს, რომელზედაც ერთადერთი მხები სიბრტყე არსებობს, ჩვეულებრივი წერტილი ეწოდება, დანარჩენ წერტილებს კი—განკუთრი წერტილები.

რადგან მხები სიბრტყის განტოლების A, B, C კოეფიციენტები $[\overline{M}_u, \overline{M}_v]$ ვექტორის კოორდინატებია, ამიტომ მხები სიბრტყე გარკვეული იქნება, თუ ეს კოორდინატები ერთდროულად ნული არ არის, ე. ი. თუ $[\overline{M}_u, \overline{M}_v]$ ვექტორი ამ წერტილზე ნული არ არის. განკუთრი წერტილი კი დახასიათდება ტოლობით: $[\overline{M}_u, \overline{M}_v]=0$. (111)-ის მიხედვით ჩვეულებრივ წერტილზე F_x, F_y, F_z ნაწილობითი წარმოებულები ერთდროულად ნული არ არის, განკუთრი წერტილებისათვის კი გვექნება:

$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=0.$$

მაგალითები. 1. გამოვიყვანოთ ელიფსოიდის მხები სიბრტყის განტოლება. ამ ზედაპირის განტოლება უმარტივესი სახით დავწეროთ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

აქედან

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\quad F_y=\frac{2y}{b^2},\quad F_z=\frac{2z}{c^2}.$$

ეს მნიშვნელობები მხები სიბრტყის (111) განტოლებაში შევიტანოთ:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0.$$

ეს განტოლება შეგვიძლია ასე დავწეროთ:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$

ელიფსოიდის განტოლების მიხედვით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე ერთის ტოლია. ამრიგად, ელიფსოიდის მხები სიბრტყის განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

2. ანალოგიურად გამოიყვანება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

პ ე რ ბ ო ლ ო ი დ ე ბ ი ს მხები სიბრტყეების განტოლებები. მათ ექნებათ შემდეგი ე:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=\pm 1.$$

ს ფ ე რ ო ს მხები სიბრტყის განტოლება ელიფსოიდის მხები სიბრტყის გან-
ლებიდან მიიღება. თუ იქ ჩავწერთ

$$a=b=c=r,$$

ვიღებთ:

$$xX+yY+zZ=r^2.$$

ეროს ნორმალის განტოლება იქნება:

$$\frac{X-x}{x}=\frac{Y-y}{y}=\frac{Z-z}{z}.$$

ედან ჩანს, რომ ნორმალს აქვს $\overline{OM}=(x, y, z)$ ვექტორის მიმართულება, ე. ი.
ფ ე რ ო ს ნ ო რ მ ა ლ ე ბ ი ც ე ნ ტ რ ზ ე გ ა ი ვ ლ ი ს. პირიქით. ზ ე დ ა პ ი რ ი,
ო მ ლ ი ს ნ ო რ მ ა ლ ე ბ ი ე რ თ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე გ ა დ ი ს, უ ს ა თ უ ო დ ს ფ ე-
ო ა. მართლაც, თუ ნორმალები კოორდინატთა სათავეზე გადის, მაშინ გვექნება:

$$\overline{OM}=\lambda\overline{K}.$$

ქედან

$$\overline{d(OM)}=d\lambda\,\overline{K}+\lambda\cdot d\overline{K}$$

ნუ

$$d\overline{M}=d\lambda\,.\,\overline{K}+\lambda\cdot d\overline{K}.$$

უ $\overline{K}$-ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ:

$$\overline{K}\,d\,\overline{M}=d\lambda\,.\,\overline{K}^2+\lambda\,\overline{K}\,.\,d\overline{K}.$$

ადგან $d\overline{M}$ მხებ სიბრტყეში მდებარეობს, ამიტომ

$$\overline{K}\cdot d\overline{M}=0.$$

არდა ამისა, $K^2=1$, ე. ი. $\overline{K}\cdot d\overline{K}=0$; ამ მნიშვნელობათა შეტანის შემდეგ
ივიღებთ:

$$d\lambda=0,\ \lambda=\text{const}.$$

მრიგად,

$$\overline{OM}^2=\lambda^2=\text{const}.$$

ნუ, გაშლილი სახით,

$$x^2+y^2+z^2=\text{const}.$$

ეს უკანასკნელი განტოლება კი სფეროს განტოლებაა.

§ 28. ზედაპირის წირითი ელემენტი ანუ პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა

განვიხილოთ ზედაპირის წერტილზე გავლებული წირის წირითი ელემენტი

$$ds^2=\overline{dM}^2.$$

რადგან

$$\overline{dM}=\overline{M}_u du+\overline{M}_v dv,$$

ამიტომ

$$ds^2=(\overline{M}_u du+\overline{M}_v dv)^2=\overline{M}_u{}^2 du^2+2\overline{M}_u\cdot\overline{M}_v du\, dv+\overline{M}_v{}^2 dv^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\overline{M}_u^2=e,\ \ \overline{M}_u\,\overline{M}_v=f,\ \ \overline{M}_v^2=g. \tag{116}$$

მის შემდეგ წირითი ელემენტი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$ds^2=e du^2+2f du\, dv+g\, dv^2. \tag{117}$$

ამ ფორმულაში du, dv დიფერენციალები ზედაპირზე გავლებული წირის (99) განტოლებიდან უნდა გამოვითვალოთ. თუ ვცვლით წირს, ე. ი. du, dv დიფერენციალებს დამოუკიდებლივ ვცვლით, მაშინ (117) გამოსახულება კვადრატულ დიფერენციალურ ფორმას წარმოადგენს. მას **ზედაპირის პირველი კვადრატული დიფერენციალური ფორმა** ეწოდება. მას უწოდებენ აგრეთვე **გაუსის პირველ ფორმას**, რადგან გაუსმა პირველმა გამოიყენა ასეთი ფორმა ზედაპირის შესასწავლად. აღნიშნულ ფორმას შემოკლებით კიდევ **ზედაპირის წირითი ელემენტიც** ეწოდება.

თუ ზედაპირი მოცემულია ზოგადი განტოლებით, მაშინ x და y მრუდწირულ კოორდინატებად უნდა მივიღოთ და dz ზედაპირის განტოლებიდან გამოვითვალოთ. გვექნება:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=pdx+qdy.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ წირითი ელემენტის

$$ds^2=\overline{dM}^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

ფორმულაში, მივიღებთ:

$$ds^2=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2. \tag{118}$$

გამოვითვალოთ კუთხე მრუდწირულ კოორდინატებს შორის. ეს კუთხე, ცხადია, $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორთა შორის კუთხე იქნება, მივიღებთ:

$$\cos\vartheta=\frac{\overline{M}_u\cdot\overline{M}_v}{|M_u\cdot M_v|}=\frac{f}{\sqrt{eg}}. \tag{119}$$

გამოვითვალოთ ახლა $\sin\vartheta$. ერთი მხრივ,

$$\sin\vartheta=\sqrt{1-\cos^2\vartheta}=\frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{eg}},$$

მეორე მხრივ, კი

$$\sin\vartheta=\frac{|[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v]|}{|\overline{M}_u||\overline{M}_v|}=\frac{|[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v]|}{\sqrt{eg}}.$$

აქედან

$$[\overline{M}_u, \overline{M}_v]^2 = eg - f^2. \tag{120}$$

(118) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$eg - f^2 = 1 + p^2 + q^2. \tag{121}$$

ნორმალის მგეზავის (113) ფორმულა, თანახმად (120) ფორმულისა, ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\overline{K} = \frac{[\overline{M}_u, \overline{M}_v]}{\sqrt{eg - f^2}}. \tag{122}$$

ორ მიმართულებას შორის კუთხე მხოლოდ წირით ელემენტზეა დამოკიდებული. მართლაც, ვთქვათ, M წერტილზე გადის ორი ნებისმიერი წირი. მათი მხები ვექტორები იყოს $d\overline{M}$ და $\delta\overline{M}$; გვექნება:

$$d\overline{M} = \overline{M}_u du + \overline{M}_v dv,$$

$$\delta\overline{M} = \overline{M}_u \delta u + \overline{M}_v \delta v.$$

ამ მიმართულებათა, ე. ი. წირთა შორის კუთხე გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\cos\vartheta = \frac{d\overline{M} \cdot \delta\overline{M}}{|d\overline{M}| \cdot |\delta\overline{M}|}. \tag{123}$$

გაშლილი სახით ეს ასე დაიწერება:

$$\cos\vartheta = \frac{edu\,\delta u + f(du\,\delta v + dv\,\delta u) + g\,dv\,\delta v}{\sqrt{edu^2 + 2f du\,dv + g\,dv^2} \cdot \sqrt{e\delta u^2 + 2f\,\delta u \delta v + g\delta v^2}}. \tag{124}$$

ფართის ელემენტიც აგრეთვე მხოლოდ წირით ელემენტზეა დამოკიდებული. ფართის ელემენტი განიმარტება შემდეგნაირად: (u), (v) და $(u+du)$, $(v+dv)$ წირები შეადგენს ზედაპირზე უსასრულოდ მცირე მრუდწირულ ოთხკუთხედს. რომლის წვეროები

$$M(u, v),\ M(u+du, v),\ M(u, v+dv),\ M(u+du, v+dv)$$

პირველი რიგის სიზუსტით მოთავსებული იქნება მხებ სიბრტყეში. აღებული წერტილებიდან პირველი რიგის სიზუსტით მივიღებთ

$$M, M + \overline{M}_u du, M + \overline{M}_v dv, \quad M + \overline{M}_u du + \overline{M}_s dv$$

წერტილებს. ამ ოთხი წერტილით განსაზღვრულ ოთხკუთხედის ფართობს ეწოდება ზედაპირის ფართის ელემენტი M წერტილში. რადგან ეს უსასრულოდ მცირე ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ამიტომ მისი $d\omega$ ფართობი ტოლი იქნება $\overline{M}_u du$ და $\overline{M}_v dv$ ვექტორების გარენამრავლის სიგრძისა, ე. ი.

$$d\omega = |[\overline{M}_u du, \overline{M}_v dv]| = |[M_u, \overline{M}_v]|\, du dv.$$

(120) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$d\omega = \sqrt{eg - f^2}\, du dv. \tag{125}$$

(121) ტოლობის თანახმად კი

$$d\omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy. \tag{126}$$

მაგალითები. 1. გამოვითვალოთ სიბრტყის წირითი ელემენტი. (102) განტოლებიდან ვპოულობთ:

$$dx=du,\ dy=dv,\ dz=0.$$

ამიტომ სიბრტყის წირითი ელემენტი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$ds^2=du^2+dv^2. \tag{127}$$

2. გამოვითვალოთ ცილინდრის წირითი ელემენტი. (103) განტოლებიდან ვპოულობთ:

$$dx=-r\sin u du,\ dy=r\cos u du,\ dz=dv.$$

გვექნება

$$ds^2=r^2du^2+dv^2.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$ru=u_1,\ v=v_1,$$

მაშინ

$$ds^2=du_1^2+dv_1^2,$$

ამრიგად, ცილინდრის წირით ელემენტს ისეთივე სახე აქვს, როგორიც სიბრტყის წირით ელემენტს. აქედან აშკარაა, რომ წირითი ელემენტი ვერ განსაზღვრავს ზედაპირის ფორმას.

3. გამოვითვალოთ სფეროს წირითი ელემენტი. (104) განტოლებიდან ვპოულობთ:

$$dx=-r\sin\varphi\cos\vartheta\, d\varphi-r\cos\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$dy=r\cos\varphi\cos\vartheta\, d\varphi-r\sin\varphi\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

$$dz=r\cos\vartheta\, d\vartheta.$$

ამ სამი ტოლობის კვადრატში ამაღლება და შეკრება მოგვცემს:

$$ds^2=r^2(\cos^2\vartheta\, d\varphi^2+d\vartheta^2).$$

4. ბოლოს, ბრუნვითი ზედაპირის წირითი ელემენტი გამოვითვალოთ. z ღერძის მქონე ბრუნვითი ზედაპირის განტოლება, როგორც ცნობილია, იწერება ასე:

$$z=f(r),$$

სადაც

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

მრუდწირულ კოორდინატებად განვიხილოთ r და φ, რომლებიც განსაზღვრულია შემდეგი ფორმულებით:

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi.$$

აქედან $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$. გარდა ამისა,

$$dx=dr\cos\varphi-r\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$dy=dr\sin\varphi+r\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$dz=f'(r)dr.$$

ჰვსვათ ეს ტოლობები წირითი ელემენტის ფორმულაში, მივიღებთ:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dr^2+r^2\,d\varphi^2+[f'(r)]^2\,dr^2,$$

ე

$$ds^2=(1+f'^2)dr^2+r^2d\,\varphi^2.$$

ოთხივე განხილული მაგალითის შემთხვევაში $F=0$. (119) ფორმულის მი-
დვით, როცა $f=0$, მაშინ $\vartheta=90°$, ე, ი. (u) და (v) წირები თანამართობია.
შესადამე, ოთხივე განხილულ შემთხვევაში საკოორდინატო წირები თანამართო-
ია. საზოგადოდ,როცა მრუდწირული კოორდინატები თანამართობია, მაშინ
ირითი ელემენტს ასეთი სახე ეძლევა

$$ds^2=edu^2+gdv^2. \tag{128}$$

ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ სიბრტყეს და ცილინდრს ერთნაირი წირითი ელე-
ნტი აქვს. ამრიგად, შესაძლებელია, რომ სხვადასხვა ზედაპირებს შესაბამ წერ-
ილებში ერთნაირი წირითი ელემენტი ჰქონდეს. ამ მდგომარეობის გამო შემო-
ის ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის ცნება და მასთან დაკავშირებული სხვა
იშვნელოვანი ცნებები. ჩვენ ვიტყვით, რომ აღებული ზედაპირი იზომეტრუ-
ად გადაისახება მეორე ზედაპირზე, თუ მათ წერტილებს შორის შეიძლება
ეთი ურთიერთცალსახა თანადობის დამყარება, რომ ამ ზედაპირებს შესაბამის
რტილებში ერთნაირი წირითი ელემენტი ჰქონდეს. იზომეტრულ თანადობაში
ოფ ზედაპირებს ერთიმეორეზე დაფენადი ზედაპირებიც ეწოდება. თუ ზედა-
ირი იზომეტრულად გადაისახება სიბრტყეზე, მას განფენადი ზედაპირი ეწო-
ება. განფენადი ზედაპირის წირითი ელემენტი მრუდწირული კოორდინატების
თანადო შერჩევით სიბრტყის წირითი ელემენტის სახეზე შეიძლება იქნეს დაყვა-
ილი. მაგალითად, ცილინდრი იქნება განფენადი ზედაპირი; უჭიმადი ღუნვით იგი
იბრტყეზე შეგვიძლია გავფინოთ.

§ 26. ზედაპირის მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა

როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, ზედაპირზე გავლებული წირის მხები ზედა-
ირის მხებ სიბრტყეზეა მოთავსებული. ამიტომ მხების მგეზავი მართობი იქნება
ედაპირის ნორმალის მგეზავისა, ე. ი.

$$\overline{K}\cdot\overline{T}=0.$$

მ ტოლობის გაწარმოება და ფრენეს ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$\frac{d\overline{K}}{ds}\cdot\overline{T}+\overline{K}\frac{1}{\rho}\overline{\mathrm{N}}=0.$$

ქედან

$$\frac{\overline{K}\cdot\overline{N}}{\rho}=\frac{-\overline{dK}\cdot\overline{dM}}{ds^2}.$$

ღვნიშნოთ

$$d\sigma^2=-\overline{dK}\cdot\overline{dM}. \tag{129}$$

არდა ამისა, თუ ზედაპირის ნორმალსა და წირის მთავარ ნორმალს შორის კუთ-
ე არის ϑ, მაშინ

$$\overline{K} \cdot N = \cos\vartheta.$$

ამ მნიშვნელობათა შეტანით მივიღებთ:

$$\frac{\cos\vartheta}{\rho} = \frac{d\sigma^2}{ds^2}. \tag{130}$$

რადგან $\overline{K} \perp d\overline{M}$, ამიტომ

$$\overline{K} \cdot d\,\overline{M} = 0.$$

აქედან გაწარმოებით მივიღებთ:

$$-\overline{dK} \cdot \overline{dM} = \overline{K} \cdot d^2\overline{M},$$

ე. ი.

$$d\sigma^2 = \overline{K} \cdot d^2\overline{M}. \tag{131}$$

ამრიგად, მ ე ო რ ე ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ტ ო ლ ი ა წ ე რ ტ ი ლ ი ს მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ს გ ე გ მ ი ლ ი ს ა ზ ე დ ა პ ი რ ი ს ნ ო რ მ ა ლ ზ ე. რადგან

$$d^2\overline{M} = \overline{M}_{uu}du^2 + 2\overline{M}_{uv}\,du\,dv + \overline{M}_{vv}\,dv^2 + \overline{M}_u d^2 u + \overline{M}_v d^2 v,$$

ამიტომ (მხედველობაში ვღებულობთ, რომ $\overline{K}\,\overline{M}_u = 0$, $\overline{K}\,\overline{M}_v = 0$).

$$d\sigma^2 = \overline{K}\,(\overline{M}_{uu}du^2 + 2\overline{M}_{uv}\,du\,dv + \overline{M}_{vv}dv^2).$$

ამ ტოლობისა და (129) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} -\overline{K}_u\,\overline{M}_u &= \overline{K}\,\overline{M}_{uu} = l, \\ -\overline{K}_u\,\overline{M}_v &= \overline{K}\,\overline{M}_{uv} = m, \\ -\overline{K}_v\,\overline{M}_v &= \overline{K}\,\overline{M}_{vv} = n. \end{aligned} \tag{132}$$

მაშინ

$$d\sigma^2 = l du^2 + 2m\,du\,dv + n\,dv^2. \tag{133}$$

ამრიგად, მეორე ელემენტი კვადრატულ დიფერენციალურ ფორმას წარმოადგენს. ამიტომ მას ზედაპირის მ ე ო რ ე კ ვ ა დ რ ა ტ უ ლ დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ფ ო რ მ ა ს უწოდებენ. მას აგრეთვე გ ა უ ს ი ს მ ე ო რ ე ფ ო რ მ ა ს ა ც უწოდებენ.

თუ ზედაპირი მოცემულია ზოგადი განტოლებით, მაშინ x და y უნდა მრუდწირულ კოორდინატებად მივიღოთ. გარდა ამისა, თუ გამოვიყენებთ მ ო ნ ჟ ი ს აღნიშვნებს:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,\ \frac{\partial z}{\partial y} = q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

მაშინ გვექნება

$$d^2 z = r dx^2 + 2s dx\,dy + t dy^2.$$

მეორე ელემენტის გამოსათვლელად (131) ფორმულა გამოვიყენოთ. რადგან

$$\overline{K} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),$$

$$d^2\overline{M} = (d^2x,\ d^2y,\ d^2z),$$

ტომ, თუ მივიღეთ მხედველობაში, რომ $d^2x=0$, $d^2y=0$ (x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია), გვექნება:

$$d\sigma^2=\cos\gamma\cdot d^2z.$$

უ აქ $\cos\gamma$ და d^2z-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ, მივიღებთ:

$$d\sigma^2=\frac{rdx^2+2s\,dx\,dy+tdy^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{134}$$

§ 27. მენიეს დებულება

(130) ფორმულას ახლა ასეთი სახე შეგვიძლია მივცეთ:

$$\frac{\cos\vartheta}{\rho}=\frac{d\sigma^2}{ds^2}=\frac{ldu^2+2m\,du\,dv+ndv^2}{edu^2+2f\,du\,dv+gdv^2}.$$

ვყოთ მარჯვენა მხარის მრიცხველი და მნიშვნელი du^2-ზე და აღვნიშნოთ

$$\frac{dv}{du}=k.$$

აშინ

$$\frac{\cos\vartheta}{\rho}=\frac{l+2mk+nk^2}{e+2fk+gk^2}. \tag{135}$$

ედან ჩანს, რომ $\frac{d\sigma^2}{ds^2}$ შეფარდება მხოლოდ k-ზეა დამოკიდებული. k, თავის ხრივ, განსაზღვრავს წირის მხების მიმართულებას. მართლაც, მხების მიმართულებას განსაზღვრავს

$$d\overline{M}=\overline{M}_u du+\overline{M}_v dv=(\overline{M}_u+k\overline{M}_v)du.$$

ექტორი, და მაშასადამე,

$$\overline{M}_u+k\overline{M}_v$$

ექტორი. ეს უკანასკნელი ვექტორი კი k-ზეა დამოკიდებული. ამრიგად, თუ წირებს საერთო მხები აქვს, მათ k ერთი და იგივე ექნებათ. ავიღოთ k მიმართულების ისეთი წირი, რომლის მთავარი ნორმალი ზედაპირის ნორმალთან არის შეთავსებული, ე. ი. რომლისთვისაც $\vartheta=0$. მაშინ $\cos\vartheta=1$. თუ ასეთი წირის იმრუდეს $\frac{1}{R}$-ით აღვნიშნავთ, გვექნება:

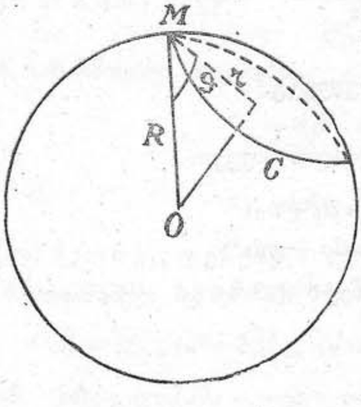
$$\frac{1}{R}=\frac{d\sigma^2}{ds^2}=\frac{l+2mk+nk^2}{e+2fk+gk^2}. \tag{136}$$

ასეთ წირად, რომლის მთავარი ნორმალი ზედაპირის ნორმალთან არის შეთავსებული და რომელსაც აღებული მიმართულება აქვს, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თანაკვეთის წირი ზედაპირის ნორმალზე და აღებულ მიმართულებაზე გამავალი სიბრტყისა ამავე ზედაპირთან. ასეთ წირს **ბრტყელი მართივკვეთის წირი** ეწოდება; მისი სიმრუდე, ცხადია, ტოლი იქნება $\frac{1}{R}$-ისა.

მკვეთი სიბრტყის ნორმალის გარშემო ბრუნვით მივიღებთ ყველა ბრტყელ მართივკვეთის წირებს M წერტილში. თუ შევადარებთ (135) და (136) ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\rho = R \cos \vartheta.$$

ამ ფორმულით მტკიცდება მენიეს შემდეგი დებულება.



ნახ 49

მენიეს თეორემა. ზედაპირის M წერტილში აღებულ მიმართულებით გამავალი ყველა ბრტყელი კვეთების სიმრუდის წრეწირი (ამავე წერტილში) ერთსა და იმავე R-რადიუსიან სფეროზე მდებარეობს.

მართლაც, წარმოვიდგინოთ M წერტილზე გამავალი R-რადიუსიანი სფერო და ზედაპირის მხები. მკვეთი სიბრტყეები სფეროზე ამოჰკვეთს წრეწირებს, რომელთა რადიუსი ტოლი იქნება სფეროს რადიუსის გეგმილისა მკვეთ სიბრტყეზე (ნახ.49), ე. ი.

$$r = R \cos \vartheta.$$

თანახმად (138) ფორმულისა,

$$r = \rho,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ C წრეწირი ზედაპირის ბრტყელი კვეთის (ამავე სიბრტყით) სიმრუდის წრეწირია. ამით კი გამოთქმული დებულება დამტკიცებულია.

§ 28. ზედაპირის სრული და საშუალო სიმრუდე

როგორც (136) ფორმულიდან ჩანს, ბრტყელი მართივკვეთის $\frac{1}{R}$ სიმრუდე k-ს ფუნქციაა. მას აქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი, რომელთაც შესაბამისად $\frac{1}{R_1}$ და $\frac{1}{R_2}$-ით აღვნიშნავთ. ბრტყელი მართივკვეთის სიმრუდის მაქსიმუმს და მინიმუმს, ე. ი. $\frac{1}{R_1}$ და $\frac{1}{R^2}$ სიდიდეებს, ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები ეწოდება. მათ ნამრავლს ეწოდება ზედაპირის სრული სიმრუდე, ხოლო მათი ჯამის ნახევარს—ზედაპირის საშუალო სიმრუდე. თუ სრულ სიმრუდეს K-თი აღვნიშნავთ, საშუალო სიმრუდეს კი H-ით, მაშინ

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \tag{137}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{138}$$

(136) ფორმულიდან შეგვიძლია გამოვთვალოთ სიმრუდის მაქსიმუმი და მინიმუმი. ფორმულა ასე გადავწეროთ:

$$(e-Rl)+2(f-Rm)k+(g-Rn)k^2=0.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა k-თი და მხედველობაში მივიღოთ, რომ (თანახმად ექსტრემუმის პირობისა) $\frac{dR}{dk}=0$; გვექნება:

$$(f-Rm)+(g-Rn)k=0. \tag{139}$$

უკანასკნელი ტოლობის წინა ტოლობასთან შედარება გვაძლევს

$$(e-Rl)+(f-Rm)k=0. \tag{140}$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან k-ს გამორიცხვით მივიღებთ სიმრუდის ექსტრემალურ მნიშვნელობებს. k-ს გამორიცხვა შეიძლება ასე მოხდეს: (139)-დან ამოვხსნათ k და ეს მნიშვნელობა (140) ტოლობაში შევიტანოთ. მივიღებთ:

$$(e-Rl)\ (g-Rn)-(f-Rm)^2=0.$$

გავხსნათ ფრჩხილები და გავყოთ განტოლება R^2-ზე. მაშინ

$$(eg-f^2)\frac{1}{R^2}-(en+gl-2fm)\frac{1}{R'}+ln-m^2=0.$$

ამრიგად, სიმრუდის მაქსიმუმი და მინიმუმი, ე. ი. ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები, უკანასკნელი კვადრატული განტოლების ფესვები იქნება.

კვადრატული განტოლების ფესვთა თვისების მიხედვით

$$K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{en-m}{eg-f^2}, \tag{141}$$

$$2H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{en+gl-2fm}{eg-f^2}. \tag{142}$$

(141) სრული სიმრუდის ფორმულა მარტივი აგებულებისაა; იგი წარმოადგენს მეორე და პირველი კვადრატული ფორმების დისკრიმინანტების შეფარდებას. თუ ზედაპირის განტოლება ზოგადი სახით არის მოცემული, მაშინ ზედაპირის კვადრატული ფორმები (118) და (134) ფორმულებით განისაზღვრება, ხოლო დისკრიმინანტების შეფარდება კი სრულ სიმრუდეს მოგვცემს:

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \tag{143}$$

მაგალითები: 1. სიბრტყე. სიბრტყის მართივკვეთის წირები, ცხადია, წრფეები იქნება (სიბრტყის სიბრტყესთან თანაკვეთა). მათი სიმრუდე ნული იქნება, ე. ი.

$$\frac{1}{R_1}=0,\ \frac{1}{R_2}=0,$$

ამიტომ

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=0,$$

ე. ი. სიბრტყის სრული სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია. ცხადია, რომ საშუალო სიმრუდეც აგრეთვე ნული იქნება.

2. სფერო. რადგან სფეროს ნორმალი ცენტრზე გადის, ამიტომ ნორმალზე გამავალი სიბრტყე სფეროს ცენტრზე გაივლის და სფეროსთან დიდ წრეწირზე თანაიკვეთება. ამრიგად, ბრტყელი მართიკვეთის წირები დიდი წრეწირები იქნება. მათი სიმრუდე სფეროს რადიუსის შებრუნებული სიდიდე იქნება, ე. ი.

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}.$$

აქედან

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{r},\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{r}.$$

სრული სიმრუდისათვის მივიღებთ:

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{1}{r^2}.$$

ამრიგად, სფეროს სრული სიმრუდე ყოველ წერტილში ერთი და იგივეა და იგი რადიუსის კვადრატის შებრუნებულ მნიშვნელობას უდრის.

3. ბრუნვითი ზედაპირი. გამოვითვალოთ ბრუნვითი ზედაპირის სრული სიმრუდე. მბრუნავი წირი ავიღოთ oxz სიბრტყეში. წირის განტოლება იქნება $z=f(x)$. ბრუნვის დროს წირის ყოველი წერტილი აღწერს წრეწირს. ამ წრეწირის გასწვრივ ზედაპირს ერთი და იგივე სიმრუდე ექნება; ამიტომ საკმარისია განვსაზღვროთ სრული სიმრუდე მოცემული წირის გასწვრივ, ე. ი. $(o,\ x,\ z)$ წერტილში. რადგან $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$, ამიტომ აღნიშნული წერტილისათვის გვექნება:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x),\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x),\ \ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ \ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f'(x)\cdot\frac{1}{x}.$$

ამრიგად, სრული სიმრუდე ასეთ სახეს მიიღებს:

$$K=\frac{f'(x)f''(x)}{x[1+f'^2(x)]^2}.$$

4. ცილინდრი. განვიხილოთ ცილინდრი, რომლის მსახველები y ღერძის პარალელურია. მისი განტოლება ასე დაიწერება:

$$F(x,\ z)=0.$$

აქედან

$$z=f(x).$$

გაწარმოებით მივიღებთ:

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x);\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0:\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(143) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$K=0.$$

ამრიგად, ყოველგვარი ცილინდრული ზედაპირის სრული სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია.

ამ მაგალითებიდან ჩანს, რომ სხვადასხვა ზედაპირებს შესაბამ წერტილებში
აძლებელია ერთნაირი სრული სიმრუდე ჰქონდეს, მაგალითად, სიბრტყის და
ლინდრის სრული სიმრუდე ნულია. სრული სიმრუდისა და სხვა მასთან დაკავ-
რებული საკითხების შესახებ არსებობს გ ა უ ს ი ს შემდეგი დებულება, რომელიც
წიგნის V თავში იქნება დამტკიცებული: ზ ე დ ა პ ი რ ი ს ს რ უ ლ ი ს ი მ რ უ დ ე
რ ი თ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს ა დ ა მ ა თ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე-
ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ გ ა მ ო ი ს ა ხ ე ბ ა.

ამ დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი შე-
გები:

1) თუ ერთი ზედაპირი მეორეზე იზომეტრულად გადაისახება, ე. ი. მათ
საბამის წერტილებში ერთნაირი წირითი ელემენტი ექნება, მაშინ, გაუსის დებუ
ების თანახმად, მათ შესაბამის წერტილებში სრული სიმრუდეც თანატოლი ექ-
ბათ. ეს ფაქტი კიდევ ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: ს რ უ ლ ი ს ი მ რ უ დ ე
ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ი ა ზ ე დ ა პ ი რ ი ს უ ჭ ი მ ა დ ი ღ უ ნ ვ ი ს ა.

2) ზედაპირი რომ განფენადი იყოს, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია,
ომ მისი სიმრუდე სიბრტყის სიმრუდის ტოლი, ე. ი. ნულის ტოლ ი იყოს. აქე-
ან გამომდინარეობს, რომ ცილინდრული ზედაპირი განფენადია. სფერო კი სიბრ-
ყეზე იზომეტრულად ვერ გადაისახება, რადგან მისი სიმრუდე ნული არ არის.

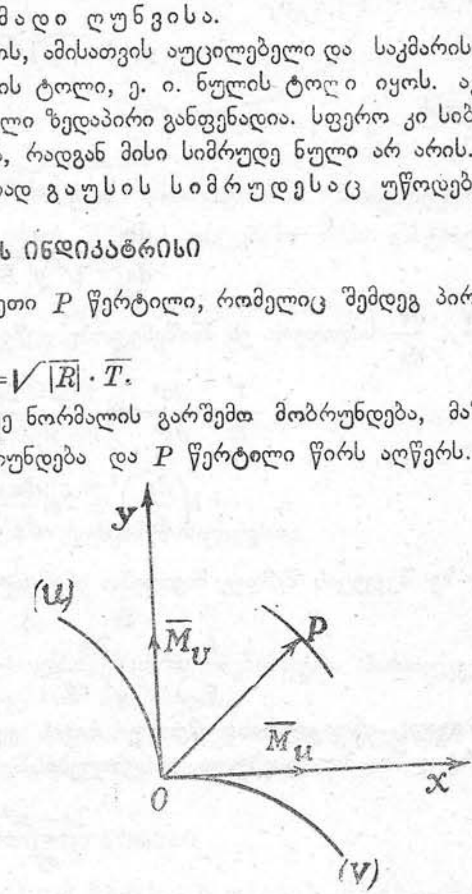
ზედაპირის სრულ სიმრუდეს ხშირად გ ა უ ს ი ს ს ი მ რ უ დ ე ს ა ც უწოდებენ.

§ 29. ᲓᲘᲣᲞᲔᲜᲘᲡ ᲘᲜᲓᲘᲙᲐᲢᲠᲘᲡᲘ

განვიხილოთ მხებ სიბრტყეში ისეთი P წერტილი, რომელიც შემდეგ პირო-
ს აკმაყოფილებს:

$$\overline{MP}=\sqrt{|R|}\cdot\overline{T}.$$

ოდესაც ნორმალზე გამავალი სიბრტყე ნორმალის გარშემო მობრუნდება, მაშინ
$\overline{T}$ ვექტორი ნორმალის გარშემო მობრუნდება და P წერტილი წირს აღწერს. ამ
ირს დ ი უ პ ე ნ ი ს ი ნ დ ი კ ა ტ-
ი ი ს ი ეწოდება. M წერტილში
რუდწირული კოორდინატების მხე-
ი წრფეები კოორდინატთა ღერძე-
ად მივიღოთ (ნახ. 50) და დიუპე-
ის ინდიკატრისის განტოლება გა-
ოვიყვანოთ.



ნახ. 50

ვთქვათ, კოორდინატთა ამ
ისტემაში

$$P=(x,\ y).$$

ცხადია, რომ

$$M=(0,\ 0),$$

$$\overline{M}_u=(\sqrt{e},\ 0)\quad(|\overline{M}_u|=\sqrt{e}),$$

$$\overline{M}_v=(0,\ \sqrt{g})\quad(|\overline{M}_v|=\sqrt{g}).$$

$\overline{MP}=P-M$-ის ჩასმით წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$P=M+\sqrt{|R|}\ \overline{T},\tag{144}$$

სადაც მდინარე პარამეტრია $k=\frac{dv}{du}$. ეს არის დიუპენის ინდიკატრისის სიმბოლური განტოლება. თუ გავიხსენებთ, რომ,

$$\overline{T}=\frac{d\overline{M}}{ds}=\overline{M}_u\frac{du}{ds}+\overline{M}_v\frac{dv}{ds},$$

მაშინ დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\overline{T}=\left(\sqrt{e}\frac{du}{ds},\quad \sqrt{g}\frac{dv}{ds}\right). \tag{145}$$

ინდიკატრისის სიმბოლური განტოლების დაგეგმილება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{|R|}\sqrt{e}\frac{du}{ds},\\ y&=\sqrt{|R|}\sqrt{g}\frac{dv}{ds}. \end{aligned} \tag{146}$$

აქედან

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds}&=\frac{x}{\sqrt{e|R|}},\\ \frac{dv}{ds}&=\frac{y}{\sqrt{g|R|}}. \end{aligned} \tag{147}$$

$\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ სიდიდეთა ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ შემდეგ ფორმულაში:

$$\frac{1}{R}=\frac{d\sigma^2}{ds^2}=\frac{ldu^2+2mdu\,dv+ndv^2}{ds^2}=$$

$$=l\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2m\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+n\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

$\frac{1}{R}$-ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ ინდიკატრისის განტოლებას:

$$\frac{l}{e}x^2+\frac{2m}{\sqrt{eg}}xy+\frac{n}{g}y^2=\pm 1. \tag{148}$$

ამრიგად, ინდიკატრისი მეორე რიგის ცენტრიანი წირია. წირის ცენტრი M წერტილშია მოთავსებული. განტოლების უფროს წევრთა დისკრიმინანტია

$$\frac{ln-m^2}{eg}.$$

რადგან $e>0$, $g>0$, ამიტომ დისკრიმინანტის ნიშანი მისი მრიცხველის, ე. ი. $ln-m^2$-ის ნიშანია. სრული სიმრუდის ფორმულიდან ჩანს, რომ სრულ სიმრუდესაც $ln-m^2$-ის ნიშანი აქვს (რადგან $eg-f^2>0$). ამრიგად, სიმრუდის ნიშანი ინდიკატრისის სახეს განსაზღვრავს. შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) $K>0$ — ინდიკატრისი ელიფსია;

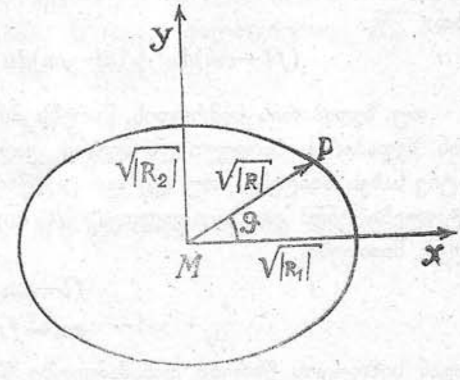
2) $K<0$ — ინდიკატრისი ჰიპერბოლია;

3) $K=0$ — ინდიკატრისი ორ პარალელურ წრფედ არის გადაგვარებული.

K-ს მნიშვნელობის მიხედვით ხდება აგრეთვე წერტილთა კლასიფიკაცია. M წერტილს პირველ შემთხვევაში ელიფსური წერტილი ეწოდება, მეორეში—ჰიპერბოლური და მესამეში—პარაბოლური.

რადგან ინდიკატრისის ცენტრი M წერტილშია მოთავსებული, ოლო რადიუს-ვექტორის სიგრძე $\sqrt{|R|}$ არის, ამიტომ ინდიკატრისის ნახევარღერძები a და b შესაბამისად ტოლი იქნება $\sqrt{|R|}$-ის მაქსიმუმისა და მინიმუმის, ე. ი. $\sqrt{|R_1|}$-სა და $\sqrt{|R_2|}$-სა (ნახ. 51):

$$a=\sqrt{|R_1|},\ b=\sqrt{|R_2|}.$$



ნახ. 51

აქედან ისიც გამომდინარეობს, რომ ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები ურთიერთთანამართობ წირებს აქვს. რადგან ინდიკატრისის ნახევარღერძები $\sqrt{|R_1|}$ და $\sqrt{|R_2|}$-ის ტოლია, ამიტომ ახალ ($Mx'y'$) სისტემაში მისი განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{x'^2}{R_1}+\frac{y'^2}{R_2}=1.$$

რადგან ახალ სისტემაში $P=(x',\ y')$, ამიტომ

$$x'=\sqrt{|R|}\cos\vartheta,$$

$$y'=\sqrt{|R|}\sin\vartheta.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს წინა განტოლებაში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{R_1}+\frac{\sin^2\vartheta}{R_2}=\frac{1}{R}. \tag{149}$$

ამ ტოლობას ეილერის ფორმულა ეწოდება. იგი ნებისმიერი მართივკვეთის სიმრუდეს ზედაპირის მთავარ სიმრუდეებთან აკავშირებს.

დიუპენის ინდიკატრისის მიხედვით განიმარტება ზედაპირზე გავლებული ზოგიერთი სახის წირი. ჩვენც ახლა მათ შესწავლაზე გადავალთ.

§ 30. სიმრუდის წირები

ზედაპირზე გავლებულ ისეთ წირს, რომლის მხები წრფე ყოველ წერტილში შეთავსებულია სათანადო დიუპენის ინდიკატრისის ერთ-ერთ მთავარ დიამეტრთან, სიმრუდის წირი ეწოდება. საზოგადოდ, ზედაპირის M წერტილზე სიმრუდის წირების მხოლოდ ერთი წყვილი გაივლის; ისინი თანამართობი წირებია და მათი მიმართულების მქონე მართივკვეთის სიმრუდეები აღებულ წერტილში ზედაპირის მთავარი სიმრუდეებია. მათი სახელწოდებაც აქედან წარმოდგება.

(139), (140) განტოლებათაგან R რომ გამოვრიცხოთ, სიმრუდის წირების დიფერენციალურ განტოლებას მივიღებთ:

$$(f+kg)\,(l+km)-(e+kf)\,(m+kn)=0.$$

თუ ფრჩხილებს გავხსნით და გავიხსენებთ, რომ $k=\frac{dv}{gu}$, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$(fl-em)du^2+(gl-en)du\,dv+(gm-en)dv^2=0. \tag{150}$$

თუ ზედაპირის სიმრუდის წირებს მრუდწირულ კოორდინატებად ჩავთვლით, მაშინ ზედაპირის პირველი და მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმები მარტივ სახეს მიიღებს. თუ (u) და (v) წირები სიმრუდის წირებია, მაშინ (150) განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს $u=\text{const}$ და $v=\text{const}$ მნიშვნელობით ცალ-ცალკე; მივიღებთ:

$$fl-em=0,$$
$$gm-fn=0.$$

რადგან სიმრუდის წირები თანამართობი წირებია (და ამავე დროს მრუდწირული კოორდინატებია), ამიტომ $f=0$. უკანასკნელი ტოლობები მოგვცემს $m=0$. გარდა ამისა, მთავარ სიმრუდეთა გამოსათვლელი განტოლება ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს:

$$(e-Rl)\,(g-Rn)=0.$$

აქედან

$$l=\frac{e}{R_1}, \quad n=\frac{g}{R_2}. \tag{151}$$

პირველი და მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$ds^2=edu^2+gdv^2,$$
$$d\sigma^2=\frac{edu^2}{R_1}+\frac{gdv^2}{R_2}.$$

თუ სიმრუდის წირების მიმართულებებს შესაბამისად (d_1) და (d_2)-ით აღვნიშნავთ, მაშინ გვექნება:

$$d_1\overline{M}=\overline{M}_u du,$$
$$d_2\overline{M}=\overline{M}_v dv.$$

აქედან

$$d_1\overline{M}^2=\overline{M}_u^2du^2=edu^2,$$
$$d_2\overline{M}^2=\overline{M}_v^2dv^2=gdv^2.$$

პირველი და მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმები შემდეგი მარტივი სახით წარმოგვიდგება:

$$ds^2=d_1\overline{M}^2+d_2\overline{M}^2,$$

$$d\sigma^2=\frac{d_1\overline{M}^2}{R_1}+\frac{d_2\overline{M}^2}{R_2}. \tag{152}$$

რადგან $m=0$, ამიტომ, თანახმად (132) აღნიშვნებისა, გვექნება:

$$\overline{K_u} \cdot M_v=0,$$
$$\overline{K_v} \cdot \overline{M_u}=0.$$

ს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{K_n}$ მართობია $\overline{M}_v$-სი და, მაშასადამე, $\overline{K_u}$ პარალელური ქნება $\overline{M_u}$-სი (რადგან $\overline{M}_u$ მართობია $\overline{M}_v$-სი). ანალოგიურად, $\overline{K_v}$ პარალელური იქნება $\overline{M}_v$-სი. ეს პარალელობა ასე ჩავწეროთ:

$$\overline{K_u} = \lambda\overline{M}_u,$$
$$\overline{K_v} = \mu\overline{M_v}.$$

გადავამრავლოთ პირველი განტოლება $\overline{M}_u$-ზე, ხოლო მეორე $\overline{M}_v$-ზე და მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$\overline{M'_u} \cdot \overline{K_u}=-\overline{K} \cdot \overline{M}_{uu}=-l=-\frac{e}{R_1},$$

$$\overline{M}_v \cdot \overline{K_v}=-\overline{K} \cdot \overline{M}_{vv}=-n=-\frac{g}{R_2},$$

$$\overline{M}_u^2=e,\ \overline{M}_v^2=g.$$

მცირე გამარტივებით მივიღებთ:

$$\lambda=-\frac{1}{R_1},\ \ \mu=-\frac{1}{R_2}.$$

ამრიგად,

$$\overline{K_u}=-\frac{1}{R_1}\overline{M}_u,$$
$$\overline{K_v}=-\frac{1}{R_2}\overline{M}_v. \tag{153}$$

ამ ტოლობებს როდრიგის ფორმულები ეწოდება.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებში როდრიგის ფორმულები შემდეგი ტოლობის ეკვივალენტურია:

$$d\overline{K}=-\frac{1}{R}d\overline{M},$$

სადაც $d\,\overline{M}$ სიმრუდის წირის მხებია, ხოლო $\frac{1}{R}$ — სათანადო მართივკვეთის სიმრუდე.

§ 31. შეუღლებული წირები

M წერტილზე გამავალ ისეთ წირთა წყვილს, რომელთა მხები წრფეები შეუღლებულია სათანადო დიუპენის ინდიკატრისის მიმართ, შეუღლებული წირები ეწოდებათ. ცხადია, რომ ყოველი მიმართულებისათვის არსებობს სათანადო შეუღლებული მიმართულება.

შეუღლებულ წირთა წყვილის მხები წრფეები M წერტილში შეთავსებული იქნება სათანადო დიუპენის ინდიკატრისის შეუღლებულ დიამეტრებთან. თუ მათი მხებთა მიმართულებები $d\overline{M}$ და $\delta\overline{M}$ ვექტორებით განისაზღვრება, მაშინ, თანახმად (146) ფორმულისა, გვექნება:

$$\frac{d\,\overline{M}}{ds}=\left(\sqrt{e}\,\frac{du}{ds},\ \sqrt{g}\,\frac{dv}{ds}\right),$$

$$\frac{\delta\,\overline{M}}{\delta s}=\left(\sqrt{e}\,\frac{\delta u}{\delta s},\ \sqrt{g}\,\frac{\delta v}{\delta s}\right).$$

აქედან ჩანს, რომ აღებული წყვილის წირთა საკუთხო კოეფიციენტები (M, $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$) სისტემის მიმართ იქნება:

$$k_1=\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{dv}{du},\quad k_2=\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\delta v}{\delta u}.$$

თანახმად ინდიკატრისის განტოლებისა, შეუღლებული დიამეტრების საკუთხო კოეფიციენტები დააკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{l}{e}+\frac{m}{\sqrt{eg}}(k_1+k_2)+\frac{n}{g}\,k_1k_2=0;$$

k_1, k_2 მნიშვნელობათა შეტანის შემდეგ მივიღებთ:

$$l du\,\delta u+m\,(du\,\delta v+dv\,du)+n dv\,\delta v=0. \tag{154}$$

აღვნიშნოთ შეუღლებული წირების ერთი შესანიშნავი თვისება: თუ $d\overline{M}$ და $\delta\overline{M}$ შეუღლებული წირების მხები ვექტორებია, მაშინ $\delta d\overline{M}=$ $=d\delta\overline{M}$ ვექტორი მხებ სიბრტყეში მოთავსდება და ამავე დროს ასეთი თვისება მხოლოდ შეუღლებულ წირებს აქვთ. ამ თვისების აღმოსაჩენად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\delta d\overline{M}$ მართობია ნორმალის. ჩვენ ვიცით, რომ

$$\delta d\overline{M}=\delta(\overline{M}_u du+\overline{M}_v)dv=$$
$$=\overline{M}_{uu}du\,\delta u+\overline{M}_{uv}\,(d_u d_v+dv\delta u)+\overline{M}_{vv}dv\delta v.$$

თუ $\overline{K}$-ზე გადავამრავლებთ და (154) ტოლობას მხედველობაში მივიღებთ, გვექნება:

$$\overline{K}\ \delta d\overline{M}=0.$$

ეს კი გამოთქმულ თვისებას ამტკიცებს·

§ 82. ასიმპტოტური წირები

ზედაპირზე გავლებულ ისეთ წირს, რომლის ყოველ წერტილში მხები შეთავსებულია სათანადო დიუპენის ინდიკატრისის ასიმპტოტთან, ასიმპტოტური წირი ეწოდება. საზოგადოდ, ზედაპირის ყოველ წერტილზე ასიმპტოტური წირების ერთი წყვილი გაივლის. როგორც ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან, (148) განტოლებით განსაზღვრული წირის ასიმპტოტების განტოლება იქნება:

$$\frac{l}{e}x^2 + \frac{2\,m}{\sqrt{eg}}\,xy + \frac{n}{g}\,y^2 = 0.$$

რადგან

$$x = \sqrt{|R|}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{du}{ds},$$

$$y = \sqrt{|R|}\cdot\sqrt{g}\cdot\frac{dv}{ds},$$

ამიტომ ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$l du^2 + 2m du\, dv + n dv^2 = 0. \qquad (155)$$

(133) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$d\sigma^2 = 0.$$

ამრიგად, ასიმპტოტური წირების გასწვრივ მეორე კვადრატული ფორმა ნულია. უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს, რომ

$$d\sigma^2 = \overline{K} d^2\,\overline{M} = 0,$$

მაშასადამე, $\overline{K} \perp d^2 M$, ე. ი. $d^2\overline{M}$ მოთავსებულია ზედაპირის მხებ სიბრტყეში, მეორე მხრივ, $d^2\overline{M}$ მდებარეობს წირის მიმხებ სიბრტყეში. ამრიგად, ასიმპტოტური წირის მიმხები სიბრტყე შეთავსებულია ზედაპირის მხებ სიბრტყესთან.

ხშირად ამ თვისებას ასიმპტოტური წირების განმარტებად ღებულობენ და, მაშასადამე, ჩვენგან ზემოთ მითითებული განმარტება მისგან გამოჰყავთ. ასიმპტოტური წირების დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$d\sigma^2 = l du^2 + 2m\, du\, dv + n\, dv^2 = 0. \qquad (156)$$

ეს განტოლება შეიძლება შეუღლებულ წირთა განტოლებიდან (იხ. 154) მივიღოთ, თუ იქ ჩავსვამთ $(d) = (\delta)$. ამრიგად, ასიმპტოტური წირები თავის თავის შეუღლებული წირებია. თვით შეუღლებულ წირთა მხები წრფეები ასიმპტოტურ წირთა მხებ წრფეებთან ერთად წრფეთა ჰარმონიულ ოთხეულს ჰქმნის. ხშირად შეუღლებული წირები ამ თვისებით განიმარტება.

მაგალითები: 1. განფენადი ზედაპირი. რადგან განფენადი ზედაპირის სიმრუდე $K = 0$, ამიტომ დიუპენის ინდიკატრისი მის ყოველ წერტილში ორ პარალელურ წრფედ იქნება გადაგვარებული და, მაშასადამე, ასიმპტოტური წირები მსახველებთან იქნება შეთავსებული.

საზოგადოდ, წრფოვანი ზედაპირის მსახველი ამ ზედაპირის ასიმპტოტური წირი იქნება. მართლაც, მსახველი მხებია თავისთავისა და, მაშასადამე, ზედაპირისაც; ამიტომ მსახველის გასწვრივ მხების სიბრტყე მსახველზე გაივლის და, რადგან წრფის მიმხებ სიბრტყედ შეგვიძლია მასზე გამავალი ყოველი სიბრტყე მივიჩნიოთ, ამიტომ ზედაპირის მხები სიბრტყე მსახველის გასწვრივ შეგვიძლია განვიხილოთ მსახველის მიმხებ სიბრტყედ; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მსახველი ასიმპტოტური წირი ყოფილა. კერძოდ, მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის ერთი წყვილი მისი მსახველებისა; ესენი იქნება მისი ასიმპტოტური წირები. ვინაიდან მხები სიბრტყე მსახველებზე გადის, ამიტომ

ამ შემთხვევაში ასიმპტოტური წირები მოგვევლინება, როგორც მხები სიბრტყის ზედაპირთან თანაკვეთის წირები. ეს თვისება მხოლოდ მეორე რიგის ზედაპირს ახასიათებს, ე. ი. თუ ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის ორი მისი მსახველი, მაშინ ზედაპირი მეორე რიგისაა. მართლაც, თუ აღნიშნულ მსახველებს საკოორდინატო წირებად მივიღებთ, ხოლო u და v პარამეტრებად სათანადო მსახველების რკალებს განვიხილავთ, მაშინ $\overline{M}_u$ და $\overline{M}_v$ ვექტორები მსახველების მხებთა მგეზავები იქნება, ხოლო $\overline{M}_{uu}$ და $\overline{M}_{vv}$ ვექტორები — მგეზავების წარმოებულები სათანადო რკალით. ამ უკანასკნელთა სიგრძეები კი მსახველთა სიმრუდეებს მოგვცემს, მაგრამ მსახველთა სიმრუდეები ნულებია, ე. ი.

$$\overline{M}_{uu}=0, \quad \overline{M}_{vv}=0.$$

ამ ტოლობათა დაგეგმილება მოგვცემს:

$$X_{uu}=0, \; Y_{uu}=0, \; Z_{uu}=0,$$

$$X_{vv}=0, \; Y_{vv}=0, \; Z_{vv}=0.$$

აქედან ჩანს, რომ x, y, z ცალ-ცალკე წრფივი ფუნქციებია u და v პარამეტრების მიმართ, ე. ი.

$$x=auv+bu+cv+d,$$

$$y=a_1uv+b_1u+c_1u+d_1,$$

$$z=a_1ua+b_2u+c_2v+d_2.$$

აქედან u და v პარამეტრების გამორიცხვა მეორე რიგის ზედაპირის განტოლებას მოგვცემს და გამოთქმული აზრიც დამტკიცებულია.

2. სფერო. რადგან სფეროსათვის $\dfrac{1}{R_1}=\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{r}$, ე. ი. $R_1=R_2$, ამიტომ $\sqrt{|R_1|}=\sqrt{|R_2|}$, ე. ი. $a=b$ და დიუპენის ინდიკატრისი წრეწირი იქნება. რადგან წრეწირში ყოველი დიამეტრი მთავარ დიამეტრსაც წარმოადგენს, ამიტომ სფეროზე სიმრუდის წირები განუზღვრელია: აღებულ წერტილზე გამავალი ყოველი დიდი წრეწირი სიმრუდის წირიც იქნება.

§ 33. ზედაპირის სფერული გადასახვა და მესამე კვადრატული დიფერენციალური ფორმა

გაუსმა შემოიტანა და გამოიყენა ზედაპირის სფეროზე გადასახვის ცნება. სივრცის მკვიდრ წერტილზე მოვდოთ ზედაპირის ყოველ M წერტილში გამავალი ნორმალის მგეზავი. ამ მგეზავთა ბოლო წერტილები ერთეულ-რადიუსიან სფეროზე მოთავსდება, რომლის ცენტრი აღებული მკვიდრი წერტილია. სფეროზე მიღებულ წერტილს M წერტილის თანად წერტილს ვუწოდებთ და ამნაირად ვამყარებთ ზედაპირის გადასახვას სფეროზე, ე. წ. ზედაპირის სფერულ ასახვას. თუ M წერტილის თანად წერტილს სფეროზე P-თი აღვნიშნავთ, მაშინ გვექნება:

$$\overline{OP}=\overline{K},$$

საიდანაც

$$P=O+\overline{K}.$$

ამ ფორმულიდან მიიღება სფერული ანასახის წირითი ელემენტი

$$d\delta^2 = d\overline{P^2} = d\overline{K^2} \tag{157}$$

ამ გამოსახულებას მესამე კვადრატული დიფერენციალური ფორმა ეწოდება.

თუ მრუდწირულ კოორდინატებად სიმრუდის წირებს მივიღებთ, მაშინ

$$\overline{K}_u = -\frac{1}{R_1}\overline{M}_u,$$

$$\overline{K}_v = -\frac{1}{R_2}\overline{M}_v.$$

ამის გამო

$$ds^2 = \left(\frac{1}{R_1}\overline{H}_u du + \frac{1}{R_2}\overline{M}_v dv\right)^2 = \frac{1}{R_1^2}\overline{M}_u^2 du^2 + \frac{1}{R_2^2}\overline{M}_v^2 dv^2.$$

ამრიგად,

$$d\delta^2 = \frac{edu^2}{R_1^2} + \frac{gdv^2}{R_2^2},$$

ანუ, თანახმად სათანადო აღნიშვნებისა,

$$d\delta^2 = \frac{d_1\overline{M}^2}{R_1^2} + \frac{d_2 M^2}{R_2^2}. \tag{158}$$

თუ (152) და (158) ტოლობათაგან $d_1\overline{M}^2$, $d_2\overline{M}^2$-ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ:

$$d\delta^2 + K ds^2 - 2H d\sigma^2 = 0. \tag{159}$$

მაშასადამე, მესამე კვადრატული ფორმა წრფივად გამოისახება პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების საშუალებით.

ზედაპირის სფერული ანასახის ფართის ელემენტი $d\omega$-თი აღვნიშნოთ. გვექნება:

$$d\omega = |[\overline{K}_u, \overline{K}_v]|\, dudv = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}\,|[\overline{M}_u, \overline{M}_v]|\, du\, dv = \frac{1}{R_1 R_2} d\Omega.$$

აქედან

$$\frac{d\omega}{d\Omega} = \frac{1}{R_1 R_2} = K. \tag{160}$$

$\frac{d\omega}{d\Omega}$ შეფარდებას გაუსი ზედაპირის სიმრუდეს უწოდებს, უკანასკნელი ფორმულიდან ჩანს, რომ ზედაპირის სიმრუდე მისი სრული სიმრუდის ტოლია.

აქ ჩვენ მოვახდენთ (159) ფორმულის გამოყენებას ასიმპტოტური წირის გრეხის გამოსათვლელად. რადგან ასიმპტოტური წირის გასწვრივ $d\delta^2 = 0$, ამიტომ (159) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{d\delta}{ds} = \sqrt{-K}.$$

რადგან ასიმპტოტური წირის მიმხები სიბრტყე ემთხვევა ზედაპირის მხებ სიბრტყეს, ამიტომ ზედაპირის ნორმალი იქნება წირის ბინორმალი, ე. ი. $\overline{K} = \overline{B}$. წირის მთავარი ნორმალი იქნება ვექტორი $[\overline{K}, \overline{T}]$, მაშასადამე,

$$\overline{N}=[\overline{K},\ \overline{T}].$$

მეორე მხრივ $\frac{d\overline{K}}{ds}$, როგორც $\frac{d\overline{B}}{ds}$, ასე წარმოგვიდგება (ფრენეს ფორმულების მიხედვით):

$$\frac{d\overline{K}}{ds}=-\frac{1}{\tau}\overline{N},$$

აქედან

$$\frac{1}{\tau}=\pm\left|\frac{d\overline{K}}{ds}\right|=\pm\frac{d\delta}{ds}=\pm\sqrt{-K}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{\tau}=\pm\sqrt{-K}. \qquad (160_1)$$

§ 34. გეოდეზიური წირი

ზედაპირზე გავლებულ ისეთ წირს, რომლის მთავარი ნორმალი ყოველ წერტილში შეთავსებულია ზედაპირის ნორმალთან იმავე წერტილში, ზედაპირის გეოდეზიური წირი ეწოდება. მთავარი ნორმალის მგეზავი მართობი იქნება მხები სიბრტყის, ე. ი. $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორების, და ამიტომ

$$\overline{N}\,\overline{M}_u=0,\ \overline{N}\,\overline{M}_v=0.$$

ფრენეს მეორე ფორმულა

$$\frac{d\overline{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{N}$$

მოგვცემს

$$\overline{N}=\rho\frac{d\overline{T}}{ds}=\rho\frac{d^2\overline{M}}{ds^2},$$

სადაც $\overline{T}=\frac{d\overline{M}}{ds}$. თუ $\overline{N}$-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ წინა ტოლობებში, გეოდეზიური წირის შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებებს მივიღებთ:

$$\overline{M}_u\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=0,$$

$$\overline{M}_v\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=0. \qquad (161)$$

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ გეოდეზიური წირი ზედაპირის ორ მეზობელ წერტილს შორის უმოკლესი სიგრძის წირია და რომ ზედაპირზე ინერციული მოძრაობა გეოდეზიური წირის გასწვრივ ხდება.

მაგალითები: 1. სიბრტყე. რადგან ბრტყელი წირის მთავარი ნორმალი თვით წირის სიბრტყეში მდებარეობს, ხოლო სიბრტყის ნორმალი მისი მართობია, ამიტომ ბრტყელი წირი, თუ იგი წრფე არ არის, ვერ იქნება სიბრტყის გეოდეზიური წირი. გამონაკლისს წარმოადგენს წრფე, რომლისთვისაც მთავარ ნორმალად

აღებულ წერტილში ყოველი მისი მართობი წრფე და, კერძოდ, სიბრტყის ნორმალიც გამოდგება. ამრიგად, *სიბრტყის გეოდეზიური წირი არის წრფე*. ეს დასკვნა იმ მხრივაც ნათელია, რომ წრფე არის სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილზე გამავალ ყველა წირთა შორის უმოკლესი სიგრძის წირი. ეს დასკვნა შესაძლებელია ანალიზური გზითაც მივიღოთ. გავიხსენოთ სიბრტყის პარამეტრული განტოლება:

$$x=u,$$
$$y=v,$$
$$z=0.$$

აქედან

$$x_u=1, \quad y_u=0, \quad u=0,$$
$$x_v=0, \quad y_v=1, \quad z_v=0.$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\overline{M_u}=(1,\ 0,\ 0), \quad M_v=(0,\ 1,\ 0).$$

გარდა ამისა,

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2}\right).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (161) განტოლებაში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=0,$$
$$\frac{d^2y}{ds^2}=0.$$

აქედან აშკარაა, რომ

$$x=cs+c_1,$$
$$y=c_2s+c_3,$$

სადაც c, c_1, c_2, c_3 მუდმივებია. s პარამეტრის გამორიცხვა მოგვცემს

$$Ax+By+C=0.$$

ეს განტოლება, $z=0$ განტოლებასთან (ე. ი. აღებულ ზედაპირის განტოლებასთან) ერთად, წრფეს განსაზღვრავს და, მაშასადამე, გეოდეზიური წირი წრფეა.

2. *სფერო*. სფეროზე დიდი წრეწირების მთავარი ნორმალები სფეროს ცენტრზე გაივლის და, მაშასადამე, შეთავსებულია სფეროს ნორმალებთან. ამრიგად, *დიდი წრეწირები სფეროს გეოდეზიური წირებია*. პირიქით, *სფეროს ყოველი გეოდეზიური წირი დიდი წრეწირია*. მართლაც, რადგან გეოდეზიური წირის მთავარი ნორმალები სფეროს ცენტრზე უნდა გადიოდეს, ამიტომ ამ წირის მიმხები სიბრტყეებიც სფეროს ცენტრზე გაივლის და, მაშასადამე, ორი მახლობელი მიმხები სიბრტყე სფეროს რადიუსზე თანაიკვეთება. მაგრამ, მეორე მხრივ, ორი მახლობელი მიმხები სიბრტყის თანაკვეთა მხებ წრფეს განსაზღვრავს. გამოდის, რომ მხები წრფე და მთავარი ნორმალი შეთავსებული უნდა იყოს, რაც შეუძლებელია. ამიტომ მიმხები სიბრტყე არ უნდა იცვლებოდეს, ე. ი. გეოდეზიური წირი ბრტყელი უნდა იყოს და, მაშასადამე, იგი დიდი

წრეწირი უნდა იყოს. იგივე შედეგი შეგვიძლია მივიღოთ (161) დიფერენციალური განტოლებებიდანაც.

3. წ რ ი უ ლ ი ც ი ლ ი ნ დ რ ი. უბრალო დაკვირვებით შევამჩნევთ, რომ ცილინდრის მსახველები და ღერძის მართობი წრეწირები გეოდეზიური წირებია. გარდა ამისა, ცილინდრზე მდებარე ხრახნწირიც აგრეთვე გეოდეზიური წირია. მართლაც, თუ ხრახნწირის მთავარ ნორმალს გამოვითვლით, ვნახავთ, რომ იგი ყოველთვის z ღერძზე გადის და მისი მართობია, ე. ი. შეთავსებულია ცილინდრის ნორმალებთან. შემდეგში დამტკიცებული იქნება, რომ ცილინდრის სიბრტყეზე განფენის დროს ხრახნწირის ნაწილები წრფივ მონაკვეთებში გადაისახება.

§ 35. ზედაპირთა ოჯახები და მათი მომვლებნი

განვიხილოთ ჯერ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ოჯახი (162)

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0.$$

თუ F ფუნქცია უწყვეტია λ პარამეტრის მიმართ, მაშინ ზედაპირთა სიმრავლეს ზ ე დ ა პ ი რ თ ა უ წ ყ ვ ე ტ ი ო ჯ ა ხ ი ეწოდება. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ F ფუნქცია წარმოებადია λ-ს მიმართ სასურველ რიგამდე, ე. ი. იმ რიგამდე, რომელიც საჭირო იქნება ამა თუ იმ საკითხის განხილვის დროს. თუ λ-ს მივცემთ $\Delta\lambda$ ნაზრდს, მაშინ აღებული ზედაპირის მახლობელ ზედაპირს მივიღებთ.

სიმოკლისათვის აღებულ ზედაპირს (λ) ზედაპირს ვუწოდებთ. (λ) ზედაპირისა და მისი მახლობელი ზედაპირის თანაკვეთის წირის ზღვარს, როცა მახლობელი ზედაპირი (λ) ზედაპირისაკენ მიისწრაფვის, (λ) ზედაპირის დ ა მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი წ ი რ ი ეწოდება. თუ მახლობელი ზედაპირების თანაკვეთის წირის მდინარე წერტილის კოორდინატებია $x_1,\ y_1,\ z_1$, ხოლო დამახასიათებელი წირის მდინარე წერტილის კოორდინატები—$x,\ y,\ z$, მაშინ

$$x=\lim x_1,\quad y=\lim y_1,\quad z=\lim z_1.$$

მეორე მხრივ, $x_1,\ y_1,\ z_1$ ერთდროულად დააკმაყოფილებს ორივე ზედაპირის განტოლებას და გვექნება:

$$F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \lambda)=0,$$
$$F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \lambda+\Delta\lambda)=0.$$

აქედან შემდეგი განტოლება შეგვიძლია შევადგინოთ:

$$\frac{F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \lambda+\Delta\lambda)-F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \lambda)}{\Delta\lambda}=0.$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta\lambda\to 0$, მივიღებთ:

$$F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \tag{163}$$

ამრიგად, დამახასიათებელი წირი განიზღვრება (162) და (163) განტოლებათა ერთობლიობით, ე. ი. შემდეგი სისტემით:

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0, \tag{164}$$
$$F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0.$$

პარამეტრის ცვლით მივიღებთ ოჯახის ყველა ზედაპირის დამახასიათებელ წირებს. დ ა მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი წ ი რ ე ბ ი ს გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ა დ გ ი ლ ს ზ ე დ ა პ ი რ თ ა ო ჯ ა ხ ი ს პ ი რ ვ ე ლ ი გ ვ ა რ ი ს მ ო მ ვ ლ ე ბ ი ეწოდება.

მომვლების განტოლების მისაღებად (164) სისტემიდან უნდა გამოვრიცხოთ λ პარამეტრი. ამის შედეგად მივიღებთ ერთ განტოლებას x, y, z შორის. ეს გვეუბნება, რომ ზედაპირთა ოჯახის მომვლები იქნება ზედაპირი. თუ (164) სისტემის მეორე ტოლობას λ-ს მიმართ ამოვხსნით, გვექნება:

$$\lambda=\lambda(x,\ y,\ z).$$

λ-ს ეს მნიშვნელობა პირველ ტოლობაში რომ შევიტანოთ, მომვლები ზედაპირის განტოლებას მივიღებთ:

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda(x,\ y,\ z))=\Phi(x,\ y,\ z)=0. \tag{165}$$

წირთა ოჯახის მომვლების ანალოგიურად აქაც მტკიცდება შემდეგი დებულება:

ზედაპირთა ოჯახის პირველი გვარის მომვლები ამ ოჯახის ყოველ ზედაპირს ეხება მისი დამახასიათებელი წირის გასწვრივ.

გამოთქმული დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ მომვლებს და (λ) ზედაპირს საერთო მხები სიბრტყე აქვს დამახასიათებელი წირის გასწვრივ. (λ) ზედაპირის მხები სიბრტყე

$$F_x,\ F_y,\ F_z$$

კოეფიციენტებით განიზღვრება, მომვლების მხები სიბრტყე კი

$$\Phi_x,\ \Phi_y,\ \Phi_z$$

კოეფიციენტებით.

(165) ფორმულიდან გვექნება:

$$\Phi_x=F_x+F_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x},$$

$$\Phi_y=F_y+F_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y},$$

$$\Phi_z=F_z+F_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}.$$

დამახასიათებელ წირზე, თანახმად (164) ფორმულისა, $F_\lambda=0$. ამიტომ

$$\Phi_x=F_x,\ \Phi_y=F_y,\ \Phi_z=F_z.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მომვლებს და (λ) ზედაპირს საერთო მხები სიბრტყე აქვს დამახასიათებელი წირის გასწვრივ და დებულებაც დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ (λ) ზედაპირის ორი მახლობელი (λ_1) და (λ_2) ზედაპირი. როცა $\lambda_1\to\lambda$, მივიღებთ (λ) ზედაპირის დამახასიათებელ წირს. როცა $\lambda_2\to\lambda_1$, მივიღებთ (λ_1) ზედაპირის დამახასიათებელ წირს. ამრიგად, ალებული სამი ზედაპირის თანაკვეთის წერტილის ზღვარი, რომელსაც (λ) ზედაპირის დამახასიათებელი წერტილი ეწოდება, ორი მეზობელი ზედაპირის დამახასიათებელ წირთა თანაკვეთის წერტილის ზღვარი იქნება. როგორც ვიცით, დამახასიათებელი წირის განტოლება (164) სისტემითაა განზღვრული. ასევე, მისი მეზობელი დამახასიათებელი წირის განტოლება იქნება:

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda+\Delta\lambda)=0,$$
$$F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda+\Delta\lambda)=0.$$

(164) სისტემისა და უკანასკნელი სისტემის მეორე ტოლობათაგან შეგვიძლია შევადგინოთ ასეთი განტოლება:

$$\frac{F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda+\Delta\lambda)-F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda)}{\Delta\lambda}=0.$$

ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$F_{\lambda\lambda}(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0.$$

ამრიგად, (λ) ზედაპირის დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები შემდეგ სისტემას აკმაყოფილებს:

$$\begin{aligned} &F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0,\\ &F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0,\\ &F_{\lambda\lambda}(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \end{aligned} \tag{166}$$

აქედან ჩანს, რომ დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები λ პარამეტრის ფუნქციებია. ამიტომ დამახასიათებელ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი წირი იქნება. მას ზედაპირთა ოჯახის მეორე გვარის მომვლები ეწოდება. ამ უკანასკნელის განტოლება (166) სისტემიდან λ პარამეტრის გამორიცხვით მიიღება. რადგან დამახასიათებელი წერტილი ორ მეზობელ დამახასიათებელ წირთა თანაკვეთის წერტილის ზღვარია, ამიტომ დამახასიათებელი წერტილი დამახასიათებელ წირზე მდებარეობს. აქედან კი ადვილად მიიღება შემდეგი დებულება:

მეორე გვარის მომვლები წირი პირველი გვარის მომვლებ ზედაპირზე მდებარეობს.

ამ უკანასკნელი დებულებიდან და წინა დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს კიდევ შემდეგი დებულება:

მეორე გვარის მომვლები წირი მხებია ოჯახის ყოველი ზედაპირისა მის დამახასიათებელ წერტილში.

ახლა განვიხილოთ ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ ზედაპირთა ოჯახი ანუ სისტემა

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=0. \tag{167}$$

ავიღოთ (λ, μ) ზედაპირის ორი მახლობელი ზედაპირი:

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda+\Delta\lambda,\ \mu)=0,$$
$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu+\Delta\mu)=0.$$

ამ სამი ზედაპირის თანაკვეთის წერტილის ზღვარს ზედაპირის დამახასიათებელი წერტილი ეწოდება. წინათ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად, (167) ტოლობის და უკანასკნელი ორი ტოლობის ერთდროული განხილვა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} &F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=0,\\ &F_\mu(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=0. \end{aligned} \tag{168}$$

მაშასადამე, დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$F(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=0,$$
$$F_\lambda(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=0, \tag{169}$$
$$F_\mu(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=0.$$

აქედან ჩანს, რომ დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები ორი პარამეტრის ფუნქციებია. ამიტომ დამახასიათებელ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი ზედაპირი იქნება. მას ზედაპირთა ორპარამეტრიანი ოჯახის მომვლები ეწოდება.

არსებობს ზედაპირთა ოჯახისათვის დამტკიცებული დებულების ანალოგიური დებულება:

ზედაპირთა ორპარამეტრიანი ოჯახის მომვლები მხებია ოჯახის ყოველი ზედაპირისა მის დამახასიათებელ წერტილში.

დებულების დასამტკიცებლად, როგორც წინათ, ახლაც საკმარისია აღმოვაჩინოთ, რომ ოჯახის ზედაპირს და მომვლებს დამახასიათებელ წერტილში საერთო მხები სიბრტყე აქვს. ოჯახის $(\lambda,\ \mu)$ ზედაპირის მხები სიბრტყე F_x, F_y, F_z კოეფიციენტებით განისაზღვრება, მომვლების მხები სიბრტყე კი—Φ_x, Φ_y, Φ_z კოეფიციენტებით. ამ შემთხვევაში Φ ფუნქცია (169) სისტემიდან პარამეტრების გამორიცხვით მიიღება. (168) სისტემიდან $(\lambda,\ \mu)$ პარამეტრები რომ ამოვხსნათ, მივიღებთ:

$$\lambda=\lambda(x,\ y,\ z),$$
$$\mu=\mu(x,\ y,\ z).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ოჯახის განტოლებაში შევიტანთ, გვექნება:

$$F[x,\ y,\ z,\ \lambda\ (x,\ y,\ z),\ \mu(x,\ y,\ z)]\equiv\Phi(x,\ y,\ z)=0.$$

აქედან, გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\Phi_x=F_x+F_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x}+F_\mu\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

$$\Phi_y=F_y+F_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y}+F_\mu\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

$$\Phi_z=F_z+F_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}+F_\mu\frac{\partial\mu}{\partial z}.$$

დამახასიათებელ წერტილში, თანახმად (168) სისტემისა, გვექნება:

$$F_\lambda=0,\ F_\mu=0.$$

ამიტომ უკანასკნელი ტოლობები დამახასიათებელ წერტილში მოგვცემს ტოლობებს:

$$\Phi_x=F_x,\quad \Phi_y=F_y,\quad \Phi_z=F_z.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(\lambda,\ \mu)$ ზედაპირს და მომვლებ ზედაპირს დამახასიათებელ წერტილში საერთო მხები სიბრტყე აქვს, ე. ი. ერთიმეორის მხებია და დებულებაც დამტკიცებულია.

ახლა გამოვიკვლიოთ ზედაპირთა უწყვეტი ოჯახები სიმბოლური განტოლების მიხედვით. ჯერ ზედაპირთა ერთპარამეტრიანი უწყვეტი ოჯახი განვიხილოთ:

$$M = M(u,\ v,\ \lambda). \tag{170}$$

დამახასიათებელი წირის გასწვრივ λ ფუნქციაა u და v პარამეტრებისა, ე. ი.

$$\lambda = \lambda(u,\ v).$$

მომვლები ზედაპირის განტოლება იქნება:

$$M = M(u,\ v,\ \lambda(u,\ v)] = M^*(u,\ v). \tag{171}$$

როგორც ვიცით, მომვლებსა და (λ) ზედაპირს საერთო მხები სიბრტყე უნდა ჰქონდეს დამახასიათებელი წირის გასწვრივ. (λ) ზედაპირის მხები სიბრტყე განიზღვრება $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორებით, მომვლები ზედაპირის მხები სიბრტყე კი $\overline{M}_u^*$, $\overline{M}_v^*$ ვექტორებით. (171) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\overline{M_u^*} = \overline{M}_u + \overline{M}_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

$$\overline{M_v^*} = \overline{M}_v + \overline{M}_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

რადგან $\overline{M}_u^*$ და $\overline{M}_v^*$ ვექტორები იმავე მხებ სიბრტყეს განსაზღვრავს, რომელსაც $\overline{M}_u$ და $\overline{M}_v$ ვექტორები, ამიტომ $\overline{M}_\lambda$ მოთავსებული იქნება იმავე მხებ სიბრტყეში, ე. ი. $\overline{M}_\lambda$ დაიშლება $\overline{M}_u$ და $\overline{M}_v$ ვექტორების პარალელურ მდგენელებად. მაშასადამე,

$$\overline{M}_\lambda = a\overline{M}_u + b\overline{M}_v, \tag{172}$$

ან, რაც იგივეა,

$$[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v,\ \overline{M}_\lambda] = 0, \tag{173}$$

დამახასიათებელი წერტილისათვის კი ამ უკანასკნელ პირობასთან ერთად ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v,\ \overline{M}_{\lambda\lambda}] = 0.$$

ანალოგიური მსჯელობით გამოიყვანება ზედაპირთა ორპარამეტრიანი

$$M = M(u,\ v,\ \lambda,\ \mu)$$

ოჯახის შემთხვევაში მომვლების დამახასიათებელი თვისებები. დამახასიათებელი წერტილი დააკმაყოფილებს (173)-ის ანალოგიურ პირობებს:

$$\begin{aligned} &[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v,\ \overline{M}_\lambda] = 0, \\ &[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v,\ \overline{M}_\mu] = 0. \end{aligned} \tag{174}$$

მაგალითები. 1. მოვძებნოთ პირველი რიგის მომვლები

$$x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2 = r^2$$

სფეროთა ერთპარამეტრიანი ოჯახისა; გავაწარმოოთ ეს განტოლება λ პარამეტრის მიმართ. მივიღებთ:

$$2(z-\lambda)=0,$$

დანაც

$$z=\lambda.$$

) ამ მნიშვნელობას ოჯახის განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ მომვლების გან-ალებას:

$$x^2+y^2=r^2.$$

ებული ზედაპირთა ოჯახი მიიღება r-რადიუსიანი სფეროს ცენტრის ძრაობით ღერძზე. მომვლები ზედაპირი კი z ღერძის პარალელურ მსახველებიანი წრიული ლინდრია. გეომეტრიულად ნათელია, რომ მიღებული ცილინდრი ეხება აღებულ ეროთა ოჯახის ყოველ სფეროს ღერძის მართობ დიდ წრეწირზე. ეს წრეწირები ოჯახის ზედაპირთა, ე. ი. სფეროების დამახასიათებელი წრეწირებია.

2. მოვძებნოთ იმ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები, რომლებიც თანასწორი, ლისაგან განსხვავებული, მანძილითაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან. დგან თანწყობის სიბრტყეები კოორდინატთა სათავეზე არ გადის, ამიტომ მათი ტოლება ასე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$Ax+By+Cz-1=0.$$

ლადი პარამეტრები იქნება A, B და C. მანძილი კოორდინატთა სათავიდან ბრტყემდე მუდმივი იყო და ეს მანძილი კი (სათავიდან დაშვებული მართობის გრძე), როგორც ვიცით, ასე გამოისახება:

$$p=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

რიგად,

$$A^2+B^2+C^2=\text{const}.$$

იდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ C პარამეტრი A და B პარამეტრების საშუა-ებით. ამრიგად, სიბრტყეთა აღებული ოჯახი მხოლოდ ორ პარამეტრზეა ამოკიდებული. ეს პარამეტრებია A და B. გავაწარმოოთ აღებული განტოლება და B პარამეტრების მიმართ და მხედველობაში მივიღოთ, რომ C ფუნქციაა და B პარამეტრებისა. გვექნება:

$$x+z\frac{\partial C}{\partial A}=0.$$

$$y+z\frac{\partial C}{\partial B}=0.$$

რდა ამისა,

$$A^2+B^2+C^2=\text{const}.$$

ოლობიდან (გაწარმოებით) მივიღებთ:

$$\frac{\partial C}{\partial A}=-\frac{A}{C},$$

$$\frac{\partial C}{\partial B}=-\frac{B}{C}.$$

ამ მნიშვნელობათა წინა ტოლობაში ჩასმა მოგვცემს:

$$x-\frac{A}{C}z=0,$$

$$y-\frac{B}{C}z=0.$$

უკანასკნელი ორი განტოლება, ოჯახის განტოლებასთან ერთად, ამოვხსნათ x, y, z-ის მიმართ. გვექნება:

$$x=\frac{A}{A^2+B^2+C^2},\quad y=\frac{B}{A^2+B^2+C^2},\quad z=\frac{C}{A^2+B^2+C^2}.$$

ამათი კვადრატში ამაღლებით და შეკრებით მივიღებთ:

$$x^2+y^2+z^2=\text{const}.$$

ამრიგად, განხილულ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები არის სფერო. აღებული ოჯახი სფეროს მხებ სიბრტყეთა სიმრავლეს წარმოადგენს და ამიტომ ცხადია, რომ ის სიბრტყეები კოორდინატთა სათავიდან თანატოლი მანძილით იქნება დაშორებული, სახელდობრ რადიუსით.

3. r-რადიუსიან სფეროს ცენტრი მოძრაობს R-რადიუსიან წრეწირზე. საძიებელია ამგვარად მიღებულ სფეროთა ოჯახის მომვლების განტოლება (იგულისხმება $R > r$):

სფეროთა ოჯახის განტოლება იქნება:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

სადაც სფეროს ცენტრის კოორდინატები a, b, c უნდა აკმაყოფილებდეს Oxy სიბრტყეზე მდებარე (ასე შევარჩევთ მოცემულ წრეწირს) წრეწირის განტოლებას

$$x^2+y^2=R^2,$$

$$z=0.$$

გვექნება:

$$a^2+b^2=R^2,$$

$$c=0.$$

ამრიგად, სფეროთა ოჯახის განტოლება იქნება:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2,$$

$$a^2+b^2=R^2.$$

ან, რაც იგივეა,

$$2ax+2by=x^2+y^2+z^2+R^2-r^2,$$

$$a^2+b^2=R^2.$$

გავაწარმოოთ ორი უკანასკნელი განტოლება a-ს მიმართ. გვექნება:

$$x+y\frac{db}{da}=0,$$

$$a+b\frac{db}{aa}=0.$$

ამ განტოლებიდან $\frac{db}{da}$-ს გამორიცხვა მოგვცემს

$$x-\frac{a}{b}y=0.$$

ამრიგად, განსახილავ სფეროთა ოჯახის მომვლების განტოლება მიიღება შემდეგი განტოლებებიდან:

$$2ax+2by=x^2+y^2+z^2+R^2-r^2,$$

$$x-\frac{a}{b}y=0,$$

$$a^2+b^2=R^2.$$

a და b-ს გამორიცხვით მივიღებთ:

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+y^2).$$

თვით გეომეტრიული პირობებიდან ადვილი წარმოსადგენია მიღებული ზედაპირის ფორმა. იგი წარმოადგენს წრიულ რგოლისებრ ზედაპირს. ეს ზედაპირი ცნობილია ლიტერატურაში ტ ო რ უ ს ი ს სახელწოდებით.

ამოცანები 1. იპოვეთ იმ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები, რომელნიც გადიან კოორდინატთა სათავეზე და z ღერძთან ადგენენ თანატოლ კუთხეებს.

2. იპოვეთ იმ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები, რომლებიც კოორდინატთა სიბრტყეებთან ჰქმნიან ერთნაირ მოცულობიან ტეტრაედრებს.

§ 36. სიბრტყეთა ერთპარამეტრიანი ოჯახი და მისი მომვლები

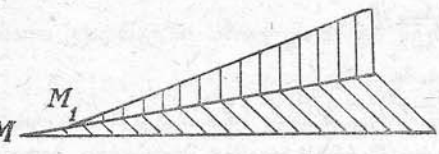
თუ ზედაპირთა ოჯახის ყოველი ზედაპირი სიბრტყეა, მაშინ დამახასიათებელი წირი იქნება ორი მახლობელი სიბრტყის თანაკვეთის წრფის ზღვარი, როცა ერთი მათგანი მეორისაკენ მიისწრაფვის, ე. ი. დამახასიათებელი წირი იქნება წრფე.

მომვლები ზედაპირი ანუ პირველი გვარის მომვლები წრფოვანი ზედაპირი იქნება, რომელიც აღებულ სიბრტყეთა ოჯახის ყოველ სიბრტყეს ეხება მისი დამახასიათებელი წრფის გასწვრივ. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სიბრტყეთა ოჯახის სიბრტყეები მომვლებ ზედაპირს ეხება მსახველების გასწვრივ. ამრიგად მომვლებ ზედაპირს მსახველის გასწვრივ ერთი და იგივე მხები სიბრტყე ექნება. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ასეთი თვისების მქონე ზედაპირი განფენადია.

ამისათვის ჯერ დავამტკიცებთ შემდეგ დებულებას: თ უ ზ ე დ ა პ ი რ ი ს ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი მ ს ა ხ ვ ე ლ ი პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს ს ი ზ უ ს ტ ი თ თ ა ნ ა ი კ ვ ე თ ე ბ ა მ ე ზ ო ბ ე ლ მ ს ა ხ ვ ე ლ თ ა ნ, მ ა შ ი ნ ზ ე დ ა პ ი რ ი გ ა ნ ფ ე ნ ა დ ი ა.

ვთქვათ, ორი მეზობელი მსახველი თანაიკვეთება პირველი რიგის სიზუსტით M წერტილში. როგორც ცნობილია, M წერტილში მხები სიბრტყე M წერტილის მეზობელ წერტილებს პირველი რიგის სიზუსტით შეიცავს. ამიტომ იგი შეიცავს მეზობელ მსახველზე მდებარე წერტილებსაც, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მხები სიბრტყე თვით ამ მსახველსაც შეიცავს პირველი რიგის სიზუსტით (აღებულ მსახველს ფაქტიურად შეიცავს, ხოლო მეზობელ მსახველს—პირველი რიგის სიზუსტით). ამიტომ ორ მეზობელ მსახველს შორის მოთავსებული ზედაპირის უსასრუ-

ლოდ მცირე ნაწილი პირველი რიგის სიზუსტით მხებ სიბრტყეზე მოთავსდება, ე. ი. პირველი რიგის სიზუსტით ბრტყელი იქნება. ცხადია, ამ შემთხვევაში აღებული მსახველის გასწვრივ ერთი და იგივე მხები სიბრტყე გვექნება, რომელიც მეზობელ მსახველსაც შეიცავს პირველი რიგის სიზუსტით. ასეთივე მსჯელობას თუ გავიმეორებთ მეზობელი მსახველის მიმართ, მივიღებთ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ნაწილს, რომელიც წარმოადგენს, აგრეთვე პირველი რიგის სიზუსტით, ბრტყელ ნაწილს, მეზობელ მხებ სიბრტყეში მოთავსებულს. თუ ამ მეზობელ მხებ სიბრტყეს (რომელიც, ცხადია, ეხება ზედაპირს მეზობელი მსახველის გასწვრივ) მეზობელი მსახველის გარს მოვაბრუნებთ, მაშინ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ნაწილი, მეზობელ მხებ სიბრტყეში მოთავსებული, აღებულ მხებ სიბრტყეს შეუთავსდება, ე. ი. პირველი უსასრულოდ მცირე ნაწილის გაგრძელებად წარმოგვიდგება. ასეთი პროცესით შეგვიძლია მთელი ზედაპირი გავფინოთ აღებულ მხებ სიბრტყეზე (ნახ. 52) და ამით დებულება დამტკიცებულია.



ნახ. 52

ახლა დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები არის განფენადი ზედაპირი. ჩვენ უკვე აღნიშნული გვქონდა, რომ სიბრტყეთა ოჯახის ყოველი სიბრტყე ეხება მომვლებ ზედაპირს მსახველის გასწვრივ; ამიტომ ეს სიბრტყე შეიცავს აღებული მსახველის მეზობელ წერტილებს პირველი რიგის სიზუსტით. რადგან მეზობელი მსახველი მეზობელი წერტილებისაგან წარმოდგება, ამიტომ აღებული მხები სიბრტყე მეზობელ მსახველსაც შეიცავს პირველი რიგის სიზუსტით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ აღებული მსახველი და მეზობელი მსახველი თანაიკვეთება პირველი რიგის სიზუსტით, რაც დამტკიცებული დებულების თანახმად, მომვლები ზედაპირის განფენადობის მაჩვენებელია.

სიბრტყეთა ერთპარამეტრიანი ოჯახის მეორე გვარის მომვლები წირი, თანახმად ზემოთ დამტკიცებულისა, უნდა ეხებოდეს დამახასიათებელ წირებს ე. ი. წრფეებს. მაშასადამე, მომვლები განფენადი ზედაპირის მსახველები მეორე გვარის მომვლებ წირს ეხება. ამრიგად, მომვლები განფენადი ზედაპირი წარმოგვიდგება, როგორც რაიმე გრეხილი წირის (განფენადი ზედაპირის უკუქცევის წიბოს) მხებ წრფეთაგან შედგენილი წრფოვანი ზედაპირი. მეორე მხრივ, რადგან ნებისმიერი განფენადი ზედაპირის მეზობელი მსახველები თანაიკვეთება, ე. ი. მეზობელ მსახველთა ყოველი წყვილი მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში, ამიტომ ეს სიბრტყე ზედაპირს ეხება აღებული მსახველის გასწვრივ, ამის გამო მხებ სიბრტყეთა ერთობლიობა ერთპარამეტრიან ოჯახს შეადგენს, ისევე როგორც მსახველთა ერთობლიობა წარმოადგენს ერთპარამეტრიან ოჯახს. თვით ზედაპირი წარმოგვიდგება როგორც მის მხებ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები, ე. ი. ერთპარამეტრიან სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები.

მაშასადამე, *ნებისმიერი წრფოვანი განფენადი ზედაპირი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც რაიმე წირის მხებ წრფეთა ერთობლიობით შექმნილი წრფოვანი ზედაპირი.* გამონაკლისს წარმოადგენს ის შემთხვევები, როცა უკუქცევის წიბო გადაგვარებულია წერტილად.

ან უსასრულოდ შორეულ წერტილად, ამ შემთხვევაში გვექნება კონუსური და ცილინდრული განფენადი ზედაპირები.

ახლა განვიხილოთ გრეხილი წირის გამწრფევ სიბრტყეთა ოჯახი და მისი მომვლები. ცხადია, დამახასიათებელი წრფე ამ შემთხვევაში სათანადო გამწრფევ სიბრტყეში მოთავსდება და აღწერს განფენად ზედაპირს, რომელსაც წირის გამწრფევი სიბრტყეები დამახასიათებელი წრფეების გასწვრივ ეხება. თუ დამახასიათებელი წრფის მდინარე წერტილია P, მაშინ $d\overline{P}$ მოთავსებული იქნება გამწრფევ სიბრტყეზე და რადგან გამწრფევი სიბრტყე წირის მთავარი ნორმალის მართობია, ამიტომ dP წირის მთავარი ნორმალის მართობი იქნება, ე. ი.

$$\overline{N} d\,\overline{P} = 0.$$

ვთქვათ, დამახასიათებელი წრფე მხებ წრფესთან თანაიკვეთება A წერტილში. მაშინ A წერტილიც დააკმაყოფილებს იმავე პირობას, ე. ი.

$$\overline{N}\, d\, \overline{A} = 0.$$

მეორე მხრივ, A წერტილი, როგორც მხებ წრფეზე მდებარე, ასე წარმოიდგინება:

$$A = M + \lambda \overline{T},$$

საიდანაც

$$\overline{dA} = \overline{dM} + d\lambda \overline{T} + \lambda \overline{dT}.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს:

$$0 = \overline{N} d\overline{A} = \overline{N} d\,\overline{M} + d\lambda\, \overline{N}\,\overline{T} + \lambda d\,\overline{T}\,\overline{N}.$$

რადგან

$$\overline{N}\, d\,\overline{M} = 0, \quad \overline{N}\,\overline{T} = 0, \quad \overline{N}\, d\overline{T} \neq 0,$$

ამიტომ

$$\lambda = 0.$$

ამრიგად,

$$A = M.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გამწრფევ სიბრტყეთა ოჯახის დამახასიათებელი წრფეები გრეხილი წირის სათანადო ხების წერტილზე გადის. ამრიგად, გამწრფევი სიბრტყე მომვლებ ზედაპირს M წერტილში ეხება (რადგან იგი ეხება მომვლებს მთელი დამახასიათებელი წრფის გასწვრივ, რომელიც M წერტილზე გადის). რადგან ზედაპირის ნორმალი მხები სიბრტყის მართობი წრფეა M წერტილში, ხოლო ამ შემთხვევაში მომვლები ზედაპირის მხები სიბრტყე გამწრფევი სიბრტყეა, ამიტომ მომვლები ზედაპირის ნორმალი M წერტილში გამწრფევი სიბრტყის მართობი იქნება. მეორე მხრივ, M წერტილზე გამავალი გამწრფევი სიბრტყის მართობი წირის მთავარი ნორმალია. ამრიგად, გამწრფევ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები ზედაპირის ნორმალი M წერტილში შეთავსებულია წირის მთავარ ნორმალთან იმავე წერტილში. ეს კი, გეოდეზიური წირის განმარტების თანახმად, გვაძლევს შემდეგ დასკვნას:

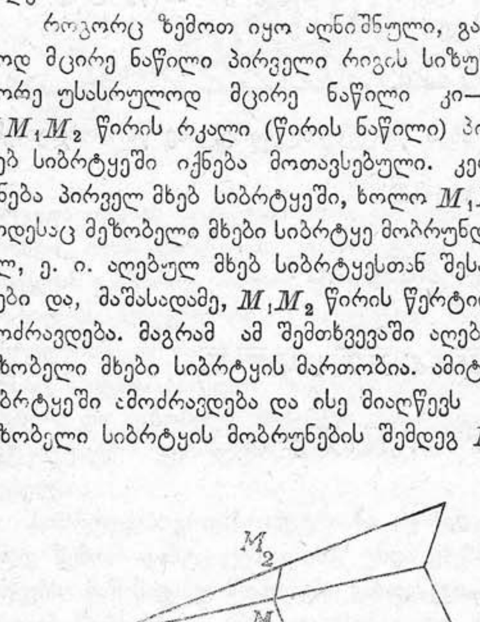
თეორემა. გრეხილი წირი მის გამწრფევ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები ზედაპირის გეოდეზიური წირია.

ამ თეორემის გამოყენებით გეოდეზიური წირების შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემის დამტკიცება შეიძლება.

თეორემა. ზედაპირის ორ მეზობელ წერტილზე გამავალ წირთა შორის გეოდეზიური წირი უმოკლესი სიგრძის წირია.

დავამტკიცოთ ეს დებულება ჯერ განფენადი ზედაპირისათვის. გავფინოთ ზედაპირი სიბრტყეზე და დავაკვირდეთ გეოდეზიური წირის განფენას. თუ ზედაპირზე იგი ორ მეზობელ წერტილს შორის უმოკლესი სიგრძის წირს წარმოადგენს, მაშინ მისი რკალი ორ მეზობელ წერტილს შორის წრფედ გაიფინება. რადგან გეოდეზიური წირის მთავარი ნორმალი ზედაპირის ნორმალთან არის შეთავსებული, ამიტომ გეოდეზიური წირის მიმხები სიბრტყე წირის მხებ წრფეზე და ზედაპირის ნორმალზე გაივლის. მიმხები სიბრტყე პირველი რიგის სიზუსტით შეიცავს წირის M წერტილის პირველ და მეორე მეზობელ M_1 და M_2 წერტილებს.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, განფენადი ზედაპირის პირველი უსასრულოდ მცირე ნაწილი პირველი რიგის სიზუსტით მხებ სიბრტყეზეა მოთავსებული, მეორე უსასრულოდ მცირე ნაწილი კი—მეზობელ მხებ სიბრტყეზე. ამიტომ MM_1M_2 წირის რკალი (წირის ნაწილი) პირველი რიგის სიზუსტით ორ მეზობელ მხებ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული. კერძოდ, MM_1 ნაწილი მოთავსებული იქნება პირველ მხებ სიბრტყეში, ხოლო M_1M_2 ნაწილი—მეზობელ მხებ სიბრტყეში. როდესაც მეზობელი მხები სიბრტყე მობრუნდება მეზობელი მსახველის გარშემო პირველ, ე. ი. აღებულ მხებ სიბრტყესთან შესათავსებლად, მაშინ სიბრტყის წერტილები და, მაშასადამე, M_1M_2 წირის წერტილებიც მეზობელი მხების მართობულად ამოძრავდება. მაგრამ ამ შემთხვევაში აღებული წირის მიმხები სიბრტყე ორივე მეზობელი მხები სიბრტყის მართობია. ამიტომ M_1M_2 რკალის წერტილები მიმხებ სიბრტყეში ამოძრავდება და ისე მიაღწევს აღებულ მხებ სიბრტყემდე. ამრიგად, მეზობელი სიბრტყის მობრუნების შემდეგ M_1M_2 ნაწილი შეუთავსდება აღებული მხები სიბრტყისა და MM_1M_2 რკალის მიმხები სიბრტყის თანაკვეთის წრფეს, ე. ი. წირის მხებს M წერტილში. მაშასადამე, MM_1M_2 წირის ნაწილი გაიფინება წრფივ ნაკვეთში და დებულებაც დამტკიცებულია (ნახ. 53 და 53 ა).

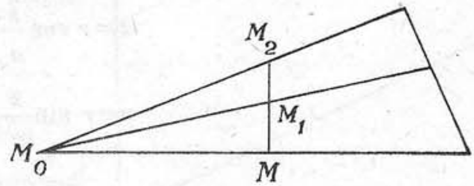


ნახ. 53

ახლა განვიხილოთ გეოდეზიური წირი რაიმე ზედაპირზე. რადგან წირის მთავარი ნორმალები შეთავსებულია ზედაპირის ნორმალებთან, ამიტომ ზედაპირის მხები სიბრტყეები გეოდეზიური წირის გასწვრივ ამ წირის გამწრფევი სიბრტყეები იქნება. ამ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები ზედაპირისთვისაც ეს წირი (მოცემული ზედაპირის გეოდეზიური წირი) გეოდეზიური წირი იქნება. ზემოთ დამტკიცებული შემთხვევის თანახმად, ეს წირი აღნიშნულ განფენად ზედაპირზე იქნება ორ მეზობელ წერტილს შორის უმოკლესი სიგრძის წირი, რადგან მომვლები ეხება ოჯახის ყოველ სიბრტყეს. მომვლები ამ შემთხვევაში მხები იქნება ზედაპირის მხები სიბრტყეებისა გეოდეზიური წირის გასწვრივ. ამგვარად, აღებულ ზედაპირსა და განფენად ზედაპირს გეოდეზიური წირის გასწვრივ საერთო მხები

რტყეები ექნება, ე. ი. ისინი ერთიმეორის მხები იქნებიან. ამიტომ მოცემულ დაპირზე გეოდეზიური წირის მეზობელი წერტილები განფენად ზედაპირსაც ოთვნის პირველი რიგის სიზუსტით.

მაშასადამე, თუ გეოდეზიური წირის MM_1 რკალი მინიმალური სიგრძი- განფენადი ზედაპირის მიმართ, მაშინ იგი მინიმალური სიგრძის იქნება აღე- ლი ზედაპირის მიმართაც. მართ- აც, სხვა რაიმე წირის რკალი, ორი წერტილის შემაერთებელი, ნფენად ზედაპირზეც მოთავსდება რველი რიგის სიზუსტით და ამი- ომ გეოდეზიური რკალის სიგრძე სზე ნაკლები იქნება. ამით დებუ- ება მთლიანად დამტკიცებულია.



ნახ. 53ა.

შენიშვნა. უკანასკნელი შედე- ბის მიღების დროს მსჯელობას ვაწარმოებდით პირველი რიგის სიზუსტით. ეს, რა თქმა უნდა დეგებზე არ ახდენდა გავლენას, რადგან მიღებული შედეგები ზედაპირის უშიშალ ღუნვას ეხე- ადა, ხოლო ეს უკანასკნელი კი წირითი ელემენტით განიზღვრება, მაგრამ თვით წირითი ემენტი შემდეგი თვისებების მატარებელია. თუ ორ ზედაპირს საერთო წერტილში საერთო ები სიბრტყე აქვს, მაშინ მათ ამ საერთო წერტილის მეზობელი წერტილებიც საერთო ექნებათ რველი რიგის სიზუსტით. ეს იმას ნიშნავს, რომ, პირველი რიგის სიზუსტით, მოცემული $M(u,v)$. $N(u, v)$ ზედაპირებისათვის

$$\Delta \overline{M} = \Delta \overline{N}.$$

ადგან

$$\Delta \overline{M} = d\overline{M} + \frac{1}{2!} d^2 \overline{M} + \cdots,$$

$$\Delta \overline{N} = d\overline{N} + \frac{1}{2!} d^2 \overline{N} + \cdots,$$

მიტომ პირველი რიგის სიზუსტით ტოლობა, როგორც შევთანხმდით, იმას ნიშნავს, რომ

$$d\overline{M} = d\overline{N}.$$

აქედან

$$d\overline{M}^2 = d\overline{N}^2.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი იმას გვიჩვენებს, რომ აღებულ ზედაპირებს საერთო წერტილში საერთო წირითი ელემენტი აქვს.

მაგალითები 1. განვიხილოთ წრიულ ცილინდრზე მოთავსებული ხრა- ხნწირი და დავამტკიცოთ, რომ იგი გეოდეზიური წირია. გვაქვს:

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t,$$
$$z = kt.$$

გამოვთვალოთ წირითი ელემენტი

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)dt^2 =$$
$$= (r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + k^2)dt^2 = (r^2 + k^2)dt^2 = a^2 dt^2.$$

აქედან

$ds = a\,dt$, სადაც $a=\sqrt{r^2+k^2}$.

ინტეგრებით მივიღებთ:

$$s = at.$$

ამის მიხედვით ხრახნწირის განტოლება ასე დაიწერება (ბუნებრივი პარამეტრის მიმართ):

$$x=r\cos\frac{s}{a},$$

$$y=r\sin\frac{s}{a},$$

$$z=k\frac{s}{a}.$$

ფ რ ე ნ ე ს მეორე ფორმულიდან გვაქვს:

$$N=\rho\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}$ მთავარი ნორმალის მიმმართველი ვექტორი იქნება. ჩვენ ვიცით, რომ

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2}\right).$$

ნახ. 54

ხრახნწირის განტოლებიდან გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{r}{a^2}\cos\frac{s}{a},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{r}{a^2}\sin\frac{s}{a},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

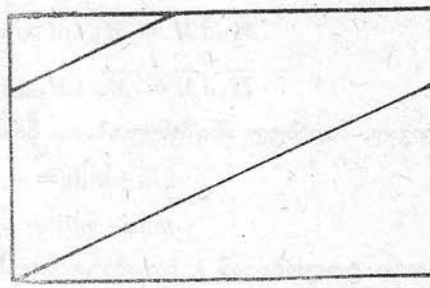
ამრიგად,

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\left(-\frac{r}{a^2}\cos\frac{s}{a},\ -\frac{r}{a^2}\sin\frac{s}{a},\ 0\right).$$

აქედან ჩანს, რომ მთავარ ნორმალს ცილინდრის რადიუსის მიმართულება აქვს და ამიტომ ცხადია, რომ იგი თვით რადიუსს შეუთავსდება სათანადო წერტილში, ე. ი. მთავარი ნორმალი ცილინდრის ნორმალს შეუთავსდება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ხრახნწირი წრიული ცილინდრის გეოდეზიური წირია და ცილინდრის სიბრტყეზე განფენის დროს ხრახნწირის ნაწილები წრფივ მონაკვეთებში გაიფინება (ნახ. 54 ა).

ამ შემთხვევაში ხრახნწირის გასწვრივ ზედაპირის მხებ სიბრტყეთა მომვლები თვით აღებული წრიული ცილინდრი იქნება.

2. ს ფ ე რ ო სფეროზე, როგორც ვიცით, გეოდეზიური წირი დიდი წრეწირია. ამ წირის გასწვრივ სფეროს მხებ სიბრტყეთა მომვლები იქნება წრიული ცილინდრი, რომელიც სფეროს აღებული დიდი წრეწირის გასწვრივ ეხება. ცილინდრისათვის ეს წრეწირი, ცხადია, ღერძის მართობი წრეწირი იქნება და ცილინდრის განფენის დროს იგი წრფივ მონაკვეთში გაიფინება.



ნახ. 54 ა

§ 37. მონჟის თეორემა სიმრუდის წირების შესახებ

ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა. ზ ე დ ა პ ი რ ი ს ნ ო რ მ ა ლ ი მ ხ ო ლ ო დ ს ი მ რ უ დ ი ს წ ი რ ი ს გ ა ს წ ვ რ ი ვ ა ღ წ ე რ ს გ ა ნ ფ ე ნ ა დ ზ ე დ ა პ ი რ ს.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ზედაპირის ორი მეზობელი ნორმალი სიმრუდის წირის გასწვრივ: თუ ისინი თანაიკვეთება პირველი რიგის სიზუსტით, მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება. თუ ორი მეზობელი ნორმალი პირველი რიგის სიზუსტით თანაიკვეთება, მაშინ სამი ვექტორი

$$\Delta\overline{M},\ \overline{K},\ \overline{K_1},$$

სადაც

$$\overline{K_1}=\overline{K}+\Delta\overline{K},$$

ერთ სიბრტყეზე უნდა მოთავსდეს პირველი რიგის სიზუსტით. ამრიგად, პირველი რიგის სიზუსტით, სამი

$$\Delta\overline{M},\ \overline{K},\ \Delta\overline{K}$$

ვექტორი ერთ სიბრტყეზე მოთავსდება. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$d\overline{M},\ \overline{K},\ d\overline{K}$$

ვექტორები ერთ სიბრტყეზე მოთავსდება (აბსოლუტური სიზუსტით). მაშასადამე, $d\overline{K}$ კომპლანარული იქნება $d\overline{M}, \overline{K}$ ვექტორებისა, ე. ი.

$$d\overline{K}=\lambda d\overline{M}+\mu\overline{K},$$

ამ ტოლობის გამრავლება $\overline{K}$-ზე მოგვცემს, რომ $\mu=0$, ე. ი.

$$d\overline{K}=\lambda d\overline{M}. \qquad (*)$$

აქედან $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$ ვექტორებზე გადამრავლებით, მივიღებთ:

$$\overline{M}_u d\overline{K}=\lambda\overline{M}_u d\overline{M}.$$

$$M_v d\overline{K}=\lambda\overline{M}_u d\overline{M}.$$

რადგან

$$d\overline{K}=\overline{K}_u du+\overline{K}_v dv,$$

ამიტომ, (132) ფორმულებს თუ გამოვიყენებთ,

$$\overline{M}_u d\overline{K}=\overline{M}_u(\overline{K}_u du+\overline{K}_v dv)=-(ldu+mdv),$$

$$\overline{M}_v d\overline{K}=\overline{M}_v(\overline{K}_u du+\overline{K}_v dv)=-(mdu+ndv).$$

გარდა ამისა,

$$\overline{M}_u d\overline{M}=\overline{M}_u(\overline{M}_u du+\overline{M}_v dv)=edu+fdv,$$

$$\overline{M}_v d\overline{M}=\overline{M}_v(\overline{M}_u du+\overline{M}_v dv)=fdu+gdv.$$

ამრიგად, მიღებულ მნიშვნელობათა ჩასმის შედეგად გვექნება:

$$ldu+mdv=-\lambda(edu+fdv),$$

$$mdu+ndv=-\lambda(fdu+gdv).$$

ამ ორი ტოლობიდან λ პარამეტრის გამორიცხვა (ამოვხსნათ λ მეორე ტოლობიდან და ჩავსვათ პირველში) მოგვცემს:

$$(ldu+mdv)(fdu+gdv)=(mdu+ndv)(edu+fdv).$$

ფრჩხილების გახსნისა და ყველა წევრის მარცხნივ გადატანის შემდეგ გვექნება:

$$(fl-em)du^2+(gl-en)dudv+(gm-fn)dv^2=0.$$

ეს უკანასკნელი განტოლება კი სიმრუდის წირების დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს (იხ. განტოლება (150). ამრიგად, ზედაპირის ნორმალები განფენად ზედაპირს მხოლოდ სიმრუდის წირების გასწვრივ აღწერს, რითაც თეორემა დამტკიცებულია. ცხადია, ზედაპირის ნორმალი ნებისმიერი სიმრუდის წირის გასწვრივ აღწერს განფენად ზედაპირს, რადგან ამ წირისათვის შესრულდება (*) ტოლობა, როგორც როდრიგის ფორმულა.

ამ თეორემას, რომელიც მონჟს ეკუთვნის, დიდი მნიშვნელობა აქვს ზედაპირთა თეორიაში.

§ 34. გეოდეზიური წირის ზოგიერთი სხვა თვისებები

ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ, რომ გეოდეზიური წირი მინიმალური სიგრძის მქონეა. ამიტომ ზედაპირის უჭიმადი ღუნვის დროს გეოდეზიური წირი არ იცვლება, ე. ი. ისევ გეოდეზიურ წირად რჩება. რა თქმა უნდა, ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის დროს გეოდეზიური წირი გეოდეზიურ წირში გადაისახება. ყველაფერი ეს თვით გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლების მიხედვითაც შეგვეძლო მიგვეღო: თუ ამ განტოლებას გაშლილი სახით დავწერდით და კოეფიციენტებს გამოვითვლიდით, მაშინ ვნახავდით, რომ ეს განტოლება დამოკიდებულია მხოლოდ წირითი ელემენტის კოეფიციენტებზე.

გარდა იზომეტრული გადასახვისა, არსებობს კიდევ ისეთი (არაიზომეტრული) გადასახვაც, რომლის დროსაც გეოდეზიურ წირს ისევ გეოდეზიური წირი ეთანადება. ზედაპირის ისეთ გადასახვას, რომელსაც გეოდეზიური წირი ისევ გეოდეზიურ წირში გადაჰყავს, გეოდეზიური გადასახვა ეწოდება.

თეორემა. მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი გეოდეზიურად გადაისახება სიბრტყეზე.

რადგან მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი სფეროზე იზომეტრულად გადაისახება, ამიტომ საკმარისია ეს თეორემა სფეროსათვის დავამტკიცოთ. სფეროს განტოლება შემდეგი პარამეტრული სახით ავიღოთ:

$$x=\frac{ru}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$y=\frac{rv}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$z=\pm\frac{r}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ

$$u=at+l,$$

$$v=a_1t+b_1.$$

წირი სფეროს გეოდეზიური წირია (რა თქმა უნდა, დიფერენციალურ განტოლებათა განხილვა ასეთივე შედეგს მოგვცემს). მართლაც, თუ u და v პარამეტრების ამ მნიშვნელობებს სფეროს განტოლებაში ჩავსვამთ და პარამეტრს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ:

$$Ax+By+Cz=0.$$

ეს არის სფეროს ცენტრზე, ე. ი. კოორდინატთა სათავეზე გამავალი სიბრტყე, რომელიც სფეროზე ამოკვეთს დიდ წრეწირს, ე. ი. გეოდეზიურ წირს. გადავსახოთ ახლა სფერო Oxy სიბრტყეზე შემდეგნაირად:

$$x=u,\ y=v.$$

გეოდეზიური წირისათვის გვექნება:

$$x=at+b,$$

$$y=a_1t+b_1.$$

ეს უკანასკნელი განტოლება სიბრტყეზე წრფეს გვაძლევს. ამრიგად, სფეროს გეოდეზიური წირები, ე. ი. დიდი წრეწირები სიბრტყის გეოდეზიურ წირებში, ე. ი. წრფეებში გადაისახება, მაშასადამე, აღნიშნული გადასახვა გეოდეზიური გადასახვა ყოფილა, რ. ე. დ.

ეს თეორემა ბ ე ლ ტ რ ა მ ი ს ეკუთვნის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ბელტრამის დებულება აქ მთლიანი სახით არა გვაქვს დამტკიცებული; იგი განხილულია მხოლოდ დ ა დ ე ბ ი თ ი მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირისათვის, მაგრამ უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირები იზომეტრულად გადაისახება წარმოსახვითრადიუსიან

$$x^2+y^2+z^2=(iR)^2$$

სფეროზე, რომლის სრული სიმრუდე, თანახმად გაუსის დებულებისა,

$$K=\frac{1}{(iR)^2}=-\frac{1}{R^2}$$

იქნება. ახლა x, y, z კოორდინატები ასე გარდავქმნათ:

$$x=ix_1,\quad y=iy_1,\quad z=iz_1.$$

მაშინ

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2.$$

ამრიგად, აღნიშნული გარდაქმნით წარმოსახვითრადიუსიანი სფერო გადაისახება სფეროზე. ეს გარდაქმნა გეოდეზიურ გადასახვას წარმოადგენს და ამით ბ ე ლ ტ რ ა მ ი ს დებულება უარყოფითსიმრუდიან ზედაპირებზეც ვავრცელდება.

ბოლოს, გეოდეზიური წირის კიდევ ერთ შესანიშნავ თვისებას დავამტკიცებთ, რომელიც გეოდეზიური წირის განმარტების დროსვე იყო შენიშნული.

თეორემა. ზ ე დ ა პ ი რ ზ ე ი ნ ე რ ც ი უ ლ ი ძ რ ა ო ბ ა გ ე ო დ ე ზ ი უ რ ი წ ი რ ი ს გ ა ს წ ვ რ ი ვ ხ დ ე ბ ა.

ვთქვათ, ზედაპირზე გავლებული წირის განტოლებაა

$$M = M(t),$$

სადაც t პარამეტრი არის დრო. წერტილის ვექტორული სიჩქარე იქნება:

$$\overline{M}' = \frac{d\overline{M}}{dt} = \frac{d\overline{M}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \overline{T}v,$$

სადაც $v = \dfrac{ds}{dt}$-ს ო დ ე ნ უ რ ი ს ი ჩ ქ ა რ ე ეწოდება. ვექტორული აჩქარება გამოისახება ფორმულით:

$$\overline{M}'' = \frac{d^2\overline{M}}{dt^2} = \frac{d\overline{T}}{dt}v + \overline{T}\frac{dv}{dt} = \frac{d\overline{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt}v + \overline{T}\frac{dv}{dt} =$$

$$= \frac{v^2}{\rho}\overline{N} + \overline{T}\frac{dv}{dt}.$$

ინერციული ძრაობის შემთხვევაში აჩქარების გეგმილი მხებ სიბრტყეში ნული უნდა იყოს, ე. ი. აჩქარება ზედაპირის ნორმალის პარალელური უნდა იყოს. ამიტომ გვექნება:

$$\overline{M}'' = \lambda\overline{K},$$

ანუ

$$\frac{v^2}{\rho}\overline{N} + \overline{T}\frac{dv}{dt} = \lambda\overline{K}.$$

$\overline{T}$-ზე გადამრავლებით მივიღებთ: $\dfrac{dv}{dt} = 0$, ე. ი. $v = \text{const}$. ამ მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს:

$$\frac{v^2}{\rho}\overline{N} = \lambda\overline{K}.$$

ამრიგად, წირის მთავარი ნორმალი შეთავსებულია ზედაპირის ნორმალთან, რაც იმას ნიშნავს, რომ წირი გეოდეზიურია.

რადგან გეოდეზიური წირი ორ მეზობელ წერტილს შორის მინიმალურსიგრძიანი წირია, ამიტომ ზედაპირზე ინერციული ძრაობის დროს წერტილი მეზობელ წერტილში მინიმალური მანძილის გავლით გადაადგილდება.

მაგალითად, სიბრტყეზე ინერციული ძრაობა მოხდება წრფის გასწვრივ, სფეროზე—დიდი წრეწირის გასწვრივ, ხოლო წრიულ ცილინდრზე—ხრახნწირის გასწვრივ.

თ ა ვ ი IV

ზედაპირის შინაგანი გეომეტრიის ელემენტები

§ 39. ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებანი

ზედაპირის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილში განისაზღვრება სამი ვექტორი:

$$\overline{M}_u, \ \overline{M}_v, \ \overline{K}.$$

მ ვექტორებით განსაზღვრულ კოორდინატთა სისტემას ბ უ ნ ე ბ რ ი ვ ი ს ი ს ტ ე მ ა წოდება. სისტემის სათავე, ცხადია, იქნება M წერტილი. ამ სისტემის ცვლა რომ ნვსაზღვროთ, საჭიროა ვიცოდეთ აღებული ვექტორების წარმოებულები u და v რამეტრების მიმართ, ე. ი. საჭიროა ვიპოვოთ შემდეგი ვექტორები:

$$\overline{M}_{uu}, \ \overline{M}_{uv}, \ \overline{M}_{vv}, \ \overline{K}_u, \ \overline{K}_v.$$

ჯერ პირველი სამი ვექტორი გამოვსახოთ $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$, $\overline{K}$ ვექტორების საშუა-ებით. რადგან ნებისმიერი ვექტორი აღებული სამი მიმართულებით დაიშლება, იტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{uu} &= a\overline{M}_u + a_1\overline{M}_v + a_2\overline{K}, \\ \overline{M}_{uv} &= b\overline{M}_u + b_1\overline{M}_v + b_2\overline{K}, \\ \overline{M}_{vv} &= c\overline{M}_u + c_1\overline{M}_v + c_2\overline{K}, \end{aligned} \tag{175}$$

დაც $a, b, c, a_1, \cdots, c_2$ ჯერჯერობით უცნობია. მათ გამოსათვლელად უკანასკ-ლი ტოლობები აღებულ სამ $\overline{M}_u$, $\overline{M}_v$, $\overline{K}$ ვექტორზე გადავამრავლოთ მიმდევ-ობით. მივიღებთ ცხრა განტოლებას ცხრა უცნობი კოეფიციენტისათვის. ჯერ დავამრავლოთ (175)-ის სამივე ტოლობა $\overline{K}$-ზე. რადგან

$$\overline{K}\,\overline{M}_u = 0, \ \overline{K}\,\overline{M}_v = 0,$$

ტომ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \overline{K}\,\overline{M}_{uu} &= a_2\overline{K}^2 = a_2, \\ \overline{K}\,\overline{M}_{uv} &= b_2\overline{K}^2 = b_2, \\ \overline{K}\,\overline{M}_{vv} &= c_2\overline{K}^2 = c_2. \end{aligned}$$

(132) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$a_2=l, \quad b_2=m, \quad c_2=n. \tag{176}$$

ახლა მიმდევრობით გადავამრავლოთ სამივე ტოლობა $\overline{M}_u$ და $\overline{M}_v$-ზე. (116) აღნიშვნების თანახმად, გვექნება:

$$\overline{M}_u \overline{M}_{uu}=ae+a_1 f,$$

$$\overline{M}_v \overline{M}_{uu}=af+a_1 g,$$

$$\overline{M}_u \overline{M}_{uv}=be+b_1 f,$$

$$\overline{M}_v \overline{M}_{uv}=bf+b_1 g,$$

$$\overline{M}_u \overline{M}_{vv}=ce+c_1 f,$$

$$\overline{M}_v \overline{M}_{vv}=cf+c_1 g.$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან განიზღვრება ექვსი კოეფიციენტი, სახელდობრ, პირველი წყვილიდან—a, a_1, მეორე წყვილიდან—b, b_1 და მესამე წყვილიდან—c, c_1. განტოლებათა სამივე წყვილისათვის სისტემის დეტერმინანტი ერთი და იგივეა:

$$W=eg-f^2 \neq 0.$$

დაგვრჩა გამოსათვლელი მარცხენა მხარეზე მდგომი სკალარული ნამრავლები:

$$\overline{M}_u \overline{M}_{uu}, \ \overline{M}_v \overline{M}_{uu}, \ldots$$

ამ სიდიდეთა გამოსათვლელად გავიხსენოთ (116) აღნიშვნები:

$$\overline{M}_u^2=e, \ \overline{M}_u \overline{M}_v=f, \ \overline{M}_v^2=g.$$

ამ ტოლობებიდან მიმდევრობითი გაწარმოებით, u და v პარამეტრების მიმართ, მივიღებთ:

$$\overline{M}_u \overline{M}_{uu}=\frac{1}{2}e_u, \quad \overline{M}_u \overline{M}_{uv}=\frac{1}{2}e_v,$$

$$\overline{M}_v \overline{M}_{vu}=\frac{1}{2}g_u, \quad \overline{M}_v \overline{M}_{vv}=\frac{1}{2}g_v, \tag{177}$$

$$\overline{M}_v \overline{M}_{uu}=f_u-\frac{1}{2}e_v, \quad \overline{M}_u \overline{M}_{vv}=f_v-\frac{1}{2}g_u.$$

ამ მნიშვნელობათა შეტანის და მიღებული სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$a=\frac{1}{2}\,g\,\frac{e_u+ef_v-2ff_u}{W},$$

$$b=\frac{1}{2}\,g\,\frac{e_v-fg_u}{W}, \tag{178}$$

$$c=\frac{1}{2}\,\frac{2gf_v-gg_u-fg}{W},$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{2ef_u - e e_v - f c_u}{W},$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{eg_u - fe_v}{W}, \tag{179}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{eg_v + fg_u - 2ef_v}{W},$$

ამრიგად a, b, c, a_1, b_1, c_1 კოეფიციენტები განზღვრულია წირითი ელემენტის კოეფიციენტებისა და მათი პირველი რიგის წარმოებულების საშუალებით. a_2, b_2, c_2 კი, როგორც (176)-დან ჩანს, პირდაპირ მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმის კოეფიციენტების ტოლია შესაბამისად. მაშასადამე, (175) განტოლებათა ყველა კოეფიციენტი განზღვრულია პირველი და მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმების კოეფიციენტებით.

ახლა $\overline{K_u}$, $\overline{K_v}$ ვექტორები გამოვითვალოთ. რადგან $\overline{K}$ ვექტორი მუდმივსიგრძიანია (სიგრძე ერთის ტოლია), ამიტომ მისი წარმოებულები $\overline{K_u}$, $\overline{K_v}$ მართობი იქნება $\overline{K}$ ვექტორის, ე. ი. ნორმალის. მაშასადამე, $\overline{K_u}$, $\overline{K_v}$ ვექტორები პარალელური იქნება მხები სიბრტყის. ამიტომ ეს ვექტორები $\overline{M_u}$, $\overline{M_v}$ ვექტორების პარალელურ მდგენელებად დაიშლება. ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned} \overline{K_u} &= \lambda \overline{M_u} + \mu \overline{M_v}, \\ \overline{K_v} &= \lambda_1 M_u + \mu_1 M_v, \end{aligned} \tag{180}$$

სადაც λ, μ, λ_1, μ_1 ჯერჯერობით უცნობი კოეფიციენტებია. მათ გამოსათვლელად (180) ტოლობები მიმდევრობით უნდა გადავამრავლოთ $\overline{M_u}$, $\overline{M_v}$-ზე. თუ მხედველობაში მივიღებთ (116) და (132) აღნიშვნებს, გვექნება:

$$\begin{aligned} -l &= \lambda e + \mu f, \\ -m &= \lambda f + \mu g, \\ -m &= \lambda_1 e + \mu_1 f, \\ -n &= \lambda_1 e + \mu_1 g. \end{aligned}$$

თუ ამ განტოლებათა სისტემიდან ამოვხსნით λ, μ, λ_1, μ_1 კოეფიციენტებს, მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{fm - gl}{W}, \quad \mu = \frac{fl - em}{W}, \\ \lambda_1 &= \frac{fn - gm}{W}, \quad \mu_1 = \frac{fm - en}{W}. \end{aligned} \tag{180_1}$$

ამრიგად, (180) განტოლებათა კოეფიციენტები პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების კოეფიციენტებითაა განზღვრული. (175) და (180) განტოლებებს, სადაც კოეფიციენტებისათვის მხედველობაში უნდა გვქონდეს (176), (178),(179) და (180_1) ფორმულებით მოცემული მნიშვნელო-

ბები. ეწოდება ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები. ამ განტოლებათა პირველი სისტემა გაუსს ეკუთვნის, მეორე კოდაცი-ვაინგარტენს.

§ 40. გაუსის დებულება. კოდაცის განტოლებები

(175) და (180) განტოლებათა სისტემაში უცნობი ფუნქციებია M და $\overline{K}$. ხუთი განტოლება ორი უცნობით საზოგადოდ თავსებადი არ არის. ეს განტოლებები რომ თავსებადი იყოს, ამისათვის საჭიროა კოეფიციენტებმა დააკმაყოფილოს რაიმე გარკვეული პირობები (ინტეგრების პირობები). ამ პირობებს ასე მივიღებთ. ჩვენ ვიცით, რომ შვარცის დებულების თანახმად:

$$M_{uuv}=\overline{M}_{uvu}.$$

(175) სისტემის პირველი ტოლობის v-თი გაწარმოება და მეორე ტოლობის u-თი გაწარმოება მოგვცემს:

$$\overline{M}_{uuv}=a_v\overline{M}_u+a\overline{M}_{uv}+a_{1v}\overline{M}_v+a_1\overline{M}_{vv}+a_{2v}\overline{K}+a_2\overline{K}_v,$$

$$\overline{M}_{uvu}=b_u\overline{M}_u+b\overline{M}_{uu}+b_{1u}\overline{M}_v+b_1\overline{M}_{vu}+b_{2u}\overline{K}+b_2\overline{K}_u.$$

შევიტანოთ აქ $\overline{M}_{uu}$, $\overline{M}_{uv}$, $\overline{M}_{vv}$, $\overline{K}_u$, $\overline{K}_v$ ვექტორების მნიშვნელობები (175) და 180) განტოლებებიდან. გვექნება:

$$\overline{M}_{uuv}=(a_v+ab+a_1c+a_2\lambda_1)\overline{M}_u+$$

$$+(a_{1v}+ab_1+a_1c_1+a_2\mu_1)\overline{M}_v+(a_{2v}+ab_2+a_1c_2)\overline{K},$$

$$\overline{M}_{uvu}=(b_u+ba+b_1b+b_2\lambda)\overline{M}_u+$$

$$+(b_{1u}+ba_1+b_1b_1+b_2\mu)\overline{M}_v+(b_{2u}+ba_2+b_1b_2)\overline{K}.$$

რადგან ამ ორი ტოლობის მარცხნივ მდგომი ვექტორები ტოლია, ამიტომ მარჯვნივ მდგომი გამოსახულებებიც იგივურად ტოლი უნდა იყოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ გამოსახულებათა კოეფიციენტები შესაბამისად ტოლი უნდა იყოს. მივიღებთ (მხოლოდ მეორე კოეფიციენტების გატოლებით):

$$a_{1v}-b_{1u}+ab_1-ba_1+a_1c_1-b_1^2=b_2\mu-a_2\mu.$$

თუ აქ ჩავსვამთ a_2, b_2, μ_1, μ_1-ის მნიშვნელობებს (176) და (180_1) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$a_{1v}-b_{1u}+ab_1-ba_1+a_1c_1-b_1^2=eK. \tag{181}$$

მესამე კოეფიციენტების გატოლება მოგვცემს:

$$a_{2v}-b_{2u}+ab_2-ba_2+a_1c_2-b_1b_2=0.$$

სრულიად ანალოგიურად, თუ გავაწარმოებთ (175) სისტემის მეორე განტოლებას v-თი, ხოლო მესამეს u-თი და განვიხილავთ იგივეობას $\overline{M}_{uvv}=\overline{M}_{vvu}$, მივიღებთ (მესამე კოეფიციენტების გატოლებით):

$$b_{2v}-c_{2u}+bc_2-cb_2+b_1b_2-c_1a_2=0.$$

ახლა თუ ორ უკანასკნელ განტოლებაში a_2, b_2, c_2 შევცვლით მათი მნიშვნელობებით (176) ფორმულებიდან, მივიღებთ:

$$l_v - m_u + am - bl + a_1 n - b_1 m = 0,$$
$$m_v - n_u + bn - cm + b_1 m - c_1 l = 0. \tag{182}$$

თუ დავუკვირდებით (181) ტოლობის მარცხენა მხარეზე მოთავსებულ გამოსახულებას, შევამჩნევთ, რომ იგი გამოსახულია a, b, c, a_1, b_1, c_1 კოეფიციენტებით, რომელნიც თავის მხრივ გამოისახება პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით და მათი წარმოებულებით. რადგან $E \neq 0$, ამიტომ K ამოიხსნება (E-ზე გაყოფით) (184) განტოლებიდან. ამრიგად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა, რომელიც გაუსის თეორემის სახელწოდებით არის ცნობილი.

გაუსის თეორემა. ზედაპირის სრული სიმრუდე გამოისახება პირითი ელემენტის კოეფიციენტებისა და მათი წარმოებულების საშუალებით. (182) განტოლებებს, რომელნიც აკავშირებენ მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებთან, ეწოდებათ კოდაცის განტოლებანი. მაშასადამე, თუ მოცემულია ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა, მაშინ მეორე ფორმის კოეფიციენტები განისაზღვრება (182) დიფერენციალური განტოლებების მიხედვით, ოღონდ მათ დაემატება კიდევ ერთი ალგებრული განტოლება მეორე ფორმის კოეფიციენტების მიმართ:

$$ln - m^2 = K(eg - f^2). \tag{181¹}$$

ცხადია, მხედველობაში ვღებულობთ, რომ K გამოსახულია პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით (181) ტოლობის საფუძველზე. უკანასკნელ განტოლებას ეწოდება გაუსის განტოლება. ამრიგად, გაუსის და კოდაცის განტოლებანი განსაზღვრავენ მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების საშუალებით. ოღონდ ეს განსაზღვრა არ არის დისკრეტული, რადგან (182) დიფერენციალური განტოლებანია. ყოველი ამონახსნი (182) და (181¹) სისტემისა l, m, n-ის მიმართ განხილული e, f, g კოეფიციენტებთან ერთად უზრუნველყოფს ძირითად დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრების პირობებს. (175) და (180) განტოლებათა საშუალებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ M წერტილის ნებისმიერი კერძო წარმოებულები. ისინი გამოისახება ბუნებრივ სისტემაში, ამ გამოსახვის კოეფიციენტები განსაზღვრული იქნება, ცხადია, მხოლოდ პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების კოეფიციენტებით. ამრიგად, განისაზღვრება M წერტილის სრული დიფერენციალები ნებისმიერი რიგისა, მაშასადამე, განისაზღვრება წერტილის ნაზრდი $\Delta\overline{M}$:

$$M_1 - M = \Delta\overline{M} = d\overline{M} + \frac{1}{2!}d^2\,\overline{M} + \cdots$$

აქედან

$$M_1 = M + d\overline{M} + \frac{1}{2!}d^2\,\overline{M} + \cdots$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ზედაპირი განისაზღვრება ბუნებრივ სისტემაში მთლიანად. თუ ბუნებრივ სისტემას შევცვლით (უკეთ რომ ვთქვათ, ბუნებრივი სისტემის საწყის მდებარეობას) ამით უკანასკნელი განტოლება სახეს არ შეიცვლის, ე. ი. ახალ სისტემაში განისაზღვრება ისეთივე ზედაპირი, როგორც პირველ შემთხვევაში, ეს უკანასკნელი შეგვიძლია მივიღოთ პირველის მოძრაობით. ამრიგად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა. პირველი და მეორე კვადრატული ფორმები განსაზღვრავენ ზედაპირს მოძრაობამდე.

ჩვენ შეგვიძლია (182) და (181_1) განტოლებებში e, f, g ავიღოთ ნებისმიერად (ოღონდ $eg-f^2>0$); l, m, n კი ამოიხსნება ამ განტოლებებიდან, სხვადასხვა ამონახსნს შეესაბამება სხვადასხვა ზედაპირი, რომელთაც საერთო აქვთ პირველი კვადრატული ფორმა, ე. ი. მივიღებთ ურთიერთდაფენად ზედაპირებს, უფრო ზუსტად კი ერთიმეორეზე იზომეტრულად გადასახვად ზედაპირებს. ზედაპირის ის ელემენტები, რომელნიც განისაზღვრება მხოლოდ პირველი კვადრატული ფორმით (როგორებიცაა მაგალითად: კუთხე წირთა შორის, ფართობი, სრული სიმრუდე) თან გაჰყვება დეფორმაციის დროს. ასეთ ელემენტებს ეწოდებათ ზედაპირის შინაგანი ელემენტები, მათ აღრიცხვას კი—გამოყოფილად, ზედაპირის შინაგანი გეომეტრია.

როგორც კერძო შემთხვევა, განვიხილოთ განფენადი ზედაპირები. თუ ზედაპირი იზომეტრულად გადაისახება სიბრტყეზე, მაშინ მისი სრული სიმრუდე სიბრტყის სრული სიმრუდის ტოლი უნდა იყოს შესაბამ წერტილებში, მაგრამ სიბრტყის სრული სიმრუდე ყველგან ნულია. ამიტომ განფენადი ზედაპირის სრული სიმრუდე ნულია. ჩვენ უკვე გავეცანით წრფოვან განფენად ზედაპირებს, ახლა დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი განფენადი ზედაპირი წრფოვანია. ფორმულის თანახმად, ამ შემთხვევაში, გვექნება $ln-m^2=0$, ე. ი. მეორე კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი ნულია. ასიმპტოტურ წირთა ორი ოჯახი ერთიმეორეს ემთხვევა. მივიღოთ ეს ერთადერთი ოჯახი საკოორდინატო წირთა ერთ ოჯახად (მაგ. $u=\mathrm{const.}$), მაშინ მეორე კვადრატულ ფორმას ასეთი სახე მიეცემა $d\delta^2=ldu^2$. ე. ი. $m=0$, $n=0$. ამ შემთხვევაში (150) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$fldu^2+g_l du dv=0.$$

აქედან $du=0$ ანუ $u=\mathrm{const}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $u=\mathrm{const}$ წირები სიმრუდის წირებიც ყოფილა. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში სიმრუდის წირების ერთი ოჯახი ემთხვევა ასიმპტოტური წირების ერთადერთ ოჯახს. ასეთი დამთხვევა კი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა ეს წირები წრფეებია. მაშასადამე, ასიმპტოტურ წირთა ერთადერთი ოჯახი წრფეებია, ე. ი. ზედაპირი დაფარულია წრფეებით ანუ წრფოვანია. ამ წრფის გასწვრივ, როგორც სიმრუდის წირის გასწვრივ, $d\overline{K}=-\frac{1}{R}\,d\overline{M}$, მაგრამ $\frac{1}{R}=0$ (წრფისათვის). მაშასადამე, $d\overline{K}=0$, ანუ $\overline{K}=\mathrm{const}$. ე. ი. წირის გასწვრივ ზედაპირის ნორმალი პარალელურად გადაადგილდება, მხები სიბრტყე კი უძრავია, რაც წრფოვან განფენად ზედაპირს ახასიათებს.

§ 41. მრუდწირული კოორდინატების ცვლა და მისი ინვარიანტები

განვიხილოთ ზედაპირი სიმბოლური განტოლებით

$$M=M(u, v).$$

u და v პარამეტრები u_1 და v_1 პარამეტრებით ისე შევცვალოთ:

$$u=u(u_1,\ v_1),$$

$$v=v(u_1\ v_1), \qquad (183)$$

რომ მარცხნივ მდგომი ფუნქციები აკმაყოფილებდეს შემდეგ ერთადერთ პირობას:

$$J=\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}-\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\neq 0.$$

ახალ მრუდწირულ კოორდინატებში კვადრატული ფორმების კოეფიციენტები ასე აღვნიშნოთ:

$$e_1,\ f_1,\ g_1,$$

$$l_1,\ m_1,\ n_1.$$

მაშინ ახალ მრუდწირულ კოორდინატებში ეს კვადრატული ფორმები შემდეგნაირად დაიწერება:

$$ds^2=e_1du_1^2+2f_1du_1dv_1+g_1dv_1^2,$$

$$d\sigma^2=l_1du_1^2+2m_1du_1dv_1+n_1dv_1^2.$$

u და v პარამეტრების შეცვლის შემდეგ ზედაპირის განტოლება ახალ მრუდწირულ კოორდინატებში გამოისახება ასე:

$$M=M_1(u_1, v_1).$$

ამ განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\overline{M}_{u_1}=\overline{M}_u\frac{\partial u}{\partial u_1}+\overline{M}_v\frac{\partial v}{\partial u_1},$$

$$\overline{M}_{v_1}=\overline{M}_u\frac{\partial u}{\partial v_1}+\overline{M}_v\frac{\partial v}{\partial v_1}. \tag{184}$$

აქედან, თანახმად (116) აღნიშვნებისა, გვექნება:

$$e_1=e\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2+2f\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}+g\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$f_1=e\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1}+f\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}+\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)+g\frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}, \tag{185}$$

$$g_1=e\left(\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)^2+2f\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}+g\left(\frac{\partial v}{dv_1}\right)^2.$$

ეს ფორმულები წირითი ელემენტის ძველსა და ახალ კოეფიციენტებს აკავშირებს. თვით წირითი ელემენტი კი მრუდწირული კოორდინატების ცვლის ინვარიანტია, ე. ი. იგი არ იცვლება მრუდწირული კოორდინატების ცვლით. (184) ფორმულების ანალოგიურად გვექნება:

$$K_{u_1}=K_u\frac{\partial u}{\partial u_1}+\overline{K_u}\frac{\partial v}{\partial u_1},$$

$$\overline{K}_{v_1}=\overline{K}_u\frac{\partial u}{dv_1}+\overline{K}_v\frac{\partial v}{\partial v_1}. \tag{186}$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$l_1=-K_{v_1}\cdot\overline{M}_{v_1},\ m_1=-\overline{K}_{v_1}\cdot\overline{M_{v_1}},\ n_1=-\overline{K}_{v_1}\cdot\overline{M}_{v_1},$$

მაშინ (186) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$l_1 = l\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)^2 + 2m\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + n\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$m_1 = l\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + m\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\,\frac{\partial u}{\partial u_1}\right) + n\frac{\partial v}{\partial u_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1}, \tag{187}$$

$$n_1 = l\left(\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)^2 + m\frac{\partial u}{\partial v_1}\,\frac{\partial v}{\partial v_1} + n\left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2.$$

ეს ფორმულები მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმის ძველსა და ახალ კოეფიციენტებს აკავშირებს. თვით მეორე კვადრატული ფორმა კი ინვარიანტია მრუდწირული კოორდინატების ცვლის მიმართ.

ზედაპირზე გამავალ ორ წირს შორის კუთხე ინვარიანტი იქნება მრუდწირული კოორდინატების ცვლის მიმართ, როგორც ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (124) ფორმულიდან.

(184)-დან გვექნება:

$$[\overline{M}_{u_1}\ \overline{M}_{v_1}]^2 = [\overline{M}_u, \overline{M}_v]^2 J^2.$$

თანახმად (120) ფორმულისა, უკანასკნელი ტოლობა ასე დაიწერება:

$$e_1 g_1 - f_1^2 = J^2(eg - f^2). \tag{188}$$

ეს ტოლობა (185) ფორმულიდანაც შეგვეძლო მიგვეღო უშუალო გამოთვლებით. (187) ფორმულებიდანაც მივიღებთ უკანასკნელი ტოლობის ანალოგიურ ფორმულას

$$l_1 n_1 - m_1^2 = J^2(ln - m^2). \tag{189}$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება:

$$\frac{l_1 n_1 - m_1^2}{e_1 g_1 - m_1^2} = \frac{ln - m^2}{eg - f_2}, \tag{190}$$

ანუ (აღნიშვნის ჩვენგან მიღებული წესის თანახმად)

$$K_1 = K.$$

ამრიგად, *ზედაპირის სრული სიმრუდე ინვარიანტია მრუდწირული კოორდინატების ცვლის მიმართ.*

ბოლოს განვიხილოთ $d\overline{M}$ და $\delta\overline{M}$ ვექტორებით განსაზღვრული ფართის ელემენტი. გვექნება:

$$d\Omega = |[d\overline{M}, \delta\overline{M}]| = |[\overline{M}_u, \overline{M}_v]|\,(du\delta v - dv\delta u)$$

ანუ, საბოლოოდ,

$$d\Omega = \sqrt{eg - f^2}\,(du\delta v - dv\delta u). \tag{191}$$

უშუალო გამოთვლები მოგვცემს:

$$du\delta v - dvdu = J(du_1\delta v_1 - dv_1\delta u_1).$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმის შედეგად წინა ფორმულიდან მივიღებთ:

$$d\Omega = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\,(du_1\delta v_1 - dv_1\,\delta u_1),$$

ე. ი.

$$d\Omega = d\Omega_1.$$

ამრიგად, ფ ა რ თ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ც ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ი ა მ რ უ დ წ ი რ უ ლ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს ც ვ ლ ი ს მ ი მ ა რ თ.

ახლა დავსვათ ასეთი საკითხი. შესაძლებელია თუ არა მრუდწირული კოორდინატების ცვლით სასურველი სახე მივცეთ წირით ელემენტს. უფრო ზუსტად ეს იმას ნიშნავს, რომ ისეთი მრუდწირული კოორდინატები მოვძებნოთ, რომლის მიმართაც წირითი ელემენტის კოეფიციენტებმა წინასწარ დანიშნული მნიშვნელობები მიიღოს.

ახალი მრუდწირული კოორდინატები (185) განტოლებათა სისტემით განიზღვრება, სადაც e, f, g კოეფიციენტები ცნობილი ფუნქციებია u და v პარამეტრებისა, ხოლო e_1, f_1, g_1—ფუნქციებია u_1 და v_1 პარამეტრების. აქ გვაქვს სამი განტოლება ორი u_1, v_1 უცნობი ფუნქციის მიიმართ და ამიტომ ამ სისტემის თავსებადობისათვის უნდა შესრულდეს სათანადო პირობა: ახალი კოეფიციენტები არ შეგვიძლია სავსებით ნებისმიერად დავასახელოთ, მათ უნდა დააკმაყოფილონ გარკვეული (თავსებადობის) პირობა. პირველ ყოვლისა, e_1, f_1, g_1 კოეფიციენტები, ცხადია, უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

$$e_1 g_1 - f_1^2 \neq 0.$$

გარდა ამისა, ჩვენ ვიცით, რომ სრული სიმრუდე წირითი ელემენტის კოეფიციენტებით და მათი წარმოებულებით გამოისახება, ხოლო სიმრუდე ინვარიანტია მრუდწირული კოორდინატების ცვლის, ამიტომ მას ერთნაირი აგებულება ექნება ძველი და ახალი წირითი ელემენტის კოეფიციენტების მიმართ, ე. ი.

$$K = K_1(e_1, f_1, g_1, \dots) = K(e, f, g, \dots). \tag{192}$$

ეს იქნება განსახილავი სისტემის თავსებადობის პირობა. იგი გვიჩვენებს, რომ წირითი ელემენტის ახალი კოეფიციენტებიდან ორს შეგვიძლია მივცეთ წინასწარ დანიშნული მნიშვნელობები, მესამე კი სათანადო მნიშვნელობას მიიღებს (185) განტოლებათა მიხედვით.

უფრო ხშირად გვხვდება წირითი ელემენტის შემდეგი გამარტივებული სახეები:

$$ds^2 = edu^2 + gdv^2, \ (f=0), \tag{193}$$

$$ds^2 = A(du^2 + dv^2), \tag{194}$$

$$ds^2 = du^2 + gdv^2. \tag{195}$$

ამ სამი ფორმულის შესაბამისად სრული სიმრუდის ფორმულაც მარტივ სახეს ღებულობს.

სიმრუდის საბოლოო გამოსახულებას e, f, g კოეფიციენტების მიმართ (181) ფორმულიდან მივიღებთ, თუ იქ ჩავსვამთ a, b, c, a_1, b_1, c_1, სიდიდეთა მნიშვნელობებს (178) და (179) ფორმულებიდან. ფ რ ო ბ ე ნ ი უ ს მ ა ამ ფორმულას ასეთი სახე მისცა:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{W}}\left\{\left(\frac{f_v - g_u}{\sqrt{W}}\right)_u + \left(\frac{f_u - e_v}{\sqrt{W}}\right)_v\right\} -$$

$$- \frac{1}{4W^2}\begin{vmatrix} e & e_u & e_v \\ f & f_u & f_v \\ g & g_u & g_v \end{vmatrix}. \tag{196}$$

ზემოაღნიშნული სამი კერძო შემთხვევის შესაბამისად სიმრუდე გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{eg}}\left\{\left(\frac{g_u}{\sqrt{eg}}\right)_u+\left(\frac{e_v}{\sqrt{eg}}\right)_v\right\}, \tag{197}$$

$$K=-\frac{1}{2A}\{(\lg A)_{uu}+(\lg A)_{vv}\}, \tag{198}$$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{uu}. \tag{199}$$

§ 42. ზედაპირის დეფორმაცია და მისი ინვარიანტები

ჩვენ ზემოთ, მეოთხე თავში, განვმარტეთ ზედაპირის სხვა ზედაპირზე იზომეტრული გადასახვა. ეს არის ორი ზედაპირის წერტილთა ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც შესაბამის წერტილებში ზედაპირებს ერთნაირი (ტოლი) წირითი ელემენტი აქვთ. ზედაპირის იზომეტრულ გადასახვას მოკლედ ზედაპირის დ ე ფ ო რ მ ა ც ი ა ს ა ც ვუწოდებთ.

თუ იზომეტრულ თანადობაში მყოფი ზედაპირები მოცემულია სხვადასხვა მრუდწირულ კოორდინატებში, მაშინ მრუდწირულ კოორდინატებს შორის შესაბამი დამოკიდებულება (რომელიც იზომეტრულ გადასახვას განახორციელებს) (185) ფორმულებით განიზღვრება. როგორც ვიცით, ამ განტოლებათა ერთ-ერთი თავსებადობის პირობა არის:

$$K_1(e_1,\ f_1,\ g_1\dots)=K(e,\ f,\ g,\dots).$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე u და v პარამეტრების ფუნქციაა, ხოლო მარცხენა მხარე u_1, v_1 პარამეტრებისა, ე. ი.

$$K_1(u_1,\ v_1)=K(u,\ v). \tag{200}$$

ეს ტოლობა რომ იგივური იყოს, საჭიროა ორივე მხარეზე მუდმივი გვქონდეს. მაშასადამე, იგივეობა გვექნება მხოლოდ მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირებისათვის, მ უ დ მ ი ვ ს ი მ რ უ დ ი ა ნ ი ზ ე დ ა პ ი რ ი ს დ ე ფ ო რ მ ა ც ი ი ს ა თ ვ ი ს უ კ ა ნ ა ს კ ნ ე ლ ი ტ ო ლ ო ბ ა ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ დ ა ს ა კ მ ა რ ი ს პ ი რ ო ბ ა ს წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი ორი მოცემული მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი ერთიმეორეზე იზომეტრულად გადაისახება. კერძოდ, დადებით მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი იზომეტრულად გადაისახება ისეთივე სიმრუდის სფეროზე.

როდესაც (200) ტოლობა იგივეობას არ წარმოადგენს, ე. ი. როცა ზედაპირის სიმრუდე მუდმივი არ არის, მაშინ (200) ტოლობა აკავშირებს ახალ და ძველ მრუდწირულ კოორდინატებს; საჭიროა კიდევ ერთი სხვა დამოკიდებულება, რომ ახალი და ძველი მრუდწირული კოორდინატები ერთიმეორის საშუალებით გამოვსახოთ.

(200)-ის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial K_1}{\partial u_1}=K_u\frac{\partial u}{\partial u_1}+K_v\frac{\partial v}{\partial u_1},$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial v_1}=K_u\frac{\partial u}{\partial v_1}+K_v\frac{\partial v}{\partial v_1}.$$

ქედან კი,

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\right)^2 = K_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + 2K_u K_v \frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} + K_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\frac{\partial K_1}{\partial v_1} = K_u^2\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} + K_u K_v + \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) + K_v^2\frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1},$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial v_1}\right)^2 = K_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)^2 + 2K_u K_v \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + K_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2.$$

ამ უკანასკნელი ფორმულებიდან და (185) ფორმულებიდან უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ:

$$\frac{e_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\right)^2 - f_1\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\frac{\partial K_1}{\partial v_1} + g\left(\frac{\partial K_1}{\partial v_1}\right)^2}{e_1 g_1 - f_1^2} =$$

$$= \frac{eK_u^2 - 2fK_uK_v + gK_v^2}{eg - f^2}.$$

ამრიგად, სრული სიმრუდიდან მიღებული

$$\Delta(K,K) = \frac{eKu^2 - 2fK_uK_v + gK_v^2}{eg - f^2}. \tag{201}$$

გამოსახულება ინვარიანტია ზედაპირის დეფორმაციის. ამ უკანასკნელ გამოსახულებას $K(u, v)$ ფუნქციის ბელტრამის პირველი დიფერენციალური პარამეტრი ეწოდება. მაშ, ზედაპირი რომ იზომეტრულად გადაისახოს მეორე ზედაპირზე, ამისათვის აუცილებელია შემდეგი პირობების შესრულება:

$$K_1(u_1, v_1) = K(u, v),$$

$$\Delta_1(K_1, K_1) = \Delta(K, K). \tag{202}$$

შენიშვნა. (201) გამოსახულება რომ ინვარიანტია მრუდწირული კოორდინატების ცვლის მიმართ, იქიდანაც ჩანს, რომ იგი გარეგნულად საშუალო სიმრუდის ფორმულას მოგვაგონებს, სადაც l, m, n-ის ნაცვლად ჩასმულია შესაბამისად K_u^2, $K_u \cdot K_v$, K_v^2. საშუალო სიმრუდეკი, ცხადია, მრუდწირული კოორდინატების ცვლის ინვარიანტია, რადგან, საზოგადოდ, მართივკვეთის სიმრუდე, როგორც ორი ინვარიანტის შეფარდება (მეორე და პირველი ფორმების შეფარდება), ინვარიანტია მრუდწირული კოორდინატების ცვლისა, ე. ი. ინვარიანტია (185) და (187) გარდაქმნების მიმართ. ამრიგად, ზემოაღნიშნული $\Delta(K, K)$ გამოსახულების ინვარიანტობის აღმოსაჩენად გამოთვლის ჩატარება არც კია საჭირო.

§ 43. გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება

ჩვენ უკვე განმარტებული გვაქვს გეოდეზიური წირი. მოყვანილი გვაქვს აგრეთვე მისი განტოლებები:

$$\overline{M}_u \cdot \frac{d^2\overline{M}}{ds^2} = 0,$$

$$\overline{M}_v \cdot \frac{d^2\overline{M}}{ds^2} = 0,$$

სადაც

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\overline{M}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\overline{M}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{du}{ds}+\overline{M}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+$$
$$+\overline{M}_u\frac{d^2u}{ds^2}+M_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

(175) განტოლებათა სისტემის თანახმად, უკანასკნელი გამოსახულება ასე დაიწერება (ამ გამოსახულებაში უნდა შევიტანოთ $\overline{M}_{uu}$, $\overline{M}_{uv}$, $\overline{M}_{vv}$-ის მნიშვნელობები):

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\left[a\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2b\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+c\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\frac{d^2u}{ds^2}\right]\overline{M}_u+$$
$$+\left[a_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2b_1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+c_1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\frac{d^2v}{ds^2}\right]\overline{M}_v+$$
$$+\left[a_2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2b_2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+c_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]\overline{K}. \tag{203}$$

თუ $\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}$-ის მნიშვნელობას წინა განტოლებაში, გეოდეზიური წირის განტოლებაში ჩავსვამთ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\overline{M}_u\cdot\overline{K}=0$, $\overline{M}_v\cdot K=0$, მაშინ გეოდეზიური წირის დიფერენციალურ განტოლებას მივიღებთ (ერთგვაროვანი სისტემის ამოხსნის შედეგად):

$$\frac{d^2u}{ds^2}+a\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2b\frac{du}{ds}\frac{du}{ds}+c\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,$$
$$\frac{d^2v}{ds^2}+a_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2b_1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+c_1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0. \tag{204}$$

რადგან a, b, c, a_1, b_1, c_1 მხოლოდ წირითი ელემენტის კოეფიციენტებზეა დამოკიდებული, ამიტომ გეოდეზიური წირი ინვარიანტი იქნება ზედაპირის დეფორმაციის მიმართ: ზედაპირის მეორე ზედაპირზე იზომეტრული გადასახვის დროს გეოდეზიური წირი გადაისახება გეოდეზიურ წირში. ამრიგად, გეოდეზიური წირი შინაგანი ბუნების მატარებელია, იგი ზედაპირის შინაგანი გეომეტრიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ელემენტია.

§ 44. გეოდეზიური სიმრუდე

ფრენეს მეორე ფორმულა

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\frac{d\overline{T}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{N}.$$

გვაძლევს:

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d^2M}{ds^2}\right|.$$

ამის გამო $\dfrac{d^2M}{ds^2}$ ვექტორს სიმრუდის ვექტორი ეწოდება. სიმრუდის ვექტორის გეგმილს (ალგებრულს) მხებ სიბრტყეზე გეოდეზიური სიმრუდე ეწოდება. აღნიშნული გეგმილის გამოსათვლელად ხელსაყრელია, რომ განვსაზღვროთ ჯერ მხების მგეზავის მართობი და მხებ სიბრტყეში მდებარე ერთეული სიგრძის ვექტორი. რადგან $\dfrac{d^2\overline{M}}{ds^2}$ მხების მართობია, ამიტომ იგი სწორედ აღნიშნულ ვექტორზე დაგეგმილდება. საძიებელი ერთეული სიგრძის ვექტორი $\overline{A}$-თი აღვნიშნოთ. დავშალოთ ეს ვექტორი $\overline{M}_u$ და $\overline{M}_v$ მიმართულებით:

$$\overline{A} = \alpha\overline{M}_u + \beta\overline{M}_v.$$

$\overline{A}$ ვექტორი

$$\overline{A}^2 = 1, \quad \overline{A} \,.\, \overline{T} = 0$$

პირობებს აკმაყოფილებს.

რადგან

$$\overline{T} = \overline{M}_u\frac{du}{ds} + \overline{M}_v\frac{dv}{ds},$$

ამიტომ მეორე ტოლობიდან მივიღებთ:

$$e\alpha\frac{du}{ds} + f\left(\alpha\frac{dv}{ds} + \beta\frac{du}{ds}\right) + g\beta\frac{dv}{ds} = 0.$$

აქედან

$$\beta = -\frac{e\dfrac{du}{ds} + f\dfrac{dv}{ds}}{f\dfrac{du}{ds} + g\dfrac{dv}{ds}} \cdot \alpha = \nu\alpha.$$

თუ β-ს მნიშვნელობას შევიტანთ, მაშინ მივიღებთ:

$$\overline{A} = \alpha(\overline{M}_u + \nu\overline{M}_v). \tag{205}$$

აქედან ცხადია, რომ α მოცემული იქნება შემდეგი ფორმულით:

$$\alpha = \pm\frac{1}{|\overline{M}_u + \nu\overline{M}_v|}.$$

ამრიგად, ხსენებულ ერთეულ ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ

$$\overline{A} = \frac{\overline{M}_u + \nu\overline{M}_v}{|\overline{M}_u + \nu\overline{M}_v|}, \tag{206}$$

ვექტორი, სადაც

$$\nu = \frac{f\dfrac{du}{ds} + f\dfrac{dv}{ds}}{f\dfrac{du}{ds} + g\dfrac{dv}{ds}}. \tag{207}$$

თუ გეოდეზიურ სიმრუდეს $\dfrac{1}{\rho_g}$-თი აღვნიშნავთ, მაშინ, განმარტების თანახმად, გვექნება:

$$\frac{1}{\rho_g} = \text{გეგ.}\, \overline{\text{A}} \frac{d^2 \overline{M}}{ds^2} = \overline{A} \cdot \frac{d^2 \overline{M}}{ds^2}. \tag{208}$$

თუ შევიტანთ აქ $\overline{A}$ ვექტორის მნიშვნელობას (206) ფორმულიდან და $\frac{d^2 \overline{M}}{ds^2}$-ის მნიშვნელობას (203) ფორმულიდან, მაშინ გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{1}{\rho_g} \left[\frac{d^2 u}{ds^2} + a \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2b \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + c \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] \frac{e + \nu f}{|M_u + \nu M_v|} +$$

$$+ \left[\frac{d^2 v}{ds^2} + a_1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2b_1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + c_1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] \frac{f + \nu g}{| M_u + \nu \overline{M}_v |}. \tag{209}$$

რადგან a, b, c, a_1, b_1, c_1 და ν განსაზღვრულია წირითი ელემენტის კოეფიციენტების საშუალებით, ამიტომ გეოდეზიური სიმრუდეც მხოლოდ წირითი ელემენტის კოეფიციენტებზეა დამოკიდებული და, მაშასადამე, გეოდეზიური სიმრუდე ზედაპირის დეფორმაციის ინვარიანტია. ამრიგად, წირის გეოდეზიური სიმრუდე შინაგანი გეომეტრიის სიდიდე იქნება. ამიტომ გეოდეზიურ სიმრუდეს შინაგანი სიმრუდეც ეწოდება.

წირის გეოდეზიური სიმრუდის (208) ფორმულა, თანახმად (206) ტოლობისა, შეგვიძლია ასეც დავწეროთ:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\overline{M}_u \frac{d^2 \overline{M}}{ds^2} + \nu \overline{M}_v \cdot \frac{d^2 \overline{M}}{ds^2}}{| \overline{M}_u + \nu \overline{M}_v |}. \tag{210}$$

უკანასკნელი ფორმულიდან ჩანს, რომ, თუ წირი გეოდეზიურია, მაშინ მისი გეოდეზიური სიმრუდე ნული იქნება და, პირუკუ, თუ წირის გეოდეზიური სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია, მაშინ იგი გეოდეზიური წირი იქნება. ამრიგად, გეოდეზიური წირი შეგვიძლია განვმარტოთ კიდევ, როგორც ისეთი წირი, რომლის გეოდეზიური სიმრუდე ნულია.

როგორც აღნიშნული გვქონდა, გეოდეზიური სიმრუდე $\frac{d^2 \overline{M}}{ds^2}$ ვექტორის გეგმილია მხებ სიბრტყეში ან, რაც იგივეა, $\frac{d\overline{T}}{ds}$ ვექტორის გეგმილია მხებ სიბრტყეში, ე. ი.

$$\frac{1}{\rho_g} = \text{გეგ.}\, \overline{\text{A}} \frac{d\overline{T}}{ds}.$$

რადგან $\frac{d\overline{T}}{ds}$ მართობია $\overline{T}$-სი, ამიტომ იგი $\overline{A}$ და $\overline{K}$ ვექტორების მიმართ დაიშლება. თუ აღვნიშნავთ ამ ვექტორის მხებ და ნორმალ მდგენელებს $\left(\frac{d\overline{T}}{ds} \right)_{\overline{\text{A}}}$ და $\left(\frac{d\overline{T}}{ds} \right)_{\overline{\text{K}}}$-თი, მაშინ გვექნება:

$$\frac{d\overline{T}}{ds} = \left(\frac{d\overline{T}}{ds} \right)_{\overline{\text{A}}} + \left(\frac{d\overline{T}}{ds} \right)_{\overline{\text{K}}}.$$

რადგან $\left(\dfrac{d\overline{T}}{ds}\right)_{\overline{A}}$ პარალელურია $\overline{A}$-სი, ხოლო $\left(\dfrac{d\overline{T}}{ds}\right)_{\overline{K}}$ პარალელურია $\overline{K}$-სი, ამიტომ გვექნება:

$$\left(\frac{d\overline{T}}{ds}\right)_{\overline{A}} = \left(\text{გეგ}_{\overline{A}} \frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{A} = \frac{1}{\rho_g}\overline{A},$$

$$\left(\frac{d\overline{T}}{ds}\right)_{\overline{K}} = \left(\text{გეგ}_{\overline{K}} \frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{K} = \left(\overline{K} \cdot \frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{K}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{d\overline{T}}{ds} = \frac{1}{\rho_g}\overline{A} + \left(\overline{K} \cdot \frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{K}.$$

მხებ მდგენელს კიდევ ასე აღნიშნავენ: $\dfrac{D\overline{T}}{ds} = \left(\left(\dfrac{d\overline{T}}{ds}\right)_{\overline{A}}\right) = \dfrac{1}{\rho_g} \cdot \overline{A}$. ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{D\overline{T}}{ds} = \frac{d\overline{T}}{ds} - \left(\overline{K} \cdot \frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{K}. \tag{211}$$

გეოდეზიური სიმრუდისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\frac{1}{\rho_g} = \pm\left|\frac{D\overline{T}}{ds}\right|. \tag{212}$$

განვიხილოთ ზედაპირზე გამავალი წირის ორი მახლობელი მხები წრფე $\overline{T}$ და $\overline{T_1}$. ცხადია, $\overline{T_1}$ საზოგადოდ მოთავსებული არ იქნება ზედაპირის მხებ სიბრტყეზე M წერტილში. დავაგეგმილოთ ეს ვექტორი მხებ სიბრტყეზე. რადგან, პირველი რიგის სიზუსტით,

$$\overline{T}_1 = \overline{T} + \Delta\overline{T} \approx \overline{T} + d\overline{T},$$

ამიტომ,

$$(\overline{T}_1)\pi = \overline{T} + D\overline{T},$$

სადაც π სიმბოლო აღნიშნავს მხებ სიბრტყეს. $(\overline{T}_1)\pi$-ის მიერ $\overline{T}$-სთან შედგენილი $d\varphi$ კუთხე გამოისახება შემდეგი ფორმულით (ნახ. 55):

$$d\varphi = \pm\,|D\overline{T}|;$$

აქედან

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm\left|\frac{D\overline{T}}{ds}\right| = \frac{1}{\rho_g}. \tag{213}$$

რადგან გეოდეზიური სიმრუდე ინვარიანტია დეფორმაციის, ამიტომ როდესაც აღებული წირის მხები სიბრტყეებით აღწერილ განფენად ზედაპირს გავფენთ სიბრტყეზე, მაშინ წირი ბრტყელ წირზე გაიფინება. $\overline{T}$ და $(\overline{T})\pi$ განფენილი წირის ორი მეზობელი მხები წრფე იქნება, $d\varphi$ კი—მათ შორის კუთხე. განფენილი წირის სიმრუდე (როგორც ბრტყელი წირის სიმრუდე) ტოლი იქნება $\dfrac{d\varphi}{ds}$-ისა. ამრიგად, წირის გეოდეზიური სიმრუდე ტოლია ამ წირის სიბრტყეზე განფენის შედეგად მიღებული წირის ჩვეულებრივი სიმრუდის. წირი რომ წრფედ გაიფინოს,

საჭიროა მისი გეოდეზიური სიმრუდე ნული იყოს, ე. ი. გეოდეზიური წირი წრფედ გაიფინება; მაშასადამე, იგი უმოკლესი სიგრძის წირი იქნება ზედაპირის ორ მეზობელ წერტილზე გამავალ წირთა შორის, რაც ადრევე იყო დამტკიცებული გეომეტრიულად (III თავში).

რადგან გეოდეზიური წირის გეოდეზიური სიმრუდე ნულია, ამიტომ გეოდეზიური წირის გასწვრივ, (212) ფორმულის თანახმად, შესრულდება

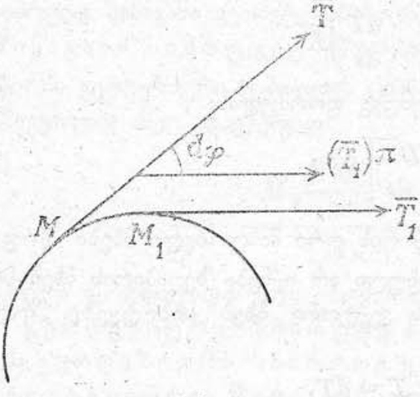
$$\frac{D\overline{T}}{ds}=0$$

ტოლობა ან, რაც იგივეა,

$$\frac{d\overline{T}}{ds}-\left(\overline{K}\cdot\frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{K}=0 \tag{214}$$

ტოლობა. ეს იქნება გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება სიმბოლური სახით. (213) ფორმულის მიხედვით, გეოდეზიური წირისათვის გვექნება:

$d\varphi=0$, ანუ $\varphi=\mathrm{const}$.



ნახ. 55

ამრიგად, როდესაც წერტილი გეოდეზიურ წირზე M წერტილიდან მეზობელ M_1 წერტილში გადაადგილდება, მაშინ მხების $\overline{T}$ მგეზავი ზედაპირის ნორმალის გარშემო არ მობრუნდება, იგი წირის $\overline{T}$ და $\overline{K}$ ვექტორებით განზღვრულ სიბრტყეში ამოძრავდება. წერტილი ამ გადაადგილების დროს (M-დან M_1 წერტილში) განიცდის მაქსიმალურ შესაძლებელ „დაშვებას“ ან „აღმართვას“ და, ამიტომ, მინიმალურ გზას გაივლის. ამავე დროს წერტილი ინერციულ ძრაობას შეასრულებს, რადგან მასზე არ იმოქმედებს სხვა მამოძრავებელი ძალა, გარდა იმ ძალისა, რომელიც მას აიძულებს ყოველთვის ზედაპირზე დარჩეს და რომელსაც, ცხადია, ყოველთვის ზედაპირის ნორმალის მიმართულება აქვს სათანადო წერტილში.

§ 45. ვექტორის აბსოლუტური წარმოებული და დიფერენციალი

(211) ფორმულა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$D\overline{T}=d\overline{T}-(\overline{K}\cdot d\overline{T})\,\overline{K}. \tag{215}$$

ცხადია, $D\overline{T}$ მოთავსებული იქნება მხებ სიბრტყეში. $D\overline{T}$ წარმოადგენს du, dv დიფერენციალების წრფივ და ერთგვაროვან გამოსახულებას მსგავსად $d\overline{T}$ ვექტორისა, მაგრამ იგი, საზოგადოდ, არ არის $\overline{T}$ ვექტორის სრული დიფერენციალი (რადგან, საზოგადოდ, $\overline{K}\cdot d\overline{T}\neq 0$). $d\overline{T}$ ვექტორი არ არის ზედაპირის დეფორმაციის ინვარიანტი, ე. ი. იგი არ არის შინაგანი თვისების მატარებელი ამრიგად, ჩვეულებრივი სრული დიფერენციალის (d) ოპერაცია შინაგანი გეომეტ-

რიის ოპერაციას არ წარმოადგენს. მაგალითად, მას მხების მგეზავი გამოჰყავს შინაგანი გეომეტრიის სფეროდან. ზემოთ (215) ფორმულით განსაზღვრულ D ოპერაციას კი ელემენტი არ გამოჰყავს შინაგანი გეომეტრიის სფეროდან. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ $\overline{P}$ მოთავსებულია მხებ სიბრტყეში (მაშასადამე, შინაგანი ბუნებისაა, ე. ი. განიზღვრება წირითი ელემენტის კოეფიციენტებით), მაშინ

$$\overline{P}_1 = \overline{P} + D\overline{P}$$

აგრეთვე მოთავსებული იქნება მხებ სიბრტყეში. მართლაც, თანახმად (215) ფორმულისა,

$$K \cdot D\overline{P} = \overline{K} \cdot d\overline{P} - (\overline{K} \cdot d\overline{P})\ \overline{K}^2 = \overline{K} \cdot d\overline{P} - \overline{K} \cdot d\overline{P} = 0.$$

ამრიგად, D ოპერაცია წარმოადგენს შინაგან ოპერაციას. გარდა ამისა, (D) ოპერაციას აქვს ჩვეულებრივი სრული დიფერენციალის, ე. ი. (d) ოპერაციის მსგავსი თვისებები. უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ თუკი $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ მოთავსებულია მხებ სიბრტყეში, მაშინ

$$D(\overline{P} + \overline{Q}) = D\overline{P} + D\overline{Q}.$$

შეთანხმებით მივიღოთ, რომ, თუ $\lambda = \lambda(u, v)$ რაიმე სკალარია, მაშინ

$$D\lambda = d\lambda.$$

ამ შეთანხმების შედეგად გვექნება:

$$D(\lambda\overline{P}) = D\lambda \cdot \overline{P} + \lambda \cdot D\overline{P}.$$

ადვილად მიიღება აგრეთვე ტოლობა:

$$d(\overline{P} \cdot \overline{Q}) = D(\overline{P} \cdot \overline{Q}) = D\overline{P} \cdot \overline{Q} + \overline{P} \cdot D\overline{Q}.$$

ჩამოთვლილ თვისებათა გამო (D) ოპერაციას შინაგანი დიფერენცირების ოპერაცია ეწოდება. მისი გავრცელებული სახელწოდებაა აგრეთვე აბსოლუტური დიფერენცირება. $D\overline{P}$-ს ეწოდება $\overline{P}$ ვექტორის აბსოლუტური დიფერენციალი. იგი (215 ფორმულის თანახმად) მოცემულია შემდეგი ფორმულით:

$$D\overline{P} = d\overline{P} - (\overline{K} \cdot d\overline{P})\ \overline{K}. \tag{216}$$

$\dfrac{D\overline{P}}{ds}$ შეფარდებას $\overline{P}$ ვექტორის აბსოლუტური წარმოებული ეწოდება. იგი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{D\overline{P}}{ds} = \frac{d\overline{P}}{ds} - \left(K \cdot \frac{d\overline{P}}{ds}\right)\overline{K}. \tag{217}$$

§ 46. აბსოლუტური პარალელიზმი

ვთქვათ, ზედაპირზე გამავალი წირის ყოველ წერტილში განსაზღვრულია რაიმე $\overline{P}$ ვექტორი, რომელიც ზედაპირის მხებია (ანუ მხებ სიბრტყეში მდებარეობს). ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს ვექტორები აბსოლუტურად პარალელურია, თუ ზემოთ აღნიშნული წესით წირის სიბრტყეზე განფენის დროს ეს ვექტორები ჩვეულებრივ პარალელურ ვექტორებად გადაიქცევა. პარალელობის ეს

ახალი ცნება ლევი-ჩივიტას მიერ იქნა შემოღებული და მას აბსოლუტური პარალელობა ეწოდება. ხშირად მას აგრეთვე ლევი-ჩივიტას პარალელიზმს უწოდებენ.

როგორც განმარტებიდან ჩანს, პარალელობის ეს ცნება შინაგანი ბუნებისაა, ე. ი. ინვარიანტია ზედაპირის დეფორმაციის. რადგან $\frac{D\overline{P}}{ds}$ ზედაპირის დეფორმაციის ინვარიანტია, ამიტომ წირის სიბრტყეზე განფენის დროს ამ ვექტორს სიბრტყეზე ასეთივე აგებულების ვექტორი შეესაბამება. თუ $\overline{P}$ ვექტორს სიბრტყეზე $\overline{Q}$ ვექტორი ეთანადება, მაშინ $\overline{Q}$ ვექტორისათვის გვექნება:

$$\frac{D\overline{Q}}{ds}=\frac{d\overline{Q}}{ds}-\left(\overline{K_1}\cdot\frac{d\overline{Q}}{ds}\right)\overline{K_1},$$

სადაც $\overline{K_1}$ სიბრტყის ნორმალის მგეზავია. რადგან $\overline{Q}$ ვექტორი ყოველთვის სიბრტყეზეა მოთავსებული, ამიტომ $\frac{d\overline{Q}}{ds}$ აგრეთვე სიბრტყეზე იქნება მოთავსებული, რის გამო იგი $\overline{K_1}$ მგეზავის მართობი იქნება, ანუ

$$\overline{K_1}\cdot\frac{d\overline{Q}}{ds}=0.$$

ამრიგად,

$$\frac{D\overline{Q}}{ds}=\frac{d\overline{Q}}{ds}.$$

თუ $\overline{P}$ ვექტორები აბსოლუტურად პარალელური ვექტორებია, მაშინ $\overline{Q}$ ვექტორები ჩვეულებრივად პარალელური ვექტორები იქნება და ამიტომ $\frac{d\overline{Q}}{ds}=0$ (ვგულისხმობთ, რომ $\overline{P^2}=\overline{Q^2}=\text{const}$) ან, რაც იგივეა,

$$\frac{d\overline{Q}}{ds}=0.$$

ვინაიდან $\frac{D\overline{Q}}{ds}$ ვექტორის სიგრძე დეფორმაციის ინვარიანტია, ამიტომ, თანახმად უკანასკნელი პირობისა, გვექნება:

$$\frac{D\overline{P}}{ds}=0.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ $\overline{P_1}$ მიღებულ იქნეს $\overline{P}$ ვექტორის აბსოლუტურად პარალელური გადაადგილებით, საჭიროა რათა $\overline{P}$ ვექტორის აბსოლუტური წარმოებული ნული იყოს. (217) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\frac{d\overline{P}}{ds}-\left(\overline{K}\cdot\frac{d\overline{P}}{ds}\right)\overline{K}=0. \tag{218}$$

განვიხილოთ წირის მხების მგეზავები და ვნახოთ რა შემთხვევაში (ანუ როგორ წირზე) მოახდენს აბსოლუტურ პარალელურ გადაადგილებას მხების მგე-

ზავი (მაშასადამე, მხები). (218) ტოლობა ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს ($\overline{P}=\overline{T}$):

$$\frac{D\overline{T}}{ds}=\frac{d\overline{T}}{ds}-\left(\overline{K}\cdot\frac{d\overline{T}}{ds}\right)\overline{K}=0.$$

ეს უკანასკნელი კი გეოდეზიური წირის განტოლებაა. ამრიგად, მხების მგეზავი მხოლოდ გეოდეზიური წირის გასწვრივ ახდენს აბსოლუტურ პარალელურ გადაადგილებას, ისე როგორც სიბრტყეზე მხების მგეზავი ჩვეულებრივ პარალელურ გადაადგილებას წრფის გასწვრივ ახდენს. გეოდეზიური წირის ეს უკანასკნელი თვისება ზოგჯერ მისი განმარტების საფუძველს წარმოადგენს.

განვიხილოთ ახლა ორი ვექტორის

$$\lambda=\overline{P}\cdot\overline{Q}$$

სკალარული ნამრავლი, როცა $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორები პარალელურ გადაადგილებას ახდენს, მაშინ

$$d\lambda=D\lambda=D(\overline{P}\cdot\overline{Q})=0,$$

ე. ი. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ამ ვექტორთა აბსოლუტური პარალელური გადაადგილების ინვარიანტია. კერძოდ, პარალელური გადატანის ინვარიანტი იქნება აგრეთვე ვექტორის სიგრძე $\overline{P}^2=\overline{P}\cdot\overline{P}$ და ორ ვექტორს შორის კუთხე.

დავუშვათ ახლა, რომ $\overline{P}$ ვექტორი აბსოლუტურ პარალელურ გადაადგილებას ახდენს, ე. ი. რომ

$$D\overline{P}=0.$$

განვიხილოთ $\lambda\overline{P}$ ვექტორის აბსოლუტური დიფერენციალი

$$D(\lambda P)=D\lambda\cdot\overline{P}+\lambda\cdot D\overline{P}=d\lambda\overline{P}.$$

თუ აღვნიშნავთ $\overline{R}=\lambda\overline{P}$, მივიღებთ:

$$D\overline{R}=d\lg\lambda\cdot\overline{R},$$

ანუ

$$D\overline{R}=\mu\overline{R},\quad(\mu=d\lg\lambda).\tag{219}$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა მიმართულების აბსოლუტური პარალელური გადაადგილების მაჩვენებელია. თუ $\overline{P}$ ვექტორი (რომლის სიგრძე ნებისმიერია) მოცემულია ზედაპირის ყოველ წერტილზე, ე. ი. თუ ეს ვექტორი ფუნქციაა u და v პარამეტრების (ასეთ სიმრავლეს ვექტორთა ველი ეწოდება), მაშინ ჩვეულებრივი ნაწილობითი წარმოებულის მსგავსად შემოდის ნაწილობითი აბსოლუტური წარმოებულების ცნება. მათ ასე აღვნიშნავთ: $D_u\overline{P}$, $D_v\overline{P}$.

ეს სიდიდეები განისაზღვრება შემდეგი პირობით:

$$D\overline{P}=D_u\overline{P}\,du+D_v\overline{P}\,dv.$$

(216) ფორმულის თანახმად, დამოუკიდებელ du, dv დიფერენციალების კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ:

$$D_u\overline{P} = \partial_u\overline{P} - (\overline{K}\cdot\partial_u\overline{P})\,\overline{K},$$
$$D_v\overline{P} = \partial_v\overline{P} - (\overline{K}\cdot\partial_v\overline{P})\,\overline{K}, \tag{220}$$

სადაც $\partial_u\overline{P}$ და $\partial_v\overline{P}$ ჩვეულებრივი ნაწილობითი წარმოებულებია.

§ 47. გაუს-ბონეს ფორმულა

განვიხილოთ ზედაპირის M წერტილზე გამავალი რაიმე ჩაკეტილი წირი და გამოვთვალოთ ამ წირის გასწვრივ მხების აბსოლუტური მობრუნების კუთხე, როდესაც წერტილი აღწერს აღებულ ჩაკეტილ წირს გარკვეული მიმართულებით. გამოვთვალოთ აგრეთვე ჩაკეტილი კონტურით შემოსაზღვრული ზედაპირის ნაწილის სფერული ანასახის ფართობი. რადგან (213 და 160 ფორმულების თანახმად)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho_g},$$

$$\frac{d\omega}{d\Omega} = K,$$

ამიტომ

$$\varphi = \int_c \frac{ds}{\rho_g}, \tag{221}$$

$$\omega = \iint_{(\Omega)} K d\Omega, \tag{222}$$

სადაც φ-ით აღნიშნული გვაქვს მხების აბსოლუტური მობრუნების კუთხე, როდესაც იგი საწყის მდებარეობას უბრუნდება; ამასთანავე ვგულისხმობთ, რომ განსახილველ წირს განკუთრი წერტილები არა აქვს.

თუ ჩაკეტილი წირის წერტილები M წერტილის მეზობელი (უსასრულოდ მახლობელი) წერტილებია, მაშინ ეს წირი, პირველი რიგის სიზუსტით, ბრტყელ წირად განიხილება და მხების სრული მობრუნების კუთხე იქნება 2π (პირველი რიგის სიზუსტით). აღნიშნული უსასრულო ნაწილის შესაბამისი სფერული ანასახის ფართობი კი, ცხადია, უსასრულოდ მცირე იქნება. თუ წირის ყველა წერტილი (ანუ თვით წირი) M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\lim \int_c \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi,$$

$$\lim \iint_{(\Omega)} K d\Omega = 0.$$

განსახილველი წირი და მისი მართობი გეოდეზიური წირი მივიღოთ M წერტილის მრუდწირულ კოორდინატებად; გარკვეულობისათვის (u) წირი იყოს გეოდეზიური წირი, ხოლო (v) წირი—განსახილველი ჩაკეტილი წირი. ამ შემთხვევაში აღებული წირის (ე. ი. (v) წირის) მხების მგზავი იქნება:

$$\overline{T}=\frac{\overline{M}_u}{\sqrt{e}},$$

ხოლო რკალის დიფერენციალი იქნება:

$$ds=\sqrt{e}\,du.$$

გეოდეზიური წირის მხების მგეზავი, რადგან $\overline{M}_u \perp \overline{M}_v$, იქნება $\overline{A}$ ვექტორი, ე. ი.

$$\overline{A}=\frac{\overline{M}_v}{\sqrt{g}}.$$

ჯერ გამოვითვალოთ φ კუთხე, ე. ი. მოვნახოთ

$$\varphi=\int_c \frac{ds}{\rho_g}.$$

რადგან, (208) ფორმულის თანახმად,

$$\frac{1}{\rho_g}=\overline{A}\cdot\frac{d\overline{T}}{ds}=\overline{A}\cdot\overline{T}_u\frac{du}{ds}=\frac{\overline{A}\cdot\overline{T}_u}{\sqrt{e}},$$

ამიტომ

$$\varphi=\int_c(\overline{A}\cdot\overline{T}_u)du.$$

მარცხნივ მდგომი ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქცია v-ს შეიცავს როგორც ჩვეულებრივ პარამეტრს. გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\int_c(\overline{A}\cdot\overline{T}_u)_v du.$$

გავიხსენოთ ტოლობა:

$$\overline{A}\cdot\overline{T}=0.$$

მისი გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\overline{A_u}\cdot\overline{T}=-\overline{A}\cdot\overline{T}_u.$$

ამრიგად,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\int_c(\overline{T}\cdot A_u)_v dn=-\int_c(\overline{T}_v\cdot A_u+\overline{T}\cdot\overline{A}_{uv})du.$$

რადგან $\overline{A}$ გეოდეზიური წირის მხებია, ამიტომ $\overline{A}_v$ პარალელური იქნება ზედაპირის ნორმალის მგეზავის, ე. ი. გვექნება:

$$\overline{T}\cdot\overline{A}_v=0.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება მოგვცემს:

$$\overline{T}_u\cdot\overline{A}_v=-\overline{T}\cdot\overline{A}_{uv}.$$

შევიტანოთ $\overline{T}\cdot\overline{A}_{uv}$-ს ეს მნიშვნელობა ინტეგრალის ქვეშ. მივიღებთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\int_c(\overline{T}_u\cdot\overline{A}_v-\overline{T}_v\cdot\overline{A}_u)du.$$

გამოვითვალოთ ახლა ინტეგრალის ქვეშ მდგომი გამოსახულება.

რადგან $\overline{T_u}$ და $\overline{T_v}$ ვექტორები $\overline{T}$ ვექტორის მართობი ვექტორებია, ამიტომ ისინი $\overline{A}$ და $\overline{K}$ მიმართულებით დაიშლებიან და გვექნება:

$$\overline{T_u}=\alpha\overline{A}+\beta\overline{K},$$
$$\overline{T_v}=\alpha_1\overline{A}+\beta_1\overline{K}.$$

აქედან

$$\beta=\overline{K}\cdot\overline{T_u},\ \beta_1=\overline{K}\cdot\overline{T_v}.$$

რადგან

$$\overline{K}\cdot\overline{T}=0,$$

ამიტომ

$$\beta=\overline{K}\cdot\overline{T_u}=-\overline{T}\cdot\overline{K_u}=-\frac{\overline{M_u}\cdot\overline{K_u}}{\sqrt{e}}=\frac{l}{\sqrt{e}},$$

$$\beta_1=\overline{K}\cdot\overline{T_v}=-\overline{T}\cdot\overline{K_v}=-\frac{\overline{M_u}\cdot\overline{K_v}}{\sqrt{e}}=\frac{m}{\sqrt{e}}.$$

სრულიად ანალოგიურად, $\overline{A_u}$ და $\overline{A_v}$ ვექტორები $\overline{T}$ და $\overline{K}$ ვექტორების მიმართულებით დაიშლება:

$$\overline{A_u}=\gamma\overline{T}+\delta\overline{K},$$
$$\overline{A_v}=\gamma_1\overline{T}+\delta_1\overline{K},$$

სადაც

$$\delta=\overline{K}\cdot\overline{A_u}=-\overline{A}\cdot\overline{K_u}=-\frac{\overline{M_v}\cdot\overline{K_u}}{\sqrt{g}}=\frac{m}{\sqrt{g}},$$

$$\delta_1=\overline{K}\cdot\overline{A_v}=-\overline{A}\cdot\overline{K_v}=-\frac{\overline{M_v}\cdot\overline{K_v}}{\sqrt{g}}=\frac{n}{\sqrt{g}}.$$

$\overline{T_u}$, $\overline{T_v}$, $\overline{A_u}$, $\overline{A_v}$ ვექტორების მნიშვნელობათა ინტეგრალის ქვეშ შეტანა მოგვცემს:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\int\limits_c(\beta\delta_1-\beta_1\delta)\,du=\int\limits_c\frac{ln-m^2}{\sqrt{eg}}du.$$

ახლა მეორე ინტეგრალი გავაწარმოოთ v-თი და წირის შემოვლა ისევე მოვახდინოთ, როგორც წინა შემთხვევაში. მაშინ გვექნება (სადაც მხედველობაში ვღებულობთ: რომ $d\Omega=\sqrt{eg-f^2}\,du\,dv=\sqrt{eg}\,du\,dv$):

$$\frac{\partial\omega}{\partial v}=-\int\limits_c K\sqrt{eg}\,du=-\int\limits_c\frac{ln-m^2}{\sqrt{eg}}du.$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობის შედარება გვაძლევს:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

ე. ი.

$$\varphi+\omega=\text{const}.$$

თუ ახლა (v) წირი M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ, როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული.

$$\lim (\varphi+\omega)=\lim \varphi + \lim \omega = 2\pi$$

და ამრიგად, გვექნება:

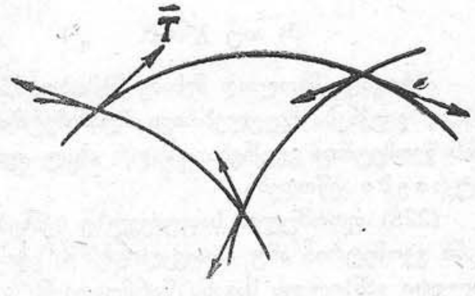
$$\varphi+\omega=2\pi,$$

ანუ

$$\int\limits_{c} \frac{ds}{\rho_g} + \iint\limits_{(\Omega)} K d\Omega = 2\pi. \tag{223}$$

ამ ფორმულას გაუს-ბონეს ფორმულა ეწოდება.

თუ ჩაკეტილი წირი სამი წყვილ-წყვილად ურთიერთთანმკვეთი გეოდეზიური წირის რკალებისაგან შედგება, ე. ი. თუ განსახილველი წირი გეოდეზიური სამკუთხედია, მაშინ მხები სამკუთხედის გვერდების გასწვრივ (როგორც გეოდეზიური წირების გასწვრივ) ნორმალის გარშემო არ მობრუნდება; იგი აბსოლუტურ პარალელურად გადაადგილდება $\left(\frac{1}{\rho g}\right)$. სამკუთხედის კუთხეების წვეროებში კი მხები ნახტომით შეიცვლება და ამ შემთხვევაში მობრუნების სამი შემდეგი კუთხე გვექნება:



ნახ. 56

$$\pi-A,\ \pi-B,\ \pi-C,$$

სადაც A, B, C გეოდეზიური სამკუთხედის შინაგანი კუთხეებია (ნახ. 56). ამრიგად,

$$\int\limits_{c} \frac{ds}{\rho_g} = \varphi = 3\pi-(A+B+C).$$

(227) ფორმულაში ამ მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს,

$$A+B+C-\pi=\iint\limits_{\Omega} K\, d\Omega. \tag{224}$$

აქედან აშკარაა, რომ, თუ $K\neq 0$, მაშინ გეოდეზიური სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა ჯამი π-საგან განსხვავდება. პირიქით, თუ $K=0$, მაშინ

$$A+B+C=\pi,$$

ე. ი. გეოდეზიური სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა ჯამი მხოლოდ განფენად ზედაპირზე არის π.

ბოლოს განვიხილოთ მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირის გეოდეზიური სამკუთხედი, თუ $K=\text{const}$, მაშინ

$$\iint\limits_{\Omega} K d\Omega = K\Omega.$$

(228)-დან მივიღებთ:

$$A+B+C-\pi=K\Omega. \tag{225}$$

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა. მ უ დ მ ი ვ ს ი მ რ უ დ ი ა ნ ზ ე დ ა პ ი რ ზ ე გ ე ო დ ე ზ ი უ რ ი ს ა მ-კ უ თ ხ ე დ ი ს შ ი ნ ა გ ა ნ კ უ თ ხ ე თ ა ჯ ა მ ი ს ა დ ა π-ი ს ს ხ ვ ა ო ბ ა ს ა მ კ უ თ-ხ ე დ ი ს ფ ა რ თ ო ბ ი ს პ რ ო პ ო რ ც ი უ ლ ი ა.

უკანასკნელი ფორმულის თანახმად და K-ს ნიშნის მიხედვით სამი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1) თუ $K>0$, მაშინ $A+B+C>\pi$;

2) თუ $K<0$, „ $A+B+C<\pi$;

3) თუ $K=0$, „ $A+B+C=\pi$.

ამრიგად, მხოლოდ მესამე შემთხვევაში, ე. ი. განფენადი ზედაპირის შემთხვევაში, გვექნება ჩვეულებრივი პლანიმეტრია, პირველ ორ შემთხვევაში კი სხვა სახის გეომეტრია გვექნება. ამ ორ ახალ გეომეტრიას ა რ ა ე ვ კ ლ ი დ უ რ ი გ ე ო მ ე ტ რ ი ე ბ ი ეწოდება.

(225) ფორმულის საფუძველზე იქმნება მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირის შინაგანი გეომეტრია ანუ არაევკლიდური გეომეტრია, რომელიც საზოგადოდ სპეციალური განხილვის საგანს წარმოადგენს.

ეს საკითხები პირველად შეისწავლა ბ ე ლ ტ რ ა მ ი მ. ცოტა უფრო გვიან არაევკლიდური გეომეტრიის მწყობრი თეორია მოგვცა კ ლ ა ი ნ მ ა. ამ მეცნიერების აქსიომატიკური საფუძვლები კი ლ ო ბ ა ჩ ე ვ ს კ ი მ, ბ ო ი ა მ და რ ი მ ა ნ მ ა მოგვცეს.

§ 48. მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირები

მუდმივდადებითსიმრუდიანი ზედაპირის მაგალითს იძლევა სფერო. მისი სიმრუდე მისი რადიუსის კვადრატის შებრუნებული სიდიდეა, ე. ი. $K=\dfrac{1}{R^2}$, სადაც R სფეროს რადიუსია. მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირის მაგალითს იძლევა წარმოსახვითრადიუსიანი სფერო

$$x^2+y^2+z^2=(iR)^2. \tag{226}$$

ამ უკანასკნელის სიმრუდე გამოითვლება გაუსის ფორმულის მიხედვით. ისე, როგორც სფეროს შემთხვევაში, აქაც მივიღებთ ამ ზედაპირის სიმრუდისათვის შემდეგ მნიშვნელობას (რაც ზემოთაც იყო აღნიშნული)

$$K=\frac{1}{(iR)^2}=-\frac{1}{R^2}.$$

ამრიგად, წარმოსახვითრადიუსიანი სფერო მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირია. წარმოსახვითრადიუსიანი სფერო, ცხადია, წარმოსახვითი ზედაპირია. ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ, რომ არსებობს მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი ზედაპირებიც. ვეძებოთ ასეთი ზედაპირი ბრუნვით ზედაპირთა შორის. ბრუნვითი ზედაპირის შემქმნელი წირი oxz სიბრტყეში ავიღოთ და ვაბრუნოთ იგი z ღერ-

ის გარშემო. ასე მიღებული ზედაპირის სრული სიმრუდე, როგორც ვიცით (იხ. § 27, მაგალითი), შემდეგნაირად გამოისახება:

$$K=\frac{f'(x)\,f''(x)}{x[1+f'^2(x)]^2},$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ბრუნვითი ზედაპირი მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირი იყოს, საჭიროა მისი სიმრუდის ზემოთ დაწერილი გამოსახულება ნების-იერი x-სათვის უარყოფით მუდმივ რიცხვს, მაგალითად -1-ს, გაუტოლდეს. ამ-გვარად, საჭიროა, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{f'(x)\,f''(x)}{x[1+f'^2(x)]^2}=-1.$$

აქედან

$$\frac{f'(x)\,f''(x)}{[1+f'^2(x)]^2}=-x.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განტოლება შემდეგი სახით შეიძლება წარმო-ვიდგინოთ:

$$\left(\frac{-1}{1+f'^2(x)}\right)'=(-x^2)',$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{1+f'^2(x)}=x^2+c,$$

სადაც c საინტეგრაციო მუდმივია. უკანასკნელი განტოლებიდან $f'(x)$ ადვილად ამოიხსნება. გვექნება:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2+c}-1}.$$

აქედან კი ინტეგრებით მივიღებთ საძიებელ $f(x)$ ფუნქციას:

$$f(x)=\int\sqrt{\frac{1}{x^2+c}-1}\,dx+c_1,$$

სადაც c_1 მეორე საინტეგრაციო მუდმივია.

რადგან ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებული გამოსახულება უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრალი კი ყოველთვის არსებობს, ამი-ტომ არსებობს $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ზემოაღნიშნულ პირობას აკმაყოფილებს, ე. ი. რომელიც მუდმივსიმრუდიან ზედაპირს გვაძლევს. ამრიგად,

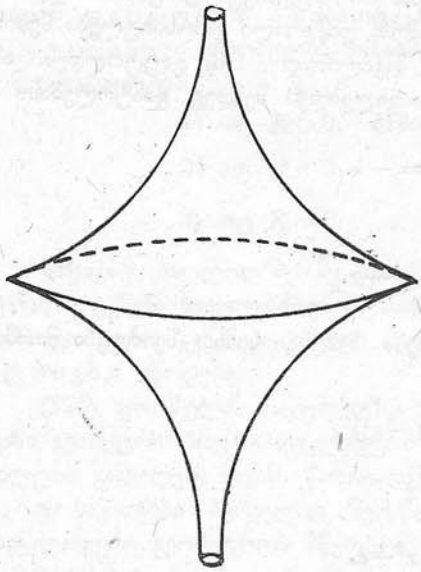
$$z=\int\sqrt{\frac{1}{x^2+c}-1}\,dx+c_1, \tag{227}$$

წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირი მუდმივ უარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირია. ამ ზედაპირის განტოლება იქნება:

$$z=\int\sqrt{\frac{1}{r^2+c}-1}\,dr+c_1, \tag{228}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

ზემოაღნიშნულ მბრუნავ წირს, რომელიც მუდმივუარყოფითსიმრუდიან ზედაპირს იძლევა, ტ რ ა ქ ტ რ ი ს ი ეწოდება, ხოლო თვით მიღებულ ბრუნვით უარყოფითსიმრუდიან ნამდვილ ზედაპირს კი — ფ ს ე ვ დ ო ს ფ ე რ ო (ნახ. 57). (228) განტოლებიდან აშკარად ჩანს (მასში შედის ნებისმიერი მუდმივები c, c_1), რომ ერთიმეორისაგან განსხვავებული მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ნამდვილი ბრუნვითი ზედაპირები უამრავია.



ნახ. 57

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირები, რომელთაც ერთი და იგივე სიმრუდე აქვთ. ერთიმეორეზე იზომეტრულად გადაისახებიან. ამიტომ მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირები, და მათ შორის ფსევდოსფეროც, იზომეტრულად გადაისახება წარმოსახვითრადიუსიან სფეროზე. ამრიგად, წარმოსახვითრადიუსიანი სფეროს წირითი ელემენტი იქნება აგრეთვე ნებისმიერ მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირის წირითი ელემენტიც. წარმოსახვითრადიუსიანი სფეროს წირითი ელემენტი კი ნამდვილი სფეროს წირითი ელემენტიდან შეგვიძლია მივიღოთ მასში R-ის ნაცვლად iR-ის ჩასმით. ჩვენ III თავის § 36-ში მოყვანილი გვქონდა სფეროს პარამეტრული განტოლება

$$x=\frac{Ru}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$y=\frac{Rv}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$z=\frac{R}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

აქედან

$$dx=R\frac{(1+v^2)du-uvdv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}},$$

$$dy=R\;\frac{(1+u^2)dv-uvdu}{(1+u^2+v^2)^{3/2}},$$

$$dz=R\;\frac{udu+vdv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}.$$

შევიტანოთ dx, dy, dz დიფერენციალების ეს უკანასკნელი მნიშვნელობანი წირითი ელემენტის ცნობილ ფორმულაში

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ალებრული გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ:

$$ds^2 = R^2 \frac{(1+v^2)du^2 - 2uvdudv + (1+u^2)dv^2}{(1+u^2+v^2)^2}. \tag{229}$$

ასეთია სფეროს წირითი ელემენტის გამოსახულება იმ შემთხვევაში, როცა საკოორდინატო წირებად მიღებულია სფეროს მერიდიანების ორი სისტემა (ე. ი. სფეროზე განხილულია ორ წყვილ დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილებზე გამავალი დიდი წრეხაზების სისტემები). ჩვენ უკვე აღნიშნული გვქონდა (იმავე III თავის 36-ე პარაგრაფში), რომ სფეროს გეოდეზიური წირი, ე. ი. მისი დიდი წრეწირი მიიღება მრუდწირული კოორდინატების ასეთი ცვლით:

$$v = at + b,$$

$$v = a_1 t + b_1,$$

სადაც a, b, a_1, b_1 ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო t მდინარე პარამეტრია. t პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ:

$$Au + Bv + C = 0. \tag{230}$$

ამრიგად, სფეროს გეოდეზიური წირი განისაზღვრება u და v პარამეტრებს შორის წრფივი დამოკიდებულების დამყარებით.

ახლა, თუ სფეროს პარამეტრულ განტოლებაში u, v, R-ის ნაცვლად შევიტანთ $-iu$, $-iv$, iR სიდიდეებს, მაშინ მივიღებთ წარმოსახვითრადიუსიან სფეროს განტოლებას პარამეტრული სახით:

$$x = \frac{Ru}{\sqrt{1-u^2-v^2}},$$

$$y = \frac{Rv}{\sqrt{1-u^2-v^2}},$$

$$z = \frac{iR}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

აქედან, ისეთივე გამოთვლებით, როგორიც ჩატარებულ იქნა ნამდვილრადიუსიანი სფეროს წირითი ელემენტის მისაღებად, მივიღებთ წარმოსახვითრადიუსიანი სფეროს წირით ელემენტს:

$$ds^2 = R^2 \frac{(1-v^2)du^2 + 2uvdudv + (1-u^2)dv^2}{(1-u^2-v^2)^2}. \tag{231}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა, ცხადია, შეიძლება მიღებულ იქნეს პირდაპირ სფეროს წირითი ელემენტის ფორმულიდანაც, თუ მასში u, v, R-ის ნაცვლად შევიტანთ $-iu$, $-iv$, iR სიდიდეებს.

სფეროს გეოდეზიური წირის განტოლება, მასში u, v-ს ნაცვლად iu, iv მნიშვნელობათა ჩასმით, წარმოსახვითრადიუსიანი სფეროს გეოდეზიური წირის შემდეგ განტოლებას მოგვცემს:

$$iAu + iBv + C = 0.$$

ამიტომ, თუ iA და iB სიდიდეებს A_1 და B_1-ით აღვნიშნავთ, მაშინ მივიღებთ:

$$A_1u+B_1v+C=0.$$

ამრიგად, წარმოსახვითრადიუსიან სფეროზეც, პარამეტრებს შორის წრფივი დამოკიდებულება გეოდეზიურ წირს ახასიათებს. რადგან ყველა დადებითსიმრუდიანი ზედაპირები იზომეტრულად გადაისახება სფეროზე, ხოლო უარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირები კი—წარმოსახვითრადიუსიან სფეროზე, ამიტომ შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა: მ უ დ მ ი ვ ს ი მ რ უ დ ი ა ნ ზ ე დ ა პ ი რ ზ ე, ზ ე მ ო ა ღ ნ ი შ ნ უ ლ ი წ ე ს ი თ შ ე რ ჩ ე უ ლ მ რ უ დ წ ი რ უ ლ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ შ ი, გ ე ო დ ე ზ ი უ რ ი წ ი რ ი წ რ ფ ი ვ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი თ წ ა რ მ ო გ ვ ი დ გ ე ბ ა.

როგორც აღნიშნული გვქონდა III თავის § 36-ში, ამ თვისების გამო, ზედაპირის ისეთი გადასახვა სიბრტყეზე, რომელიც

$$X=u,$$

$$Y=v$$

ფორმულებითაა მოცემული, გეოდეზიურ გადასახვას წარმოადგენს. შემდგომ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ მხოლოდ მუდმივსიმრუდიან ზედაპირებს აქვთ ეს თვისება, ე. ი. მხოლოდ მუდმივსიმრუდიან ზედაპირებზე შეიძლება შეირჩეს ისეთი მრუდწირული კოორდინატები, რომლებშიც გეოდეზიური წირი წრფივი განტოლებით წარმოგვიდგება. ასეთ მრუდწირულ კოორდინატებს მუდმივსიმრუდიან ზედაპირზე ბ ე ლ ტ რ ა მ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ეწოდება.

§ 49. ლობაჩევსკის გეომეტრიის ინტერპრეტაცია მუდმივუარყოფითსიმრუდიან ზედაპირზე

ეს პარაგრაფი რამდენადმე განსხვავდება დანარჩენი პარაგრაფებისაგან: მასში განიხილება არა უშუალოდ ზედაპირთა თეორიის საკითხი, არამედ გეომეტრიის დაფუძნების ერთი საკითხი, მაგრამ, სამაგიეროდ, აქ ნაჩვენებია ზედაპირთა თეორიის როლი გეომეტრიის დაფუძნების საქმეში. ამ პარაგრაფის გარკვევა რომ გაადვილდეს, მოვიყვანთ ორიოდე ცნობას აღნიშნული საკითხის განვითარების ისტორიიდან.

გეომეტრიული საკითხების პირველი სისტემატური დალაგება, ე. ი. გეომეტრიის როგორც მეცნიერების ჩამოყალიბება, ჩვენამდე მოღწეული ცნობებით, ბერძენმა მეცნიერმა ევკლიდემ შეასრულა IV—III საუკუნეებში ჩვენ წელთაღრიცხვამდე. გეომეტრიის ამ პირველ წიგნს ეწოდება „საწყისები“. ევკლიდე თავის „საწყისებს“ ძირითად გეომეტრიულ ცნებათა განმარტებებიდან იწყებს. ეს განმარტებები არაა უნაკლო. მაგრამ ეს ხელს არ უშლის ევკლიდეს გეომეტრიის აგებაში, რადგან ფაქტიურად იგი ამ განმარტებებით არ სარგებლობს. ევკლიდე ემყარება როგორც ზოგად მათემატიკური ხასიათის, ისე, კერძოდ, გეომეტრიული ხასიათის დაშვებებს ანუ აქსიომებს. ამ უკანასკნელთ იგი პოსტულატებს უწოდებს. ეს პოსტულატები შემდეგია:

1. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ო რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი შ ე ი ძ ლ ე ბ ა შ ე ე რ თ ე ბ უ ლ ი ქ ნ ე ს წ რ ფ ი თ და, ა მ ა ს თ ა ნ ა ვ ე, ე ს წ რ ფ ე ა რ ი ს ე რ თ ა დ ე რ თ ი ა ს ე თ ი წ რ ფ ე;

2. წრფის მონაკვეთი შეგვიძლია განვაგრძოთ უსასრულოდ ორივე მხარეს იმავე წრფეზე, რომელზედაც ეს მონაკვეთი მდებარეობს;

3. ნებისმიერი წერტილიდან სიბრტყეზე შეგვიძლია შემოვხაზოთ ნებისმიერრადიუსიანი წრეწირი;

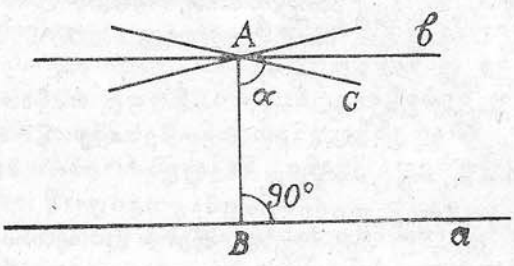
4. ყველა მართი კუთხე თანასწორია;

5. სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ორი წრფე თანაიკვეთება იმ მხარეზე, რომელ მხარეზეც მათგან მესამე წრფესთან შედგენილ შინაგან კუთხეთა ჯამი ნაკლებია ორ მართ კუთხეზე.

ევკლიდეს წიგნის ნაკლი ისიცაა, რომ მისი პოსტულატების (და აქსიომების) სია არ არის სრული: გარდა ჩამოთვლილი პოსტულატებისა, ევკლიდე ფაქტიურად სარგებლობს კიდევ სხვა პოსტულატებითაც, მაგრამ იგი მათ არ აყალიბებს. ასეთია, მაგალითად, არქიმედის პოსტულატი, რომელიც აუცილებელია მონაკვეთთა გაზომვისათვის მასშტაბის საშუალებით. არქიმედის პოსტულატი ასე ყალიბდება: ნებისმიერი A და B სიდიდეებისათვის, რომელთაგანაც, ვთქვათ, A ნაკლებია B-ზე, არსებობს ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომ nA მეტია B-ზე.

ევკლიდეს პირველი პოსტულატიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ ორ წრფეს არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი საერთო წერტილი. მართლაც, ორი საერთო წერტილი რომ ჰქონოდა ორ წრფეს ერთიმეორესთან, მაშინ გამოვიდოდა, რომ ამ ორ საერთო წერტილზე ორი წრფე გადის, რაც ეწინააღმდეგება პირველ პოსტულატს. პირველი და მეორე პოსტულატის საფუძველზე ადვილად მტკიცდება, რომ არსებობს არათანამკვეთი წრფეები. მართლაც, ავიღოთ a წრფე და მის გარეშე A წერტილი. A წერტილიდან დავუშვათ AB მართობი a წრფეზე. შემდეგ A წერტილზე გავატაროთ AB წრფის მართობი b წრფე (სხვანაირად რომ ვთქვათ, განვიხილოთ საერთო მართობის მქონე ორი a და b წრფე). a და b წრფეები არ თანაიკვეთება, რადგან თუ დავუშვებთ, რომ ეს წრფეები თანაიკვეთება მარჯვნივ, მაშინ მათი AB მართობზე გადმოკეცით მარჯვენა მხარეზე მოთავსებული a და b წრფეების ნაწილები დაემთხვეოდა მარცხენა მხარეზე მოთავსებულ ნაწილებს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თანაკვეთას ადგილი უნდა ჰქონოდა მარცხენა მხარეზეც, ე. ი. a და b წრფეებს უნდა ჰქონოდა ორი საერთო წერტილი, რაც პირველ პოსტულატს ეწინააღმდეგება (ნახ. 58). ამრიგად, საერთომართობიანი ორი წრფე არ თანაიკვეთება. მეხუთე პოსტულატის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება, რომ მოცემული წრფის გარეშე მდებარე წერტილზე მხოლოდ ერთი მოცემული წრფის არათანამკვეთი წრფე გაივლის. მართლაც, გარდა AB წრფის მართობისა, ე. ი. b წრფისა, A წერტილზე გამავალი ყოველი c წრფე AB წრფესთან ადგენს მახვილ კუთხეს (ან მარცხენა მხარეზე ან მარჯვენა მხარეზე). ამიტომ a და c წრფეები აკმაყოფილებს ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატის პირობას: მათგან AB წრფესთან შედგენილ შინაგან კუთხეთა $90^\circ+\alpha$ ჯამი ნაკლებია ორ მართ კუთხეზე (რადგან α მახვილია, ე. ი. $\alpha<90^\circ$). ამის გამო, a და c წრფეები თანაიკვეთება. მაშასადამე, b წრფე არის A წერტილზე გამავალი ერთადერთი a წრფის არათანამკვეთი წრფე. მას ეწოდება a წრფის A წერტილზე გამავალი პარალელური წრფე. აქვე აღვნიშნავთ, რომ, მეორე პოსტულატის თანახმად, პარალელური წრფეები შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც უსასრულოდ შორეულ წერტილ-

ში თანამკვეთი წრფეები. ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას: *წრფის გარეშე წერტილიდან შეიძლება გავატაროთ ერთი და მხოლოდ ერთი აღებული წრფის არათანამკვეთი წრფე.*



ნახ. 58

არათანამკვეთის ერთადერთობა ჩვენ გამოვიყვანეთ მეხუთე პოსტულატის გამოყენებით. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ეს ფაქტი, არათანამკვეთის ერთადერთობა, მეხუთე პოსტულატის ეკვივალენტურია. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ წრფის გარეშე მდებარე A წერტილზე ერთადერთი ამ წრფის არათანამკვეთი b წრფე გადის, მაშინ ყველა დანარჩენი წრფე, რომელიც მახვილ კუთხეს ადგენს AB წრფესთან მარჯვნივ ან მარცხნივ (და, მაშასადამე, აკმაყოფილებს ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატის პირობას) a წრფესთან უნდა გადაიკვეთოს (არათანამკვეთის ერთადერთობის ძალით). გამოთქმული აზრი ამით დამტკიცებულია. ამის გამო, ხშირად, მეხუთე პოსტულატს ზემოაღნიშნული დებულების სახით გამოთქვამენ და მას *პარალელობის პოსტულატს* უწოდებენ. გარდა ამისა, მეხუთე პოსტულატის ეკვივალენტურია დებულებები სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა ჯამის მუდმივობის შესახებ, სამი არაკოლინეარული წერტილით წრეწირის განსაზღვრულობის შესახებ და სხვა. ჩვენ მათზე აქ არ შევჩერდებით.

ევკლიდეს შემდგომი მათემატიკოსები ბუნებრივად თვლიდნენ ევკლიდეს აქსიომებსა და პირველ ოთხ პოსტულატს, მეხუთის შესახებ კი ეჭვს გამოთქვამდნენ; სახელდობრ, ერთნი ფიქრობდნენ, რომ მეხუთე პოსტულატი შეიძლება შეცვლილ იქნეს უფრო მარტივი მოთხოვნით, ხოლო მეორენი კი ფიქრობდნენ, რომ მეხუთე პოსტულატი შეიძლება გამოყვანილ იქნეს როგორც შედეგი დანარჩენი პოსტულატებისა, ე. ი. ფიქრობდნენ, რომ მეხუთე პოსტულატი სინამდვილეში პოსტულატი არ არის, იგი არ არის დამოუკიდებელი დებულება, იგი შეიძლება, როგორც თეორემა ისე დამტკიცდეს დანარჩენ პოსტულატებსა და აქსიომებზე დაყრდნობით. ამ მიმართულებით უამრავი შრომა იქნა გაწეული, მაგრამ 2000 წლის განმავლობაში პრობლემის მთლიანი გადაჭრა ვერ მოხერხდა, მხოლოდ მე-19 საუკუნეში მოხდა ამ პრობლემის მთლიანი გადაწყვეტა. პირველი არსებითი და სისტემატური შედეგები ამ მიმართულებით მიღებული და გამოქვეყნებული იყო რუსი მეცნიერის ნ. ი. *ლობაჩევსკის* მიერ. ანალოგიური შედეგები დამოუკიდებლად მიიღო აგრეთვე უნგრელმა მეცნიერმა ი. *ბოიამ*.

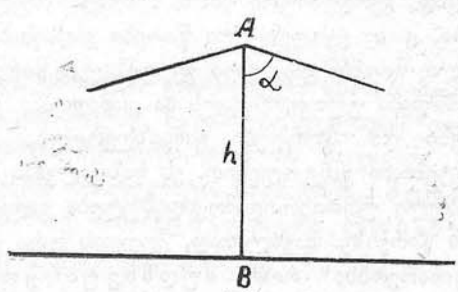
ლობაჩევსკი განიხილავს ევკლიდეს პირველ ოთხ პოსტულატს და მათ უერთებს მეხუთე პოსტულატის საწინააღმდეგო პოსტულატს შემდეგი სახით: *მოცემული წრფის გარეშე მდებარე წერტილზე შეიძლება გავატაროთ ორი მაინც ამ წრფის არათანამკვეთი წრფე.* ადვილად მტკიცდება, რომ ამ შემთხვევაში იარსებებს უძრავი არათანამკვეთი წრფე. მოცემული წრფის თანამკვეთ და არათანამკვეთ წრფეთა ოჯახების გამყოფ წრფეს ლობაჩევსკი მოცემული წრფის *პარალელურ* წრფეს უწოდებს. ასეთი პარალელური იარსებებს ორი: წრფიდან მარჯვნივ და მარცხნივ (ნახ. 59). პარალელური, რო-

გორც საზღვარი მოცემული წრფის გადამკვეთ წრფეთა და არაგადამკვეთ წრფეთა შორის, მოცემულ წრფესთან არ თანაიკვეთება, მართლაც, თანამკვეთ წრფეთა შორის არ არსებობს უკიდურესი თანამკვეთი წრფე, რადგან არ არსებობს უკიდურესი (ე. ი. წრფის ყველა წერტილის მარჯვნივ ან მარცხნივ მდებარე) წერტილი წრფეზე. იმ α კუთხეს, რომელსაც პარალელური ადგენს მოცემული წრფის AB მართობთან, პ ა რ ა ლ ე ლ ო ბ ი ს კ უ თ ხ ე ეწოდება. დაშვების თანახმად, α კუთხე მახვილია და იგი ფუნქციაა AB მართობის h სიგრძისა. ლობაჩევსკიმ წარმოადგინა ეს ფუნქცია ანუ პარალელობის კუთხე შემდეგი ფორმულით (იხ. ქვემოთ, გვ. 186):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = e^{-\frac{h}{k}},$$

სადაც k ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო e— ნეპერის რიცხვი.

ლობაჩევსკიმ პირველმა გამოთქვა გაბედულად აზრი ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატის დანარჩენ პოსტულატებისაგან დამოუკიდებლობის შესახებ. მან პირველმა (ბ.იაისთან ერთად) აღიარა შესაძლებლობა ისეთი გეომეტრიული სისტემისა, რომელშიც შევიდოდა ევკლიდეს პირველი ოთხი პოსტულატი და აგრეთვე მეხუთე პოსტულატის საწინააღმდეგო პოსტულატი და ააგო კიდეც ასეთი გეომეტრია. ამ ახალ გეომეტრიულ სისტემას ლობაჩევსკიმ უწოდა წ ა რ მ ო დ გ ე ნ ი თ ი გ ე ო მ ე ტ რ ი ა. ამჟამად ამ გეომეტრიულ სისტემას ლობაჩევსკის გეომეტრია (ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი გ ე ო მ ე ტ რ ი ა) ეწოდება.



ნახ. 59

ლობაჩევსკის გეომეტრიის შესწავლა-დაფუძნება გაგრძელდა მთელი მეცხრამეტე საუკუნის განმავლობაში. პირველად მოხდენილი იყო ლობაჩევსკის გეომეტრიის ინტერპრეტაცია (განხორციელება, წარმოდგენა, ახსნა-განმარტება) თვით ევკლიდეს გეომეტრიაში, სახელდობრ, ლობაჩევსკის გეომეტრია წარმოდგენილ და განმარტებულ იქნა მუდმივუარყოფითსიმრუდიან ზედაპირზე, კერძოდ ფსევდოსფეროზე. ეს ინტერპრეტაცია ბ ე ლ ტ რ ა მ ი ს ეკუთვნის. ბელტრამი განიხილავს მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირის წირით ელემენტს შემდეგი სახით:

$$ds^2 = R^2\,\frac{(1-v^2)du^2 + 2uvdudv + (1+u^2)dv^2}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

ამ კვადრატული ფორმა რომ დადებითი იყოს, საჭიროა ფორმის დისკრიმინანტი იყოს დადებითი, ე. ი.

$$1 - u^2 - v^2 > 0,$$

საიდანაც

$$u^2 + v^2 < 1,$$

შემდგომ ბელტრამი ახდენს ზედაპირის გადასახვას სიბრტყეზე

$$X = u,$$
$$Y = v$$

ფუნქციათა საშუალებით. თანახმად წინა უტოლობისა, X და Y კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს

$$X^2 + Y^2 < 1$$

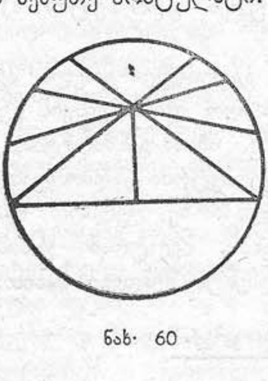
პირობა. ამრიგად, ზედაპირი გადაისახება კოორდინატთა სათავის ირგვლივ 1 რადიუსით შემოწერილი წრეწირის შიგნით. როგორც ზემოთაც იყო აღნიშნული, ზედაპირის გეოდეზიური წირები გამოისახება

$$Au + Bv + C = 0$$

განტოლებით. თუ აქ u და v პარამეტრებს შევცვლით X და Y-ით, მივიღებთ:

$$AX + BY + C = 0.$$

ამრიგად, გეოდეზიური წირი ზემოაღნიშნული წრეწირის შიგნით წრფეზე გადაისახება, ე. ი. გეოდეზიური წირები გადაისახება წრეწირის ქორდებში. ამავე დროს ადვილი შესამჩნევია, რომ გეოდეზიურ წირებსა და წრეწირის ქორდებს შორის დამყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა; ერთიმეორის შესაბამისი გეოდეზიური წირები და ქორდები განსაზღვრულია ერთი და იმავე A, B, C კოეფიციენტებიანი განტოლებით. ეს საშუალებას გვაძლევს წრეწირის ქორდებს შორის არსებული ურთიერთდამოკიდებულება გადავიტანოთ სათანადო ზედაპირის გეოდეზიურ წირებზე. მაგალითად, ქორდის ორი წერტილით განსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს, რომ **მუდმივუარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირის გეოდეზიური წირი განისაზღვრება მისი ორი წერტილით.** მეორე მხრივ, ადვილი შესამჩნევია, რომ წრეწირის ქორდებზე არ ვრცელდება ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატი. მართლაც, ქორდის გარეშე წერტილიდან შეგვიძლია გავატაროთ უამრავი აღებული ქორდის როგორც თანამკვეთი, ისე არათანამკვეთი ქორდა. ამ წერტილზე გამავალი ის ორი ქორდა, რომლებიც გადიან აღებული ქორდისა და წრეწირის თანაკვეთის წერტილებზე, სასაზღვრო ქორდებს წარმოადგენენ (ნახ. 60); ისინი არ ეკუთვნიან აღებული ქორდის თანამკვეთ ქორდათა რიცხვს, რადგან წრეწირის წერტილებისათვის $X^2 + Y^2 = 1$ ტოლობა გვაქვს, და ამიტომ აღებულ წრეში თვითონ წრეწირის წერტილები საზოგადოდ არ განიხილება. ამ წრეწირს ეწოდება **აბსოლუტი**. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ აბსოლუტის წერტილებს ზედაპირის უსასრულოდ შორეული წერტილები შეესაბამება. ამით დამტკიცდება ისიც, რომ გეოდეზიური წირების სიგრძეები უსასრულოდ დიდია, ე. ი. რომ გეოდეზიური წირებისათვის ხორციელდება ევკლიდეს მეორე პოსტულატი. მართლაც, გამოვითვალოთ გეოდეზიური წირის სიგრძე. როგორც ვიცით, გეოდეზიური წირის განტოლებაა



ნახ. 60

$$Au + Bv + C = 0.$$

კოორდინატთა სისტემის მოძრაობით ჩვენ შეგვიძლია ამ განტოლებას მივცეთ $v=0$ სახე. შევიტანოთ წირითი ელემენტის ფორმულაში $v=0$; გვექნება:

$$ds^2=R^2\frac{du^2}{(1-u^2)^2},$$

აქედან

$$ds=R\frac{du}{1-u^2}.$$

მოვახდინოთ ინტეგრაცია $(0, v)$ შუალედში; მივიღებთ:

$$s=\frac{R}{2}\lg\frac{1+u}{1-v}. \tag{232}$$

რადგან $v=0$, ამიტომ წრეწირის წერტილისათვის გვექნება:

$$u^2+0^2=1,$$

ე. ი.

$$u=\pm 1.$$

ორივე ამ მნიშვნელობისათვის $s=\infty$ და, ამრიგად, გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ განსახილავ ზედაპირზე ევკლიდეს დანარჩენი პოსტულატებიც ხორციელდება, გარდა მეხუთისა, რომლის ნაცვლად, როგორც ვნახეთ, ხორციელდება ლობაჩევსკის პოსტულატი. მაშასადამე, მ უ დ მ ი ვ-უ ა რ ყ ო ფ ი თ ს ი მ რ უ დ ი ა ნ ზ ე დ ა პ ი რ ზ ე ხ ო რ ც ი ე ლ დ ე ბ ა ლ ო ბ ა ჩ ე ვ ს-კ ი ს ა ქ ს ი ო მ ე ბ ი დ ა, მ ა შ ა ს ა დ ა მ ე, ლ ო ბ ა ჩ ე ვ ს კ ი ს გ ე ო მ ე ტ რ ი ა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: მუდმივუარყოფითსიმრუდიან ზედაპირზე ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატი რომ არ ხორციელდება ეს იქიდანაც ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, გეოდეზიური სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა ჯამი ნაკლებია ორ მართკუთხეზე (იხ. § 45).

ახლა გამოვითვალოთ პარალელობის კუთხე. ჩვენ გვაქვს ზედაპირის M წერტილზე გავლებულ ორ წირს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$\cos\varphi=\frac{edu\delta u+f(du\delta v+dv\delta u)+gdv\delta v}{\sqrt{edu^2+2fdudv+gdv^2}\sqrt{e\delta u^2+2f\delta u\delta v+g\delta v^2}},$$

სადაც $\frac{dv}{du}$ და $\frac{\delta v}{\delta u}$ განსაზღვრავს განსახილავი წირების მიმართულებებს M წერტილში. თუ მოცემულ გეოდეზიურ წირად განვიხილავთ $v=0$ წირს, ხოლო მის გარეშე A წერტილად—$(0, a)$ წერტილს, მაშინ მოცემული გეოდეზიური წირის AB მართობი განიზღვრება $u=0$ განტოლებით. მართლაც, ეს უკანასკნელი გეოდეზიური წირი გადის $(0, a)$ წერტილზე და იმავე დროს მართობია მოცემული გეოდეზიური წირის, რადგან $(0, 0)$ წერტილზე (ე ი. მოცემულ M წერტილზე) წირითი ელემენტის შუა კოეფიციენტი f ნულია;

$$f=\left[\frac{uv}{(1-u^2-v^2)^2}\right]_{0,0}=0.$$

მოცემული გეოდეზიური წირის პარალელური და $(0, a)$ წერტილზე გამავალი გეოდეზიური წირი თანაიკვეთება აღებულ გეოდეზიურ წირთან უსასრულოდ შორეულ წერტილში, რომელიც პარამეტრების 1,0 მნიშვნელობებით განიზღვრება.

ეს იქნება ზედაპირის (1,0) წერტილი. ჩვენ ვიცით, რომ ბელტრამის კოორდინატებში ნებისმიერი გეოდეზიური წირის განტოლება წრფივია:

$$Au+Bv+C=0.$$

იმისათვის, რომ ეს წირი (0, a) წერტილზე გადიოდეს და მოცემული წირის პარალელური იყოს, საჭიროა უკანასკნელი განტოლება დააკმაყოფილოს (0, a) და (1, 0) წერტილებმა, ე. ი. შესრულდეს ტოლობები:

$$A\cdot 0+B\cdot a+C=0,$$
$$A\cdot 1+B\cdot 0+C=0.$$

განვიხილოთ ეს ორი განტოლება წინა განტოლებასთან ერთად და გამოვრიცხოთ A, B, C, კოეფიციენტები. მივიღებთ:

$$\frac{u}{1}+\frac{v}{a}=1.$$

შენიშვნა: ეს განტოლება შესაძლოა სხვა გზითაც მივვიღო, სახელდობრ, გავვიხილა პარალელური გეოდეზიური წირის შესაბამი ქორდა აბსოლუტში. ამ ქორდის განტოლება, როგორც (0, a) და (1, 0) წერტილებზე გამავალი წრფისა, ასე დაიწერება:

$$\frac{X}{1}+\frac{Y}{a}=1.$$

თუ აქ ჩავსვამთ $X=u$, $Y=v$, სწორედ წინა განტოლებას მივიღებთ.

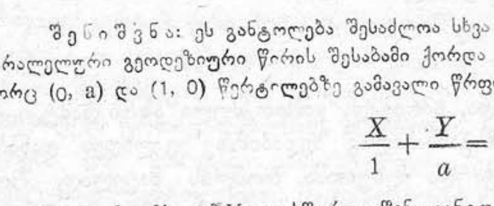
წინა განტოლებიდან ამოვხსნათ v. გვექნება:

$$v=-au+a.$$

მივიღებთ, რომ $\dfrac{dv}{du}$ განსაზღვრავს AB მართობის მიმართულებას, ხოლო $\dfrac{\delta v}{\delta u}$, განსაზღვრავს პარალელურის მიმართულებას (0, a) წერტილში. რადგან AB მართობის განტოლებას წარმოადგენს $u=0$ განტოლება, ამიტომ გვექნება: $du=0$. ანალოგიურად, რადგან პარალელურის განტოლებას წარმოადგენს

$$v=-au+a$$

განტოლება, ამიტომ $\delta v=-a\delta u$. შევიტანოთ $\cos\varphi$-ის გამოსახულებაში შემდეგი მნიშვნელობები:



ნახ. 61

$$u=0,\quad v=a,$$

$$du=0,\quad \delta v=-a\delta u.$$

მცირე გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ (ნაცვლად φ-ისა დავწეროთ პარალელობის კუთხე α) (ნახ. 61):

$$\cos\alpha=\pm a.$$

თანახმად გეოდეზიური წირის რკალის (232) ფორმულისა, h-ისათვის გვექნება:

$$h=\frac{R}{2}\lg\frac{1+a}{1-a}.$$

შევიტანოთ აქ a-ს მნიშვნელობა წინა ფორმულიდან (ოღონდ წინასწარ შევნიშნოთ, რომ რადგან $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ამიტომ $0<a<1$; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წინა ფორმულაში ავიღოთ ნიშანი +), გვექნება:

$$h=\frac{R}{2}\lg\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=R\lg\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha.$$

აქედან მივიღებთ ლობაჩევსკის გეომეტრიის ცნობილ ფორმულას (იხ. ზემოთ, გვ. 182):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=e^{-\frac{h}{k}}.$$

§ 50. ჰიპერბოლური გეომეტრიის ინტერპრეტაციის შემდგომი გაღრმავება. ცნება ელიფსური გეომეტრიის შესახებ

მუდმივუარყოფითსიმრუდიან ზედაპირზე მანძილის (236) ფორმულაში ლოგარითმის ნიშნის შიგნით მდგომი გამოსახულება

$$\frac{1+u}{1-u}$$

შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც $v=0$ წრფეზე მდებარე

$$M(0,0),\ N(u,0),\ A(1,0),\ B(-1,0)$$

წერტილების ანჰარმონიული ფარდობა, მართლაც,

$$(MN\ AB)=(0,u,1,-1)=\frac{1+u}{1-u}.$$

ამრიგად,

$$s=\frac{R}{2}\lg(MN\ AB),$$

სადაც A და B წერტილები, ცხადია, წარმოადგენს MN წრფის თანაკვეთის წერტილებს აბსოლუტთან, ე. ი. წრეწირთან

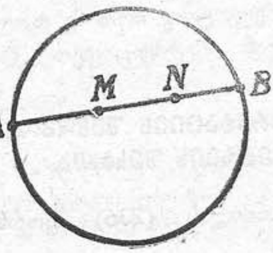
$$X^2+Y^2=1.$$

თუ მოვახდენთ X, Y კოორდინატების ანუ, რაც იგივეა, u და v პარამეტრების ისეთ პროექციულ გარდაქმნას, ე. ი. საერთო მნიშვნელიან წილადწრფივ გარდაქმნას, რომელიც უცვლელად დატოვებს აბსოლუტს (ე. ი. მას თავის თავზე გადაახავს), მაშინ $(MN\ AB)$ ანჰარმონიული ფარდობა არ შეიცვლება და, მაშასადამე, არ შეიცვლება $s=|MN|$ წირის რკალიც. ეს კი არის გეოდეზიური წირის სიგრძე M-დან N-მდე, ე. ი. MN რკალის სიგრძე. კლაინმა მას უწოდა წრფის MN მონაკვეთის ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი ს ი გ რ ძ ე ანუ M, N წერტილთა შორის ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი მ ა ნ ძ ი ლ ი მოცემული აბსოლუტის მიმართ (ნახ. 62). ეს აბსოლუტი თავის მხრივ განსაზღვრავს პროექციულ გარდაქმნათა ისეთ ჯგუფს, რომელიც უცვლელად ტოვებს თვით აბსოლუტს. ამ გარდაქმნათა ჯგუფს ეწოდება ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი ძ რ ა ო ბ ა. ამასთან დაკავშირებით კლაინმა შემოიღო კიდევ

ელიფსური მანძილის ცნებაც. M, N წერტილთა შორის ელიფსური მანძილი განიმარტება ისევე, როგორც ჰიპერბოლური მანძილი, ოღონდ აქ აბსოლუტად მიღებულია წარმოსახვითრადიუსიანი წრეწირი, ე. ი.

$$X^2+Y^2+1=0$$

წრეწირი. პროექციულ გარდაქმნათა იმ ჯგუფს, რომელიც ამ წარმოსახვით აბსოლუტს თავის თავზე გადასახავს (ე. ი. მას არ შეცვლის), ელიფსური ძრაობა ეწოდება, ხოლო მის შესაბამის გეომეტრიას—ელიფსური გეომეტრია. ელიფსური გეომეტრიის აბსოლუტიდან მიიღება ჰიპერბოლური გეომეტრიის აბსოლუტი, თუ X, Y-ს შევცვლით iX, iY-ით და, პირუკუ, ჰიპერბოლური გეომეტრიიდან მიიღება ელიფსური გეომეტრია, თუ იქ მოვახდენთ ისეთივე შეცვლას, როგორც წინა შემთხვევაში. რაც შეეხება ჰიპერბოლური გეომეტრიის, ე. ი. ლობაჩევსკის გეომეტრიის წირით ელემენტს ანუ ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილს, ის იგივეა, რაც მუდმივ უარყოფით-სიმრუდიანი ზედაპირის წირითი ელემენტი ($X=u$, $Y=v$):



ნახ. 62

$$ds^2=R^2\frac{(1-v^2)du^2+2uvdudv+(1-u^2)dv^2}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

აქედან u, v, R-ის ნაცვლად iu, iv, iR მნიშვნელობათა ჩასმით, მივიღებთ ელიფსური გეომეტრის წირით ელემენტს:

$$ds^2=R^2\,\frac{(1+v^2)du^2-2uvdudv+(1+u^2)dv^2}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

ეს კი, როგორც ვიცით, სფეროს წირითი ელემენტია. ამრიგად, ელიფსურ სიბრტყე იზომეტრულად გადაისახება სფეროზე. ავიღოთ ახლა სფეროს ზემოთ მოცემული პარამეტრული განტოლებები:

$$x=\frac{Ru}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$y=\frac{Rv}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$z=\frac{R}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\frac{x}{z}=u,$$

$$\frac{y}{z}=a,$$

, რაც იგივეა (რადგან $X=u$, $Y=v$),

$$\frac{x}{z}=X,$$

$$\frac{y}{z}=Y. \tag{233}$$

ადგან X, Y სიბრტყის წერტილის დეკარტის კოორდინატებია, ამიტომ x, y, z დიდეები, რომელთა შეფარდება იძლევა დეკარტის კოორდინატებს, განიხილება ოგორც სიბრტყის წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები. ამრიგად, სფეროს რტილის x, y, z კოორდინატები ელიფსური სიბრტყის წერტილის ერთგვარო-ნი კოორდინატებია. მათ წირითი ელემენტი საერთო აქვთ და ამ კოორდინატებში ი ასე გამოისახება:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

დაც x, y, z დაკავშირებულია სფეროს განტოლებით

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

იფსურ სიბრტყეზე ეს უკანასკნელი განტოლება ერთგვაროვანი კოორდინატების არმირებად არის ცნობილი. (233) დამოკიდებულება გვიჩვენებს, რომ x, y, z-ის ოთდროული ნიშნის შეცვლა არ ცვლის X, Y-ს. ეს იმას ნიშნავს, რომ სფეროს რ (x, y, z) და $(-x, -y, -z)$ წერტილს, ე. ი. დიამეტრულად მოპირდაპირე რტილებს ელიფსურ სიბრტყეზე ერთი წერტილი ეთანადება. ამიტომ, თუ ნა-ვარსფეროს განვიხილავთ სასაზღვრო დიდი წრეწირის გამოკლებით, მაშინ ასეთ ხევარსფეროზე დიამეტრულად მოპირდაპირე წერტილები არ მოთავსდება და მისი დასახვა ელიფსურ სიბრტყეზე მოხდება ურთიერთცალსახად და, ამავე დროს, ომეტრულად. მაშასადამე, ე იფსური სიბრტყის გეომეტრია იქნება ზემოაღნიშ-ლი ნახევარსფეროს შინაგანი გეომეტრია. ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთ ნახე-რსფეროზე გეოდეზიური წირების (ე. ი. დიდი ნახევარწრეწირების) მიმართ ხორ-ელდება ევკლიდეს პირველი პოსტულატი (გეოდეზიური წირის ორი წერტილით ნსაზღვრულობა), მაგრამ არ ხორციელდება არც ევკლიდეს მეხუთე პოსტულა-ი და არც ლობაჩევსკის პოსტულატი. მათ მაგივრად ხორციელდება მათი საწი-აღმდეგო შემდეგი პოსტულატი: მოცემული წრფის გარეშე წერტილი-ან არ შეიძლება არც ერთი ამ წრფის არათანამკვეთი წრფის ავლება ანუ წრფეთა ყოველი წყვილი თანაიკვეთება. ასეთი ეგომარეობა ისედაც აშკარაა ელიფსურ სიბრტყეზე, რადგან მისი წირითი ელე-ნტი სფეროს წირითი ელემენტია, სფეროსთვის კი სრული სიმრუდე დადებითია. მასადამე, სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა ჯამი მეტია ორ მართ კუთხეზე, რასაც ეგილი არა აქვს არც ევკლიდეს გეომეტრიაში (აქ სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა მი მუდმივია და ორი მართკუთხის ტოლი) და არც ლობაჩევსკის გეომეტრიაში ქ სამკუთხედის შინაგან კუთხეთა ჯამი ნაკლებია ორ მართ კუთხეზე). ეს ახალი იპის გეომეტრია, ელიფსური გეომეტრია, ნახევარსფეროს მოდელის სახით, იმანმა წარმოადგინა. ამიტომ მას აგრეთვე რიმანის გეომეტრია ეწოდება, ლიფსურ სიბრტყეზე აბსოლუტის განტოლება

$$X^2+Y^2+1=0$$

რთგვაროვან კოორდინატებში ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

ელიფსური ძრაობა, ე. ი. ერთგვაროვანი სპეციალური გარდაქმნა, რომელიც არ ცვლის აბსოლუტს და ერთგვაროვანი კოორდინატების

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

ნორმირებას, არ შეცვლის აგრეთვე სფეროს, რომელზედაც ელიფსური სიბრტყე გადაისახება. სივრცის ისეთი გარდაქმნები, რომლებიც არ ცვლიან სფეროს და მასზე მდებარე ნაკვთებს სფეროს ზედაპირზევე გადააადგილებენ, არის ბრუნვები სფეროს ცენტრის (ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სათავის) გარშემო. ამრიგად, x, y, z სიდიდეები, როგორც სივრცის წერტილის დეკარტის კოორდინატები, ერთგვაროვან ორთოგონალურ გარდაქმნას განიცდის, მაშასადამე, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი.

თეორემა. ნაკვთის ძრაობას სფეროზე შეესაბამება ელიფსური ძრაობა პროექციულ სიბრტყეზე.

ნაწილი II

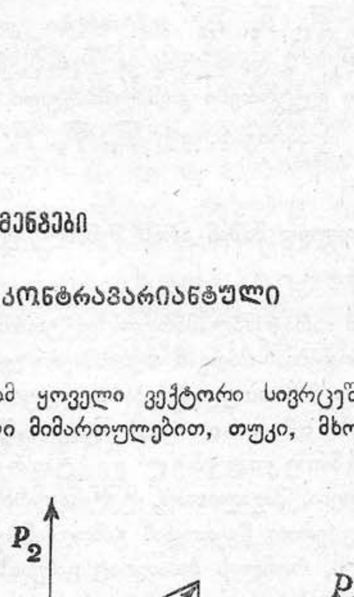
ტენზორულ-დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები

თავი I

ტენზორთა ალგებრის ელემენტები

§ 51. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ყოველი ვექტორი სივრცეში შეგვიძლია დავშალოთ სამი ნებისმიერად მოცემული მიმართულებით, თუკი, მხოლოდ, ეს მიმართულებები ერთი სიბრტყის პარალელური არ არის, თუ მოცემული მიმართულებები ვექტორებით არის განზღვრული, მაშინ უნდა მოვითხოვოთ, რომ ეს ვექტორები ერთი სიბრტყის პარალელური არ იყოს ერთდროულად, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს ვექტორები პარალელური გადატანით ვერ უნდა მოთავსდეს ერთ სიბრტყეზე ან, უბრალოდ, ვექტორები არ უნდა იყოს კომპლანარული. თუ სამი ვექტორი ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული, მაშინ ერთი მათგანი, როგორც ცნობილია, შეიძლება დაიშალოს ორი დანარჩენის პარალელურ მდგენელებად (ნახ. 63)



ნახ. 63

$$\overline{P}_3=\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2 \tag{1}$$

და, პირუკუ, სამ ვექტორს შორის წრფივი დამოკიდებულება იმას ნიშნავს, რომ ისინი კომპლანარულია. მართლაც, თუ

$$a\overline{P}_1+b\overline{P}_2+c\overline{P}_3=0,$$

სადაც a, b, c კოეფიციენტები ერთდროულად ნული არ არის, მაშინ ამ ტოლობის გაყოფით c-ზე და $-\dfrac{a}{c}=\lambda$, $-\dfrac{b}{c}=\mu$ აღნიშვნების შემოღებით მივიღებთ:

$$\overline{P}_3=\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2.$$

ამრიგად, სამი ვექტორის წრფივი დამოკიდებულება ნიშნავს მათ კომპლანარობას. აქ მოყვანილი მსჯელობის დროს ვგულისხმობდით, რომ $c \neq 0$. თუ $c=0$, მაშინ

$$a\overline{P}_1+b\overline{P}_2=0.$$

აქედან, თუ $b \neq 0$,

$$\overline{P}_2=-\frac{a}{b}\overline{P}_1.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები ურთიერთპარალელურია და, მაშასადამე, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები კომპლანარული იქნება. თუ $c=0$, $b=0$, მაშინ $a\overline{P}_1=0$ და აქედან კი $\overline{P}_1=0$. მაშასადამე, ცხადია, რომ ამ შემთხვევაშიც აღებული ვექტორები კომპლანარული იქნება.

ამრიგად, თუ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები არაა კომპლანარული, მაშინ ტოლობა

$$a\overline{P}_1+b\overline{P}_2+c\overline{P}_3=0$$

მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა

$$a=b=c=0.$$

სამ არაკომპლანარულ ვექტორს წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები ეწოდება. რადგან ნებისმიერი ვექტორი შეიძლება დაიშალოს არაკომპლანარულ სამი მიმართულების პარალელურ მდგენელებად, ამიტომ სივრცის ვექტორთა ნებისმიერი ოთხეული წრფივად დამოკიდებულია. წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სამეულები კი, ცხადია, არსებობს. ასეთია, მაგალითად, ტეტრაედრის იმ წიბოთა მიმმართველი ვექტორები, რომლებიც ერთი წვეროდან გამოდიან. ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ რაიმე სამეულს, რომლის მიმართაც განვსაზღვრავთ სივრცის ვექტორებს მათი წრფივ ჯამად დაშლის დროს, ვექტორთა საკოორდინატო სისტემა ან საბაზისო სამეული ეწოდება. ვექტორთა საბაზისო სამეულს აღვნიშნავთ ასე: $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. ასეთ სამეულად შეიძლება მიღებული იყოს სავსებით ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელი სამეული.

როგორც აღნიშნული გვქონდა, სივრცის ნებისმიერი $\overline{P}$ ვექტორი შეგვიძლია დავშალოთ მოცემული საბაზისო ვექტორების პარალელურ მდგენელებად. თუ დაშლის კოეფიციენტებს X^1, X^2, X^3-ით აღვნიშნავთ, გვექნება:

$$\overline{P}=X^1\overline{e}_1+X^2\overline{e}_2+X^3\overline{e}_3=\sum_{i=1}^{3} X^i\,\overline{e}_i. \tag{2}$$

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ სივრცის ყოველ ვექტორს ეთანადება რიცხვთა ერთი გარკვეული (X^1, X^2, X^3) სამეული, სახელდობრ, ამ ვექტორის წრფივ ჯამად დაშლის კოეფიციენტები. დავუშვათ წინააღმდეგი: ვთქვათ, $\overline{P}$ ვექტორს ეთანადება კიდევ (Y^1, Y^2, Y^3) სამეული მისი დაშლის კოეფიციენტების სახით, ე. ი.

$$\overline{P}=Y^1\overline{e}_1+Y^2\overline{e}_2+Y^3\overline{e}_3.$$

ამ ტოლობის შედარება (2) ტოლობასთან გვაძლევს:

$$X^1\overline{e}_1+X^2\overline{e}_2+X^3\overline{e}_3=Y^1\overline{e}_1+Y^2\overline{e}_2+Y^3\overline{e}_3.$$

აქედან

$$(X^1-Y^1)\overline{e}_1+(X^2-Y^2)\overline{e}_2+(X^3-Y^3)\overline{e}_3=0.$$

რადგან $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის კოეფიციენტები ნული უნდა იყოს, ე. ი.

$$X^1-Y^1=0,\ X^2-Y^2=0,\ X^3-Y^3=0,$$

ანუ

$$X^1=Y^1,\ X^2=Y^2,\ X^3=Y^3.$$

ამრიგად, გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ ვექტორები ერთეული ვექტორებია (ე. ი. $|\overline{e}_1|=|\overline{e}_2|=|\overline{e}_3|=1$), მაშინ (2) დაშლის X^1, X^2, X^3 კოეფიციენტები წარმოადგენს $\overline{P}$ ვექტორის დეკარტის კოორდინატებს იმ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომლის მგეზავებია $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ ვექტორები შესაბამისად. ამიტომ (2) დაშლის X^1, X^2, X^3 კოეფიციენტებს, ნებისმიერ $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ ბაზისის შემთხვევაში, დეკარტის განზოგადებული კოორდინატები ეწოდება. იმავე კოეფიციენტებს კიდევ კონტრავარიანტული კოორდინატებიც ეწოდება (ამ სახელწოდების მნიშვნელობა შემდეგში იქნება ახსნილი). ის ფაქტი, რომ $\overline{P}$ ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატებია X^1, X^2, X^3, სიმბოლურად ასე იწერება:

$$\overline{P}=(X^1,\ X^2,\ X^3)\ \text{ან}\ \overline{P}(X^1,\ X^2,\ X^3).$$

ამრიგად, (2) ტოლობა და სიმბოლური ჩანაწერი

$$\overline{P}=(X^1,\ X^2,\ X^3)$$

ერთიმეორის ეკვივალენტურია.

განვიხილოთ ორი

$$\overline{P}=(X^1,\ X^2,\ X^3),\ \overline{Q}=(Y^1,\ Y^2,\ Y^3)$$

ვექტორი და გამოვითვალოთ მათი სკალარული ნამრავლი

$$\overline{P}\cdot\overline{Q}=|\overline{P}|\cdot|\overline{Q}|\cdot\cos\vartheta.$$

(2) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\overline{P}=\sum_{i=1}^{3}X^i\overline{e_i},$$

$$\overline{Q}=\sum_{j=1}^{3}Y^j\overline{e_j}.$$

ამრიგად,

$$\overline{P}\cdot\overline{Q}=\sum_{i=1}^{3}X^i\overline{e_i}\cdot\sum_{j=1}^{3}Y^j\overline{e_j}=\sum_{i,j=1}^{3}\overline{e_i}\cdot\overline{e_j}X^iY^j.$$

აღვნიშნოთ:

$$\overline{e_i}\cdot\overline{e_j}=a_{ij}. \tag{3}$$

ამ მნიშვნელობის შეტანა წინა ფორმულაში მოგვცემს სკალარულ ნამრავლს კონტრავარიანტულ კოორდინატებში:

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} X^i Y^j, \tag{4}$$

სადაც a_{ij} აკმაყოფილებს, როგორც ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (3) ტოლობიდან, შემდეგ პირობას

$$a_{ji} = a_{ji}. \tag{5}$$

კერძოდ, თუ $\overline{P} = \overline{Q}$, მაშინ $X^i = Y^i$ და (4) ფორმულა მოგვცემს $\overline{P}$ ვექტორის კვადრატის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$\overline{P}^2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} X^i X^j. \tag{6}$$

საიდანაც $|\overline{P}|$-სათვის გვექნება:

$$|\overline{P}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} X^i X^j}. \tag{7}$$

ორ ვექტორს შორის კუთხის გამოსახვა კონტრავარიანტულ კოორდინატებში მიიღება (4) და (7) ფორმულების გამოყენებით, გვექნება:

$$\cos\vartheta = \frac{\overline{P} \cdot \overline{Q}}{|\overline{P}| \cdot |\overline{Q}|} = \frac{\sum_{i \cdot j=1}^{3} a_{ij} X^i X^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} X^i X^j} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} Y^i Y^j}} \tag{8}$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X^j. \tag{9}$$

აქედან აშკარაა, რომ, თუ

$$Det(a_{ij}) \neq 0,$$

მაშინ X_i და X^i სიდიდეთა შორის იარსებებს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება. X_1, X_2, X_3 რიცხვებს, რომლებიც განისაზღვრებიან (9) ტოლობით, $\overline{P}$ ვექტორის კ ო ვ ა რ ი ა ნ ტ უ ლ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ეწოდება (ამ სახელწოდების მნიშვნელობაც შემდეგში იქნება ახსნილი). (9) ფორმულის თანახმად, $Y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} Y^j$ და (4), (6) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = \sum_{i=1}^{3} X^i Y_i, \tag{10}$$

$$\overline{P}^2 = \sum_{i=1}^{3} X^i X_i. \tag{11}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ ვექტორები მართობულ კოორდინატთა სისტემის მგეზავებია

$$a_{ii} = \overline{e_i} \cdot \overline{e_i} = 1,$$

$$a_{ij} = \overline{e_i} \cdot \overline{e_j} = 0. \quad (i \neq j).$$

ამრიგად, (a_{ij}) მატრიცს ექნება შემდეგნაირი აგებულება:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ შემთხვევაში

$$X_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X^j = X^i,$$

ე. ი. მართობულ კოორდინატებში ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები ერთი მეორის ტოლია.

აქამდე, ზემომოყვანილი ყველა ფორმულის შემოკლებულ ჩანაწერებში, $\sum$ სიმბოლოს საშუალებით აჯამვა მხოლოდ განმეორებული (მაღლა და დაბლა) ინდექსების მიმართ ხდებოდა. ასეთივე მდგომარეობა გვექნება მთელი შემდგომი აღრიცხვის დროსაც. პირუკუ, ნიშნაკის განმეორებას მხოლოდ აჯამვის დროს ექნება ადგილი. ამრიგად, გამოსახულებაში ნიშნაკის განმეორება აჯამვაზე მიგვითითებს, ე. ი. განმეორებული (მაღლა და დაბლა) ნიშნაკი $\sum$ სიმბოლოს როლს შეასრულებს. ამიტომ აჯამვის შემოკლებული ჩანაწერები შეგვიძლია კიდევ უფრო გავამარტივოთ, თუკი ისედაც თავისთავად ნაგულისხმევ $\sum$ სიმბოლოს მოვხსნით და უბრალოდ აღვნიშნავთ

$$\sum_{i=1}^{3} A_{ij} B_k^i = A_{ij} B_k^i.$$

ამ აღნიშვნის მიხედვით (2), (4), (6), (9), (10) და (11) ფორმულები ასე დაიწერება:

$$\overline{P} = X^i \overline{e_i}, \tag{12}$$

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = a_{ij} X^i Y^j, \tag{13}$$

$$X_i = a_{ij} X^j, \tag{14}$$

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = X^i Y_i, \tag{15}$$

$$\overline{p}^2 = X^i X_i. \tag{16}$$

აქ, მაშასადამე, ნიშნაკის განმეორება (მაღლა და დაბლა) იმაზე მიგვითითებს, რომ უნდა მოხდეს აჯამვა ამ ნიშნაკის ყველა შესაძლებელ მნიშვნელობათა (ამ შემთხვევაში 1, 2, 3 მნიშვნელობათა) მიხედვით.

მაგალითი: ალებულ საბაზისო სისტემაში მოცემულია ორი წერტილი მათი დეკარტის კოორდინატებით:

$$A=(x^1,\ x^2,\ x^3),$$
$$B=(y^1,\ y^2,\ y^3).$$

მოვძებნოთ მანძილი ამ წერტილებს შორის. ჩვენ ვიცით, რომ

$$\overline{P}=\overline{AB}=B-A; \tag{17}$$

თუ ამ ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე $\left(\text{რომელთა მგეზავე-}\right.$ ბია: $\left.\frac{\overline{e_1}}{|\overline{e_1}|},\ \frac{\overline{e_2}}{|\overline{e_2}|},\ \frac{\overline{e_3}}{|\overline{e_3}|}\right)$, მივიღებთ:

$$X^1|\overline{e_1}|=y^1-x^1,$$
$$X^2|\overline{e_2}|=y^2-x^2,$$
$$X^3|\overline{e_3}|=y^3-x^3.$$

თანახმად (3) ფორმულისა, გვექნება:

$$|\overline{e_1}|=\sqrt{a_{11}},\ |\overline{e_2}|=\sqrt{a_{22}},\ |\overline{e_3}|=\sqrt{a_{33}}.$$

ამრიგად, ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები და ვექტორის ბოლო წერტილების კოორდინატთა სხვაობანი დაკავშირებული იქნება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} X^1\sqrt{a_{11}}&=y^1-x^1,\\ X^2\sqrt{a_{22}}&=y^2-x^2,\\ X^3\sqrt{a_{33}}&=y^3-x^3. \end{aligned} \tag{18}$$

აქედან ამოიხსნება ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები:

$$\begin{aligned} X^1&=\frac{y^1-x^1}{\sqrt{a_{11}}},\\ X^2&=\frac{y^2-x^2}{\sqrt{a_{22}}},\\ X^3&=\frac{y^3-x^3}{\sqrt{a_{33}}}. \end{aligned} \tag{19}$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა (16) ფორმულაში მოგვცემს ვექტორის კვადრატის და, მაშასადამე, ორ წერტილს შორის მანძილის კვადრატის გამოსახულებას მოცემული წერტილების კოორდინატების საშუალებით. გვექნება:

$$\overline{P}^2=e_{ij}(y^i-x^i)(y^j-x^j), \tag{20}$$

სადაც e_{ij} სკალარული ნამრავლებია $\frac{\overline{e_1}}{|\overline{e_1}|},\ \frac{\overline{e_2}}{|\overline{e_2}|},\ \frac{\overline{e_3}}{|\overline{e_3}|}$ მგეზავების. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$e_{ij}=\left\{\begin{array}{ccc} 1, & \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}, & \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}} \\ \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}, & 1, & \dfrac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}} \\ \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}a_{33}}}, & \dfrac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}a_{33}}}, & 1 \end{array}\right\} \qquad (21)$$

აქედან ჩანს, რომ ორ წერტილს შორის მანძილი გამოისახება წერტილთა კოორდინატებისა და რომელიმე ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის კოეფიციენტების საშუალებით. ცხადია, რომ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის კოეფიციენტები, ე. ი. სკალარული ნამრავლის აგებულება (სტრუქტურა), დამოკიდებული არ არის თვით აღებულ ვექტორებიდან,—იგი დამოკიდებულია მხოლოდ საბაზისო სისტემის არჩევაზე. ყოველ საბაზისო სისტემას აქვს ერთი გარკვეული აღნაგობის სკალარული ნამრავლი, ე. ი. ერთი გარკვეული დამახასიათებელი მატრიცი (a_{ij}) (სკალარული ნამრავლის კოეფიციენტები), რომელსაც ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ უ რ ი (ძ ი რ ი თ ა დ ი) მ ა ტ რ ი ც ი ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ ორი საბაზისო სისტემა ერთიმეორისაგან მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდება, მაშინ მათი დამახასიათებელი ფუნდამენტური მატრიცები ერთიმეორის ტოლი იქნება. მართლაც, თუ $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ და $('\overline{e_1}, '\overline{e_2}, '\overline{e_3})$ საბაზისო სისტემები ერთიმეორისაგან მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდება, მაშინ

$$|\overline{e_i}|=|'\overline{e_i}|,$$

$$(\overline{e_i}\,\widehat{}\,\overline{e_j})=('\overline{e_i}\,\widehat{}\,'\overline{e_j}).$$

ამ ტოლობათა მიხედვით გვექნება:

$$'\overline{e_i}\cdot{}'\overline{e_j}=|'\overline{e_i}|\cdot|'\overline{e_j}|\cos('\overline{e_i}\,\widehat{}\,'\overline{e_j})=|\overline{e_i}|\cdot|\overline{e_j}|\cos(\overline{e_i}\,\widehat{}\,\overline{e_j})=\overline{e_i}\cdot\overline{e_j}.$$

თანახმად (3) აღნიშვნისა, მივიღებთ:

$$'a_{ij}=a_{ij}.$$

ამრიგად, ორი ნებისმიერი ვექტორისათვის გვექნება ტოლობა:

$$a_{ij}'X^{i}{}'Y^{j}=a_{ij}X^{i}Y^{j}.$$

პირუკუ, უკანასკნელი ტოლობა ნებისმიერი ორი ვექტორისათვის შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა ერთნაირი მოგეზულობის საბაზისო სისტემები ერთიმეორისაგან მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდება. მაშასადამე, ს კ ა ლ ა რ უ ლ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს ს ტ რ უ ქ ტ უ რ ა ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ი ა ს ა ბ ა ზ ი ს ო ს ი ს ტ ე მ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს ა დ ა პ ი რ უ კ უ.

§ 52. საბაზისო სისტემის ცვლა

აღებულ საბაზისო სისტემაში განვიხილოთ სამი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი: $'\overline{e_1}, '\overline{e_2}, '\overline{e_3}$. მივიღოთ ვექტორთა ეს სამეული ახალ საბაზისო სისტემად და დავაკავშიროთ იგი აღებულ (ძველ) საბაზისო სისტემასთან. ამისათვის ახა-

ლი საბაზისო სისტემის თითოეული ვექტორი დავშალოთ ძველი საბაზისო სისტემის ვექტორების მიმართ. თანახმად (12) ფორმულისა, გვექნება:

$$\overline{'e_1}=\lambda^1_1\overline{e_1}+\lambda^2_1\overline{e_2}+\lambda^3_1\overline{e_3},$$

$$\overline{'e_2}=\lambda^1_2\overline{e_1}+\lambda^2_2\overline{e_2}+\lambda^3_2\overline{e_3},$$

$$\overline{'e_3}=\lambda^1_3\overline{e_1}+\lambda^2_3\overline{e_2}+\lambda^3_3\overline{e_3},$$

ანდა, შემოკლებით (თანახმად შემოღებული აღნიშვნებისა),

$$\overline{'e_i}=\lambda^j_i\overline{e_j}. \tag{22}$$

რადგან $\overline{'e_1}$, $\overline{'e_2}$, $\overline{'e_3}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო $|\lambda^j_i|$ არის ამ ვექტორთა კონტრავარიანტული კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი, ამიტომ $|\lambda^j_i|\neq 0$ ეს პირობა საშუალებას გვაძლევს (22) განტოლებიდან ამოვხსნათ ძველი საბაზისო სისტემის $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ ვექტორები. კრამერის ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$\overline{e_i}=\widetilde{\lambda^j_i}\cdot\overline{'e_j}, \tag{23}$$

სადაც $\widetilde{\lambda^j_i}$ არის $\lambda^j_i|$ დეტერმინანტში λ^j_i ელემენტის დაყვანილი მინორი, ე. ი. λ^j_i ელემენტის ალგებრული დამატება (რომელიც მიიღება $|\lambda^j_i|$ დეტერმინანტიდან i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით) გაყოფილი $|\lambda^j_i|$-ზე. რადგან $\widetilde{\lambda^j_i}$ მიღებულია განტოლებათა ამოხსნით (შექცევით) და იგი (23) დამოკიდებულების შექცეულ დამოკიდებულებას განსაზღვრავს, ამიტომ $(\widetilde{\lambda^j_i})$ მატრიცს (λ^j_i) მ ა ტ რ ი ც ი ს შ ე ქ ც ე უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი ეწოდება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\widetilde{\lambda^i_k}\,\lambda^k_j=\delta^i_j, \tag{24}$$

სადაც

$$\delta^i_j=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}. \tag{25}$$

(δ^i_j)-ს ეწოდება ე რ თ ე უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი, ან კიდევ, კ რ ო ნ ე კ ე რ ი ს ს ი მ ბ ო ლ ო. (25) ტოლობიდან პირდაპირ ჩანს, რომ

$$\delta^i_j=1,\ \text{როცა}\ i=j, \tag{26}$$

$$\delta^i_j=0,\quad ,,\quad i\neq j.$$

აშკარაა, რომ (λ^j_i) მატრიცი სავსებით განსაზღვრავს საბაზისო სისტემის ცვლას. განვიხილოთ საბაზისო სისტემის ცვლა (δ^j_i) მატრიცით; გვექნება:

$$\overline{'e_i}=\delta^j_i\overline{e_j}.$$

(26) პირობების გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\delta^j_i\overline{e_j}=\overline{e_i}.$$

ამრიგად,

$$\overline{'e_i}=\overline{e_i},$$

ე. ი. ე რ თ ე უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი თ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს დ რ ო ს ს ა ბ ა ზ ი ს ო ს ი ს ტ ე მ ა უ ც ვ ლ ე ლ ი რ ჩ ე ბ ა. ან, სხვა სიტყვებით, ე რ თ ე უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი თ გ ა რ-

დ ა ქ მ ნ ა ა რ ი ს ი გ ი ვ უ რ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა. მაშასადამე, ერთეული მატრიცი იგივური გარდაქმნის მატრიცია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ, საზოგადოდ, (A_1, A_2, A_3) რაიმე ერთობლიობის შემთხვევაში

$$\delta_i^j A_j = A_i, \tag{27}$$

ე. ი. ე რ თ ე უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ი ა რ ც ვ ლ ი ს ო ბ ი ე ქ ტ ს. სწორედ ამიტომ ეწოდება მას ერთეული მატრიცი.

ახლა გამოვარკვიოთ აღებული ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატების ცვლა. ვთქვათ, მოცემულია $\overline{P}$ ვექტორი თავისი კოორდინატებით ძველ სისტემაში

$$\overline{P} = (X^1,\ X^2,\ X^3)$$

და ახალ სისტემაში

$$\overline{P} = ('X^1,\ 'X^2,\ 'X^3).$$

(12) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\overline{P} = X^i \overline{e_i},$$

$$\overline{P} = 'X^{i'} \overline{e_i}.$$

აქედან აშკარაა, რომ

$$X^i \overline{e_i} = 'X^{i'} \overline{e_i}.$$

შევიტანოთ აქ $'\overline{e_i}$-ის მნიშვნელობა (22) ფორმულით, მივიღებთ:

$$X^i \overline{e_i} = 'X^i \lambda_i^j \overline{e_j}.$$

რადგან $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა იგივეობა უნდა იყოს, ე. ი.

$$X^i = 'X^j \lambda_j^i. \tag{28}$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობათა სისტემას $'X^i$-ის მიმართ ამოვხსნით, შექცეული გარდაქმნის ფორმულებს მივიღებთ, რომელიც განისაზღვრება, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $(\widetilde{\lambda}_i^j)$ მატრიცით. გვექნება:

$$'X^i = \widetilde{\lambda}_j^i X^j. \tag{29}$$

ახლა განვიხილოთ (a_{ij}) ფუნდამენტური მატრიცის გარდაქმნა საბაზისო სისტემის ცვლის დროს. აღვნიშნოთ

$$'a_{ij} = '\overline{e_i} \cdot '\overline{e_j}.$$

(22) ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$'\overline{e_i} = \lambda_i^k \overline{e_k},\quad '\overline{e_j} = \lambda_j^s \overline{e_s}.$$

$'\overline{e_i}$, $'\overline{e_j}$ ვექტორების ამ მნიშვნელობათა ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს:

$$'a_{ij} = \lambda_i^k \overline{e_k} \cdot \lambda_j^s \overline{e_s} = \lambda_i^k \lambda_j^s \overline{e_k} \cdot \overline{e_s}.$$

შევიტანოთ აქ $\overline{e_k} \cdot \overline{e_s}$-ის მნიშვნელობა (3) ფორმულის მიხედვით, ე. ი. $\overline{e_k} \cdot \overline{e_s} = a_{ks}$; მივიღებთ:

$$'a_{ij} = \lambda_i^k \lambda_j^s a_{ks}. \tag{30}$$

იმისათვის, რომ (a_{ks}) მატრიცი გამოვსახოთ $('a_{ij})$ მატრიცის საშუალებით, საჭიროა ამოვხსნათ (30) განტოლებათა სისტემა a_{ij}-ის მიმართ. ეს ამოხსნა შეიძლება ასე ჩავატაროთ. გადავამრავლოთ (30) ტოლობა $\widetilde{\lambda}_e^i$ და $\widetilde{\lambda}_r^j$-ზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ განვიხილოთ გამოსახულება:

$$\widetilde{\lambda}_e^i \widetilde{\lambda}_r^j {}' a_{ij} = \widetilde{\lambda}_e^i \widetilde{\lambda}_r^j \lambda_i^k \lambda_j^s a_{ks}.$$

(24) ფორმულის გამოყენება მოგვცემს:

$$\widetilde{\lambda}_e^i \widetilde{\lambda}_r^j \lambda_i^k \lambda_j^s = (\widetilde{\lambda}_e^i \lambda_i^k) \cdot (\widetilde{\lambda}_r^j \lambda_j^s) = \delta_e^k \delta_r^s.$$

ამრიგად, წინა ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\widetilde{\lambda}_e^i \widetilde{\lambda}_r^j {}' a_{ij} = \delta_e^k \delta_r^s a_{ks}.$$

რადგან (δ_s^i) მატრიცი არ ცვლის ობიექტს, ამიტომ

$$\widetilde{\lambda}_e^i \widetilde{\lambda}_r^j {}' a_{ij} = \delta_e^k \delta_r^s a_{ks} = \delta_e^k (\delta_r^s a_{ks}) = \delta_r^s a_{es} = a_{er},$$

ან, რაც იგივეა,

$$a_{ij} = \widetilde{\lambda}_i^k \widetilde{\lambda}_j^s {}' a_{ks}. \tag{31}$$

ახლა ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნა გამოვიკვლიოთ. გვაქვს:

$$'X_i = 'a_{ij} 'X^j.$$

შევიტანოთ აქ $'X^j$-ის და $'a_{ij}$-ის მნიშვნელობები (29) და (30) ფორმულებიდან. გვექნება:

$$'X_i = \lambda_i^k \lambda_i^s a_{ks} \widetilde{\lambda}_e^j x^e.$$

რადგან

$$\lambda_j^s \widetilde{\lambda}_e^j = \delta_e^s,$$

ამიტომ

$$'X_i = \lambda_i^k a_{ks} \delta_e^s X^e = \lambda_i^k a_{ke} X^e.$$

(9) ფორმულის თანახმად

$$a_{ke} X^e = X_k.$$

ამრიგად, ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულით:

$$'X_i = \lambda_i^j X_j. \tag{32}$$

(29) და (32) ფორმულებიდან ჩანს, რომ ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები გარდაიქმნება იმავე მატრიცით, რომლითაც საბაზისო სისტემა, კონტრავარიანტული კოორდინატები კი—შექცეული მატრიცით. სწორედ აქედან წარმოდგება ამ ორი სახის კოორდინატის სახელწოდებები: კოვარიანტული და კონტრავარიანტული.

§ 53. ტენზორი. ძირითადი მოქმედებები ტენზორებზე

განვიხილოთ რაიმე წრფივი ფორმა

$$\varphi = a_i X^i, \tag{33}$$

სადაც a_1, a_2, a_3 ერთი გარკვეული ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატებია, ხოლო X^1, X^2, X^3—ნებისმიერი ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები. საბაზისო სისტემის შეცვლის შემდეგ გვექნება:

$$'\varphi = 'a_i' X^i.$$

რადგან a_1, a_2, a_3 ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატებია, ხოლო X^1, X^2, X^3 რაიმე ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები, ამიტომ ისინი გარდაიქმნებიან (32) და (29) ფორმულებით. $'a_i$ და $'X^i$-ის მნიშვნელობათა ჩასმა წინა ფორმულაში მოგვცემს:

$$\varphi' = \lambda_i^k a_k \widetilde{\lambda}_s^i X^s = (\lambda_i^k \widetilde{\lambda}_s^i) a_k X^s = \delta_s^k a_k X^s = a_k X^k = \varphi, \tag{34}$$

ე. ი.

$$a_i X^i = 'a_i' X^i.$$

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ დასკვნას: აღნიშნული სახის წრფივი ფორმა ინვარიანტია საბაზისო სისტემის ცვლისა.

ახლა განვიხილოთ ორადწრფივი ფორმა

$$\Phi = a_{ij} X^i Y^j, \tag{35}$$

სადაც a_{ij} ფუნდამენტური მატრიცია, ხოლო X^1, X^2, X^3 და Y^1, Y^2, Y^3—ნებისმიერი ორი ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები (ე. ი. აქ გვაქვს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი). საბაზისო სისტემის შეცვლის შემდეგ გვექნება:

$$'\Phi = 'a_{ij}' X^{i\prime} Y^j.$$

შევიტანოთ აქ $'X^i$, $'Y^i$ და $'a_{ij}$-ის მნიშვნელობები (29) და (30) ფორმულების მიხედვით; მივიღებთ:

$$'\Phi = \lambda_i^k \lambda_j^s a_{ks} \widetilde{\lambda}_e^i X^e \widetilde{\lambda}_r^j Y^r = (\lambda_i^k \widetilde{\lambda}_e^i)(\lambda_j^s \widetilde{\lambda}_r^j) a_{ks} X^e Y^r =$$
$$= \delta_e^k \delta_r^s a_{ks} X^e Y^r = a_{ks} X^k Y^s = \Phi,$$

ე. ი.

$$a_{ij} X^i Y^j = 'a_{ij}' X^{i\prime} Y^j. \tag{36}$$

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ დასკვნას: ზემოაღნიშნული სახის ორადწრფივი ფორმა ინვარიანტია საბაზისო სისტემის ცვლის.

აქ განხილული წრფივი და ორადწრფივი ფორმების ინვარიანტობა შესაძლებელი იყო დაგვემტკიცებინა ძალიან მარტივადაც, თუ ვისარგებლებდით გეომეტრიული მოსაზრებებით. მართლაც, რადგან a_1, a_2, a_3 რაიმე ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატებია, ხოლო X^1, X^2, X^3 აგრეთვე ვექტორის (საზოგადოდ სხვა ვექტორის) კონტრავარიანტული კოორდინატები, ამიტომ წრფივი ფორმა $a_i X^i$, (15) ფორმულის თანახმად, წარმოადგენს ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს. სკალარული ნამრავლი კი, როგორც ვექტორთა სიგრძეებითა და მათ შორის კუთხით განსაზღვრული, ინვარიანტია საბაზისო სისტემას ცვლის. ზემოთ განხილული ორადწრფივი ფორმაც, სადაც (a_{ij}) ფუნდამენტური მატრიცია (13) ფორმულის თანახმად, ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს წარმოადგენს და, მაშასადამე, იგი ინვარიანტია საბაზისო სისტემის ცვლის.

წრფივი და ორადწრფივი ფორმების ინვარიანტობის დამტკიცების დროს ჩვენ ვისარგებლეთ არა გეომეტრიული მოსაზრებით, არამედ მხოლოდ აღებული

ფორმების (a_i) და (a_{ij}) კოეფიციენტების გარდაქმნის ფორმულებით. იმავე გამოთვლების ჩატარებით ადვილად ვნახავთ, რომ ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატებისაგან შედგენილი ყოველი a_jX^i წრფივი ფორმა და $a_{ij}X^iY^j$ ორადწრფივი ფორმა, სადაც (a_i) და (a_{ij}) სიდიდეთა ერთობლიობები საბაზისო სისტემის შეცვლის დროს

$$'a_i=\lambda_i^k a_k, \quad 'a_{ij}=\lambda_i^k\lambda_j^s a_{ks}$$

ფორმულებით გარდაიქმნება, ინვარიანტებია საბაზისო სისტემის ცვლის. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ, პირუკუ, თუ ეს ფორმები ინვარიანტებია საბაზისო სისტემის ცვლის, ე. ი. თუ

$$'a_i{}'X^i=a_iX^i, \quad 'a_{ij}{}'X^iY^j=a_{ij}X^iY^j,$$

მაშინ a^i და a_{ij} გარდაიქმნება

$$'a_i=\lambda_i^k a_k, \quad 'a_{ij}=\lambda_i^k\lambda_j^s a_{ks}$$

ფორმულებით. მართლაც, შევიტანოთ ტოლობებში X^i-ის და Y^j-ის ნაცვლად მათი მნიშვნელობები (28) ფორმულის თანახმად. გვექნება:

$$'a_i'X^i=a_k\lambda_i^{k'}X^i, \quad 'a_{ij}'X^{i'}Y^j=a_{ks}\lambda_i^k\lambda_j^{s'}X^{i'}Y^j.$$

$'X^i$ და $'Y^j$-ის ნებისმიერობის გამო, აქედან მივიღებთ:

$$'a_i=\lambda_i^k a_k, \quad 'a_{ij}=\lambda_i^k\lambda_j^s a_{ks},$$

რაც ამტკიცებს ზემოგამოთქმულ აზრს.

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულებები:

თეორემა 1. იმისათვის, რომ რაიმე ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატებისაგან შედგენილი წრფივი ფორმა იყოს საბაზისო სისტემის ცვლის ინვარიანტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი კოეფიციენტების ერთობლიობა საბაზისო სისტემის ცვლის დროს გარდაიქმნას

$$'a_i=\lambda_i^k a_k \tag{37}$$

ფორმულით.

თეორემა 2. იმისათვის, რომ ორი ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატებისაგან შედგენილი $a_{ij}X^iY^j$ ორადწრფივი ფორმა იყოს საბაზისო სისტემის ცვლის ინვარიანტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ფორმის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცი საბაზისო სისტემის ცვლის დროს გარდაიქმნას

$$'a_{ij}=\lambda_i^k\lambda_j^s a_{ks} \tag{38}$$

ფორმულით.

სავსებით ანალოგიური გამოთვლებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატებისაგან შედგენილი b^iX_i წრფივი ფორმა საბაზისო სისტემის ცვლის ინვარიანტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი (b^i) ერთობლიობა საბაზისო სისტემის ცვლის დროს გარდაიქმნება

$$'b^i=\widetilde{\lambda}_k^i\, b^k \tag{39}$$

ფორმულით.

საზოგადოდ, შესაძლებელია განხილულ იქნეს ვექტორთა კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატებისაგან შედგენილი ნებისმიერი რიგის ფორმები. მაგალითად, (a_{ij}^{k}) კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მესამე რიგის ფორმა იქნება

$$a_{ij}^{k} X^{i} Y^{j} Z_{k}.$$

ამ ფორმის ინვარიანტული თვისებების შესწავლა საბაზისო სისტემის ცვლასთან დაკავშირებით მოხდება ზემოთ ჩატარებული გამოთვლების მსგავსად და დამტკიცდება, რომ აღებული მესამე რიგის ფორმა საბაზისო სისტემის ცვლის ინვარიანტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ფორმის კოეფიციენტების (a_{ij}^{k}) ერთობლიობა საბაზისო სისტემის ცვლის დროს გარდაიქმნება

$$a_{ij}^{k} = \lambda_{i}^{e} \lambda_{j}^{s} \widetilde{\lambda}_{r}^{k} a_{es}^{\prime r} \tag{40}$$

ფორმულით და ა. შ.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ მოყვანილი ინვარიანტული ფორმების კოეფიციენტების დამახასიათებელი (37), (38), (39), (40) გარდაქმნები სავსებით გარკვეული აღნაგობისაა. ამ ფორმულებში, მარჯვნივ, საბაზისო სისტემის გარდაქმნის მატრიცი იმდენჯერ შედის მამრავლად, რამდენი ქვედა (კოვარიანტული) ნიშნაკიც აქვს აღებულ რიცხვთა ერთობლიობის გამომსახველ სიმბოლოს. ხოლო შექცეული გარდაქმნის $(\widetilde{\lambda}_{i}^{j})$ მატრიცი მასში იმდენჯერ შედის მამრავლად, რამდენი ზედა (კონტრავარიანტული) ნიშნაკიც აქვს აღნიშნულ სიმბოლოს. ამრიგად, ინვარიანტული ფორმების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი რიცხვთა ერთობლიობანი განსაკუთრებული თვისების სიმბოლოებით წარმოგვიდგება. მათი გარდაქმნა საბაზისო სისტემის ცვლის დროს სავსებით გარკვეული წესით ხდება და, ამის გამო, ისინი სპეციალურად შეისწავლებიან. მათ *ტენზორებს* უწოდებენ. მოვიყვანოთ ტენზორთა განმარტებანი.

განმარტება I. a_i *რიცხვთა ერთობლიობას ეწოდება პირველი რანგის ტენზორი, თუ რიცხვთა ეს ერთობლიობა გარდაიქმნება (37) ფორმულით. ერთობლიობის ელემენტებს, ე. ი.* a_1, a_2, a_3 *რიცხვებს ეწოდება* a_i *ტენზორის კომპონენტები.*

განმარტება II. a_{ij} *რიცხვთა ერთობლიობას ეწოდება მეორე რანგის ტენზორი, თუ რიცხვთა ეს ერთობლიობა გარდაიქმნება (38) ფორმულით. ერთობლიობის ელემენტებს, ე. ი.* (a_{ij}) *მატრიცის ელემენტებს, ეწოდება* a_{ij} *ტენზორის კომპონენტები.*

განმარტება III. b^i *რიცხვთა ერთობლიობას ეწოდება პირველი რანგის ტენზორი, თუ რიცხვთა ეს ერთობლიობა გარდაიქმნება (39) ფორმულით. რიცხვთა ამ ერთობლიობის ელემენტებს, ე. ი.* b^1, b^2, b^3 *რიცხვებს, ეწოდება* b^i *ტენზორის კომპონენტები.*

განმარტება IV. a_{ij}^{k} *რიცხვთა ერთობლიობას ეწოდება მესამე რანგის ტენზორი, თუ რიცხვთა ეს ერთობლიობა გარდაიქმნება (40) ფორმულით. რიცხვთა ამ ერთობლიობის ელემენტებს ეწოდება* a_{ij}^{k} *ტენზორის კომპონენტები.*

1 და 2 თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ტენზორები განსაზღვრავს ვექტორთა კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კოორდინატების ინვარიანტულ ფორმებს, ე. ი. თუ a_i, b^i, a_{ij}, a_{ij}^{k} ტენზორებია, მაშინ

$$a_iX^i,\ \ b^iX_i,\ a_{ij}X^iY^j,\ a_{i\ j}^{\ k}X^iY^jZ_k$$

ინვარიანტებია და, პირუკუ, თუ აღებული a_i, b^i, a_{ij},a_{ij}^k რიცხვთა ერთობლიობანი ინვარიანტულ ფორმებს ჰქმნის, მაშინ, იმავე 1 და 2 თეორემათა საფუძველზე, ეს ერთობლიობანი ტენზორები იქნება. შემდგომ, ტენზორთა შესწავლის დროს, ჩვენ ვისარგებლებთ როგორც ტენზორის განმარტებით, ე. ი. გარდაქმნის სპეციალური ფორმულით, ისე ტენზორთან დაკავშირებულ ინვარიანტული ფორმით.

ტენზორებისათვის განიხილება შემდეგი ძირითადი მოქმედებები.

1. ტ ე ნ ზ ო რ თ ა შ ე კ რ ე ბ ა. ავიღოთ ორი პირველი რანგის a_i და b_i ტენზორი და შევადგინოთ რიცხვთა c_i ერთობლიობა შემდეგი წესით:

$$c_i=a_i+b_i.$$

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ c_i იქნება ტენზორი. რადგან a_i და b_i ტენზორებია, ამიტომ

$$a_iX^i=\text{ინვ}$$

და

$$b_iX^i=\text{ინვ},$$

სადაც ინვ-ით ჩვენ აღვნიშნავთ ინვარიანტს. განვიხილოთ

$$c_iX^i.$$

გვექნება:

$$c_iX^i=(a_i+b_i)X^i=a_iX^i+b_iX^i=\text{ინვ}+\text{ინვ}=\text{ინვ}.$$

მაშასადამე, c_1 არის ტენზორი. მას ეწოდება აღებულ ტენზორთა ჯამი. აქვე შევნიშნავთ, რომ შ ე კ რ ე ბ ა გ ა ნ მ ა რ ტ ე ბ უ ლ ი ა მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ნ ა ი რ ი რ ა ნ გ ი ს ტ ე ნ ზ ო რ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს.

2. ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ უ ლ ი ს კ ა ლ ა რ ი ს ა დ ა ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი. ავიღოთ φ ინვარიანტული სკალარი და a_i ტენზორი. შევადგინოთ რიცხვთა შემდეგი ერთობლიობა:

$$\varphi\, a_i.$$

რადგან a_i არის ტენზორი, ამიტომ $a_iX^i=\text{ინვ}$. მაშასადამე,

$$(\varphi a_i)X^i=\varphi\quad a_iX^i=\varphi\ .\ \text{ინვ}=\text{ინვ}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ φa_i არის ტენზორი. მას ეწოდება ინვარიანტული სკალარისა და ტენზორის ნამრავლი.

3. ტ ე ნ ზ ო რ თ ა გ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ა. ავიღოთ ორი a_i და a_j^k ტენზორი, შევადგინოთ რიცხვთა შემდეგი ერთობლიობა:

$$c_{ij}^k=a_ia_j^k\,.$$

განვიხილოთ მესამე რიგის ფორმა:

$$c_{ij}^kX^iY^jZ_k=a_ia_j^k\ X^iY^jZ_k=(a_iX^i)(a_j^k\ Y^jZ_k)=(\text{ინვ})\cdot(\text{ინვ})=\text{ინვ}.$$

რადგან იგი ინვარიანტია, ამიტომ c_{ij}^k არის ტენზორი. მას უწოდებენ აღებულ a_i და a_j^k ტენზორების ნამრავლს. ადვილი შესამჩნევია, რომ ტ ე ნ ზ ო რ თ ა ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს რ ა ნ გ ი ყ ო ვ ე ლ თ ვ ი ს უ დ რ ი ს თ ა ნ ა მ ა მ რ ა ვ ლ თ ა რ ა ნ გ ე ბ ი ს ჯ ა მ ს.

4. ტენზორის შეკუმშვა ანუ შინაგანი აჯამვა. განვიხილოთ რაიმე a_{ij}^k ტენზორი და ამ ტენზორის ორი ნიშნაკი ინდექსი, მაგალითად j და k გავუტოლოთ ერთი მეორეს; ამავე დროს ძალაში დავტოვოთ შეთანხმება, რომ გამოსახულებაში განმეორებული ქვედა და ზედა ნიშნაკი აჯამვის მაჩვენებელია. მივიღებთ რიცხვთა შემდეგ ერთობლიობას:

$$a_i = a_{ik}^k.$$

ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს ერთობლიობა არის ტენზორი. რადგან a_{ij}^k ტენზორია, ამიტომ

$$'a_{ij}^k = \lambda_i^e \lambda_j^s \widetilde{\lambda}_r^k a_{es}^r.$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $j=k$; მივიღებთ:

$$'a_{ik}^k = \lambda_i^e (\lambda_k^s \ \widetilde{\lambda}_r^k) a_{es}^r = \lambda_i^e \ \delta_r^s a_{es}^r = \lambda_i^e a_{es}^s,$$

ანუ

$$'a_i = \lambda_i^k a_k.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ a_i (ანუ a_{ik}^k) არის ტენზორი. ამ მოქმედებას ეწოდება ტენზორის შეკუმშვა j და k ინდექსების მიმართ. ამავე მოქმედებას უწოდებენ აგრეთვე შინაგან აჯამვასაც.

თუ X^i არის პირველი რანგის ტენზორი, ხოლო a_j^k მეორე რანგის ტენზორი, მაშინ მათი ნამრავლი $a_j^i X^k$ მესამე რანგის ტენზორია და შეკუმშვით მივიღებთ პირველი რანგის $a_k^i X^k$ ტენზორს. ამ მოქმედებას ეწოდება a_j^i ტენზორის შეკუმშვა X^j ტენზორით.

5. ინდექსის აწევა და დაწევა. განვიხილოთ a_{ij} და b_e^k ტენზორები. მოვახდინოთ მათი გადამრავლება და შემდეგ შეკუმშვა რომელიმე ინდექსთა წყვილის მიმართ, მაგალითად j და k ინდექსების მიმართ. მივიღებთ მეორე რანგის ტენზორს

$$c_{ie} = a_{ik} b_e^k.$$

ამ მოქმედებას ეწოდება b_e^k ტენზორის ზედა ნიშნაკის დაწევა a_{ij} ტენზორის საშუალებით.

ამის მსგავსად, თუ მოცემულია a^{ij} და b_k^e ტენზორები, მაშინ მათი გადამრავლება და შემდგომ შეკუმშვა რომელიმე, მაგალითად j და k, ნიშნაკების მიმართ, მოგვცემს მეორე რანგის ტენზორს:

$$c^{ie} = a^{ik} b_k^e.$$

ამ მოქმედებას ეწოდება b_k^e ტენზორის ქვედა ნიშნაკის აწევა a^{ij} ტენზორის საშუალებით.

6. მეორე რანგის ტენზორის შექცეული ტენზორი. ავიღოთ მეორე რანგის a_{ij} ტენზორი და განვიხილოთ (a_{ij}) მატრიცის შექცეული $(\widetilde{a}^{ij})$ მატრიცი. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს შექცეული მატრიცი ქმნის ტენზორს. ამისათვის განვიხილოთ ორადწრფივი ფორმა

$$\widetilde{a}^{ij} X_i Y_j.$$

(14) ფორმულიდან X^j-ის ამოხსნა მოგვცემს:

$$\widetilde{a}^{ij} X_i = X^j.$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\widetilde{a}^{ij} X_i Y_j = X^j Y_j = \text{ინვ}.$$

მაშასადამე, $\widetilde{a}^{ij}$ არის ტენზორი.

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა.

1. ნულ-ტენზორი. თუ ტენზორის ყველა კომპონენტი ერთ რომელიმე საბაზისო სისტემაში ნულია, მაშინ მისი კომპონენტები ნული იქნება ნებისმიერ საბაზისო სისტემაშიც. ეს თვისება პირდაპირ გამომდინარეობს ტენზორის განმარტებიდან: ტენზორის კომპონენტები ახალ საბაზისო სისტემაში წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციებია იმავე ტენზორის ძველი კომპონენტებისა და თუ ამ უკანასკნელთ ნულებად მივიღებთ, მაშინ პირველებიც ნულები იქნება. მაგალითად, პირველი რანგის ტენზორისათვის გვაქვს:

$$'a_i = \lambda_i^j a_j.$$

თუ $a_i = 0$, მაშინ $'a_i = 0$. ნულკომპონენტებიან ტენზორს ნულ-ტენზორი ეწოდება.

2. სიმეტრიული ტენზორი. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ტენზორის ნიშნაკების გადანაცვლებით მიღებულ რიცხვთა ერთობლიობა აგრეთვე ტენზორია. ამისათვის ავიღოთ მეორე რანგის a_{ij} ტენზორი (სხვა რანგის ტენზორისათვის ეს ფაქტი ანალოგიურად დამტკიცდება) და განვიხილოთ a_{ji}. გვექნება:

$$a_{ji} X^j Y^i = a_{ij} X^i Y^j = \text{ინვ},$$

საიდანაც ჩანს, რომ a_{ji} არის ტენზორი. თუ რაიმე საბაზისო სისტემაში $a_{ij} = a_{ji}$, მაშინ ახალ საბაზისო სისტემაშიც $'a_{ij} = 'a_{ji}$. მართლაც, თუ

$$a_{ij} = a_{ji}$$

ანუ

$$a_{ij} - a_{ji} = 0,$$

მაშინ, თანახმად ნულ-ტენზორის თვისებისა,

$$'a_{ij} - 'a_{ji} = 0.$$

ამრიგად, ტენზორის განმსაზღვრელი მატრიცის სიმეტრია ტენზორული ხასიათის თვისებაა. ისეთ a_{ij} ტენზორს, რომელიც აკმაყოფილებს სიმეტრიის

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{41}$$

პირობას, სიმეტრიული ტენზორი ეწოდება.

3. ანტისიმეტრიული ტენზორი. განვიხილოთ ისეთი a_{ij} ტენზორი, რომელიც რაიმე საბაზისო სისტემაში აკმაყოფილებს

$$a_{ij} = -a_{ji} \tag{42}$$

პირობას. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ აღებული ტენზორი იმავე პირობას დააკმაყოფილებს ნებისმიერ სხვა საბაზისო სისტემაშიც. მართლაც, (42) პირობა ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

თანახმად ნულ-ტენზორის თვისებისა,

$$'a_{ij} + 'a_{ji} = 0.$$

აქედან კი

$$'a_{ij} = -'a_{ji},$$

რაც ამტკიცებს გამოთქმულ აზრს. ტენზორს, რომელიც (42) პირობას აკმაყოფილებს, **ანტისიმეტრიული ტენზორი** ეწოდება.

4. **მეორე რანგის ტენზორის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილები.**

განვიხილოთ მეორე რანგის რომელიმე a_{ij} ტენზორი. რადგან a_{ij} და a_{ji} აგრეთვე ტენზორებია, ამიტომ მათი ჯამის ახევარი და მათი სხვაობის ნახევარი აგრეთვე ტენზორები იქნება. ამ უკანასკნელ ტენზორებს აღვნიშნავთ ასე: $a_{(ij)}$ და $a_{[ij]}$. ამრიგად, გვექნება:

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),$$

$$a^{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - {}_{ji}). \tag{43}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $a_{(ij)}$ ტენზორი სიმეტრიულია. ამიტომ მას **ტენზორის სიმეტრიული ნაწილი** ეწოდება. ასევე, $a_{[ij]}$ **ანტისიმეტრიული ტენზორია** და მას a_{ij} **ტენზორის ანტისიმეტრიული ნაწილი** ეწოდება. (43) ტოლობათა შეკრება მოგვცემს:

$$a_{ij} = a_{(ji)} + \alpha_{[ij]}. \tag{44}$$

ამრიგად, **მეორე რანგის ნებისმიერი ტენზორი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ მისი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილების ჯამის** სახით. კერძოდ, თუ ტენზორი სიმეტრიულია, მაშინ $a_{(ij)} = a_{ij}$ და $a_{[ij]} = 0$, ხოლო თუ ანტისიმეტრიულია, მაშინ $a_{(ij)} = 0$ და $a_{[ij]} = a_{ij}$. სავსებით იმავე წესით, როგორც ეს მეორე რანგის ტენზორისათვის იყო გაკეთებული, შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილები რომელიმე ინდექსთა წყვილის მიმართ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ტენზორთა წრფივი ნაერთის (ჯამის) სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილები აგრეთვე წრფივი ნაერთებია იმავე ტენზორების სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილებისა შესაბამისად. ეს ფაქტი სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{(ij)} = \lambda a_{(ij)} + \mu b_{(ij)},$$

$$(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{[ij]} = \lambda a_{[ij]} + \mu b_{[ij]}.$$

ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ **ტენზორულ გამოსახულებაში ტოლობა არ დაირღვევა, თუ ტოლობის ორივე მხარის ტენზორულ გამოსახულებებს შევცვლით მათი სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული ნაწილებით, შესაბამისად.** ამ მოქმედებებს ეწოდებათ ტენზორული ტოლობის **სიმეტრირება** და **ალტერნირება**, შესაბამისად.

5. **ბივექტორი.** პირველი რანგის a^i ტენზორი, განმარტების თანახმად, ისევე გარდაიქმნება, როგორც ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები. ამიტომ ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატების ერთობლიობა შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პირველი რანგის ტენზორი, და პირუკუ. ნებისმიერ

პირველი რანგის a^i ტენზორს შეგვიძლია შევუთანადოთ ერთი გარკვეული ვექტორი, რომელსაც აღებული ტენზორის კომპონენტები ექნება კონტრავარიანტულ კოორდინატებად, ე. ი. a^i ტენზორს ეთანადება ვექტორი

$$\overline{P}=\overline{a^i e_i}.$$

ასევე, $\overline{P}(X^1, X^2, X^3)$ ვექტორს ეთანადება X^i ტენზორი.

მეორე რანგის ტენზორი ისე მარტივად უკვე აღარ უკავშირდება ვექტორებს, როგორც პირველი რანგის ტენზორი. ვექტორთა წყვილს უკავშირდება სპეციალური ტენზორი, რომელიც მოცემული

$$\overline{P}=(X^1, X^2, X^3),$$

$$\overline{Q}=(Y^1, Y^2, Y^3)$$

ვექტორების კოორდინატებისაგან განისაზღვრება

$$P^{ij}=X^iY^j-X^jY^i \tag{45}$$

ფორმულით. ამ განსაზღვრიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ P^{ij} ანტისიმეტრიული ტენზორია, ე. ი.

$$P^{ij}=-P^{ji}.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} &P^{11}=P^{22}=P^{33}=0,\\ &P^{23}=-P^{32}=X^2Y^3-X^3Y^2,\\ &P^{31}=-P^{13}=X^3Y^1-X^1Y^3,\\ &P^{12}=-P^{21}=X^1Y^2-X^2Y^1. \end{aligned} \tag{46}$$

ამრიგად, P^{ij} ტენზორს მხოლოდ სამი დამოუკიდებელი, ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტი აქვს. ესენია: P^{23}, P^{31} და P^{12}. თუ გავიხსენებთ ორი ვექტორის გარენამრავლს, შევამჩნევთ, რომ P^{23}, P^{31}, P^{12} მოცემული ვექტორების გარენამრავლის კოორდინატებია. ამრიგად, (45) ფორმულით განსზღვრულ ტენზორს უკავშირდება ერთი გარკვეული ვექტორი სივრცეში—მოცემული ვექტორების გარენამრავლი. ამ ტენზორს ეწოდება ბ ი ვ ე ქ ტ ო რ ი. გამოვსახოთ ბივექტორი მოცემული ვექტორების კოვარიანტული კოორდინატებით. ამისათვის განვიხილოთ

$$P_{ij}=a_{ik}a_{js}P^{ks}. \tag{47}$$

შევიტანოთ აქ P^{ks}-ის მნიშვნელობა (45) ფორმულიდან. გვექნება:

$$P_{ij}=a_{ik}a_{js}(X^kY^s-X^sY^k)=a_{ik}X^k\cdot a_{js}Y^s-a_{js}X^s\cdot a_{ik}Y^k.$$

(14) ფორმულის თანახმად,

$$P_{ij}=X_iY_j-X_jX_i. \tag{48}$$

ამიტომ P_{ij}-ის ეწოდება P^{ij} ბივექტორის კოვარიანტული კომპონენტები.

ვექტორის სიგრძის კვადრატის (16) ფორმულის ანალოგიურად შემოდის ბივექტორის სიგრძის კვადრატის განმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$S^2=\frac{1}{2}P_{ij}P^{ij}=\frac{1}{2}a_{ik}a_{js}P^{ij}P^{ks}. \tag{49}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ S არის $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი.

6. კ რ ო ნ ე კ ე რ ი ს ს ი მ ბ ო ლ ო. ჩვენ უკვე განმარტებული გვქონდა კრონეკერის სიმბოლო δ^j_i (ერთეული მატრიცი). ახლა დავამტკიცებთ, რომ კრონეკერის სიმბოლო არის ტენზორი. მართლაც, თუ განვიხილავთ კრონეკერის სიმბოლოსთან დაკავშირებულ მეორე რიგის

$$\delta^j_i X^i Y_j = X^i Y_j = \text{ინვ.}$$

ფორმას, შევამჩნევთ, რომ δ^j_i არის ტენზორი. აქვე აღვნიშნოთ კიდევ ერთი შესანიშნავი თვისება δ^j_i სიმბოლოსი. განვიხილოთ ამ ტენზორის შექცეული $\widetilde{\delta^j_i}$ ტენზორი. (24) ფორმულის თანახმად,

$$\widetilde{\delta}^k_i \delta^j_k = \delta^j_i.$$

მეორე მხრივ, რადგან δ^j_i არ ცვლის ობიექტს,

$$\delta^j_k \widetilde{\delta}^k_i = \widetilde{\delta}^j_i.$$

ამრიგად, მივიღებთ δ^i_j სიმბოლოს შემდეგ თვისებას:

$$\delta^j_i = \widetilde{\delta}^j_i. \tag{50}$$

ეს თვისება შესაძლებელია მიღებულ იქნეს თვით შექცეული მატრიცის განმარტებიდან. მართლაც, ამ შემთხვევაში შექცეული მატრიცის ელემენტები, როგორც $|\delta^j_i|$ დეტერმინანტის დაყვანილი მინორები აგრეთვე ერთეულ მატრიცს ქმნის.

თავი II

ტენზორთა ანალიზის ელემენტები

§ 54. ზედაპირთან დაკავშირებული ძირითადი ტენზორები

ჩვენ უკვე გვქონდა გამოყვანილი ზედაპირის სიმბოლური განტოლება

$$M=M(u,\ v),$$

სადაც $u,\ v$ მრუდწირული კოორდინატებია. ტენზორული აღნიშვნების გამოსაყენებლად უმჯობესია $u,\ v$ პარამეტრები ასე შევცვალოთ:

$$\begin{aligned} u&=u^1,\\ v&=u^2, \end{aligned} \tag{51}$$

ე. ი. მრუდწირულ კოორდინატებად განვიხილოთ $u^1,\ u^2$. ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივია შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} \overline{M}_u&=\frac{\partial \overline{M}}{\partial u}=\frac{\partial \overline{M}}{\partial u^1}=\overline{M}_1,\\ \overline{M}_v&=\frac{\partial \overline{M}}{\partial v}=\frac{\partial \overline{M}}{du^2}=\overline{M}_2, \end{aligned} \tag{52}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{\partial \overline{M}}{du^i}=\overline{M}_i \quad (i=1,\ 2). \tag{53}$$

აქედან აშკარაა, რომ $\overline{M}_1,\ \overline{M}_2$ ვექტორები მხებ სიბრტყეზე მდებარეობს.

ამ აღნიშვნების შედეგად წერტილის დიფერენციალი ასე წარმოგვიდგება:

$$d\overline{M}=\overline{M}_u d_u+\overline{M}_v dv=\overline{M}_1 du^1+\overline{M}_2 du^2=\overline{M}_i du^i,$$

ე. ი.

$$d\overline{M}=\overline{M}_i du^i. \tag{54}$$

შენიშვნა. საზოგადოდ წერტილებისა და ვექტორების წარმოებულებს აღვნიშნავთ იმავე ასოებით, რომლებითაც აღებული წერტილები და ვექტორებია აღნიშნული და მათ მარჯვნივ დაბლა მივუწერთ იმ პარამეტრების ინდექსებს, რომლებითაც გაწარმოება ხდება. მაგალითად:

$$\frac{\partial \overline{M}}{du^i}=\overline{M}_i, \qquad \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial u_i du^j}=\overline{M}_{ij}, \ldots$$

არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ეს შეთანხმება მხოლოდ წერტილებისა და ვექტორების წარმოებულებს ეხება, სკალარ სიდიდეებზე კი მას არ ვავრცელებთ. სკალარების წარმოებულთათვის შემოგვაქვს ასეთი აღნიშვნები.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u^i}=\partial_i\lambda, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial u^i\,\partial u^j}=\partial_{ij}\lambda, \ldots$$

სადაც λ მოცემული სკალარია.

ზედაპირის წირითი ელემენტისათვის გვექნება:

$$ds^2=\overline{dM}^2=\overline{dM}\cdot\overline{dM}=(\overline{M}_i du^i)\cdot(\overline{M}_i du^i).$$

რადგან

$$\overline{M}_i du^i=\overline{M}_j du^j,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$ds^2=\overline{M}_i\cdot\overline{M}_j du^i du^j,$$

სადაც $\overline{M}_i\cdot\overline{M}_j$ სკალარული ნამრავლია $\overline{M}_i$, $\overline{M}_j$ ვექტორების. თუ აღვნიშნავთ

$$a_{ij}=\overline{M}_i\cdot\overline{M}_j, \tag{55}$$

მაშინ წირითი ელემენტი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$ds^2=a_{ij}du^i du^j, \tag{56}$$

სადაც, (55) ფორმულის თანახმად, $a_{ij}=a_{ji}$. თუ (56) კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს, ე. ი. a_{11}, a_{12}, a_{22} შევადარებთ გაუსის აღნიშვნებს წირითი ელემენტის კოეფიციენტებისათვის, მივიღებთ ასეთ დამოკიდებულებას მათ შორის:

$$\begin{gathered} a_{11}=e,\ a_{12}=f,\ a_{22}=g, \\ |a_{ij}|=eg-f^2. \end{gathered} \tag{57}$$

ახლა განვიხილოთ II კვადრატული დიფერენციალური ფორმა:

$$d\sigma^2=\overline{K}\cdot d^2\overline{M}=-\overline{dK}\cdot\overline{dM}.$$

რადგან

$$\frac{\partial\overline{M}}{\partial u^i}=\overline{M}_i,$$

ამიტომ

$$\frac{\partial^2\overline{M}}{\partial u^i\partial u^j}=\frac{\partial\overline{M}_i}{\partial u^j}=\overline{M}_{ij}. \tag{58}$$

აქედან აშკარაა, რომ ამ ტოლობათა და ზემოთ მოყვანილი აღნიშვნების მიხედვით, $d^2\overline{M}$ ასე წარმოგვიდგება:

$$\begin{aligned} d^2\overline{M} &= \frac{\partial^2\overline{M}}{du^2}\,(du)^2+2\frac{\partial^2\overline{M}}{dudv}\,dudv+\frac{\partial^2\overline{M}}{dv^2}\,(dv)^2+\overline{M}_u d^2u+\overline{M}_v d^2v= \\ &=\overline{M}_{11}(du^1)^2+2\overline{M}_{12}du^1du^2+\overline{M}_{22}(du^2)^2+\overline{M}_1 d^2u^1+\overline{M}_2 d^2u^2= \\ &=\overline{M}_{ij}du^i du^j+\overline{M}_i d^2u^i. \end{aligned}$$

ამრიგად (აჯამვის ტენზორული სიმბოლიკის მიხედვით).

$$d^2\overline{M} = \overline{M}_{ij}du^i du^j + \overline{M}_i d^2u^i. \tag{59}$$

რადგან $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ ვექტორები მხებ სიბრტყეზეა მოთავსებული და $\overline{K}$ კი ნორმალის მგეზავია, ამიტომ

$$\overline{K} \cdot \overline{M}_i = 0. \tag{60}$$

შევიტანოთ $d^2\overline{M}$-ის გამოსახულება (59) ტოლობის მიხედვით მეორე კვადრატული ფორმის გამოსახულებაში (ე. ი. 59-ე ტოლობა გადავამრავლოთ $\overline{K}$-ზე) და მხედველობაში მივიღოთ (60) ტოლობა. მივიღებთ:

$$d\sigma^2 = \overline{K}\ \overline{M}_{ij}du^i du^j.$$

თუ მოვახდენთ

$$b_{ij} = \overline{K} \cdot \overline{M}_{ij} \tag{61}$$

აღნიშვნას, მაშინ

$$d\sigma^2 = b_{ij}du^i du^j, \tag{62}$$

სადაც, $\overline{M}_{ij} = \overline{M}_{ji}$-ის ტოლობის გამო,

$$b_{ij} = b_{ji}, \tag{63}$$

თუ შევადარებთ (62) კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს ამ წიგნის III თავში მოყვანილ ამავე ფორმის კოეფიციენტებს, შემდეგ დამოკიდებულებებს მივიღებთ:

$$b_{11} = l,\ b_{12} = m,\ b_{22} = n. \tag{64}$$

ახლა განვიხილოთ იმავე ფორმისათვის ასეთი ფორმულა:

$$d\sigma^2 = -d\overline{K} \cdot d\overline{M}.$$

რადგან

$$d\overline{M} = \frac{\partial \overline{M}}{\partial n^i}\, dv^i = \overline{M}_i du^i,$$

$$d\overline{K} = \frac{\partial \overline{K}}{du^i}\, du^i = \overline{K}_j du^j,$$

ამიტომ

$$d\sigma^2 = \left(-\frac{\partial \overline{M}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \overline{K}}{\partial u^j}\right) du^i du^j = (-M_i \cdot \overline{K}_j) du^i du^j.$$

აქედან ჩანს, რომ

$$b_{ij} = -\frac{\partial \overline{M}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \overline{K}}{\partial u^j} = -\overline{M}_i \cdot \overline{K}_j. \tag{65}$$

ნორმალის მგეზავის ფორმულა (1 ნაწ., III თავი).

$$\overline{K} = \frac{[\overline{M}_u,\ \overline{M}_v]}{\sqrt{eg - f^2}},$$

(52) და (57) ფორმულების თანახმად, მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\overline{K} = \frac{[\overline{M}_1,\ \overline{M}_2]}{\sqrt{|a_{ij}|}}. \tag{66}$$

თუ შევიტანთ $\overline{K}$-ს მნიშვნელობას (66) ფორმულიდან (61) ფორმულაში, b_{ij}-თვის მივიღებთ შემდეგ გამოსათვლელ ფორმულას:

$$b_{ij}=\frac{[\overline{M}_1,\ \overline{M}_2,\ \overline{M}_{ij}]}{\sqrt{|a_{ij}|}}. \tag{67}$$

როგორც ცნობილია, ზედაპირის I და II კვადრატული დიფერენციალური ფორმები მთავარ როლს თამაშობს ზედაპირის შესწავლის საქმეში. ამ ფორმებს კი განსაზღვრავს (a_{ij}) და (b_{ij}) მატრიცები, რომლებიც, ცხადია, მრუდწირული კოორდინატების, ე. ი. u^1, u^2 პარამეტრების ფუნქციებია. როცა მრუდწირული კოორდინატები იცვლება, მაშინ იცვლება აგრეთვე (a_{ij}) და (b_{ij}) მატრიცები, მაგრამ თვით I და II ფორმები არ იცვლება. მართლაც.

$$ds^2=d\overline{M}^2,\ \ d\sigma^2=-d\overline{K}\cdot d\overline{M}$$

არ იცვლება, რადგან $d\overline{M}$ და $d\overline{K}$ ინვარიანტებია მრუდწირული კოორდინატების ცვლის. ამრიგად, a_{ij} და b_{ij} მრუდწირული კოორდინატების ცვლის მიმართ ინვარიანტული ფორმების კოეფიციენტებია. ვთქვათ, მრუდწირული კოეფიციენტები იცვლება შემდეგი ფუნქციებით:

$$u^1=u^1('u^1,\ 'u^2),$$

$$u^2=u^2('u^1,\ 'u_2),$$

ანუ

$$u^i=u^i('u^1,\ 'u^2).$$

გამოვითვალოთ du^i, გვექნება:

$$du^i=\frac{\partial u^i}{\partial' u^1}\,d'u^1+\frac{\partial u^i}{\partial' u^2}\,d'u^2=\frac{\partial u^i}{\partial' u^j}d'u^j,$$

ე. ი. საბოლოოდ

$$du^i=\frac{\partial u^i}{\partial' u^j}d'u^j. \tag{68}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$d'u^i=\frac{\partial' u^i}{\partial u^j}\,du^j. \tag{69}$$

თუ აღვნიშნავთ:

$$\lambda^i_j=\frac{\partial' u^i}{\partial' u^j} \tag{70}$$

მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\widetilde{\lambda}^i_j=\frac{\partial' u^i}{\partial u^j}. \tag{71}$$

მართლაც

$$\lambda^i_k=\frac{\partial' u^k}{\partial u^j}=\frac{\partial u^i}{\partial' u^k}\frac{\partial' u^k}{\partial u^j}=\frac{\partial u^i}{\partial u^j}.$$

რადგან u^1, u^2 დამოუკიდებელი პარამეტრებია, ამიტომ

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j}=1,\ \text{როცა}\ i=j,$$

ე. ი.

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j}=0, \text{ როცა } i\neq j,$$

ამრიგად,

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j}=\delta^i_j \tag{72}$$

$$\lambda^i_k\frac{\partial' u^i}{\partial u^i}=\delta^i_j.$$

აქედან აშკარაა, რომ

$$\frac{\partial' u^i}{\partial u^j}=\widetilde{\lambda}^i_j.$$

(70) და (71) აღნიშვნების თანახმად, (68) და (69) ტოლობები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{gathered} du^i=\lambda^i_j d' u^j, \\ d' u^i=\widetilde{\lambda}^i_j du^j. \end{gathered} \tag{73}$$

ახლა თუ აღვნიშნავთ

$$\overline{M}_i=\frac{\partial \overline{M}}{\partial' u^i}, \tag{74}$$

მაშინ ადვილად მივიღებთ $\overline{M}_j$-ისათვის შემდეგ გარდაქმნის კანონს:

$$'\overline{M}_i=\frac{\partial \overline{M}}{\partial' u^i}=\frac{\partial \overline{M}}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial' u^i}=\overline{M}_j\lambda^j_i,$$

ე. ი.

$$'\overline{M}_i=\lambda^j_i\overline{M}_j. \tag{75}$$

ამრიგად, ზედაპირის მხებ სიბრტყეზე მდებარე $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ ვექტორები მრუდწირული კოორდინატების ცვლის დროს გარდაიქმნება (75) ფორმულებით და (λ^i_j) მატრიცი, რომელიც დაკავშირებულია მრუდწირული კოორდინატების ცვლასთან (70) აღნიშვნით, არის ამ ვექტორების გარდამქმნელი მატრიცი. ამასთან დაკავშირებით შემოგვყავს ასეთი განმარტებები:

განმარტება V. $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ ვექტორებისაგან შედგენილ ერთობლიობას ეწოდება ზედაპირის შინაგანი საბაზისო სისტემა. ყოველ ვექტორს, რომელიც კომპლანარულია ზედაპირის შინაგანი საბაზისო სისტემის ვექტორებისა, ეწოდება ზედაპირის ვექტორი.

განმარტება VI. ნებისმიერ a_1, a_2 რიცხვთა ერთობლიობას, რომლებიც u^1, u^2 პარამეტრების ფუნქციებია, ეწოდება პირველი რანგის ტენზორი, თუკი ეს ერთობლიობა გარდაიქმნება ისევე, როგორც შინაგანი საბაზისო სისტემის ვექტორები, ე. ი. თუ რიცხვთა ეს ერთობლიობა გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულით:

$$'a_i=\lambda^j_i a_j. \tag{76}$$

I თავში მოყვანილ განმარტებათა ანალოგიურად განიმარტება სხვა რანგის ტენზორებიც.

V განმარტების თანახმად, (57) ფორმულით მოცემული $d\overline{M}$ ვექტორი არის $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$ ვექტორებთან კომპლანარული და, მაშასადამე, ზედაპირის ვექტორი. du^1, du^2 სიდიდენი კი მისი კონტრავარიანტული კოორდინატებია $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$ ვექტორების, ე. ი. შინაგანი საბაზისო სისტემის მიმართ.

VI განმარტების თანახმად, (73) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ du^1, du^2 სიდიდეთა ერთობლიობა განსაზღვრავს პირველი რანგის ტენზორს: ამრიგად du^i პ ი რ ვ ე ლ ი რ ა ნ გ ი ს ტ ე ნ ზ ო რ ი ა.

განვიხილოთ ახლა a_{ij} სიდიდეთა ცვლა; (55) ფორმულის თანახმად,

$$'a_{ij}=\overline{'M_i}\cdot\overline{'M_j}.$$

შევიტანოთ აქ $\overline{'M_i}$, $\overline{'M_j}$-ის მნიშვნელობები (75) ფორმულის მიხედვით; გვექნება:

$$'a_{ij}=\lambda_i^k\overline{M_k}\cdot\lambda_j^t\overline{M_t}=\lambda_i^k\lambda_j^t\overline{M_k}\cdot\overline{M_t}.$$

რადგან, (55) ფორმულის ძალით, $\overline{M_k}\cdot\overline{M_t}=a_{kt}$, ამიტომ

$$'a_{ij}=\lambda_i^k\lambda_j^t a_{kt}. \tag{77}$$

აქედან ჩანს, რომ a_{ij} სიდიდეთა ერთობლიობა, ე. ი. პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების ერთობლიობა განსაზღვრავს მეორე რანგის ტენზორს. მას ე წ ო დ ე ბ ა ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ უ რ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი. (a_{ij}) მატრიცის ტენზორული ხასიათი იქიდანაც აშკარაა, რომ ეს მატრიცი წარმოადგენს ზედაპირის du^i და du^i ვექტორებისაგან შედგენილ ინვარიანტული ფორმის კოეფიციენტების ერთობლიობას.

სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება (b_{ij}) მატრიცის ტენზორული ხასიათი. ეს მატრიციც, როგორც აღნიშნული იყო, ინვარიანტული კვადრატული დიფერენციალური ფორმის კოეფიციენტების ერთობლიობისაგან წარმოგვიდგება. თუ ვისარგებლებთ (65) ფორმულით და პირდაპირ გამოთვლებს მივმართავთ, ადვილად მივიღებთ იგივე შედეგს; მართლაც, (65) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$'b_{ij}=-\overline{'M_i}\cdot\overline{'K_j}.$$

შევიტანოთ აქ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\overline{'M_i}=\lambda_i^k M_k,$$

$$\overline{'K_j}=\frac{\partial\overline{K}}{\partial' u^j}=\frac{\partial\overline{K}}{\partial u^r}\frac{\partial u^r}{\partial' u^j}=\lambda_j^r\overline{K_r},$$

მივიღებთ:

$$'b_{ij}=-\lambda_i^k\lambda_j^r\overline{M_k}\cdot\overline{K_r}.$$

რადგან (65) ფორმულის თანახმად

$$-\overline{M_k}\cdot\overline{K_r}=b_{kr},$$

ამიტომ

$$'b_{ij}=\lambda_i^k\lambda_j^r b_{kr}, \tag{78}$$

საიდანაც აშკარაა (b_{ij}) მატრიცის ტენზორული ხასიათი.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ საზოგადოდ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი მ რ უ დ წ ი რ უ ლ ი კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი ს ც ვ ლ ი ს ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ უ ლ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი

ფორმის კოეფიციენტების ერთობლიობა განსაზღვრავს ტენზორს, და პირუკუ.

აქ განმარტებულ ტენზორებს ვუწოდებთ ზედაპირთან დაკავშირებულ ტენზორებს; მათზე ვრცელდება იგივე კანონები, რაც მოყვანილი იყო I თავში ტენზორების შესახებ. მაგრამ ამ შემთხვევაში ტენზორების მიმართ განიხილება კიდევ გაწარმოების ოპერაცია, რომელიც განსაკუთრებულ სახეს ღებულობს და სპეციალურ აღრიცხვას ჰქმნის და რომელსაც აბსოლუტური ანალიზი ეწოდება.

ვიდრე ამ აღრიცხვაზე გადავიდოდეთ, აქვე ვაჩვენებთ. რომ ჩვეულებრივი გაწარმოების ოპერაცია საზოგადოდ ცვლის ტოლობის ტენზორულ ხასიათს. ამისათვის განვიხილოთ სკალარი ინვარიანტი ანუ ნული რანგის ტენზორი

$$\varphi=\varphi(u^1,\ u^2).$$

გავაწარმოოთ u^i პარამეტრის მიმართ; გვექნება:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}=\partial_i\varphi.$$

ამ ტოლობის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial' u^i}=\partial_i'\varphi,$$

რადგან

$$\frac{\partial\varphi}{\partial' u^i}=\frac{\partial\varphi}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial' u^i}=\lambda_i^k\partial_k\varphi.$$

ამრიგად,

$$\partial_i'\varphi=\lambda_i^k\partial_k\varphi.$$

აქედან ჩანს, რომ სკალარი ინვარიანტის ნაწილობითი წარმოებულების $\partial_i\varphi$ ერთობლიობა არის პირველი რანგის ტენზორი.

ახლა გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა $'u^j$ პარამეტრით; გვექნება:

$$\partial_{ij}'\varphi=\frac{\partial(\lambda_i^k\partial_k\varphi)}{\partial' u^j}=\frac{\partial(\lambda_i^k\partial_k\varphi)}{\partial u^r}\frac{\partial ur}{\partial' u^j}=(\lambda_i^k\partial_{kr}\varphi+\partial_r\lambda_i^k\partial_k\varphi)\lambda_j.$$

ამრიგად,

$$\partial_{ij}{}'\varphi=\lambda_i^k\partial_j^r\lambda_{kr}\varphi+\lambda_j^r\partial_r\lambda_i^k\partial_k\varphi. \tag{79}$$

აქედან ჩანს, რომ $\partial_{ij}\varphi$ სიდიდეთა ერთობლიობა, ე. ი. ინვარიანტი სკალარის მეორე წარმოებულების ერთობლიობა არ წარმოადგენს ტენზორს; მართლაც, $\partial_{ij}\varphi$ რომ მეორე რანგის ტენზორი იყოს, საჭიროა იგი გარდაიქმნას

$$\partial_{ij}{}'\varphi=\lambda_j^k\lambda_j^r\partial_{kr}\varphi$$

ფორმულით, ე. ი. საჭიროა (79) ტოლობის მარჯვენა მხარეზე მეორე შესაკრები ნულს გაუტოლდეს. ამრიგად, $\partial_{ij}\varphi$ სიდიდენი განსაზღვრავენ ტენზორს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$\lambda_j^r\partial_r\lambda_i^k\partial_k\varphi=0.$$

რადგან φ ნებისმიერი ინვარიანტია, ამიტომ $\partial_k\varphi$ აგრეთვე ნებისმიერია; გვექნება:

$$\lambda_j^r\partial_r\lambda_i^k=0.$$

აქედან $\widetilde{\lambda}_t^j$-ზე გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\partial_t\lambda_i^k=0,$$

ე. ი.

$$\lambda_i^k=\mathrm{const},$$

ანუ

$$\frac{\partial u^i}{\partial' u^j}=\lambda_j^i=\mathrm{const}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$u^i=\lambda_j^{i'}u^j+\lambda^i,$$

სადაც λ_j^i და λ^i მუდმივი რიცხვებია. ამრიგად, $\partial_{ij}\varphi$ მხოლოდ მაშინ წარმოადგენს ტენზორს, როცა მრუდწირული კოორდინატების გარდაქმნა ხდება წრფივი ფუნქციების საშუალებით. ყველა დანარჩენ შემთხვევაში კი, ე. ი. საზოგადოდ, $\partial_{ij}\varphi$ არ არის ტენზორი.

ბოლოს აღვნიშნავთ რამდენიმე სპეციალური სახის ტენზორს იმ სპეციალური ტენზორების დასამატებლად, რომლებიც აღნიშნული იყო პირველ პარაგრაფში.

1) გ რ ა დ ი ე ნ ტ უ ლ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი. განვიხილოთ ინვარიანტი სკალარის ნაწილობითი წარმოებულებისაგან შედგენილი $\partial_i\varphi$ ტენზორი. ინვარიანტი სკალარის დიფერენციალიც, ცხადია, ინვარიანტი იქნება, ე. ი.

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\,du^i=\partial_i\varphi du^i$$

არის ინვარიანტი. $\partial_i\varphi du^i$ წრფივი ფორმის ინვარიანტობა $\partial_i\varphi$ სიდიდეთა ტენზორული ხასიათიდანაც გამომდინარეობს. ეს წრფივი ფორმა არის φ სკალარის სრული დიფერენციალი. საზოგადოდ პირველი რანგის a_i ტენზორისაგან შედგენილი ფორმა არ არის რაიმე სკალარის სრული დიფერენციალი. იმისათვის, რომ a_idu^i იყოს რაიმე φ სკალარის სრული დიფერენციალი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ a_i წარმოგვიდგეს შემდეგი სახით:

$$a_i=\partial_i\varphi.$$

აქედან გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial a_i}{\partial u^j}=\partial_{ij}\varphi.$$

ანალოგიურად

$$\frac{\partial a_j}{\partial u_i}=\partial_{ji}\varphi.$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\frac{\partial a_i}{\partial u^j}=\frac{\partial a_j}{\partial u^i}. \tag{80}$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ a_idu^i ფორმა იყოს რაიმე ფუნქციის სრული დიფერენციალი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ a_i ტენზორი აკმაყოფილებდეს (80) პირობას, ასეთ ტენზორს ეწოდება გ რ ა დ ი ე ნ ტ უ ლ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი.

2) ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ე ბ ი ა ნ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი. განვიხილოთ რაიმე ვექტორი, ინვარიანტულად დაკავშირებული ზედაპირის M წერტილთან

$$\overline{P}=\overline{P}\,(u^1,\ u^2).$$

ვექტორის სრული დიფერენციალი

$$d\overline{P}=\frac{d\overline{P}}{\partial u^i}du^i=\overline{P}_i du^i$$

იქნება მრუდწირული კოორდინატების ცვლის ინვარიანტი; ამიტომ $\overline{P}_1,\ \overline{P}_2$ ვექტორთა ერთობლიობა გარდაიქმნება, როგორც პირველი რანგის ტენზორის კომპონენტები, ე. ი.

$$\overline{'P_i}=\lambda_i^j\overline{P_j}.$$

ასეთ ვექტორთა ერთობლიობის მიმართ გავრცელდება ტენზორული აღრიცხვის ჩვეულებრივი კანონები, გარდა ზოგიერთი გამონაკლისი შემთხვევებისა. ამიტომ ასეთ ვექტორთა ერთობლიობას ეწოდება ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ე ბ ი ა ნ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი.

ვექტორულ კომპონენტებიანი ტენზორი მიიღება აგრეთვე M წერტილთან ინვარიანტულად დაკავშირებულ რაიმე P წერტილის ნაწილობითი წარმოებულებისაგან.

აქ აღნიშნული სპეციალური ტენზორების მაგალითებს წარმოადგენს თვით M წერტილის ნაწილობითი წარმოებულების $\overline{M_1},\ \overline{M_2}$ ერთობლიობა და ნორმალის $\overline{K}$ მგეზავის ნაწილობითი წარმოებულების $\overline{K_1},\ \overline{K_2}$ ერთობლიობა. ამრიგად, $\overline{M_i}$ და $\overline{K_i}$ ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ კ ო მ პ ო ნ ე ნ ტ ე ბ ი ა ნ ი ტ ე ნ ზ ო რ ე ბ ი ა. ეს ტენზორები და საზოგადოდ არასკალარულ კომპონენტებიანი ტენზორები დაწვრილებით აქვს შესწავლილი დუბნოვს[1].

§ 55. ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები

როგორც წირთა, ისევე ზედაპირთა თეორიაში მთავარი მნიშვნელობა აქვს მოცემული M წერტილიდან მეზობელ წერტილში გადასვლის კანონს, ე. ი. $\Delta\overline{M}$ ვექტორის სტრუქტურას. მაგრამ, როგორც ცნობილია,

$$\Delta\overline{M}=d\overline{M}+\frac{1}{2}\,d^2\overline{M}+\cdots$$

ამრიგად, M წერტილის მეზობელ წერტილზე გადასვლის კანონი განიზღვრება $d\,\overline{M},\ d^2\overline{M},\ldots$ დიფერენციალებით ან, რაც იგივეა, $\overline{M_i},\ \overline{M_{ij}},\ \ldots$ წარმოებულებით; $\overline{M_1},\ \overline{M_2}$ ვექტორები, როგორც ვიცით, მხებ სიბრტყეზე მდებარეობს და განსაზღვრავს შინაგან ბუნებრივ სისტემას. ამ ვექტორთა წყვილს ცალსახად უკავშირდება ნორმალის $\overline{K}$ მგეზავი და ვიღებთ სამ $\overline{M_1},\ \overline{M_2},\ \overline{K}$ ვექტორს, რომელნიც დამოუკიდებელნი არიან. ზედაპირის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილში გვექნება ასეთ ვექტორთა სამეული. ბუნებრივია, რომ ზედაპირის თვისებანი M

[1] Д у б н о в И. С. Тензоры с нескалярными компонентами. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. I. Москва, 1933.

წერტილის მახლობლობაში გამორკვეულ იქნეს ზემოაღნიშნულ ვექტორთა სისტემის მიმართ. ამ სისტემას ეწოდება ზედაპირის M წერტილთან დაკავშირებული ბუნებრივი სისტემა. მასვე უწოდებენ აგრეთვე ლოკალურ სისტემას M წერტილში.

პირველ ყოვლისა უნდა განისაზღვროს M წერტილის მეორე წარმოებულები $\overline{M}_{11}$, $\overline{M}_{12}$, $\overline{M}_{22}$ ბუნებრივ სისტემაში. ჩვენ ვიცით, რომ ნებისმიერი ვექტორი წარმოგვიდგება აღებული სისტემის ვექტორების წრფივი ნაერთის სახით, გვექნება:

$$\overline{M}_{11} = a\overline{M}_1 + b\overline{M}_2 + c\overline{K},$$
$$\overline{M}_{12} = a_1\overline{M}_1 + b_1\overline{M}_2 + c_1\overline{K},$$
$$\overline{M}_{22} = a_2\overline{M}_1 + b_2\overline{M}_2 + c_2\overline{K}.$$

იმისათვის, რომ ამ განტოლებათა შემოკლებული ჩაწერა მოეწყოს ტენზორული სიმბოლიკის გამოყენებით, მიზანშეწონილია მათი კოეფიციენტებისათვის შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$a = \Gamma^1_{11}, \quad b = \Gamma^2_{11}, \quad c = \lambda_{11},$$
$$a_1 = \Gamma^1_{12}, \quad b_1 = \Gamma^2_{12}, \quad c_1 = \lambda_{12},$$
$$a_2 = \Gamma^1_{22}, \quad b_2 = \Gamma^2_{22}, \quad c_2 = \lambda_{22}.$$

ამ აღნიშვნების თანახმად გვექნება:

$$\overline{M}_{11} = \Gamma^1_{11}\overline{M}_1 + \Gamma^2_{11}\overline{M}_2 + \lambda_{11}\overline{K},$$
$$\overline{M}_{12} = \Gamma^1_{12}\overline{M}_1 + \Gamma^2_{12}\overline{M}_2 + \lambda_{12}\overline{K},$$
$$\overline{M}_{22} = \Gamma^1_{22}\overline{M}_1 + \Gamma^2_{22}\overline{M}_2 + \lambda_{22}\overline{K}.$$

ამ ტოლობებს თუ დავუკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ ტოლობათა მარცხენა მხარეზე მყოფი ვექტორების ნიშნაკები და მარჯვენა მხარეზე მყოფი კოეფიციენტების ქვედა ნიშნაკები ერთნაირია შესაბამისად; ამიტომ ეს ტოლობანი შეიძლება ასე ჩაიწეროს ერთი ტოლობის სახით:

$$\overline{M}_{ij} = \Gamma^1_{ij}\overline{M}_1 + \Gamma^2_{ij}\overline{M}_2 + \lambda_{ij}\overline{K}.$$

გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეზე მოთავსებული ჯამის პირველი ორი შესაკრები წარმოადგენს $\Gamma^m_{ij}\overline{M}_m$-ის გაშლის შედეგს. ამრიგად, უკანასკნელი განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\overline{M}_{ij} = \Gamma^m_{ij}\overline{M}_m + \lambda_{ij}\overline{K}. \tag{81}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\overline{M}_{ij} = \overline{M}_{ji}$, გვექნება:

$$\Gamma^m{}_{ij}\overline{M}_m + \lambda_{ij}\overline{K} = \Gamma^m_{ji}\overline{M}_m + \lambda_{ji}\overline{K}.$$

რადგან $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ და $\overline{K}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ

$$\Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \tag{82}$$

ე. ი. Γ^m_{ij} და λ_{ij} სიმეტრიულია i, j ნიშნაკების მიმართ. გადავამრავლოთ (81) ტოლობა $\overline{K}$-ზე; გვექნება:

$$\overline{K}\cdot\overline{M}_{ij}=\Gamma^m_{ij}\overline{K}\cdot\overline{M}_m+\lambda_{ij}\overline{K}^2.$$

რადგან

$$\overline{K}\cdot\overline{M}_{ij}=b_{ji},\ \overline{K}\cdot\overline{M}_m=0,\ \overline{K^2}=1,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\lambda_{ij}=b_{ij}. \tag{83}$$

ამრიგად, λ_{ij} არის მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისაგან განზღვრული მეორე რანგის ტენზორი.

გამოვარკვიოთ Γ^m_{ij} სიმბოლოს ცვლის კანონი მრუდწირული კოორდინატების ცვლასთან დაკავშირებით. ამისათვის ჯერ (81) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$\overline{M}_{ij}-\Gamma^m_{ij}\overline{M}_m=\lambda_{ij}\overline{K}.$$

იგივე ტოლობა ახალ კოორდინატებში ასე დაიწერება:

$$'\overline{M}_{ij}-'\Gamma^m_{ij}{}'\overline{M}_m={}'\lambda_{ij}\overline{K}.$$

რადგან λ_{ij} ტენზორია, ამიტომ

$$'\lambda_{ij}=\lambda^k_i\lambda^r_j\lambda_{kr},$$

ამრიგად (წინა ტოლობათა თანახმად),

$$'\overline{M}_{ij}-'\Gamma^m_{ij}\overline{M}_m=\lambda^k_i\lambda^r_j\lambda_{kr}\overline{K}=\lambda^k_i\lambda^r_j(\overline{M}_{kr}-\Gamma^m_{kr}\overline{M}_m).$$

მაშასადამე,

$$'M_{ij}-'\Gamma^m_{ij}{}'\overline{M}_m=\lambda^k_i\lambda^r_j(\overline{M}_{kr}-\Gamma^m_{kr}\overline{M}_m).$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ $'\overline{M}_i=\lambda^m_i\overline{M}_m$ და გავაწარმოოთ u^j პარამეტრის მიმართ (79) ფორმულის მსგავსად, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$'\overline{M}_{ij}=\lambda^k_i\lambda^r_j\overline{M}_{kr}+\lambda^k_j\partial_k\lambda^m_i\overline{M}_m.$$

$'\overline{M}_i$ და $'\overline{M}_{ij}$-ის მნიშვნელობათა ჩასმა წინა ფორმულაში მოგვცემს:

$$\lambda^k_j\partial_k\lambda^m_i\overline{M}_m-'\Gamma^m_{ij}\lambda^k_m\overline{M}_k=-\lambda^k_i\lambda^r_j\Gamma^m_{kr}\overline{M}_m.$$

რადგან $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ დამოუკიდებელი ვექტორებია, ამიტომ კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ საძიებელ ფორმულას, ე. ი. Γ^m_{ij} სიმბოლოს გარდაქმნის კანონს მრუდწირული კოორდინატების ცვლასთან დაკავშირებით:

$$'\Gamma^k_{ij}\lambda^m_k=\lambda^k_i\lambda^r_j\Gamma^m_{kr}+\lambda^k_j\partial_k\lambda^m_i. \tag{84}$$

ამ ტოლობის გადამრავლებით $\widetilde{\lambda}^n_m$-ზე ამოიხსნება თვით Γ^m_{ij}:

$$'\Gamma^m_{ij}=\lambda^k_i\lambda^r_j\widetilde{\lambda}^m_n\Gamma^n_{kr}+\lambda^k_j\widetilde{\lambda}^m_n\partial_k\lambda^n_i. \tag{84$_1$}$$

აქედან ჩანს, რომ Γ^m_{ij} არ არის ტენზორი. იგი ტენზორი რომ იყოს, მაშინ მარჯვენა მხარეზე მეორე შესაკრები არ უნდა შედიოდეს, ე. ი. იგივურად ნული უნდა იყოს, რასაც საზოგადოდ ადგილი არა აქვს. Γ^m_{ij} სიმბოლო დიდ როლს თამაშობს ზედაპირთა თეორიაში. იგი დაწვრილებით იქნება შესწავლილი ცალკე პარაგრაფში. ეს სიმბოლო დიდ როლს თამაშობს ტენზორთა აღრიცხვაშიც. სწორედ ამაზე იქნება მიქცეული ყურადღება პირველ რიგში.

§ 56. ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალი და წარმოებული

განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორი X^i კომპონენტებით. ამ ტენზორს შეიძლება შევუთანადოთ $\overline{P}$ ვექტორი მხებ სიბრტყეზე იმავე კომპონენტებით ანუ კონტრავარიანტული კოორდინატებით. გვექნება:

$$\overline{P}=X^i\overline{M}_i.$$

აქედან

$$d\overline{P}=dX^i\overline{M}_i+X^id\overline{M}_i.$$

(81) ფორმულის თანახმად,

$$d\overline{M}_i=\overline{M}_{ij}du^j=\Gamma^m_{ij}du^j\overline{M}_m+\lambda_{ij}du^j\overline{K}.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს:

$$d\overline{P}=(dX^i+\Gamma^i_{hj}du^jX^k)\overline{M}_i+\lambda_{kj}du^jX^k\overline{K}.$$

მოვახდინოთ აღნიშვნა:

$$\nabla X^i=dX^i+\Gamma^i_{kj}du^jX^k. \tag{85}$$

მივიღებთ:

$$d\overline{P}=\nabla X^i\overline{M}_i+\lambda_{kj}X^kdu^j\cdot\overline{K}.$$

რადგან λ_{ij} ტენზორია, ამიტომ $\lambda_{kj}X^kdu^j$ არის ინვარიანტი; რადგან $d\overline{P}$ და $\overline{K}$ აგრეთვე ინვარიანტებია (მრუდწირული კოორდინატების ცვლისა), ამიტომ $\Delta X^i\overline{M}_i$ არის ინვარიანტი, ე. ი.

$$'\nabla'X^{i}\,{}'\overline{M}_i=\nabla X^i\overline{M}_i.$$

შევიტანოთ აქ $'\overline{M}_i$-ის მნიშვნელობა ცნობილი ფორმულით

$$'\overline{M}_i=\lambda^m_i\overline{M}_m.$$

მივიღებთ:

$$'\nabla'X^m\lambda^i_m\overline{M}_i=\nabla X^i\overline{M}_i.$$

აქედან (რადგან $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ დამოუკიდებელი ვექტორებია)

$$'\nabla'X^m\lambda^i_m=\nabla X^i$$

ან, რაც იგივეა,

$$'\nabla'X^i=\tilde{\lambda}^i_m\nabla X^m.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ∇X^i გარდაიქმნება როგორც პირველი რანგის ტენზორის კომპონენტები, ე. ი. ∇X^i არის პირველი რანგის ტენზორი; მას ეწოდება, X^i ტენზორის *აბსოლუტური დიფერენციალი Γ^m_{ij} სიმბოლოს ფუძით.*

აბსოლუტური წარმოებული შემოდის როგორც აბსოლუტური დიფერენციალის დაშლის კოეფიციენტების ერთობლიობა და აღინიშნება ასე: ∇_jX^i, გვექნება:

$$\nabla X^i=\nabla_jX^idu^j.$$

(85) ფორმულის თანახმად უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს:

$$\Delta_jX^i=\partial_jX^i+\Gamma^i_{jm}X^m. \tag{86}$$

$\Delta_jX^idu^j$ არის ტენზორი, ამიტომ ∇_jX^i აგრეთვე ტენზორი იქნება. ამ ტენზორს

ეწოდება X^i ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული Γ^m_{ij} სიმბოლოს ფუძით.

ამრიგად, ტენზორის ჩვეულებრივი დიფერენციალი dX^i და ნაწილობითი წარმოებულები $\partial_j X^i$ არაა ტენზორები, მაგრამ ისინი და მათთან დამატებული X^i ტენზორის კომპონენტების წრფივი ნაერთები Γ^m_{ij} სიმბოლოს საშუალებით, (85) და (86) ფორმულების მიხედვით, ერთად აღებულნი განსაზღვრავენ ∇X^i და $\nabla_j X^i$ ტენზორებს.

ახლა განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორი a_i. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული ვექტორის X^i კომპონენტებისაგან შედგენილი $a_i X^i$ წრფივი ფორმა ინვარიანტი იქნება, ე. ი.

$$\varphi = a_i X^i = \text{ინვ}.$$

აქედან

$$d\varphi = da_i X^i + a_i dX^i.$$

შევიტანოთ აქ dX^i-ის შემდეგი მნიშვნელობა (85 ფორმულიდან)

$$dX^i = \nabla X^i - \Gamma^i_{kj} du^j X^k.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$d\varphi = (da_i - \Gamma^k_{ij} du^j a_k) X^i + a_i \nabla X^i.$$

რადგან a_i და ∇X^i ტენზორებია, ამიტომ $a_i \nabla X^i$ იქნება ინვარიანტი. ცხადია, $d\varphi$ აგრეთვე არის ინვარიანტი; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$(da_i - \Gamma^k_{ij} du^j_{ak}) X^i$$

არის ინვარიანტი. მაშასადამე,

$$\nabla a_i = da_i - \Gamma^k_{ij} du^j a_k \tag{87}$$

გამოსახულება უნდა იყოს პირველი რანგის ტენზორი, როგორც წრფივი ინვარიანტული ფორმის კოეფიციენტების ერთობლიობა. (87) ფორმულით განსაზღვრულ Δa_i ტენზორს ეწოდება a_i ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალი Γ^m_{ij} სიმბოლოს ფუძით.

ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული განიმარტება როგორც აბსოლუტური დიფერენციალის წრფივი დაშლის კოეფიციენტების ერთობლიობა. გვექნება:

$$\nabla a_i = \nabla_j a_i du^j, \tag{88}$$

სადაც $\nabla_j a_i$, (87) ფორმულის თანახმად, ასე წარმოგვიდგება:

$$\nabla_j a_i = \partial_j a_i - \Gamma^m_{ij} a_m, \tag{89}$$

რადგან

$$\nabla a_i = \nabla_j a_i du^j$$

ტენზორია, ამიტომ $\nabla_j a_i$ აგრეთვე ტენზორი იქნება. ამ ტენზორს, რომელიც განსაზღვრულია (39) ფორმულით, ეწოდება a_i ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული Γ^m_{ij} სიმბოლოს ფუძით.

აქაც შევნიშნავთ, რომ a_i ტენზორის ჩვეულებრივი დიფერენციალი da_i და ნაწილობითი წარმოებულები $\partial_j a_i$ არ არის ტენზორები, მაგრამ ისინი და მათთან დამატებული a_i ტენზორის კომპონენტების წრფივი ნაერთები, Γ^m_{ij} სიმბოლოს საშუალებით შედგენილნი (88) და (89) ფორმულების მიხედვით, ერთად აღებულნი უკვე განსაზღვრავენ ∇a_i და $\nabla_j a_i$ ტენზორებს.

ახლა განვიხილოთ მეორე რანგის P_{ij} ტენზორი. როგორც ცნობილია, თუ X^i, Y^j პირველი რანგის რაიმე ტენზორებია, მაშინ

$$\varphi = P_{ij}X^iY^j = \text{ინვ.}$$

აქედან

$$d\varphi = dP_{ij}X^iY^j + P_{ij}dX^iY^j + P_{ij}X^idY^j.$$

შევიტანოთ აქ dX^i, dY^j-ის მნიშვნელობები (85) ფორმულებიდან, ე. ი. შემდეგი მნიშვნელობები:

$$dX^i = \nabla X^i - \Gamma^i_{km}du^kX^m,$$

$$dY^j = \Delta Y^j - \Gamma^j_{km}du^kY^m.$$

უბრალო ალგებრული გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$d\varphi = (dP_{ij} - \Gamma^m_{ik}du^kP_{mj} - \Gamma^m_{kj}du^kP_{im})X^iY^j + P_{ij}\nabla X^iY^j + P_{ij}X^i\nabla Y^j.$$

რადგან

$$X^i,\ Y^j,\ \nabla X^i,\ \nabla Y^j$$

პირველი რანგის ტენზორებია და φ კი ინვარიანტი, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეზე მდგომი $d\varphi$ და მარჯვენა მხარეზე მდგომი უკანასკნელი ორი შესაკრები $P_{ij}\nabla X^iY^j$ და $P_{ij}X^i\nabla Y^j$ ინვარიანტები იქნება, აქედან ის გამომდინარეობს, რომ ორადწრფივი ფორმა

$$(dP_{ij} - \Gamma^m_{ki}du^kP_{mj} - \Gamma^m_{kj}du^kP_{im})X^iY^j$$

არის ინვარიანტი; ეს იმას ნიშნავს, რომ გამოსახულება

$$\nabla P_{ij} = dP_{ij} - \Gamma^m_{ik}du^kP_{mj} - \Gamma^m_{kj}du^kP_{im} \tag{90}$$

არის მეორე რანგის ტენზორი. მას ეწოდება P_{ij} ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი Γ^m_{ij} ს ი მ ბ ო ლ ო ს ფ უ ძ ი თ.

მეორე რანგის ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულის ცნება შემოდის ისეთივე წესით, როგორითაც პირველი რანგის ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული. განიხილება აბსოლუტური დიფერენციალის

$$\nabla P_{ij} = \nabla_k P_{ij}du^k$$

წრფივი დაშლის (du^1, du^2 დიფერენციალების მიმართ) $\nabla_k P_{ij}$ კოეფიციენტების ერთობლიობა, რომელიც, (90) ტოლობის თანახმად, ასე წარმოგვიდგება:

$$\nabla_k P_{ij} = \partial_k P_{ij} - \Gamma^m_{ki}P_{mj} - \Gamma^m_{kj}P_{im}. \tag{91}$$

რადგან $\nabla P_{ij} = \nabla_k P_{ij}du^k$ არის ტენზორი, ამიტომ $\nabla_k P_{ij}$ აგრეთვე ტენზორი იქნება, მას ეწოდება P_{ij} ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი Γ^m_{ij} ს ი მ ბ ო ლ ო ს ფ უ ძ ი თ.

საბოლოოდ განვიხილოთ Q^j_i ტენზორი. შევადგინოთ სათანადო ფორმა Y^i და Y_j ტენზორებისაგან, გვექნება:

$$Q^j_iX^iY_j = \text{ინვ.}$$

აქედან

$$d\varphi = dQ^j_iX^iY_j + Q^j_idX^iY_j + Q^j_iX^idY_j.$$

შევიტანოთ აქ dX^i და dY_j-ის მნიშვნელობები (85) და (87) ფორმულების მიხედვით, ე. ი. შემდეგი მნიშვნელობები:

$$dX^i = \Delta X^i - \Gamma^i_{km} du^k X^m,$$

$$dY_j = \Delta Y_j + \Gamma^m_{kj} du^k Y_m.$$

უბრალო ალგებრული განმარტების შემდეგ მივიღებთ:

$$d\varphi = (dQ^j_i - \Gamma^m_{ki} du^k Q^j_m + \Gamma^j_{km} du^k Q^m_i) X^i Y_j + Q^j_i \nabla X^i Y_i + Q^j_i X^i_i \nabla Y_j$$

რადგან

$$X^i, \; Y_j \quad \text{და} \quad \nabla X^i, \; \nabla Y_j$$

პირველი რანგის ტენზორებია და φ კი ინვარიანტი, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეზე მდგომი $d\varphi$ და მარჯვენა მხარეზე მდგომი უკანასკნელი ორი $Q^j_i \nabla X^i Y_j$ და $Q^j_i X^i \Delta Y_j$ შესაკრები ინვარიანტები იქნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორადწრფივი ფორმა

$$(dQ^j_i - \Gamma^m_{ki} du^k Q^j_m + \Gamma^j_{km} du^k Q^m_i) X^i Y_j$$

არის ინვარიანტი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გამოსახულება

$$\nabla Q^j_i = dQ^j_i - \Gamma^m_{ki} du^k Q^j_m + \Gamma^j_{km} du^k Q^m_i \tag{92}$$

არის მეორე რანგის ტენზორი. მას ეწოდება Q^j_i ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი Γ^m_{ij} ს ი მ ბ ო ლ ო ს ფ უ ძ ი თ.

Q^j_i ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული განიმარტება, როგორც აბსოლუტური დიფერენციალის წრფივი დაშლის (du^1 და du^2 მიმართ) კოეფიციენტების ერთობლიობა. გვექნება:

$$\Delta Q^j_i = \Delta_k Q^j_i du^k,$$

სადაც $\nabla_k Q_i{}^j$, (92) ფორმულის თანახმად, ასე წარმოგვიდგება:

$$\Delta_k Q^j_i = \partial_k Q^j_i - \Gamma^m_{ki} Q^j_m + \Gamma^j_{km} Q^m_i. \tag{93}$$

რადგან

$$Q \nabla^j_i = \nabla_k Q^j_i du^k$$

ტენზორია, ამიტომ $\nabla_k Q^j_i$, აგრეთვე ტენზორი იქნება. მას ე წ ო დ ე ბ ა Q^j_i ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი Γ^m_{ij} ს ი მ ბ ო ლ ო ს ფ უ ძ ი თ.

აქ მოყვანილი მაგალითებიდან ადვილი შესამჩნევია აბსოლუტური წარმოებულის მიღების წესი. პირველად განვიხილოთ (86) ფორმულა, რომელიც გამოსახავს X^i ტენზორის აბსოლუტურ წარმოებულს Γ^m_{ij} ფუძით. ამ შემთხვევაში აბსოლუტური წარმოებული მიიღება თუ $\partial_j X^i$ ჩვეულებრივ წარმოებულებს მივუმატებთ Γ^m_{ij} კოეფიციენტებით X^i ტენზორის კომპონენტებისაგან შედგენილ წრფივ ნაერთს ისე, რომ ეს ნაერთი წარმოადგენდეს Γ^m_{ij} სიმბოლოს შეკუმშვას X^i ტენზორით; ამავე დროს, ტენზორული ტოლობის დასაცავად, Γ^m_{ij} სიმბოლოს ზედა ინდექსი იცვლება X^i ტენზორის ინდექსით, ე. ი. ამ წრფივ ნაერთს ექნება $\Gamma^i_{jm} X^m$ სახე. ანალოგიურად მიიღება Y_i ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული, მოცემული (89) ფორმულით. ოღონდ აქ ნაწილობით წარმოებულებს, ე. ი. $\partial_j Y_i$-ს აკლდება ისეთი წრფივი ნაერთი, რომელიც წარმოადგენს Γ^m_{ij} სიმბოლოს შეკუმშვას Y_i ტენზორით. მას აქვს $\Gamma^m_{ij} Y_m$ სახე.

ახლა დავუკვირდეთ მეორე რანგის ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულის (91) ფორმულას. აქ მოცემული P_{ij} ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულის მისაღებად ასე უნდა მოვიქცეთ: P_{ij} ტენზორის ნაწილობით წარმოებულებს, ე. ი. $\partial_k P_{ij}$-ს უნდა გამოაკლდეს Γ^m_{ij}-კოეფიციენტებიანი და P_{ij} ტენზორის კომპონენ-

ტებისაგან შედგენილი წრფივი ნაერთები. ამასთანავე ეს ნაერთები შედგენილია თითოეული ინდექსისათვის ცალ-ცალკე იმავე წესით, როგორც Y_i ტენზორისათვის. ეს წრფივი ნაერთები იქნება

$$\Gamma^m_{ki}P_{mj} \quad \text{და} \quad \Gamma^m_{kj}P_{im}.$$

ბოლოს, თუ დავუკვირდებით (93) ფორმულას, შევამჩნევთ, რომ აქაც აბსოლუტური წარმოებულის მისაღებად მოცემული Q^j_i ტენზორის ნაწილობით წარმოებულებს აკლდება ქვედა (კოვარიანტული) ინდექსის მიხედვით შედგენილი წრფივი ნაერთი და ემატება ზედა (კონტრავარიანტული) ინდექსის მიხედვით შედგენილი წრფივი ნაერთი Γ^m_{ij} სიმბოლოს შეკუმშვით მიღებული ქვედა და ზედა ინდექსების საშუალებით შესაბამისად. ესენია:

$$\Gamma^m_{ki}Q^j_m \quad \text{და} \quad \Gamma^j_{km}Q^m_i.$$

ამ შენიშვნების საფუძველზე ადვილი შესადგენია ნებისმიერი რანგის ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული. მაგალითად, ავიღოთ მესამე რანგის ტენზორი P^k_{ij}. გვექნება:

$$\nabla_r P^k_{ij} = \partial_r P^k_{ij} - \Gamma^m_{ri}P^k_{mj} - \Gamma_{rj}P^k_{im} + \Gamma^k_{rm}P^m_{ij}. \tag{94}$$

ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალის შესადგენად ცალკე შენიშვნები საჭირო არ არის, რადგან იგი მიიღება აბსოლუტური წარმოებულებისაგან ისევე, როგორც სრული დიფერენციალი ნაწილობითი წარმოებულებისაგან.

§ 57. აბსოლუტური გაწარმოების ძირითადი თვისებები

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვმარტეთ ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული, დაწყებული პირველი რანგის ტენზორიდან, ნული რანგის ტენზორზე, ე. ი. სკალარულ ინვარიანტზე ეს განმარტება არ ვრცელდება, რადგან სკალარული ინვარიანტის ნაწილობითი წარმოებულების ერთობლიობა ტენზორს განსაზღვრავს, ხოლო ყოველი ტენზორის აბსოლუტური წარმოებულიც ტენზორია; ამიტომ ბუნებრივი იქნება შევთანხმდეთ და სკალარული ინვარიანტის აბსოლუტური წარმოებული და დიფერენციალი ვუწოდოთ მის ნაწილობით წარმოებულს და დიფერენციალს შესაბამისად. თუ φ სკალარული ინვარიანტია, მაშინ დავწერთ:

$$\nabla_i\varphi = \partial_i\varphi, \quad \nabla\varphi = d\varphi. \tag{95}$$

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ აბსოლუტურ წარმოებულზე ვრცელდება ყველა ძირითადი კანონი, რომელსაც ადგილი აქვს ჩვეულებრივი წარმოებულებისათვის[2].

1. ტ ე ნ ზ ო რ თ ა ჯ ა მ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი უ დ რ ი ს მ ა თ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი ს ჯ ა მ ს. მართლაც, ვთქვათ, a_i და b_i რაიმე პირველი რანგის ტენზორებია. გამოვითვალოთ მათი ჯამის აბსოლუტური წარმოებული, ე. ი. $\Delta_j(a_i+b_i)$. (87) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

---

[2] იხ. J. A. Schouten, Der Ricci—Kalkül, 1924, და J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. I, II. არის რუსული თარგმანი: И. Схоутен и Д. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии.

$$\nabla_j(a_i+b_i)=\partial_j(a_i+b_i)-\Gamma_{ij}^m(a_m+b_m)=\partial_j a_i+\partial_j b_i-\Gamma_{ij}^m a_m-\Gamma_{ij}^m b_m=$$
$$=(\partial_j a_i-\Gamma_{ij}^m(a_m)+(\partial_j b_i-\Gamma_{ij}^m b_m).$$

იმავე (87) ფორმულის თანახმად, ფრჩხილებში მოთავსებული ორი უკანასკნელი გამოსახულება a_i და b_i ტენზორების აბსოლუტური წარმოებულებია შესაბამისად, ე. ი. $\nabla_j a_i$ და $\nabla_j b_i$. ამრიგად გვექნება:

$$\nabla_j(a_i+b_i)=\nabla_j a_i+\nabla_j b_i. \tag{96}$$

ამით კი ზემოაღნიშნული თვისება დამტკიცებულია.

2. სკალარული ინვარიანტისა და ტენზორის ნამრავლის აბსოლუტური გაწარმოება იმავე წესით ხდება, როგორითაც აღნიშნული ნამრავლის ჩვეულებრივი გაწარმოება. მართლაც, ვთქვათ, φ არის სკალარული ინვარიანტი, ხოლო a_i—რაიმე ტენზორი. გამოვითვალოთ მათი ნამრავლის აბსოლუტური წარმოებული, ე. ი. $\nabla_j(\varphi a_i)$ (87) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\Delta_j(\varphi a_i)=\partial_j(\varphi a)-\Gamma_{ij}^m(\varphi a_m)=\partial_j\varphi\cdot a_i+\varphi\partial_j a_i-\varphi\Gamma_{ij}^m a_m=$$
$$=\partial_j\varphi\cdot a_i+\varphi(\partial_j a_i-\Gamma_{ij}^m a_m).$$

მაგრამ (87) და (95) ფორმულების მიხედვით გვაქვს:

$$\partial_j a_i-\Gamma_{ij}^m a_m=\Delta_j a_i,\quad \Delta_j\varphi=\partial_j\varphi.$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$\nabla_j(\varphi a_i)=\Delta_j\varphi\cdot a_i+\varphi\Delta_j a_i, \tag{97}$$

რაც ამტკიცებს ზემოაღნიშნულ თვისებას.

3. ტენზორთა ნამრავლის აბსოლუტური გაწარმოება ხდება ამავე ნამრავლის ჩვეულებრივი გაწარმოების წესის მიხედვით. ოღონდ თანამამრავლთა რიგს უნდა მიექცეს ყურადღება. მართლაც, ვთქვათ, a_i და b_j რაიმე ტენზორებია. გამოვითვალოთ მათი ნამრავლის აბსოლუტური წარმოებული, ე. ი. $\nabla_k(a_i b_j)$. (91) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\nabla_k(a_i b_j)=\partial_k(a_i b_j)-\Gamma_{ki}^m(a_m b_j)-\Gamma_{kj}^m(a_i b_m)=$$
$$=\partial_k a_i\cdot b_j+a_i\partial_k b_j-\Gamma_{ki}^m a_m b_j-\Gamma_{kj}^m a_i b_m=$$
$$=(\partial_k a_i-\Gamma_{ki}^m a_m)b_j+a_i(\partial_k b_j-\Gamma_{kj}^m b_m).$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი, (87) ფორმულის თანახმად (რომელიც არა ერთხელ გვქონდა გამოყენებული ასეთი შემთხვევისათვის), ასე გადაიწერება

$$\Delta_k(a_i b_j)=\nabla_k a_i\cdot b_j+a_i\nabla_k b_j. \tag{98}$$

ეს კი ამტკიცებს გამოთქმულ აზრს.

რადგან ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალი მიიღება აბსოლუტური წარმოებულიდან სავსებით იმავე წესით, როგორითაც ტენზორის სრული დიფერენციალი ნაწილობითი წარმოებულებიდან, ამიტომ აბსოლუტური დიფერენციალიც დაემორჩილება იმავე კანონებს, რომლებსაც ემორჩილება აბსოლუტური წარმოებული, ე. ი. გვექნება:

$$\begin{aligned}\nabla(a_i+b_i)&=\nabla a_i+\nabla b_i,\\ \nabla(\varphi a_i)&=\nabla\varphi\cdot a_i+\varphi\Delta a_i,\\ \Delta(a_i b_j)&=\nabla a_i\cdot b_j+a_i\nabla b_j.\end{aligned} \tag{99}$$

§ 58. სიმრუდის ტენზორი. რიჩის ტენზორი

ტენზორთა აღრიცხვის დროს ხშირად დიდი გამოყენება ექნება შემდეგ გამოსახულებას:

$$\Delta_{[k}\Delta_{j]}a_i = \frac{1}{2}(\nabla_k\nabla_j a_i - \nabla_j\nabla_k a_i),$$

რომელსაც ეწოდება a_i ტენზორის *მეორე ალტერნირებული წარმოებული*. ჯერ გამოვითვალოთ $\nabla_k\Delta_j a_i$. რადგან

$$\Delta_j a_i = \partial_j a_i - \Gamma^m_{ij}a_m,$$

ამიტომ გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\Delta_k\nabla_j a_i = \partial_k(\nabla_j a_i) - \Gamma^m_{kj}\nabla_m a_i - \Gamma^m_{ki}\nabla_j a_m = \partial_k(\partial_j a_i - \Gamma^m_{ij}a_m) -$$
$$- \Gamma^m_{ki}(\partial_m a_i - \Gamma^n_{mi}a_n) - \Gamma^m_{ki}(\partial_j a_m - \Gamma^n_{jm}a_n).$$

აქედან, მარტივი ალგებრული გარდაქმნით, მივიღებთ:

$$\nabla_k\nabla_j a_i = \partial_{kj}a_i - \partial_k\Gamma^m_{ij}a_m - \Gamma^m_{ij}\partial_k a_m - \Gamma^m_{kj}\partial_m a_i -$$
$$- \Gamma^m_{ki}\partial_j a_m + \Gamma^m_{kj}\Gamma^n_{im}a_n + \Gamma^m_{ki}\Gamma^n_{jm}a_n.$$

ამ ტოლობაში k და j ინდექსების გადანაცვლება მოგვცემს:

$$\Delta_j\nabla_k a_i = \partial_{jk}a_i - \partial_j\Gamma^m_{ik}a_m - \Gamma^m_{ik}\partial_j a_m - \Gamma^m_{jk}\partial_m a_i -$$
$$- \Gamma^m_{ji}\partial_k a_m - \Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{mi}a_n + \Gamma^m_{ji}\Gamma^n_{km}a_n.$$

გამოვაკლოთ ეს უკანასკნელი ტოლობა წინა ტოლობას და მხედველობაში მივიღოთ Γ^m_{ij} სიმბოლოს სიმეტრიულობა ქვედა ინდექსების მიმართ; მივიღებთ:

$$\Delta_k\nabla_j a_i - \nabla_j\nabla_k a = -(\partial_k\Gamma^m_{ji} - \partial_j\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{kn}\Gamma^n_{ji} - \Gamma^m_{jn}\Gamma^n_{kj})a_m.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$R^m_{kij} = \frac{1}{2}(\partial_k\Gamma^m_{ji} - \partial_j\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{kn}\Gamma^n_{ki} - \Gamma^m_{jn}\Gamma^n_{ki}) \qquad (100)$$

ან, რაც იგივეა,

$$R^m_{kji} = \partial_{[k}\Gamma^m_{j]i} + \Gamma^m_{n[k}\Gamma^n_{j]i}. \qquad (100_1)$$

ამ აღნიშვნის თანახმად, წინა ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\nabla_k\nabla_j a_i - \nabla_j\nabla_k a_i = -2R^m_{kji}a_m, \qquad (101)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\nabla_{[k}\nabla_{j]}a_i = -R^m_{kji}a_m. \qquad (101_1)$$

რადგან $\nabla_j a_i$ არის ტენზორი, ამიტომ მისი აბსოლუტური წარმოებული $\nabla_k\nabla_j a_i$ აგრეთვე ტენზორი იქნება. იმავე საბუთით $\nabla_j\nabla_k a_i$-ც აგრეთვე ტენზორია. ამ ორი ტენზორის სხვაობა, ე. ი.

$$\nabla_k\nabla_j a_i - \Delta_j\nabla_k a_i$$

აგრეთვე ტენზორი იქნება. ამრიგად, $R^m_{kji}a_m$ ტენზორია. რადგან ეს უკანასკნელი გამოსახულება მიღებულია R^m_{kji} სიმბოლოს შეკუმშვით a_i ტენზორის საშუალებით, ამიტომ R^m_{kji} სიმბოლოც გამოსახავს ტენზორს (მეოთხე რანგის). ეს ტენზორი განსაზღვრულია (100) ფორმულით; მას ეწოდება იმ ზედაპირის *სიმრუდის*

ტენზორი, რომლის დიფერენციალურ განტოლებასთანაც არის დაკავშირებული Γ^m_{ij} სიმბოლო. (101) ტოლობას ეწოდება **რიჩის იგივეობა**. სრულიად ანალოგიური გამოთვლებით მიიღება რიჩის იგივეობა ნებისმიერი რანგის ტენზორისათვის. მაგალითად, მეორე რანგის P_{ij} ტენზორისათვის რიჩის იგივეობა იქნება:

$$\nabla_{[r}\nabla_{k]}P_{ij} = -R^m_{rki}P_{mj} - R^m_{rkj}P_{im}. \tag{102}$$

როგორც (100) ფორმულიდან ჩანს, სიმრუდის ტენზორი განიხლვრება მხოლოდ Γ^m_{ij} სიმბოლოთი: იგი დამოკიდებული არ არის თვით აღებულ a_i ტენზორზე, რომლისთვისაც რიჩის იგივეობა გვაქვს მიღებული. სიმრუდის ტენზორის კავშირს ზედაპირის სიმრუდესთან შემდეგში დავამყარებთ (და, მაშასადამე, მოვახდენთ ამ სახელწოდების ახსნასაც), აქ კი მის რამდენიმე თვისებას აღვნიშნავთ. რადგან სიმრუდის ტენზორი დამოკიდებულია მხოლოდ Γ^m_{ij} სიმბოლოზე და არა a_i ტენზორზე, ამიტომ სიმრუდის ტენზორის თვისებათა აღმოსაჩენად შეგვიძლია a_i ტენზორი სასურველად შევარჩიოთ. მაგალითად, ავიღოთ გრადიენტული ტენზორი, ე. ი.

$$a_i = \partial_i\varphi.$$

ამ შემთხვევაში

$$\Delta_j a_i = \partial_j a_i - \Gamma^m_{ij}a_m = \partial_j(\partial_i\varphi) - \Gamma^m_{ij}\partial_m\varphi = \partial_{ij}\varphi - \Gamma^m_{ij}\partial_m\varphi.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = \partial_{ji}\varphi - \partial_{ij}\varphi - (\Gamma^m_{ij} - \Gamma^m_{ji})\partial_m\varphi.$$

რადგან

$$\partial_{ji}\varphi = \partial_{ij}\varphi, \quad \Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji},$$

ამიტომ

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = 0, \tag{103}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\nabla_{[j}a_{i]} = 0. \tag{103$_1$}$$

ამრიგად, **გრადიენტულ ტენზორს ახასიათებს (103) თვისება.**

სიმრუდის ტენზორის ერთი თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს (100) ფორმულიდან:

$$R^m_{kji} = -R^m_{jki}, \tag{104}$$

ე. ი. **სიმრუდის ტენზორი ანტისიმეტრიულია მისი k, j ნიშნაკების მიმართ.** სხვა თვისებების მისაღებად მივმართავთ რიჩის იგივეობას a_i ტენზორისათვის, სადაც, ამ შემთხვევაში, a_i ტენზორს ვგულისხმებთ გრადიენტულ ტენზორად. გადავანაცვლოთ (101) ტოლობაში kji ინდექსები წრიულად, ე. ი. განვიხილოთ ინდექსების კიდევ ასეთი მიმდევრობები: jik და ikj. მივიღებთ ორ ახალ ტოლობას:

$$\nabla_j\Delta_i a_k - \nabla_i\nabla_j a_k = -2R^m_{jik}a_m,$$

$$\nabla_i\nabla_k a_j - \nabla_k\nabla_i a_j = -2R^m_{ikj}a_m.$$

ამ ტოლობათა შეკრება (101) ტოლობასთან და წევრთა სათანადო დაჯგუფება მოგვცემს:

$$\nabla_k(\nabla_j a_i - \nabla_i a_j) + \nabla_j(\nabla_i a_k - \nabla_k a_i) + \nabla_i(\nabla_k a_j - \nabla_j a_k) =$$
$$= -2(R^m_{kji} + R^m_{jik} + R^m_{ikj})a_m.$$

რადგან a_i გრადიენტი ტენზორია ზემოთ მიღებული შეთანხმების თანახმად, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეზე მდგომი და ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები, გრადიენტული ტენზორისათვის დამახასიათებელი (103) პირობის ძალით, ნულებია. ამრიგად, გვექნება:

$$(R^m_{kij}+R^m_{jik}+R^m_{ikj})a_m=0.$$

აქედან (რადგან $a_i=\partial_i\varphi$ და φ ფუნქცია კი ნებისმიერია) მივიღებთ სიმრუდის ტენზორის შემდეგ თვისებას:

$$R^m_{kji}+R^m_{jik}+R^m_{ikj}=0. \tag{105}$$

ახლა გავაწარმოოთ (101) ტოლობა აბსოლუტურად u^r პარამეტრის მიმართ და მოვახდინოთ rkj ინდექსების წრიული გადანაცვლება. გვექნება:

$$\nabla_r\nabla_k\nabla_j a_i-\nabla_r\nabla_j\nabla_k a_i=-2\nabla_r R^m_{kji}a_m-2R^m_{kji}\nabla_r a_m,$$

$$\nabla_k\nabla_j\nabla_r a_i-\nabla_k\nabla_r\nabla_j a_i=-2\nabla_k R^m_{jri}a_m-2R^m_{jri}\nabla_k a_m,$$

$$\nabla_j\nabla_r\nabla_k a_i-\nabla_j\nabla_k\nabla_r a_i=-2\nabla_j R^m_{rki}a_m-2R^m_{rki}\nabla_j a_m.$$

ამ ტოლობათა შეკრება და წევრთა სათანადო დაჯგუფება მოგვცემს:

$$\nabla_{[r}\nabla_{k]}\nabla_j a_i+\nabla_{[k}\nabla_{j]}\nabla_r a_i+\nabla_{[j}\nabla_{r]}\nabla_k a_i=-$$

$$-(\nabla_r R^m_{kji}+\nabla_k R^m_{jri}+\nabla_j R^m_{rki})a_m-R^m_{kji}\nabla_r a_m-R^m_{jri}\nabla_k a_m-R^m_{rki}\nabla_j a_m.$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეზე მდგომ შესაკრებთათვის გამოვიყენოთ რიჩის (102) ფორმულა, სადაც ამ შემთხვევაში P_{ij} ტენზორის ნაცვლად განიხილება $\Delta_j a_i$. გვექნება:

$$\nabla_{[r}\nabla_{k]}\nabla_j a_i+\nabla_{[k}\nabla_{j]}\nabla_r a_i+\nabla_{[c}\nabla_{r]}\nabla_k a_i=-$$

$$-R^m_{kj}\nabla_m a_i-R^m_{rki}\nabla_j a_m-R^m_{kjr}\nabla_m a_i-R^m_{kji}\nabla_r a_m-R^m_{jrk}\nabla_m a_i-R^m_{jri}\nabla_j a_m=$$

$$=-(R^m_{rkj}+R^m_{kjr}+R^m_{jrk})\Delta_m a_i-R^m_{kji}\nabla_r a_m-R^m_{vri}\nabla_k a_m-R^m_{rki}\nabla_j a_m.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეზე მდგომი წევრებიდან ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება, (105) ტოლობის თანახმად, ნულია; დანარჩენი სამი შესაკრები კი სათითაოდ ტოლია წინა ტოლობის მარჯვენა მხარეზე მოთავსებული უკანასკნელი სამი შესაკრებისა შესაბამისად. ამრიგად, თუ ამ ტოლობას შევადარებთ წინა ტოლობას, მივიღებთ:

$$(\nabla_r R^m_{kji}+\Delta_k R^m_{jri}+\nabla_j R^m_{rki})a_m=0.$$

რადგან a_i ტენზორი ნებისმიერია (აქ უკვე გრადიენტობაც არ მოითხოვება), ამიტომ აქედან მიიღება R^m_{kjz} ტენზორის კიდევ შემდეგი თვისება:

$$\nabla_r R^m_{kji}+\nabla_k R^m_{jri}+\nabla_j R^m_{rki}=0. \tag{106}$$

ამ ტოლობას ეწოდება **ბიანკის იგივეობა**[3].

სიმრუდის ტენზორის პირველი თვისებიდან, ე. ი. (104) ტოლობიდან, უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

---

[3] იხ. П. **Рашевский**, Введение в риманову геометрию и тензорный анализ და É. **Cartan**, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann მეორე გამოცემა, 1946. არის პირველი გამოცემის რუსული თარგმანი: Э. **Картан**, Геометрия римановых пространств, 1936.

$$R^m_{11i}=0, \quad R^m_{22i}=0, \quad R^m_{12i}=-R^m_{21i},$$

რადგან აშკარაა, რომ R^m_{kji} ტენზორს არ შეიძლება ჰქონდეს ოთხზე მეტი ნულისაგან განსხვავებული და ერთიმეორეზე დამოკიდებული კომპონენტი. ამიტომ, R^m_{kji} ტენზორის დამოუკიდებელი კომპონენტების რიცხვი (ოთხი) ტოლია მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების რიცხვისა. ამიტომ სიმრუდის ტენზორს შეიძლება დაუკავშირდეს მეორე რანგის ტენზორი, რომელიც მას განსაზღვრავს მთლიანად. იგი ამავე დროს ფორმულებს გაგვიმარტივებს. ერთ ასეთ ტენზორად ითვლება R^m_{kji} ტენზორიდან k, m ნიშნაკების მიმართ შეკუმშვით მიღებული ტენზორი, ე. ი. R^k_{kji} ტენზორი. ეს ტენზორი აღინიშნება R_{ij}-ით. მას უწოდებენ *რიჩის ტენზორს*. ამრიგად, რიჩის ტენზორი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$R_{ij} = R^k_{kji}. \tag{107}$$

თავი III

ზედაპირის შინაგანი გეომეტრიის ძირითადი დებულებანი

§ 59. ქრისტოფელის სიმბოლოები

აქამდე აბსოლუტური გაწარმოების ფუძედ აღებული გვქონდა ზედაპირის ძირითადი განტოლების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი Γ_{ij}^{m} სიდიდე. მის შესახებ მხოლოდ მისი გარდაქმნის კანონი ვიცით. ახლა მას განვსაზღვრავთ მთლიანად ზედაპირის I კვადრატული ფორმის, ე. ი. წირითი ელემენტის კოეფიციენტების საშუალებით ანუ ფუნდამენტური ტენზორით. რადგან, (83) ფორმულის თანახმად, ზედაპირის ძირითად (81) განტოლებაში შემავალი λ_{ij} ტოლია მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების ერთობლიობისა, ე. ი. $\lambda_{ij}=b_{ij}$, ამიტომ ზედაპირის ძირითადი განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\overline{M}_{ij} = \Gamma_{ij}^{m}\overline{M}_{m}+b_{ij}\overline{K}. \tag{108}$$

გადავამრავლოთ ეს განტოლება $\overline{M}_k$-ზე, გვექნება:

$$\overline{M}_k \cdot \overline{M}_{ij}=\Gamma_{ij}^{m} M_m \cdot \overline{M}_k+b_{ij}\overline{K} \cdot \overline{M}_k.$$

(60) და (55) ფორმულების თანახმად,

$$\overline{K} \cdot \overline{M}_k=0, \qquad \overline{M}_k \cdot \overline{M}_m=a_{km}.$$

ამრიგად, უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\overline{M}_k \cdot \overline{M}_{ij}=\Gamma_{ij}^{m}a_{km}.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\overline{M}_k \cdot \overline{M}_{ij}=\Gamma_{ij,\,k}. \tag{109}$$

წინა ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{ij}^{m}a_{km}. \tag{110}$$

ახლა ავიღოთ ტოლობა

$$\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j=a_{ij}$$

და გავაწარმოოთ u^k პარამეტრით, ხოლო შემდეგ მიღებულ ტოლობაში მოვახდინოთ k, i, j ნიშნაკების წრიული გადანაცვლება. მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\overline{M}_i \cdot \overline{M}_{jk} + \overline{M}_j \cdot \overline{M}_{ik} = \partial_k a_{ij}.$$

$$\overline{M}_j \cdot \overline{M}_{ki} + \overline{M}_k \cdot \overline{M}_{ji} = \partial_i a_{jk},$$

$$\overline{M}_k \cdot \overline{M}_{ij} + \overline{M}_i \cdot \overline{M}_{kj} = \partial_j a_{ki}.$$

ამ სამი ტოლობის ორი უკანასკნელი ტოლობა შევკრიბოთ და მიღებულ ჯამს გამოვაკლოთ პირველი ტოლობა, მივიღებთ:

$$2\overline{M}_k \cdot \overline{M}_{ij} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ki} - \partial_k a_{ij}.$$

(109) აღნიშვნის თანახმად, $\Gamma_{ij,k}$ მიიღებს ასეთ მნიშვნელობას:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i a_{kj} + \partial_j a_{ki} - \partial_k a_{ij}). \tag{111}$$

თვით Γ_{ij}^m კი განიზღვრება (110) ტოლობიდან. ამ უკანასკნელის $\widetilde{a}^{kn}$-ზე გადამრავლებით გვექნება (მიღებულ შედეგში n იცვლება m-ით):

$$\Gamma_{ij}^m = \widetilde{a}^{km}\Gamma_{ij,k},$$

რაც, (111) ფორმულის თანახმად, მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\widetilde{a}^{mk}(\partial_i a_{ki} + \partial_j a_{ki} - \partial_k a_{ij}). \tag{112}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა ნათლად გვიჩვენებს, რომ Γ_{ij}^m სავსებით განიზღვრება ფუნდამენტური a_{ij} ტენზორისა და მისი პირველი რიგის წარმოებულების საშუალებით. აქვე აღვნიშნავთ, რომ (111) და (112) ტოლობათა მარჯვენა მხარეს მოთავსებულ გამოსახულებებს ზოგჯერ $[ij, k]_a$, $\begin{Bmatrix} m \\ ij \end{Bmatrix}_a$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ შესაბამისად და მათ უწოდებენ ქრისტოფელის სიმბოლოებს I და II გვარისა. აღნიშნული გამოსახულებისათვის ჩვენ ვიხმართ ზემოთ მიღებულ სიმბოლოებს, ე. ი. $\Gamma_{ij,k}$ და Γ_{ij}^m-ს, ოღონდ ყოველთვის მხედველობაში უნდა გვქონდეს მათი ის მნიშვნელობები, რომლებიც მოცემულია (111) და (112) ფორმულებით.

§ 60. a_{ij} და δ_i^j ტენზორების აბსოლუტური წარმოებულები

შემდგომი გამოთვლების გასამარტივებლად ძირითადი (108) განტოლება უმჯობესია გადავწეროთ ტენზორული სახით აბსოლუტურ წარმოებულებში. ამისათვის (108) ტოლობა ჯერ ასე გადავწეროთ:

$$\overline{M}_{ij} - \Gamma_{ij}^m\overline{M}_m = b_{ij}\overline{K}$$

და შევამჩნიოთ, რომ ((89) ფორმულის მსგავსად)

$$M_{ij} - \Gamma_{ij}^m\overline{M}_m = \partial_j\overline{M}_i - \Gamma_{ij}^m\overline{M}_m = \Delta_j M_i.$$

ჩვენ უკვე აღნიშნული გვქონდა, რომ ვექტორულ კომპონენტებიანი $\overline{M}_i$ ტენზორი ემორჩილება თითქმის ყველა იმ კანონს, რომელსაც სკალარული კომპონენტებიანი ტენზორი. $\nabla_j \overline{M}_i$ გამოსახულებაც აგრეთვე ემორჩილება აბსოლუტური

გაწარმოების ყველა კანონს. ყველაფერი ეს შეიძლება შემოწმებულ იქნეს უშუალოდ. უკანასკნელი ტოლობის თანახმად, ძირითადი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\nabla_j \overline{M}_i = b_{ij} \overline{K}. \tag{113}$$

ახლა გავაწარმოოთ

$$a_{ij} = \overline{M}_i \cdot \overline{M}_j$$

ტოლობა აბსოლუტურად u^k პარამეტრის მიმართ Γ^m_{ij} ფუძით. გვექნება:

$$\nabla_k a_{ij} = \nabla_k (\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j) = \Delta_k \overline{M}_i \cdot \overline{M}_j + \overline{M}_i \cdot \nabla_k \overline{M}_j.$$

შევიტანოთ აქ, (113) ფორმულის თანახმად, $\nabla_k \overline{M}_i$, $\nabla_k \overline{M}_j$-ის შემდეგი მნიშვნელობები

$$\nabla_k \overline{M}_i = b_{ki} \overline{K}, \quad \nabla_k \overline{M}_j = b_{kj} \overline{K}.$$

მივიღებთ:

$$\nabla_k a_{ij} = b_{ki} \overline{K} \cdot \overline{M}_j + b_{kj} \overline{K} \cdot \overline{M}_i.$$

მაგრამ, როგორც ცნობილია (იხ. (60) ფორმულა), $\overline{K} \cdot \overline{M}_i = 0$, $\overline{K} \cdot \overline{M}_j = 0$ და საბოლოოდ ფუნდამენტური ტენზორისათვის მივიღებთ შემდეგ დამახასიათებელ ტოლობას:

$$\nabla_k a_{ij} = 0. \tag{114}$$

ამრიგად, ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ უ რ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ნ უ ლ ი ა. თუ (114) ტოლობას გაშლილი სახით დავწერთ, ე. ი. ასე:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mi} - \Gamma^m_{kj} a_{im} = 0,$$

და ამოვხსნით ამ ტოლობას Γ^m_{ij}-ის მიმართ (რისთვისაც საკმარისია ამ ტოლობაში მოვაწყოთ k, i, j ინდექსების წრიული გადანაცვლება და მიღებული ორი ახალი ტ ოლობის ჯამს გამოვაკლოთ თვით ეს ტოლობა), მივიღებთ:

$$\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \frac{1}{2} (\partial_i a_{kj} + \partial_j a_{ki} - \partial_k a_{ij}),$$

საიდანაც Γ^m_{ij}-ისათვის მიიღება უკვე ცნობილი (112) ფორმულა. ცხადია, რომ პირუკუ შებრუნებული მოქმედება (112) ფორმულიდან მიგვიყვანს (114) ფორმულასთან. ამრიგად, (112) და (114) ფორმულები ეკვივალენტურია.

ახლა გამოვითვალოთ δ^j_i ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული. ჩავატაროთ უშუალო გამოთვლა (93) ფორმულის მიხედვით:

$$\nabla_k \delta^j_i = \partial_k \delta^j_i - \Gamma^m_{ki} \delta^j_m + \Gamma^j_{km} \delta^m_i.$$

რადგან δ^j_i ტენზორის კომპონენტები მუდმივებია, ამიტომ

$$\delta_k \partial^m_i = 0.$$

გარდა ამისა, δ^j_i ტენზორის დამახასიათებელი თვისების თანახმად (იგი არა ცვლის ობიექტს),

$$\Gamma^m_{ki} \delta^j_m = \Gamma^j_{ki}, \quad \Gamma^j_{km} \delta^m_i = \Gamma^j_{ki}.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმისა და შეკრების შემდეგ მივიღებთ:

$$\nabla_k \delta^j_i = 0. \tag{115}$$

ამრიგად, δ_i^j ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ნ უ ლ ი ა. მიღებული შედეგების საფუძველზე ადვილად გამოითვლება $\widetilde{a}^{ij}$ ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული. როგორც ცნობილია, $\widetilde{a}^{ij}$ განიზღვრება შემდეგი ტოლობიდან:

$$\widetilde{a}^{mj} a_{mi} = \delta_i^j.$$

ამ ტოლობის აბსოლუტური გაწარმოება მოგვცემს:

$$\nabla_k \widetilde{a}^{mj} a_{mi} + \widetilde{a}^{mj} \nabla_k a_{mi} = \nabla_k \delta_i^j.$$

ეს ტოლობა, (114) და (15) ფორმულების თანახმად, ასე გადაიწერება:

$$\Delta_k \widetilde{a}^{mj} a_{mi} = 0,$$

საიდანაც $\widetilde{a}^{in}$-ზე გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\nabla_k \widetilde{a}^{ij} = 0. \tag{116}$$

ამრიგად, $\widetilde{a}^{ij}$ ტ ე ნ ზ ო რ ი ს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი ნ უ ლ ი ა.

საბოლოოდ განვიხილოთ a_{ij} ტენზორთან დაკავშირებული შემდეგი ტენზორი

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{|a_{ij}|} \\ -\sqrt{|a_{ij}|}, & 0 \end{pmatrix}. \tag{117}$$

ამ ტენზორს ეწოდება a_{ij} ტენზორის დ ი ს კ რ ი მ ი ნ ა ნ ტ უ ლ ი ტ ე ნ ზ ო რ ი. (117) ფორმულიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ ტენზორი ანტისიმეტრიულია, ე. ი. $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$. უშუალო შემოწმებით შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jr} = a_{ir}a_{jk} - a_{ik}a_{jr}.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება, (114) ტოლობის თანახმად, მოგვცემს:

$$\varepsilon_{ip} \cdot \nabla_e \varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik} \nabla_e \varepsilon_{ir} = 0.$$

ამ ტოლობის გადამრავლებით $\widetilde{\varepsilon}^{rj}$-ზე მივიღებთ:

$$\nabla_e \varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik} \widetilde{\varepsilon}^{rj} \nabla_e \varepsilon_{rj} = 0.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის გადამრავლებით $\widetilde{\varepsilon}^{ik}$-ზე მივიღებთ:

$$\widetilde{\varepsilon}^{ij} \nabla_e \varepsilon_{ij} = 0,$$

რაც, წინა ტოლობასთან შედარებული, გვაძლევს:

$$\nabla_e \varepsilon_{ik} = 0. \tag{117$_1$}$$

ამრიგად, დისკრიმინანტული ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული უდრის ნულს. ეს შედეგი შეიძლება მიგვეღო აგრეთვე (117)-ის უშუალო გაწარმოებით და ქრისტოფელის სიმბოლოს გამოყენებით. როგორც $\widetilde{a}^{ij}$ ტენზორისათვის იქნა გამოთვლილი აბსოლუტური წარმოებული, ისევე გამოითვლება $\widetilde{\varepsilon}^{ij}$-ის აბსოლუტური წარმოებული და დამტკიცდება, რომ

$$\nabla_k \widetilde{\varepsilon}^{ij} = 0. \tag{117$_2$}$$

რადგან ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული წარმოადგენს აბსოლუტური დიფერენციალის წრფივი და ერთგვაროვანი დაშლის (du^1, du^2 დიფერენციალების მიმართ) კოეფიციენტების ერთობლიობას, ამიტომ, როცა აბსოლუტური წარმოებული ნულია, მაშინ აბსოლუტური დიფერენციალიც ნულია და პირუკუ. მაშასადამე, ამ პარაგრაფში განხილული a_{ij}, $\widetilde{a^{ij}}$, δ^j_i, ε_{ij}, $\widetilde{\varepsilon^{ij}}$ ტენზორების აბსოლუტური დიფერენციალები ნულია, ე. ი.

$$\nabla a_{ij}=0,\ \nabla\widetilde{a^{ij}}=0,\ \nabla\delta^j_i=0,\ \nabla\varepsilon_{ij}=0,\ \widetilde{\Delta\varepsilon^{ij}}=0.$$

$a_{ij}, \widetilde{a^{ij}}$, δ^j_i, ε_{ij} და $\widetilde{\varepsilon^{ij}}$ ტენზორების ზემოაღნიშნული თვისებები აბსოლუტური გაწარმოების მიმართ მსგავსია სკალარი მუდმივის თვისებისა ჩვეულებრივი გაწარმოების მიმართ. ეს ტენზორები, აღნიშნულ თვისებათა გამო, შეიძლება აბსოლუტური გაწარმოების ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ ან პირუკუ, როგორც სკალარი მუდმივი ჩვეულებრივი გაწარმოების დროს. აქვე შევნიშნავთ, რომ სკალარი მუდმივის აბსოლუტური წარმოებული ნულია. მართლაც, სკალარი მუდმივი განიხილება როგორც სკალარული ინვარიანტი. ამ უკანასკნელის აბსოლუტური წარმოებული კი, როგორც ვიცით, იგივე ჩვეულებრივი წარმოებულია, ე. ი. ნულია. ამრიგად, სკალარი მუდმივიც გამოიტანება აბსოლუტური გაწარმოების ნიშნის გარეთ ან, პირუკუ, შეიტანება.

§ 61. ზედაპირის ძირითად განტოლებათა ინტეგრების პირობები. გაუსის თეორემა

ზედაპირის ძირითად (108) განტოლებათა სისტემა სამი განტოლებისაგან შედგება. უცნობი ფუნქცია კი ერთია, თვით ზედაპირის მდინარე წერტილი M. ამიტომ განტოლებათა ეს სისტემა მხოლოდ გარკვეულ პირობებში არის თავსებადი. ამ პირობებს განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს. თავსებადობის პირობებს ინტეგრების პირობებიც ეწოდება.

ინტეგრების პირობების მოძებნა ხდება შემდეგი გავრცელებული წესით: ავიღებთ ძირითად განტოლებათა სისტემას ტენზორული სახით, ე. ი. (108) განტოლებას:

$$\nabla_j\overline{M}_i=b_{ij}\overline{K}$$

და გავაწარმოებთ აბსოლუტურად Γ^m_{ij} ფუძით. გვექნება:

$$\nabla_k\nabla_j\overline{M}_i=\Delta_k b_{ij}\overline{K}+b_{ij}\nabla_k K.$$

ჯერ გამოვითვალოთ $\nabla_k K$. ჩვენ ვიცით, რომ

$$\nabla_k K=\partial_k K=K_k.$$

რადგან $\overline{K}$ ერთეული ვექტორია, ამიტომ $\overline{K}\perp\overline{K_k}$. ამრიგად, $\overline{K_k}$ ვექტორი მდებარეობს მხებ სიბრტყეზე, ე. ი. $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ ვექტორების კომპლანარულია. მაშასადამე, $\overline{K_k}$ დაიშლება M_1, $\overline{M}_2$ ვექტორების მიმართ შემდეგნაირად:

$$K_k=\mu^m_k\overline{M}_m.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $\overline{M}_i$-ზე, გვექნება: (118)

$$\overline{M}_i\cdot\overline{K_k}=\mu^m_k\overline{M}_m\cdot\overline{M}_i.$$

შევიტანოთ აქ (55 და 65 ფორმულების ძალით)

$$\overline{M}_m \cdot \overline{M}_i = a_{mi}, \quad \overline{M}_i \cdot \overline{M}_k = -b_{ik}$$

და გადავამრავლოთ $\widetilde{a}^{mk}$-ზე, მივიღებთ:

$$\mu_i^k = -\widetilde{a}^{mk} b_{im}. \tag{119}$$

(118) განტოლებები წარმოადგენს დამხმარე განტოლებებს ძირითად განტოლებათა ინტეგრების პირობების მოსაძებნად. ეს განტოლებანი ვაინგარტენის განტოლებანია, ოღონდ ტენზორულად ჩაწერილი.

ახლა დავუბრუნდეთ ისევ ძირითადი განტოლებების აბსოლუტურ წარმოებულებს და შევიტანოთ იქ $\nabla_k \overline{K}$-ს მნიშვნელობა. გვექნება:

$$\nabla_k \nabla_j \overline{M}_i = \nabla_k b_{ij} \overline{K} + b_{ij} \mu_k^m \overline{M}_m.$$

ალტერნაცია k, j ნიშნაკების მიმართ მოგვცემს:

$$\nabla_{[k} \nabla_{j]} \overline{M}_i = \nabla_{[k} b_{j]i} \overline{K} + \mu^m{}_{[k} b_{j]i} \overline{M}_m.$$

რიჩის იგივეობის, ე. ი. (101) ფორმულის თანახმად,

$$\nabla_{[k} \nabla_{j]} \overline{M}_i = -R^m_{kji} M_m.$$

ამ ორი ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$-R^m_{kji} \overline{M}_m = \nabla_{[k} b_{j]i} \overline{K} + \mu^m_{[k} b_{j]i} \overline{M}_m.$$

რადგან $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{K}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში ამ ვექტორების კოეფიციენტები მარცხნივ და მარჯვნივ ერთი მეორეს გაუტოლდება შესაბამისად და მივიღებთ შემდეგ ინტეგრების პირობებს:

$$\begin{aligned} R^m_{kji} &= -\mu^m{}_{[k} b_{j]i}, \\ \nabla_{[k} b_{j]i} &= 0, \end{aligned} \tag{120}$$

სადაც μ_i^j-სათვის უნდა გვახსოვდეს (119) ფორმულით მოცემული მნიშვნელობა. ამ მნიშვნელობას თუ შევიტანთ (120) ფორმულების პირველ ტოლობაში, მივიღებთ იმავე ინტეგრების პირობებს შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} R^m_{kji} &= \widetilde{a}^{mn} b_{n[k} b_{j]i}, \\ \nabla_{[k} b_{j]i} &= 0. \end{aligned} \tag{120_1}$$

ახლა გავიხსენოთ სრული სიმრუდის ფორმულა

$$K = \frac{ln - m^2}{eg - f^2}.$$

ზემომოყვანილი აღნიშვნების თანახმად (იხ. (57) და (64) ფორმულები),

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - (b_{12})^2}{a_{11} a_{22} - (a_{12})^2} = \frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|}.$$

აქედან

$$b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 = K(a_{11} a_{22} - (a_{12})^2.$$

უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ ეს ტოლობა ეკვივალენტურია შემდეგი ტოლობისა:

$$b_{nk}b_{ji}-b_{nj}b_{ki}=K(a_{nk}a_{ji}-a_{nj}a_{ki}),$$

ანუ

$$b_{n[k}b_{j]i}=Ka_{n[k}a_{j]i}.$$

ამრიგად, (120_1) ინტეგრების პირობები ასეთ სახეს მიიღებს (მხედველობაში ვღებულობთ რომ $\widetilde{a}^{mn}a_{nk}=\delta^m_k$):

$$R^m_{kji}=K\delta^m{}_{[k}a_{j]i},\qquad \nabla_{[k}b_{j]i}=0. \tag{121}$$

რიჩის ტენზორის საშუალებით ამ ინტეგრების პირობებს შემდეგი, კიდევ უფრო მარტივი, სახე ეძლევა:

$$R_{ij}=R^k_{kji}=K\delta^k{}_{[k}a_{j]i}=\frac{K}{2}(\delta^k_k a_{ji}-\delta^k_j a_{ki}).$$

რადგან

$$\delta^k_k=\delta^1_1+\delta^2_2=1+1=2,\quad \delta^k_j\, a_{ki}=a_{ji},$$

მიტომ ზემოაღნიშნული ინტეგრების პირობები კიდევ ასეთი სახით წარმოგვიდგება:

$$R_{ij}=\frac{1}{2}Ka_{ij},\quad \nabla_{[k}b_{j]}=0. \tag{122}$$

ამ პირობებიდან პირველი გამოსახავს ზედაპირის სრული სიმრუდის კავშირს წირითი ელემენტის კოეფიციენტებთან. პირველი ტოლობა რომ გადავამრავლოთ $\widetilde{a}^{ij}$-ზე, მივიღებთ:

$$\widetilde{a}^{ij}R_{ij}=\frac{K}{2}\,\widetilde{a}^{ij}a_{ij}.$$

რადგან

$$\widetilde{a}^{ij}a_{ij}=\delta^i_i=2,$$

ამიტომ

$$K=\widetilde{a}^{ij}R_{ij}. \tag{123}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ რიჩის ტენზორი R_{ij} გამოისახება Γ^m_{ij} სიმბოლოს საშუალებით; მართლაც, (100_1) ფორმულის თანახმად,

$$R_{ij}=R^k_{kji}=\partial_{[k}\Gamma^k_{j]i}+\Gamma^k_{n[k}\Gamma^n_{j]i}. \tag{124}$$

თვით Γ^m_{ij} კი, როგორც ცნობილია, გამოისახება a_{ij} ტენზორის, ე. ი. წირითი ელემენტის კოეფიციენტების საშუალებით. (123) ფორმულა გამოსახავს ე.წ. გაუსის თეორემას, რომელსაც კიდევ Theorema egregium ეწოდება.

გაუსის თეორემა. ზედაპირის სრული სიმრუდე გამოისახება წირითი ელემენტის კოეფიციენტებისა და მათი წარმოებულების საშუალებით.

ინტეგრების პირობებიდან პირველი პირობა გაუსის მიერ იქნა აღმოჩენილი (არა ტენზორული სახით), როგორც ზედაპირთა თეორიის ერთი მნიშვნელოვანი თეორემა· მეორე ტოლობით განზღვრული პირობა კი კოდაცის განტოლებებს

გვაძლევს ტენზორული სახით. ამიტომ მას ზოგჯერ კოდაცის განტოლებას უწოდებენ. კოდაცის პირობა ორი განტოლებისაგან წარმოდგება:

$$\Delta_{[1}b_{2]i}=0, \quad i=1,\ 2.$$

ეს განტოლებები მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს, ე. ი. b_{ij} ტენზორს აკავშირებს წირითი ელემენტის კოეფიციენტებთან, ე. ი. a_{ij} ტენზორთან.

§ 62. ზედაპირთა თეორიის ფუნდამენტური თეორემა

როგორც წინა პარაგრაფიდან ჩანს, ძირითადი განტოლებები და მათი ინტეგრების პირობები დამოკიდებულია მხოლოდ ზედაპირის I და II კვადრატულ ფორმებზე. ინტეგრაციით მიიღება თვით საძიებელი ფუნქცია—$\overline{M}$ წერტილი, ე. ი. ის ზედაპირი, რომელსაც ეკუთვნის აღებული დიფერენციალური განტოლება. ამონახსნი დამოკიდებული იქნება მხოლოდ I და II კვადრატულ ფორმებზე და საინტეგრაციო ნებისმიერ ელემენტებზე. ამ ნებისმიერი ელემენტების განზღვრა შეიძლება საწყისი პირობებით. მაგალითად, თუ საწყისი პირობების სახით მოცემულია M წერტილის მდებარეობა და მისი ნაწილობითი წარმოებულების მნიშვნელობანი, როცა $u^i=u_0^i$. როცა $u^i=u_0^i$, მაშინ $M=M^0$, $\overline{M}_i=\overline{M}_i^0$. ამ მონაცემების საფუძველზე, (108) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია გამოვითვალოთ M წერტილის მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულები იმავე M_0 წერტილში, გვექნება:

$$\overline{M}_{ij}^0=\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^m\,\overline{M}_m^0+b_{ij}^0\,\overline{K}_0.$$

M წერტილის მესამე რიგის წარმოებულები მოიძებნება (108) ტოლობის გაწარმოებით. რადგან $\overline{M}_m$ ვექტორის წარმოებულები, ე. ი. $\overline{M}_{mk}$. იმავე (108) განტოლების ძალით, განისაზღვრება I და II კვადრატული ფორმების საშუალებით, ხოლო $\overline{K}$ ვექტორის წარმოებულები, ე. ი. K_i, (118) განტოლების თანახმად, გამოისახება აგრეთვე I და II ფორმების საშუალებით, ამიტომ M წერტილის მესამე რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიც გამოისახება I და II კვადრატული ფორმების საშუალებით. თუ შევიტანთ მესამე წარმოებულების გამოსახულებაში $u^i=u_0^i$, მივიღებთ მესამე წარმოებულების მნიშვნელობებს, ე. ი. $M_{ij,k}^0$. ანალოგიურად განიზღვრება დანარჩენი რიგის ნაწილობითი წარმოებულების მნიშვნელობები M^0 წერტილში. ამით სავსებით განზღვრული იქნება M წერტილის სრული დიფერენციალები M^0 წერტილში, ე. ი. სავსებით განზღვრული იქნება M წერტილის $\Delta\overline{M}$ ნაზრდი M^0 წერტილში:

$$\Delta\overline{M}=d\overline{M}^0+\frac{1}{2}d^2\overline{M}^0+\cdots$$

ამრიგად, $\Delta\overline{M}$ სავსებით განიზღვრება ზედაპირის I და II კვადრატული ფორმების საშუალებით, თუ დასახელებულია სათანადო საწყისი პირობები. თუ du_0^i დიფერენციალებს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს, მივიღებთ ყოველგვარ ნაზრდს, ხოლო მათი M_0 წერტილთან დამატებით კი ზედაპირის ყოველ წერტილს, ე. ი. თვით ზედაპირს. ამავე დროს, ცხადია, ზედაპირის ფორმა დამოკიდებული იქნება მხოლოდ დაშლის კოეფიციენტებზე და არა საწყის M^0 წერტილზე და $\overline{M}_1^0$, $\overline{M}_2^0$ ვექტორებზე. დაშლის კოეფიციენტები კი, როგორც ზემოაღწერილიდან

დავინახეთ, განიზღვრება მხოლოდ I და II კვადრატული ფორმების კოეფიციენტების, ე. ი. a_{ij} და b_{ij} ტენზორების საშუალებით. ახალი საწყისი წერტილი და საბაზისო სისტემა რომ ავიღოთ, რომელიც პირველიდან მოძრაობითაა მიღებული, მაშინ, ცხადია, იგივე ფორმის ზედაპირი მოგვეცემა, რადგან I და II კვადრატული ფორმები იგივე იქნება. ამრიგად, *I და II კვადრატული ფორმები განსაზღვრავენ ზედაპირის მხოლოდ ფორმას, მდებარეობას კი არა. მაშასადამე, თუ ორ ზედაპირს შესაბამ წერტილებში ერთი და იგივე კვადრატული ფორმები აქვთ, მაშინ ისინი მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან.*]

ზემოაღნიშნულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ზედაპირთა თეორიის შემდეგი ფუნდამენტური თეორემა.

თეორემა. *ზედაპირის I და II კვადრატული დიფერენციალური ფორმები განსაზღვრავენ ზედაპირს სივრცეში მდებარეობამდე.*

§ 63. ზედაპირთა იზომეტრული გადასახვა

ამ წიგნის I ნაწილის III თავში აღნიშნული გვქონდა, რომ ზედაპირის წირითი ელემენტი, საზოგადოდ, ვერ განსაზღვრავს ზედაპირის ფორმას მთლიანად. ამისათვის მოვიყვანეთ ისეთი ურთიერთგანსხვავებულ ზედაპირთა მაგალითები (მაგალითად, სიბრტყე და ცილინდრი), რომელთაც ერთნაირი წირითი ელემენტი ჰქონდათ. ამავე დროს, ინტეგრების პირობების მიხედვით, შეგვიძლია a_{ij} ტენზორი ნებისმიერად განვიხილოთ და აღნიშნულ პირობებს მხოლოთ b_{ij} ტენზორი დაუმორჩილოთ. მართლაც, ინტეგრების პირველი პირობა ეკვივალენტურია ერთი ტოლობისა:

$$b_{11}b_{22}-(b_{12}^2)^2=K[a_{11}a_{22}-a_{12})^2].$$

რადგან K განსაზღვრულია მხოლოდ a_{ij} ტენზორისა და მისი წარმოებულების საშუალებით, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს ერთ შემზღუდველ პირობას b_{ij} ტენზორის კომპონენტების მიმართ. ორ სხვა შემზღუდველ პირობას გვაძლევს კოდაცის განტოლება:

$$\nabla_{[k}b_{i]j}=0.$$

ამრიგად, b_{ij} ტენზორის კომპონენტებისათვის გვეძლევა სულ სამი განტოლება: ერთი ალგებრული და ორი დიფერენციალური. თუ კოეფიციენტებისათვის (ე. ი. a_{ij} ტენზორისათვის) არავითარ შეზღუდვას არ მივიღებთ, მაშინ, აღნიშნული სამი განტოლების სისტემას,—სამი უცნობით, სახელდობრ, b_{ij} ტენზორის კომპონენტებით,—საზოგადოდ, მრავალი ამოხსნა ექნება; იმ შემთხვევაში კი, როცა a_{ij} ტენზორი შეზღუდულია რაიმე პირობებით (მაგალითად, თუ $K=1$), აღნიშნულ განტოლებათა სისტემას (ინტეგრობის პირობებს) შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი ამონახსნი. ამრიგად, ნებისმიერად მოცემული დადებითი კვადრატული დიფერენციალური ფორმა შეიძლება განვიხილოთ როგორც რაიმე ზედაპირის წირითი ელემენტი. იმისათვის, რომ ერთი ასეთი ზედაპირი განისაზღვროს, საჭიროა რომ მოცემულ ფორმასთან ერთად მეორე კვადრატული ფორმაც განვსაზღვროთ ინტეგრების პირობების საშუალებით. ამ პირობებიდან მიღებული ყოველი ამონახსნის შესაბამისი b_{ij} ტენზორი a_{ij} ტენზორთან ერთად, ზედაპირთა თეორიის

ფუნდამენტური თეორემის თანახმად, ზედაპირს განსაზღვრავს მდებარეობამდე. სხვადასხვა ამონახსნების შესაბამისი b_{ij} ტენზორები კი მოგვცემს სხვადასხვა ზედაპირებს ერთი და იმავე წირითი ელემენტით, ე. ი. მოგვცემს ისეთ ზედაპირთა კლასს, რომელნიც ერთიმეორეზე იზომეტრულად გადაისახებიან. თუ ზედაპირთა ზემოაღნიშნული კლასი ზედაპირთა უწყვეტ სისტემას წარმოადგენს, მაშინ იზომეტრულ გადასახვას უჭიმადი ღუნვა ეწოდება, ზედაპირებს კი—ერთიმეორეზე დაფენადი ზედაპირები. ამრიგად, ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის შესახებ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა. თუ მოცემულია I კვადრატული დიფერენციალური ფორმა, ე. ი. a_{ij} ტენზორი, მაშინ ზედაპირთა ძირითადი დიფერენციალური განტოლება, სადაც b_{ij} ინტეგრების პირობებითაა განსაზღვრული, გვაძლევს იზომეტრულ გადასახვაში მყოფი ზედაპირების სისტემას, ხოლო კერძო შემთხვევაში კი უჭიმადი ღუნვით ურთიერთდაფენად ზედაპირთა სისტემას.

შევნიშნოთ, რომ ზედაპირის ძირითად განტოლებაში a_{ij} ტენზორი შედის Γ_{ij}^{m} სიმბოლოს საშუალებით, რომელიც სავსებით განიზღვრება (112 ფორმულის თანახმად) a_{ij} ტენზორით და მისი წარმოებულებით. ახლა საინტერესოა გამოირკვეს, განსაზღვრავს თუ არა მოცემული Γ_{ij}^{m}-ისათვის ძირითადი განტოლება იმავე ზედაპირთა სისტემას, რომელსაც მოცემული ტენზორი. ამისათვის უნდა გამოვიკვლიოთ, მოცემული Γ_{ij}^{m} განსაზღვრავს თუ არა a_{ij} ტენზორს. ჩვენ ვიცით, რომ a_{ij} ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული ნულია, ე. ი. $\nabla_k a_{ij}=0$. თუ სხვა რაიმე a_{ij} ტენზორიც იძლევა იგივე Γ_{ij}^{m}-ს, მაშინ უნდა გვქონდეს:

$$\nabla_k \overset{*}{a}_{ij} = 0.$$

მოვძებნოთ ამ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრების პირობები. ამისათვის გავაწარმოოთ ეს ტოლობა აბსოლუტურად u^r პარამეტრით და Γ_{ij}^{m} ფუძით, გვექნება:

$$\nabla_r \nabla_k \overset{*}{a}_{ij}=0.$$

მოვახდინოთ ალტერნაცია r, k პარამეტრების მიმართ და გამოვიყენოთ რიჩის იგივობა მეორე რანგის ტენზორისათვის. ეს იგივობა მოცემულია (102) ფორმულით, სადაც, ამ შემთხვევაში, P_{ij}-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ $\overset{*}{a}_{ij}$; მივიღებთ:

$$-R_{rki}^{m}\overset{*}{a}_{mj}-R_{rkj}^{m}\overset{*}{a}_{im}=0.$$

შევიტანოთ აქ R_{kji}^{m}-ის მნიშვნელობა (121) ფორმულის მიხედვით. გვექნება:

$$K\delta^{m}{}_{[r}a_{k]i}\overset{*}{a}_{mj}+K\delta^{m}{}_{[r}a_{k]j}\overset{*}{a}_{im}=0.$$

რადგან

$$\delta_{r}^{m}\overset{*}{a}_{im}=\overset{*}{a}_{ir},\quad \delta_{r}^{m}\overset{*}{a}_{mj}=\overset{*}{a}_{rj=ajr},$$

ამიტომ წინა ტოლობა ასე გადაიწერება (ვგულისხმობთ, რომ $K\neq 0$ და ვკვეცავთ K-ზე):

$$\overset{*}{a}_{i[r}a_{k]j}+\overset{*}{a}_{j[r}a_{k]i}=0.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $\widetilde{a}^{jr}$-ზე; გვექნება:

$$\overset{*}{a}_{i[r}\, a_{k]j}\, \widetilde{a}^{jr} + \overset{*}{a}_{j[r}\, a_{k]\,i} \widetilde{a}^{jr} = 0.$$

შევიტანოთ აქ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\overset{*}{a}_{i[r}\, a_{k]j}\, \widetilde{a}^{r}_{j} = \frac{1}{2}\,(\overset{*}{a}_{ir} a_{kj} a^{jr} - \overset{*}{a}_{ik} a_{rj} \widetilde{a}^{jr}) = \frac{1}{2}\,(\overset{*}{a}_{ik} - 2\overset{*}{a}_{ik}) = -\frac{1}{2}\, \overset{\smile}{a}_{ik},$$

$$\overset{*}{a}_{j[r}\, a_{k]i}\, \widetilde{a}^{jr} = \frac{1}{2}\,(\overset{*}{a}_{jr} a_{ki} \widetilde{a}^{jr} - \overset{*}{a}_{jk} a_{ri} \widetilde{a}^{jr}) = \frac{1}{2} \overset{*}{a}_{jr} \widetilde{a}^{jr}\, a_{ki} - \frac{1}{2} \overset{*}{a}^{ik}.$$

უბრალო გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\overset{*}{a}_{ij} = \lambda a_{ij} \ (\lambda = \frac{1}{2} \overset{*}{a}_{jr} \widetilde{a}^{jr}).$$

ახლა, თუ გავაწარმოებთ უკანასკნელ ტოლობას [აბსოლუტურად u^k პარამეტრით და Γ^m_{ij} ფუძით, გვექნება:

$$\nabla_k \overset{*}{a}_{ij} = \nabla_k \lambda \cdot a_{ij} + \lambda \nabla_k a_{ij}.$$

რადგან

$$\nabla_k \overset{*}{a}_{ij} = 0, \quad \nabla_k a_{ij} = 0 \text{ და } \nabla_k \lambda = \partial_k \lambda,$$

ამიტომ

$$\partial_k \lambda \cdot a_{ij} = 0.$$

ამ ტოლობის გადამრავლება $\widetilde{a}^{ij}$-ზე მოგვცემს (მხედველობაში ვღებულობთ, რომ $\widetilde{a}^{ij} a_{ij} = 2$):

$$\partial_k \lambda = 0.$$

აქედან

$$\lambda = \text{const}.$$

ამრიგად, თუ a_{ij} და $\overset{*}{a}_{ij}$ განსაზღვრავს ერთ და იმავე Γ^m_{ij}-ს (ქრისტოფელის სიმბოლოს), მაშინ მათ შორის იარსებებს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\overset{*}{a}_{ij} = c a_{ij}. \tag{125}$$

აქ მიღებული შედეგი შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა. მოცემული ქრისტოფელის სიმბოლო განსაზღვრავს წირითი ელემენტის კოეფიციენტებს, ე. ი. a_{ij} ტენზორს ნებისმიერ მუდმივ მამრავლამდე.

რადგან რიჩის ტენზორი მხოლოდ Γ^m_{ij}-ზეა დამოკიდებული, ამიტომ იმ ზედაპირებს, რომლებიც შეესაბამებიან a_{ij} და $\overset{*}{a}_{ij}$ ტენზორებს, ერთნაირი რიჩის ტენზორები ექნება, ე. ი. $\overset{*}{R}_{ij} = R_{ij}$. მეორე მხრივ, ინტეგრების პირობების თანახმად,

$$\overset{*}{R}_{ij} = \frac{\overset{*}{K}}{2} \overset{*}{a}_{ij}.$$

(125) ტოლობის თანახმად, ეს ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\overset{*}{R}_{ij} = \overset{*}{K}\, c\, a_{ij} = \frac{\overset{*}{K}}{K} \cdot c\, K a_{ij}.$$

რადგან

$$Ka_{ij}=2R_{ij}, \quad R_{ij}=\overset{*}{R}_{ij},$$

ამიტომ

$$R_{ij}=\overset{*}{R}_{ij}=\frac{\overset{*}{K}}{K}2\, cR_{ij},$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$K=2\, c\overset{*}{K}. \tag{126}$$

ამრიგად, იმ ზედაპირების სრული სიმრუდეები, რომელთაც შესაბამის წერტილებში ერთნაირი Γ_{ij}^{m} სიმბოლო აქვთ, შეიძლება მხოლოდ ნებისმიერი მუდმივი მამრავლით განსხვავდებოდნენ. აღნიშნული ზედაპირები, საზოგადოდ, ერთი მეორეზე იზომეტრულად არ გადაისახება, მაგრამ მათ შორის არსებობს საკმაოდ მჭიდრო კავშირი, რაც ცალკე იქნება გამორკვეული.

§ 64. იზომეტრული გადასახვის სასრული განტოლებები

განვიხილოთ ზედაპირის M წერტილის რაიმე ინვარიანტული და სკალარული φ ფუნქცია. როგორც ვიცით, სკალარული ინვარიანტის ნაწილობითი წარმოებულების $\partial_i\varphi$ ერთობლიობა არის ტენზორი. ამიტომ

$$\Delta_1\varphi=\widetilde{a}^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi \tag{127}$$

გამოსახულება ინვარიანტია. მას ეწოდება φ ფუნქციის დიფერენციალური პარამეტრი. იგი შემოღებული იქნა ბელტრამის მიერ და მის სახელს ატარებს. რადგან ზედაპირის სიმრუდე არის წერტილის სკალარულ-ინვარიანტული ფუნქცია, ამიტომ იგი შეგვიძლია ავიღოთ φ-ს ნაცვლად (127) ფორმულაში. მივიღებთ K ფუნქციის I დიფერენციალურ პარამეტრს

$$\Delta_1K=\widetilde{a}^{ij}\partial_iK\partial_jK \tag{128}$$

როგორც ვიცით, სრული სიმრუდე ინვარიანტია არა მხოლოდ მრუდწირული კოორდინატების ცვლის, არამედ ზედაპირის იზომეტრული გადასახვისაც. ამიტომ K ფუნქციის I დიფერენციალური პარამეტრიც ინვარიანტი იქნება ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის. მაშასადამე, თუ ერთი ზედაპირი იზომეტრულად გადაისახება მეორეზე, მაშინ მათ შესაბამის წერტილებში ექნებათ ერთნაირი სიმრუდეები და სიმრუდიდან აღებული ერთნაირი I დიფერენციალური პარამეტრი. თუ ზედაპირები, რომელთა განტოლებანია

$$M=M(u^1,\ u^2),$$

$$\overset{*}{M}=\overset{*}{M}(\overset{*}{u}^1,\ \overset{*}{u}^2),$$

იზომეტრულად გადაისახება ერთი მეორეზე, ე. ი. არსებობს ისეთი

$$\overset{*}{u}^i=\overset{*}{u}^i(u^1,\ u^2), \tag{129}$$

დამოკიდებულება u^i და $\overset{*}{u}^i$ პარამეტრებს შორის, რომ ზედაპირთა წირითი ელემენტები შესაბამის წერტილებში გაუტოლდება ერთი მეორეს, მაშინ ზედაპირთ

$K(u^1, u^2)$, $\overset{*}{K}(\overset{*}{u}{}^1, \overset{*}{u}{}^2)$ სიმრუდეები და მათი I დიფერენციალური $\Delta_1 K$ და $\Delta_1 \overset{*}{K}$ პარამეტრები ერთიმეორეს გაუტოლდება შესაბამისად, ე. ი. გვექნება:

$$\overset{*}{K}(\overset{*}{u}{}^1, \overset{*}{u}{}^2) = K(u^1, u^2),$$
$$\Delta_1 \overset{*}{K}(\overset{*}{u}{}^1, \overset{*}{u}{}^2) = \Delta_1 K(u^1, u^2). \tag{130}$$

ამ ორ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს (129) ფორმულებით მოცემული $\overset{*}{u}{}^1$, $\overset{*}{u}{}^2$ ფუნქციები. მაშასადამე, ამ უკანასკნელი განტოლების ამონახსნები განსაზღვრავენ თვით იზომეტრულ გადასახვას. ამრიგად, (130) განტოლებები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც იზომეტრული გადასახვის სასრული განტოლებები. იზომეტრული გადასახვის დიფერენციალურ განტოლებებს კი ქმნის წირითი ელემენტების გატოლება:

$$\overset{*}{a}_{ij} d\overset{*}{u}{}^i d\overset{*}{u}{}^j = a_{ij} du^i du^j.$$

რადგან

$$d\overset{*}{u}{}^i = \frac{\partial \overset{*}{u}{}^i}{\partial u^j} du^j,$$

ამიტომ

$$\overset{*}{a}_{kr} \frac{\partial \overset{*}{u}{}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \overset{*}{u}{}^r}{\partial u^j} = a_{ij}. \tag{131}$$

ეს განტოლებათა სისტემა შედგება ორუცნობიანი სამი განტოლებისაგან. უცნობებია $\overset{*}{u}{}^1$, $\overset{*}{u}{}^2$ ფუნქციები. a_{ij} და $\overset{*}{a}_{ij}$ კი თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია:

$$a_{ij} = a_{ij}(u^1, u^2),$$
$$\overset{*}{a}_{ij} = \overset{*}{a}_{ij}(\overset{*}{u}{}^1, \overset{*}{u}{}^2).$$

ამრიგად, (131) განტოლებათა სისტემის სახით ჩვენ გვაქვს სავსებით განსაზღვრული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა $\overset{*}{u}{}^1$, $\overset{*}{u}{}^2$ უცნობი ფუნქციებით. რადგან განტოლებათა რიცხვი ერთით მეტია უცნობთა რიცხვზე, ამიტომ ამ განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის უნდა შესრულდეს სათანადო ინტეგრების პირობები. ამ ინტეგრების პირობებიდან ერთი მნიშვნელოვანი პირობა, როგორც იზომეტრული გადასახვის აუცილებელი პირობა, პირველად მოძებნილი იყო გაუსის მიერ უშუალოდ, მაგრამ საკმაოდ ვრცელი გამოთვლების გზით. ეს პირობა ჩამოყალიბებულია გაუსის მიერ და ატარებს Theorema egregium-ის სახელწოდებას (შეადარეთ ზემოთ, გვ. 288). ჩვენს წიგნში ამ პირობას წარმოადგენს ზედაპირის ძირითადი განტოლების ინტეგრების პირველი პირობა: $R_{ij} = \frac{1}{2} K a_{ij}$. როგორც მაგალითი, განვიხილოთ განფენადი ზედაპირი. განფენადი ზედაპირის დამახასიათებელია $K=0$; ეს პირობა, ზედაპირის ძირითად განტოლებათა ინტეგრების პირობებთან ერთად, მოგვცემს:

$$R^m_{kji} = 0.$$

ამრიგად, განფენადი ზედაპირის ინტეგრების პირობები ასეთი იქნება:

$$R^m_{kji} = 0.$$
$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 0. \tag{132}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ განფენადი ზედაპირისათვის შეგვიძლია ისე შევარჩიოთ მრუდწირული კოორდინატები, რომ Γ^m_{ij} სიმბოლოს ყველა კომპონენტი ახალ მრუდწირულ კოორდინატებში ნულს გაუტოლდეს, ე. ი. გვქონდეს $\Gamma^m_{ij}=0$. ამ პირობებში (84) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\lambda^k_i \lambda^r_j \Gamma^m_{kr} + \lambda^k_j \partial_k \lambda^m_i = 0.$$

$\widetilde{\lambda}^j_n$-ზე გადამრავლებით გვექნება:

$$\widetilde{\lambda}^j_n \lambda^k_i \lambda^r_j \Gamma^m_{kr} + \widetilde{\lambda}^j_n \lambda^k_j \partial_k \lambda^m_i = 0.$$

თუ გამოვიყენებთ აქ

$$\widetilde{\lambda}^j_n \lambda^k_j = \delta^k_n,\ \delta^r_n \Gamma^m_{kr} = \Gamma^m_{kn},\ \delta^k_n \partial_k \lambda^m_i = \partial_n \lambda^m_i$$

დამოკიდებულებებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\partial_j \lambda^m_i + \Gamma^m_{jk} \lambda^k_i = 0.$$

თუ λ^m_i მატრიცის ქვედა ნიშნაკს დავაფიქსირებთ, მაშინ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარე გარეგნულად წარმოგვიდგება, როგორც λ^m_i სიდიდის აბსოლუტური წარმოებული ზედა ნიშნაკის მიმართ და მასზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ აბსოლუტური გაწარმოების ყველა წესი. გვექნება:

$$\Delta_j \lambda^m_i = 0.$$

ამ განტოლების ინტეგრების პირობები (რომელიც ჩვეულებრივი წესით მოიძებნება: ტოლობა უნდა გავაწარმოოთ აბსოლუტურად, ალტერნაცია მოვახდინოთ და რიჩის იგივეობა გამოვიყენოთ) მოგვცემს:

$$R^m_{kjn} \lambda^n_i = 0.$$

ტოლობის $\widetilde{\lambda}^i_r$-ზე გადამრავლებით აქედან მივიღებთ:

$$R^m_{kji} = 0.$$

მაშასადამე, ისეთი ინტეგრების პირობა მივიღეთ, რომელიც განფენადი ზედაპირისთვისაა დამახასიათებელი. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი თეორემა.

თეორემა. განფენადი და მხოლოდ განფენადი ზედაპირისთვისაა შესაძლებელი მრუდწირული კოორდინატების ისეთი შერჩევა, რომ ამ კოორდინატებში Γ^m_{ij} ნულს გაუტოლდეს.

ახლა დავუშვათ, რომ განფენადი ზედაპირისათვის მრუდწირული კოორდინატები შერჩეულია სასურველად, ე. ი. $\Gamma^m_{ij}=0$. ეს ტოლობა, (112) ფორმულასთან შედარებით, მოგვცემს:

$$\widetilde{a}^{mk}(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}) = 0.$$

ქედან, a_{mr}-ზე გადამრავლებით, მივიღებთ::

$$\partial_i a_{kj} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} = 0.$$

ეს ტოლობა რომ მივუმატოთ (მასშივე) j, k ინდექსების გადანაცვლებით მიღებულ ახალ ტოლობას, გვექნება:

$$\partial_i a_{kj}=0,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$a_{ij}=\text{const}.$$

ამრიგად, თუ $\Gamma_{ij}^m=0$, მაშინ $a_{ij}=\text{const}$. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ, პირუქუ, თუ $a_{ij}=\text{const}$, მაშინ $\Gamma_{ij}^m=0$. ეს შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს (112) ფორმულიდან. ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა. განფენადი ზედაპირისათვის და მხოლოდ მისთვის არსებობს ისეთი მრუდწირული კოორდინატები, რომლის მიმართაც წირითი ელემენტის კოეფიციენტები მუდმივებია.

ასეთ მრუდწირულ კოორდინატებში განფენადი ზედაპირისათვის ძირითადი განტოლება ასე დაიწერება:

$$M_{ij}=b_{ij}\overline{K}.$$

ხოლო ინტეგრების პირობები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\partial_{[k}b_{j]i} = 0.$$

ბოლოს აღვნიშნავთ ქრისტოფელის სიმბოლოს ერთ საინტერესო თვისებას. სახელდობრ, ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ Γ_{im}^m გრადიენტია. საზოგადოდ ქრისტოფელის სიმბოლოს თვისებები სიმრუდის ტენზორის თვისებებშია მოთავსებული. აქ აღნიშნული თვისებაც იქიდან შეიძლება იქნეს მიღებული, მაგრამ მისი მიღება ადვილია უშუალოდაც თვით ქრისტოფელის სიმბოლოს (112) ფორმულიდან. მართლაც, ამ ფორმულაში $m=j$ ჩასმა მოგვცემს:

$$\Gamma_{im}^m=\frac{1}{2}\widetilde{a}^{mk}(\partial_i a_{mk}+\partial_m a_{ik}-\partial_k a_{im})=$$

$$=\frac{1}{2}\widetilde{a}^{mk}\partial_i a_{mk}=\frac{1}{2}(\widetilde{a}^{11}\partial_i a_{11}+\widetilde{a}^{22}\partial_i a_{22}+$$

$$+2\widetilde{a}^{12}\partial_i a_{12})=\frac{a_{22}\partial_i a_{11}+a_{11}\partial_i a_{22}-2a_{12}\partial_i a_{12}}{2|a_{ij}|}=\frac{\partial_i(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}{2\,|a_{ij}|}=$$

$$=\frac{\partial_i|a_{ij}|}{2|a_{ij}|}=\frac{1}{2}\partial_i\lg|a_{ij}|.$$

ამრიგად,

$$\Gamma_{im}^m=\frac{1}{2}\partial_i\lg|a_{ij}|. \qquad (132_1)$$

აქედან აშკარაა, რომ Γ_{im}^m გრადიენტია.

თავი IV

გეოდეზიური წირი. გეოდეზიური გადასახვა

§ 65. გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება

გეოდეზიური წირი განმარტებული გვქონდა ამ წიგნის I ნაწილის III თავში. მისი განტოლებები იყო:

$$M_u \cdot \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=0,$$

$$\overline{M}_v \cdot \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=0.$$

ზემოთ მიღებული აღნიშვნების მიხედვით, ეს განტოლებები ასე გადაიწერება ($\overline{M}_u=\overline{M}_1$ და $\overline{M}_v=\overline{M}_2$):

$$\overline{M}_i \cdot \frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=0,\ i=1,\ 2. \tag{133}$$

რადგან, (108) და (59) ფორმულების თანახმად

$$\overline{M}_{ij}=\Gamma_{ij}^m\overline{M}_m+b_{ij}\overline{K},$$

$$d^2\overline{M}=\overline{M}_{ij}du^i du^j+\overline{M}_i d^2u^i,$$

ამიტომ

$$d^2\overline{M}=\Gamma_{ij}^m du^i du^j\overline{M}_m+\overline{M}_i d^2u^i+b_{ij}\,du^i\,du^j\overline{K},$$

საიდანაც

$$\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\Gamma_{ij}^m\frac{du^i}{ds}\,\frac{du^j}{ds}\overline{M}_m+\overline{M}_m\frac{d^2u^m}{ds^2}+b_{ij}\overline{K}\,\frac{du^i}{ds}\,\frac{du^j}{ds}.$$

ამრიგად, გეოდეზიური წირის განტოლებათა სისტემა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\overline{M}_k\cdot\frac{d^2\overline{M}}{ds^2}=\Gamma_{ij}^m\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}M_m\cdot\overline{M}_k+\overline{M}_k\cdot M_m\frac{d^2u^m}{ds^2}+$$

$$+\,b_{ij}\overline{K}\cdot\overline{M}_k\frac{du^i}{ds}\,\frac{du_j}{ds}=0.$$

რადგან (იხ. (55) და (60) ფორმულები)

$$\overline{M}_m \cdot \overline{M}_k = a_{mk}, \ \overline{K} \cdot \overline{M}_k = 0,$$

ამიტომ

$$a_{km} \frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} a_{km} = 0.$$

აქედან, $\widetilde{a}^{kn}$-ზე გადამრავლებით, მივიღებთ გეოდეზიური წირის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0. \qquad (134)$$

ახლა განვიხილოთ გეოდეზიური წირის მხების მგეზავი $\overline{T}$. იგი ასე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$\overline{T} = t^i \overline{M}_i, \qquad (135)$$

სადაც

$$t^i = \frac{du^i}{ds}. \qquad (136)$$

მოვძებნოთ $d\overline{T}$. (135) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$d\overline{T} = \nabla \overline{T} = \nabla (t^i \overline{M}_i) = \nabla t^i \overline{M}_i + t^i \nabla \overline{M}_i.$$

რადგან

$$\nabla_j \overline{M}_i = b_{ij} \overline{K},$$

ამიტომ

$$\nabla \overline{M}_i = b_{ij} du^j \cdot \overline{K}.$$

ამ მნიშვნელობის შეტანა $d\overline{T}$ გამოსახულებაში მოგვცემს:

$$d\overline{T} = \nabla t^i \overline{M}_i + b_j du^j t^i \overline{K}.$$

აქედან აშკარაა, რომ

$$\text{გეგ } \pi d\overline{T} = \nabla t^i \overline{M}_i,$$

სადაც π აღნიშნავს მხებ სიბრტყეს. ამრიგად, I ნაწილის IV თავში განმარტებული $\overline{DT}$ ($\overline{dT}$ ვექტორის გეგმილი მხებ სიბრტყეზე) არის $\Delta t^i \overline{M}_i$, ე. ი.

$$D\overline{T} = \nabla t^i \overline{M}_i. \qquad (137)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{\nabla t^m}{ds} = \frac{dt^m}{ds} + \Gamma_{ij}^m t^i t^j = \frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}.$$

ამრიგად, გეოდეზიური წირის გასწვრივ, (134) განტოლების თანახმად,

$$\frac{\nabla t^m}{ds} = 0. \qquad (138)$$

ან, რაც იგივეა,

$$\nabla t^m = 0. \qquad (138_1)$$

მაშასადამე, გეოდეზიური წირის გასწვრივ მხების მგეზავის

კონტრავარიანტული კოორდინატებით განსაზღვრული ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალი არის ნული. ამასთან დაკავშირებით შემოდის ვექტორის აბსოლუტური პარალელური გადატანის შემდეგი განმარტება.

განმარტება VII. ამბობენ, რომ რაიმე ვექტორი ახდენს აბსოლუტურ პარალელურ გადაადგილებას M წერტილიდან მეზობელ წერტილში, თუ ამ ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატებით განსაზღვრული ტენზორის აბსოლუტური დიფერენციალი ნულია.

ამ განმარტების თანახმად, მხების მგეზავი აბსოლუტურ პარალელურ გადაადგილებას ახდენს გეოდეზიური წირის გასწვრივ. როგორც I ნაწილის IV თავში იყო აღნიშნული, გეოდეზიური წირის გასწვრივ მხების მგეზავი პარალელურ გადაადგილებას ახდენს ლევი-ჩივიტას აზრით. ამრიგად, ამ შემთხვევაში აბსოლუტური პარალელიზმი და ლევი-ჩივიტას პარალელიზმი ერთიმეორეს ემთხვევა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს დამთხვევა ხდება ზედაპირზე მდებარე ნებისმიერ ვექტორთა მიმდევრობისთვისაც.

აქ ჩვენ გამოვიყვანეთ გეოდეზიური წირის განტოლება რკალის მიმართ ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი t პარამეტრი. ვიგულისხმოთ, რომ $t=\varphi(s)$. გვექნება:

$$t^i=\frac{du^i}{ds}=\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\lambda\tau^i,$$

სადაც მოხდენილია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\tau^i=\frac{du^i}{dt},\qquad \lambda=\frac{dt}{ds}.$$

შევიტანოთ t^i-ს ეს მნიშვნელობა გეოდეზიური წირის (138_1) განტოლებაში; გვექნება:

$$\nabla(\lambda\tau^i)=\nabla\lambda\cdot\tau^i+\lambda\nabla\tau^i=0.$$

აქედან

$$\nabla\tau^i=\mu\tau^i, \tag{139}$$

სადაც $\mu=-\nabla\lg\lambda$ (ე. ი. μ არის რაიმე წრფივი დიფერენციალური ფორმა).

§ 66. გეოდეზიური წირის მინიმალურობის თვისება

წინამდებარე წიგნის I ნაწილის III თავში ნაჩვენები იყო გეოდეზიური წირის მინიმალურობის თვისება აღებული წერტილის მახლობლობაში. ახლა დავამტკიცებთ, რომ მინიმალურსიგრძიანი წირი გეოდეზიურია. ამავე დროს ეს დამტკიცება ჩატარებული იქნება უშუალოდ განსაზღვრული ინტეგრალის მინიმუმის აუცილებელი პირობის მოპოვების სახით, ე. ი. ექსტრემალთა ოჯახის განსაზღვრის სახით. განვიხილოთ წირითი ელემენტი

$$ds^2=a_{ij}du^idu^j$$

და მოვახდინოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$\frac{du^i}{dt}=u^i,\qquad \frac{ds}{dt}=\sqrt{a_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}=\sqrt{a_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}=\Phi.$$

აქედან აშკარაა, რომ, როცა $t=s$, მაშინ $\Phi=1$. ამ აღნიშვნების თანახმად.

$$ds=\Phi\, dt,$$

საიდანაც AB რკალისათვის გვექნება

$$S=\int\limits_{AB}\Phi\, dt.$$

როგორც ცნობილია ვარიაციათა აღრიცხვიდან, წირი, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ამ ინტეგრალს, ე. ი. A და B წერტილების შემაერთებელი მინიმალური სიგრძის წირი, ამონახსნია შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისა (ეილერ-— ლაგრანჟის დიფერენციალური განტოლებები):

$$\frac{\partial\Phi}{du^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{u}^i}\right)=0,\quad i=1,\ 2.$$

გამოვითვალოთ განტოლების მარცხენა მხარე; აქ მიღებული აღნიშვნების მიხედვით გვაქვს

$$\Phi=\sqrt{a_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}.$$

აქედან

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u^k}=\frac{\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^i\dot{u}^j}{2\sqrt{a_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}}=\frac{\partial_k a_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{2W},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{u}^k}=\frac{a_{kj}\dot{u}^j}{W}=\frac{a_{ki}\dot{u}^i}{W}.$$

როცა $t=s$, მაშინ $\Phi=1$. ამიტომ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u^k}=\frac{1}{2}\partial_k a_{ij}t^it^j,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{u}^k}=a_{ik}t^i.$$

აქედან

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{u}^k}\right)=\partial_i a_{kj}t^it^j+a_{ki}\frac{dt^i}{ds}.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემაში მოგვცემს:

$$\frac{1}{2}\partial_k a_{ij}t^it^j-\partial_i a_{kj}t^it^j-a_{ik}\frac{dt^i}{ds}=0;$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\partial_i a_{kj}t^it^j=\frac{1}{2}\ (\partial_i a_{kj}+\partial_j a_{ki})t^it^j.$$

ამრიგად, წინა განტოლება ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$a_{ik}\frac{dt^i}{ds}+\frac{1}{2}\ (\partial_i a_{kj}+\partial_j a_{ki}-\partial_k a_{ij})t^it^j=0.$$

ეს ტოლობა გადავამრავლოთ $\widetilde{a}^{km}$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{dt^m}{ds}+\frac{\widetilde{a}^{mk}}{2}\ (\partial_i a_{kj}+\partial_j a_k-\partial_k a_{ij})t^it^j=0.$$

რადგან $t^i = \frac{du^i}{ds}$, ამიტომ (182) ფორმულის თანახმად, ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება ასე წარმოგვიდგება:

$$\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

ეს კი, როგორც ვიცით, არის გეოდეზიური წირის განტოლება. ამრიგად, მინიმალური წირი იმყოფება A და B წერტილებზე გამავალ გეოდეზიურ წირთა შორის. მაშასადამე A და B წერტილებზე გამავალი მინიმალური წირი უსათუოდ გეოდეზიურია, მაგრამ შებრუნებული დასკვნა ყოველთვის არ არის სამართლიანი. აქ აღნიშნული იქნება ის თვისებანი, რომელნიც საერთოა მინიმალური წირისათვის და ექსტრემალებისათვის ე. ი. გეოდეზიური წირებისათვის. ისინი დაწვრილებით შეისწავლება ვარიაციათა აღრიცხვაში. ჩვენ მოვიყვანთ ორ მათგანს.

თეორემა. ზედაპირზე მდებარე ორი მეზობელი წერტილი განსაზღვრავს მათზე გამავალ ერთადერთ გეოდეზიურ წირს, რომლისთვისაც ამავე წერტილებით განსაზღვრული გეოდეზიური წირის რკალი მოთავსებულია მათი მეზობლობის მიდამოში.

ვთქვათ მოცემულია ორი მეზობელი წერტილი:

$$M_0 = \mu(u_0^1,\ u_0^2),\ \ M = M_0 + \Delta \overline{M}_0.$$

რადგან მოცემულია $\Delta \overline{M}_0$, ამიტომ მოცემულია du_0^i, მაშასადამე მოცემულია $t_0^i = \left(\frac{du^i}{ds}\right)_0$, თანახმად გეოდეზიური წირის განტოლებისა

$$\frac{d^2u^m}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = -2\Gamma_{ij}^m t^i t^j.$$

აქედან გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{d^3u^m}{ds^3} = -\frac{d\Gamma_{ij}^m}{ds} t^i t^j - 2\Gamma_{ij}^m t^i \frac{dt^j}{ds} = -\partial_k \Gamma_{ij}^m t^i t^j t^k - 2\Gamma_{ij}^m t^i \frac{d^2u^j}{ds^2}.$$

თუ შევიტანთ ამ უკანასკნელ ორ ტოლობაში $u^i = u_0^i$, მივიღებთ:

$$\left(\frac{d^2u^m}{ds^2}\right)_0 = -(\Gamma_{ij}^m)_0 t_0^i t_0^j,$$

$$\left(\frac{d^3u^m}{ds^3}\right)_0 = -(\partial_k \Gamma_{ij}^m)_0 t_0^i t_0^j t_0^k - 2(\Gamma_{ij}^m)_0 t_o^i \left(\frac{d^2u^j}{ds^2}\right)_0.$$

ანალოგიურად (რეკურენტული წესით) შეგვიძლია გამოვითვალოთ $u^i = u^i(s)$ ფუნქციის სხვა წარმოებულები. ამრიგად, სავსებით განზღვრული იქნება მწკრივი

$$\Delta u_0^i = du_0^i + \frac{1}{2} d^2 u_0^i + \cdots$$

მაშასადამე, სავსებით განზღ ული იქნება თვით $u^i = u^i(s)$ ფუნქცია:

$$u^i = u_0 + \Delta u_i^0,$$

რომელიც განსაზღვრავს გეოდეზიურ წირს.

თეორემა. მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გადის ერთი და მხოლოდ ერთი გეოდეზიური წირი.

თუ მოცემულია $M_0=(u_0^1,\ u_0^2)$ წერტილი და $\overline{dM}_0$ მიმართულება, ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულია du_0^1, du_0^2, მაშასადამე, მოცემულია $t_0^i=\dfrac{du_0^i}{ds}$. გეოდეზიური წირის განტოლებიდან გამოითვლება $\dfrac{d^2u^i}{ds^2}$, $\dfrac{d^3u^i}{ds^3}, \ldots$ ისევე, როგორც ზემოთ, თუ u^i-ს ნაცვლად შევიტანთ u_0^i-ს, მივიღებთ

$$\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}\right)_0\left(\frac{d^3u^i}{ds^3}\right)_0 \ldots$$

ამით კი სავსებით განიზღვრება მწკრივი

$$\Delta u_0^i=du_0^i+\frac{1}{2}d^2u_0^i + \ldots,$$

მაშასადამე, სავსებით განიზღვრება თვით $u^i=u^i(s)$ ფუნქცია

$$u^i=u_0^i+\Delta u_0^i,$$

რომელიც განსაზღვრავს გეოდეზიურ წირს.

§ 67. გეოდეზიური წირის მექანიკური თვისება

განვიხილოთ ზედაპირზე წერტილის ძრაობა რაიმე წირის გასწვრივ:

$$M=M(s).$$

ამ შემთხვევაში s რკალი განიხილება დროის მნიშვნელობით. ამიტომ წერტილის სიჩქარე იქნება:

$$\overline{v}=\frac{d\overline{M}}{ds}=\frac{\partial\overline{M}\,du^i}{\partial u^i\,ds}=\overline{M_i}t^i.$$

ამრიგად,

$$\overline{v}=t^i\overline{M}_i. \tag{140}$$

წერტილის აჩქარება მიიღება სიჩქარის გაწარმოებით:

$$\overline{W}=\frac{d\overline{v}}{ds}=\frac{dt^i}{ds}\overline{M}_i+t^i\frac{d\overline{M}_i}{ds}.$$

რადგან

$$\frac{d\overline{M}_i}{ds}=\frac{\partial\overline{M}_i}{\partial u^j}\frac{du^j}{ds}={}_i\overline{M}_jt^j=(\Gamma_{ij}^m\overline{M}_m+b_{ij}\overline{K})t^j,$$

ამიტომ

$$\overline{W}=\frac{dt^i}{ds}\overline{M}_i+\Gamma_{ij}^mt^it^j\overline{M}_m+b_{ij}t^it^j\overline{K}=$$

$$=\left(\frac{dt^m}{ds}+\Gamma_{ij}^mt^it^j\right)\overline{M}_m+b_{ij}t^it^j\overline{K}.$$

აქედან ჩანს, რომ აჩქარების გეგმილი მხებ სიბრტყეზე ასე წარმოგვიდგება:

$$გეგ_{\pi} \overline{W} = \frac{dt^m}{ds} + \Gamma^m_{ij} t^i t^j,$$

ან, რაც იგივეა,

$$გეგ_{\pi} \overline{W} = \frac{\nabla t^m}{ds}. \tag{141}$$

იმისათვის, რომ ძრაობა იყოს ინერციული, საჭიროა აჩქარების გეგმილი მხებ სიბრტყეზე იყოს ნული:

$$\frac{\nabla t^m}{ds} = 0.$$

ამრიგად, **ინერციული ძრაობა ხდება გეოდეზიურ წირზე**, ან, რაც იგივეა, **ინერციული ძრაობის წირზე მხების მგეზავი ახდენს აბსოლუტურ პარალელურ გადაადგილებას.**

§ 68. ზედაპირის გეოდეზიური გადასახვა

ზედაპირთა გეოდეზიური გადასახვა ერთიმეორეზე განმარტებული იყო ამ წიგნის I ნაწილის III თავში. აქ ზედაპირთა გეოდეზიურ დამოკიდებულებას გამოვსახავთ ანალიზურად შინაგანი გეომეტრიის სიდიდეებით. ამავე დროს მოვიყვანთ ბელტრამის დებულების სრულ დამტკიცებას.

დავუშვათ, რომ მოცემული ორი ზედაპირი, რომელთა განტოლებანია

$$M = M(u^1, u^2),$$

$$\overset{*}{M} = M(\overset{*}{u}{}^1, \overset{*}{u}{}^2),$$

გეოდეზიურად გადაისახება ერთი მეორეზე, ე. ი. არსებობს ისეთი

$$\overset{*}{u}{}^i = \overset{*}{u}{}^i (u^1, u^2), \quad (i = 1, 2)$$

დამოკიდებულება u^i და $\overset{*}{u}{}^i$ პარამეტრებს შორის, რომელიც აღებულ ზედაპირთა გეოდეზიურ წირებს ერთიმეორეს შეუთანადებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ პირველი ზედაპირის გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება და მეორე ზედაპირის გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება გარდაქმნის შემდეგ ერთსა და იმავე ამონახსნს უნდა იძლეოდნენ. პირველი ზედაპირის გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება, როგორც ცნობილია, ასე გამოისახება:

$$\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma^m_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

მეორე ზედაპირის გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება კი, პარამეტრების გარდაქმნის შემდეგ, ასე დაიწერება:

$$\frac{d^2u^m}{ds_1^2} + \overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} \frac{du^i}{ds_1} \frac{du^j}{ds_1} = 0,$$

სადაც s_1 არის მეორე ზედაპირის გეოდეზიური წირის რკალი. რადგან განსახილავ გეოდეზიურ წირთა შორის კავშირი არსებობს, ამიტომ იარსებებს კავშირი s და

s_1-ს შორისაც, ე. ი. $s_1=f(s)$. მაშასადამე, შეგვიძლია მეორე ზედაპირის გეოდეზიური წირის განტოლება გარდავქმნათ მასში s_1-ის გამოცვლით $f(s)$-ის საშუალებით. გვექნება:

$$\frac{du^i}{ds_1}=\frac{du^i}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\lambda\frac{du^i}{ds}.$$

(139) განტოლების თანახმად, მეორე ზედაპირის გეოდეზიური წირის განტოლება s პარამეტრის მიმართ ასე გადაიწერება $\left(\text{ამ შემთხვევაში } \tau^i=\frac{du^i}{ds}\right)$:

$$\frac{d^2u^m}{ds^2}+\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=\mu\frac{du^m}{ds},$$

სადაც, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, μ არის რაიმე წრფივი ფორმა $\frac{du^i}{ds}$-ის კომპონენტების მიმართ, ე. ი.

$$\mu=2P_i\frac{du^i}{ds}.$$

μ-ს მნიშვნელობის შეტანის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{d^2u^m}{ds^2}+\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=2P_i\frac{du^i}{ds}\frac{du^m}{ds}.$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარე შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$2P_i\frac{du^i}{ds}\frac{du^m}{ds}=(\delta_j P_i+\delta_i^m P_j)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}.$$

ამრიგად, მეორე ზედაპირის გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+(\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}-P_i\delta_j^m-P_j\delta_i^m)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=0.$$

თუ შევადარებთ ამ განტოლებას პირველი ზედაპირის გეოდეზიური წირის დიფერენციალურ განტოლებას, მივიღებთ:

$$(\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}-P_i\delta_j^m-P_j\delta_i^m)\frac{du^i}{ds}\frac{du^i}{ds}=\Gamma^m_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}.$$

რადგან განსახილავ წერტილში $\frac{du^i}{ds}$ შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად (ე. ი. განვიხილოთ ნებისმიერი მიმართულების გეოდეზიური წირი), ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა იგივეობას უნდა წარმოადგენდეს, ანუ კოეფიციენტები უნდა გაუტოლდეს ერთიმეორეს:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}=\Gamma^m_{ij}+P_i\delta_j^m+P_j\delta_i^m. \tag{142}$$

ამრიგად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა. იმისათვის, რომ ერთი ზედაპირი გეოდეზიურად გადაისახოს მეორეზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მეორე ზედაპირისათვის არსებობდეს მრუდწირული კოორდინა-

ტების ისეთი გამოსახვა პირველი ზედაპირის მრუდწირული კოორდინატებით, რომ $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$ სიმბოლო გამოისახოს (142) ტოლობით, სადაც P_i რაიმე პირველი რანგის ტენზორია.

ზედაპირთა გეოდეზიური დამოკიდებულების ეს (142) პირობა აღმოჩენილ იქნა ვაილის მიერ. ორი მოცემული ზედაპირის ერთიმეორეზე გადასახვის საკითხის განხილვისას ამ პირობის გამოყენება საკმაოდ ძნელია, რადგან იგი მოითხოვს მრუდწირული კოორდინატების გარდაქმნის შემდეგ $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$-ისათვის (142) ტოლობის არსებობას, რომელიც თავის მხრივ შეიცავს P_i უცნობ ელემენტს. როცა კონკრეტულად მოცემული გადასახვის გეოდეზიურობას ვიკვლევთ, მაშინ ეს პირობა უფრო მეტად გამოსაყენებელია, რადგან ამ შემთხვევაში საძიებელია მხოლოდ P_i ტენზორი. (142) პირობის გამოყენება ნაყოფიერია იმ შემთხვევაშიც, როცა ვიკვლევთ მოცემული ზედაპირის გეოდეზიურად გადასახვის შესაძლებლობას რაიმე სხვა ზედაპირზე, თუკი ეს გადასახვა არაა ე. წ. ტრივიალური გადასახვა (გეოდეზიურ გადასახვას ტრივიალურს უწოდებენ მაშინ, როცა იგი იზომეტრულიც არის), ამ შემთხვევაშიც გამოსარკვევია P_i ტენზორის არსებობის საკითხი. ეს საკითხი იგივეა, რაც მოცემული ორი ზედაპირის ინტეგრების პირობებისა და (142) პირობის ერთდროულად შესრულების საკითხი. ასე, რომ (142) პირობა ზედაპირთა გეოდეზიური გადასახვის შესწავლისათვის ერთგვარად დამხმარე საშუალებას წარმოადგენს. საკითხის ზოგადი გადაჭრა საჭიროებს კიდევ სხვა არსებით გამოკვლევას. მაგრამ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში (142) ფორმულა არსებით როლს ასრულებს საკითხის გადაწყვეტაში. მაგალითად, დადგენილია, რომ ის ზედაპირი, რომლის არატრივიალური გეოდეზიური გადასახვა შეიძლება სხვა ზედაპირზე, არის ლიუვილის* ზედაპირი, ე. ი. ისეთი ზედაპირი, რომლის წირითი ელემენტი, მრუდწირული კოორდინატების სათანადო შერჩევით, მიიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$ds^2=[U(u)+V(v)](du^2+dv^2). \tag{143}$$

შებრუნებითაც, ყოველი ლიუვილის ზედაპირი გადაისახება გეოდეზიურად (არატრივიალურად) სხვა ზედაპირზე. მაგრამ დღემდე არ არსებობს რაიმე ზოგადი კრიტერიუმი, რომლის მიხედვითაც შეგვეძლება გავიგოთ არის თუ არა მოცემული ზედაპირი ლიუვილის ზედაპირი, ე. ი. არის თუ არა იგი გეოდეზიურად (არატრივიალურად) გადასახვადი. ამ ზოგად შემთხვევაში (142) ფორმულა უძლურია.

სამაგიეროდ, ამ ფორმულის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება ბელტრამის ცნობილი დებულება მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირების გეოდეზიური გადასახვის შესახებ, რომელიც ამ წიგნის I ნაწილის III თავში გვქონდა ჩამოყალიბებული დაუმტკიცებლად.

ბელტრამის თეორემა. იმისათვის, რომ ზედაპირი გეოდეზიურად გადაისახოს სიბრტყეზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი იყოს მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი.

ჯერ დავამტკიცოთ თეორემაში მოხსენებული პირობის აუცილებლობა. დავუშვათ, რომ მოცემული ზედაპირი გადაისახება სიბრტყეზე გეოდეზიურად. ამისათვის უნდა შესრულდეს (142) პირობა. რადგან სიბრტყე განფენადი ზედაპირია, ხოლო განფენადი ზედაპირისათვის კი არსებობს ისეთი მრუდწირული კოორ-

* იხ. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т. II, 1948.

დინატები (ამ შემთხვევაში დეკარტის კოორდინატები სიბრტყეზე), რომლის მიმართაც $\Gamma_{ij}^{m}=0$, ამიტომ (142) პირობაში შეგვიძლია ჩავსვათ (ვიგულისხმოთ მრუდწირული კოორდინატების სასურველი შერჩევა) $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{m}=0$, მივიღებთ:

$$\Gamma_{ij}^{m}=-P_i\delta_j^m-P_j\delta_i^m. \tag{144}$$

ამრიგად, ზედაპირის ინტეგრების პირობებს ემატება კიდევ (144) პირობა, რომელიც, ცხადია, Γ_{ij}^{m} სიმბოლოს მიმართ გარკვეულ შეზღუდვას წარმოადგენს. ჯერ გამოვითვალოთ რიჩის ტენზორი. ამ პირობის მიხედვით გვაქვს:

$$R_{kji}^{m}=\partial_{[k}\Gamma_{j}^{m}{}_{]i}+\Gamma_{n}^{m}{}_{[k}\Gamma_{i}^{m}{}_{]i}=-\delta^{m}{}_{[j}\partial_{k]}P_i-\partial_{[k}P_{j]}\delta_i^m+$$
$$+(P_n\delta^m{}_{[k}+P_{[k}\delta_n^m)(P_{j]}\delta_{ni}+P_i\delta_{j]}^n).$$

ამ ტოლობის შეკუმშვა k, m ნიშნაკების მიმართ მოგვცემს:

$$R_{ij}=R_{kji}^{k}=\partial_jP_i-\frac{1}{2}\partial_iP_j+\frac{1}{2}\cdot 6P_iP_j-\frac{1}{2}\cdot 5P_iP_j=$$

$$=\partial_jP_i-\frac{1}{2}\partial_iP_j+\frac{1}{2}P_iP_j.$$

რადგან

$$\Delta_jP_i=\partial_jP_i-\Gamma_{lj}^{m}P_m=\partial_jP_i+(P_i\delta_j^m+P_j\delta_j^m)P_m=\partial_jP_i+2P_iP_j,$$

ამიტომ

$$\partial_jP_i=\nabla_jP_i-2P_iP_j.$$

ამის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ (უნდა მოვახდინოთ ინდექსების გადანაცვლება)

$$\partial_iP_j=\nabla_iP_j-2P_iP_j.$$

შევიტანოთ ∂_iP_j და ∂_jP_i-ის მიღებული მნიშვნელობები R_{ij}-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$R_{ij}=\nabla_jP_i-\frac{1}{2}\nabla_iP_j-\frac{1}{2}P_iP_j.$$

რადგან R_{ij} სიმეტრიულია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის ალტერნაცია i, j ინდექსების მიმართ მოგვცემს:

$$0=\nabla_{[j}P_{i]}-\frac{1}{2}\Delta_{[i}P_{j]}.$$

რადგან

$$\Delta_{[j}P_{i]}=-\nabla_{[i}P_{j]},$$

ამიტომ წინა ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\nabla_{[j}P_{i]}=0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ P_i გრადიენტული ტენზორია. ამრიგად, რიჩის ტენზორი საბოლოოდ ასე გამოისახება:

$$R_{ij}=\frac{1}{2}\Delta_jP_i-\frac{1}{2}P_iP_j. \tag{145}$$

თუ ამ ტოლობას შევადარებთ ინტეგრების პირველ პირობასთან, მივიღებთ:

$$Ka_{ij}=\nabla_jP_i-P_iP_j. \tag{146}$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა აბსოლუტურად u^k პარამეტრის მიმართ Γ^k_{ij} ფუძით, გვექნება:

$$\nabla_k K \cdot a_{ij}+K\nabla_k a_{ij}=\nabla_k\nabla_j P_i-P_j\nabla_k P_i-P_i\nabla_k P_j.$$

რადგან

$$\nabla_k a_{ij}=0 \quad \text{და} \quad \nabla_k K=\partial_k K,$$

ამიტომ

$$\partial_k K\cdot a_{ij}=\nabla_k\nabla_j P_i-P_j\nabla_k P_i-P_i\nabla_k P_j.$$

ახლა მოვახდინოთ ამ ტოლობის ალტერნაცია k, j ნიშნაკების მიმართ. გვექნება:

$$\partial_{[k}Ka_{j]i}=\nabla_{[k}\nabla_{j]}P_i-P_{[j}\nabla_{k]}P_i-P_i\nabla_{[k}P_{j]}.$$

რადგან $\nabla_{[k}P_{j]}=0$ და, გარდა ამისა, რიჩის იგივეობის თანახმად,

$$\nabla_{[k}\nabla_{j]}P_i=-R^m_{kji}P_m=K\cdot\delta^m_{[k}a_{j]i}P_m,$$

ამიტომ წინა ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\partial_{[k}Ka_{j]i}=KP_{[k}a_{j]i}-P_{i[j}\nabla_{k]}P_i.$$

შევიტანოთ აქ $\Delta_k P_i$-ის მნიშვნელობა (146) ფორმულიდან:

$$\nabla_k P_i=Ka_{ki}+P_kP_i.$$

შეკვეცის შემდეგ გვექნება:

$$\partial_{[k}Ka_{j]i}=0.$$

ამ ტოლობის გადამრავლებით $\widetilde{a}^{ij}$-ზე, მივიღებთ:

$$\partial_i K=0.$$

აქედან აშკარაა, რომ $K=\text{const}$.

ამრიგად, თეორემაში აღნიშნული პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ ბელტრამის თეორემაში აღნიშნული პირობის საკმარისობა, ე. ი. დავამტკიცოთ, რომ მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი გეოდეზიურად გადაისახება სიბრტყეზე. ამისათვის P_i ტენზორი უნდა განვსაზღვროთ ისე, რომ მან დააკმაყოფილოს (144) პირობა და ზედაპირის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების პირველი პირობა. წინა გამოთვლების თანახმად, ეს პირობები შესრულებული იქნება, თუ $K=\text{const}$. მაგრამ აქ უკვე მოცემულია, რომ $K=\text{const}$. მაშასადამე, აღნიშნული პირობები თავისთავად შესრულდება. ამრიგად, თეორემაში აღნიშნული პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია, ე. ი. თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში ნახსენები არ იყო ტრივიალური ამონახსნები, ე. ი. ის ამონახსნები, რომელნიც სიბრტყის დეფორმაციას გამოსახავენ, რადგან სიბრტყეზე დაფენადი ზედაპირების (ე. ი. განფენადი ზედაპირების) სიმრუდე ნულია, და მაშასადამე, ეს ზედაპირები შედის მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირების ოჯახში.

მაგალითი. განვიხილოთ ორი ზედაპირი, რომელთაც საერთო Γ^m_{ij} სიმბოლო აქვთ. ასეთი ზედაპირების სიმრუდეები, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული (იხ. (126) ფორმულა), დაკავშირებულია

$$K=c\overset{*}{K}$$

ტოლობით, რადგან ამ შემთხვევაში

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} = \Gamma^m_{ij}.$$

ეს კი წარმოადგენს (142) დამოკიდებულების კერძო შემთხვევას, როცა $P_i=0$. ამიტომ ასეთი ზედაპირები ერთი მეორეზე გადაისახება გეოდეზიურად.

ტენზორი $\overset{*}{a}_{ij}$ გავაწარმოოთ $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$ ფუძით. გვექნება:

$$\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{a}_{ij}=0.$$

შევცვალოთ $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$ ვაილის ფორმულის მიხედვით (ფორ. 182). გამოთვლის შედეგად მივიღებთ:

$$\nabla_k \overset{*}{a}_{ij}=2P_k\overset{*}{a}_{ij}+\overset{*}{P_i a_{jk}}+\overset{*}{P_j a_{ik}}. \tag{*}$$

ახლა (188) ფორმულაში დავუშვათ $m=j$, გვექნება:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{im} = \Gamma^m_{im} + 3P_i,$$

აქედან

$$P_i =\frac{1}{3}(\overset{*}{\Gamma}{}^m_{im} - \Gamma^m_{im}).$$

რადგან, (132_1) ფორმულის თანახმად,

$$\Gamma^m_{im}=\frac{1}{2}\partial_i \lg|a_{ij}|,\ \overset{*}{\Gamma}{}^m_{im}= \frac{1}{2}\partial_i \lg|\overset{*}{a}_{ij}|,$$

ამიტომ

$$P_i =\frac{1}{3}\partial_i \lg(\overset{*}{\Gamma}{}^m_{im} - \Gamma^m_{im})= \frac{1}{b}\,\partial_i \lg \frac{|\overset{*}{a}_{ij}|}{|a_{ij}|}.$$

აქედან ჩანს, რომ P_i გრადიენტული ტენზორია, ე. ი. $P_i du^i$ იქნება სრული დიფერენციალი.

(*) განტოლებაში მოვახდინოთ ასეთი ჩასმა

$$\overset{*}{a}_{ij} = \rho\varphi_{ij}\left(\rho = e^{4\int P_k du^k}\right).$$

გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\nabla_k\varphi_{ij}+2P_k\varphi_{ij} - P_i\varphi_{ik} - P_j\varphi_{ik}=0.$$

ამ განტოლებაში k, i და k, j ნიშნაკების ურთიერთადგილშენაცვლებით მივიღებთ:

$$\nabla_i\varphi_{kj}+2P_i\varphi_{kj} - P_k\varphi_{ij} - P_j\varphi_{ki} = 0.$$

$$\nabla_j\varphi_{ik}+2P_j\varphi_{ik} - P_i\varphi_{jk} - P_k\varphi_{ki} = 0.$$

ამ უკანასკნელი სამი ტოლობის შეკრება მოგვცემს:

$$\nabla_k\varphi_{ij}+\nabla_i\varphi_{jk}+\nabla_j\varphi_{ki}=0. \tag{147}$$

ამ განტოლებას, როგორც კერძო ამონახსნი, აკმაყოფილებს ca_{ij} ტენზორი (სადაც $c=\mathrm{const}$). ამ შემთხვევაში $P_i=0$ და $\overset{*}{a}_{ij}=ca_{ij}$. ზედაპირები იქნება მსგავსი. კერძოდ, თუ $c=1$, ზედაპირები იქნება იზომეტრულ თანადობაში, ე. ი.

ურთიერთდაფეხადი ზედაპირები. ასეთ კერძო ამონახსნს ვუწოდებთ ტ რ ი ვ ი ა ლ უ რ ს. (147) განტოლების არატრივიალური ამონახსნი კი (ე. ი. $\varphi_{ij} \neq ca_{ij}$) ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ასეთი ამონახსნის არსებობისათვის საჭიროა შესრულდეს (147) განტოლებათა სისტემის ინტეგრების პირობები და სწორედ ეს პირობები იქნება დამახასიათებელი გეოდეზიურად გადასახვადი ზედაპირებისათვის, ე. ი. ლიუვილის ზედაპირებისათვის. ამ განტოლებით ინტეგრების პირობების მოძებნა საკმაოდ ძნელია და მას მიძღვნილი აქვს ამ წიგნის ბოლოში ცალკე პარაგრაფი.

თ ა ვ ი V

ზედაპირზე მდებარე წირთა ბადეები

§ 69. ასიმპტოტური ბადე

ზედაპირზე მდებარე წირთა ორი ისეთი ოჯახის ერთობლიობას, რომელთაგან ზედაპირის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზე გადის თითო წირი (თითოეული ოჯახიდან), ზედაპირის წ ი რ თ ა ბ ა დ ე ეწოდება. მაგალითად, წირთა ბადეს წარმოადგენს რაიმე მრუდწირული კოორდინატების სისტემა ზედაპირზე. მას ეწოდება ს ა კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ო ბ ა დ ე. ასიმპტოტური წირებიც, როგორც ვიცით, წირთა ორ სისტემად წარმოგვიდგება, ისე რომ ზედაპირის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზე გადის (თუ $K \neq 0$) ერთი წყვილი ასიმპტოტური წირების. ამიტომ ასიმპტოტური წირებიც განსაზღვრავს ზედაპირზე წირთა ბადეს. ამ ბადეს ა ს ი მ პ ტ ო ტ უ რ ი ბ ა დ ე ეწოდება.

წირთა ბადის განტოლება შეიძლება მოცემული იყოს სასრული სახით, როგორც ბადის შემდგენელი ოჯახების განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} f(u^1,\ u^2,\ \lambda) &= 0, \\ \varphi(u^1,\ u^2,\ \mu) &= 0, \end{aligned} \tag{147}$$

სადაც μ და λ მოცემული ოჯახების პარამეტრებია შესაბამისად. ამ ტოლობათა გაწარმოება მოგვცემს:

$$\frac{\partial f}{du^1}du^1 + \frac{\partial f}{\partial u^2}du^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial \varphi}{du^2}du^2 = 0.$$

თუ გამოვრიცხავთ λ და μ პარამეტრებს (147) სისტემიდან, მაშინ, უკანასკნელ ტოლობათა საშუალებით, მივიღებთ მოცემული ბადის წირთა ოჯახებისათვის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$F(u^1,\ u^2,\ du,^1\ du^2) = 0,$$
$$\Phi(u^1,\ u^2,\ du^1,\ du^2) = 0,$$

ან, რაც იგივეა $\left(\text{თუ ამოვხსნით ამ ტოლობებს } \frac{du^1}{du^2}\text{-ის მიმართ}\right)$,

$$\frac{du^1}{du^2}=\psi_1(u^1,\ u^2),$$

$$\frac{du^1}{du^2}=\psi_2(u^1,\ u^2).$$

მაშასადამე, ბადის წირთა ოჯახების დიფერენციალური განტოლებები მიიღება შემდეგი მეორე ხარისხის განტოლების ამოხსნით:

$$\left(\frac{du^1}{du^2}-\psi_1\right)\left(\frac{du^1}{du^2}-\psi_2\right)=0,$$

ანუ

$$\left(\frac{du^1}{du^2}\right)^2-(\psi_1+\psi_2)\frac{du^1}{du^2}+\psi_1\ \psi_2=0.$$

ეს განტოლება, $(du^2)^2$-ზე გადამრავლებით, შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$(du^1)^2-(\psi_1+\psi_2)du^1du^2+\psi_1\psi_2(du^2)^2=0.$$

თუ მოვახდენთ აღნიშვნებს:

$$-(\psi_1+\psi_2)=\frac{2\lambda_{12}}{\lambda_{11}},\quad \psi_1\ \psi_2=\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}},$$

მაშინ მივიღებთ ბადის დამახასიათებელ დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\lambda_{11}(du^1)^2+2\lambda_{12}du^1du^2+\lambda_{22}(du^2)^2=0, \tag{148}$$

ანუ, შემოკლებით,

$$\lambda_{ij}\,du^idu^j=0. \tag{149}$$

λ_{ij} მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორია. მას ეწოდება ბ ა დ ი ს ტ ე ნ ზ ო რ ი. ამრიგად, (149) სახის ნებისმიერი განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წირთა ბადის დიფერენციალური განტოლება ზედაპირზე, თუკი λ_{ij} არის მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორი და $|\lambda_{ij}|\neq 0$. ბადის სასრული განტოლებები დიფერენციალური განტოლებიდან მიიღება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით, ე. ი. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის შებრუნებით.

ამ წიგნის I ნაწილის III თავში ჩვენ უკვე გვქონდა მოცემული ასიმპტოტური წირების დამახასიათებელი განტოლება:

$$d\sigma^2=0.$$

რადგან, აქ მიღებული აღნიშვნების მიხედვით,

$$d\sigma^2=b_{ij}\,du^i\,du^j,$$

ამიტომ ასიმპტოტური ბადის დიფერენციალური განტოლება ასე წარმოგვიდგება:

$$b_{ij}\,du^i\,du^j=0. \tag{150}$$

ამრიგად, მეორე კვადრატული დიფერენციალური ფორმის განმსაზღვრელი b_{ij} ტენზორი არის ასიმპტოტური ბადის ტენზორი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ორი ბადე ერთიმეორეს ემთხვევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მათი ტენზო-

რები ერთი მეორისაგან მამრავლით განსხვავდება. მაგალითად, λb_{ij} ტენზორი იქნება აგრეთვე ასიმპტოტური ბადის ტენზორი. მართლაც, ბადის დიფერენციალური განტოლება

$$\lambda b_{ij}\, du^i\, du^j = 0,$$

λ-ზე შეკვეცის შემდეგ, მოგვცემს:

$$b_{ij}\, du^i\, du^j = 0,$$

რაც ასიმპტოტური ბადის განტოლებაა. პირუკუ, თუ

$$b_{ij}\, du^i\, du^j = 0, \;\; c_{ij}\, du^i\, du^j = 0$$

განტოლებები ერთსა და იმავე ბადეს გამოსახავს, მაშინ ამ ორი ტოლობიდან $\frac{du^1}{du^2}$-ის გამორიცხვით უნდა მივიღოთ იგივეობა. ეს კი მოგვცემს:

$$\frac{c_{11}}{b_{11}} = \frac{c_{12}}{b_{12}} = \frac{c_{22}}{b_{22}},$$

ან, რაც იგივეა,

$$c_{ij} = \lambda b_{ij}. \tag{151}$$

ამით გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ ასიმპტოტური ბადის დამოკიდებულება ზედაპირის იზომეტრულ გადასახვასთან. საზოგადოდ, ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის დროს ასიმპტოტური ბადე არ გადაისახება ასიმპტოტურ ბადეში. მაგრამ არის ისეთი კერძო შემთხვევები, როცა იზომეტრული გადასახვის დროს ასიმპტოტური ბადე გადაისახება ასიმპტოტურ ბადეში. იმისათვის, რომ მოცემული ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის დროს ასიმპტოტური ბადე გადაისახოს ასიმპტოტურ ბადეში, საჭიროა რომ მოცემული ზედაპირის იზომეტრული გადასახვის ძირითად პირობებს დაემატოს კიდევ პირობა

$$\overset{*}{b}_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$|\overset{*}{b}_{ij}| = \lambda^2 |b_{ij}|,$$

იზომეტრული გადასახვის პირობების თანახმად

$$\overset{*}{K} = K.$$

მეორე მხრივ,

$$K = \frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|}, \quad \overset{*}{K} = \frac{|\overset{*}{b}_{ij}|}{|\overset{*}{a}_{ij}|}.$$

ამრიგად (იგულისხმება $a_{ij} = \overset{*}{a}_{ij}$),

$$|\overset{*}{b}_{ij}| = |b_{ij}|.$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა,

$$|\overset{*}{b}_{ij}| = \lambda^2 |b_{ij}|$$

ტოლობასთან შედარებული, გვაძლევს:

$$\lambda^2=1, \text{ ე. ი. } \lambda=\pm 1.$$

ამასთანავე იგულისხმება, რომ $|b_{ij}| \neq 0$, ე. ი. რომ ზედაპირი არ არის განფენადი. ამრიგად,

$$\overset{*}{b}_{ij}=\pm b_{ij}.$$

თუ $\overset{*}{b}_{ij}=b_{ij}$, მაშინ მოცემულ ზედაპირებს ექნება ერთი და იგივე I და II კვადრატული დიფერენციალური ფორმები. ამიტომ, ზედაპირთა თეორიის ფუნდამენტური თეორემის ძალით, მოცემული ზედაპირები მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდებიან ერთიმეორისაგან. თუ $\overset{*}{b}_{ij}=-b_{ij}$, მაშინ საკმარისია მეორე ზედაპირის ნორმალის მგეზავი შევცვალოთ საწინააღმდეგოზე (რაც $\overline{\overset{*}{M}}_1$, $\overline{\overset{*}{M}}_2$ ვექტორების ადგილშენაცვლებით მოხდება), რომ b_{ij} ტენზორმა, თანახმად (66) ფორმულისა, ნიშანი შეიცვალოს და გაუტოლდეს b_{ij} ტენზორს. ამრიგად, ამ შემთხვევაში, მოცემული ზედაპირები სხვადასხვა მოგეზულობის სისტემების მიმართ ერთი და იმავე ფორმის იქნება. აქ მიღებული შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა:

ზედაპირის იზომეტრული გადასახვა არ შეინახავს ასიმპტოტურ ბადეს, თუ გადასახვა ტრივიალური არ არის, ე. ი. თუ იგი მოძრაობას ან სიმეტრიას არ წარმოადგენს. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ზედაპირის უჭიმადი ღუნვის დროს ბადის ასიმპტოტურობა ირღვევა.

ახლა განვიხილოთ ზედაპირის ისეთი გადასახვა, რომელიც არ ცვლის ასიმპტოტური ბადის ხასიათს, ე. ი. როცა ასიმპტოტური ბადე გადაისახება ისევ ასიმპტოტურ ბადეში. ასეთ გადასახვას ასიმპტოტური გადასახვა ეწოდება. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, იზომეტრული გადასახვებიდან ასიმპტოტურ გადასახვას წარმოადგენს მხოლოდ ტრივიალური იზომეტრული გადასახვა, ე. ი. მოძრაობა. აქაც მოძრაობას ეწოდება ტრივიალურ-ასიმპტოტური გადასახვა. გამოვიკვლიოთ არსებობს თუ არა სხვა (არატრივიალური) ასიმპტოტური გადასახვები. ამისათვის გავიხსენოთ ასიმპტოტური წირების ცნობილი თვისება (რომელიც I ნაწილის III თავში იყო აღნიშნული): ასიმპტოტური წირის მიმხები სიბრტყე რაიმე წერტილში შეთავსებულია ზედაპირის მხებ სიბრტყესთან იმავე წერტილში. ამრიგად, ასიმპტოტური წირი განიზღვრება ზედაპირის მხები სიბრტყისა და წირის მიმხები სიბრტყის ცნებათა საშუალებით. ეს ცნებები კი განიზღვრება ზედაპირზე აღებული წერტილითა და მისი მეზობელი წერტილებით. ამრიგად, სივრცის ის ურთიერთცალსახა გადასახვები, რომლებიც შეინახავენ წერტილის, წრფის, სიბრტყის და უსასრულო მახლობლობის (უწყვეტობის) ცნებებს, შეინახავენ აგრეთვე ასიმპტოტური წირის ცნება', ე. ი. ასიმპტოტურ წირებს გადასახავენ ასიმპტოტურ წირებში და, მაშასადამე, ასიმპტოტურ ბადეს გადასახავენ ასიმპტოტურ ბადეში. როგორც ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან, ზემოაღნიშნული სახის გარდაქმნებს ეწოდება პროექციული გარდაქმნები. ეს გარდაქმნები დეკარტის კოორდინატებში წარმოგვიდგება წილადწრფივი საერთომნიშვნელიანი გარდაქმნების სახით.

ამრიგად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა. წირთა ბადის ასიმპტოტურობა ინვარიანტია ზედაპირის პროექციული გარდაქმნისა.

ამ დებულებით აღნიშნულია ასიმპტოტური ბადის დამოკიდებულება ზედაპირის ერთი გარკვეული სახის (პროექციული) გარდაქმნის მიმართ. უფრო ზოგადი განხილვა ზედაპირის ძირითად განტოლებათა ინტეგრების პირობების მიხედვით უნდა მოხდეს. ინტეგრების პირობებში b_{ij} ტენზორი განიხილება ნებისმიერ მამრავლამდე (რადგან ასიმპტოტური ბადე უცვლელი უნდა რჩებოდეს) მოცემულად, ხოლო a_{ij} და $\Gamma^m{}_{ij}$—ცვლად სიდიდეებად. ამ მონაცემებით ინტეგრების პირობები საკმაოდ რთულ განტოლებებს იძლევა და ცალკე გამოკვლევის საგანს წარმოადგენს.

განვიხილოთ ასიმპტოტური ბადის ორი კერძო შემთხვევა, რომლებიც დამახასიათებელია ზოგიერთი ზედაპირისათვის.

1. გამოვიკვლიოთ როგორი ზედაპირებისათვის არის ასიმპტოტური ბადე გეოდეზიური წირებისაგან შედგენილი, ე. ი. რა შემთხვევაშია ასიმპტოტური წირები გეოდეზიური. როგორც ცნობილია, ასიმპტოტური წირის მიმხები სიბრტყე რაიმე წერტილში შეთავსებულია ზედაპირის მხებ სიბრტყესთან იმავე წერტილში. აქედან ცხადია, რომ ასიმპტოტური წირის მთავარი ნორმალი ზედაპირის მხებ სიბრტყეზე უნდა მდებარეობდეს. გეოდეზიური წირის მთავარი ნორმალი კი შეთავსებულია ზედაპირის ნორმალთან, ე. ი. მართობია მხები სიბრტყის. ამრიგად ასიმპტოტური წირი რომ გეოდეზიური იყოს, საჭიროა რომ მისი მთავარი ნორმალი ერთდროულად მხებ სიბრტყეზეც მოთავსდეს და მხები სიბრტყის მართობიც იყოს. ეს მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა ასიმპტოტური წირის მთავარი ნორმალი აღებულ წერტილში გაურკვეველია. მაშინ, ცხადია, მიმხები სიბრტყეც გაურკვეველი იქნება იმავე წერტილში. რადგან აღწერილი მდგომარეობა უნდა გვქონდეს ნებისმიერ წერტილში და გაურკვეველი მიმხებსიბრტყიანი წირი კი წრფეა, ამიტომ ასიმპტოტური ბადე მხოლოდ მაშინ შედგება გეოდეზიური წირებისაგან, ე. ი. წარმოადგენს ე. წ. გეოდეზიურ ბადეს, როცა ასიმპტოტური წირები წრფეებია. ასეთი ზედაპირი კი, როგორც ვიცით I ნაწილის III თავიდან, არის მეორე რიგის ზედაპირი.

ამრიგად, წრფოვანი ასიმპტოტური ბადე მხოლოდ მეორე რიგის ზედაპირს აქვს.

2. გამოვიკვლიოთ, რომელი ზედაპირის ასიმპტოტური ბადე ემთხვევა იმ ბადეს, რომლისთვისაც ფუნდამენტური ტენზორი არის ბადის ტენზორი. ამ ბადის განტოლება იქნება:

$$ds^2 = a_{ij}\, du^i\, du^j = 0. \tag{152}$$

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ ბადის წირების გასწვრივ $ds=0$, ე. ი. $s=0$. მაშასადამე, ბადის წირების სიგრძეები ნულია. ამიტომ ამ წირებს ნულსიგრძიანი წირები ან იზოტროპული წირები ეწოდება, თვით (152) განტოლებით განსაზღვრულ ბადეს კი იზოტროპული ბადე. იმისათვის, რომ ასიმპტოტური ბადე იყოს იზოტროპული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ბადეთა ტენზორები მხოლოდ მამრავლით განსხვავდებოდნენ. ამრიგად, გვექნება:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}. \tag{153}$$

ეს პირობა უნდა განვიხილოთ ზედაპირის ძირითადი განტოლების ინტეგრების პირობებთან ერთად. ავიღოთ ინტეგრების პირობებიდან მეორე პირობა, ე. ი. კოდაცის განტოლება

$$\nabla_{[k}b_{j]i}=0.$$

(153) ტოლობის თანახმად, მივიღებთ:

$$\nabla_{[k}\lambda a_{j]i}+\lambda\nabla_{[k}a_{j]i}=0.$$

რადგან

$$\nabla_k a_{ij}=0,\ \nabla_k\lambda=\partial_k\lambda,$$

ამიტომ

$$\partial_{[k}\lambda a_{j]i}=0.$$

აქედან, a^{ij}-ზე გადამრავლებით, მივიღებთ:

$$\partial_k\lambda=0.$$

მაშასადამე,

$$\lambda=\text{const}.$$

მეორე მხრივ, (152) ტოლობიდან გვექნება:

$$|b_{ij}|=\lambda^2|a_{ij}|$$

რადგან

$$\frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|}=K,$$

ამიტომ

$$K=\lambda^2=\text{const}.$$

ამრიგად, ის ზედაპირი, რომლის ასიმპტოტური ბადე შეთავსებულია იზოტროპულ ბადესთან, არის მუდმივ დადებითსიმრუდიანი ზედაპირი. გარდა ამისა, (153) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული a_{ij}-ისათვის არსებობს ერთადერთი b_{ij}, ე. ი. (ფუნდამენტური თეორემის თანახმად) ასეთი ზედაპირები ერთიმეორისაგან შეიძლება მხოლოდ მდებარეობით განსხვავდებოდნენ, ფორმით კი იგივურნი არიან. ამავე დროს I ნაწილის III თავიდან ვიცით, რომ სფეროს II და I კვადრატული ფორმები პროპორციულია, ე. ი.

$$d\sigma^2=\frac{1}{R}ds^2;$$

ანუ

$$b_{ij}=\frac{1}{R}a_{ij}=\sqrt{K}a_{ij},\ \lambda=\sqrt{K}.$$

ამიტომ სფეროს ასიმპტოტური ბადე შეთავსებულია სფეროს იზოტროპულ ბადესთან. რადგან ასეთი ზედაპირი არის ერთადერთი, ამიტომ ეს ზედაპირი შეიძლება იყოს მხოლოდ სფერო. ამრიგად, (153) დამახასიათებელია მხოლოდ სფეროსათვის. ეს საკითხი სხვა წესით განხილული აქვს კაგანს[1].

---

[1] იხ. Ф. В. Каган, Основы теории поверхностей, т. I, 1947.

§ 70. სიმრუდის წირთა ბადე

როგორც I ნაწილის III თავში იყო აღნიშნული, ზედაპირის ყოველ ჩვეულებრივ წერტილზე გადის სიმრუდის წირების ერთი წყვილი: ეს წირები განმარტებული იყო, როგორც ურთიერთშეუღლებული თანამართობი წირები. იგივე წირები ხასიათდება იმითაც, რომ ზედაპირის ნორმალი ამ წირების გასწვრივ აღწერს განფენად ზედაპირს (მონჟის დებულება). ამ დებულების დამტკიცების დროს მიღებული გვქონდა შემდეგი ტოლობა (იხ. I ნაწ. III თავი):

$$d\overline{K}=-\frac{1}{R}\,d\overline{M}=\lambda d\overline{M},\quad \left(\lambda=-\frac{1}{R}\right).$$

რადგან

$$d\overline{M}=\overline{M}_i du^i,\quad d\overline{K}=\overline{K}_i du_i,$$

ამიტომ

$$\overline{K}_i du^i=\lambda\overline{M}_i du^i.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $\overline{M}_j$-ზე; გვექნება:

$$M_j\cdot\overline{K}_i\,du^i=\lambda\,\overline{M}_i\cdot\overline{M}_j du^i.$$

(55) და (65) ფორმულების თანახმად, ეს ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$b_{ij}du^j=\lambda a_{ij}du^j,$$

საიდანაც

$$(b_{ij}-\lambda a_{ij})du^j=0. \tag{154}$$

აქედან λ პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ სიმრუდის წირების დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\begin{vmatrix} b_{1j}\,du^j, & a_{1j}\,du^j \\ b_{2j}\,du^j, & a_{2j}\,du^j \end{vmatrix}=0, \tag{155}$$

ანუ

$$(b_{1j}a_{2i}-a_{1}b_{2i})du^j du^i=0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$a_{1i}b_{2j}-a_{2i}b_{1j}=|a_{ij}|\,\varepsilon^{mn}a_{mi}b_{nj}, \tag{156}$$

სადაც ε^{ij} დისკრიმინანტული ε_{ij} ტენზორის შექცეული ტენზორია (იხ. II ნაწ. თავი III). თუ მოვახდენთ აღნიშვნას

$$c_{ij}=\widetilde{\varepsilon^{mn}}\,a_{m(i}b_{j)n} \tag{157}$$

მაშინ

$$a_{1(i}b_{2j)}-a_{2(i}b_{1j)}=|a_{ij}|\,c_{ij}.$$

ამრიგად, სიმრუდის წირთა ბადის დიფერენციალური განტოლება ასე წარმოგვიდგება:

$$c_{ij}du^i du^j=0, \tag{158}$$

სადაც ბადის c_{ij} ტენზორი მოცემულია (157) აღნიშვნით; (154) განტოლებიდან du^i-ის გამორიცხვა მოგვცემს (როგორც ეს აღნაშნული იყო I ნაწ. III თავში), λ პარამეტრის ან, რაც იგივეა, $\frac{1}{R}$-ის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობისათვის, ე. ი. ზედაპირის მთავარი სიმრუდისათვის, შემდეგ კვადრატულ განტოლებას:

$$|b_{ij}-\lambda a_{ij}|=0, \tag{159}$$

ანუ

$$|b_{ij}|-|a_{ij}|\widetilde{a^{ij}}\, b_{ij}\lambda+\lambda^2|a_{ij}|=0,$$

საიდანაც ფესვებისათვის გვექნება შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|}=K, \qquad \lambda_1+\lambda_2=\widetilde{a^{ij}}b_{ij}=2H. \tag{160}$$

სადაც K და H, როგორც უწინ, გამოსახავენ ზედაპირის სრულსა და საშუალო სიმრუდეებს შესაბამისად.

განვიხილოთ სიმრუდის წირთა ბადის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა.

1. როგორი ზედაპირისათვის არის სიმრუდის წირთა ბადე გეოდეზიური, ე. ი. როგორი ზედაპირისათვის არის სიმრუდის წირები გეოდეზიური? რადგან სიმრუდის წირების გასწვრივ ზედაპირის ნორმალი აღწერს განფენად ზედაპირს (მონჟის დებულება), ხოლო გეოდეზიური წირის მთავარი ნორმალი ერთვის ზედაპირის ნორმალს, ამიტომ თუ სიმრუდის წირები გეოდეზიურია, მაშინ მათი მთავარი ნორმალები შექმნის განფენად ზედაპირებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ მეზობელი მთავარი ნორმალები გადაიკვეთება პირველი რიგის სიზუსტით, ე. ი. მოთავსდება ერთ სიბრტყეზე ეს სიბრტყე გაივლის აღებულ მთავარ ნორმალზე და მეზობელ ნორმალზე პირველი რიგის სიზუსტით, მაშასადამე, იგი გაივლის წირზე აღებული წერტილის მეზობელ წერტილზეც. მაგრამ სიბრტყე, რომელიც მთავარ ნორმალზე და აღებული წერტილის (შეხების წერტილის) მეზობელ წერტილზე გადის, არის წირის მიმხები სიბრტყე. ამრიგად, ორი მეზობელი მთავარი ნორმალი მდებარეობს მიმხებ სიბრტყეზე განსახილავ წერტილში. მეორე მხრივ, მეზობელი მთავარი ნორმალი და განსახილავი წერტილი მდებარეობენ მეზობელ მიმხებ სიბრტყეზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ორი მეზობელი მიმხები სიბრტყე შეთავსებულია ერთიმეორესთან, ე. ი. წერტილის მეზობელ წერტილში გადაადგილების დროს მიმხები სიბრტყე არ იცვლება. რადგან წერტილი ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ წირის მიმხები სიბრტყე არ იცვლება მთელი წირის გასწვრივაც. ასეთი წირი კი, როგორც ცნობილია I ნაწილის II თავიდან, არის ბრტყელი წირი. ამრიგად სიმრუდის წირთა ბადე მხოლოდ მაშინ არის გეოდეზიური, როცა იგი ბრტყელი ბადეა.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ პირუკუ დასკვნაც სამართლიანია, ე. ი. თუ სიმრუდის წირი ბრტყელია, მაშინ იგი გეოდეზიურიც არის.

2. გამოვიკვლიოთ რა შემთხვევაშია სიმრუდის წირთა ბადე განუზღვრელი. იმისათვის, რომ სიმრუდის წირთა ბადე განუზღვრელი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სიმრუდის წირთა დიფერენციალური განტოლება იყოს განუზღვრელი du^i-ის მიმართ. ამისათვის საჭიროა, რომ (154) განტოლების კოეფიციენტი ნული იყოს, გვექნება

$$b_{ij}-\lambda a_{ij}=0.$$

აქედან

$$b_{ij}=\lambda a_{ij}.$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეს პირობა, ზედაპირის ძირითადი განტოლების ინტეგრების პირობებთან ერთად, ახასიათებს მხოლოდ სფეროს. ამრიგად, სფეროსათვის და მხოლოდ სფეროსათვის არის სიმრუდის წირთა ბადე განუზღვრელი (სიბრტყე განიხილება როგორც ნულსიმრუდიანი სფერო).

შევნიშნოთ, რომ სიმრუდის წირთა ბადე არ შეიძლება დაემთხვეს არც იზოტროპულ ბადეს, რადგან სიმრუდის წირთა ბადე ყოველთვის ნამდვილი წირებისაგან შედგება (დიუპენის ინდიკატრისის მთავარი დიამეტრები ყოველთვის ნამდვილია, იხ. I ნაწ. III თავი) და არც ასიმპტოტურ ბადეს, რადგან სიმრუდის წირები თანამართობი და შეუღლებული წირებია, ხოლო ასიმპტოტური წირები კი თავის თავისადმი შეუღლებული (გამონაკლისს წარმოადგენს სიბრტყე).

§ 71. ჩებიშევის ბადე

წირთა ბადეს ეწოდება ჩებიშევის ბადე, თუ იგი, საკოორდინატო წირებად განხილული, წირით ელემენტს ანიჭებს (პარამეტრების სათანადო შერჩევის შემდეგ) შემდეგ სახეს:

$$ds^2=du^2+dv^2+2F\,du\,dv,$$

ან, ზემოთ მიღებული აღნიშვნების თანახმად,

$$ds^2=(du^1)^2+(du^2)^2+2a_{12}du^1du^2.$$

ამრიგად, საკოორდინატო წირთა ბადე ჩებიშევის ბადეა, თუ a_{ij} ტენზორი აკმაყოფილებს ასეთ პირობას:

$$a_{11}=a_{22}=1.$$

ბიანკის მიერ აღმოჩენილი იყო ჩებიშევის ბადის შემდეგი თვისება: ჩებიშევის ბადის ერთი სისტემის მეზობელი წირების მიმართულებანი მეორე სისტემის რაიმე წირის გასწვრივ აბსოლუტურად პარალელურია, ან, სხვანაირად რომ გამოვთქვათ, ჩებიშევის ბადის ერთი სისტემის აღებული წირის მიმართულება აბსოლუტურ-პარალელურად გადაიტანება აღებული წერტილის უსასრულო მცირე გადაადგილების დროს მეორე სისტემის სათანადო წირის გასწვრივ[2]. ამ თვისების აღმოსაჩენად გამოვითვალოთ ქრისტოფელის სიმბოლოს $\left\{ {1 \atop 12} \right\}_a$, $\left\{ {2 \atop 12} \right\}_a$ კომპონენტები. (112) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\Gamma^1{}_{12}=\left\{ {1 \atop 12} \right\}_a=\frac{1}{2}(\widetilde{a}^{11}\partial_2 a_{11}+\widetilde{a}^{12}\partial_1 a_{22}),$$

[2] იხ. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, т. II, გვ. 347 და L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, I, II.

$$\Gamma^2{}_{12}=\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}_a=\frac{1}{2}(\widetilde{a}^{12}\partial_2 a_{11}+\widetilde{a}^{22}\partial_1 a_{22}).$$

გამოვიყენოთ აქ ზემოაღნიშნული პირობები (ე. ი. თვით ჩებიშევის ბადის განმარტება) $a_{11}=a_{22}=1$, მივიღებთ:

$$\Gamma^1{}_{12}=\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}_a=0,\quad \Gamma^2{}_{12}=\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}=0,$$

ან, მოკლედ,

$$\Gamma^m{}_{12}=\left\{\begin{matrix}m\\12\end{matrix}\right\}_a=0,\ m=1,\ 2. \tag{161}$$

ახლა განვიხილოთ საკოორდინატო წირთა ბადე და გამოვითვალოთ (u^1) წირის მიმართულების აბსოლუტური დიფერენციალი (u^2) წირის გასწვრივ. რადგან (u^1) და (u^2) წირების მიმართულებებს განსაზღვრავს (0, du^2) და (δu^1, 0) შესაბამისად, ამიტომ (u^1) წირის მხები $\overline{M}_2$ ვექტორის (რომელიც du^i-ით განიზღვრება) დიფერენციალი (u^2) წირის გასწვრივ ასე წარმოგვიდგება (ზემოაღნიშნული პირობების გამოყენების შემდეგ):

$$\delta(\overline{M}_2)=\partial_i\overline{M}_2\,\delta u^i=\partial_1\overline{M}_2\delta u^1=\Gamma^m{}_{12}\overline{M}_m\delta u^1+b_{12}\overline{K}\delta u^1=b_{12}\delta u^1\overline{K}=\lambda\overline{K}.$$

აქედან კი აშკარაა, რომ du^i მიმართულება აბსოლუტურ-პარალელურად გადაიტანება (u^2) წირის გასწვრივ. სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება, რომ (δu^i) მიმართულებაც აბსოლუტურ-პარალელურად გადაიტანება (u^1) წირის გასწვრივ.

ახლა განვიხილოთ წირთა ბადე, რომელიც მოცემულია შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\varphi_{ij}du^i du^j=0$$

და გამოვარკვიოთ თუ როგორ პირობებში იქნება წირთა ეს ბადე ჩებიშევის ბადე. მივიღოთ ეს ბადე საკოორდინატო ბადედ; მაშინ

$$\varphi_{11}=0,\quad \varphi_{22}=0.$$

ამ შემთხვევაში უნდა შესრულდეს (161) პირობები. გარდა ამისა, რადგან

$$\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}_\varphi=\frac{1}{2}(\widetilde{\varphi}^{11}\partial_2\varphi_{11}+\widetilde{\varphi}^{12}\partial_1\varphi_{22}),$$

$$\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}_\varphi=\frac{1}{2}(\widetilde{\varphi}^{12}\partial_2\varphi_{11}+\widetilde{\varphi}^{22}\partial_1\varphi_{22}),$$

ამიტომ ამ შემთხვევაში ($\varphi_{11}=\varphi_{22}=0$) გვექნება:

$$\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}_\varphi=0,\ \left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}_\varphi=0,$$

ან, მოკლედ,

$$\left\{\begin{matrix}m\\12\end{matrix}\right\}_\varphi=0,\ m=1,\ 2. \tag{162}$$

განვიხილოთ ტოლობა

$$\nabla_k\varphi_{ij}=\partial_k\varphi_{ij}-\Gamma^m{}_{ki}\varphi_{mj}-\Gamma^m{}_{kj}\varphi_{im}$$

ამოვხსნათ იგი Γ^m_{ij}-ის მიმართ, მორიგეობით შენაცვლება k, i და k, j ინ-
დექსებისა ამ ტოლობაში და მიღებული ორი ტოლობის ჯამის გამოკლება ამ ტოლობიდან მოგვცემს:

$$2\Gamma^m{}_{ij}\,\varphi_{mk} = \partial_i\,\varphi_{kj} + \partial_j\,\varphi_{ki} - \partial_k\varphi_{ij} - (\nabla_i\,\varphi_{kj} + \Delta_j\,\varphi_{ki} - \Delta_h\,\varphi_{ij}).$$

აქედან, $\widetilde{\varphi}^{kn}$-ზე გადამრავლებით, მივიღებთ

$$\Gamma^m{}_{ij} = \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}^{mk}\,(\partial_i\varphi_{kj} + \partial_j\,\varphi_{ki} - \partial_k\varphi_{i}) - \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}^{mk}(\nabla_i\varphi_{kj} + \nabla_j\varphi_{ki} - \nabla_k\varphi_{ij})$$

ან, რაც იგივეა,

$$\Gamma^m{}_{ij} = \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}^{mk}(\nabla_i\varphi_{kj} + \nabla_j\varphi_{ki} - \nabla_k\varphi_{ij}).$$

თუ აღებული წირთა ბადე ჩებიშევის ბადეა და იგი მიღებულია საკოორდინატო წირებად, მაშინ, როგორც აღნიშნული გვქონდა, $\Gamma^m{}_{ij}$ და $\left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\}_\varphi$ დააკმაყოფილებს (161) და (162) პირობებს. ამ პირობებში უკანასკნელი ტოლობა მოგვცემს

$$\widetilde{\varphi}^{mk}\,(\nabla_1\varphi_{2k} + \nabla_2\varphi_{1k} - \nabla_k\varphi_{12}) = 0, \quad m = 1,\ 2.$$

აქედან კი

$$\nabla_1\varphi_{2i} + \Delta_2\varphi_{1i} - \nabla_i\varphi_{12} = 0,\ i = 1,\ 2. \tag{163}$$

რადგან $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, ამიტომ $\widetilde{\varphi}^{11} = \widetilde{\varphi}^{22} = 0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ (163) ტოლობა ამ პირობებში ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\widetilde{\varphi}^{ks}\,(2\nabla_k\varphi_{si} - \nabla_i\varphi_{ks}) = 0. \tag{164}$$

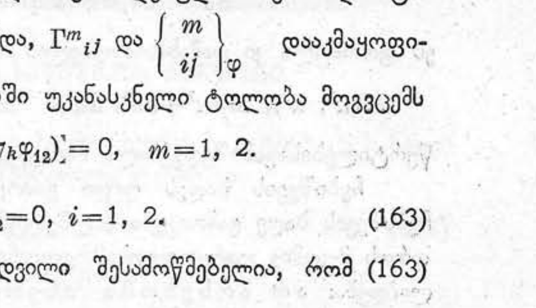
აშკარაა, რომ

$$T_i = \frac{1}{2}\varphi^{ks}\,(2\nabla_k\varphi_{si} - \nabla_i\varphi_{ks}) \tag{165}$$

გამოსახულება არის პირველი რანგის ტენზორი. (164) პირობის თანახმად:

$$T_i = 0.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ თუ ტენზორის კომპონენტები ნულია მრუდწირული კოორდინატების რაიმე სისტემაში, ისი ნული იქნება ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც. მაშასადამე, ჩებიშევის ბადისთვის დამახასიათებელი იქნება (164) ტოლობა ნებისმიერ სისტემაში; T_i ტენზორს ეწოდება **ჩებიშევის ტენზორი**. ეს ტენზორი და ჩებიშევის ბადის დამახასიათებელი (164) პირობა აღმოჩენილ იქნა დუბნოვის[3] მიერ.



ნახ. 64

[3] იხ. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. IV, 1937, ან Ф. Каган, Основы теории поверхностей, т, II, 1948.

ბოლოს აღვნიშნოთ ჩებიშევის ბადის ერთი შესანიშნავი თვისება: ჩებიშევის ბადე ზედაპირს ყოფს უსასრულოდ მცირე პარალელოგრამებად. მართლაც, რადგან $a_{11}=a_{22}=1$, ამიტომ (u^1) და (u^2) წირების რკალების დიფერენციალები ასე წარმოგვიდგება:

$$ds_1=|\overline{M}_1|\,du^1=\sqrt{a_{11}}\,du^1=du^1,$$

$$ds_2=|\overline{M}_2|\,du^2=\sqrt{a_{22}}\,du^2=du^2.$$

გარდა ამისა

$$\cos(\overline{M}_1,\overline{M}_2)=\frac{\overline{M}_1\ \overline{M}_2}{|M_1|\cdot|M_2|}=\frac{a_{12}}{1\ 1}=a_{12}.$$

ამრიგად, წირითი ელემენტი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$ds^2=(ds_1)^2+(ds_2)^2+2ds_1ds_2\cos(\overline{M}_1,\overline{M}_2).$$

ეს ფორმულა კი დამახასიათებელია პარალელოგრამებისათვის. აქედან ჩანს, რომ

$$M(u^1,u^2),\ M_1(u^1+du^1,du^2),\quad M_2(u^1,u^2+du^2),\quad M_3=(u^1+du^1,u^2+du^2).$$

წერტილებისაგან შედგენილი ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (ნახ. 64).

ჩებიშევის ბადეს დიდი გამოყენება აქვს ზედაპირთა თეორიაში. კერძოდ, ჩებიშევის ბადე გამოიყენა ჰილბერტმა ერთი შესანიშნავი თეორემის დამტკიცების დროს მუდმივ უარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირების შესახებ. ეს თეორემა ასე ყალიბდება: არ არსებობს ისეთი მუდმივსიმრუდიანი ზედაპირი, რომელსაც არ ჰქონდეს განკუთრი წერტილი[4].

---

[4] იხ. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, ტომები I, II, III არის I ტომის რუსული თარგმანი: В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, т. I.

თ ა ვ ი VI

ზოგიერთ ბადეთა და ზედაპირთა ინვარიანტული დახასიათებანი

§ 72. ასიმპტოტური ბადის ჩებიშევის ტენზორი

ხშირად გამოთვლების გასაადვილებლად ხელსაყრელია φ_{ij} ტენზორის ნაცვლად განვიხილოთ შემდეგი ფორმულით განზღვრული ტენზორი:

$$\varphi^{ij}=\tilde{\varepsilon}^{ik}\,\tilde{\varepsilon}^{js}\varphi_{ks}. \tag{166}$$

უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ:

$$\varphi^{ij}=\frac{|a_{ij}|}{|\varphi_{ij}|}\,\varphi^{ij}. \tag{167}$$

ამ ფორმულის თანახმად ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^{ij}&=\varepsilon^{ij},\\ \tilde{a}^{ij}&=a^{ij},\\ \tilde{b}^{ij}&=\frac{1}{K}\,b^{ij},\end{aligned} \tag{168}$$

სადაც K ზედაპირის სრული სიმრუდეა. (167) განტოლების გადამრავლება φ_{ij}-ზე მოგვცემს:

$$\varphi^{ij}\varphi_{ij}=2\frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|}. \tag{169}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა b_{ij} ტენზორისათვის ასეთ სახეს მიიღებს:

$$b^{ij}b_{ij}=2K. \tag{170}$$

გავაწარმოოთ ახლა (169) ტოლობა აბსოლუტურად Γ_{ij}^{m}-ფუძით, გვექნება:

$$\varphi_{ij}\nabla_r\varphi^{ij}+\varphi^{ij}\nabla_r\varphi_{ij}=2\partial_r\left(\frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|}\right).$$

(166) ფორმულის თანახმად

$$\varphi_{ij}\nabla_r\varphi^{ij}=\varphi_{ij}\varepsilon^{jk}\varepsilon^{is}\nabla_r\varphi_{ks}=\varphi^{ks}\nabla_r\varphi_{ks}.$$

ამრიგად,

$$\varphi^{ij}\nabla_r\varphi_{ij}=\partial_r\left(\frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|}\right). \tag{171}$$

ეს ფორმულა b_{ij}-ტენზორისათვის, (170) ფორმულის თანახმად, ასეთ სახეს მიიღებს:

$$b^{ij}\nabla_r b_{ij}=\partial_r K. \tag{172}$$

აქედან, (168)-ის მესამე ტოლობის თანახმად, მივიღებთ

$$\widetilde{b^{ij}}\nabla_r b_{ij}=\partial_r \lg K. \tag{173}$$

ახლა გამოვითვალოთ ასიმპტოტური ბადის ჩებიშევის ტენზორი. ამისათვის უნდა ავიღოთ ჩებიშევის ტენზორის (165) ფორმულა და φ_{ij} ტენზორი შევცვალოთ b_{ij} ტენზორით. გვექნება:

$$t_i=\frac{1}{2}\widetilde{b^{ks}}(2\nabla_k b_{is}-\nabla_i b_{ks}).$$

გამოვიყენოთ კოდაცის განტოლება, ე. ი.

$$\nabla_{[k}b_{i]j}=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\nabla_k b_{ij}=\Delta_i b_{kj}.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის თანახმად ასიმპტოტური ბადის ჩებიშევის ტენზორი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$t_i=\frac{1}{2}\widetilde{b^{ks}}\nabla_i b_{ks}. \tag{174}$$

(173) ფორმულის თანახმად უკანასკნელი ფორმულა მოგვცემს საბოლოოდ

$$t_i=\frac{1}{2}\partial_i \lg K. \tag{175}$$

ამ ფორმულის გამოყენებით განვიხილოთ ის ზედაპირები, რომელთათვისაც ასიმპტოტური ბადე არის ჩებიშევის ბადე. რადგან ჩებიშევის ბადეს ახასიათებს ჩებიშევის ტენზორის ნულთან ტოლობა, გვექნება:

$$t_i=\frac{1}{2}\partial_i \lg K=0.$$

აქედან

$$K=\mathrm{const}.$$

ამრიგად, მუდმივსიმრუდიან ზედაპირზე, და მხოლოდ მასზე, ასიმპტოტური ბადე წარმოადგენს ჩებიშევის ბადეს.

§ 73. გეოდეზიური ბადე

თუ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით

$$\varphi_{ij}\,du^i\,du^j=0$$

განზღვრული წირები გეოდეზიურია, მაშინ ბადეს ეწოდება გ ე ო დ ე ზ ი უ რ ი ბ ა-დ ე. მოვახდინოთ ამ ტოლობის აბსოლუტური გადიფერენციალება თვით ბადის წირების გასწვრივ, გვექნება:

$$\nabla\varphi_{ij}\,du^i\,du^j+2\varphi_{ij}du^i\nabla du^j=0.$$

რადგან ბადის წირები გეოდეზიურია, ამიტომ

$$\Delta du^j=\lambda du^j.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს:

$$\Delta\,\varphi_{ij}du^i du^j=0.$$

ეს ტოლობა, შედარებული თვით განსახილავი ბადის განტოლებასთან, მოგვცემს

$$\nabla\varphi_{ij}=\mu\varphi_{ij},$$

სადაც μ წრფივი დიფერენციალური ფორმაა, ე. ი.

$$\mu=\mu_k du^k.$$

რადგან

$$\nabla\varphi_{ij}=\nabla_k\varphi_{ij}\cdot du^k,$$

ამიტომ

$$\nabla_k\varphi_{ij}du^k=\mu_k du^k\varphi_{ij}.$$

ეს ტოლობა, განსახილავი ბადის განტოლებებთან ერთად განხილული, მოგვცემს:

$$\nabla_k\varphi_{ij}=\mu_k\varphi_{ij}+\nu_i\varphi_{kj}+w_j\varphi_{ik}.$$

განვიხილოთ ამ ტოლობის ალტერნაცია i, j ნიშნაკების მიმართ, გვექნება:

$$\nu_{[i}\varphi_{i]k}+w_{[j}\varphi_{i]k}=0.$$

აქედან, $\widetilde{\varphi}^{jk}$-ზე გადამრავლებით, მივიღებთ:

$$\nu_i=w_i.$$

ამრიგად, გვექნება:

$$\nabla_k\varphi_{ij}=\mu_k\varphi_{ij}+\nu_i\varphi_{kj}+\nu_j\varphi_{ik}. \tag{176}$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა φ^{ij}-ზე და გამოვიყენოთ (167) და (171) ფორმულები მივიღებთ:

$$\mu_k+\nu_k=\frac{1}{2}\,\partial_k\lg\frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|}. \tag{177}$$

ახლა გამოვითვალოთ განსახილავი ბადის ჩებიშევის ტენზორი (176) ფორმულის გამოყენებით. ამ პირობებში ჩებიშევის ტენზორის (165) ფორმულა მოგვცემს:

$$t_i=2\nu_i.$$

აქედან

$$\nu_i=\frac{1}{2}\,t_i.$$

ამ ტოლობის თანახმად (177) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\mu_i = \frac{1}{2}\, \partial i \lg \frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|} - \frac{1}{2}\, t_i.$$

μ_i და ν_i ტენზორების მიღებულ მნიშვნელობათა შეტანა (176) განტოლებაში, მოგვცემს გეოდეზიური ბადის დამახასიათებელ განტოლებას საბოლოოდ:

$$2\nabla_k \varphi_{ij} = \left(\partial_k \lg \frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|} - t_k \right)\varphi_{ij} + t_i\varphi_{kj} + t_j\varphi_{ik}. \tag{178}$$

ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრების პირობები დაახასიათებს იმ ზედაპირებს, რომლებზედაც არსებობს გეოდეზიური ბადეები [1].

ახლა განვიხილოთ ისეთი ზედაპირი, რომელზედაც გეოდეზიური ბადე ჩებიშევის ბადეა. ამისათვის (178) განტოლებაში ჩავსვათ $t_i = 0$, მივიღებთ:

$$2\nabla_k \varphi_{ij} = \partial_k \lg \frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|} \cdot \varphi_{ij}.$$

განვიხილოთ ტენზორი

$$\psi_{ij} = e^{-\frac{1}{2}\lg \frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|}} \varphi_{ij}$$

ამ ტოლობის აბსოლუტური გაწარმოება და წინა ტოლობის გამოყენება მოგვცემს:

$$\nabla_k \psi_{ij} = 0.$$

ეს განტოლება რომ შევადაროთ

$$\nabla_k a_{ij} = 0$$

განტოლებას, მივიღებთ:

$$\psi_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

φ_{ij}-ისათვის გვექნება

$$\varphi_{ij} = \mu a_{ij} \left(\mu = \lambda e^{-\frac{1}{2}\lg \frac{|\varphi_{ij}|}{|a_{ij}|}} \right).$$

აქედან აშკარაა, რომ განსახილავი გეოდეზიური ბადე ემთხვევა a_{ij}-ტენზორით განზღვრულ ბადეს, ე. ი.

$$a_{ij} du^i du^j = 0$$

ბადეს. ამ ბადეს ი ზ ო ტ რ ო პ უ ლ ი ბ ა დ ე ეწოდება. იგი შედგება ნულსიგრძიანი წირებისაგან. ამრიგად, მხოლოდ იზოტროპული ბადე შეიძლება იყოს ერთდროულად გეოდეზიური და ჩებიშევის ბადე.

მაგალითის სახით განვიხილოთ მეორე რიგის ზედაპირი. მეორე რიგის ზედაპირისათვის დამახასიათებელია ის, რომ მისი მსახველთა სისტემა წრფოვან ასიმპტოტურ ბადეს ჰქმნის. ეს ბადე, როგორც წრფოვანი, გეოდეზიურიც არის. ამრიგად, მეორე რიგის ზედაპირისათვის დამახასიათებელი იქნება ასიმპტოტური ბადის გეოდეზიურობა. ამრიგად, მეორე რიგის ზედაპირისათვის (178) განტოლება დაკმაყოფილდება თუ ჩავსვამთ $\varphi_{ij} = b_{ij}$. გვექნება:

---

[1] იხ. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. IV, Москва. 1937.

$$2\Delta_k b_{ij}=\left(\partial_k \lg \frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|}-t_k\right)b_{ij}+t_i b_{kj}+t_j b_{ik}\cdot$$

რადგან

$$\frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|}=K,\quad t_k=\frac{1}{2}\partial_k \lg K,$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$2\nabla_k b_{ij}=t_k b_{ij}+t_i b_{kj}+t_j b_{ik}. \tag{179}$$

დაბოლოს მეორე რიგის ზედაპირის ასიმპტოტური ბადე შეიძლება იყოს ჩებიშევის ბადე, როცა იგი (როგორც გეოდეზიური და ჩებიშევის ბადე ერთდროულად ემთხვევა იზოტროპულ ბადეს, ე. ი. როცა

$$b_{ij}=\lambda a_{ij},$$

ამ პირობით კი, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება სფერო. ამრიგად, ასიმპტოტური ბადე მეორე რიგის ზედაპირზე განსაზღვრავს ჩებიშევის ბადეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ეს მეორე რიგის ზედაპირი სფეროა.

§ 74. ტენზორთა კანონიკური სამეული

სამ მეორე რიგის სიმეტრიულ ტენზორს ეწოდება ურთიერთწრფივად დამოუკიდებელი ტენზორები, თუ მათი წრფივი ნაერთი ნებისმიერი სკალარი კოეფიციენტებით ყოველთვის განსხვავდება ნულისაგან, თუ ყველა კოეფიციენტი ერთდროულად ნული არ არის. პირუკუ, თუ არსებობს ისეთი სამი სკალარი კოეფიციენტი (რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან), რომ სამი ტენზორის წრფივი ნაერთი ამ კოეფიციენტებით ნულია, მაშინ ტენზორთა სამეულს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული სამეული. მაგალითად, ზედაპირთან დაკავშირებული ძირითადი ტენზორები a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} (ფუნდამენტური ტენზორი, ასიმპტოტური ბადის ტენზორი, სიმრუდის ბადის ტენზორი) ქმნის წრფივად დამოკიდებულ სამეულს, თუ ზედაპირი არ არის სიბრტყე ან სფერო. მართლაც, განვიხილოთ აღნიშნული ტენზორების წრფივად დამოკიდებულების შემთხვევა, გვექნება:

$$\lambda a_{ij}+\mu b_{ij}+\nu c_{ij}=0.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $\widetilde{c}^{ij}$-ზე და მხედველობაში მივიღოთ c_{ij}-ის განმსაზღვრელი (157) ფორმულა. უშუალო გამოთვლებით ადვილად მიიღება:

$$\widetilde{c}^{ij}a_{ij}=0,\ \widetilde{c}^{ij}b_{ij}=0,\ \widetilde{c}^{ij}c_{ij}=2.$$

ამრიგად, $\widetilde{c}^{ij}$-ზე გადამრავლების შემდეგ, მივიღებთ:

$$\nu\cdot 2=0,$$

საიდანაც

$$\nu=0.$$

მაშასადამე,

$$\lambda a_{ij}+\mu b_{ij}=0.$$

აქედან

$$b_{ij}=-\frac{\lambda}{\mu}\,a_{ij}=\omega a_{ij}\left(\omega=-\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

ამრიგად,

$$b_{ij}=\omega a_{ij}.$$

ამ პირობით კი განისაზღვრება სფერო, თუ $\omega\neq 0$, ხოლო, თუ $\omega=0$, მაშინ გვექნება

$$b_{ij}=0.$$

ამ პირობით, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება სიბრტყე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ წრფივად დამოუკიდებელი ტენზორების წრფივი ნაერთით განზღვრული ტენზორი წრფივად დამოუკიდებელი იქნება აღებული ტენზორების რაიმე წყვილთან ერთად განხილული.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი სიმეტრიული ტენზორი შეიძლება დაიშალოს წრფივად დამოუკიდებელ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ტენზორების წრფივი ნაერთის სახით, ე. ი. შეიძლება განვსაზღვროთ ისეთი λ, μ, ν კოეფიციენტები, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\varphi_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu b_{ij}+\nu c_{ij}.$$

ამისათვის გადავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობა $\widetilde{a}^{ij}$-ზე, $\widetilde{b}^{ij}$-ზე და $\widetilde{c}^{ij}$-ზე მიმდევრობით, გვექნება:

$$\widetilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=2\lambda+\mu\widetilde{a}^{ij}b_{ij}+\nu\widetilde{a}^{ij}c_{ij},$$

$$\widetilde{b}^{ij}\varphi_{ij}=\lambda\widetilde{b}^{ij}a_{ij}+2\mu+\nu\widetilde{b}^{ij}c_{ij},$$

$$\widetilde{c}^{ij}\varphi_{ij}=\lambda\widetilde{c}^{ir}a_{ij}+\mu\widetilde{c}^{ij}b_{ij}+2\nu,$$

რადგან

$$\widetilde{a}^{ij}b_{ij}=2H,\quad \widetilde{a}^{ij}c_{ij}=0,$$

$$\widetilde{b}^{ij}a_{ij}=\frac{2H}{K},\quad \widetilde{b}^{ij}c_{ij}=0,$$

$$\widetilde{c}^{ij}a_{ij}=0,\ \widetilde{c}^{ij}b_{ij}=0,$$

ამიტომ

$$\widetilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=2\lambda+2H\mu,$$

$$\widetilde{b}^{ij}\varphi_{ij}=\frac{2H}{K}\lambda=2\mu,$$

$$\widetilde{c}^{ij}\varphi_{ij}=2\nu.$$

მესამე ტოლობიდან განიზღვრება ν, ხოლო პირველი და მეორე ტოლობიდან განიზღვრება λ და μ, თუ სისტემის დეტერმინანტი

$$D=\begin{vmatrix}\frac{2H}{K}, & 2\\ & 2,2H\end{vmatrix}=\frac{4}{K}(H^2-K)$$

განსხვავდება ნულისაგან. როგორც ჩანს სისტემის დეტერმინანტი მხოლოდ მაშინ შეიძლება იყოს ნული, როცა

$$H^2-K=0.$$

მაგრამ სრული და საშუალო სიმრუდეების ფორმულის თანახმად

$$H^2-K=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2-\frac{1}{R_1R_2}.$$

აქედან

$$H^2-K=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^2. \tag{180}$$

ამრიგად, ზემოაღნიშნული სისტემის დეტერმინანტი მხოლოდ მაშინ გაუტოლდება ნულს, როცა $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ დიუპენის ინდიკატრისი წრეწირია (მისი ნახევარღერძები ტოლია). მაშასადამე, $\frac{1}{R}$ მართივ კვეთის სიმრუდე მუდმივია, დამოუკიდებელია წირის მიმართულებაზე, ე. ი. du^1, du^2 დიფერენციალებზე. რადგან

$$\frac{1}{R}=\frac{ds^2}{ds^2}=\frac{b_{ij}\,du^i\,du^j}{a_{ij}\,du^i\,du^j},$$

ამიტომ

$$b_{ij}du^idu^j=\frac{1}{R}a_{ij}du^id^j.$$

ეს ტოლობა უნდა შესრულდეს ნებისმიერი du^1, du^2 დიფერენციალებისათვის, ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ ტოლობას

$$b_{ij}=\frac{1}{R}a_{ij}.$$

ეს პირობა კი, როგორც ვიცით, ახასიათებს სფეროს· ამრიგად, თუ ზედაპირი არ არის სფერო, მაშინ (180) ფორმულით განსაზღვრული გამოსახულება H^2-K განსხვავდება ნულისაგან. ამ გამოსახულებას ეწოდება ე ი ლ ე რ ი ს სხვაობა.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი დამოკიდებულება b_{ij} და c_{ij} ტენზორებს შორის

$$\tilde{b}^{ij}c_{ij}=0$$

წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისათვის, რომ b_{ij} და c_{ij} ტენზორებით განსაზღვრული ბადეების, ე. ი. ასიმპტოტური და სიმრუდის ბადეების, წირთა მხები წრფეები M წერტილში ქმნის წრფეთა ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ო თ ხ ე უ ლ ს. ასეთი პირობით შეკავშირებულ ტენზორებს უწოდებენ ერთიმეორის აპოლარულ ტენზორებს.

ახლა განვიხილოთ ტენზორთა ერთი საინტერესო სამეული: a_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, სადაც

$$p_{ij}=\frac{c_{ij}}{\sqrt{H^2-K}},\qquad q_{ij}=\frac{b_{ij}-Ha_{ij}}{\sqrt{H^2-K}}. \tag{181}$$

რადგან p_{ij} და q_{ij} განზღვრულია წრფივად დამოუკიდებელი a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ტენზორების საშუალებით წრფივი ნაერთების სახით, ამიტომ a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} ტენზორთა სამეულიც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} ტენზორები ურთიერთაპოლარული ტენზორებია, ე. ი.

$$a^{ij}p_{ij}=0, \quad a^{ij}q_{ij}=0, \quad p^{ij}q_{ij}=0, \tag{182}$$

სადაც p^{ij} ტენზორი მიღებულია p_{ij} ტენზორისაგან ინდექსების აწევით $\widetilde{\varepsilon^{ij}}$ ტენზორის საშუალებით, ე. ი:

$$p^{ij}=\widetilde{\varepsilon^{ik}}\,\widetilde{\varepsilon^{is}}p_{ks}.$$

ადვილი შესამოწმებელია აგრეთვე, რომ p_{ij}, q_{ij} ტენზორები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$p^{ij}p_{ij}=-2, \quad q^{ij}q_{ij}=-2.$$

ტენზორთა ასეთ სამეულს ეწოდება ტ ე ნ ზ ო რ თ ა კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი ს ა მ ე უ ლ ი.

ქვემოთ საჭირო იქნება a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} ტენზორების აბსოლუტური წარმოებულების გამოყენება, ამიტომ უმჯობესია წინასწარ იქნეს გამოთვლილი ეს წარმოებულები. a_{ij} ტენზორის აბსოლუტური წარმოებული, როგორც ცნობილია, აკმაყოფილებს (114) ტოლობას. p_{li} და q_{ij}-ის წარმოებულების გამოსათვლელად მოვახდინოთ მათი წარმოებულების შემდეგნაირი დაშლა:

$$\nabla_k p_{ij}=a_k a_{ij}+b_k p_{ij}+c_k q_{ij},$$
$$\nabla_k q_{ij}=\overline{a_k}a_{ij}+\overline{b_k}p_{ij}+\overline{c_k}q_{ij}.$$

ამ ტოლობათა გადამრავლება მიმდევრობით a^{ij}-ზე, p^{ij}-ზე, q^{ij}-ზე და (182) პირობების გამოყენება მოგვცემს:

$$a_k=0, \ b^k=0, \ c_k=-\frac{1}{2}q^{ij}\nabla_k p_{ij},$$

$$\overline{a_k}=0, \ \overline{b_k}=-c_k, \quad \overline{c_k}=0.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\begin{aligned} \nabla_k a_{ij}&=0, \\ \nabla_k p_{ij}&=c_k q_{ij} \\ \nabla_k q_{ij}&=-c_k p_{ij}. \end{aligned} \tag{183}$$

თუ აღვნიშნავთ სიმრუდის წირთა ბადის ჩებიშევის ტენზორს (ე. ი. p_{ij}-ტენზორის ჩებიშევის ტენზორს) p_i-ასოთი და გამოვთვლით მას (165) ფორმულის მიხედვით (სადაც φ_{ij} უნდა შეიცვალოს p_{ij}-თი), (183) ფორმულების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$p_i=p^{ks}q_{is}c_k. \tag{184}$$

აქვე აღვნიშნოთ a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} ტენზორების სხვა თვისებებიც, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობენ წინა ფორმულებიდან

$$\widetilde{a^{ij}}=a^{ij}, \quad \widetilde{p^{ij}}=-p^{ij}, \ \widetilde{q^{ij}}=-q^{ij} \tag{185}$$
$$a_i^k a_k^j=-\delta_i^j, \ p_i^k p_k^j=\delta_i^j, \ q_i^k q_k^j=\delta_i^j,$$

სადაც

$$a_i^k=\varepsilon^{ks}a_{is}, \ p_i^k=\widetilde{\varepsilon^{ks}}p_{is}, \quad q_i^k=\widetilde{\varepsilon^{ks}}q_i. \tag{186}$$

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$a_i^k\, q_{jk}=a_i^k\, \frac{b_{jk}-H a_{kj}}{\omega}=\frac{a_i^k\, b_{jk}-H a_i^k\, a_{jk}}{\omega}.$$

რადგან

$$a_i^k\, a_{jk}=\widetilde{\varepsilon}^{ks} a_{is} a_{jk} = \frac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}^{ks}(a_{is}a_{jk}-a_{ik}a_{js}),$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_i^k\, a_{jk}=\lambda\varepsilon_{ij}.$$

თუ გადავამრავლებთ $\widetilde{\varepsilon}^{ij}$-ზე, გვექნება:

$$\widetilde{\varepsilon}^{ij} a_i^k\, a_{jk} = \widetilde{\varepsilon}^{ij}\, \widetilde{\varepsilon}^{ks}\, a_{is}a_{jk}=-a^{jk}a_{jk}=-2.$$

$$\widetilde{\varepsilon}^{ij}\varepsilon_{ij}=2.$$

მაშასადამე, $\lambda=-1$, ამრიგად,

$$a_i^k\, q_{jk}=\frac{a_i^k\, b_{jk}+H\varepsilon_{ij}}{\omega}.$$

აქედან

$$a_{[i}^{k}q_{j]k}=\frac{a_{(i}^{k}\, b_{j)k}}{\omega}=\frac{\widetilde{\varepsilon}^{ks}a_{s(i}b_{j)k}}{\omega}=-p_{ij},$$

$$a_{[i}^{k}q_{j]]k}=\frac{a_{[i}^{k}\, b_{j]k}+H\varepsilon_{ij}}{\omega}.$$

მეორე ტოლობა გადავამრავლოთ $\widetilde{\varepsilon}^{ij}$-ზე, გვექნება:

$$\widetilde{\varepsilon}^{ij}a_i^k\, q_{jk} = \frac{\widetilde{\varepsilon}^{ij}a_i^k\, q_{jk}+2H}{\omega}=\frac{-a^{jk}b_{jk}+2H}{\omega}=\frac{-2H+2H}{\omega}=0,$$

ე. ი. $a_i^k\, a_{jk}$ სიმეტრიულია, ამიტომ

$$a_i^k\, q_{jk}=a_{(i}^{k}\, q_{j)k}=-p_{ij}.$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$a_i^k\, q_{jk}=-p_{ij} \tag{186}$$

თუ ამ ტოლობას გადავამრავლებთ a_s^i-ზე და მხედველობაში მივიღებთ რომ $a_s^i a_i^k=-\delta_s^k$, მაშინ გვექნება:

$$a_i^k\, p_{jk}=q_{ij}. \tag{187}$$

ახლა განვიხილოთ გამოსახულება $p_i^{\ k}q_{jk}$. (186) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$p_{\ldots}\, q_{jk}=\widetilde{\varepsilon}^{ks}p_{is}q_{jk}=\widetilde{\varepsilon}^{ks}a_i^m a_{sm}q_{jk}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\widetilde{\varepsilon}^{ks}q_{sm}q_{jk}=\mu\varepsilon_{mj}.$$

ამ ტოლობის გადამრავლება $\widetilde{\varepsilon}^{mj}$-ზე გვაძლევს:

$$\widetilde{\varepsilon}^{mj}\, \widetilde{\varepsilon}^{ks}q_{sm}q_{jk}=2\mu.$$

რადგან

$$\widetilde{\varepsilon}^{mj}\, \widetilde{\varepsilon}^{ks}q_{sm}=-q^{jk},$$

ამიტომ

$$-q^{jk}q_{jk}=2\mu$$

ანუ $2=2\mu$, ე. ი. $\mu=1$. მაშასადამე,

$$\widetilde{\varepsilon}^{ks}q_{sm}q_{jk}=\varepsilon_{mj}.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმა სათანადო ტოლობაში მოგვცემს:

$$p_i^k\, q_k^j=a_i^m\varepsilon_{mj}=-a_{ij}.$$

ამრიგად,

$$p_i^k\, q_k^j=-a_{ij} \tag{187}$$

(185), (186), (187) ტოლობაში ინდექსების აწევ-დაწევით ($\widetilde{\varepsilon}^{ij}$ და ε_{ij} ტენზორების საშუალებით) მივიღებთ კიდევ სხვა დამოკიდებულებებს a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} ტენზორებს შორის:

$$\begin{aligned} a^{jk}p_{ik}&=q_i^j\\ \widetilde{a}^{jk}q_{ik}&=-p_i^j. \\ p^{jk}q_{ik}&=-a_i^j \end{aligned} \tag{188}$$

$$\begin{aligned} a_i^k\, p_k^j&=q_i^j\\ a_i^k\, q_k^j&=-p_i^j,\\ p_i^k\, q_k^j&=-a_i^j \end{aligned} \tag{189}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} ადგილის შენაცვლება (185), (186), (187), (188), (189) ფორმულებში გამოიწვევს მხოლოდ ნიშნის შეცვლას.

გარდა ამისა, (183) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \nabla_k a^{ij}&=0\\ \nabla_k p^{ij}&=c_k q^{ij}\\ \Delta_k a^{ij}&=-c_k p^{ij}. \end{aligned} \tag{190}$$

ამ ტოლობათა ε_{im}-ზე გადამრავლება მოგვცემს კიდევ შემდეგ ფორმულებს

$$\begin{aligned} \nabla_k a^j{}_i&=0\\ \nabla_k p_i^j&=c_k q_i^j\\ \nabla_k q_i^j&=-c_k p_i^j. \end{aligned} \tag{191}$$

§ 75. სიმრუდის წირთა ბადის ჩებიშევის ტენზორი

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული სიმრუდის წირთა ბადის ჩებიშევის p_i ტენზორი განისაზღვრება c_i ტენზორით შემდეგი ფორმულიდან (იხ. ფორმ. 184):

$$p_i=p^{ks}q_{is}c_k=-a_i^k\, c_k. \tag{192}$$

სრულებით ანალოგიურად q_{ij} ტენზორის ჩებიშევის ტენზორი უკავშირდება c_i-ტენზორს აგრეთვე ფორმულით:

$$q_i=-q^{ks}c_k p_{is}=-a^k{}_i c_k.$$

აშკარაა, რომ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან

$$p_i=q_i.$$

ამრიგად, p_{ij}-ტენზორი, ე. ი. სიმრუდის წირთა ბადის ჩებიშევის ტენზორი იგივეა, რაც q_{ij} ტენზორის ჩებიშევის ტენზორი. გამოვთვალოთ ეს უკანასკნელი ჩებიშევის ტენზორის (165) ფორმულის მიხედვით. ამისათვის ამ ფორმულაში φ_{ij}-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ q_{ij}, განსღვრული (161) ფორმულით (მხედველობაში უნდა მივიღოთ აგრეთვე (185) ფორმულა), გვექნება:

$$p_i = -\frac{1}{2} q^{ks}(2\nabla_k q_{is} - \nabla_i q_{ks}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^{ks}}{\sqrt{H^2-K}}(\nabla_k b_{is} - 2\partial_k H a_{is} + \partial_k H a_{is}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^{ks}}{\sqrt{H^2-K}} \cdot \nabla_i b_{ks} + \frac{q^{ks}\partial_k H a_{is}}{\sqrt{H^2-K}} =$$

$$-\frac{q^{ks}\nabla_i[(q_{ks}+Ha_{ks})\sqrt{H^2-K}}{2\sqrt{H^2-K}} + \frac{p_i^k\,\partial_k H}{\sqrt{H^2-K^2}}.$$

აქედან, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$p_i = \partial_i \lg\sqrt{H^2-K} + \frac{p_i^k \partial_k H}{\sqrt{H^2-K}}. \tag{193}$$

მაგალითის სახით განვიხილოთ ისეთი ზედაპირი, რომლის სიმრუდის წირთა ბადე ადგენს ჩებიშევის ბადეს. ამისათვის უმჯობესია მივმართოთ ფორმულას

$$p_i = -a_i^k c_k.$$

თუ სიმრუდის წირთა ბადე ჩებიშევის ბადეა, მაშინ $p_i=0$, ამიტომ $c_i=0$. (183) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$\nabla_k p_{ij} = 0.$$

რადგან ყოველთვის

$$\nabla_k a_{ij} = 0,$$

ამიტომ გვექნება:

$$p_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

გადავამრავლოთ $\widetilde{a}^{ij}$-ზე და მხედველობაში მივიღოთ, რომ

$$\widetilde{a}^{ij} a_{ij} = 2, \quad \widetilde{a}^{ij} p_{ij} = 0.$$

მივიღებთ

$$\lambda = 0.$$

ამრიგად,

$$p_{ij} = 0.$$

სიმრუდის წირები გაურკვეველია, ზედაპირი არის სფერო. მაგრამ სფეროსათვის და განფენადი ზედაპირებისათვის თვით (183) ფორმულები არ განიხილება. ამიტომ ამ საკითხის გადასაწყვეტად სხვანაირად უნდა მოვიქცეთ. ჩვენ ვიცით, რომ სიმრუდის წირთა ბადე ორთოგონალურია. იგი საკოორდინატო ბადედ რომ მივიღოთ, წირითი ელემენტის (I კვ. ფორმის) შუაკოეფიციენტი უნდა მოისპოს. ჩვენ კი ვიცით, რომ თუ საკოორდინატო ბადე ჩებიშევის ბადეა, მაშინ განმარტების თანახმად წირით ელემენტს შემდეგი სახე ეძლევა:

$$ds^2=(du^1)^2+(du^2)^2+2a_{12}du^1du^2.$$

თუ ჩებიშევის ბადე ორთოგონალური ბადეა, $a_{12}=0$. ამრიგად,

$$ds^2=(du^1)^2+(du^2)^2.$$

აქედან ჩანს, რომ ჩებიშევის ბადე ორთოგონალური შეიძლება იყოს მხოლოდ განფენად ზედაპირებზე. რადგან სიმრუდის წირთა ბადე ორთოგონალურია, ამიტომ იგი შეიძლება იყოს ჩებიშევის ბადე მხოლოდ განფენად ზედაპირზე.

§ 76. ზედაპირის სიმრუდის წირთა ბადის არშემცვლელი ღუნვა

განვიხილოთ ისეთი ზედაპირები, რომელთა იზომეტრულ დეფორმაციას სიმრუდის წირები გადაჰყავს კვლავ სიმრუდის წირებში. გვექნება:

$$\overset{*}{a}_{ij}=a_{ij},$$

$$\overset{*}{a}_{ij}=\omega c_{ij},$$

სადაც $\widetilde{a}_i$-ით და $\widetilde{c_{ij}}$-ით აღნიშნული გვაქვს აღებული ზედაპირიდან იზომეტრული დეფორმაციით (ღუნვით) მიღებული ზედაპირის ფუნდამენტური ტენზორი და სიმრუდის წირთა ბადის ტენზორი შესაბამისად, ω კი რაიმე სკალარია.

იზომეტრული დეფორმაციით მიღებული ზედაპირის მესამე კანონიკური ტენზორი აღვნიშნოთ q_{ij}-ით და ეს უკანასკნელი განვსაზღვროთ კანონიკური სამეულის საშუალებით. გვექნება:

$$\overset{*}{q}_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu p_{ij}+\nu q_{ij}.$$

ეს ტოლობა გადავამრავლოთ a^{ij}-ზე და b^{ij}-ზე, მივიღებთ:

$$a^{ij}\overset{*}{q}_{ij}=\lambda a^{ij}a_{ij}+\mu a^{ij}p_{ij}+\nu a^{ij}q_{ij},$$

$$p^{ij}\overset{*}{q}_{ij}=\lambda p^{ij}a_{ij}+\mu p^{ij}p_{ij}+\nu p^{ij}q_{ij}.$$

რადგან p_{ij}, (181) ფორმულის თანახმად, განსხვავდება c_{ij}-საგან მხოლოდ სკალარი მამრავლით, ამიტომ $\overset{*}{p}_{ij}$ აგრეთვე სკალარი მამრავლით განსხვავდება p_{ij}-საგან. გვექნება:

$$a^{ij}a_{ij}=2,\quad a^{ij}p_{ij}=0,\quad a^{ij}\overset{*}{q}_{ij}=0,\quad \overset{*}{a}{}^{ij}q_{ij}=0,$$

$$p^{ij}\overset{*}{q}_{ij}=0,\quad p^{ij}a_{ij}=0,\quad p^{ij}p_{ij}=-2,\quad p^{ij}q_{ij}=0.$$

მაშასადამე,

$$2\lambda=0,\quad 2\mu=0,$$

ე. ი.

$$2\lambda=0,\ \mu=0.$$

ამრიგად მივიღებთ:

$$\overset{*}{q}_{ij}=\nu q_{ij}.$$

აქედან

$$\overset{*}{q}{}^{ij}\overset{*}{q}_{ij}=\nu^2q^{ij}q_{ij}.$$

რადგან

$$q^{ij}q_{ij}=-2, \quad \overset{*}{q}{}^{ij}\overset{*}{q}_{ij}=-2,$$

ამიტომ $\nu^2=1$, ე. ი. $\nu=\pm 1$. შეიძლება ისე ავარჩიოთ მეორე ზედაპირის ნორმალის მგეზავი, რომ გვქონდეს $\nu=1$. ამრიგად, ორივე ზედაპირზე გვექნება ერთი და იგივე კანონიკური სამეული. p_{ij}-ის ჩებიშევის ტენზორი ტოლი იქნება p_{ij}-ის ჩებიშევის ტენზორისა. სიმრუდის ბადის ჩებიშევის ტენზორის (197) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\overset{*}{p}_i=\partial_i \lg(\overset{*}{H}{}^2-\overset{*}{K})+\frac{\overset{*}{p}{}^k{}_i\,\partial_k \overset{*}{H}}{\sqrt{\overset{*}{H}{}^2-\overset{*}{K}}}.$$

რადგან

$$\overset{*}{K}=K, \quad \overset{*}{q}{}_i^k=q_i^k, \quad \overset{*}{p}_i=p_i,$$

ამიტომ

$$p_i=\partial_i \lg(\overset{*}{H}{}^2-K)+\frac{p_i^k\,\partial_k \overset{*}{H}}{\sqrt{\overset{*}{H}{}^2-K}}.$$

ამ ტოლობის შედარება (197) ფორმულასთან გვაძლევს:

$$\partial_i \lg\frac{\overset{*}{H}{}^2-K}{H^2-K}=p_i^k\left(\frac{\partial_k H}{\sqrt{H^2-K}}-\frac{\partial_k \overset{*}{H}}{\sqrt{\overset{*}{H}{}^2-K}}\right).$$

ამ ორ განტოლებას აკმაყოფილებს $\overset{*}{H}$. ამ სისტემის ინტეგრების პირობა იქნება დამახასიათებელი იმ ზედაპირებისთვის, რომელთა იზომეტრიული დეფორმაცია სიმრუდის ბადეს გადასახავს სიმრუდის ბადეში.

§ 77. ზედაპირის გეოდეზიურად გადასახვადობის პირობის შესახებ

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული (§ 66, განს. 147) გეოდეზიურად გადასახვადი ზედაპირის, ე. ი. ლიუვილის ზედაპირის, დამახასიათებელი პირობები შემდეგ განტოლებათა სისტემის ინტეგრების პირობებით წარმოდგება:

$$\nabla_k\varphi_{ij}+\nabla_i\varphi_{kj}+\nabla_j\varphi_{ki}=0. \tag{194}$$

დავშალოთ φ_{ij} ტენზორი a_{ij}, p_{ij}, q_{ji} ტენზორების მიმართ. გვექნება:

$$\varphi_{ij}=\lambda a_{ij}+\mu p_{ij}+\nu q_{ij}. \tag{195}$$

აქედან აბსოლუტური გაწარმოებითა და (183) პირობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\nabla_k\varphi_{ij}=\lambda_k a_{ij}+\mu_k p_{ij}+\nu_k q_{ij}, \tag{196}$$

სადაც

$$\lambda_k=\partial_k\lambda,$$
$$\mu_k=\partial_k\mu-\nu c_k,$$
$$\nu_k=\partial_k\nu+\mu c_k.$$

(196) ტოლობის თანახმად (194) ტოლობა ასე წარმოგვიდგება:

$$\lambda_k a_{ij}+\lambda_i a_{kj}+\lambda_j a_{ik}+\mu_k p_{ij}+\mu_i p_{kj}+$$
$$+\mu_j p_{ik}+\nu_k q_{ij}+\nu_i q_{kj}+\nu_j q_{ik}=0.$$

გადავამრავლოთ ეს უკანასკნელი ტოლობა q^{ij}-ზე. (182) და (188) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$2p_i^k\lambda_k+2a_i^k\mu_k-4\nu_i=0,$$

აქედან

$$\nu_i=\frac{1}{2}(a_i^k\mu_k+p_i^k\lambda_k).$$

ანალოგიურად, იმავე ტოლობის p^{ij}-ზე გადამრავლება მოგვცემს:

$$-2q_i^k\lambda_k-4\mu_i-2a_i^k\nu_k=0.$$

ჩავსვათ აქ ν_k-ს მნიშვნელობა, გვექნება:

$$-2q_i^k\lambda_k-4\mu_k-a_i^k(a_k^m\mu_m+p_k^m\lambda_m)=0.$$

რადგან

$$a_i^ka_k^m=-\delta_i^m,\quad a_j^kp_{\mathrm{k}}^m=q_i^m,$$

ამიტომ მივიღებთ:

$$\mu_i=-q_i^m\lambda_m. \tag{197}$$

μ_i-ის ამ მნიშვნელობის ჩასმა ν_i-სათვის მოგვცემს:

$$\nu_i=p_i^m\lambda_m. \tag{198}$$

μ'ι ν_i-ის მნიშვნელობათა შეტანით (196) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\nabla_k\varphi_{ij}=A_{k\,ji}^m\lambda_m, \tag{199}$$

სადაც

$$A_{kij}^m=\delta_k^ma_{ij}-q_k^mp_{ij}+p_k^mb_{ij}. \tag{200}$$

A_{kij}^m ტენზორისათვის (200) ფორმულიდან მიიღება შემდეგი დამახასიათებელი თვისებები:

$$a^{ij}A_{kij}^m=2\delta_k^m,$$

$$A_{kij}^m+A_{ijk}^m+A_{jki}^m=0.$$

ამ პირობებით A_{kij}^m ტენზორი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$A_{kij}^m=2\delta_k^ma_{ij}-\delta_i^ma_{kj}-\delta_j^ma_{ik}. \tag{201}$$

ახლა განვიხილოთ (199) განტოლებათა ინტეგრების პირობები, გვექნება:

$$-R_i^m\varphi_{mj}-R_j^m\varphi_{im}=-a_j^m\nabla_m\lambda^{mi}-a^{mi}\Delta_m\lambda_j.$$

რადგან რიჩის ტენზორი R_{ij} გამოისახება ასე (იხ. ფორ. (122))

$$R_{ij}=\frac{k}{2}a_{ij},$$

ამიტომ გვექნება

$$\frac{1}{2}K(a_i^m\varphi_{mj}+a_j^m\varphi_m^i)=a^m{}_j\nabla_m\lambda_j+a_j^m\nabla_m\lambda_i.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\nabla_i\lambda_j=\frac{K}{2}\varphi_{ij}+\delta a_{ij}, \tag{202}$$

სადაც δ ჯერჯერობით უცნობი სკალარია.

(199) განტოლება (201) ფორმულის თანახმად ასე გადაიწერება:

$$\nabla_k\varphi_{ij}=2\lambda_h a_{ij}-\lambda_i a_{kj}-\lambda_j a_{ik},$$

რადგან

$$\lambda_h=\partial_h\lambda,$$

გვექნება:

$$\nabla_k\varphi_{ij}-2\partial_k\lambda a_{ij}=-\lambda_i a_{kj}-\lambda_j a_{ik},$$

ანუ

$$\nabla_k(\varphi_{ij}-2\lambda a_{ij})=-\lambda_i a_{kj}-\lambda_j a_{ik}.$$

ალვნიშნოთ

$$\psi_{ij}=2\lambda a_{ij}-\varphi_{ij},$$

მივიღებთ:

$$\nabla_k\psi_{ij}=\lambda_i a_{kj}+\lambda_j a_{ki}, \tag{203}$$

ანუ

$$\nabla_k\psi_{ij}=B^m_{kij}\lambda_m, \tag{204}$$

სადაც

$$B^m_{kij}=\delta^m_i a_{kj}+\delta^m_j a_{ki}. \tag{205}$$

(204) განტოლების ინტეგრების პირობები მოგვცემს

$$\nabla_i\lambda_j=-\frac{K}{2}\psi_{ij}+\delta a_{ij}, \tag{206}$$

სადაც δ რაიმე სკალარია (ჯერჯერობით უცნობი). ამ უკანასკნელი განტოლების ინტეგრების პირობები მოგვცემს

$$\partial_i\delta=\varepsilon^{ki}a^s_j\frac{\partial_k K}{2}\psi_{is},$$

ნ, რაც იგივეა

$$\partial_i\delta=-\frac{1}{2}a^m_i K^n\psi_{mn}, \tag{207}$$

სადაც

$$K^n=\varepsilon^{ns}\partial_s K. \tag{208}$$

მრიგად, ზედაპირის გეოდეზიურად გადასახვადობის პირობები წარმოგვიდგება ემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ინტეგრების პირობების სახით:

$$\begin{aligned}&\nabla_k\psi_{ij}=B^m_{kij}\lambda_m,\\&\nabla_i\lambda_j=-\frac{K}{2}\psi_{ij}+\delta a_{ij},\\&\partial_i\delta=-\frac{1}{2}a^m_i K^n\psi_{mn}.\end{aligned} \tag{209}$$

ლონდ არ უნდა დავივიწყოთ, რომ ამ განტოლებათაგან პირველი განტოლების ტეგრების პირობები იძლევა მეორე განტოლებას, ხოლო მეორე განტოლების ტეგრების პირობები—მესამეს. ამრიგად, მესამე განტოლების, ე. ი. (207) გან- ოლების ინტეგრების პირობები იქნება მთელი (209) სისტემის ინტეგრების პი- ობები. (207) განტოლების გაწარმოება (აბსოლუტური) და ალტერნაცია (i, j მნაკების მიმართ) მოგვცემს:

$$a^m{}_{[i}\nabla_{j]}(K^n\psi_{mn})=0.$$

18 ა. ჩახტაური

ან, რაც იგივეა:

$$\varepsilon^{ij} a_i^m \nabla_j (K^n \psi_{mn}) = 0.$$

(204) განტოლების თანახმად, მივიღებთ:

$$(\varepsilon^{ij} a_i^m \nabla_j K^n) \psi_{mn} + \varepsilon^{ij} a_i^m K^n B_{jmn}^s \lambda_s = 0.$$

შევიტანოთ აქ B_{jmn}^s-ის მნიშვნელობა (205) ფორმულის მიხედვით. მცირე გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$a^{ms} \nabla_s K^n \psi_{mn} + 2K^n \lambda_n = 0. \tag{210}$$

ამ განტოლების აბსოლუტური გაწარმოება და (209) ტოლობათა გამოყენება მცირე გამარტივების შემდეგ მოგვცემს:

$$(a^{ms} \nabla_i \nabla_s K^n - KK^n \delta_i^m) \psi_{mn} +$$
$$+ (a^{ms} \nabla_s K^n B_{imn}^r + 2\nabla_i K^r) \lambda_r + 2K^n a_{in} \delta = 0.$$

შევიტანოთ აქ B_{imn}^r-ის მნიშვნელობა (205) ფორმულის მიხედვით. მცირე გამარტივების შემდეგ ეს განტოლება ასე გადაიწერება:

$$A_i^{mn} \psi_{mn} + B_i^m \lambda_m + 2K^n a_n^i \cdot \delta = 0, \tag{211}$$

სადაც

$$A_i^{mn} = a^{ms} \nabla_i \nabla_s K^n - KK^n \cdot \delta_i^m,$$
$$B_i^m = (a^{ms} a_{in} + 3\delta_i^s \delta_n^m) \nabla_s K^n. \tag{212}$$

(211) ტოლობის აბსოლუტური გაწარმოებითა და (209) განტოლებათა გამოყენებით მივიღებთ:

$$c_{ij}^{mn} \psi_{mn} + c_{ij}^m \lambda_m + c_{ij} \delta = 0, \tag{213}$$

სადაც

$$c_{ij}^{mn} = \nabla_j A_i^{mn} - \frac{1}{2} K B_i^m \delta_i^n - K^s a_{is}^i a_j^m K^n,$$

$$c_{ij}^m = A_i^{ks} B_{jks}^m + \nabla_j B_i^m, \tag{214}$$

$$c_j^i = B_i^s a_{sj} + 2a_{is} \nabla_j K^s.$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ექვსი, წრფივი და ერთგვაროვანი, ალგებრული განტოლება, ესენია: (216), (217) და (219) განტოლებები· უცნობთა რიცხვიც ექვსია; ესენია: ψ_{ij}, λ_i, δ. აღნიშნულ განტოლებათა ნულოვანი ამონახსნი, რომელიც ნებისმიერი ზედაპირისათვის არსებობს, გვაძლევს:

$$\psi_{ij} = 2\lambda a_{ij} - \varphi_{ij} = 0,$$

$$\lambda_i = \partial_i \lambda = 0,$$

$$\delta = 0.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\lambda = \text{const} = c,$$

$$\varphi_{ij} = 2c a_{ij}.$$

ეს კი წარმოადგენს, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, (147) განტოლების ტრივიალურ ამონახსნს და მას შეესაბამება ზედაპირის მსგავსი გარდაქმნა ან იზომეტრული დეფორმაცია (როცა $2c=1$). არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის კი საჭიროა (216), (217) და (219) განტოლებათა სისტემას ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია აღნიშნული სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი. ეს იქნება სწორედ ლიუვილის ზედაპირის დამახასიათებელი პირობა (ეს იქნება მხოლოდ აუცილებელი პირობა, საკმარისი პირობის დადგენა საჭიროებს კიდევ შემდგომ გამოკვლევას. ასეთი პირობა ამჟამად არ არსებობს).

პირთა საძიებელი[1]

საგანთა საძიებელი[2]

---

1 შეადგინა ა. კ ა ჭ ა რ ა ვ ა მ.

2 შეადგინა ა. ჩ ა ხ ტ ა უ რ მ ა.

შინაარსი

რედაქტორი გ. ჭოლოშვილი
გამომცემლობის რედაქტორი ა. კაჭარავა
ტექრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ც. მოლოდინი

გადაეცა წარმოებას 27/II-76
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 29/X-76
ქაღალდის ფორმატი $70 \times 108^{1}/_{16}$
ნაბეჭდი თაბახი 25,2
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 17,6

შეკვეთა 309 უე 06691 ტირაჟი 3000

~~ფასი 89 კაპ.~~ 2 მ

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028,
ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И .Чавчавадзе, 14.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, თბილისი 380028,
ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.

Чахтаури Адам Ильич

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1976