ე. წითლანაძე

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტ. II

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ე. წითლანაძე

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტომი III

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1981

მათემატიკური ანალიზის მესამე ტომი წარმოადგენს უკვე გამოცემული ორი ტომის გაგრძელებას და მომზადებულია უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. იგი შეიცავს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისა და ვარიაციათა აღრიცხვის თეორიასა და პრაქტიკუმს. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის, პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

რედაქტორი ა. სულაქველიძე
რეცენზენტები: ნ. კახნიაშვილი
ო. ნაფეტვარიძე

Ч $\frac{20203}{м\ 608(06)\text{-}81}$

წინასიტყვაობა

მესამე ტომი „მათემატიკური ანილიზის კურსისა" ძირითადად მოიცავს მასალას, რომელიც გათვალისწინებულია უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში და ვარიაციათა აღრიცხვაში.

მკითხველს მოეხსენება, რომ 1971 წლიდან მოყოლებული დღემდე უკვე გამოიცა მათემატიკური ანალიზის კურსის პირველი (1971 წ., მეორე გამოცემა 1976 წ.) და მეორე ტომი (1975 წ.) ვლ. ჭელიძისა და ე. წითლანაძის ავტორობით, რომლებმაც საკმაო დახმარება გაუწიეს ფიზიკის ფაკულტეტის პირველი და მეორე კურსის სტუდენტებს და არამარტო მათ.

თავდაპირველი ჩანაფიქრის მიხედვით, მათემატიკური ანალიზის მესამე ტომში, გარდა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისა და ვარიაციათა აღრიცხვისა, გადმოცემული უნდა ყოფილიყო აგრეთვე წრფივი ინტეგრალური განტოლებებისა და სპეციალური ფუნქციების თეორიის საკითხებიც. სამწუხაროდ, პროფ. ვლ. ჭელიძის მოულოდნელმა გარდაცვალებამ საშუალება მოგვისპო სახელმძღვანელოში ზემოაღნიშნული მასალა შეგვეტანა. მაგრამ, რაკი ულმობელმა მიზეზმა ხელიდან გამოგვაცალა

ხსენებული შესაძლებლობა, ვისურვოთ წინამდებარე სახით გამოცემულმა მესამე ტომმა ხელი შეუწყოს მოსწავლე ახალგაზრდობასა და კოლეგებში ბრწყინვალე მათემატიკოსისა და მასწავლებლის პროფ. ვლ. ჭელიძის ნათელი ხსოვნის განმტკიცებას.

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

თ ა ვ ი I

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. **ზოგიერთი განსაზღვრები.** ვთქვათ x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y=y(x)$—ამ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქცია, ხოლო

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

არის $y(x)$ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულები. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება არის x ცვლადსა, y ფუნქციასა და y', $y'', \ldots, y^{(n)}$ წარმოებულებს შორის დამოკიდებულება:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{1.1}$$

სადაც F არის ფრჩხილებში მითითებული არგუმენტების ფუნქცია. ჩავთვალოთ, რომ F ერთობლივ უწყვეტია თავისი არგუმენტებისა $n+2$ განზომილების სივრცის რომელიღაც (D) არეში. თუ $y=y(x)$ ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებული, რომელიც (1.1) დიფერენციალურ განტოლებაში მონაწილეობს, არის $y^{(n)}$, მაშინ დიფერენციალური განტოლება n რიგისაა. ცხადია, როცა $n=1$, მაშინ (1.1) დიფერენციალური განტოლება პირველი რიგისა იქნება. დიფერენციალური განტოლების ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ეწოდება ისეთ წარმოებად $y=y(x)$ ფუნქციას, რომელიც ამ განტოლებას იგივურად დააკმაყოფილებს. ინტეგრალების მოძებნის პროცესს ეწოდება დიფერენციალური გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა. თუ დიფერენციალური განტოლება n რიგისაა, მისი რიგი იგივე იქნება მაშინაც, როცა x, y, $y', \ldots, y^{(n-1)}$ არგუმენტებიდან ზოგიერთი (ან ყველა) განტოლებაში არ მონაწილეობს.

ავიღოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y')=0. \tag{1.2}$$

ვიგულისხმოთ, რომ იგი ამოიხსნება y'-ის მიმართ:

$$y'=f(x, y). \tag{1.2$'$}$$

უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლება ასეც ჩავწეროთ:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{1.2$''$}$$

სადაც $N(x, y)$ არის x და y არგუმენტების მოცემული ფუნქცია, ხოლო $M(x, y) = -N(x, y) f(x, y)$. დიფერენციალური განტოლება (1.2″) ისეა ჩაწერილი, რომ საჭიროების მიხედვით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ y, როგორც x-ის ფუნქცია ან x შეგვიძლია ჩავთვალოთ როგორც y-ის ფუნქცია. როგორც ვხედავთ, ყოველი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს (1.2), (1.2′) ან (1.2″) სახით.

ვიგულისხმოთ, რომ y არის x-ის ფუნქცია და განვიხილოთ (1.2′) განტოლების კერძო სახე:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.3}$$

რომლის ინტეგრალები, ცხადია, იქნება

$$y = \int f(x) dx + C \tag{1.4}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება მიიყვანება ერთი ინტეგრალის ან, როგორც ხშირად ამბობენ, ერთი კ ვ ა დ რ ა ტ უ რ ი ს გამოთვლაზე. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ (1.3) დიფერენციალური განტოლების ყველა ინტეგრალის ოჯახი დამოკიდებულია ერთ (სახელდობრ C) პარამეტრზე. ხშირად ყველა ინტეგრალის (1.4) ოჯახს უწოდებენ (1.3) დიფერენციალური განტოლების ზ ო გ ა დ ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ს. ნებისმიერი მუდმივი C ადვილად განისაზღვრება თუ ერთ-ერთ წერტილზე $x = x_0$ მოცემული იქნება (1.4) ტოლობით განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა $y(x_0) = y_0$. მართლაც, მაშინ გვექნება

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x) dx \tag{1.5}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია ე რ თ ა დ ე რ თ ი ა, რომელიც იგივურად დააკმაყოფილებს (1.3) დიფერენციალურ განტოლებას და $y(x_0) = y_0$ პირობას. (1.5) ტოლობით განსაზღვრულ ფუნქციას ეწოდება (1.3) დიფერენციალური განტოლების კ ე რ ძ ო ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი.

ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ (1.2′) განტოლების ყველა ინტეგრალის ოჯახიც (ე. ი. ზოგადი ინტეგრალიც) ერთ ნებისმიერ მუდმივზეა დამოკიდებული. თუ მოვითხოვთ, რომ (1.2′) განტოლების ინტეგრალი $y_0 = y(x_0)$ პირობასაც აკმაყოფილებს, მაშინ იგი იქნება ერთადერთი.

§ 2. **მაგალითები.** ფიზიკისა და მათემატიკის მრავალი ამოცანის გამოკვლევა მიიყვანება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე. მოვიყვანოთ მაგალითები.

1. ვთქვათ მყარი სხეული გაცხელებულია T_0 გრადუსამდე. შევიტანოთ იგი 0°-ტემპერატურიან გარემოში. სხეულის ტემპერატურა დაიწყებს

დაცემას. შევისწავლოთ სხეულის გაცივების რეჟიმი. ეს იმას ნიშნავს, რომ საჭიროა ავაგოთ t დროზე დამოკიდებული ფუნქცია $T=T(t)$, რომელიც მოგვცემს სხეულის ტემპერატურას გაცივების ნებისმიერ t მომენტში. ცხადია, $T(t)$ არის კლებადი ფუნქცია და ამიტომ $\frac{dT}{dt}<0$. თუ გავიხსენებთ, რომ გაცივების სიჩქარე მიმდინარეობს სხეულის ტემპერატურის პროპორციული კანონით, მაშინ გვექნება

$$\frac{dT}{dt}=-kT, \tag{2.1}$$

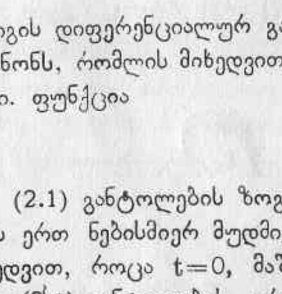
სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია.

ტოლობა (2.1) წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას და გამოსახავს დიფერენციალურ კანონს, რომლის მიხედვითაც მიმდინარეობს ტემპერატურის დაცემა სხეულში. ფუნქცია

$$T=e^{-kt+C}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, წარმოადგენს (2.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს. როგორც ვხედავთ, იგი შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს. ამოცანის პირობის (საწყისი პირობის) მიხედვით, როცა $t=0$, მაშინ $T_0=T(0)$ და, მაშასადამე $C=\ln T_0$. ამრიგად, (2.1) განტოლების კერძო ინტეგრალი $T=T_0e^{-kt}$ გვაძლევს სხეულის გაცივების რეჟიმს. როგორც ვხედავთ, სხეულის გაცივება მიმდინარეობს ექსპონენციალური კანონით.

2. შევისწავლოთ მატერიალური M წერტილის თავისუფალი ვარდნის კანონი, რომელიც მოძრაობს დედამიწის მიზიდულობის ძალის მოქმედებით. ამისათვის Oy ღერძის დადებითი მიმართულება ავიღოთ ვერტიკალურად ზევით, ხოლო კოორდინატთა სათავე O მოვათავსოთ დედამიწის ზედაპირზე (ნახ. 1). საჭიროა წერტილის მდებარეობის გამომსახველი კოორდინატი y გამოვსახოთ როგორც t დროის ფუნქცია $y=y(t)$. ვთქვათ ვარდნის საწყის მომენტში, ე. ი. როცა $t=0$, მოძრავი წერტილის საწყისი კოორდინატია $y=y_0$, ხოლო საწყისი სიჩქარე უდრის



ნახ. 1.

$v_0=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$. როგორც ვიცით, M წერტილის აჩქარება ნებისმიერ t მომენტში გამოისახება y კოორდინატის მეორე რიგის წარმოებულით

$\frac{d^2y}{dt^2}$. ისიც ცნობილია, რომ მატერიალური წერტილის თავისუფალი ვარდნის აჩქარება დედამიწის მახლობლობაში მუდმივია, უდრის g-ს $\left(g \approx 981 \frac{სმ}{სეკ^2}\right)$ და მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ. ამრიგად, მართებულია ტოლობა

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g, \tag{2.2}$$

რომელიც წარმოადგენს M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას უცნობი (საძიებელი) $y = y(t)$ ფუნქციით. როგორც ვხედავთ, (2.2) არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება. თუ (2.1) განტოლებას ასე გადავწერთ:

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g dt$$

და უკანასკნელ ტოლობას გავაინტეგრალებთ, გვექნება

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1 \tag{2.3}$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. ხშირად, უკანასკნელ გამოსახულებას უწოდებენ (2.2) დიფერენციალური განტოლების პირველ ინტეგრალს. გადავწეროთ (2.3) განტოლება შემდეგნაირად:

$$dy = -gtdt + C_1 dt$$

და უკანასკნელი ტოლობა გავაინტეგრალოთ, მივიღებთ

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2, \tag{2.4}$$

სადაც C_2 ნებისმიერი მუდმივია. ასეთია (2.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. იგი შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივს (ე. ი. ზოგად ინტეგრალში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვი უდრის დიფერენციალური განტოლების რიგს). გამოვიყენებთ რა საწყის პირობებს, (2.3) და (2.4) ტოლობებიდან გვექნება:

$$C_1 = v_0, \; C_2 = y_0$$

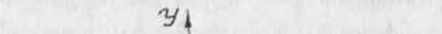
ახლა (2.4) ტოლობიდან დავწერთ

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0, \tag{2.5}$$

რომელიც (2.2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალია. ეს ინტეგრალი აკმაყოფილებს საწყის პირობებსაც. ტოლობა (2.5) გამოსახავს

წერტილის მოძრაობის (ვარდნის) სასრულ კანონს, რომლის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ M წერტილის დაშორება y დედამიწის ზედაპირიდან და სიჩქარე $v=-gt+v_0$ ნებისმიერ მომენტში t.

§ 3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების გეომეტრიული შინაარსი. ვთქვათ (x, y) წერტილის კოორდინატებია xOy სიბრტყეზე, ხოლო (D)—არე, რომელშიც განსაზღვრულია (1.2′) განტოლებაში შემავალი $f(x, y)$ ფუნქცია. თუ $y=y(x)$ არის (1.2′) განტოლების ინტეგრალი (ანუ ინტეგრალური წირი), მაშინ $y'=\frac{dy}{dx}$ იქნება იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც ინტეგრალური წირის (x, y) წერტილში გავლებული მხები შეადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ეს იმას ნიშნავს, რომ (1.2′) განტოლება (D) არის ყოველ (x, y) წერტილს შეუსაბამებს გარკვეულ მიმართულებას. ყველა ამ მიმართულებათა სიმრავლეს უწოდებენ (1.2′) დიფერენციალური განტოლებით განსაზღვრულ *მიმართულებათა ველს*. მიმართულებათა ველი რომ ავაგოთ, საკმარისია



ნახ. 2.

$V(x, y) \in (D)$ წერტილიდან გავავლოთ ვექტორი, რომელიც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შეადგენს $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ კუთხეს. ვინაიდან $\operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ კუთხეს განსაზღვრავს π რიცხვის ჯერადობის სიზუსტით, ამიტომ (x, y) წერტილზე გავლებული ვექტორის დადებითი მიმართულება შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად.

(1.2′) განტოლების ინტეგრალი $y=y(x)$, რომელიც $(x_0, y_0) \in (D)$ წერტილზე გაივლის, ისეთი წირია, რომლის ნებისმიერ წერტილზე გავ-

ლებული მხები დიფერენციალური განტოლების მიმართულებათა ველის პარალელურია.

ბრტყელ წირებს, რომელთა განტოლებაა $f(x, y)=\mu$, სადაც μ მუდმივია, უწოდებენ (1.2′) დიფერენციალური განტოლების **იზოკლინებს**.

მაგალითი. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$y'=x^2+y^2. \tag{3.1}$$

ამ განტოლებით განსაზღვრული მიმართულებათა ველი იქნება

$$x^2+y^2=\mu^2,$$

სადაც $\mu\neq 0$. უკანასკნელი ტოლობით განსაზღვრულია კონცენტრიული წრეწირები, რომელთა ცენტრია კოორდინატთა სათავე.

ადვილი სანახავია, რომ (3.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირებს მიახლოებით ექნებათ სახე, რომელიც ნაჩვენებია მე-2 ნახაზზე.

§ 4. დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით. დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით კერძო სახეა (1.2″) განტოლებისა. სახელდობრ, დავუშვათ (1.2″) განტოლებაში, რომ ფუნქცია $M(x, y)=P(x)$ არის მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია, ხოლო ფუნქცია $N(x, y)=Q(y)$ არის მხოლოდ y ცვლადის ფუნქცია. მაშინ განტოლება (1.2″) ასე ჩაიწერება:

$$P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0, \tag{4.1}$$

რომელსაც უწოდებენ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით.

ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს

$$d\varphi(x, y)=\int P(x)dx+\int Q(y)dy$$

ფუნქციის სრულ დიფერენციალს და რაკი $d\varphi(x, y)=0$, ამიტომ

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C, \tag{4.2}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. როგორც ვხედავთ, როცა საქმე გვაქვს დიფერენციალურ განტოლებასთან განცალებული ცვლადებით, მაშინ მისი ინტეგრება შესრულდება ორი კვადრატურით. ფუნქცია (4.2) წარმოადგენს (4.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

მაგალითი. განტოლებაში

$$xdx+ydy=0$$

ცვლადები განცალებულია. ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ: $x^2+y^2=c^2$. მაშასადამე, ინტეგრალური წირები წრეწირების ოჯახია, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა.

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

§ 5. დიფერენციალური განტოლება, რომელიც მიიყვანება განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით. განვიხილოთ ერთი კლასი დიფერენციალური განტოლებებისა, რომელთა ინტეგრება ადვილად მიიყვანება ინტეგრებაზე დიფერენციალური განტოლებისა განცალებული ცვლადებით.

ვთქვათ, (1.2″) განტოლებაში კოეფიციენტები $M(x, y)=M_1(x)N_2(y)$ და $N(x, y)=M_2(x)N_1(y)$, სადაც $M_1(x)$ და $M_2(x)$ არიან x-ის მოცემული ფუნქციები, ხოლო $N_1(y)$ და $N_2(y)$ არიან y-ის მოცემული ფუნქციები. მაშინ გვექნება

$$M_1(x)N_2(y)\,dx+M_2(x)N_1(y)\,dy=0. \tag{5.1}$$

ყოველი დიფერენციალური განტოლება (5.1) სახისა შეიძლება დავიყვანოთ განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით. ამისათვის საკმარისია გავყოთ (5.1) განტოლების ორივე ნაწილი $M_2(x)N_2(y)$ ნამრავლზე, მივიღებთ

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_1(y)}{N_2(y)}\,dy=0. \tag{5.2}$$

რადგან უკანასკნელ განტოლებაში dx დიფერენციალის კოეფიციენტი $\dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}$ არის მხოლოდ x ცვლადის ფუნქცია, ისევე როგორც dy დიფერენციალის კოეფიციენტი $\dfrac{N_1(y)}{N_2(y)}$ არის მხოლოდ y ცვლადის ფუნქცია, ამიტომ (5.2) არის დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით. მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\int\frac{N_1(y)}{\mathrm{N}_2(g)}\,dy=C, \tag{5.3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვინაიდან ზევით (5.1) განტოლება $M_2(x)N_2(y)$ ნამრავლზე გავყავით, ამიტომ შესაძლოა დავკარგოთ ამ განტოლების ზოგიერთი ინტეგრალი. სახელდობრ, დაიკარგება ის ინტეგრალები, რომლებისთვისაც (თუ ასეთი ინტეგრალები არსებობენ) $M_2(x)=0$ ან $N_2(y)=0$. მართლაც, თუ $x=a$ არის $M_2(x)=0$ განტოლების ფესვი $M_2(a)=0$, მაშინ $x=a$, როგორც ადვილი სანახავია, იქნება (5.1) განტოლების ერთ-ერთი ინტეგრალი. თუ $y=b$ არის $\mathrm{N}_2(y)=0$ განტოლების ფესვი $N_2(b)=0$, მაშინ $y=b$ არის აგრეთვე (5.1) განტოლების ერთ-ერთი ინტეგრალი. იმ შემთხვევაში, როცა $x=a$ ინტეგრალის მიღება შეიძლება (5.3) ზოგადი ინტეგრალიდან C მუდმივის რაიმე კერძო მნიშვნელობისათვის, მაშინ იგი იქნება (5.1) განტოლების ერთ-ერთი კერძო ინტეგრალი. თუკი ინტეგრალი $x=a$ არ მიიღება (5.3) ზოგადი ინტეგრალიდან C მუდმივის არც-

ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის, მაშინ $x=a$ არის (5.1) განტოლების ე. წ. განსაკუთრებული ინტეგრალი. იგივე ითქმის $y=b$ ინტეგრალის შესახებაც.

მაგალითი. ავიღოთ განტოლება

$$(xy+x-y-1)\,dx+(xy-x+y-1)\,dy=0, \tag{5.4}$$

რომელიც, როგორც ვხედავთ, არ არის დიფერენციალური განტოლება (4.1) სახისა, მაგრამ თუ მას ასე გადავწერთ

$$(x-1)(y+1)\,dx+(x+1)(y-1)\,dy=0,$$

მაშინ იგი (5.1) განტოლების ყაიდისა იქნება. გავყოთ უკანასკნელი განტოლება $(x+1)(y+1)$ ნამრავლზე და შედეგი გავაინტეგრალოთ, გვექნება

$$\int\frac{x-1}{x+1}\,dx+\int\frac{y-1}{y+1}\,dy=C,$$

ე. ი.

$$x+y-\ln[(x+1)(y+1)]^2=C, \tag{5.5}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. ასეთია (5.4) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. შევნიშნოთ, რომ განტოლებას (5.4), გარდა წირთა (5.5) ოჯახისა, აქვს განსაკუთრებული ინტეგრალები $x=-1$ და $y=-1$.

§ 6. დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ცვლადების გარდაქმნით მიიყვანება განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით. გავეცნოთ დიფერენციალური განტოლებების კიდევ ერთ კლასს, რომელიც ცვლადების გარდაქმნით მიიყვანება (4.1) სახის განტოლებაზე.

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by), \tag{6.1}$$

სადაც f არის $ax+by$ არგუმენტის მოცემული ფუნქცია, ხოლო a და b მუდმივებია. ამ განტოლების ინტეგრება მიიყვანება ისეთი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე, რომელშიც ცვლადები განცალებული იქნება. მართლაც, გადავიდეთ (6.1) განტოლებაში x და y ცვლადებიდან x და z ცვლადებზე ჩასმის $z=ax+by$ დახმარებით. გვექნება

$$\frac{dz}{dx}=a+b\,\frac{dy}{dx}$$

და, მაშასადამე, (6.1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{dz}{dx}=a+b\,\frac{dy}{dx},$$

საიდანაც

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით, რომლის ინტეგრებით გვექნება

$$x=\int\frac{dz}{a+bf(z)}+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას

$$\varphi(z)=\int\frac{dz}{a+bf(z)},$$

მაშინ (6.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება:

$$x=\varphi(ax+by)+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=x+y$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $z=x+y$, მაშინ გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

და მოცემული განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dz}{dx}=1+z.$$

აქედან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით

$$\frac{dz}{z+1}=dx.$$

ინტეგრების შემდეგ გვექნება $\ln|z+1|=x+\ln C$, სადაც C აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს. უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს $y=Ce^x-x-1$.

§ 7. პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. განტოლებას

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{7.1}$$

ეწოდება პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ფუნქცია $f(x, y)$ არის ერთგვაროვანი ფუნქცია, რომლის ერთგვაროვნების მაჩვენებელია 0. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი პარამეტ-

რისათვის λ მართებულია ტოლობა $f(\lambda x, \lambda y)=f(x, y)$. ხშირად $f(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს უკანასკნელ პირობას, უწოდებენ ნული რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას. თუ დავუშვებთ, რომ $\lambda=\frac{1}{x}$, გვექნება $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=f(x, y)$. როგორც ვხედავთ, როცა $f(x, y)$ არის ნულის რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, მაშინ იგი ფაქტიურად დამოკიდებულია არგუმენტების შეფარდებაზე. ახლა განტოლება (7.1) ასე ჩავწეროთ

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{7.1'}$$

ადვილი სანახავია, რომ ჩასმით $y=tx$ განტოლება (7.1′) მიიყვანება დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით, სადაც t ახალი ცვლადია. მართლაც, გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=t+\frac{dt}{dx}x$$

და განტოლება (7.1′) ასე წარმოგვიდგება

$$t+\frac{dt}{dx}x=f(1, t).$$

აქედან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{f(1, t)-t},$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln|x|+C=\int\frac{dt}{f(1, t)-t}$$

და სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. აღვნიშნოთ

$$\psi(t)=\int\frac{dt}{f(1, t)-t},$$

გვექნება

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right)=\ln|x|+C.$$

ასეთია პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}. \tag{7.2}$$

მარჯვენა ნაწილი ამ დიფერენციალური განტოლებისა წარმოადგენს ნული რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას. გამოვიყენებთ რა ჩასმას $y=tx$, გვექნება

$$t+x\frac{dx}{dt}=\frac{t}{1-t^2},$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით:

$$\frac{1-t^2}{t^3}dt=\frac{dx}{x}.$$

აქედან, ინტეგრების შემდეგ, მივიღებთ

$$-\frac{1}{2t^2}-\ln|t|=\ln|x|+\ln|C| \quad \text{ანუ} \quad \ln|Ctx|=-\frac{1}{2t^2}$$

და რადგან $t=\frac{y}{x}$, ამიტომ (7.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი საბოლოოდ ასე ჩაიწერება:

$$\ln|Cy|=-\frac{x^2}{2y^2}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განტოლება

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{7.3}$$

ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება იქნება მაშინ, როცა $M(x, y)$ და $N(x, y)$ არის ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციები. მართლაც, გადავწეროთ (7.3) განტოლება შემდეგი სახით:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}. \tag{7.3'}$$

რადგან $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ამიტომ

$$M(\lambda x, \lambda y)=\lambda^k M(x, y),\ N(\lambda x, \lambda y)=\lambda^k N(x, y)$$

და, მაშასადამე, შეფარდება $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ იქნება ნული რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია. განტოლება (7.3′) ამოიხსნება ისევე, როგორც (7.1′).

§ 8. განტოლება, რომელიც მიიყვანება ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებამდე. განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}, \tag{8.1}$$

სადაც a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 მოცემული ნამდვილი რიცხვებია. თუ $c_1=c_2=0$, მაშინ (8.1) არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნის მეთოდი წინა პარაგრაფში შევისწავლეთ.

ვთქვათ c_1 და c_2 რიცხვები (ან ერთ-ერთი მათგანი) არ არის ნულის ტოლი. მივმართოთ ცვლადთა გარდაქმნას:

$$x=\xi+\alpha,\ y=\eta+\beta \tag{8.2}$$

სადაც ξ და η ახალი ცვლადებია, α და β ჯერჯერობით უცნობი მუდმივებია. მაშინ, ცხადია $\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$ და, (8.1) განტოლებიდან, გვექნება

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2\xi+b_2\eta+a_2\alpha+b_2\beta+c_2}. \tag{8.3}$$

ახლა, აქამდე უცნობი მუდმივები α და β შევარჩიოთ შემდეგი ალგებრული განტოლებების სისტემიდან:

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0, \end{cases}$$

რომელსაც უსათუოდ აქვს ერთადერთი სასრული ამონახსნი თუ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{8.4}$$

ამრიგად, როცა შესრულებულია პირობა (8.4), მაშინ (8.3) განტოლებიდან მივიღებთ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta},$$

რომელიც განხილული იყო წინა პარაგრაფში. შევნიშნოთ, რომ როცა უკანასკნელი განტოლების ამოხსნას დავასრულებთ, საჭიროა (8.2) ტოლობების საშუალებით, დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადებს x და y.

ვთქვათ $\Delta=0$. მაშინ $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$, ე. ი. $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$. ამ შემთხვევაში განტოლება (8.1) ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a_1x+b_1y)+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}. \tag{8.5}$$

თუ აქ გამოვიყენებთ ჩასმას $z=a_1x+b_1y$, მაშინ $\frac{dz}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx}-\frac{a_1}{b_1}$ და (8.5) მიიყვანება განტოლებაზე

$$dx=\frac{(c_2+\lambda z)\,dz}{(a_2\lambda+b_1)z+a_1c_2+b_1c_1},$$

რომელიც ამოიხსნება ისე, როგორც დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ავიღოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

სადაც f არის მისი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქცია. ამ განტოლების ამოხსნის მეთოდი იგივეა, როგორც (8.1) დიფერენციალური განტოლებისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-2}{x-y-1}. \tag{8.6}$$

ამისათვის ავიღოთ ცვლადების გარდაქმნა (8.2), მაშინ მივიღებთ

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta+\alpha+\beta-2}{\xi-\eta+\alpha-\beta-1}. \tag{8.7}$$

2399/2

შევარჩიოთ α და β მუდმივები სისტემიდან

$$\begin{cases}\alpha+\beta-2=0,\\ \alpha-\beta-1=0,\end{cases}$$

საიდანაც $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$. ამის შემდეგ (8.7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\zeta-\eta}=\frac{1+\frac{\eta}{\xi}}{1-\frac{\eta}{\xi}} \tag{8.8}$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $\eta=t\xi$. მაშინ, ცხადია $\frac{d\eta}{d\xi}=t+\xi\frac{dt}{d\xi}$ და განტოლება (8.8) მიიღებს სახეს

$$\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1-t}{1+t^2}dt,$$

რომელიც წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით. უკანასკნელის ინტეგრებით მივიღებთ

$$C\xi\sqrt{1+t^2}=e^{\operatorname{arc\,tg} t},$$

საიდანაც, x და y ცვლადებზე გადასვლის შემდეგ, გვექნება

$$C\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{2x-1}}.$$

აქ C ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობა განსაზღვრავს (8.6) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

§ 9. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. პირველი რიგის არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y+Q(x)=0 \tag{9.1}$$

სახის განტოლებას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ არის x ცვლადის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები. იგი წრფივია y-ისა და $\frac{dy}{dx}$-ის მიმართ. კერძოდ, როცა $Q(x)\equiv 0$. მაშინ გვექნება

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=0, \tag{9.2}$$

რომელსაც (9.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება. უკანასკნელი ადვილად მიიყვანება დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)\,dx,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln y=-\int P(x)\,dx+\ln C,$$

საიდანაც

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{9.3}$$

C ნებისმიერი მუდმივია. ასეთია ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, რომელიც მოიძებნება ერთი კვადრატურით. იმისათვის, რომ მოვძებნოთ (9.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, მივმართოთ ე. წ. მუდმივის ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის ხერხს. ჩავთვალოთ, რომ (9.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალიც (9.3) სახისაა, რომელშიც C არის x ცვლადზე დამოკიდებული ჯერჯერობით უცნობი ფუნქცია: $C=C(x)$ და ისე შევარჩიოთ იგი, რომ (9.3) იყოს (9.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ამისათვის ჩავსვათ ფუნქცია

$$y=C(x)\,e^{-\int P(x)dx} \tag{9.4}$$

და მისი წარმოებული (9.1) განტოლებაში, გამარტივების შემდეგ, გვექნება

$$\frac{dC(x)}{dx}\,e^{-\int P(x)dx}+Q(x)=0,$$

ანუ

$$\frac{dC(x)}{dx} = -Q(x)\, e^{\int P(x)dx},$$

საიდანაც განისაზღვრება ფუნქცია

$$C(x) = -\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + C_1.$$

აქ C_1 ნებისმიერი მუდმივია. შევიტანოთ $C(x)$ ფუნქციის მოძებნილი მნიშვნელობა (9.4) ტოლობაში, მივიღებთ

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C_1 - \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx\right] \tag{9.5}$$

როგორც ვხედავთ, პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება ორი კვადრატურით.

არსებობს კიდევ სხვა ხერხები (9.1) განტოლების ინტეგრებისა.

მაგალითი. მოვძებნოთ

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x - 2x \sin x = 0$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

თანახმად (9.5) ფორმულისა, გვექნება

$$y = e^{\int \operatorname{ctg} x\, dx}\left(C_1 + 2\int x \sin x\, e^{-\int \operatorname{ctg} x\, dx} dx\right),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$y = (C_1 + x^2)\sin x.$$

§ 10. წრფივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალების თვისებები. შევნიშნოთ, რომ (9.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შედგება ორი შესაკრებისაგან:

$$C_1 e^{-\int P(x)dx} \quad \text{და} \quad -e^{-\int P(x)dx}\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx.$$

პირველი შესაკრები წარმოადგენს ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ინტეგრალს, ხოლო მეორე—არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალს, რომელიც მიიღება ზოგადი (9.5) ინტეგრალიდან, როცა $C_1 = 0$.

ამასთან დაკავშირებით მართებულია

თეორემა 1. თუ ცნობილია (9.1) განტოლების ერთი კერძო ინტეგრალი, მაშინ განტოლება (9.1) შეიძლება მივიყვანოთ ერთგვაროვან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე.

დამტკიცება. შემოვიყვანოთ $y = y(x)$ ფუნქციის ნაცვლად ახალი უცნობი ფუნქცია $z = z(x)$ შემდეგი ტოლობით:

$$y = \bar{y}(x) + z(x), \tag{10.1}$$

სადაც $\overline{y}=\overline{y}(x)$ არის (9.1) განტოლების ცნობილი კერძო ინტეგრალი:

$$\frac{d\overline{y}}{dx}+P(x)\overline{y}+Q(x)=0. \tag{10.2}$$

შევიტანოთ (10.1) ფუნქცია (9.1) განტოლებაში, გვექნება

$$\frac{d\overline{y}}{dx}+P(x)\overline{y}+\frac{dz}{dx}+P(x)z+Q(x)=0,$$

საიდანაც, თანახმად (10.2) იგივეობისა, მივიღებთ

$$\frac{dz}{dx}+P(x)z=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ როცა ცნობილია არაერთგვაროვანი (9.1) განტოლების ერთი კერძო ინტეგრალი, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად საკმარისია შევასრულოთ ერთი კვადრატურა.

შევნიშნოთ ისიც, რომ თუ $y^*=y^*(x)$ არის ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება $Cy^*(x)$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

თეორემა 2. თუ ცნობილია (9.1) განტოლების ორი კერძო ინტეგრალი $y_1=y_1(x)$ და $y_2=y_2(x)$, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$y=y_1(x)+C[y_2(x)-y_1(x)], \tag{10.3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

დამტკიცება. პირობის თანახმად, გვაქვს

$$\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1+Q(x)\equiv 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx}+P(x)y_2+Q(x)\equiv 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{d(y_2-y_1)}{dx}+P(x)(y_2-y_1)=0.$$

ამ იგივეობიდან ჩანს, რომ ფუნქცია y_2-y_1 წარმოადგენს ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალს. ამის გამო $C(y_2-y_1)$ იქნება ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. მაშინ (9.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება (10.3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციათა ოჯახი. თეორემა დამტკიცებულია.

აქედან გამომდინარეობს, როცა ცნობილია არაერთგვაროვანი განტოლების ორი კერძო ინტეგრალი, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალი დაიწერება კვადრატურების გარეშე.

§ **11. ბერნულის განტოლება.** განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^m=0, \tag{11.1}$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ არის x ცვლადის მოცემული ფუნქციები, m-ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი. როცა $m=0$, მაშინ იგი წარმოადგენს (9.1) განტოლებას, ხოლო როცა $m=1$, მაშინ

$$\frac{dy}{dx}+R(x)\,y=0,$$

სადაც $R(x)=P(x)+Q(x)$. უკანასკნელი განტოლება არის მეცხრე პარაგრაფში შესწავლილი (9.2) ყაიდის დიფერენციალური განტოლება. ქვევით გამოვრიცხავთ განხილვიდან $m=0$ და $m=1$ მნიშვნელობებს. (11.1) წარმოადგენს იაკობ ბერნულის დიფერენციალურ განტოლებას. რადგან განტოლებაში მონაწილეობს უცნობი ფუნქციის ხარისხი y^m და $m\neq 0$ და $m\neq 1$, ამიტომ ბერნულის განტოლება არაწრფივია. შევნიშნოთ, რომ $y=0$ არის (11.1) განტოლების ერთ-ერთი კერძო ინტეგრალი, რომელსაც უწოდებენ ტრივიალურ ინტეგრალს. ქვევით ჩვენ მოვძებნით ბერნულის განტოლების არატრივიალურ ინტეგრალებს.

ბერნულის განტოლების ინტეგრება მიიყვანება წრფივი განტოლების ინტეგრებაზე. ამისათვის საკმარისია გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$y^{-m}\frac{dy}{dx}+P(x)\,y^{1-m}+Q(x)=0$$

და შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქცია $z=y^{1-m}$, მაშინ გვექნება

$$\frac{dz}{dx}=(1-m)\,y^{-m}\frac{dy}{dx}$$

და განტოლება (11.1) ასე გადაიწერება:

$$\frac{dz}{dx}+(1-m)\,P(x)\,z+(1-m)\,Q(x)=0.$$

უკანასკნელი წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგადი ინტეგრალი, თანახმად (9.5) ფორმულისა, იქნება

$$z=e^{-(1-m)\int P(x)dx}\left[C-(1-m)\int Q(x)\,e^{(1-m)\int P(x)dx}dx\right].$$

ამრიგად, ბერნულის განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C-(1-m)\int Q(x)\,e^{(1-m)\int P(x)dx}dx\right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (11.3)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$y'+2y-e^{x}y^{2}=0$$

ეს ბერნულის განტოლებაა, რომელშიც $P(x)=2$, $Q(x)=-e^{x}$. გამოვიყენოთ ფორმულა (11.3), მივიღებთ

$$y=(e^{x}+Ce^{2x})^{-1}.$$

§ **12. სტეკლოვის განტოლება.** ასე ეწოდება შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$[\varphi_1(y)+x\varphi_2(y)]\frac{dy}{dx}+\varphi_3(y)=0, \quad (12.1)$$

სადაც φ_1, φ_2, φ_3 არიან y ცვლადის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები და $\varphi_3(y)\neq0$. ამ განტოლების ინტეგრება მიიყვანება წრფივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. მართლაც, გადავწეროთ (12.1) განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{dx}{dy}+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_3(y)}x+\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_3(y)}=0. \quad (12.2)$$

ჩავთვალოთ, რომ x არის საძიებელი ფუნქცია y ცვლადისა, ხოლო y არის დამოუკიდებელი ცვლადი; მაშინ (12.2) იქნება წრფივი დიფერენციალური განტოლება უცნობი x ფუნქციის მიმართ. თანახმად (9.5) ფორმულისა, ზოგადი ინტეგრალი (12.1) განტოლებისა, იქნება

$$x=e^{-\int\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(y)}dy}\left[C-\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_3(y)}e^{\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_3(y)}dy}dy\right],$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. კვადრატურების შესრულების შემდეგ მივიღებთ $x=\varphi(y, C)$, სადაც φ იქნება თავისი არგუმენტების ცნობილი ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$(x+y^{2})\frac{dy}{dx}-y=0. \quad (12.3)$$

გადავწეროთ იგი ასე

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x-y=0. \quad (12.4)$$

თუ x ჩავთვლით საძიებელ ფუნქციად, მაშინ (12.4) წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას უცნობი x ფუნქციის მიმართ, რომლის ამოხსნა მოგვცემს

$$x=e^{-\int \frac{dy}{y}}\left(C+\int ye^{\int \frac{dy}{y}} dy \right)= \frac{C}{y}+\frac{1}{3}y^2.$$

ამრიგად, (12.3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$y^3-3xy=C_1,$$

სადაც $C_1=-3C$.

§ 13. **განტოლება სრულ დიფერენციალებში.** ვიტყვით, რომ

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{13.1}$$

არის დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში, თუ კოეფიციენტები $M=M(x, y)$ და $N=N(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია და აქვთ კერძო წარმოებულები გარკვეულ (D) არეში, ამასთან შესრულებულია პირობა

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{13.2}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $(x_0, y_0)\in(D)$ წერტილის რაიმე მიდამოში არსებობს (13.1) განტოლების ინტეგრალი.

ტოლობა (13.2) არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (13.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი იყოს რაღაც $U=U(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი. დავამტკიცოთ ეს წინადადება.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ $U(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი წარმოადგენს (13.1) განტოლების მარცხენა ნაწილს, მაშინ $dU(x, y)=0$ და (13.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$U=U(x, y)=C, \tag{13.3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

დავამტკიცოთ ჯერ (13.2) პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ (13.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი არის U ფუნქციის სრული დიფერენციალი. მაშინ, გვექნება

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=M\,dx+Ndy,$$

საიდანაც

$$M=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad N=\frac{dU}{dy} \tag{13.4}$$

გავაწარმოვოთ (13.4) ტოლობებიდან პირველი y ცვლადით, ხოლო მეორე — x ცვლადით, მივიღებთ

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ წარმოებულები $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ და $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ უწყვეტი ფუნქციებია (D) არეში, მაშინ წინა ტოლობებიდან მივიღებთ (13.2).

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ამისათვის ჩავთვალოთ, რომ შესრულებულია (13.2) პირობა. გავაინტეგრალოთ (13.4) ტოლობებიდან პირველი x ცვლადით საზღვრებში x_0-დან x-მდე, გვექნება

$$U=\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,dx+\varphi(y), \tag{13.5}$$

სადაც $\varphi(y)$ არის ჯერჯერობით განუსაზღვრელი y ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქცია. იგი წარმოიქმნება იმის გამო, რომ (13.5) ტოლობაში ინტეგრება შესრულებულია x ცვლადით და შესაძლოა ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივი დამოკიდებული იყოს y-ზე. ფუნქცია $\varphi(y)$ ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ფუნქცია U აკმაყოფილებდეს (13.4) ტოლობათაგან მეორესაც, ე. ი.

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N.$$

რადგან შესრულებულია პირობა (13.2), ამიტომ აქედან მივიღებთ

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}\,dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N,$$

ე. ი.

$$N(x,\ y)-N(x_0,\ y)+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,\ y),$$

საიდანაც გვექნება

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x_0,\ y)$$

და

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)\,dy+C_1,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. შევიტანოთ $\varphi(y)$ ფუნქციის მნიშვნელობა (13.5) ტოლობაში, მივიღებთ

$$U=\int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)\,dy+C_1. \tag{13.6}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული $U=U(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი არის (13.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ახლა ცხადია, რომ (13.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$U=\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy=C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$2xydx+(x^2-y^2)dy=0. \tag{13.7}$$

აქ

$$M(x, y)=2xy,\ N(x, y)=x^2-y^2,\ \frac{\partial M}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x.$$

ამრიგად, (13.7) არის დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში. რადგან

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy$$

ამიტომ

$$U(x, y)=x^2y+\varphi(y).$$

განვსაზღვროთ ფუნქცია $\varphi(y)$. გვაქვს

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+\frac{d\varphi(y)}{dy}=x^2-y^2,$$

საიდანაც

$$\frac{d\varphi}{dy}=-y^2 \quad \text{და} \quad \varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+C.$$

მაშასადამე, (13.7) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება ფუნქცია

$$U(x, y)=x^2y-\frac{1}{3}y^3=C.$$

§ 14. მაინტეგრებელი მამრავლი. ზოგჯერ, როცა

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{14.1}$$

არ წარმოადგენს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში, ადვილად ხერხდება შერჩევა ისეთი $\mu=\mu(x, y)$ ფუნქციისა, რომელზედაც (14.1) განტოლების გამრავლების შემდეგ იგი გადაიქცევა განტოლებად სრულ დიფერენციალებში. ასეთ ფუნქციას ეწოდება მ ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ე ლ ი მ ა მ რ ა ვ ლ ი. ამრიგად, როცა μ მაინტეგრებელი მამრავლია, მაშინ დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\mu(Mdx+Ndy)=0 \tag{14.2}$$

არსებობს ისეთი ფუნქცია $U=U(x, y)$, რომ მართებულია ტოლობები

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\mu N.$$

მტკიცდება, რომ თუ დაკმაყოფილებულია გარკვეული პირობები, მაშინ (14.1) განტოლებას უსათუოდ აქვს მაინტეგრებელი მამრავლი $\mu \neq 0$.

რადგან (14.2) განტოლების მარცხენა ნაწილი სრული დიფერენციალია, ამიტომ შესრულებული იქნება პირობა

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

ანუ

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y}-N \frac{\partial \mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right) \mu. \tag{14.3}$$

ასეთია განტოლება, საიდანაც უნდა განისაზღვროს მაინტეგრებელი მამრავლი μ. (14.3) წარმოადგენს კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას საძიებელი μ ფუნქციის მიმართ. საზოგადოდ, μ ფუნქციის განსაზღვრა (14·3) განტოლებიდან უფრო რთული ამოცანაა, ვიდრე (14.1) განტოლების ინტეგრება. მიუხედავად ამისა, ზოგიერთ შემთხვევაში ადვილია (14.3) განტოლების რომელიმე კერძო ინტეგრალის მოძებნა და მაშინ (14.1) განტოლების ინტეგრება მიიყვანება (14.2) განტოლების ინტეგრებაზე სრულ დიფერენციალებში.

განვიხილოთ მაინტეგრებელი მამრავლის მოძებნის რამდენიმე შემთხვევა:

1) ვთქვათ მაინტეგრებელი მამრავლი მხოლოდ x ცვლადის ფუნქციაა $\mu=\mu(x)$ და გამოსახულება

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

არის აგრეთვე x-ის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ $\mu(x)$ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\mu(x)=e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N}}. \tag{14.4}$$

მართლაც, რადგან $\mu=\mu(x)$, ამიტომ $\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$ და (14.3) ტოლობიდან გვექნება

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dx}{N},$$

საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ (14.4).

2) წინა შემთხვევის მსგავსად, როცა მაინტეგრებელი მამრავლი y ცვლადის ფუნქციაა და გამოსახულება

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

არის y-ის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ მაინტეგრებელი მამრავლი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\mu(y)=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}}. \tag{14.5}$$

3) თუ მაინტეგრებელი მამრავლი $z=x+y$ ცვლადის ფუნქციაა და გამოსახულება

$$\frac{1}{M-N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

წარმოადგენს z-ის ფუნქციას ან მუდმივს, მაშინ

$$\mu(z)=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{M-N}}. \tag{14.6}$$

4) თუ $\mu=\mu(z)$, $z=x-y$ და გამოსახულება

$$\frac{1}{M-N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

არის z ცვლადის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ

$$\mu(z)=e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{M+N}}. \tag{14.7}$$

5) თუ $\mu=\mu(z)$, $z=xy$ და გამოსახულება

$$\frac{1}{xM-yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

არის z ცვლადის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ

$$\mu(z)=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM-yN}}. \tag{14.8}$$

დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში მართებულია ტოლობები:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=y\,\frac{d\mu}{dz},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=x\,\frac{d\mu}{dz},$$

რომელთა ძალით განტოლება (14.3) ასე გარდაიქმნება:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM-yN}.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ (14.8) ტოლობას.

6) თუ $\mu=\mu(z)$, $z=\frac{y}{x}$ და გამოსახულება

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2}{xM+yN}$$

არის z ცვლადის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ

$$\mu(z)=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM+yN}} \tag{14.9}$$

დამტკიცება წინა შემთხვევის ანალოგიურია.

7) თუ $\mu=\mu(z)$, $z=x^2+y^2$ და გამოსახულება

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{yM-xN}$$

არის z ცვლადის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ

$$\mu(z)=e^{\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{yM-xN}}. \tag{14.10}$$

ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=2x\frac{d\mu}{dz},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=2y\frac{d\mu}{dz},$$

რომელთა ძალით განტოლება (14.3) შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{yM-xN},$$

საიდანაც ინტეგრებით მივიღებთ (14.10) ფორმულას.

8) თუ $\mu=\mu(z)$, $z=x^2+y^2$ და გამოსახულება

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{yM+xN}$$

არის z ცვლადის ფუნქცია ან მუდმივი, მაშინ

$$\mu(z)=e^{-\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{yM+xN}}. \tag{14.11}$$

დამტკიცება წინა შემთხვევის ანალოგიურია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების

$$[x^3(1+\ln x)+2y]\,dx+x(3x^2y^2-1)\,dy=0 \qquad (14.12)$$

ზოგადი ინტეგრალი. აქ

$$M=x^3(1+\ln x)=2y,\ N=x(3x^2y^2-1),\ \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

მაშასადამე, (14.12) განტოლების მარცხენა ნაწილი არ წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს. შევნიშნოთ, რომ გამოსახულება

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{3}{x}$$

წარმოადგენს მხოლოდ x ცვლადის ფუნქციას. თანახმად (14.4) ფორმულისა, მაინტეგრებელი მამრავლი $\mu(x)=\frac{1}{x^3}\cdot$ ახლა, გავამრავლოთ (14.12) განტოლების ორივე ნაწილი $\mu(x)$ ფუნქციაზე, მივიღებთ

$$\left(1+\ln x+\frac{2y}{x^3}\right)dx+\left(3y^2-\frac{1}{x^2}\right)dy=0. \qquad (14.12')$$

რადგან

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\ln x+\frac{2y}{x^3}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3y^2-\frac{1}{x^2}\right),$$

ამიტომ (14.12) განტოლების მარცხენა ნაწილი რაღაც U ფუნქციის სრული დიფერენციალია.

გვექნება

$$U=\int\left(3y^2-\frac{1}{x^2}\right)dy=y^3-\frac{y}{x^2}+\varphi(x),$$

აქედან

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2y}{x^3}+\frac{d\varphi(x)}{dx}=1+\ln x+\frac{2y}{x^3},$$

საიდანაც

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=1+\ln x,\ d\varphi(x)=(1+\ln x)\,dx,\ \varphi(x)=x\ln x.$$

ამრიგად, (14.12) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია:

$$y^3-\frac{y}{x^2}+x\ln x=C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

§ **15. ეილერის განტოლება.** განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dy}{dx}+P(x)+Q(x)\,y+R(x)y^2=0, \qquad (15.1)$$

სადაც $y=y(x)$ არის საძიებელი ფუნქცია, კოეფიციენტები $P=P(x)$, $Q=Q(x)$, $R=R(x)$ მხოლოდ x ცვლადზე დამოკიდებული მოცემული ფუნქციებია. ამ განტოლებას ეილერის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

საზოგადოდ, ნებისმიერი კოეფიციენტებისათვის P, Q, R, შეუძლებელია ეილერის განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნა კვადრატურებით. იმ შემთხვევაში კი როცა ცნობილია (15.1) განტოლების ერთი კერძო ინტეგრალი, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალი კვადრატურებით მოიძებნება.

მართლაც, ვთქვათ $y_0=y_0(x)$ არის (15.1) განტოლების რომელიმე კერძო ინტეგრალი:

$$\frac{dy_0}{dx}+P+Qy_0+Ry_0^2\equiv 0. \tag{15.2}$$

შემოვიღოთ $y=y(x)$ ფუნქციის ნაცვლად ახალი საძიებელი ფუნქცია $z=z(x)$ შემდეგი ჩასმით:

$$y=z+y_0 \tag{15.3}$$

თუ ამ უკანასკნელს შევიტანთ (15.1) განტოლებაში და გამოვიყენებთ (15.2) იგივეობას, გვექნება

$$\frac{dz}{dx}+(Q+2Ry_0)z+Rz^2=0. \tag{15.4}$$

როგორც ვხედავთ, (15.4) წარმოადგენს ბერნულის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება § 11-ის (11.3) ფორმულით.

შევიტანთ რა (15.4) განტოლების ზოგად ინტეგრალს (15.3) ტოლობაში, მივიღებთ ეილერის განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

ქვევით გავეცნობით ეილერის განტოლების ზოგიერთ კერძო შემთხვევას.

§ 16. ბულის განტოლება. ეილერის განტოლების ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ბულის დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}-\alpha x^{2\beta-1}-\frac{\beta}{x}y+\frac{\gamma}{x}y^2=0, \tag{16.1}$$

სადაც $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$ ნამდვილი რიცხვებია. განტოლება (16.1) ბოლომდე ამოიხსნება კვადრატურებით. მართლაც, მივმართოთ ჩასმას

$$y=x^\beta z, \tag{16.2}$$

სადაც $z=z(x)$ არის ახალი უცნობი ფუნქცია. მაშინ გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=x^\beta\frac{dz}{dx}+\beta x^{\beta-1}z$$

და განტოლება (16.1) ასე გარდაიქმნება

$$\frac{dz}{dx}+x^{\beta-1}(\gamma z^2-\alpha)=0,$$

საიდანაც, ცვლადების განცალების შემდეგ და ინტეგრებით, მივიღებთ

$$\int\frac{dz}{\gamma z^2-\alpha}+\frac{1}{\beta}x^{\beta}=C_1$$

ანუ

$$\ln\frac{z-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}}{z+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}}+\frac{2}{\beta}\sqrt{\alpha\gamma}\,x^{\beta}=\ln C,$$

სადაც $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ნამდვილი ან წარმოსახვითი რიცხვია, $\ln C=2\sqrt{\alpha\gamma}\,C_1$

აქედან, (12.2) ჩასმის გამოყენებით, მივიღებთ (16.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$y=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}x^{\beta}\,\frac{e^{\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}x^{\beta}}+C\,e^{-\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}x^{\beta}}}{e^{\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}x^{\beta}}-Ce^{-\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}x^{\beta}}} \tag{16.3}$$

§ 17. რიკატის განტოლება. ეილერის განტოლების კერძო სახეს წარმოადგენს აგრეთვე განტოლება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}y+Cy^2,\ 0<x<\infty, \tag{17.1}$$

სადაც A, B, C მუდმივი რიცხვებია. ამ განტოლებას რიკატის განტოლებას უწოდებენ. მისი ინტეგრება ყოველთვის შეიძლება კვადრატურებით. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ ჩასმა

$$y=\frac{z}{x}, \tag{17.2}$$

სადაც $z=z(x)$ არის ახალი უცნობი ფუნქცია. მაშინ გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}z$$

და (17.1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x\frac{dz}{dx}=Cz^2+(B+1)z+A.$$

თუ უკანასკნელ განტოლებაში მოვახდენთ ცვლადების განცალებას, მივიღებთ

$$\frac{dz}{Cz^2+(B+1)z+A}=\frac{dx}{x}, \tag{17.3}$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალი არის ელემენტარული ფუნქცია. შევიტანთ რა (17.3) განტოლების ზოგად ინტეგრალს ჩასმაში (17.2), მივიღებთ (17.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

ხშირად განტოლებას

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{\alpha}, \tag{17.4}$$

რომელიც აგრეთვე ეილერის განტოლების კერძო სახეს წარმოადგენს, უწოდებენ რიკატის სპეციალური სახის დიფერენციალურ განტოლებას. a, b და α მუდმივი რიცხვებია. განტოლება (17.4) ბოლომდე ამოიხსნება კვადრატურებით α პარამეტრის უსასრულოდ მრავალი მნიშვნელობებისათვის.

მაგალითად, როცა $\alpha=0$, მაშინ (17.4) მიიყვანება დიფერენციალურ განტოლებაზე

$$\frac{dy}{b-ay^2}=dx$$

განცალებული ცვლადებით. თუ $\alpha=-2$, მაშინ ჩასმით $y=\frac{1}{z}$, სადაც $z=z(x)$ ახალი უცნობი ფუნქციაა, მიიყვანება განტოლებაზე

$$\frac{dz}{dx}=a-b\left(\frac{z}{x}\right)^2,$$

რომელიც ამოიხსნება როგორც ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება (იხ. § 7).

§ 18. ლაგრანჟის განტოლება. ავიღოთ შემდეგი სახის განტოლება

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'), \tag{18.1}$$

სადაც $y=y(x)$ არის უცნობი ფუნქცია, $y'=\frac{dy}{dx}$ — მისი წარმოებული, $\varphi(y')$ და $\psi(y')$ — ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქციები $p=y'$ ცვლადის მიმართ. განტოლებას (18.1) ეწოდება ლაგრანჟის დიფერენციალური განტოლება. შევნიშნოთ, რომ იგი წრფივად შეიცავს x და y ცვლადებს. ლაგრანჟის განტოლების ამოხსნა შესრულდება გაწარმოების ხერხით. ამისათვის გადავწეროთ (18.1) შემდეგი სახით:

$$y=x\varphi(p)+\psi(p) \tag{18.1'}$$

და ეს უკანასკნელი გავაწარმოოთ x ცვლადით, მივიღებთ

$$p=\varphi(p)+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{18.2}$$

ცხადია, ყოველი ინტეგრალი (18.1) განტოლებისა წარმოადგენს (18.1') განტოლების ინტეგრალს.

ჩავთვალოთ, რომ x დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო p-დამოკიდებული ცვლადი. მაშინ ადვილი სანახავია, რომ (18.2) იქნება წრფივი დიფერენციალური განტოლება უცნობი $x=x(p)$ ფუნქციით. მართლაც, საკმარისია (18.2) განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}\,x+\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}=0, \tag{18.2'}$$

სადაც ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(p)-p\neq 0$.

ზოგადი ინტეგრალი (18.2') განტოლებისა იქნება

$$x=e^{\int\frac{\varphi'(p)\,dp}{p-\varphi(p)}}\left[C+\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\,e^{\int\frac{\varphi'(p)dp}{\varphi(p)-p}}dp\right] \tag{18.3}$$

ანუ

$$x=C\Phi(p)+\Psi(p), \tag{18.4}$$

სადაც

$$\Phi(p)=e^{\int\frac{\varphi'(p)dp}{p-\varphi(p)}},\quad \Psi(p)=\Phi(p)\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\,e^{\int\frac{\varphi'(p)dp}{\varphi(p)-p}}\,dp.$$

შევიტანოთ x-ის მნიშვნელობა (18.4) ტოლობიდან (18.1') ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$y=C\Phi_1(p)+\Psi_1(p), \tag{18.5}$$

სადაც

$$\Phi_1(p)=\varphi(p)\,\Phi(p),\ \Psi_1(p)=[1+\varphi(p)]\,\Psi(p).$$

ერთობლიობა ორი განტოლებისა:

$$\left.\begin{aligned}x&=C\,\Phi(p)+\Psi(p),\\ y&=C\,\Phi_1(p)+\Psi_1(p)\end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

წარმოადგენს (18.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით. p პარამეტრია.

თუ (18.6) განტოლებებიდან პარამეტრს გამოვრიცხავთ (როცა ეს შესაძლებელია), მაშინ (18.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება: $F(x,\ y,\ C)=0$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზევით, $\varphi(p)-p$ სხვაობაზე გაყოფის შედეგად განტოლება (18.2) მივიყვანეთ წრფივ განტოლებაზე (18.2'), მაგრამ ეს მართე-

ბულია მხოლოდ მაშინ, როცა $\varphi(p)-p\neq 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ გაყოფისას შესაძლოა დავკარგოთ (18.1) განტოლების ისეთი ინტეგრალები, რომლებისთვისაც $\varphi(p)-p=0$, ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ არის $\varphi(p)-p=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვები: $p(\xi_i)=\xi_i\ (i=1, 2, \ldots, m)$, მაშინ განტოლებას (18.1), გარდა ზოგადი ინტეგრალისა (18.6), ექნება განსაკუთრებული ინტეგრალები.

$$y=\varphi(\xi_i)\,x+\Psi(\xi_i),\ i=1, 2, \ldots, m, \tag{18.7}$$

რომლებიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან ნებისმიერი მუდმივის არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის.

როგორც ვხედავთ, თუ ლაგრანჟის განტოლებას აქვს განსაკუთრებული ინტეგრალები, მაშინ ისინი შეიძლება იყოს მხოლოდ წრფეები. ამ წრფეების (განსაკუთრებული ამონახსნების) განტოლებები იქნება (18.7).

მაგალითი 1. ამოვხსნათ ლაგრანჟის დიფერენციალური განტოლება

$$y=2x\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dy}. \tag{18.8}$$

აღვნიშნოთ $p=\dfrac{dy}{dx}$, გვექნება

$$y=2px+\frac{1}{p}. \tag{18.8'}$$

აქ

$$\varphi(p)=2p,\ \psi(p)=\frac{1}{p},\ \varphi(p)-p\neq 0,$$

ე. ი. განტოლებას (18.8) არა აქვს განსაკუთრებული ინტეგრალი. გავაწარმოოთ (18.8′) განტოლება x ცვლადით, მივიღებთ

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}\,x-\frac{1}{p^2}=0,$$

რომელიც წარმოადგენს პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას x ცვლადის მიმართ. უკანასკნელი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x=\frac{1}{p^2}(c+\ln p).$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (18.8′) განტოლებაში, მივიღებთ

$$y=\frac{2}{p}(C+\ln p)+\frac{1}{p}.$$

ამრიგად, (18.8) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი პარამეტრული სახით ასე ჩაიწერება:

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \frac{1}{p^2}(C+\ln p),\\
y &= \frac{2}{p}(C+\ln p)+\frac{1}{p},
\end{aligned}\right\}
$$

სადაც p პარამეტრია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ამოვხსნათ ლაგრანჟის განტოლება

$$y=-xy'^2+y'-\ln(1+y'). \tag{18.9}$$

გვაქვს

$$y=-xp^2+p-\ln(1+p). \tag{18.9'}$$

ამ განტოლებაში:

$$\varphi(p)=-p^2,\ \psi(p)=p-\ln(1+p),\ \varphi'(p)=-2p,\ \psi'(p)=\frac{p}{1+p}.$$

განტოლებას (18.2′) აქვს სახე:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p+1}x-\frac{1}{(p+1)^2}=0,$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალია

$$x=\frac{1}{(p+1)^2}(C+p+1),$$

სადაც $C+1$ ნებისმიერი მუდმივია. აქედან გვექნება

$$p+1=\frac{1\pm\sqrt{4Cx+1}}{2x}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა განტოლებაში (18.9′), მივიღებთ

$$y=\ln\frac{2x}{1\pm\sqrt{4Cx+1}}\pm\sqrt{4Cx+1}-x-C.$$

ასეთია (18.9) განტოლების ცხადი სახით ჩაწერილი ზოგადი ინტეგრალი.

ახლა, ვთქვათ $\varphi(p)-p=-p(p+1)=0$. მაშინ $p=0$, $p=-1$. უკანასკნელი მნიშვნელობა $p=-1$ უნდა გამოვრიცხოთ განხილვიდან, ვინაიდან ამ მნიშვნელობისათვის (18.9) განტოლებას აზრი არა აქვს. მეორე მნიშვნელობა $p=0$ გვაძლევს (18.9) განტოლების განსაკუთრებულ ინტეგრალს $y=0$.

§ **19. კლეროს განტოლება.** კლეროს დიფერენციალური განტოლება x და y ცვლადების მიმართ წრფივი განტოლებაა და ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (იგი მიიღება ლაგრანჟის განტოლებიდან როცა $\varphi(y')=y'$):

$$y=xy'+\psi(y'). \tag{19.1}$$

კვლავ გამოვიყენოთ აღნიშვნა $y'=p$, მაშინ გვექნება

$$y=px+\psi(p). \tag{19.1'}$$

მოვძებნოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის დიფერენციალი x ცვლადით, მივიღებთ

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp,$$

საიდანაც

$$[x + \psi'(p)]dp = 0. \qquad (19{\cdot}2)$$

აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა.

1. $dp = 0$, ე. ი. $p = C$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა განტოლებაში (19.1′). მივიღებთ კლეროს განტოლე ბის ზოგად ინტეგრალს

$$y = Cx + \psi(C). \qquad (19.3)$$

გეომეტრიულად განტოლება (19.3) წარმოადგენს წრფეთა ოჯახს, რომლებსაც აქვთ საერთო კუთხური კოეფიციენტი C. როგორც ვხედავთ, კლეროს განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად საჭირო არ არის რაიმე კვადრატურების შესრულება. ზოგადი ამონახსნის დასაწერად საკმარისია მოცემულ განტოლებაში (19.1′) შევცვალოთ წარმოებული y' ნებისმიერი მუდმივით C.

2. ახლა ვთქვათ, რომ განტოლებაში (19.2) პირველი თანამამრავლი

$$x + \psi'(p) = 0.$$

ეს უკანასკნელი (19.3) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს კლეროს განტოლების პარამეტრული სახის კიდევ ასეთ ინტეგრალს:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p) \end{aligned}\right\}, \qquad (19.4)$$

რომელიც, ცხადია, არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან (19.3). განტოლებები (19.4) განსაზღვრავს კლეროს განტოლების განსაკუთრებულ ინტეგრალს. ადვილი სანახავია, რომ (19.4) განტოლებებით განსაზღვრული ბრტყელი წირი გეომეტრიულად წარმოადგენს (19.3) განტოლებით განსაზღვრული წრფეთა ოჯახის მომვლებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლ ება

$$y = xy' + y'^2. \qquad (19.5)$$

რადგან $\psi(p) = p^2$, ამიტომ, თანახმად (19.3) ტოლობისა, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება წრფეთა ოჯახი:

$$y = Cx + C^2.$$

განსაკუთრებული ინტეგრალის მოსაძებნად, შევადგინოთ განტოლებები (19.4), გვექნება

$$\left.\begin{aligned} x &= -2p, \\ y &= -p^2 \end{aligned}\right\},$$

საიდანაც

$$y = -\frac{1}{4}x^2,$$

მაშასადამე, (19.5) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ინტეგრალი არის კოორდინატთა სათავეზე გამავალი პარაბოლი.

§ 20. **განტოლება $F(x, y')=0$ სახისა.** ეს განტოლება წარმოადგენს პირველი პარაგრაფის (1.1) განტოლების კერძო სახეს. იგი ცხადად არ შეიცავს y ცვლადს. გადავწეროთ განტოლება ასე:

$$F(x, p)=0, \tag{20.1}$$

სადაც $p=y'$. დავუშვათ, რომ განტოლება (20.1) ამოიხსნება p ცვლადის მიმართ

$$p=\frac{dy}{dx}=f(x).$$

მაშინ, ცვლადების განცალებისა და ინტეგრების შემდეგ, მივიღებთ

$$y=\int f(x)\,dx+C.$$

უკანასკნელი ტოლობა, განხილულ შემთხვევაში, გვაძლევს (20.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

ახლა ვთქვათ, განტოლება (20.1) ამოიხსნება x ცვლადის მიმართ:

$$x=\varphi(p).$$

გავაწარმოეთ იგი p ცვლადით, გვექნება

$$\frac{dx}{dp}=\varphi'(p).$$

და, რადგან $dx=\frac{1}{p}\,dy$, ამიტომ

$$dy=p\,\varphi'(p)dp.$$

აქედან, ინტეგრების შემდეგ, მივიღებთ

$$y=\int p\varphi'(p)\,dp+C.$$

ამის შემდეგ, განხილულ შემთხვევაში, (20.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი პარამეტრული სახით ასე ჩაიწერება

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(p),\\ y&=\int p\varphi'(p)\,dp+C. \end{aligned}\right\}, \tag{20.2}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, p—პარამეტრი. თუ (20.2) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ p პარამეტრს, მაშინ (20.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება

$$\Phi(x, y-C)=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'^4+2y'-x=0.$$

განტოლება ამოიხსნება x ცვლადის მიმართ, გვექნება

$$x=y'^4+2y'=p^4+2p.$$

აქ ფუნქცია $\varphi(p)=p^4+2p$ და, მაშასადამე, განტოლებები (20.2) ასე ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} x&=p^4+2p,\\ y&=p^2+\frac{4}{5}p^5+C. \end{aligned}\right\}$$

უკანასკნელ განტოლებათა ერთობლიობა წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს პარამეტრული სახით.

§ 21. განტოლება $F(y, y')=0$ სახისა. ეს განტოლებაც არის (1.1) განტოლების კერძო სახე (იხ. § 1). იგი ცხადად არ შეიცავს x ცვლადს. გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით

$$F(y, p)=0, \quad p\equiv y' \tag{21.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ იგი შეიძლება ამოვხსნათ p ცვლადის მიმართ

$$p=\frac{dy}{dx}=f(y),$$

საიდანაც, ცვლადების განცალების შემდეგ, მივიღებთ

$$\frac{dy}{f(y)}=dx.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით, მივიღებთ (21.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$y=\int\frac{dy}{f(y)}+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

თუკი (21.1) განტოლება ამოიხსნება y ცვლადის მიმართ, მაშინ

$$y=\varphi(p), \tag{21.2}$$

საიდანაც

$$dy=\varphi'(p)dp, \text{ ე. ი. } pdx=\varphi'(p)dp,\ dx=\frac{\varphi'(p)}{p}dp.$$

უკანასკნელი არის დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით, რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$x=\int\frac{\varphi'(p)}{p}\,dp+C, \tag{21.3}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

ვინაიდან, (21.2) და (21.3) ტოლობები y და x ცვლადებს ერთი და იმავე p პარამეტრით გამოსახავენ, ამიტომ (21.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ჩაიწერება ასე:

$$\left.\begin{aligned} x&=\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+C,\\ y&=\varphi(p). \end{aligned}\right\} \tag{21.2}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$y=y'^2+\ln y'.$$

აქ, ფუნქცია

$$\varphi(p)=p^2+\ln p,\quad \varphi'(p)=2p+\frac{1}{p}.$$

ამიტომ, თანახმად (21.2) ტოლობებისა, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{2p^2-1}{p}+C,\\ y&=p^2+\ln p. \end{aligned}\right\},$$

რომელიც წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით.

§ 22. ინტეგრება დიფერენციალური განტოლებისა:

$$U\,dx+V\,dy+W\,(ydx-xdy)=0,$$

სადაც

$$U=U\,(x,\ y),\ V=V\,(x,\ y),\ W=W\,(x\cdot\ y)$$

ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ა.

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის გამოვიყენოთ ჩასმა $z=\frac{y}{x}$, მაშინ $dy=zdx+xdz$ და მოცემული განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(U+Vz)\,dx+x\,(V-Wx)\,dz=0.$$

ვიგულისხმოთ, რომ ფუნქციები U და V ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია ერთგვაროვნების მაჩვენებლით n, ხოლო W არის ერთგვაროვანი ფუნქცია ერთგვაროვნების მაჩვენებლით m, ე. ი.

$$U=x^n\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)=x^n\varphi_1(z),\quad V=x^n\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)=x^n\varphi_2(z),$$

$$W=x^m\varphi_3\left(\frac{y}{x}\right)=x^m\varphi_3(z). \tag{22.1}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი წინა განტოლებაში, მივიღებთ

$$[\varphi_1(z)+z\varphi_2(z)]\,x^ndx+[x^{n-1}\varphi_2(z)-W]\,x^2dz=0,$$

საიდანაც

$$\frac{dx}{dz}+\frac{x^{n-1}\varphi_2(z)-W}{x^{n-2}[\varphi_1(z)+z\varphi_2(z)]}=0.$$

შევიტანოთ აქ W ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლობიდან (22.1) და შემდეგი ასე გადავწეროთ:

$$\frac{dx}{dz}+P(z)x+Q(z)x^{\mu}=0, \qquad (22.2)$$

სადაც

$$P(z)=\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)+z\varphi_2(z)},\ Q(z)=-\frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z)+z\varphi_2(z)},\ \mu=m-n+2.$$

შევნიშნოთ, რომ (22.2) წარმოადგენს ბერნულის განტოლებას (იხ. § 11), რომელშიც x დამოკიდებული ცვლადია, ხოლო z დამოუკიდებელი ცვლადი. უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x=e^{-\int P(z)dz}\left[C-\int Q(z)\,e^{\int P(z)dz}\,dz\right], \qquad (22.3)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. კვადრატურების შესრულების შემდეგ (როცა ეს შესაძლებელია), ცვლადი z უნდა შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით $\frac{y}{x}$ და ამით მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოძებნილი იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$(2+2xy+y^2)\,dx+(1-2x^2-xy)\,dy=0 \qquad (22.4)$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, გვექნება

$$2dx+dy+(2x+y)(ydx-xdy)=0.$$

როგორც ვხედავთ უკანასკნელი განტოლება არის სათაურში მოყვანილი განტოლების კერძო სახე. აქ

$$U=2,\ V=1,\ W=2x+y,\ n=0,\ m=1,\ \varphi_1=2,\ \varphi_2=1,$$

$$\varphi_3=2+\frac{y}{x},\quad P(z)=\frac{1}{2+z},\quad Q(z)=-1,\ \mu=3.$$

მაშასადამე, (22.3) ფორმულიდან, მივიღებთ

$$x^{-2}=2(2+z)+C(2+z)^2,$$

ე. ი.

$$C(y+2x)^2=1-2x(y+2x),$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

უკანასკნელი ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქცია y წარმოადგენს (22.4) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

§ 23. პირველი რიგის n ხარისხის დიფერენციალური განტოლება. ვთქვათ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y') = A_0(x, y)\, y'^n + A_1(x, y)\, y'^{n-1} + \ldots +$$
$$+ A_{n-1}(x, y)\, y' + A_n(x, y) = 0, \qquad (23.1)$$

სადაც $y = y(x)$ არის საძიებელი ფუნქცია, y'—მისი წარმოებული, $A_0 = A_0(x, y)$, $A_1 = A_1(x, y), \ldots, A_n = A_n(x, y)$ არის x და y არგუმენტების მოცემული უწყვეტი ფუნქციები $x0y$ სიბრტყის რაიმე (D) არეში, რომელშიც $A_0 \neq 0$. ამ განტოლებას ეწოდება პირველი რიგის n ხარისხის დიფერენციალური განტოლება, ხოლო ფუნქციებს $A_0, A_1, \ldots, A_n$—განტოლების კოეფიციენტები.

თანახმად ალგებრის ძირითადი თეორემისა, (23.1) განტოლებას ნებისმიერ $(x, y) \in (D)$ წერტილში y' ფუნქციის მიმართ აქვს n ამოხსნა. ქვევით განვიხილავთ (23.1) განტოლების მხოლოდ ნამდვილ და მარტივ ამოხსნებს y' ფუნქციის მიმართ. არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის ძალით, თუ x, y, y' ცვლადების აღებული მნიშვნელობებისათვის $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, მაშინ (23.1) განტოლების ყოველი ნამდვილი ამოხსნა y' ფუნქციის მიმართ: $y' = \varphi(x, y)$ წარმოადგენს x და y ცვლადების უწყვეტ ფუნქციას (D) არეში და ამასთან იმავე არეში არსებობს სასრული ნაწილობითი წარმოებული $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$.

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ კოეფიციენტები $A_i\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ აკმაყოფილებენ (D) არეში ლიპშიცის პირობას y ცვლადის მიმართ და $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right| \geqslant \alpha > 0$, მაშინ (23.1) განტოლების ამოხსნა $y' = \varphi(x, y)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას y ცვლადის მიმართ იმავე (D) არეში.

შევნიშნოთ, რომ რაკი კოეფიციენტები A_i აკმაყოფილებენ ლიპშიცის პირობას y ცვლადის მიმართ (D) არეში, ამიტომ (D) არეში $F(x, y, y')$ ფუნქცია აგრეთვე აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას y ცვლადის მიმართ.

ვთქვათ y_1' და y_2' არის (23.1) განტოლების ორი ნებისმიერი ამოხსნა y' ცვლადის მიმართ, მაშინ

$$F(x, y_1, y_1') = 0, \quad F(x, y_2, y_2') = 0.$$

აქედან მივიღებთ

$$F(x, y_1, y_1') - F(x, y_1, y_2') = F(x, y_2, y_2') - F(x, y_1, y_2') \qquad (23.2)$$

გარდავქმნათ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილი ლაგრანჟის ფორმულით, გვექნება

$$F(x,\ y_1,\ y_1')-F(x,\ y_1,\ y_2')=(y_2'-y_1')\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{y_1,\ y_1'+\theta(y_2'-y_1')},\quad 0<\theta<1.$$

გარდა ამისა, ზემოთ მოყვანილი შენიშვნის ძალით, დავწერთ

$$|\ F(x,\ y_2,\ y_2')-F(x,\ y_1,\ y_2')\ |\leqslant\mu\ |\ y_2-y_1\ |,$$

სადაც μ ლიპშიცის მუდმივია. ამის შემდეგ, უკანასკნელი ორი ფორმულისა და თეორემის პირობების მიხედვით, (23.2) ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$|\ y_1'-y_2'\ |\leqslant\frac{\mu}{\alpha}\ |\ y_1-y_2\ |.$$

თეორმა დამტკიცებულია.

ვთქვათ (23.1) განტოლების ნამდვილი და მარტივი ამოხსნები y' ფუნქციის მიმართ არის

$$y'=\varphi_1(x,\ y),\ y'=\varphi_2(x,\ y),\ldots,y'=\varphi_k(x,\ y).\qquad(23.3)$$

რადგან, დამტკიცებული თეორემის ძალით, ფუნქციები

$$\varphi_1(x,\ y),\ \varphi_2(x,\ y),\ldots,\varphi_k(x,\ y)$$

აკმაყოფილებენ ლიპშიცის პირობას, ამიტომ, პიკარის თეორემის თანახმად [1], ყოველ განტოლებას (23.3) განტოლებებიდან (D) არეში აქვს ერთადერთი ინტეგრალი, რომელიც გაივლის მოცემულ წერტილზე $(x_0,\ y_0)\in(D)$. მაშასადამე, (23.1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს k ინტეგრალური წირი, რომლებიც გაივლიან წერტილზე $(x_0,\ y_0)\in(D)$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y'^2+(x-y-e^x)\,y'+e^x\,(y-x)=0$$

ინტეგრალები, რომლებიც გაივლიან კოორდინატთა სათავეზე.

ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი მეორე ხარისხის მრავალწევრია y' წარმოებულის მიმართ, ამიტომ

$$y'=e^x,\quad y'=y-x.$$

უკანასკნელი განტოლებების ინტეგრებით, შესაბამისად, მივიღებთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალების ორ ოჯახს:

$$y=e^x+C,\quad y=Ce^x+x+1.$$

გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, გვექნება $C=0$. ამრიგად, საძიებელი ინტეგრალები იქნება $y=e^x-1$ და $y=-e^x+x+1$.

---

[1] პიკარის თეორემა დამტკიცებულია მე-II თავის § 7-ში.

სავარჯიშო

ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები განცალებული ცვლადებით:

1. $xdx+ydy=0.$ პასუხი: $x^2+y^2=C^2$

2. $\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0.$ პასუხი: $x-y+\ln(xy)=C.$

3, $\operatorname{ctg} x dx-\operatorname{tg} y\, dy=0.$ პასუხი: $\sin x \cos y=C.$

4. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0,$ პასუხი: $\frac{x+y}{1-xy}=C.$

5. $\frac{dx}{x^2-1}+\frac{dy}{y^2-1}=0.$ პასუხი: $\frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}=C.$

მიიყვანეთ დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებული ცვლადებით და მოძებნეთ ზოგადი (მითითებულ შემთხვევებში კერძო, როცა არსებობს განსაკუთრებული) ინტეგრალი:

1. $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0.$

პასუხი: $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$

2. $xydx-(1+x^2)\,dy=0.$ პასუხი: $Cy=\sqrt{1+x^2}.$

3. $(x^3+1)\,ydx-(y^2-1)xdy=0.$ პასუხი: $\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+\ln\frac{x}{y}=C.$

4. $x(1+e^y)\,dx-e^y dy=0.$ პასუხი: $x^2-2\ln(1+e^y)=C.$

5. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx+\sec^2 y \operatorname{tg} x dy=0.$ პასუხი: $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=C.$

6. $x^2(1+y)\,dx+(x^3-1)\,(y-1)\,dy=0.$

პასუხი: $3y+\ln\frac{x^3-1}{(y+1)^6}=C.$

7. $(1+y^2)\,(e^{2x}dx-e^y dy)-(1+y)\,dy=0.$

პასუხი: $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\ln\sqrt{1+y^2}-\operatorname{arctg} y=C.$

8. $2y\sqrt{ay-y^2}\,dx-(a^2+x^2)\,dy=0.$

პასუხი: $\sqrt{\frac{a-y}{y}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}=C.$

9. $\sqrt{1+y^2}\,dx-(2+y)\sqrt{1+x^2}\,dy=0$

პასუხი: $x+\sqrt{1+x^2}=Ce^{\sqrt{1+y^2}}(y+\sqrt{1+y^2})^2.$

10. $xdy-ydx=\sqrt{1+x^2}\,dy+\sqrt{1+y^2}\,dx.$

პასუხი: $x^2-y^2+x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}+$
$+\ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right]=C.$

11. $y'=3\sqrt[3]{y^2}.$ პასუხი: $y=(x-C)^3;\ y=0.$

12. $2x^2yy'+y^2=2.$ პასუხი: $y^2=Ce^{\frac{1}{x}}+2.$

13. $E^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1.$ პასუხი: $e^{-s}=1+Ce^{t}.$

14. $y'=\cos(y-x).$ პასუხი: $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2}=x+C.$

15. $y'-y=2x-3.$ პასუხი: $y=1-2x+Ce^x,$

16. $y=x^2y^2y'+1.$ პასუხი: $\dfrac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=C-\dfrac{1}{x}.$

17. $xy'+y=y^2;\ y(1)=0{,}5.$ პასუხი: $y(1-Cx)=1;\ y=0;$
$y(1+x)=1.$

18. $(x+2y)y'=1;\ y(0)=-1$ პასუხი: $x+2y+2=Ce^y;$
$x+2y+2=0.$

ამოხსენით შემდეგი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები და განტოლებები, რომელთა ამოხსნა მიიყვანება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე:

1. $(x-y)\,dx+xdy=0.$ პასუხი: $\ln x+\dfrac{y}{x}=C.$

2. $(x+y)\,dx+xdy=0.$ პასუხი: $x(x+2y)=C.$

3. $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0.$ პასუხი: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}.$

4. $(x^2+y^2)\,dx-2xydy=0.$ პასუხი: $x^2-y^2=Cx.$

5. $(x-y)\,ydx-x^2dy=0.$ პასუხი: $x=Ce^{\frac{x}{y}},$

6. $x^3\,dx+(3x^2+2y^2)\,ydy=0.$ პასუხი: $x^2+2y^2=C\sqrt{x^2+y^2}.$

7. $ydx=(x+\sqrt{x^2-y^2})\,dy.$ პასუხი: $y^2=C(2x-C).$

8. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0.$ პასუხი: $x^3=C(x^2-y^2).$

9. $(5x+7y)\,dx+2(4x+5y)\,dy=0.$ პასუხი: $(x+y)^2(x+2y)^3=C.$

10. $xdx+ydy=2y\cos\alpha dx$.

პასუხი: $\ln\sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{y-x\cos\alpha}{x\sin\alpha}=C$.

11. $(x^2-xy+y^2)\,dx+x\,(y-2x)\,dy=0$.

პასუხი: $x\,(x-2y)^3=C(x-y)$.

12. $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{y}\,dx+xdy=0$. პასუხი: $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\ln x=C$.

13. $ydx-x\ln\dfrac{x}{y}\,dy=0$. პასუხი: $\ln\dfrac{x}{y}=1+Cy$.

14. $x^2dx+(y^2-xy-x^2)\,dy=0$.

პასუხი: $(x+y)(x-y)^3=Ce^{\frac{2y}{x-y}}$.

15. $(4x^2+3xy+y^2)\,dx+(4y^2+3xy+x^2)\,dy=0$.

პასუხი: $(x^2+y^2)^3\,(x+y)^2=C$.

16. $xydx=[x^2e^{\frac{x}{y}}+(x+y)^2]\,e^{-\frac{x}{y}}dy$.

პასუხი: $(x+y)\ln(Cy)=ye^{\frac{x}{y}}$.

17. $(x+2y+1)\,dx+ydy=0$.

პასუხი: $\dfrac{x+1}{x+y+1}+\ln(x+y+1)=C$.

18. $(y'+1)\ln\dfrac{x+y}{x+3}=\dfrac{x+y}{x+3}$. პასუხი: $\ln\dfrac{x+y}{x+3}=1+\dfrac{C}{x+y}$.

19. $y'-\dfrac{y+2}{x+1}-\operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}=0$. პასუხი: $\sin\dfrac{y-2x}{x+1}=C(x+1)$.

20. $x^3(y'-x)=y^2$. პასუხი: $x^2=(x^2-y)\ln(Cx)$; $y=x^2$.

21. $(x^2y^4+1)\,ydx+2xdy=0$. პასუხი: $x^2y^4\ln(Cx^2)+1$; $y=0$;

22. $2x^2y'-xy-y^3=0$. პასუხი: $x=-y^2\ln(Cx)$; $y=0$.

23. $ydx+x\,(2xy+1)\,dy=0$. პასუხი: $y^2=Ce^{\frac{1}{xy}}$; $y=0$; $x=0$.

24. $(2x+2y-1)\,dx+(x+y-2)\,dx=0$.

პასუხი: $x+y+1=CE^{\frac{2x+y}{3}}$.

25. $(x-y+3)\,dx+(3x+y+1)\,dy=0$.

პასუხი: $x+y=1+Ce^{\frac{2(x+1)}{x+y-1}}$.

26. $(2x-y-1)\,dx+(2y-x+1)\,dy=0.$

პასუხი: $x^2-xy+y^2-x+y=C.$

27. $x-y-1+(y-x+2)\,y'=0.$

პასუხი: $(y-x+2)^2=C\,(x-2y+4).$

28. $(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy=0.$

პასუხი: $(y-2x)^3=C\,(y-x-1)^2;\ y=x+1,$

ამოხსენით შემდეგი პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები:

1. $y'+\dfrac{y}{x}-a=0.$ პასუხი: $2xy=ax^2+C.$

2. $y'+ay-ne^{bx}=0.$ პასუხი: $y=\dfrac{n}{a+b}(e^{bx}+Ce^{-ax}).$

3. $xy'+(x+1)\,y-3x^2e^{-x}=0.$ პასუხი: $xy=(x^3+C)\,e^{-x}.$

4. $(x+1)\,y'-ny=E^x\,(x+1)^{n+1}.$ პასუხი: $y=(x+1)^n\,(C+e^x).$

5. $xy'-2y+x^2=0.$ პასუხი: $y=x^2\,(C-\ln x).$

6. $(\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y)\,y'=1.$ პასუხი: $x=(C-\cos y)\sin y.$

7. $(x^2-1)\,y'-xy-x\,(x^2-1)=0.$

პასუხი: $y=x^2-1+C\sqrt{x^2-1}.$

8. $y'\cos x+y\sin x-1=0.$ პასუხი. $y=\sin x+C\cos x.$

9. $y'+y\cos x=\sin x\cos x.$ პასუხი: $y+Ce^{-\sin x}+\sin x-1.$

10. $y'+\dfrac{y}{x^2}=ae^{\frac{1}{x}}.$ პასუხი: $y=e^{\frac{1}{x}}(C+ax).$

11. $(xy'-1)\ln x=2y.$ პასუხი: $y=C\ln^2 x-\ln x.$

12. $\dfrac{dy}{dx}+y+x^2=0.$ პასუხი: $y=2\,(x-1)-x^2+Ce^{-x}.$

13. $y'+ay-\cos bx=0.$ პასუხი: $y=\dfrac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+Ce^{-ax}.$

14. $y'-ay-x^4=0,$ პასუხი: $a^5(Ce^{ax}-y)=$

$=a^4x^4+4a^3x^3+12a^2x^2+24ax+24.$

15. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{y^2-3x}=0.$ პასუხი: $x=Cy^3+y^2;\ \ y=0.$

16. $\dfrac{dy}{dx}+xy-x^3=0.$ პასუხი: $y=x^2-2+Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$

17. $y^2(dx-dy)=x(2y-1)\,dy$. პასუხი: $x=y^2\left(1+Ce^{\frac{1}{y}}\right)$.

18. $(1-x^2)\,y'+xy-ax=0$. პასუხი: $y=a+C\sqrt{1-x^2}$.

19. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}-a\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$.

პასუხი: $y=(x+\sqrt{1+x^2})(a\arcsin x+C)$.

20. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{ny}{\sqrt{1-x^2}}-x=0$.

პასუხი: $y=Ce^{n\arcsin x}-\dfrac{nx\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{n^2+4}$.

ამოხსენით ბერნულის შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

1. $x^2y^2y'+xy^3-a^2=0$. პასუხი: $2x^3y^3-3a^2x^2=C$.

2. $\dfrac{dy}{dx}\operatorname{tg}x+2y\operatorname{tg}^2x-ay^2=0$.

პასუხი: $ay(\sin^2x-2\ln\sin x)=Cy$.

3. $3y^2dy=(x+y^3+1)\,dx$. პასუხი. $x+y^3+2=Ce^x$.

4. $y'+2y-y^2e^x=0$. პასუხი: $y(e^x+Ce^{2x})=1$; $y=0$.

5. $y'=y^4\cos x+y\operatorname{tg}x$.

პასუხი: $y^{-3}=C\cos^3x-3\sin x\cos^2x$; $y=0$

6. $xy^2y'=x^2+y^3$. პასუხი: $y^3=Cx^3-3x^2$.

7. $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$. პასუხი: $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$.

8. $y'x^3\sin y=xy'-2y$. პასუხი: $y=x^2(C-\cos y)$; $y=0$.

9. $(x+y^2)\,dx=2ydy$. პასუხი: $x+1+y^2=Ce^x$.

10. $xy'+y-xy^2\ln x=0$. პასუხი: $xy(1+\ln^2x)+2=0$.

11. $3dy=(1-3y^3)\,y\sin x dx$. პასუხი: $y^3(3+Ce^{\cos x})=1$.

12. $ady+ydx=xy^{1-n}\,dx$. პასუხი: $ny^n=nx-a+Ce^{-\frac{nx}{a}}$.

13. $3(1-x^2)\,y'=xy+3ay^4$. პასუხი: $y^3=\dfrac{1}{3(ax+C\sqrt{1-x^2})}$.

14. $xdy+(1-y\ln x)\,y\,dx=0$. პასუხი: $y(1+\ln x+Cx)=1$.

15. $x\cos^2x\,dy+2y\cos^2x\,dx=2x\sqrt{y}$.

პასუხი: $x\sqrt{y}=C+\ln\cos x+x\operatorname{tg}x$.

16. $x\,dx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$. პასუხი: $x^2+y^4=Cy^2$.

17. $dy+\frac{xy\,dx}{1-x^2}=x\sqrt{y}\,dx$.

პასუხი: $\sqrt{y}=C\sqrt[4]{1-x^2}-\frac{1}{3}(1-x^2)$.

18. $y'=\frac{xy}{2(1-x^2)}+xy^2$.

პასუხი: $y=\frac{3}{2(1-x^2)-3C\sqrt[4]{1-x^2}}$.

19. $dx=(1+xy^2)\,xydy$. პასუხი: $y^2+\frac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

20. $xy^3\,dx=(x^2y+2)\,dy$ პასუხი: $x^2=1-\frac{2}{x}+Ce^{-\frac{2}{x}}$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები სრულ დიფერენციალებში:

1. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$.

პასუხი: $\ln\frac{y}{x}+\frac{xy}{y-x}=C$.

2. $\sin 2x\,dx=2\cos(x+y)(dx+dy)$.

პასუხი: $\sin^2 x-2\sin(x+y)=C$.

3. $(3xy^2+2x^3)\,dx+\frac{3}{2}(2x^2y+y^2)\,dy=0$.

პასუხი: $x^4+3x^2y^2+y^3=C$.

4. $2xydx+(x^2-y^2)\,dy=0$. პასუხი: $3x^2y-y^3=C$.

5. $(3+2y-7y^3)\,dx+(2x-21xy^2+20y^3)\,dy=0$.

პასუხი: $3x+2xy-7xy^3+5y^4=C$.

6. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)\,dy=0$. პასუხი: $4y\ln x+y^4=C$.

7. $(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0$. პასუხი: $x-y^2\cos^2 x=C$.

8. $\frac{xdx+(2x+y)dy}{(x+y)^2}=0$. პასუხი: $\ln(x+y)-\frac{x}{x+y}=C$.

9. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx=\frac{2ydy}{x^3}$. პასუხი. $x^2-y^2=Cx^3$.

10. $\left(2xy^2+3x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2x}{y^2}\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+\dfrac{1}{y^2}-\right.$

$$\left.-\frac{2x^2}{y^3}\right)dy=0.$$

პასუხი: $x^3+y^3-\dfrac{x+y}{xy}+x^2\left(y^2+\dfrac{1}{y^2}\right)=C.$

11. $\left(\dfrac{x+y+1}{x^2}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx-\left(\dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0.$

პასუხი: $\ln\dfrac{y}{x}+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{y+1}{x}=C.$

12. $xdx+ydy=\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$

პასუხი: $x^2+y^2-2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}=C.$

13. $\left(\dfrac{2y^3}{x^4-y^4}+y-5\right)dx+\left(x-2y-7-\dfrac{2xy^2}{x^4-y^4}\right)dy=0.$

პასუხი: $\ln\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}+xy-5x-y^2-7y=C.$

14. $\left(\dfrac{y}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\operatorname{ctg} y\right)dx-\left(\dfrac{x}{\sin^2 y}+\right.$

$$\left.+\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}-\operatorname{tg} x\right)dy=0.$$

პასუხი: $x\operatorname{ctg} y+y\operatorname{tg} x+\arcsin\dfrac{x}{y}=C.$

ქვემოთ მოყვანილი დიფერენციალური განტოლებები ამოხსენით მაინტეგრებადი მამრავლის გამოყენებით:

$$\mu=\mu(x)$$

1. $(xy-1)\,dx+x^2dy=0.$ პასუხი: $x=Ce^{xy}.$

2. $[x^3(1+\ln x)+2y]\,dx+x(3x^2y^2-1)\,dy=0.$

პასუხი: $y^3-\dfrac{y}{x^2}+x\ln x=C.$

3. $y\,dx-x(xy+1)\,dy=0.$ პასუხი: $xy^2+2y=Cx.$

4. $(x^2-3y^2)\,dx+2xy\,dy=0.$ პასუხი: $x^2-y^2=Cx^3.$

5. $y\,dx+(1-e^x)\,dy=0.$ პასუხი: $e^x(1+Cy)=1.$

6. $(\operatorname{tg}^2 x+\sin y \cos x)\, dx=\sin x \cos y\, dy.$

პასუხი: $\operatorname{tg} x-\dfrac{\sin y}{\sin x}=C.$

7. $(x^2+y^2+1)\, dx+xy\, dy=0.$ პასუხი: $x^4+2x^2y^2+2x^2=C.$

8. $(x^2+y\cos^2 x)\, dx=x\cos^2 x\,(1-x\sin y)\, dy.$

პასუხი: $\operatorname{tg} x-\cos y-\dfrac{y}{x}=C.$

9. $x^3e^x dx=xdy-ydx.$ პასუხი: $e^x(x-1)-\dfrac{y}{x}=C.$

10. $(1-4x+2y)\, dx+(1+x)\, dy=0.$

პასუხი: $(1+x)^2 y+x-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{4}{3}x^3=C.$

$$\mu=\mu(y)$$

1. $y^2(x-y)\, dx+(1-xy^2)dy=0.$

პასუხი: $\dfrac{1}{2}x^2-xy-\dfrac{1}{y}=C.$

2. $y(1+y^2)\, dx+(xy^2+x+1)\, dy=0.$ პასუხი: $xy+\operatorname{arctg} y=C.$

3. $\cos x\, dx+(\sin x-y)\, dy=0.$ პასუხი: $\sin x=y-1+Ce^{-y}.$

4. $(2x+y)\, dx+(1-xy)\,(x+y)=0.$

პასუხი: $x(x+y)=1+Ce^{\frac{1}{2}y^2}.$

5. $2(x-1)\, dx+(x^2+y^2)\, dy=2(x-y)\, dy.$

პასუხი: $x^2+y^2-2x=Ce^{-y}.$

6. $(1+y^2)dx+(4xy-1)\, dy=0.$

პასუხი: $x(1+y^2)^2-y-\dfrac{1}{8}y^3=C.$

7. $ye^x\, dx-(2e^x+y^4)dy=0.$ პასუხი: $2e^x=y^2(C+y^2).$

8. $ydx=(x+y^2)dy=0$ პასუხი: $\dfrac{x}{y}-y=C.$

$$\mu=\mu(x+y),\quad \mu=\mu(x-y)$$

1. $(x+y)^2\, dx-a^2dy=0.$ პასუხი: $x+y=a\operatorname{tg}\dfrac{x+C}{a}.$

2. $y'=\sin(x-y).$ პასუხი: $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}}=C+x.$

3. $(x^3+y^2)dx+(x^2+y^3)\,dy+3xy\,(xdx+ydy)=(x^3-y^3)(dy-dx).$

პასუხი: $x^3+xy+y^3=C\,(x+y).$

4. $dx-(1+e^{2x+y})\,dy=0.$ პასუხი: $2e^y+3e^{-2x}=Ce^{-2y}.$

5. $dx-[(x-y)^2+1]\,dy=0.$ პასუხი: $(x-y)(C-y)=1.$

$$\mu=\mu(xy)$$

1. $3ydx+2xdy=xydy.$ პასუხი: $x^3y^2=Ce^y.$

2. $x^2y^2\,(ydx+xdy)=xdy-ydx.$ პასუხი: $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}.$

3. $(x^2y^2-xy+1)dx+x^2dy=0.$ პასუხი: $x=Ce^{\frac{2}{xy-1}}.$

4. $(xy-1)ydx+2xdy=0.$ პასუხი: $x(xy-3)^2=Cy^2.$

5. $xdy+ydx=2x^2y^2\,(xdx+ydy).$ პასუხი: $x^2+y^2+\dfrac{1}{xy}=C.$

6. $(1-xy)\,ydx+(1+xy)xdy=0.$ პასუხი: $y=Cxe^{\frac{1}{xy}}.$

7. $\left(\dfrac{1}{x^2}+y^2\right)dx+2dy=0.$ პასუხი: $\dfrac{2}{xy-1}-\ln x=C.$

8. $(xy-1)ydx+x^2ydy=0.$ პასუხი: $x=Ce^{xy}.$

სხვადასხვა სახის მაინტეგრებადი მამრავლის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

1. $\dfrac{1}{x}\,dx+\left(x-\dfrac{1}{y}\right)dy=0,\quad \mu=\mu\left(\dfrac{y}{x}\right).$

პასუხი: $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x}{y}=C.$

2. $3x\sin\dfrac{y}{x}\,dx=(xdy-ydx)\cos\dfrac{y}{x},\quad \mu=\mu\left(\dfrac{y}{x}\right).$

პასუხი: $x^2=C\sin^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{y}{x}\right).$

3. $\sqrt{x^2+y^2}\,(adx+bdy)=xdx+ydy,\ \mu=\mu\,(x^2+y^2).$

პასუხი: $ax+by-\sqrt{x^2+y^2}=C.$

4. $(x+y)^2\,dx+y\,(1-x)\,dy=0,\ \mu=\mu\,(x^2+y^2).$

პასუხი: $\sqrt{x^2+y^2}=C(x-1).$

5. $(x^2-y^2+1)xdx+(x^2-y^2)\,ydy=0,\quad \mu=\mu\,(x^2-y^2).$

პასუხი: $x^2+y^2+\ln\sqrt{2x^2+2y^2+1}=C.$

6. $(x^2+y^2+1)\,dx-2xydy=0, \quad \mu=\mu\,(x^2-y^2).$

პასუხი: $x^2-y^2+Cx=1.$

7. $2\,(x^3dx-y^3dy)=(3x^2y^2-1)\,(xdy-ydx), \quad \mu=\mu\,(x+y^3).$

პასუხი: $x^3+y=C\,(x+y^3).$

8. $(3y^2-x)\,dx+2y\,(y^2-3x)\,dy=0, \; \mu=\mu\,(x+y^2).$

პასუხი: $(x+y^2)^2=C\,(x-y^2).$

9. $(x^2+y^2)dx-y\,(x-y)\,dy=0. \quad \mu=\mu\,(x^3+y^3).$

პასუხი: $\dfrac{1}{3}\ln\,[(x+y)^2\sqrt{x^2-xy+y^2}]+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{2x-y}{\sqrt{3}\,y}=C.$

ამოხსენით ეილერის და რიკატის შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

1. $y'=y^2+\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x^2}.$ პასუხი: $y=\dfrac{1+\ln x-C}{Cx-x\ln x}.$

2. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{16x^2}+\dfrac{1}{2x}\,y-y^2=0.$

პასუხი: $y=-\dfrac{1}{4x}-\dfrac{4}{Cx+x\ln x}.$

3. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{4x^2}-y^2=0.$ პასუხი: $y=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{Cx+x\ln x}.$

4. $y'+\dfrac{y^2}{4}+x^{-2}=0.$ პასუხი: $xy=2+\dfrac{1}{\ln\,(Cx)}.$

5. $xy'+3y-y^2-2x^2=0.$

პასუხი: $y=3+\dfrac{x^2}{y_1}, \quad y_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{y_2},\; y_2=\sqrt{2}x\,\mathrm{tg}[\sqrt{2}\,(x+C)].$

ამოხსენით ლაგრანჟისა და კლეროს შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

1. $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}.$ პასუხი: $y=Cx+\sqrt{1-C^2};\; y^2-x^2=1.$

2. $y=xy'+y'\,(1-y').$ პასუხი: $y=Cx+C(1-C);\; 4y=(1+x)^2.$

3. $y=xy'+y'^2.$ პასუხი: $y=C\,(x+C);\; x^2+4y=0.$

4. $y=(x+1)y'^2.$ პასუხი: $\sqrt{y}=C+\sqrt{x+1}.$

5. $y=\dfrac{1}{2}\,x\left(y'+\dfrac{4}{y'}\right).$ პასუხი: $y=Cx^2+\dfrac{1}{C};\; y^2=2x^2.$

6. $y=(1+y')x+y'^2$.

პასუხი: $x=2(1-p)+Ce^{-p}$, $y=2-p^2+Ce^{-p}(1+p)$

7. $y=-\frac{1}{2}y'(2x+y')$.

პასუხი: $x=-\frac{1}{3}p+\frac{C}{\sqrt{p}}$, $y=-\frac{1}{6}p^2-C\sqrt{p}$.

8. $y=y'\ln y'$. პასუხი: $y=(\sqrt{2x+C}-1)e^{\sqrt{2x+C}-1}$.

9. $y=y'+\frac{1}{y'}e^x$. პასუხი: $e^x=(y-C)C$; $y^2+4e^x=0$.

10. $yy'^2-2xy'+y=0$. პასუხი: $y^2-2Cx+C^2=0$; $y^2=x^2$.

11. $3y'^3-x^4y'+2x^3y=0$.

პასუხი: $2y-Cx^2+3C^3=0$; $9y\pm x^3=0$.

12. $y=(2+y')\sqrt{1-y'}$. პასუხი: $y+C-\frac{(x+C)^3}{27}=0$; $y=2$.

13. $x=\frac{1}{y'}\sqrt{1+y'^2}$. პასუხი: $x+C=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

14. $x=\frac{y^3y'}{a^2+y^2y'^2}$. პასუხი: $C^2x^2-Cy^2+a^2=0$; $y^4=4a^2x^2$.

15. $y'^3-4xyy'+8y^2=0$. პასუხი: $C^3y=(Cx-1)^2$; $27y=4x^3$.

16. $y=xy'+a\sqrt[3]{1-y'^3}$.

პასუხი: $y=Cx+a\sqrt[3]{1-C^3}$; $y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$.

17. $xy^2y'^2-y^3y'+a^2x=0$.

პასუხი: $C^2x^2-Cy^2+a^2=0$; $y^4-4a^2x^2=0$.

18. $(1-x^2)y'^2+2xyy'+x^2=0$.

პასუხი: $x^2+y^2-1=(y+C)^2$; $x^2+y^2=1$.

ამოხსენით პირველი რიგის n ხარისხის შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

1. $y'^2-ax=0$. პასუხი: $4ax^3-9(y+C)^2=0$.

2. $xyy'^2-(x^2+y^2)y'+xy=0$. პასუხი: $(y-Cx)(y^2-x^2+C)=0$.

3. $y'^2+\frac{3y}{x}y'+\frac{2y^2}{x^2}=0$. პასუხი: $(xy+C)(x^2y+C)=0$.

4. $y'^3-7y'+6=0$. პასუხი: $(y+C)^3-7x^2(y+C)+6x^3=0$.

5. $(1-x^2)y'^3+4x(1-x^2)y'^2-y'-4x=0$.

პასუხი: $(y+2x^2+C)[(y+C)^2-(\arcsin x)^2]=0$.

6. $(y'^2-y)^2-y(y'^2+y)^2=0$.

პასუხი: $x=C\pm 2\sqrt{1-y}\pm\arcsin(2y-1)$.

7. $y^2(x^2+y^2)^2y'^2+2xyy'-x^2y'^2-y^2=0$.

პასუხი: $y=x\,\mathrm{tg}\left(C\pm\frac{y^2}{2}\right)$.

თავი II

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალის არსებობისა და ერთადობის საკითხები

ქვემოთ, წინასწარ, შევეხებით ზოგადი მათემატიკის ზოგიერთ საკითხს, რომლებსაც გამოყენება აქვთ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის არსებობისა და ერთადობის დამტკიცებაში.

§ 1. **მეტრული სივრცე.** ცნობილია, რომ მათემატიკური ანალიზის მრავალი საკითხი დაკავშირებულია რიცხვებს შორის მანძილის ცნებასთან. დიდი მნიშვნელობა აქვს ნებისმიერი სიმრავლის ელემენტებს (წერტილებს) შორის მანძილის (მეტრიკის) განსაზღვრას. იგი საშუალებას გვაძლევს ზოგადი ბუნების სიმრავლეში შემოვიღოთ ანალიზის მნიშვნელოვანი ოპერაციის — ზღვარზე გადასვლის ცნება.

მეტრული სივრცის განსაზღვრა შემოიღო მ. ფრეშემ მეოცე საუკუნის დასაწყისში. ნებისმიერ სიმრავლეს X მეტრული სივრცე ეწოდება, თუ ყოველ ორ ელემენტს $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ შესაძლოა შევუსაბამოთ არაუარყოფითი რიცხვი $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \geqslant 0$, ამასთან $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $x^{(1)} = x^{(2)}$ (იგივეობის აქსიომა).

2) $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \rho(x^{(2)}, x^{(1)})$ (სიმეტრიის აქსიომა).

3) ნებისმიერი სამი ელემენტისათვის $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \in X$ მართებულია უტოლობა

$$\rho(x^{(1)}, x^{(3)}) \leqslant \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) + \rho(x^{(2)}, x^{(3)})$$

(სამკუთხედის აქსიომა).

ხშირად რიცხვს $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$ უწოდებენ მანძილს $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ ელემენტებს შორის. მოყვანილი განსაზღვრიდან ჩანს, რომ $\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$ არის ორი $x^{(1)}$ და $x^{(2)}$ ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია. ამ ფუნქციას სივრცის მეტრიკას უწოდებენ.

ვიტყვით, რომ მიმდევრობა $\{x_n\} \subset X$ კრებადია $x^* \in X$ ელემენტისაკენ თუ $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x^*) = 0$. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ ელემენტთა მიმდევრობა $\{x_n\}$ კრებადია x^* ელემენტისაკენ, თუ ნებისმიერი რიცხვისათვის $\varepsilon > 0$ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N = N(\varepsilon)$, რომ

$\rho(x_n, x^*) < \varepsilon$ როცა $n \geq N$. x^* ელემენტს უწოდებენ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარს და წერენ $x_n \to x^*$.

§ 2. მანძილის ზოგიერთი თვისება. მართებულია შემდეგი

თეორემა. $\rho(x, y)$ არის მისი $x, y \in X$ არგუმენტების უწყვეტი ფუნქცია.

მართლაც, ვთქვათ $x_n \to x^*$ და $y_n \to y^*$, სადაც $\{x_n\}, \{y_n\}, x^*, y^* \subset X$, მაშინ სამკუთხედის აქსიომიდან ადვილად გამოვიყვანთ

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x^*, y^*)| \leq \rho(x_n, x^*) + \rho(y_n, y^*),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x^*, y^*).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა. კრებად მიმდევრობას $\{x_n\} \subset X$ აქვს მხოლოდ ერთი ზღვარი.

ვთქვათ, $x_n \to x^*$ და $x_n \to x^{**}$, როცა $n \to \infty$ და $x^* \neq x^{**}$. გამოვიყენოთ სამკუთხედის აქსიომა ელემენტებისათვის $x^*, x^{**}, x_n \in X$, გვექნება

$$\rho(x^*, x^{**}) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, x^{**}).$$

თანახმად დაშვებისა, როცა $n \to \infty$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფვის ნულისაკენ. მარცხენა ნაწილი არაუარყოფითი რიცხვია. ამ პირობებში უტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $x^* = x^{**}$. ეს ეწინააღმდეგება დაშვებას და თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა. თუ $\{x_n\}, x^* \subset X$ და $x_n \to x^*$, ხოლო $y \in X$ არის ნებისმიერი ფიქსირებული ელემენტი, მაშინ რიცხვითი მიმდევრობა $\{\rho(x_n, y)\}$ შემოსაზღვრულია.

მართლაც, გვაქვს

$$\rho(x_n, y) \leqslant \rho(x_n, x^*) + \rho(x^*, y).$$

რაკი $x_n \to x^*$, ამიტომ რიცხვთა მიმდევრობა $\{\rho(x_n, x^*)\}$ შემოსაზღვრულია რაღაც C_1 რიცხვით. რაც შეეხება $\rho(x^*, y)$ მანძილს, იგი სასრული რიცხვია. ამრიგად, $\rho(x_n, y) \leqslant C_1 + \rho(x^*, y) = C$, როცა $n = 1, 2, \ldots$

დავამტკიცოთ კიდევ შემდეგი

თეორემა. თუ მიმდევრობა $\{x_n\} \subset X$ კრებადია ზღვარისაკენ $x^* \in X$, მაშინ ყოველი ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ აგრეთვე კრებადი იქნება იმავე x^* ზღვრისაკენ.

პირობის თანახმად, ნებისმიერი რიცხვისათვის $\varepsilon > 0$ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N = N(\varepsilon)$, რომ როცა $n \geq N$, მაშინ $\rho(x_n, x^*) < \varepsilon$.

მაგრამ, მაშინ $\rho(x_{n_k}, x^*) < \varepsilon$, როცა $n_k \geq N$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$ კრებადია x^* ზღვრისაკენ.

§ 3. **მეტრული სივრცის მაგალითები.** 1. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლე $C[a, b]$, რომელშიც $x(t), y(t) \in C[a, b]$ ელემენტებს შორის მანძილი განსაზღვრულია ტოლობით:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|. \tag{3.1}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული მანძილისათვის, ცხადია, დაცულია იგივეობისა და სიმეტრიის აქსიომები. დავრწმუნდეთ, რომ შესრულებულია სამკუთხედის აქსიომაც; მართლაც, თუ $x(t), y(t), z(t) \in C[a, b]$ ნებისმიერი ელემენტებია, მაშინ $t \in [a, b]$ არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის მართებულია უტოლობა

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|,$$

საიდანაც

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a, b]} |z(t) - y(t)|,$$

ე. ი.

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

ელემენტების მიმდევრობის კრებადობა (3.1) მეტრიკის მიხედვით ნიშნავს ამ მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას უწყვეტი ზღვარითი ფუნქციისაკენ. მართლაც, ვთქვათ მიმდევრობა $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$ კრებადია $x^*(t) \in C[a, b]$ ფუნქციისაკენ (1.1) მეტრიკის მიხედვით. მაშინ, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N = N(\varepsilon)$, რომ როცა $n \geq N$, შესრულდება უტოლობა $\max\limits_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x^*(t)| < \varepsilon$. მაშასადამე, $t \in [a, b]$ არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, როცა $n \geq N$, მართებულია უტოლობა: $|x_n(t) - x^*(t)| < \varepsilon$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მიმდევრობა $\{x_n(t)\}$ თანაბრად კრებადია $x^*(t)$ უწყვეტი ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე.

პირიქით, თუ მიმდევრობა $\{x_n(t)\}$ თანაბრად კრებადია $x^*(t)$ ფუნქციისაკენ $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x^*) = 0$.

2. ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ისეთი უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე $C^{(k)}[a, b]$, რომლებსაც ამ სეგმენტზე აქვთ ყველა წარმოებულები k რიგამდე ჩათვლით. ამასთან, იგულისხმება, რომ ნული რიგის წარმოებული არის თვით მოცემული ფუნქცია. მანძილი ნებისმიერ $x(t), y(t) \in C^{(k)}[a, b]$ ელემენტებს შორის განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\rho(x, y)=\sum_{i=0}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|. \tag{3.2}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს პირველი პარაგრაფის 1) — 3) აქსიომებს. რაიმე $\{x_n(t)\} \subset C^{(k)}[a, b]$ მიმდევრობის კრებადობა ზღვარითი ელემენტისაკენ $x^*=x^*(t) \subset C^{(k)}[a, b]$ ნიშნავს, როგორც თვით $\{x_n(t)\}$ მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას x^* ელემენტისაკენ, ისე წარმოებულთა $\{x_n^{(i)}(t)\}$ მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას ზღვარითი ფუნქციისაკენ $x^{*(i)}=x^{*(i)}(t)$, $i=1, 2,\ldots, k$.

§ 4. **სრული სივრცე.** შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა: მეტრული X სივრცის ელემენტების უსასრულო მიმდევრობას $\{x_n\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობა ეწოდება, თუ ნებისმიერი რიცხვისათვის $\varepsilon>0$ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N=N(\varepsilon)$, რომ როცა $m, n \geqslant N$, მაშინ,

$$\rho(x_m, x_n)<\varepsilon.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ მიმდევრობა $\{x_n\}$ კრებადია ელემენტისაკენ $x^* \in X$, მაშინ $\{x_n\}$ იქნება ფუნდამენტური მიმდევრობა. ეს წინადადება გამომდინარეობს უტოლობიდან:

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x^*)+\rho(x^*, x_n),$$

რომლის მარჯვენა ნაწილი მიისწრაფვის ნულისაკენ როცა $m, n \to \infty$.

შებრუნებული წინადადება, საზოგადოდ, არ არის მართებული.

განსაზღვრა. თუ მეტრული სივრცე X ისეთია, რომ ნებისმიერი ფუნდამენტური მიმდევრობა $\{x_n\} \subset X$ კრებადია ამავე სივრცის რაიმე ელემენტისაკენ x^*, მაშინ X სივრცეს სრული სივრცე ეწოდება.

დავამტკიცოთ, რომ სივრცე $C[a, b]$ სრულია. მართლაც, ვთქვათ, $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$ არის ნებისმიერი ფუნდამენტური მიმდევრობა. მაშინ, თანახმად ფუნდამენტური მიმდევრობის განსაზღვრისა, როგორიც უნდა იყოს რიცხვი $\varepsilon>0$ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N=N(\varepsilon)$, როცა $m, n \geqslant N$, მაშინ

$$\rho(x_m, x_n)=\max_{t \in [a, b]} |x_m(t)-x_n(t)|,$$

ე. ი.

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon, \text{ ყველა } t \in [a, b].$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ უწყვეტი ფუნქციების მიმდევრობისათვის $\{x_n(t)\}$ შესრულებულია თანაბარი კრებადობის კოშის პირობა $[a, b]$ სეგმენტზე. ვთქვათ $x^*(t)$ წარმოადგენს ამ მიმდევრობის ზღვარით ფუნქციას. ფუნქცია $x^*(t)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ე. ი. $x^*(t) \in C[a, b]$. წინადადება დამტკიცებულია.

§ 5. **ოპერატორი მეტრულ სივრცეში.** ავიღოთ ორი მეტრული სივრცე X და Y. ვთქვათ, რომ ყოველ ელემენტს $x \in X$, გარკვეული წესით, შესაძლოა შევუსაბამოთ ერთი გარკვეული ელემენტი $y \in Y$. შესაბამისობის წესი აღვნიშნოთ U ასოთი, ხოლო შესაბამისობის ფაქტი ჩავწეროთ ასე: $y = Ux$ ან $y = U(x)$. ამ პირობებში იტყვიან, რომ X სივრცეში განსაზღვრულია გადასახვა ანუ ოპერატორი U, რომელიც X სივრციდან მოქმედებს Y სივრცეში. როცა x გაირბენს X სივრცის ყველა წერტილს, მაშინ ოპერატორი $y = Ux$ წარმოქმნის გარკვეულ $U(X) \subseteq Y$ სიმრავლეს. X სივრცეს უწოდებენ U ოპერატორის განსაზღვრის არეს, ხოლო $U(X)$ სიმრავლეს უწოდებენ U ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლეს. კერძოდ, როცა Y რიცხვთა სიმრავლეა, მაშინ $y = Ux$ ოპერატორს უწოდებენ ფუნქციონალს. თუ, X რიცხვითი სივრცეა, ხოლო Y — რაიმე მეტრული სივრცე (განსხვავებული რიცხვითი X სივრცისაგან), მაშინ $y = Ux$ ოპერატორს უწოდებენ სკალარულ არგუმენტზე დამოკიდებულ ოპერატორს ან აბსტრაქტულ ფუნქციას. როცა X და Y ორივე რიცხვითი სივრცეებია, მაშინ ოპერატორს უწოდებენ სკალარულ ფუნქციას. ვიტყვით, რომ U ოპერატორი გადასახავს X სივრცეს Y სივრცეზე, თუ $U(X) = Y$. იმ შემთხვევაში, როცა $U(X) \subset Y$ ვიტყვით, რომ U ოპერატორი გადასახავს X სივრცეს Y სივრცეში.

ის, რაც X და Y სივრცეების შესახებ ითქვა, შეიძლება გავიმეოროთ ამ სივრცეებში აღებული სიმრავლეებისთვისაც. ვთქვათ, M არის X სივრცის რაიმე სიმრავლე, რომელსაც U ოპერატორი გადასახავს Y სივრცის სიმრავლეში $U(M)$. ხშირად, $U(M) \subset Y$ სიმრავლეს უწოდებენ U ოპერატორის სახეს, ხოლო M სიმრავლეს—U ოპერატორის პირველ სახეს.

ვთქვათ, სიმრავლე $M \subset X$ არის U ოპერატორის განსაზღვრის არე, ხოლო სიმრავლე $U(M) \subset Y$ — მნიშვნელობათა არე. ვიტყვით, რომ U შებრუნებადი ოპერატორია, თუ $Ux = y$ განტოლებას, ყოველი ელემენტისათვის $y \in U(M)$, აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x \in M$. როცა U შებრუნებადი ოპერატორია, მაშინ ყოველ $y \in U(M)$ ელემენტს ეთანადება მხოლოდ ერთი ელემენტი $x \in M$, რომელიც წარმოადგენს $Ux = y$ განტოლების ამონახსნს. აღვნიშნოთ ეს ამონახსნი ასე: $U^{-1}y = x$. ოპერატორს U^{-1} ეწოდება U ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი. ცხადია, რომ ნებისმიერი ელემენტისათვის $x \in M$ გვექნება $U^{-1}Ux = x$, ხოლო ნებისმიერი $y \in U(M)$ ელემენტისათვის $UU^{-1}y = y$.

§ 6. **ბანახისა და კაჩოპოლის თეორემა**[1]. ვიგულისხმოთ, რომ X სრული მეტრული სივრცეა, ხოლო $M \subset X$—ჩაკეტილი სიმრავლე. ვთქვათ

---

[1] ამ თეორემას, ხშირად, უძრავი წერტილის პრინციპსაც უწოდებენ.

U ოპერატორი M სიმრავლის ელემენტებს ამავე სიმრავლის ელემენტებში გადასახავს: $U(M) \subset M$. ელემენტს $x \in M$ ეწოდება U ოპერატორის უძრავი წერტილი, თუ

$$Ux = x. \tag{6.1}$$

ავიღოთ ორი ნებისმიერი ელემენტი $x_1, x_2 \in M$. თუ შესრულებულია უტოლობა

$$\rho(Ux_1, Ux_2) \leqslant \alpha \rho(x_1, x_2) \tag{6.2}$$

სადაც $0 < \alpha < 1$, მაშინ U ოპერატორს კუმშვის ოპერატორი ეწოდება.

დავამტკიცოთ ბანახისა და კაჩოპოლის შემდეგი

თეორემა. თუ U კუმშვის ოპერატორია და სრული სივრციდან X ისევ X სივრცეში მოქმედებს, მაშინ X სივრცეში არსებობს U ოპერატორის ერთადერთი უძრავი $x^* \in X$ წერტილი: $Ux^* = x^*$. ამასთან, x^* წარმოადგენს ზღვარს $\{Ux_m\} \subset X$ მიმდევრობისა, სადაც $Ux_m = x_{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, x_0 — ნებისმიერი ელემენტია. გარდა ამისა, შესრულებულია შეფასება:

$$\rho(x_m, x^*) \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1). \tag{6.3}$$

თეორემის დასამტკიცებლად ავიღოთ ნებისმიერი ელემენტი $x_0 \in X$ და ავაგოთ შემდეგი მიმდევრობა:

$$x_1 = Ux_0, \; x_2 = Ux_1, \ldots, x_m = Ux_{m-1}, \ldots \subset X.$$

დავამტკიცოთ, რომ მიმდევრობა $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ ფუნდამენტურია. თუ გამოვიყენებთ თეორემის პირობას, გვექნება:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ux_0, Ux_1) \leqslant \alpha\rho(x_0, x_1) = \alpha\rho(x_0, Ux_0),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ux_1, Ux_2) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2) \leqslant \alpha^2\rho(x_0, Ux_0),$$

. . . .

. . . .

აქედან, ნებისმიერი ნიშნაკისათვის $n > m$, მივიღებთ:

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1})\, \rho(x_0, Ux_0) = \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, Ux_0).$$

გამოვიყენოთ პირობები: $\alpha < 1$, $n > m$, $\alpha^m - \alpha^n < \alpha^m$, გვექნება

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \rho(x_0, Ux_0). \tag{6.4}$$

ახლა ცხადია, როცა $m, n \to \infty$, მაშინ $\rho(x_m, x_n) \to 0$. ამრიგად მიმდევრობა $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ ფუნდამენტურია და, ვინაიდან X სრული სივრცეა, ამიტომ არსებობს ისეთი ელემენტი $x^* \in X$, რომ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x^*) = 0.$$

დავამტკიცოთ, რომ x^* არის U ოპერატორის უძრავი წერტილი ანუ (6.1) განტოლების ამონახსნი. გვაქვს

$$\rho(x^*, Ux^*) \leqslant \rho(x^*, x_m) + \rho(x_m, Ux^*) \leqslant \rho(x^*, x_m) +$$
$$+ \rho(Ux_{m-1}, Ux^*) \leqslant \rho(x^*, x_m) + \alpha\rho(x_{m-1}, x^*).$$

რაკი x^* არის $\{x_m\}$ მიმდევრობის ზღვარი, ამიტომ ნებისმიერი რიცხვისათვის $\varepsilon > 0$ და საკმარისად დიდი ნიშნაკისათვის m შესრულდება უტოლობები

$$\rho(x^*, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_{m-1}, x^*) > \frac{\varepsilon}{2\alpha},$$

რომელთა დახმარებით წინა უტოლობიდან მივიღებთ: $\rho(x^*, Ux^*) < \varepsilon$. რადგან ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ: $Ux^* = x^*$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ამონახსნი x^* ერთადერთია. დავუშვათ, რომ განტოლებას (6.1), გარდა x^* ამონახსნისა, აქვს ამონახსნი x^{**}, მაშინ გვექნება

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(Ux^*, Ux^{**}) \leqslant \alpha\rho(x^*, x^{**})$$

საიდანაც მივიღებთ: $\alpha \geqslant 1$. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

თეორემის დამტკიცების დასამთავრებლად საჭიროა ვუჩვენოთ, რომ მართებულია შეფასება (6.3). ამისათვის უტოლობაში (6.4) დავაფიქსიროთ m და გადავიდეთ ზღვარზე როცა $n \to \infty$. გარდა ამისა, გამოვიყენოთ ტოლობა $Ux_0 = x_1$, მივიღებთ (6.3). თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალის არსებობისა და ერთადობის თეორემა. დავამტკიცოთ პიკარის შემდეგი

თეორემა. ვ თ ქ ვ ა თ მ ო ც ე მ უ ლ ი ა დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.1}$$

დ ა ს ა წ ყ ი ს ი პ ი რ ო ბ ა

$$y_0 = y(x_0), \tag{7.2}$$

ს ა დ ა ც $f(x, y)$ გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა გ ა რ კ ვ ე უ ლ ა რ ე შ ი (D), რ ო მ ე ლ ი ც შ ე ი ც ა ვ ს $(x_0, y_0) \in (D)$ წ ე რ ტ ი ლ ს. ვ ი გ უ ლ ი ს ხ მ ო თ, რ ო მ (D) ა რ ე შ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა $f(x, y)$ უ წ ყ ვ ე ტ ი ა დ ა y ც ვ ლ ა დ ი ს მ ი მ ა რ თ ა კ მ ა ყ ო ფ ი ლ ე ბ ს ლ ი პ შ ი ც ი ს პ ი რ ო ბ ა ს:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M\,|y_1 - y_2|, \tag{7.3}$$

სადაც M მუდმივია.

მაშინ გარკვეულ სეგმენტზე $|x - x_0| \leqslant d$ არსებობს (7.1) განტოლების ინტეგრალი $y = \varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას (7.2).

დამტკიცებისათვის შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალური განტოლება (7.1) და საწყისი პირობა (7.2) შესაძლოა შევცვალოთ შემდეგი ეკვივალენტური ფუნქციონალური განტოლებით

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{7.4}$$

რაკი $f(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციაა (D) არეში, ამიტომ რაღაც დახურულ არეში $(D') \subset (D)$, რომელიც შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს, გვექნება: $|f(x, y)| \leqslant N$, $(x, y) \in (D')$.

ახლა, რიცხვი $d > 0$ ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულებული იყოს პირობები:

1) როცა $|x - x_0| \leqslant d$, $|y - y_0| \leqslant Nd$, მაშინ $(x, y) \subset (D')$,

2) $Md < 1$.

ამის შემდეგ, განვიხილოთ $|x - x_0| \leqslant d$ სეგმენტზე განსაზღვრული ისეთი უწყვეტი φ ფუნქციების სიმრავლე C^*, რომლებისთვისაც $|\varphi(x) - y_0| \leqslant Nd$. მანძილი $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ფუნქციებს შორის იყოს $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_{x} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$. აღვნიშნოთ $|x - x_0| \leqslant d$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის სიმრავლე $C[x_0 - d, x_0 + d]$ სიმბოლოთი. იგი, როგორც ვიცით (იხ. § 4), სრული სივრცეა. სიმრავლე C^* წარმოადგენს $C[x_0 - d, x_0 + d]$ სივრცის ქვესივრცეს. ამის გამო C^* არის სრული სივრცე.

ავიღოთ ოპერატორი $\Psi = U\varphi$, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$\Psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt,$$

სადაც $|x - x_0| \leqslant d$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $U\varphi$ მოქმედებს C^* სივრციდან ისევ ამ სივრცეში და წარმოადგენს კუმშვის ოპერატორს. მართლაც, გვაქვს

$$|\Psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \leqslant Nd.$$

ე. ი. $UC^* \subset C^*$. გარდა ამისა, თუ $\Psi_1(x), \Psi_2(x) \in C^*$, მაშინ

$$|\Psi_1(x) - \Psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant M d \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|,$$

ე. ი.

$$\rho(U\varphi_1, U\varphi_2) \leqslant \alpha \rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

სადაც $\alpha = Md < 1$.

ამრიგად, განტოლებას $U\varphi = \varphi$, ე. ი. განტოლებას (7.4) სივრცეში C^* აქვს ერთადერთი ამოხსნა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება. შევისწავლოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია C პარამეტრზე დამოკიდებული ბრტყელი წირების ოჯახი

$$y = y(x, C) \tag{8.1}$$

და ცნობილია, რომ xoy სიბრტყის (ან ამ სიბრტყის რაიმე არეს) ყოველ წერტილზე გადის ამ ოჯახის მხოლოდ ერთი წირი.

მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ზოგადი ინტეგრალი არის წირთა ოჯახი (8.1).

ამოცანის გადასაწყვეტად გავაწარმოვოთ ტოლობა (8.1) ცვლადით:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x(x, C). \tag{8.2}$$

პირობის ძალით, xoy სიბრტყის ყოველ წერტილზე გადის წირების (8.1) ოჯახის ერთადერთი წირი. ეს იმას ნიშნავს, რომ (8.1) განტოლებაში რიცხვთა ყოველ x და y წყვილს შეესაბამება C პარამეტრის ერთადერთი მნიშვნელობა. თუ C პარამეტრის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (8.2) განტოლებაში, მივიღებთ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის გამოსახულებას x და y ცვლადებით, ე. ი. მივიღებთ საძიებელ დიფერენციალურ განტოლებას.

ამრიგად, დაყენებული ამოცანა პრაქტიკულად რომ გადავწყვიტოთ, საკმარისია (8.1) და (8.2) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ პარამეტრი C.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ $y = Cx^2$ წირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება. ამისათვის გავაწარმოვოთ მოცემული განტოლება, გვექნება: $\frac{dy}{dx} = 2Cx$. ახლა, გამოვრიცხოთ უკანასკნელი და მოცემული ტოლობებიდან პარამეტრი C, მივიღებთ: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$. ასეთია დიფერენციალური განტოლება, რომლის ზოგადი ინტეგრალია $y = Cx^2$.

§ 9. ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახის მომვლები. განვიხილოთ ბრტყელი წირების ოჯახი

$$\varphi(x, y, C)=0, \tag{9.1}$$

სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი პარამეტრია, ფუნქცია φ არის თავისი არგუმენტების მიმართ წარმოებადი ფუნქცია გარკვეულ (D) არეში. ბრტყელ წირს (l) ეწოდება (9.1) ოჯახის მომვლები, თუ მისი ყოველი წერტილი არის ამ ოჯახის რომელიმე წირთან შეხების წერტილი. ამასთან, (l) წირის ყოველი ორი სხვადასხვა წერტილი არის (9.1) ოჯახის ორ სხვადასხვა წირთან შეხების წერტილი.

ვთქვათ წირთა (9.1) ოჯახს მომვლები გააჩნია. მომვლების განტოლება იყოს $y=y(x)$, სადაც ვიგულისხმოთ, რომ $y(x)$ არის x ცვლადის წარმოებადი ფუნქცია. ავიღოთ (l) წირზე ნებისმიერი წერტილი $M(x, y)$. მომვლების განსაზღვრის თანახმად, $M(x, y)$ არის წირთა (9.1) ოჯახის ერთ-ერთი (q) წირის წერტილი. (q) წირს შეესაბამება C პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობა, რომელიც მოცემული წერტილისათვის $M(x, y)$ განისაზღვრება (9.1) განტოლებიდან: $C=C(x. y)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ მომვლების ყოველი წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$\varphi(x, y; C(x, y))=0. \tag{9.2}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ წირთა (9.1) ოჯახის მომვლების განტოლება არის (9.2). მომვლების ფაქტიური მოძებნისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $C=C(x, y)$ არის დიფერენცირებადი ფუნქცია (D) არეში. მოვძებნოთ მომვლების კუთხური კოეფიციენტი $M(x, y)$ წერტილში. ამისათვის ჩავთვალოთ, რომ (9.1) განტოლებაში y არის x ცვლადის არაცხადი ფუნქცია და გავაწარმოვოთ (9.2) განტოლება x ცვლადით, შედეგი ასე ჩავწეროთ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{9.3}$$

რადგან (9.1) ოჯახის მოცემული წირისათვის C მუდმივია, ამიტომ ამ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი $M(x, y)$ წერტილში გამოითვლება განტოლებიდან

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}=0, \tag{9.4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0$. ცხადია, $M(x, y)$ წერტილში მომვლების მხების და (9.1) ოჯახის სათანადო წირის მხების კუთხური კოეფიციენტები თანატოლია. ამის გამო, (9.3) და (9.4) განტოლებებიდან, გვექნება

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

ვინაიდან წირთა (9.1) ოჯახის მომვლების წერტილებისათვის $C(x, y)$ არ არის მუდმივი, ამიტომ

$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\neq 0$$

და წინა განტოლებიდან მივიღებთ $\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$.

ამრიგად, წირთა (9.1) ოჯახის მომვლების განსაზღვრისათვის გვექნება შემდეგი ორი განტოლება:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x, y, C)=0,\\&\frac{\partial \varphi(x, y, C)}{\partial C}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

ამ განტოლებებიდან C პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ მომვლების განტოლებას.

ცხადია, ბრტყელ წირთა (9.1) ოჯახის მომვლები, საზოგადოდ, არ ეკუთვნის ამ ოჯახს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. განტოლებათა ერთობლიობამ (9.5) შესაძლოა მომვლების ნაცვლად მოგვცეს წირთა (9.1) ოჯახის განსაკუთრებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. მართლაც, ვთქვათ წირთა (9.1) ოჯახს გააჩნია განსაკუთრებული წერტილები. გამოვსახოთ განსაკუთრებული წერტილების x და y კოორდინატები (9.1) განტოლებაში შემავალი C პარამეტრით:

$$x=\alpha(C),\ y=\beta(C), \tag{9.6}$$

სადაც $\alpha(C)$ და $\beta(C)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ (9.1) განტოლებიდან დავწერთ: $\varphi(\alpha(C), \beta(C), C)=0$, საიდანაც C პარამეტრით გაწარმოების შემდეგ, გვექნება

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\alpha}{dC}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\beta}{dC}+\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0. \tag{9.7}$$

რადგან განსაკუთრებულ წერტილებში $\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$, ამიტომ (9.7) განტოლებიდან მივიღებთ $\frac{\partial \varphi}{\partial C}=0$. მაშასადამე, (9.5) განტოლებებს აკმაყოფილებს წირთა (9.1) ოჯახის განსაკუთრებული წერტილების კოორდინატებიც.

ამრიგად, ყოველი წირი, რომელიც (9.5) განტოლებით განისაზღვრება, ყოველთვის არ იქნება წირთა (9.1) ოჯახის მომვლები და, როცა ხსენებული წირი მოძებნილია, საჭიროა დამატებით გამოვიკვლიოთ იგი წირთა (9.1) ოჯახის მომვლებია თუ ამ ოჯახის განსაკუთრებული წერტი-

ლების გეომეტრიული ადგილი. ზოგჯერ განტოლებათა ერთობლიობა (9.5) განსაზღვრავს როგორც წირთა (9.1) ოჯახის მომვლებს, ისე ამ ოჯახის განსაკუთრებული წერტილების გეომეტრიულ ადგილს. იგულისხმება, რომ ზემონათქვამი მართებულია მაშინ, როცა წირთა (9.1) ოჯახს აქვს მომვლები, ან აქვს განსაკუთრებული წერტილები, ან ორივე ერთად.

§ 10. წირთა ოჯახის მომვლების მაგალითები. 1. ვთქვათ მოცემულია წრეწირების ოჯახი:

$$(x-C)^2+y^2-a^2=0. \tag{10.1}$$

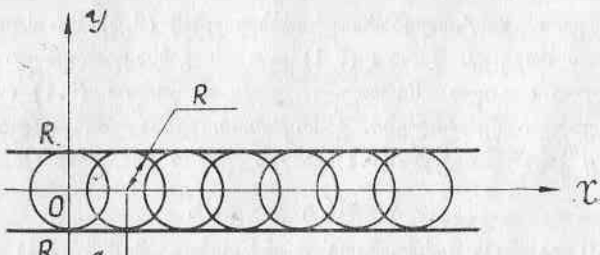
მოვძებნოთ მისი მომვლები.

ამოხსნა. გავაწარმოვოთ (10.1) განტოლება C პარამეტრით, გვექნება

$$2(x-C)=0 \tag{10.2}$$

ახლა (10.1) და (10.2) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ პარამეტრი C, მივიღებთ $y=\pm a$.

ამრიგად, წრეწირთა (10.1) ოჯახის მომვლები არის Ox ღერძის პარალელური წრფეები $y=a$ და $y=-a$ (იხ. ნახ. 3).



ნახ. 3.

2. აეიღოთ α პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ოჯახის განტოლება:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{10.3}$$

მოვძებნოთ ამ ოჯახის მომვლები.

ამოხსნა. (10.3) განტოლების α პარამეტრით გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ

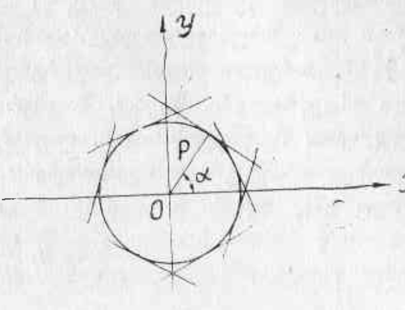
$$y\cos\alpha-x\sin\alpha=0$$

აქედან და (10.3) განტოლებებიდან, α პარამეტრის გამორიცხვის შემდეგ, გვექნება

$$x^2+y^2=p^2.$$

მაშასადამე, წრფეთა (10.3) ოჯახის მომვლები არის წრეწირი, რომლის რადიუსია p (იხ. ნახ. 4).

3. ვთქვათ, კოორდინატთა სათავიდან, ჰორიზონტთან α კუთხის დახრილობით და საწყისი V_0 სიჩქარით, გასროლილია მატერიალური წერტილი $M(x, y)$, რომელზედაც მხოლოდ სიმძიმის ძალა მოქმედებს. თუ Ox ღერძს ჰორიზონტის გასწვრივ ავირჩევთ, Oy ღერძს ვერტიკალურად ზევით მივმართავთ, მაშინ, როგორც ცნობილია, წერტილის მოძრაობის განტოლებები იქნება



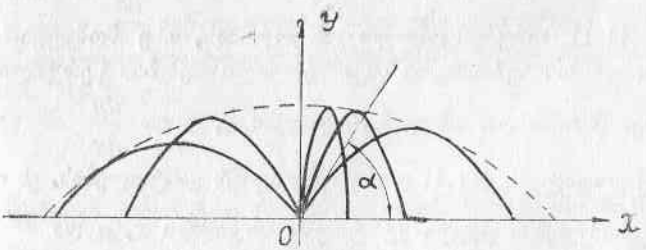
ნახ. 4.

$$\left.\begin{aligned} x &= V_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y &= V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}\right\}$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ მოძრაობის ტრაექტორიას

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2, \tag{10.4}$$

სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა. უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს α პარამეტრზე დამოკიდებულ პარაბოლების ოჯახს (ნახ. 5). მოვძებნოთ ამ ოჯახის მომვლები.



ნახ. 5.

ამისათვის (10.4) გავაწარმოვოთ α პარამეტრით და შედეგი გავუტოლოთ ნულს, გვექნება

$$x - \frac{g \operatorname{tg}\alpha}{V_0^2} x^2 = 0. \tag{10.5}$$

ახლა (10.4) და (10.5) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ პარამეტრი α, მივიღებთ

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} x^2, \tag{10.6}$$

რომელიც წარმოადგენს პარაბოლების (10.4) ოჯახის მომვლებს. შევნიშნოთ, რომ მომვლები (10.6) თვითონაც პარაბოლია. იმის გამო, რომ კოორდინატთა სათავიდან V_0 საწყისი სიჩქარით გასროლილი არც ერთი მატერიალური წერტილი $M(x, y)$ არ გავა (10.6) პარაბოლის გარეთ, ამიტომ მას უზრუნველყოფის პარაბოლს უწოდებენ.

§ **11. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ინტეგრალები.** ზევით, ზოგიერთი კერძო სახის დიფერენციალური განტოლების შესწავლისას (იხ. თავი I, §§ 5, 18), უკვე შევხვდა განსაკუთრებული ინტეგრალის განსაზღვრა. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{11.1}$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$\varphi(x, y, C)=0 \tag{11.2}$$

მომვლები გააჩნია, მაშინ ეს მომვლები იქნება აგრეთვე (11.1) განტოლების ინტეგრალი.

დამტკიცება. მართლაც, წინა პარაგრაფის ძალით, მომვლები თავის ყოველ წერტილში ეხება დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალების (11.2) ოჯახის ერთ გარკვეულ წირს. თუ $M(x, y)$ არის შეხების წერტილი, მაშინ ამ წერტილში სიდიდენი x, y და $\frac{dy}{dx}$ დააკმაყოფილებს როგორც (11.1) დიფერენციალურ განტოლებას, ისე მომვლების განტოლებას. მომვლების ნებისმიერი სხვა წერტილი შეხების წერტილია (11.2) ოჯახის სხვა წირისა და, ამიტომ, სიდიდენი x, y და $\frac{dy}{dx}$ ამ წერტილში ისევ დააკმაყოფილებს (11.1) დიფერენციალურ განტოლებას. ეს იმას ნიშნავს, რომ მომვლების ყველა წერტილში სიდიდენი x, y და $\frac{dy}{dx}$ აკმაყოფილებს (11.1) განტოლებას. მაშასადამე, წირთა (11.2) ოჯახის მომვლები, როცა იგი არსებობს, უსათუოდ (11.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალია. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. რადგან, საზოგადოდ, წირთა (11.2) ოჯახის მომვლები ამ ოჯახს არ ეკუთვნის, ამიტომ (11.1) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული ინტეგრალი არ მიიღება (11.2) განტოლებიდან C პარამეტრის არც ერთი კერძო მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y^2(1+y'^2)=a^2 \tag{11.3}$$

განსაკუთრებული ინტეგრალი.

ამისათვის ჯერ მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი. გადავწეროთ განტოლება (11.3) შემდეგი სახით:

$$dx=\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{a^2-y^2}},$$

რომლის ინტეგრების შემდეგ გვექნება

$$(x-C)^2+y^2=a^2, \tag{11.4}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

როგორც ვხედავთ, ზოგადი ინტეგრალი წარმოადგენს C პარამეტრზე დამოკიდებულ წრეწირების ოჯახს, რომლის ცენტრი $(C, 0)$ მდებარეობს Ox ღერძზე. როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, არსებობს (11.4) ოჯახის მომვლები და იგი წარმოადგენს ორი წრფის ერთობლიობას $y=+a$ და $y=-a$. ეს უკანასკნელი ფუნქციები აკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას (11.3).

მაშასადამე წრფეები $y=a$ და $y=-a$ წარმოადგენენ (11.3) დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებულ ინტეგრალებს.

§ 12. **ორთოგონალური ტრაექტორიები.** განვიხილოთ C პარამეტრზე დამოკიდებული წირთა ოჯახი

$$\varphi(x, y, C)=0. \tag{12.1}$$

წირს, რომელიც (12.1) ოჯახის ყველა წირს გადაკვეთს და თითოეულ მათგანთან მართ კუთხეს შეადგენს, ეწოდება ამ ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორია.

შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც წირთა (12.1) ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები დააკმაყოფილებს. ამისათვის, გამოვრიცხოთ (12.1) და

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

განტოლებებიდან პარამეტრი C. გამორიცხვის შედეგი ასე ჩავწეროთ:

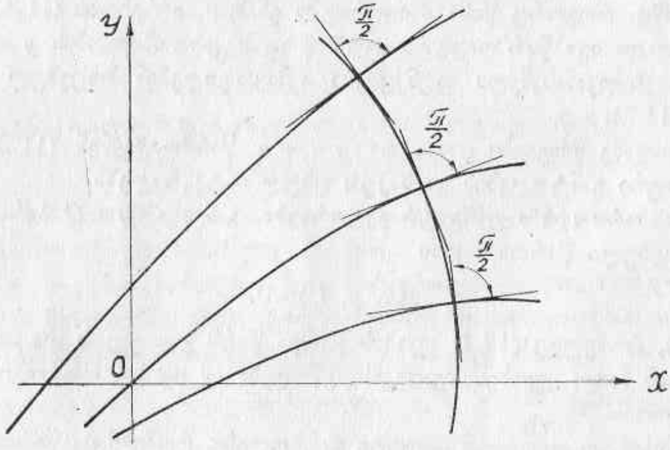
$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{12.2}$$

აქ წარმოებული $\frac{dy}{dx}$ გეომეტრიულად წარმოადგენს იმ მხების კუთხურ კოეფიციენტს, რომელიც (12.1) ოჯახის ნებისმიერი წირის $M(x, y)$ წერტილზეა გავლებული. განსაზღვრის ძალით, იმავე $M(x, y)$ წერტილზე გავლებული ორთოგონალური ტრაექტორიის მხების კუთხური კოეფიციენტი იქნება $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. ამრიგად, ორთოგონალური ტრაექტორიის ნების-

მიერი $M(x, y)$ წერტილის კოორდინატები და ამ წერტილზე გავლებული მისი მხების კუთხური კოეფიციენტი დააკმაყოფილებს პირობას

$$F\left(x,\ y,\ -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)=0. \tag{12.3}$$

ასეთია წირთა (12.1) ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლება (ნახ. 6). ამ განტოლების ინტეგრალები იქნება წირთა (12.1) ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.



ნახ. 6

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ პარაბოლების ოჯახის

$$y=Cx^2 \tag{12.4}$$

ორთოგონალური ტრაექტორიები.

ამისათვის, მოცემული და $y'-2Cx=0$ განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ პარამეტრი C, გვექნება

$$\frac{2}{x}=\frac{y'}{y}.$$

შევცვალოთ ამ განტოლებაში წარმოებული y' სიდიდით $\frac{1}{y'}$, მივიღებთ ორთოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალურ განტოლებას:

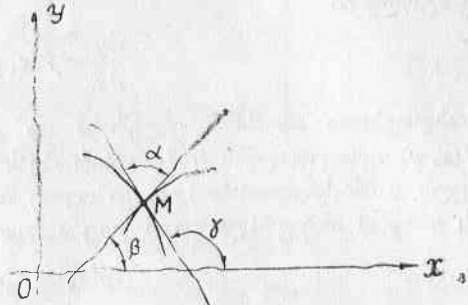
$$\frac{x}{2}\,dx+ydy=0.$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x^2+2y^2=4C^2. \tag{12.5}$$

მაშასადამე, წირთა (12.4) ოჯახის ორთოგონალურ ტრაექტორიებს წარმოადგენს ელიფსების ოჯახი (12.5).

§ **13. იზოგონალური ტრაექტორიები.** გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნები. წირს, რომელიც (12.1) ოჯახის ყველა წირს გადაკვეთს და თითოეულ მათგანთან ერთსა და იმავე α კუთხეს შეადგენს, ეწოდება ამ ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორია.



ნახ. 7.

შევადგინოთ წირთა (12.1) ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლება. ამისათვის ჯერ შევადგინოთ წირთა (12.1) ოჯახის დიფერენციალური განტოლება (12.2).

ახლა ვთქვათ, წირთა (12.1) ოჯახის ნებისმიერი წირის $M(x, y)$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხე $0x$ ღერძის დადებით მიმართულებასთან არის β. ამავე წერტილზე გამავალი იზოგონალური ტრაექტორიის მხების კუთხე იყოს γ.

მაშინ, ცხადია $\beta=\gamma-\alpha$ და

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\dfrac{dy_1}{dx}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\dfrac{dy_1}{dx}\operatorname{tg}\alpha}$$

ანუ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy_1}{dx}-a}{1+a\dfrac{dy_1}{dx}},$$

სადაც $a=\operatorname{tg}\alpha$, ხოლო $\dfrac{dy_1}{dx}$ არის (12.1) ოჯახის ნებისმიერი წირის $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი იზოგონალური ტრაექტორიის მხების კუთხური კოეფიციენტი. ამის შემდეგ, (12.2) განტოლებიდან გვექნება

$$F\left(x,\, y,\, \frac{\dfrac{dy}{dx}-a}{1+a\dfrac{dy}{dx}}\right)=0,$$

სადაც $\frac{dy}{dx}$ არის უკვე იზოგონალური ტრაექტორიის მხების კუთხური კოეფიციენტი $M(x, y)$ წერტილში.

უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება (12.1) წირების იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახი (ნახ. 7).

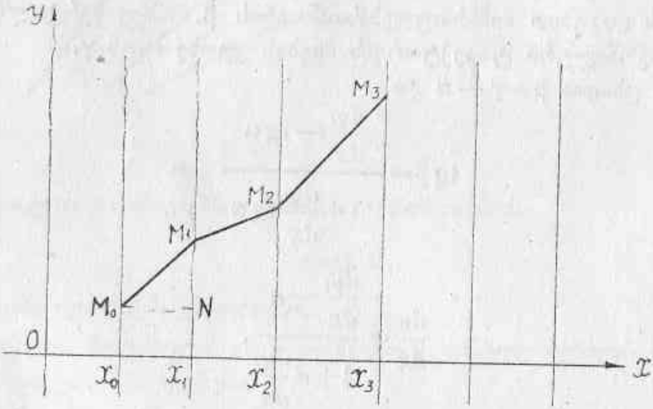
§ 14. დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა ეილერისა და კოშის მეთოდით. გავეცნოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{14.1}$$

მიახლოებითი ამოხსნის ეილერისა და კოშის მეთოდს, სადაც ფუნქცია $f(x, y)$ აკმაყოფილებს § 7-ის პირობებს (D) არეში. არგუმენტის მოცემული x მნიშვნელობისათვის, ვიპოვოთ მიახლოებით (14.1) განტოლების ის $y=y(x)$ ინტეგრალი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$y(x_0)=y_0.$$

გავავლოთ სიბრტყეზე Oy ღერძის პარალელური წრფეები: $x=x_0$, $x=x_1$, $x=x_2, \ldots$, სადაც $x_0<x_1<x_2<\ldots$. დავუშვათ, რომ $y=y(x)$ ინტეგრალური წირის საწყისი წერტილი არის $M_0(x_0, y_0)$ (ნახ. 8). ამ წერ-



ნახ. 8.

ტილიდან გავავლოთ წრფის ისეთი მონაკვეთი მეზობელ $x=x_1$ წრფის გადაკვეთამდე $M_1(x_1, y_1)$, რომლის კუთხური კოეფიციენტი ტოლია $f(x_0, y_0)$ რიცხვისა. შევნიშნოთ, რომ რაკი მონაკვეთები $M_0N=x_1-x_0$ და $M_1N=y_1-y_0$, ხოლო $\operatorname{tg}\angle M_1M_0N=f(x_0, y_0)$, ამიტომ M_0NM_1 სამკუთხედიდან ადვილად გამოითვლება ორდინატი

$$y_1=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0).$$

ამრიგად, $M_1(x_1, y_1)$ წერტილის კოორდინატები სავსებით განსაზღვრულია. ასევე ვიპოვით $M_2(x_2, y_2)$ წერტილს და ა. შ.

ზემოთ დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად, შუალედი $]x_0, x[$ დავყოთ $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x$ წერტილებით მცირე ნაწილებად. შესაბამისი ორდინატები $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, Y$ გამოითვლება მიმდევრობით შემდეგი ფორმულებით:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= y_{n-2} + (x_{n-1} - x_{n-2}) f(x_{n-2}, y_{n-2}), \\ Y &= y_{n-1} + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ:

$$Y = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + \cdots +$$
$$+ (x_{n-1} - x_{n-2}) f(x_{n-2}, y_{n-2}) + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \tag{14.3}$$

რომელიც წარმოადგენს ზუსტი $y = y(x)$ ინტეგრალის მიახლოებას. თუ მოცემული მნიშვნელობა x საკმარისად ახლოა საწყის მნიშვნელობასთან x_0, როცა n იზრდება, თითოეული ქვეგანაყოფის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის და შეიძლება დამტკიცება, რომ $\lim\limits_{n \to \infty} |y(x) - Y| = 0$, სადაც $y = y(x)$ არის (14.1) განტოლების ზუსტი ინტეგრალი, რომელიც გაივლის (x_0, y_0) წერტილზე.

§ 15. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა ტეილორის ფორმულის დახმარებით. ვთქვათ x იცვლება $[x_0, b]$ სეგმენტზე. ვიპოვოთ მიახლოებით დიფერენციალური განტოლების

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{15.1}$$

ამოხსნა $[x_0, b]$ სეგმენტზე, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობას: როცა $x = x_0$, მაშინ $y = y_0$.

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეშვიდე პარაგრაფში მისთვის შემოღებულ პირობებს (იხ. გვ. 61), აქვს ნაწილობითი წარმოებულები x და y ცვლადების მიმართ საჭირო რიგამდე, ხოლო $y = y(x)$ არის წარმოებადი ფუნქცია $[x_0, b]$ სეგმენტზე აგრეთვე საჭირო რიგამდე.

დავშალოთ (15.1) განტოლების ამოხსნა $x = x_0$ წერტილის მიდამოში ტეილორის ფორმულით, გვექნება

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \cdots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} y_0^{(m)} + R_{m+1}(x), \tag{15.2}$$

სადაც $R_{m+1}(x)$ დაშლის დამატებითი წევრია. აქ y_0 ცნობილი რიცხვია. გამოვთვალოთ $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(m)}$ რიცხვები. ამისათვის დავწეროთ (15.1) ტოლობა როცა $x=x_0$, გვექნება

$$y_0'=f(x_0, y_0).$$

ახლა (15.1) ტოლობა გავაწარმოვოთ x ცვლადით და შედეგში ჩავსვათ $x=x_0$, მივიღებთ

$$y_0''=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\, y'\right)_{x=x_0,\, y=y_0,\, y'=y_0'}.$$

თუ (15.1) ტოლობას მეორედ გავაწარმოებთ და გამოვიყენებთ უკვე მოძებნილ y_0' და y_0'' რიცხვებს, მივიღებთ y_0''' და ა. შ.

ამის შემდეგ, (15.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ყველა წევრი იქნება ცნობილი, გარდა დამატებითი წევრისა. მაშასადამე, თუ (15.2) ტოლობაში ჩამოვაცილებთ დამატებით წევრს, მივიღებთ (15.1) დიფერენციალური განტოლების მიახლოებით ინტეგრალს x ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $[x_0, b]$ სეგმენტზე. მიახლოების სიზუსტე დამოკიდებულია $|x-x_0|$ სიდიდეზე და შესაკრებთა რაოდენობაზე (15.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში.

თავი III

მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. **n რიგის დიფერენციალური განტოლება.** ზემოთ, პირველი თავის § 1-ში მოყვანილი გვქონდა n რიგის დიფერენციალური განტოლების განსაზღვრა. იგი ჩაწერილი იყო შემდეგი სახით:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $y = y(x)$ — საძიებელი ფუნქცია. იგულისხმება, რომ $n > 1$, ფუნქცია F არის თავისი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქცია $n+2$ განზომილების რაიმე არეში (D) და შეიცავს საძიებელი ფუნქციის n რიგის წარმოებულს მაინც.

ვთქვათ მოცემულ წერტილში $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n)})$ შესრულებულია პირობები:

$$F(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n)}) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)_{x=x_0,\, y=y_0,\, y'=y_0', \ldots,\, y^{(n)}=y_0^{(n)}} \neq 0,$$

მაშინ მოცემული წერტილის მცირე მიდამოში განტოლება (1.1) შეიძლება ამოვხსნათ უმაღლესი $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

განსაზღვრა. (1.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ეწოდება ისეთ ფუნქციას $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, რომელიც დამოკიდებულია n ნებისმიერ მუდმივზე $C_1, C_2, \ldots, C_n$ და აქვს შემდეგი თვისებები:

ა) ფუნქცია $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ იგივურად აკმაყოფილებს (1.2) განტოლებას $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის;

ბ) მოცემული საწყისი მნიშვნელობებისათვის $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0), \ldots, y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0)$ ისე შეიძლება შევარჩიოთ მუდმივები $C_1, C_2, \ldots, C_n$, რომ ფუნქცია $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ და მისი წარმოებულები აკმაყოფილებს ამ მნიშვნელობებს.

ზოგჯერ (1.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი გამოისახება არაცხადი ფუნქციის სახით: $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$.

ყოველი ფუნქცია, რომელიც მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივების კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, წარმოადგენს (1.2) დიფერენციალური განტოლების *კერძო ინტეგრალს*. კერძო ინტეგრალის გრაფიკს ინტეგრალურ წირს უწოდებენ.

ამოვხსნათ (ანუ ვაინტეგროთ) n რიგის დიფერენციალური განტოლება (1.2) ან (1.1) იმას ნიშნავს, რომ მოვძებნოთ მისი ზოგადი ინტეგრალი და, როცა საჭიროა, მისგან გამოვყოთ კერძო ინტეგრალი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებსაც აკმაყოფილებს.

(1.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი $y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ გეომეტრიულად განსაზღვრავს ბრტყელ წირთა ოჯახს, დამოკიდებულს n ნებისმიერ პარამეტრზე. სხვანაირად, n რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის n პარამეტრზე დამოკიდებულ ბრტყელ წირთა ოჯახი. ამ ოჯახის ყოველი წირი წარმოადგენს (1.2) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირს.

ისევე, როგორც პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის (იხ. თავი II, § 7), უძრავი წერტილის პრინციპის გამოყენებით, მტკიცდება (1.2) განტოლების ამოხსნის არსებობისა და ერთადობის შემდეგი

თეორემა. თუ (1.2) *განტოლებაში ფუნქცია* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *და მისი ნაწილობითი წარმოებულები* $y, y', \ldots, y^{(n)}$ *არგუმენტების მიმართ უწყვეტია* $n+1$ *განზომილების რაიმე* (D_1) *არეში, წერტილი* $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in (D_1)$, *მაშინ არსებობს* (1.2) *დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ისეთი ინტეგრალი* $y=y(x)$, *რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა* $x=x_0$, *მაშინ* $y_0=y(x_0)$, $y_0'=y'(x_0), \cdots, y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(x_0)$.

გადავიდეთ (1.1) განტოლების ზოგიერთი კერძო სახის განხილვაზე.

§ 2. n რიგის განტოლების ზოგიერთი კერძო სახე. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y^{(n)})=0. \tag{2.1}$$

ვთქვათ შესაძლოა ამ განტოლების ამოხსნა $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n)}=\varphi(x) \tag{2.2}$$

თუ უკანასკნელი განტოლების ორივე ნაწილს dx-ზე გავამრავლებთ და შემდეგ ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx+C_1,$$

სადაც x_0 არის დამოუკიდებელი ცვლადის მოცემული მნიშვნელობა, C_1-ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივი. ახლა ეს ტოლობა გავამრავლოთ dx-ზე და შედეგი ვაინტეგროთ, გვექნება

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx\,dx+C_1(x-x_0)+C_2,$$

სადაც C_2 ინტეგრების ახალი მუდმივია.

თუ იმავე ოპერაციას გავიმეორებთ n-ჯერ, მივიღებთ (2.2) განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$y=\overbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}^{n}\varphi(x)\,dx\ldots dx+C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+$$

$$+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n, \tag{2.3}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. როგორც ვხედავთ, (2.3) ტოლობაში ნებისმიერი მუდმივების რიცხვი ემთხვევა დიფერენციალური განტოლების რიგს.

კერძო ინტეგრალი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=x_0$, მაშინ $y_0=y(x_0)$, $y_0'=y'(x_0),\ldots, y_0^{(n)}=y^{(n)}(x_0)$, როგორც ადვილი შესამჩნევია, იქნება

$$y=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx^n+y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+y_0^{(n-2)}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+y_0'(x-x_0)+y_0. \tag{2.4}$$

ზოგადი ინტეგრალის პირველი შესაკრები წარმოადგენს n-ჯერად ინტეგრალს $\varphi(x)$ ფუნქციისა x ცვლადით. აღვნიშნოთ იგი J_n-ით. დავამტკიცოთ, რომ J_n ინტეგრალის გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ მარტივი ინტეგრალის გამოთვლაზე.

მართლაც, ვთქვათ $n=2$, გვექნება

$$J_2=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz$$

თანახმად დირიხლეს ფორმულისა, ორჯერად ინტეგრალში ინტეგრების რიგის გადანაცვლების შესახებ (იხ. ტ. II, გვ. 454), მივიღებთ

$$J_2=\int_{x_0}^{x}dz\int_{z}^{x}\varphi(z)\,dx=\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz\int_{z}^{x}dx=\int_{x_0}^{x}(x-z)\,\varphi(z)\,dz.$$

როცა $n=3$, მაშინ

$$J_3=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x}(x-z)\,\varphi(z)\,dz=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz\int_{z}^{x}(x-z)\,dx=\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz\left[\frac{(x-z)^2}{2}\right]_z^x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-z)^2\,\varphi(z)\,dz.$$

ახლა, ვთქვათ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და დავუშვათ, რომ მართებულია ტოლობა:

$$J_{n-1}=\overbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}^{n-1}\varphi(x)dx^{n-1}=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-2}\,\varphi(z)\,dz,$$

მაშინ

$$J_n=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx^n=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-2}\,\varphi(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz\int_{z}^{x}(x-z)^{n-2}\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}\,\varphi(z)\,dz.$$

ამრიგად, უკანასკნელი ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის. ამის შემდეგ, (2.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი (2.3) შეგვიძლია ასეც ჩავწეროთ:

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}\,\varphi(z)\,dz+C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n, \tag{2.5}$$

ხოლო კერძო ინტეგრალი (2.4) ასე:

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}\,\varphi(z)\,dz+y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+y_0^{(n-2)}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+y_0'(x-x_0)+y_0. \tag{2.6}$$

წინა ფორმულა (2.4) გვაძლევს (2.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალის წარმოდგენას მხოლოდ ერთი კვადრატურით. ფორმულა (2.5) კი გვაძლევს (2.1) განტოლების კერძო ინტეგრალის წარმოდგენას აგრეთვე ერთი კვადრატურით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y''=\cos kx$$

ზოგადი ინტეგრალი და კერძო ინტეგრალი, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=0$, მაშინ $y_0=y(0)=1$, $y_0'=y'(0)=2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების პირველი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$y'=\int\limits_0^x \cos kx\,dx+C_1=\frac{1}{k}\sin kx+C_1,$$

რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$y=\frac{1}{k}\int\limits_0^x \sin kx\,dx+C_1\int\limits_0^x dx+C_2=$$

$$=-\frac{\cos kx}{k^2}+\frac{1}{k^2}+C_1x+C_2.$$

ასეთია მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

კერძო ინტეგრალის მოსაძებნად საჭიროა გამოვთვალოთ საწყისი პირობების შესაბამისი მუდმივები C_1 და C_2. რადგან $y(0)=y_0=0$, ამიტომ $C_2=1$. გარდა ამისა, იმის გამო, რომ $y'(0)=y_0'=2$, გვექნება $C_1=2$, მაშასადამე საძიებელი კერძო ინტეგრალი იქნება:

$$y=\frac{1}{k^2}(1-\cos kx)+2x+1.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა განტოლება (2.1) ამოიხსნება x ცვლადის მიმართ:

$$x=\Psi(y^{(n)})=\Psi\left(\frac{dp_1}{dx}\right), \tag{2.7}$$

სადაც $p_1=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. თუ ვიგულისხმებთ, რომ p_1 წარმოადგენს საძიებელ ფუნქციას, მაშინ ცნობილი წესის მიხედვით (იხ. თავი I, § 20) ვიპოვით (2.7) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს

$$\Phi_1(x,\ p_1-C_1)=0, \tag{2.8}$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. ვთქვათ შესაძლოა ამ განტოლების ამოხსნა p_1-C_1 ცვლადის მიმართ:

$$p_1=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\Psi_1(x)+C_1.$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს (2.2) ყაიდის დიფერენციალურ განტოლებას.

თუკი განტოლება (2.8) შეიძლება ამოვხსნათ x ცვლადის მიმართ:

$$x=\Psi_2(p_1, C_1)=\Psi_2\left(\frac{dp_2}{dx}, C_2\right), \quad p_2=\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},$$

მაშინ უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება მოხდება ზევით შესწავლილი წესის მიხედვით (იხ. თავი I, § 20) და გვექნება

$$\Phi_2(x, p_2, C_1, C_2)=\Phi_2\left(x, \frac{dp_3}{dx}, C_1, C_2\right)=0, \tag{2.9}$$

სადაც $p_3=\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}$, ხოლო C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. თუ ეს განტოლება ამოიხსნება $\frac{dp_3}{dx}$ ცვლადის მიმართ, მაშინ მივიღებთ ისევ (2.2) ყაიდის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ინტეგრების მეთოდიკა უკვე ვიცით. თუკი (2.9) ამოიხსნება x ცვლადის მიმართ, მაშინ

$$x=\Psi_3(p_2, C_1, C_2)=\Psi_3\left(\frac{dp_3}{dx}, C_1, C_2\right),$$

რომლის ინტეგრება უნდა შევასრულოთ ცნობილი წესის მიხედვით (იხ. თავი I, § 20).

გავაგრძელოთ ეს მსჯელობა იქამდე, ვიდრე მივიღებთ (2.7) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

როცა განტოლება (2.1) არ ამოიხსნება არც $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ და არც x ცვლადის მიმართ, მაშინ ხელსაყრელია მისი ინტეგრება დავიყვანოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. ამისათვის მივმართოთ ჩასმას $p_1=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. მაშინ $\frac{dp_1}{dx}=\frac{d^n y}{dx^n}$ და (2.1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F\left(x, \frac{dp_1}{dx}\right)=0, \tag{2.9_1}$$

რომელიც წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას საძიებელი ფუნქციით p_1.

ვთქვათ, შესაძლოა (2.9_1) განტოლების ინტეგრება. მისი ზოგადი ინტეგრალი ჩავწეროთ ასე:

$$\varphi_1(x, p_1, C_1)=0,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. წარმოვადგინოთ იგი შემდეგი სახითაც:

$$\varphi_1\left(x, \frac{dp_2}{dx}, C_1\right)=0, \tag{2.9_2}$$

სადაც $p_2=\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$. თუ ამ განტოლებაში საძიებელ ფუნქციად მივიჩნევთ p_2 ცვლადს, მაშინ (2.9_2) იქნება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება უცნობი ფუნქციით p_2. ვთქვათ შეიძლება (2.9_2) განტოლების ინტეგრება. მისი ზოგადი ინტეგრალი იყოს

$$\varphi_2\left(x, \frac{dp_3}{dx}, C_1, C_2\right)=0, \tag{2.9_3}$$

სადაც $p_3=\dfrac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}$, ხოლო C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. გავიმეოროთ მსგავსი გარდაქმნები k-ჯერ, გვექნება

$$\varphi_k\left(x, \frac{dp_{k+1}}{dx}, C_1, C_2, \ldots, C_k\right)=0, \tag{2.9_k}$$

დავუშვათ აქ $k=n-1$, მივიღებთ

$$\varphi_{n-1}(x, p_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})=0,$$

სადაც $p_n=\dfrac{dy}{dx}$. უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ინტეგრებით მივიღებთ (2.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0, \tag{2.10}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

განტოლებები (2.9_2), (2.9_3), ..., (2.9_k) წარმოადგენენ ე. წ. (2.1) დიფერენციალური განტოლების შუალედურ ინტეგრალებს. მათ შორის (2.9_2) არის პირველი შუალედური ინტეგრალი, (2.9_3) — მეორე შუალედური ინტეგრალი და ა. შ.

§ 3. **პარამეტრის ხერხი.** ვთქვათ განტოლება

$$F(x, y^{(n)})=0 \tag{3.1}$$

შეუძლებელია ამოვხსნათ $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ. ამ შემთხვევაში (3.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებისათვის ხშირად ხელსაყრელია გამოვიყენოთ ე. წ. პარამეტრის ხერხი. ამ ხერხის შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ცვლადი x და საძიებელი ფუნქციის n რიგის წარმოებული $y^{(n)}$ უნდა გამოვსახოთ (როცა ეს შესაძლებელია) ერთი და იმავე პარამეტრით t. კერძოდ, ხსენებული ხერხი გამოიყენება მაშინაც, როცა განტოლება (3.1) ადვილად ამოიხსნება x ცვლადის მიმართ.

ვთქვათ განტოლება (3.1) პარამეტრული სახით ჩაწერილია ასე:

$$x=\varphi_1(t),\ y^{(n)}=\varphi_2(t). \tag{3.2}$$

ფუნქციები $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ აქ ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ დიფერენციალური განტოლება (3.1) და განტოლებები (3.2) იყოს ეკვივალენტური.

გამოვიდეთ იგივეობიდან: $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, საიდანაც, (3.2) ტოლობების ძალით, გვექნება

$$y^{(n-1)}=\int\varphi_1'(t)\,\varphi_2(t)\,dt=\Phi_1(t,\ C_1).$$

სადაც C_1 არის ინტეგრებით წარმოქმნილი ნებისმიერი მუდმივი.

გავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობა dx-ზე და შემდეგ ვაინტეგროთ, მივიღებთ:

$$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}\,dx=\int\varphi_1'(t)\,dt\int\varphi_1'(t)\,\varphi_2(t)\,dt=\Phi_2(t,\ C_1,\ C_2),$$

სადაც C_2 ინტეგრების ახალი ნებისმიერი მუდმივია. გავაგრძელოთ აღწერილი ხერხის გამოყენება, გვექნება

$$y=\Phi_n(t,\ C_1,\ C_2,\dots,\ C_n).$$

ტოლობების ერთობლიობა

$$x=\varphi_1(t),\ y=\Phi_n(t,\ C_1,\dots,\ C_n)$$

წარმოადგენს (3.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამოხსნას პარამეტრული სახით. თუ, ტოლობებიდან (3.3) გამოვრიცხავთ t პარამეტრს (როცა ეს შესაძლებელია) მივიღებთ (3.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს არაცხადი ან ცხადი სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვაინტეგროთ დიფერენციალური განტოლება

$$2^{y''}-y''-x=0.$$

ცხადია, ეს განტოლება არ ამოიხსნება y'' წარმოებულის მიმართ. მივმართოთ ზევით აღწერილ პარამეტრის ხერხს. ჩავწეროთ მოცემული განტოლება, ეკვივალენტური პარამეტრული სახით, ასე:

$$x=2^t-t,\ y''=t.$$

გვექნება

$$dy'=y''\,dx=t(2^t\ln 2-1)\,dt,$$

საიდანაც

$$y'=\int(t\,2^t\ln 2-t)\,dt=2^t\left(t-\frac{1}{\ln 2}\right)-\frac{t^2}{2}+C_1.$$

ახლა, უკანასკნელი განტოლება გავამრავლოთ dx-დიფერენციალზე და შემდეგ ვაინტეგროთ, მივიღებთ:

$$y=\int y'\,dx=\int\left[2^t\left(t-\frac{1}{\ln 2}\right)-\frac{t^2}{2}+C_1\right](2^t\ln 2-1)\,dt=$$

$$=2^{2t}\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4\ln 2}\right)+2^t\left(C_1+\frac{1}{\ln^2 2}-\frac{t^2}{2}\right)+\frac{1}{6}t^3+C_1t+C_2.$$

ამრიგად, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი პარამეტრული სახით ასეთია:

$$x=2^t-t,\ y=2^{2t}\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4\ln 2}\right)+2^t\left(C_1+\frac{1}{\ln^2 2}-\frac{t^2}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}t^3+C_1t+C_2,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 4. დიფერენციალური განტოლება $F(y^{(n)}, y^{(n-1)})=0$ სახისა. განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა განტოლება

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)})=0. \tag{4.1}$$

შეიძლება ამოვხსნათ $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n)}=f(y^{(n-1)}), \tag{4.1}$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის შემოვიღოთ ახალი საძიებელი ფუნქცია z შემდეგი ტოლობით: $z=y^{(n-1)}$. მაშინ, განტოლება (4.1) ასე ჩაიწერება

$$z'=f(z),$$

საიდანაც გვექნება

$$x+C_1=\int\frac{dz}{f(z)},$$

ვიგულისხმოთ, რომ შესაძლებელია უკანასკნელი განტოლების ამოხსნა z ცვლადის მიმართ:

$$z=\varphi(x, C_1),$$

ე. ი.

$$y^{(n-1)}=\varphi(x, C_1).$$

ეს განტოლება წარმოადგენს ზევით § 2-ში შესწავლილ დიფერენციალურ განტოლებას და, მაშასადამე, მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$y=\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}\varphi(x, C_1)\,dx^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

ახლა, ვთქვათ შეუძლებელია (4.1) განტოლების ამოხსნა $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ. ამ შემთხვევაში შეიძლება გამოვიყენოთ პარამეტრის ხერხი (იხ. § 3):

$$y^{(n)}=\varphi_1(t),\ y^{(n-1)}=\varphi_2(t), \tag{4.2}$$

სადაც იგულისხმება, რომ $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ სათანადოდ შერჩეული ფუნქციებია. იგივეობიდან $dy^{(n-1)}=y^{(n)}\,dx$ ადვილად მივიღებთ

$$x=\int \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\,dt+C_1.$$

გარდა ამისა, მართებულია ტოლობები:

$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}\,dx=\frac{\varphi_2(t)\varphi_2'(t)}{\varphi_1(t)},\quad y^{(n-2)}=\int \frac{\varphi_2(t)\varphi_2'(t)}{\varphi_1(t)}\,dt+C_2,$$

$$dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}\,dx=\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\left[\int \frac{\varphi_2(t)\varphi_2'(t)}{\varphi_1(t)}\,dt+C_2\right]dt,$$

$$y^{(n-3)}=\int \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\left[\int \frac{\varphi_2(t)\varphi_2'(t)}{\varphi_1(t)}\,dt+C_2\right]dt+C_3$$

და ა. შ. უკანასკნელი ტოლობა ასეთი იქნება:

$$y=\int y'dx+C_n.$$

აქ შესაკრები $\int y'dx$, გარდა პარამეტრისა t, შეიცავს ნებისმიერ მუდმივებს $C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$.

ერთობლიობა ტოლობებისა

$$\left.\begin{aligned} x&=\int \frac{\varphi_2'(t)\,dt}{\varphi_1(t)}+C_1,\\ y&=\int y'dx+C_n \end{aligned}\right\}$$

წარმოადგენს (4.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს პარამეტრული სახით.

§ 5. დიფერენციალური განტოლება $F(y^{(n-2)}, y^{(n)})=0$ სახისა. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)})=0, \tag{5.1}$$

სადაც $y^{(n-2)}$ და $y^{(n)}$ აღნიშნავენ საძიებელი $y=y(x)$ ფუნქციის წარმოებულებს შესაბამისად $n-2$ და n რიგისა, F არის თავისი არგუმენტების მოცემული ფუნქცია.

ვთქვათ, შესაძლებელია (5.1) განტოლების ამოხსნა $y^{(n)}$ წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n)}=F_1(y^{(n-2)}). \tag{5.1}$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის შემოვიყვანოთ ახალი უცნობი ფუნქცია $z=z(x)$, რომელიც საძიებელ ფუნქციასთან y დაკავშირებულია ტოლობით $z=y^{(n-2)}$. მაშინ, ტოლობა (5.1) ასე ჩაიწერება $z''=F_1(z)$, საიდა-

სადაც $z'\frac{dz'}{dz}=F_1(z)$. თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ dz დიფერენციალზე და შედეგს ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$z'^2=C_1+2\int F_1(z)\,dz,$$

ე. ი.

$$z'=\frac{dz}{dx}=\sqrt{C_1+2\int F_1(z)\,dz},$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. აქედან ადვილად მივიღებთ:

$$x+C_2=\int\frac{dz}{\sqrt{C_1+2\int F_1(z)\,dz}}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ვიპოვით ახალ უცნობ ფუნქციას $z=\varphi(x, C_1, C_2)$. ამის შემდეგ საძიებელი ფუნქცია y მოიძებნება დიფერენციალური განტოლებიდან $y^{(n-2)}=\varphi(x, C_1, C_2)$, რომლის ინტეგრება უნდა შევასრულოთ § 2-ში აღწერილი მეთოდით.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ განტოლება (5.1) ამოიხსნება $y^{(n-2)}$ წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n-2)}=F_2(y^{(n)}).$$

მისი ინტეგრებისათვის შემოვიყვანოთ ახალი უცნობი ფუნქცია შემდეგი ტოლობით: $z=y^{(n-2)}$, მაშინ უკანასკნელი განტოლება მიიყვანება მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე: $z=F_2(z'')$, საიდანაც, z'' ცვლადის მიმართ დიფერენციალის გამოთვლის შედეგად, გვექნება

$$dz=F_2'(z'')\,dz''.$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$dz=\frac{dz}{dx}\,dx=z'dx,$$

ამიტომ

$$z'\frac{dz'}{z''}=F_2'(z'')\,dz''.$$

საიდანაც

$$z'dz'=z''F_2'(z'')\,dz''.$$

უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას განცალებული ცვლადებით და თუ შევასრულებთ ინტეგრებას, მივიღებთ

$$z'^2=C_1+2\int z''F_2'(z'')\,dz'',$$

ე. ი.

$$z'=F_2'(z'')\frac{dz''}{dx}=\sqrt{C_1+2\int F_2'(z'')dz''}.$$

შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება ადვილად მიიყვანება შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებამდე განცალებული ცვლადებით:

$$dx = \frac{F_2'(z'')\,dz''}{\sqrt{C_1 + 2\int F_2'(z'')dz''}},$$

რომლის ინტეგრებით გვექნება

$$x - C_2 = \int \frac{F_2'(z'')\,dz''}{\sqrt{C_1 + 2\int F_2'(z'')dz''}}.$$

ეს ტოლობა ერთმანეთთან აკავშირებს x და z'' ცვლადებს, რომელიც ასე ჩავწეროთ: $\Phi(x, z'')=0$. ცხადია, უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს § 2-ში შესწავლილი დიფერენციალური განტოლების კერძო სახეს უცნობი ფუნქციით z. მისი ინტეგრებით ვიპოვით z უცნობს. თავიდან საძიებელი ფუნქცია კი მიიღება ჩვენთვის უკვე ცნობილი, $y^{(n-2)}=z$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებით.

ახლა, ვთქვათ განტოლება (5.1) არ ამოიხსნება არც $y^{(n)}$ და არც $y^{(n-2)}$ ცვლადის მიმართ, მაგრამ შესაძლებელია მისი ჩაწერა ეკვივალენტური პარამეტრული სახით:

$$y^{(n)}=\varphi_1(t),\ y^{(n-2)}=\varphi_2(t), \tag{5.1}$$

სადაც t პარამეტრია, ხოლო $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$ სათანადოდ შერჩეული ფუნქციებია.

ამ შემთხვევაში ხელსაყრელია გამოვიყენოთ ფორმულები:

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx,\ dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx,$$

საიდანაც, თანახმად (5.1) ტოლობებისა, გამომდინარეობს

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)}=y^{(n)}\,dy^{(n-2)}=\varphi_1(t)\,\varphi_2'(t).$$

აქედან მივიღებთ

$$y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\varphi_1(t)\,\varphi_2'(t)\,dt+C_1}.$$

როგორც ვხედავთ ახლა საქმე გვაქვს შემდეგ განტოლებებთან:

$$y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\varphi_1(t)\,\varphi_2'(t)\,dt+C_1},\ y^{(n-2)}=\varphi_2(t),$$

რომლებიც განხილული იყო § 4-ში (იხ. (4.2) განტოლებები).

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(4)}-y''=0.$$

გამოვიყენოთ აღნიშვნა $z=y''$, მივიღებთ განტოლებას $z''-z=0$, აქედან გვექნება $z'dz'=zdz$, რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$z'^2=C_1+z^2$$

ანუ

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{C_1+z^2}},$$

სადაც C_1 მუდმივია.

უკანასკნელი ტოლობა არის ისევ დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით. მისი ინტეგრებით მივიღებთ

$$z=y''=\frac{C_2}{2}e^x-\frac{C_1}{2}e^{-x}.$$

აქედან მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$y=\frac{C_2}{2}e^x-\frac{C_1}{2}e^{-x}+C_3x+C_4,$$

სადაც C_2, C_3, C_4 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 6. დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ცხადი სახით არ შეიცავს საძიებელ ფუნქციას და მის წარმოებულებს k რიგამდე. განვიხილოთ n რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ცხადი სახით არ შეიცავს საძიებელ ფუნქციას $y=y(x)$ და მის წარმოებულებს $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$. ჩავწეროთ იგი შემდეგნაირად:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)})=0. \tag{6.1}$$

ადვილი სანახავია, რომ ინტეგრება n რიგის დიფერენციალური განტოლებისა (6.1) მიიყვანება ისეთი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე, რომლის რიგი დაწეულია k ერთეულით.

მართლაც, შემოვიღოთ ახალი საძიებელი ფუნქცია $p=p(x)$, რომელიც ძველ საძიებელ ფუნქციასთან $y=y(x)$ დაკავშირებულია ტოლობით $p=y^{(k)}$. მაშინ, გვექნება

$$y^{(k+1)}=p',\ y^{(k+2)}=p'', \dots, y^{(n)}=p^{(n-k)}$$

და განტოლება (6.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)})=0. \tag{6.1_1}$$

ეს ტოლობა უკვე წარმოადგენს $n-k$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას და გამოთქმული წინადადება დამტკიცებულია.

ვთქვათ ფუნქცია

$$p=\Phi(x, C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_n)$$

არის (6.1_1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, სადაც $C_{k+1}, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია. მაშინ $y=y(x)$ ფუნქციის მოსაძებნად გვექნება დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)}=\Phi(x, C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_n),$$

რომლის ინტეგრება შესწავლილია § 2-ში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$y'' - (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქცია $p=y'$, მივიღებთ

$$\frac{dp}{dx} - (1+p^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

აქედან, ცვლადების განცალების შემდეგ გვექნება

$$dx = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

რომლის ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = x + C_1$$

ანუ

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x+C_1}{\sqrt{1-(x+C_1)^2}},$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი განტოლება ახლა ასე ჩავწეროთ

$$dy = \frac{x+C_1}{\sqrt{1-(x+C_1)^2}}\,dx.$$

აქედან მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს:

$$y = \pm\sqrt{1-(C_1+x)^2} + C_2,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 7. დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ცხადი სახით არ შეიცავს დამოუკიდებელ ცვლადს და საძიებელი ფუნქციის წარმოებულებს k რიგამდე. განვიხილოთ შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლება

$$F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.1}$$

სადაც F არის თავისი არგუმენტების მოცემული ფუნქცია, ხოლო k-ს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

კერძოდ, როცა $k=n-1$, განტოლება (7.1) მიიღებს სახეს:

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

ასეთი დიფერენციალური განტოლება შესწავლილი იყო ზევით § 4-ში.

ახლა დავუშვათ $k=0$, მაშინ განტოლება (7.1) ასე ჩაიწერება:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7.2}$$

დავამტკიცოთ, რომ k რიცხვის ყველა სხვა შესაძლო მნიშვნელობისათვის (7.1) განტოლების ინტეგრების საკითხი შეიძლება მივიყვანოთ (7.2) სახის განტოლების ინტეგრებაზე.

მართლაც, გამოვიყენოთ ჩასმა: $y^{(k)}=p$, მაშინ $y^{(k+1)}=p'$, $y^{(k+2)}=p''$,..., $y^{(n)}=p^{(n-k)}$ და განტოლება (7.1) ასე ჩაიწერება:

$$F(p, p', p''..., p^{(n-k)})=0.$$

უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლება მხოლოდ იმით განსხვავდება (7.2) განტოლებისაგან, რომ (7.2) განტოლებაში საძიებელი ფუნქცია y შეცვლილია ახალი საძიებელი ფუნქციით p, ხოლო n შეცვლილია რიცხვით $n-k$. წინადადება დამტკიცებულია.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (7.1) განტოლების შესწავლისათვის საკმარისია შევისწავლოთ განტოლება (7.2).

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (7.2) განტოლების რიგი ყოველთვის შეიძლება ერთი ერთეულით შევამციროთ. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $y'=p$ და y მივიჩნიოთ დამოუკიდებელ ცვლადად. გვექნება

$$p'=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx}=p\,\frac{dp}{dy}=\frac{1}{2}\,\frac{dp^2}{dy},$$

$$p''=\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{1}{2}\,\frac{d^2p^2}{dy^2}\,\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2}\,\frac{d^2p^2}{dy^2},$$

როგორც ეს გამოთვლები გვიჩვენებს, წარმოებული $p'=\frac{dp}{dx}$ გამოისახება p ცვლადისა და მისი პირველი წარმოებულით y ცვლადის მიმართ. ასევე წარმოებული $p''=\frac{d^2p}{dx^2}$ გამოისახება p ცვლადისა და მისი მეორე წარმოებულით y ცვლადის მიმართ. ინდუქციის წესით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის გვექნება

$$p^{(k)}=\frac{d^kp}{dx^k}=\varphi\left(p,\,\frac{dp}{dy},\,\frac{d^2p}{dy^2},\ldots,\,\frac{d^kp}{dy^k}\right). \tag{7.3}$$

გავითვალისწინოთ აგრეთვე, რომ

$$\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{d^{k-1}p}{dx^{k-1}}=p^{(k-1)},$$

რომლის ძალით განტოლება (7.2) ასე ჩაიწერება

$$F\left(y,\,p,\,\frac{dp}{dx},\,\frac{d^2p}{dx^2},\ldots,\,\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right)=0.$$

თუ ამ განტოლებაში წარმოებულებს $\frac{dp}{dx}, \frac{d^2p}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dx^n}$ შევცვლით სათანადო ტოლობებიდან (7.3), მივიღებთ $n-1$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0 \tag{7.4}$$

რომელშიც იგულისხმება, რომ y დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო p საძიებელი ფუნქცია. წინადადება დამტკიცებულია.

ვაინტეგროთ (როცა ეს შესაძლებელია) განტოლება (7,4) და მისი ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩავწეროთ

$$f(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})=0, \tag{7.5}$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ ინტეგრების მუდმივებია.

განტოლება (7.5) არის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომელშიც საძიებელი ფუნქცია არის y, ხოლო დამოუკიდებელი ცვლადი არის x. მისი ინტეგრება მოხდება I თავში განხილული ერთ-ერთი ხელსაყრელი მეთოდით. ამით განტოლება (7.2) ამოხსნილი იქნება ბოლომდე.

§ 8. დიფერენციალური განტოლება $F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$ სახისა. განვიხილოთ წინა პარაგრაფის (7.1) განტოლების ერთი კერძო შემთხვევა. სახელდობრ, ვთქვათ (7.1) განტოლებაში $k=n-2$, მაშინ იგი ასეთი სახისა იქნება:

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0. \tag{8.1}$$

ამ განტოლების ინტეგრება მიიყვანება მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. ამისათვის საკმარისია მივმართოთ ჩასმას $y^{(n-2)}=p$. მაშინ ცხადია, რომ

$$y^{(n-1)}=\frac{dp}{dx}=p', \quad y^{(n)}=\frac{dp'}{dx}=p''$$

და განტოლება (8.1) მიიღებს სახეს:

$$F(p, p', p'')=0. \tag{8.2}$$

ახლა გამოვიყენოთ ახალი ჩასმა $\frac{dp}{dx}=q$, მაშინ $p''=q\frac{dq}{dp}$ და განტოლება (8.2) მიიღებს სახეს:

$$F\left(p, q, q\frac{dq}{dp}\right)=0. \tag{8.3}$$

ჩავთვალოთ, რომ p დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო q საძიებელი უცნობი ფუნქცია. მაშინ განტოლება (8.3) წარმოადგენს პირველი რიგის

დიფერენციალურ განტოლებას და მისი ინტეგრება მოხდება I თავში შესწავლილი ერთ-ერთი ხერხით.

(8.1) ყაიდის განტოლებას ხშირი გამოყენება აქვს მექანიკაში.

§ 9. დიფერენციალური განტოლება $F(y^{(n-2)})y^{(n)}=F_1(y^{(n-2)})[y^{(n-1)}]^{m+1}$ სახისა.

შევისწავლოთ (7.1) განტოლების კერძო სახის განტოლება:

$$F(y^{(n-2)})\,y^{(n)}=F_1(y^{(n-2)})\,[y^{(n-1)}]^{m+1}, \tag{9.1}$$

სადაც m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, F და F_1 მოცემული ფუნქციებია $y^{(n-2)}$ წარმოებულისა. თუ ავიღებთ ჩასმას $p=y^{(n-2)}$, მაშინ განტოლება (9.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F(p)\frac{d^2p}{dx^2}=F_1(p)\left(\frac{dp}{dx}\right)^{m+1}$$

ანუ

$$\frac{dp'}{p'^m}=\frac{F_1(p)}{F(p)}\,p'dx,$$

სადაც $p'=\dfrac{dp}{dx}$. აქედან გვექნება განტოლება

$$\frac{dp'}{p'^m}=\frac{F_1(p)}{F(p)}\,dp,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\frac{dp}{dx}=p'=\left[(1-m)\int\frac{F_1(p)}{F(p)}\,dp+C_1\right]^{\frac{1}{1-m}}=\varphi(p,\,C_1).$$

უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას უცნობი p ფუნქციით, რომელშიც ადვილია ცვლადების განცალება:

$$dx=\frac{dp}{\varphi(p,\,C_1)}.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$x=\int\frac{dp}{\varphi(p,\,C_1)}+C_2=\varphi_1\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\,C_1\right)+C_2,$$

სადაც C_2 ინტეგრების მუდმივია. ეს ტოლობა წარმოადგენს § 2-ში შესწავლილ (2.7) ყაიდის დიფერენციალურ განტოლებას.

§ 10. გურსას დიფერენციალური განტოლება. განვიხილოთ ე. წ. გურსას დიფერენციალური განტოლება

$$(1+y'^2)\,y'\,y''=(3y'^2-1)\,y'^2. \tag{10.1}$$

რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს § 9-ში შესწავლილი დიფერენციალური განტოლების კერძო სახეს. გადავწეროთ იგი შემდეგნაირად:

$$(1+p^2)\,p\,\frac{d^2p}{dx^2}=(3p^2-1)\,\frac{dp}{dx},$$

სადაც $p=\dfrac{dy}{dx}$.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $p'=\dfrac{dp}{dx}$, მაშინ უკანასკნელ განტოლებას შეგვიძლია მივცეთ სახე დიფერენციალური განტოლებისა განცალებული ცვლადებით:

$$\frac{dp'}{p'}=\frac{4pdp}{1+p^2}-\frac{dp}{p},$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln p'=2\ln(1+p^2)-\ln p+\ln C',$$

საიდანაც

$$\frac{pp'}{(1+p^2)^2}=C' \tag{10.2}$$

ანუ

$$C_1=\frac{-2pp'}{(1+p^2)^2},$$

სადაც $C_1=-2C'$.

შევასრულოთ (10.2) განტოლებაში ცვლადების განცალება და შედეგი ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\frac{1}{1+p^2}=C_1x+C_2.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ

$$dy=\pm\sqrt{\frac{1-(C_1x+C_2)}{C_1x+C_2}},$$

საიდანაც ინტეგრების შემდეგ გვექნება

$$C_1y+C_3=\pm\left(\arcsin\sqrt{C_1x+C_2}+\sqrt{(C_1x+C_2)\left[1-(C_1x+C_2)^2\right]}\right).$$

ასეთია (10.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

§ 11. ლიუვილის დიფერენციალური განტოლება. ლიუვილის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)}+f(x)\,y^{(n-1)}+\varphi(y^{(n-2)})\,(y^{(n-1)})^2=0,\quad y^{(n-1)}\neq 0, \tag{11.1}$$

სადაც $f(x)$ და $\varphi(y^{(n-2)})$ არის შესაბამისად x და $y^{(n-2)}$ არგუმენტების მოცემული ფუნქციები. მისი ინტეგრებისათვის აღვნიშნოთ $p=y^{(n-2)}$, მაშინ მივიღებთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$p''+f(x)\,p'+\varphi(p)\,p'^2=0,$$

რომელშიც საძიებელ ფუნქციას წარმოადგენს p. უკანასკნელი განტოლება ასეც გადავწეროთ

$$\frac{p''}{p'}+f(x)+\varphi(p)\,p'=0$$

ანუ

$$\frac{d\ln p'}{dx}+\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx+\frac{d}{dx}\int\varphi(p)\,dp=0,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln p'+\int f(x)\,dx+\int\varphi(p)\,dp=\ln C_1.$$

გადავწეროთ იგი შემდეგნაირად

$$\ln\left[p'e^{\int f(x)\,dx}\right]=\ln\left[C_1\,e^{-\int\varphi(p)\,dp}\right],$$

საიდანაც გვექნება

$$p'e^{\int f(x)\,dx}=C_1\,e^{-\int\varphi(p)\,dp}$$

ე. ი.

$$C_1e^{-\int f(x)\,dx}\,dx=e^{\int\varphi(p)\,dp}\,dp.$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$C_1F_1(x)+C_2=F_2(p), \tag{11.2}$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო

$$F_1(x)=\int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx,\quad F_2(p)=\int e^{\int\varphi(p)\,dp}\,dp.$$

თუ (11.2) განტოლებას ასე ჩავწერთ

$$F_2(y^{(n-2)})=C_1F_1(x)+C_2$$

დავრწმუნდებით, რომ იგი უნდა ვაინტეგროთ ისე, როგორც (2.1) ყაიდის დიფერენციალური განტოლება (იხ. § 2).

§ 12. დიფერენციალური განტოლება, რომლის მარცხენა ნაწილი არის ერთგვაროვანი ფუნქცია საძიებელი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0, \tag{12,1}$$

რომლის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს ერთგვაროვან ფუნქციას y, y', y'',..., $y^{(n)}$ ცვლადების მიმართ ერთგვაროვნების მაჩვენებლით m, ე. ი. ფუნქცია F აკმაყოფილებს პირობას

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=y^mF_1\left(x,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right). \tag{12.2}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ (12.1) განტოლების მარცხენა ნაწილი აკმაყოფილებს (12.2) პირობას და თუ $y_1=y_1(x)$ არის ამ განტოლების ერთ-ერთი ინტეგრალი, მაშინ მისი ინტეგრალი იქნება აგრეთვე ფუნქცია $Cy_1(x)$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

დავამტკიცოთ, რომ როცა შესრულებულია (12.1) პირობა, მაშინ (12.1) განტოლების ინტეგრება შეიძლება მივიყვანოთ $n-1$ რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებამდე.

ამისათვის საძიებელი $y=y(x)$ ფუნქციის ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია

$$z=\frac{y'}{y} \qquad (12.3)$$

მაშინ, როგორც მარტივი გამოთვლები გვიჩვენებს, გვექნება

$$\frac{y''}{y}=z'+z^2=\varphi_2(z, z'),$$

$$\frac{y'''}{y}=z\varphi_2(z, z')+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}z'+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z'}z''=\varphi_3(z, z', z''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{y^{(n)}}{y}=\varphi_n(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}).$$

უკანასკნელი და (12.2) ტოლობების ძალით, განტოლება (12.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F_1(x, z, \psi_2(z, z'), \varphi_3(z, z', z''), \ldots, \varphi_n(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}))=0, \quad (12.3)$$

რომელიც წარმოადგენს $n-1$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. წინადადება დამტკიცებულია.

ვთქვათ (12.4) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის

$$z=\Phi(x, C_1, C_2 \ldots, C_{n-1}),$$

სადაც $C_1, C_2 \ldots, C_{n-1}$ ნებისმიერი მუდმივებია. მაშინ, (12.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, თანახმად (12.3) ჩასმისა, იქნება ფუნქცია

$$y=C_n e^{\int \Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$xyy'''+xy'^2-yy'=0 \qquad (12.5)$$

ზოგადი ინტეგრალი.

ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი არის ერთგვაროვანი ფუნქცია y, y', y'' არგუმენტების მიმართ, რომლის ერთგვაროვნების მაჩვენებელია

$m=2$. მისი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ (12.3) ჩასმა, მაშინ მივიღებთ ბერნულის დიფერენციალურ განტოლებას (იხ. თავი I, გვ. 18)

$$z' - \frac{1}{x}z + 2z^2 = 0,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$z = \frac{x}{C_1 + x}.$$

ამის შემდეგ საძიებელი ფუნქცია ასე ჩაიწერება

$$y = C_2\sqrt{C_1 + x^2}.$$

§ **13. კლეროს განზოგადებული დიფერენციალური განტოლება.** განტოლება

$$y = \varphi(u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}, \qquad (13.1)$$

სადაც $y^{(k+1)} = \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}$ და

$$u_k = \sum_{s=k}^{n-1}(-1)^{s-k} \frac{x^{s-k}}{(s-k)!} y^{(s+1)}, \qquad (13.2)$$

წარმოადგენს კლეროს განზოგადებულ დიფერენციალურ განტოლებას. როცა $n=1$, მივიღებთ კლეროს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ზემოთ იყო შესწავლილი (იხ. თავი I, § 19).

კლეროს განზოგადებული განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად აღვნიშნოთ $y' = p$ და მისი მარჯვენა ნაწილის მეორე შესაკრები ასე ჩავწეროთ

$$V = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} p^{(k)}. \qquad (13.3)$$

უკანასკნელი ტოლობა გავაწარმოვოთ x ცვლადით, გვექნება

$$v' = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^k}{k!} p^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} p^{(k+1)} =$$

$$= p + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}p^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)\frac{x^k}{k!}p^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} p^{(k+1)} =$$

$$= p + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}p^{(n)}. \qquad (13.4)$$

ახლა (13.2) ტოლობაში შევიტანოთ $y'=p$ და შემდეგ გავაწარმოოთ x ცვლადით, მივიღებთ

$$u_k'=\sum_{s=k+1}^{n-1}(-1)^{s-k}\frac{x^{s-k-1}}{(s-k-1)!}p^{(s)}+\sum_{s=k}^{n-1}(-1)^{s-k}\frac{x^{s-k}}{(s-k)!}p^{(s+1)}=$$

$$=(-1)^{n-k-1}\frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!}p^{(n)},\quad (k=0,\,1,\,2,\ldots,\,n-1).\qquad (13.5)$$

თუ ამის შემდეგ თვით (13.1) განტოლებას გავაწარმოებთ x ცვლადით, გვექნება

$$p=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}u_k'+v',$$

საიდანაც, (13.4) და (13.5) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$p^{(n)}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right]=0.\qquad (13.6)$$

რაკი (13.6) არის (13.1) განტოლების x ცვლადით გაწარმოების შედეგად მიღებული განტოლება, ამიტომ (13.1) განტოლების ყოველი ინტეგრალი იქნება (13.6) განტოლების ინტეგრალიც. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ (13.6) განტოლების ყველა შესაძლო ინტეგრალთა სიმრავლე შეიცავს, (13.1) განტოლების ინტეგრალთა სიმრავლეს, როგორც ქვესიმრავლეს.

შევნიშნოთ, რომ განტოლება (13.6) იგივურად კმაყოფილდება როცა $p^{(n)}=0$. აქედან მივიღებთ

$$p=C_0+C_1x+\frac{C_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{C_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1},\qquad (13.7)$$

სადაც $C_0, C_1, C_2,\cdots, C_{n-1}$ ნებისმიერი მუდმივებია. გარდა ამისა, თანახმად (13.5) ტოლობისა, გვაქვს

$$u_k'=0,$$

ე. ი.

$$u_k=C_k,\quad (k=0,\,1,\,2,\ldots,\,n-1).\qquad (13.8)$$

თუ გამოვიყენებთ (13.7) გამოსახულებას, მაშინ (13.3) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია v, სათანადო გამოთვლების შესრულების შემდეგ, ასე წარმოიდგინება

$$v=\sum_{k=0}^{n-1}C_k\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\qquad (13.9)$$

და, მაშასადამე, კლეროს განზოგადებული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, თანახმად (13.1), (13.8) და (13.9) ტოლობებისა, იქნება

$$y=\varphi(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})+\sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{13.10}$$

როგორც ვხედავთ, კლეროს განზოგადებული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად საკმარისია (13.1) განტოლებაში φ ფუნქციის არგუმენტები u_k შევცვალოთ შესაბამისი ნებისმიერი მუდმივებით C_k და მიღებულ გამოსახულებას მივუმატოთ (13.9) ტოლობით განსაზღვრული n ხარისხის მრავალწევრი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ (13.6) განტოლებაში მეორე თანამამრავლს გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ p ცვლადის მიმართ $n-1$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1} \frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!}=0, \tag{13.11}$$

რომელიც წარმოადგენს (13.1) განტოლების განსაკუთრებული ინტეგრალების დიფერენციალურ განტოლებას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y=\frac{x^3}{6} y'''-\frac{x^2}{2} y''+xy'-y'''\left(y'-xy''+\frac{x^2}{2}y'''\right) \qquad (13.12)$$

ზოგადი ინტეგრალი.

ამისათვის გადავწეროთ იგი შემდეგნაირად:

$$y=\frac{1}{6} x^3 p''-\frac{1}{2} x^2p'+xp-p''\left(p-xp'+\frac{1}{2} x^2p''\right), \qquad (13.12)$$

სადაც $p=y'$. ახლა კი შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება (13.1) სახის განტოლებაა, რომელშიც

$$\varphi(u_0, u_1, u_2)=-p''\left(p-xp'+\frac{1}{2} x^2p''\right).$$

უკანასკნელი ფუნქცია დამოუკიდებელია u_1 არგუმენტისაგან და დამოკიდებულია მხოლოდ არგუმენტებისაგან $u_0=p-xp'+\dfrac{1}{2} x^2p''$ და $u_2=p''$.

ამიტომ, თანახმად (13.10) ფორმულისა, (13.12) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$y=C_0x+\frac{C_1}{2} x^2+\frac{C_2}{6} x^3-C_0C_2. \tag{13.13}$$

ახლა მოვძებნოთ (13.12) განტოლების განსაკუთრებული ინტეგრალები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში (13.11) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$x^2p'' - xp' + p = \frac{1}{6}x^3,$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალია

$$p = \frac{1}{24}x^3 + A_1 x \ln x + A_2 x,$$

სადაც A_1 და A_2 ნებისმიერი მუდმივებია. აქედან

$$p' = \frac{1}{8}x^2 + A_1 \ln x + A_1 + A_2,$$

$$p'' = \frac{1}{4}x + \frac{A_1}{x}.$$

შევიტანოთ p, p' და p'' ფუნქციების მნიშვნელობანი (13.12) განტოლებაში, მივიღებთ განსაკუთრებული ინტეგრალების ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახს

$$y = \frac{x^4}{96} - \frac{A_1x^2}{4} + \frac{A_2x^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_1x^2 \ln x}{2},$$

რომლის მიღება, ცხადია, შეუძლებელია (13.13) ზოგადი ინტეგრალიდან C_0, C_1, C_2 მუდმივების რაიმე კერძო მნიშვნელობებისათვის.

სავარჯიშო

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი $F(x, y^{(n)})=0$ ყაიდის ქვემომოყვანილი დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $\sin^3 x y''' - 2\cos x = 0$, პასუხი: $y = \ln \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.
2. $\sqrt{1+x^2}\, y'' - 1 = 0$,

   პასუხი: $y = x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C_1x + C_2$.
3. $y^{(4)} = e^{\alpha x}$, α — ნამდვილი რიცხვია,

   პასუხი: $y = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^4} + \frac{C_1x^3}{3!} + \frac{C_2x^2}{2!} + C_3x + C_4$.
4. $(y''')^2 - (1+x)^4 = 0$,

   პასუხი: $y = \pm\frac{(1+x)^5}{60} + C_1x^2 + C_2x + C_4$.

5. $y'' = \arcsin x$,

პასუხი: $y = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{3}{4} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \arcsin x + C_1 x + C_2$.

6. $y''' = 27e^{3x} + 120x^3$, პასუხი: $y = e^{3x} + x^6 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

7. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$, პასუხი: $y = \ln \sin x + C_1 + C_2 x + C_3 x^3$.

8. $y'' + e^{y''} = x$,

პასუხი: $x = t + e^t$, $y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1\right) e^t +$

$$+ \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ სახის შემცველი დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $y'' = y' \sqrt{y'^2 - a^2}$, პასუხი: $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax - C_1}{2}\right) + C_2$.

2. $y'' + \sqrt{1 - y'^2} = 0$, პასუხი: $y = \sin(x - C_1) + C_2$.

3. $(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} + ay'' = 0$, პასუხი: $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$.

4. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$, პასუხი: $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$.

5. $ay''' = y''$, პასუხი: $y = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 x + C_3$.

6. $y'(1 + y'^2) = ay''$, პასუხი: $x - C_1 = a \lg \sin \frac{y - C_2}{a}$.

7. $y''' = (y'')^3$, პასუხი: $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3$.

8. $y''' + y''^2 = 0$, პასუხი: $(x + C_1) \lg(x + C_1) + C_2 x + C_3$.

9. $y' y'' - \sqrt{1 + y'^2} = 0$,

პასუხი: $y = \frac{x - C_1}{2} \sqrt{(x - C_1)^2 - 1} -$

$$- \frac{1}{2} \lg\left[(x - C_1) + \sqrt{(x - C_1)^2 - 1}\right] + C_2.$$

10. $y^{(4)} - a\sqrt{y'''} = 0$,

პასუხი: $y = \frac{a^2 (x - C_1)^5}{240} + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

11. $3[(y''')^2+y'']-2(y''')^3=0$,

პასუხი: $y=C_1+C_2x+\frac{1}{2}\left(C_3-\frac{1}{3}\right)x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{8}{105}(x+C_3)^{\frac{7}{2}}$.

12. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის სიმრუდის რადიუსი მუდმივია და უდრის a.

პასუხი: $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$.

13. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის სიმრუდის რადიუსის გეგმილი Oy ღერძზე მუდმივი სიდიდეა.

პასუხი: $e^{ay+C_2}=\sec(ax+C_1)$.

14. შეადგინეთ იმ წირის განტოლება, რომლის სიმრუდის რადიუსის გეგმილი Ox ღერძზე მუდმივია.

პასუხი: $\frac{x-C_1}{a}=\lg\sin\frac{y-C_2}{a}$.

15. მოვძებნოთ წირი, რომლის სიმრუდის რადიუსი უდრის ნორმალის მონაკვეთს, მოთავსებულს Ox ღერძსა და $y=a$ წრფეს შორის.

პასუხი: $y+a\ln\cos\frac{x+C_1}{a}=C_2$.

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემომოყვანილი $F(y^{(n)}, y^{(n-2)})=0$ სახის დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $y''=2e^y$, პასუხი: $x+C_2=\ln\frac{\sqrt{4e^y+C_1}-\sqrt{C_1}}{\sqrt{4e^y+C_1}+\sqrt{C_1}}$.

2. $a^2y''-y=0$, პასუხი: $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$.

3. $y''-\frac{1}{\sqrt{y}}=0$,

პასუხი: $x=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$.

4. $y^3y''+1=0$, პასუხი: $x=\frac{1}{C_1}\sqrt{1+C_1y^2}+C_2$.

5. $a^2y''+y=0$, პასუხი: $y=C_1\sin\frac{x}{a}+C_2\cos\frac{x}{a}$.

6. $3y''-y^{-\frac{5}{3}}=0$.

პასუხი: $x+C_1=\frac{1}{C_2^2}\left(C_2\sqrt[3]{y^2}+2\right)\sqrt{C_2\sqrt[3]{y^2}-1}$.

7. $y'' - a^2 y^{-3} = 0,$ პასუხი: $C_1(x - C_2)^2 = C_1 y^2 - a^2.$

8. $y^3 y'' - y^4 + 1 = 0,$

პასუხი: $2x + C_1 = \ln\left(C_2 + 2y^2 + 2\sqrt{y^4 + C_2 y^2 + 1}\right).$

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემოთმოყვანილი $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ სახის დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $(a + x)\, y'' + xy'^2 = y',$

პასუხი: $y = \ln(x^2 - C_1^2) + \dfrac{a}{C_1} \ln \dfrac{x - C_1}{x + C_2} + C_2.$

2. $xy'' - \dfrac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0,$

პასუხი: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1;\ \ y = C_1 x (x - C_1) + C_2.$

3. $y^{(5)} - \dfrac{1}{x} y^{(4)} = 0,$ პასუხი: $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5.$

4. $2xy' - (1 + x^2)\, y'' = 0,$ პასუხი: $y = C_1 x + \dfrac{1}{3} C_1 x^3 + C_2.$

5, $(1 + x^2)\, y'' + y'^2 + 1 = 0,$

პასუხი: $C_1^2 y = (1 + C_1^2) \ln(1 + C_1 x) - C_1 x + C_2.$

6. $xy'' - y' \ln \dfrac{y'}{x} = 0,$ პასუხი: $y = (C_1 x - C_1^2)\, e^{1 + \frac{x}{C_1}} + C_2,$

7. $a^2 \sqrt{a^2 + x^2}\, y'' + a^2 y' - x^2 = 0,$

პასუხი: $y = -\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{C_1 x}{a^2} + \dfrac{x^3}{9a^2}\right) + \dfrac{2}{9a^2}(a^2 + x^2)^{\frac{2}{3}} +$

$$+ \frac{C_1}{a^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right] + C_2.$$

8. $2x^3 y''' - x^2 y'' = (y'')^3,$

პასუხი: $y = C_3 + C_2 x + \dfrac{4}{15 C_1^3}(C_1 x - 4)(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}}.$

9. $xy'y'' + y'^2 + 1 = ay'' \sqrt{1 + y'^2}.$

$$\text{პასუხი:}\quad \begin{cases} x = \dfrac{C_1 + ap}{\sqrt{1 + p^2}}, \\[2ex] y = -\dfrac{a}{\sqrt{1 + p^2}} + \dfrac{C_1 p}{\sqrt{1 + p^2}} - C_1 \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) + C_2. \end{cases}$$

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემოთმოყვანილი $f(y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ ყაიდის დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $2yy''-y'^2=0$,

   პასუხი: $y=C_1\left[1+\dfrac{(x-C_2)^2}{4C_1^2}\right]=C_1+\dfrac{1}{4C_1}(x-C_2)^2$.

2. $(1+y'^2)\,y'=(1+yy')\,y''$,

   პასუხი: $\begin{cases} x=C_1\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+\ln p+C_2, \\ y=p+C_1\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$

3. $y''+\dfrac{2y'^2}{1-y}=0$, პასუხი: $y=\dfrac{x+C_1}{x+C_2}$.

4. $yy''-y'^2=0$, პასუხი: $y=C_1e^{C_2x}$.

5. $y'^2+y''^2=yy'y''$, პასუხი: $y=C_1+C_2e^{C_1x}$.

6. $yy''+y'^2-1=0$, პასუხი: $x=\sqrt{y^2-C_1^2}+C_2$.

7. $2yy''+y'^2=0$, პასუხი: $4y^3=9C_1(x-C_2)^2$.

8. $2yy''-3y'^2-4y^2=0$, პასუხი: $y\cos^2(x+C_1)=C_2$.

9. $(y''')^2-y''y^{(4)}=0$,

   პასუხი: $y=C_1x^2+C_2x+C_3$ და $y=C_2e^{C_1x}+C_3x+C_4$.

10. $y'^2-yy''=\sqrt{y'^2+a^2y''^2}$,

    პასუხი: $C_1x+C_2=\ln\left(C_1y+\sqrt{1+a^2C_1^2}\right)$.

11. $2yy''+y'^2+y'^4=0$, პასუხი: $\begin{cases} x=C_2+\dfrac{2C_1}{3p^3}, \\ y=\dfrac{C_1(1+p^2)}{p^2}. \end{cases}$

12. $y'^2\sin y+y''\cos y-y'=0$,

    პასუხი: $x=C_1+\cos C_2\ln\operatorname{tg}\dfrac{y+C_2}{2}$.

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემოთმოყვანილი დიფერენციალური განტოლებებისა, რომლებიც ერთგვაროვანია $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ცვლადების მიმართ.

1. $xyy''+xy'^2-yy'=0$, პასუხი: $y=C_2\sqrt{x^2+C_1}$.

2. $yy''-x'^2-\dfrac{yy'}{1+x}=0$, პასუხი: $y=e^{C_1\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}+C_2$.

3. $x^2yy'' - (xy' - y)^2 = 0$, პასუხი: $y = C_1 x e^{\frac{C_2}{x}}$.

4. $y'^2 - yy'' - n\sqrt{y'^2 + a^2 y''^2} = 0$,

პასუხი: $C_1 x = \ln\left(C_1 y + n\sqrt{1 + a^2 C_1^2}\right) + C_2$.

5. $yy'' - y'^2 - \dfrac{yy'}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0$,

პასუხი: $\ln(C_2 y^2) = C_1 a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C_1 x\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

6. $xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 - x^4 y^3 = 0$,

პასუხი: $y = C_1 e^{\frac{1}{3}(C_2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 0$, პასუხი: $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$.

8. $xyy'' = yy' + xy'^2 + \dfrac{nxy'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

პასუხი: $n\sqrt{a^2 - x^2} = C_1 \ln\left(C_1 + n\sqrt{a^2 - x^2}\right) - n^2 \ln(C_2 y)$.

9. $yy'' + y'^2 - \dfrac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}} = 0$,

პასუხი: $y = C_2 + C_1\left[x^2 + x\sqrt{1 + x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]$.

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემომოყვანილი დიფერენციალური განტოლებებისა ხელოვნური ხერხით.

1. $(x - 2y^3)\,dx + 3y^2(2x - y^3)\,dy = 0$,

პასუხი: $(x + y^3)^3 = C(x - y^3)$

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა $z = y^3$.

2. $\dfrac{(2 - y')^2}{y^2} - y' + 1 = 0$, პასუხი: $y = x - C - \dfrac{1}{x - C}$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: $z = \dfrac{2 - y'}{y}$.

3. $(x^2 + 2xy + y^2)\,dx - 4dy = 0$,

პასუხი: $x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{x + y}{2} + C$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: $z = x + y$.

4. $y' = (ax+by+c)^2$,

პასუხი: $ax+by+c=\sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathrm{tg}\,(C+\sqrt{ab}x)$.

მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $z=ax+by+c$.

5. $yy''+y'^2-3yy'+y^2-0{,}5=0$,

პასუხი: $y=\sqrt{C_1 e^x + C_2 e^{2x}+0{,}5}$.

მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $z=y^2$.

6. $xy' - xe^{x-y}+1=0$, პასუხი: $y=\ln\left(e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}\right)$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: $z=e^y$.

7. $y'+x\cos y+\sin y+x=0$, პასუხი: $\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}=Ce^{-x}-x+1$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: $\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}=z$.

8. $axyy'^2+(x^2-ay^2-b)\,y'-xy=0$,

პასუხი: $y^2-Cx^2+\frac{bC}{1+aC}=0$.

მითითება. გამოიყენეთ გარდაქმნა: $u=x^2$, $v=y^2$.

9. $y=\frac{1}{2}\,y'+xy''$, პასუხი: $y=C_1 e^{2\sqrt{x}}+C_2 e^{-2\sqrt{x}}$

მითითება. ხელსაყრელია ჩასმა: $x=t^2$.

10. $(y-x)\sqrt{1+x^2}dy=(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$,

პასუხი: $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u-v}{2}\right)=u+C$.

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: $x=\mathrm{tg}\,u$, $y=\mathrm{tg}\,v$.

11. $xy'^2+\frac{3}{2}\,yy'-1=0$,

პასუხი: $x=y^2\left(z^2-\frac{3}{2}\,z\right)$, $y=\frac{C}{z\sqrt[3]{(z-2)^5}}$.

მითითება. გამოიყენეთ ჯერ ჩასმა $y'=\frac{1}{q}$ და შემდეგ ჩასმა $\frac{q}{y}=z$.

12. $y'^3 - axy' + x^3 = 0$,

$$\text{პასუხი: } x = \frac{at}{1+t^2}, \quad y = \frac{a^2t^3}{3(1+t^3)^2} + C.$$

მითითება. ხელსაყრელია ჩასმა: $y = tx$.

13. $x(y''' - y') - (x^2+2)(y'' - y) = 0$,

$$\text{პასუხი: } y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{\frac{x^2}{2}}.$$

მითითება. გამოიყენეთ ჩასმა: $z = y'' - y$.

14. $y'' - (1+2e^x)y' + ye^{2x} = 0$,

$$\text{პასუხი: } y = (C_1 + C_2e^x)\, e^{(ex)}.$$

მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $x = \operatorname{tg} t$.

15. $x^4y'' - (x^3 + 2xy)y' + 4y^2 = 0$,

$$\text{პასუხი: } y = x^2\left(1 - \frac{x^{2C_1} + C_2}{x^{2C_1} - C_2}\right).$$

მითითება· გამოიყენეთ გარდაქმნა: $x = e^z$, $y = ue^{2z}$.

16. $x^2(yy'' + y'^2) - y^2 = 0$, პასუხი: $y^2 = \dfrac{2C_1x^3 - C_2^3}{3x}$.

მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $x = e^t$, $y = ze^t$.

17. $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$, პასუხი: $y = x\left(C_1 - \arcsin\dfrac{C_2}{x}\right)$.

მითითება: გამოიყენეთ წინა მაგალითის ჩასმა.

18. $x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0$, პასუხი: $y = \dfrac{C_1x}{C_2 + x^2}$.

მითითება. გამოიყენეთ 16 მაგალითის ჩასმა.

19. $(x^2 + y^2)y'' - yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0$,

$$\text{პასუხი: } x^2 - 2C_1xy - y^2 = C_2.$$

მითითება. გამოიყენეთ 16 მაგალითის ჩასმა.

თავი IV

მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. **ზოგიერთი განსაზღვრა და წინასწარი დებულება.** ვთქვათ $x\in]a, b[$ დამოუკიდებელი ცვლადია, $y=y(x)$ — საძიებელი ფუნქცია, $a_i=a_i(x)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ და $f(x)$ არის x ცვლადის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები $]a, b[$ შუალედში (კერძოდ, შეიძლება იყოს მუდმივები ან ტოლი ნულისა). განტოლებას

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{1.1}$$

ეწოდება n რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, ხოლო განტოლებას

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{1.2}$$

ეწოდება არაერთგვაროვანი (1.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. ფუნქციები $a_i=a_i(x)$ არის დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტები, $f(x)$ — თავისუფალი წევრი. ფუნქციას $y=0$ ეწოდება ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების ტრივიალური ინტეგრალი.

თეორემა. თუ განტოლებაში (1.1) მოვახდენთ დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნას:

$$x=\varphi(t), \tag{1.3}$$

მაშინ მიღებული განტოლება ისევ წრფივი იქნება. იგულისხმება, რომ $t\in]t_0, t_1[$ როცა $x\in]a, b[$, $\varphi(t)$ არის n-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია და $\varphi'(t)\neq 0$.

მართლაც, თანახმად ჩასმისა (1.3), გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x_t'}\,y_t',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x_t'}\cdot y_t'\right)=\frac{1}{x_t'}\,\frac{d}{dt}\,(y_t')\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x_t'^2}\,y_t'',$$

. . . .

ეს გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ ნებისმიერი k რიგის წარმოებული $y^{(k)}=\dfrac{d^ky}{dx^k}$ წრფივად გამოისახება $y'_t, y''_t, \ldots, y_t^{(k)}$ წარმოებულებით. შევიტანოთ $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ წარმოებულების გამოთვლილი მნიშვნელობანი (1.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$y_t^{(n)}+b_1y_t^{(n-1)}+\ldots+b_{n-1}y'_t+b_ny=F(t), \tag{1.4}$$

სადაც კოეფიციენტები $b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ და თავისუფალი წევრი $F(t)$ იქნებიან t ცვლადის უწყვეტი ფუნქციები $]t_0, t_1[$ შუალედში. როგორც ვხედავთ, განტოლება (1.4) ისევ წრფივია $y=y(x(t))$ საძიებელი ფუნქციის მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ (1.2) განტოლება (1.3) ჩასმის შემდეგ ისევ ერთგვაროვანი დარჩება.

ახლა დავამტკიცოთ

თეორემა. თუ არაერთგვაროვან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაში (1.1) მოვახდენთ საძიებელი ფუნქციის წრფივ გარდაქმნას:

$$y=\alpha(x)\,z+\beta(x), \tag{1.5}$$

მაშინ იგი ისევ წრფივი განტოლება დარჩება, სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა, $\alpha=\alpha(x)$ და $\beta=\beta(x)$ არის n რიგამდე (ჩათვლით) უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები და $\alpha(x)\neq 0,\ x\in\,]a, b[$.

მართლაც, გვაქვს

$$\frac{dy}{dx}=\alpha\frac{dz}{dx}+\alpha' z+\beta'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha\frac{d^2z}{dx^2}+2\alpha'\frac{dz}{dx}+\alpha'' z+\beta''.$$

თუ გამოთვლებს გავაგრძელებთ, ვნახავთ, რომ ნებისმიერი k რიგის წარმოებული y ფუნქციისა x ცვლადით წრფივად გამოისახება z ფუნქციის პირველი k რიგის წარმოებულებით x ცვლადით. ცხადია, როცა განტოლებაში (1.1) შევიტანთ $y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$ ფუნქციების ზემოთ მოყვანილ შესაბამის მნიშვნელობებს, მივიღებთ ისევ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თუ ერთგვაროვან განტოლებაში (1.2) გამოვიყენებთ ჩასმას:

$$y=\alpha(x)z, \tag{1.6}$$

მაშინ იგი ისევ ერთგვაროვან განტოლებად გარდაიქმნება. თუკი კერძოდ

$$\alpha(x) = e^{-\frac{1}{n}\int a_1(x)\,dx},$$

მაშინ გარდაქმნის შედეგად მიღებულ დიფერენციალურ განტოლებაში $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ წარმოებულის კოეფიციენტი ნულის ტოლი იქნება. ხშირად ეს სასურველი და საჭირო გარდაქმნაა.

§ 2. **n რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.** განვიხილოთ n რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების მარცხენა ნაწილი

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y. \tag{2.1}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრულ $L[y]$ გამოსახულებას უწოდებენ დიფერენცირების წრფივ ოპერატორს.

ცხადია, რომ თუ $y_1 = y_1(x)$ და $y_2 = y_2(x)$ არის n-ჯერ წარმოებადი ფუნქციები $]a, b[$ შუალედზე, მაშინ

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]. \tag{2.2}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ დიფერენცირების წრფივი ოპერატორი ადიტიურია. გარდა ამისა, თუ C მუდმივია და $y = y(x)$ არის n-ჯერ წარმოებადი ფუნქცია $]a, b[$ შუალედზე, მაშინ

$$L[Cy] = CL[y], \tag{2.3}$$

ე. ი. $L[y]$ ერთგვაროვანი ოპერატორია. დიფერენცირების წრფივი ოპერატორის (2.2) და (2.3) თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ არის ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალები, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ აგრეთვე ინტეგრალი იქნება (1.2) განტოლებისა:

$$L[y] = L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i] = 0,$$

სადაც C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ნებისმიერი მუდმივებია.

განსაზღვრა. ფუნქციებს $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ წრფივად დამოკიდებული ფუნქციები ეწოდება $]a, b[$ შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი რიცხვები $C_1, C_2, \ldots, C_n$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და წრფივი კომბინაცია

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)=0, \tag{2.4}$$

სადაც $x \in]a, b[$.

თუ ტოლობა (2.4) შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $C_1=C_2= =\ldots=C_n=0$, მაშინ $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ ფუნქციებს ეწოდება წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ფუნქციები $]a, b[$ შუალედში.

შევნიშნოთ, რომ თუ ერთ-ერთი ფუნქცია, მაგალითად $y_n=y_n(x)$ იგივურად ნულია $]a, b[$ შუალედში, მაშინ $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ წრფივად დამოკიდებული ფუნქციებია $]a, b[$ შუალედზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში ტოლობა (2.4) შესრულდება როცა $C_1=C_2=\ldots=C_{n-1}=0$ და $C_n \neq 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ნებისმიერ $]a, b[$ შუალედში წრფივად დამოუკიდებელია ფუნქციები: $y_1=1, y_2=x, y_3=x^2,\ldots, y_n=x^{n-1}$. მართლაც, ამ ფუნქციებისათვის ტოლობა (2.4) შესრულდება $]a, b[$ შუალედში მხოლოდ მაშინ, როცა $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წრფივად დამოკიდებულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში ფუნქციები: $y_1=1,\ y_2=\sin^2 x,\ y_3=\cos^2 x$. ამ შემთხვევაში ტოლობა

$$C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=0$$

იგივურად შესრულდება შუალედში $]-\infty, +\infty[$, როცა $C_1=-1$, $C_2=C_3=1$.

ვთქვათ ყოველი $y_i(x)$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ არის $n-1$-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $]a, b[$ შუალედში. ფუნქციონალურ დეტერმინანტს

$$D(x)=D[y_1, y_2,\cdots, y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

ვ რ ო ნ ს კ ი ს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი ეწოდება.

თეორემა. თუ $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ ა რ ი ს ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი (1.2) დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ი ს წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი კ ე რ ძ ო ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ე ბ ი $]a, b[$ შ უ ა ლ ე დ შ ი, მ ა შ ი ნ ვ რ ო ნ ს კ ი ს დ ე ტ ე რ მ ი ნ ა ნ ტ ი (2.5) ი გ ი ვ უ რ ა დ ნ უ ლ ი ა ა მ შ უ ა ლ ე დ შ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის თანახმად, ტოლობა (2.4) წარმოადგენს იგივეობას $]a, b[$ შუალედში, სადაც ყველა C_i არ არის ნულის ტოლი. ვთქვათ, მაგალითად, $C_n \neq 0$. ამოვხსნათ (2.4) ტოლობა $y_n(x)$ ფუნქციის მიმართ, გვექნება

$$y_n=\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i, \tag{2.6}$$

სადაც $\alpha_i = -\dfrac{C_i}{C_n}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$. გავაწარმოვოთ (2.6) იგივეობა მიმდევრობით $n-1$-ჯერ, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} y_n' &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i', \\ y_n'' &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i'', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

შევნიშნოთ, რომ (2.5) დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუკი მას ასე გარდავქმნით

$$D(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

რომელიც, (2.6) და (2.7) ტოლობების თანახმად, იგივურად ნულის ტოლია $]a, b[$ შუალედში. ამრიგად, როცა შესრულებულია თეორემის პირობები, მაშინ $D(x) \equiv 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არის ერთგვაროვანი (1.2) დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალები $]a, b[$ შუალედში, მაშინ ვრონსკის დეტერმინანტი $D(x)$ არ არის ნულის ტოლი $]a, b[$ შუალედის არც ერთ წერტილზე.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ რომელიმე წერტილზე $x_0 \in]a, b[$ დეტერმინანტი $D(x_0)=0$. განვიხილოთ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \cdots + C_n y_{n0} &= 0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \cdots + C_n y_{n0}' &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \cdots + C_n y_{n0}^{(n-1)} &= 0, \end{aligned}\right\}, \qquad (2.8)$$

სადაც $y_{i0}=y_i(x_0)$, $i=1, 2,\dots n$ და $y_{i0}^{(k)}=y_i^{(k)}(x_0)$, $k=1, 2,\dots, n-1$. ვიგულისხმოთ, რომ განტოლებათა სისტემაში (2.8) მუდმივები C_i უცნობებია. მაშინ, დაშვების ძალით, (2.8) ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას ექნება არატრივიალური ამოხსნა $C_1, C_2,\dots, C_n$ უცნობების მიმართ. ახლა განვიხილოთ წრფივი კომბინაცია:

$$\bar{y}(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{2.9}$$

თანახმად (2.8) განტოლებებისა, ფუნქცია (2.9) და მისი წარმოებულები $\bar{y}', \bar{y}'',\dots, \bar{y}^{(n)}$ წერტილზე $x=x_0$, ნულის ტოლია:

$$\bar{y}(x_0)=\bar{y}'(x_0)=\dots=\bar{y}^{(n-1)}(x^0)=0. \tag{2.10}$$

თანახმად თეორემისა, n-რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალის არსებობისა და ერთადობის შესახებ (იხ. გვ. 85), საწყისი პირობები (2.10) განსაზღვრავს (1.2) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთ ინტეგრალს, რომელიც ნულის ტოლია მთელ $]a, b[$ შუალედში: $\bar{y}(x)\equiv 0$. მაშასადამე, ყოველ წერტილზე $x\in\,]a, b[$, (2.9) ტოლობის ძალით, გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)=0,$$

სადაც ყველა C_i არ არის ნულის ტოლი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციები $y_i(x)$ წრფივად დამოკიდებულია, რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობებს.

ერთგვაროვანი (1.2) დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ინტეგრალების სიმრავლეს, რომელიც n ფუნქციისაგან შედგება, ეწოდება (1.2) განტოლების ინტეგრალების ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ უ რ ი ს ი ს ტ ე მ ა.

თეორემა. ყ ო ვ ე ლ n რ ი გ ი ს წ რ ფ ი ვ ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ა ქ ვ ს ფ უ ნ დ ა მ ე ნ ტ უ რ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ე ბ ი ს ს ი ს ტ ე მ ა.

მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი, ნულიდან განსხვავებული, დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.11}$$

და (1.2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალები $y_1, y_2,\dots, y_n$ განვსაზღვროთ შემდეგი საწყისი პირობებით: როცა $x=x_0$, მაშინ $y_i=\beta_{i1}$,

$y_i'=\beta_{i2},\ldots, y_i^{(n-1)}=\beta_{in}$, $(i=1, 2,\ldots, n)$. ამ პირობებში (2.11) წარმოადგენს $D(x)$ დეტერმინანტის მნიშვნელობას წერტილზე $x=x_0$ და თანაც $D(x_0)\neq 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციები $y_1, y_2,\cdots, y_n$ არის (1.2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალები. ამრიგად, $y_1, y_2,\cdots, y_n$ წარმოადგენს (1.2) განტოლების ფუნდამენტურ სისტემას.

კერძოდ, როცა (2.11) დეტერმინანტს აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

მაშინ შესაბამის ფუნქციებს $y_1, y_2,\cdots, y_n$ უწოდებენ (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალების ნორმალურ ფუნდამენტურ სისტემას.

ადვილი სანახავია, რომ (1.2) განტოლებას აქვს უსასრულო სიმრავლე ფუნდამენტური ინტეგრალების სისტემებისა.

§ 3. n რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. გავეცნოთ (1.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნის წესს, როცა ცნობილია მისი ფუნდამენტური ინტეგრალების სისტემა.

თეორემა. თუ $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\cdots y_n=y_n(x)$ წარმოადგენს (1.2) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალების ფუნდამენტურ სისტემას, მაშინ ფუნქცია

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i \tag{3.1}$$

იქნება (1.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, სადაც $C_1, C_2,\ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვუჩვენოთ, რომ თუ $y_1, y_2,\cdots, y_n$ არის (1.2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ (3.1) ტოლობიდან მიიღება n-რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ყოველი ინტეგრალი.

სხვანაირად, უნდა დავრწმუნდეთ, რომ (3.1) ტოლობიდან, $C_1,\cdots, C_n$ მუდმივების სათანადო შერჩევით, შეიძლება მივიღოთ (1.2) განტოლების ნებისმიერი კერძო ინტეგრალი. n რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალის არსებობის და ერთადობის თეორემის ძალით (იხ. გვ. 85), (1.2) განტოლების ყოველი კერძო ინტეგრალი ცალსახად განისაზღვრება შესაბამისი საწყისი პირობებით:

$$\text{როცა } x=x_0, \text{ მაშინ } y=y_0,\ y'=y_0',\ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}. \tag{3.2}$$

საძიებელი კერძო ინტეგრალის შესაბამისი $C_1, \ldots, C_n$ მუდმივების გან-საზღვრისათვის, გვექნება ალგებრულ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \cdots + C_n y_{n0} = y_0, \\ &C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + \cdots + C_n y'_{n0} = y'_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \cdots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი წარმოადგენს $D(x)$ დეტერმინანტის მნიშვნელობას წერტილზე $x = x_0$ და რაკი $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არიან (1.2) განტოლების ფუნდამენტური ინტეგრალები, ამიტომ $D(x_0) \neq 0$.

ამრიგად, (3.3) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $C_1, C_2, \ldots, C_n$ უცნობების მიმართ. როცა (3.1) ტოლობაში C_i კოეფიციენტები განსაზღვრულია (3.3) სისტემიდან, მაშინ ფუნქცია y აკმაყოფილებს (3.2) საწყის პირობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, თუ დამტკიცებულ თეორემაში $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არის კერძო ინტეგრალების ნორმალური ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ (1.2) განტოლების ის ინტეგრალი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.2) საწყის პირობებს, იქნება ფუნქცია $y = y_0 y_1 + y'_0 y_2 + \cdots + y_0^{(n-1)} y_n$.

§ 4. რიგის დაწევა წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაში. დიფერენციალური განტოლება (1.2) ეკუთვნის განტოლებების იმ კლასს, რომლებიც ერთგვაროვანი არიან $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ცვლადების მიმართ (იხ. გვ. 109, § 12), ამიტომ მისი ინტეგრება დაიყვანება $n-1$ რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა $z = \dfrac{y'}{y}$, სადაც იგულისხმება, რომ $y \neq 0$. ამ ჩასმის შედეგად მიღებული $n-1$ რიგის განტოლება, საზოგადოდ, არაწრფივია. ნათქვამის გამო სასურველია ისეთი ჩასმით ვისარგებლოთ, რომლის გამოყენების შედეგად მიღებული დიფერენციალური განტოლება იქნება წრფივი. როგორც ვნახავთ ეს შესაძლებელია ყოველთვის როცა ცნობილია (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალი.

თეორემა. თუ ცნობილია (1.2) დიფერენციალური განტოლების ერთი კერძო ინტეგრალი, მაშინ მისი ინტეგრება მიიყვანება $n-1$ რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $y_1 = y_1(x)$ არის (1.2) განტოლების ერთ-ერთი კერძო ინტეგრალი. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$y = y_1 z, \tag{4.1}$$

სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა. მაშინ გვექნება

$$y^{(n)}=y_1z^{(n)}+ny_1'z^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}y_1''z^{(n-2)}+\ldots+y_1^{(n)}z, \tag{4.2}$$

$$(n=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

თუ ახლა (1.2) განტოლებაში ჩავსვამთ (4.1) და (4.2) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$y_1z^{(n)}+[ny_1'+a_1y_1]\,z^{(n-1)}+\ldots+[y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}y_1'+a_ny_1]\,z=0 \tag{4.3}$$

და რადგან, პირობის ძალით, მარცხენა ნაწილში უკანასკნელი შესაკრები იგივურად ნულის ტოლია, ამიტომ (4.3) ისეთი დიფერენციალური განტოლებაა, რომელიც ცხადი სახით არ შეიცავს საძიებელ ფუნქციას z. გავყოთ (4.3) განტოლება y_1 ფუნქციაზე და შემდეგ ავიღოთ ჩასმა $z'=u$, გვექნება შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლება:

$$u^{(n-1)}+b_1u^{(n-2)}+\ldots+b_{n-1}u=0. \tag{4.4}$$

ვთქვათ $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{n-1}$ არის (4.4) განტოლების კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ ფუნქციები

$$1,\ \int u_1dx,\ \int u_2dx,\ldots,\ \int u_{n-1}dx$$

იქნებიან z ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები, ხოლო ფუნქციები

$$y_1,\ y_2=y_1\int u_1dx,\ y_3=y_1\int u_2dx,\ldots,\ y_n=y_1\int u_{n-1}dx \tag{4.5}$$

იქნებიან (1.2) განტოლების შესაბამისი კერძო ინტეგრალები.

დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციები (4.5) წარმოადგენს (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტურ სისტემას.

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი:

$$C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n=0,$$

სადაც ყველა C_i არ არის ნულის ტოლი. აქედან, გვაქვს

$$C_1+C_2\int u_1dx+C_3\int u_2dx+\ldots+C_n\int u_{n-1}dx. \tag{4.6}$$

გავაწარმოოთ ტოლობა (4.6), გვექნება

$$C_2u_1+C_3u_2+\ldots+C_nu_{n-1}=0.$$

უკანასკნელი ტოლობა შეუთავსებელია ჩვენ დაშვებასთან იმის შესახებ, რომ $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{n-1}$ არის (4.4) განტოლების კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა. მაშასადამე, $C_2=C_3=\ldots=C_n=0$ და, ვინაიდან $y_1\neq 0$, ამიტომ (4,6) ტოლობიდან $C_1=0$. როგორც ვხედავთ ფუნქციე-

ბი $y_1, y_2, \dots, y_n$ არის (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა. თეორემა დამტკიცებულია.

მსგავსი მსჯელობით მტკიცდება, რომ თუ ცნობილია (1.2) განტოლების k წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალი, მაშინ მისი ინტეგრება მიიყვანება $n-k$ რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე.

§ 5. n რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. განვიხილოთ არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება (1.1).

თეორემა. თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი (1.1) განტოლების ერთი კერძო ინტეგრალი $Y=Y(x)$, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალისა და Y ინტეგრალის ჯამი.

პირობის მიხედვით დავწერთ

$$L[Y(x)]\equiv f(x), \tag{5.1}$$

სადაც $L[\ ]$ არის § 2-ში შემოღებული დიფერენცირების წრფივი ოპერატორი. ვთქვათ $y_1, y_2, \dots, y_n$ არის არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ფუნდამენტური ინტეგრალები, მაშინ

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i\right]\equiv 0. \tag{5.2}$$

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ფუნქცია $y(x)=Y(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ არის (1.1) განტოლების ინტეგრალი. მართლაც, (5.1), (5.2) და (2.2) ტოლობების ძალით, გვექნება

$$L[y(x)]=L[Y(x)]+L\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right]\equiv f(x).$$

ახლა ვუჩვენოთ, რომ $y(x)$ ფუნქცია (1.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია. ამისათვის უნდა დავრწმუნდეთ, რომ $C_1\, C_2, \dots, C_n$ მუდმივების სათანადო შერჩევით შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ ნებისმიერი საწყისი პირობები: ნებისმიერ $x=x_0\in\,]a, b[$ წერტილზე $y=y_0$, $y'=y'_0, \dots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$, სადაც $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ ნებისმიერად მოცემული რიცხვებია.

იმისათვის, რომ ინტეგრალი $y(x)$ აკმაყოფილებდეს მოცემულ საწყის პირობებს, საჭიროა მუდმივები $C_1, C_2, \dots, C_n$ ცალსახად განისაზღვროს განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= Y(x_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_{i0},\\
y_0' &= Y'(x_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_{i0}',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_0^{(n-1)} &= Y^{(n-1)}(x_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i y_{i0}^{(n-1)},
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

შევნიშნოთ, რომ ამ სისტემის დეტერმინანტი წარმოადგენს ვრონსკის დეტერმინანტის მნიშვნელობას $x=x_0$ წერტილზე და, რადგან $y_1, y_2, \dots, y_n$ არის ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, ამიტომ $D(x_0)\neq 0$. ამრიგად, არსებობს (5.3) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივების მიმართ.

მაშასადამე, $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივების სათანადო შერჩევით, $y(x)$ ფუნქციიდან შეიძლება მივიღოთ (1.1) განტოლების ყოველი კერძო ინტეგრალი. ეს იმას ნიშნავს, რომ $y(x)$ წარმოადგენს (1.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

თეორემა დამტკიცებულია.

ისევე როგორც ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში მტკიცდება, რომ როცა ცნობილია (1.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების ერთი კერძო ინტეგრალი y_1, მაშინ (1.1) განტოლების ინტეგრება, ჩასმით $y=y_1 z$, დაიყვანება $n-1$ რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე.

§ 6. მუდმივების ვარიაციის (ლაგრანჟის) მეთოდი. წინა პარაგრაფში შევისწავლეთ არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნის ხერხი, როცა ცნობილია მისი ერთი კერძო ინტეგრალი. ახლა გავეცნოთ იმავე (1.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნის მეთოდს, რომელსაც ეწოდება მუდმივების ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის მეთოდი.

თეორემა. თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი (1.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ (1.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება კვადრატურების საშუალებით.

ვთქვათ $y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x), \dots, y_n=y_n(x)$ არის ერთგვაროვანი (1.2) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ ფუნქცია

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i \tag{6.1}$$

იქნება მისი ზოგადი ინტეგრალი. რადგან აქ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია და $f(x) \neq 0$, ამიტომ შეუძლებელია (6.1) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია y აკმაყოფილებდეს (1.1) განტოლებას.

ჩავთვალოთ, რომ (6.1) ტოლობაში კოეფიციენტები $C_1, C_2, \ldots, C_n$ არიან x ცვლადის ფუნქციები და ისინი ისე შევარჩიოთ, რომ (1.1) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ინტეგრალსაც ჰქონდეს (6.1) სახე.

ამისათვის გავაწარმოოთ (6.1) ტოლობა:

$$y'=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i C_i',$$

რომელშიც მეორე ჯამი გავუტოლოთ ნულს

$$\sum_{i=1}^{n} y_i C_i' = 0. \tag{6.2}$$

მაშინ წინა ტოლობიდან გვექნება

$$y'=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i', \tag{6.3}$$

ახლა გავაწარმოოთ (6.3) ტოლობა:

$$y''=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i'' + \sum_{i=1}^{n} y_i' C_i',$$

რომელშიც მეორე ჯამი გავუტოლოთ ნულს, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{n} y_i' C_i' = 0. \tag{6.2$_1$}$$

მაშინ წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$y''=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i''. \tag{6.3$_1$}$$

გავიმეოროთ ასეთი გამოთვლები $n-1$-ჯერ, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(n-2)} C_i' = 0, \tag{6.2$_{n-1}$}$$

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}. \qquad (6.3_{n-1})$$

ამ გამოთვლების დასამთავრებლად, გავაწარმოვოთ ტოლობა (6.3_{n-1}), დავწერთ

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} C_1 y_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n} y_i^{(n-1)} C_i'. \qquad (6.3_n)$$

ჩავსვათ (1.1) განტოლებაში $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ფუნქციების მნიშვნელობანი შესაბამისად (6.1), (6.3), $(6.3_1), \ldots, (6.3_n)$ ტოლობებიდან, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{(n)}+a_1 y_i^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1} y_i'+a_n y_i\right) C_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} y_i^{(n-1)} C_i'=f(x).$$

რადგან, პირობის ძალით, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არის (1.2) განტოლების ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, ამიტომ

$$y_i^{(n)}+a_1 y_i^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1} y_i'+a_n y_i \equiv 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

ამის გამო, წინა ტოლობიდან, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(n-1)} C_i'=f(x). \qquad (6.2_n)$$

ტოლობები (6.2), $(6.2_1) \ldots, (6.2_{n-1}), (6.2_n)$ ქმნიან ალგებრულ განტოლებათა წრფივ არაერთგვაროვან სისტემას უცნობი $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ ფუნქციების მიმართ. ამასთან ამ სისტემის დეტერმინანტი წარმოადგენს ვრონსკის დეტერმინანტს და, ამიტომ $D(x) \neq 0$.

ვთქვათ $C_i'=\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ წარმოადგენს ხსენებული სისტემის ამონახსნს, მაშინ

$$C_i=\int \varphi_i(x)\, dx+A_i, \qquad (6.4)$$

სადაც A_i ნებისმიერი მუდმივაა. ჩავსვათ (6.1) ტოლობაში C_i ფუნქციების მოძებნილი მნიშვნელობები (6.4), გვექნება

$$y=\sum_{i=1}^{n} A_i\, y_i+\sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x) dx. \qquad (6.5)$$

აქ პირველი შესაკრები არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, ხოლო მეორე შესაკრები არის არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი. მაშასადამე, (6.5) არის არაერთგვაროვანი (1.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. *n* რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით. განვიხილოთ (1.1) განტოლების კერძო შემთხვევა, როცა კოეფიციენტები a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ ნამდვილი მუდმივი რიცხვებია. ჯერ შევისწავლოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლება (1.2). დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში (1.2) განტოლების ინტეგრება ყოველთვის შეიძლება შევასრულოთ ელემენტარული ფუნქციების კლასში.

მართლაც, თუ დაუკვირდებით (1.2) განტოლების მარცხენა ნაწილს, დავრწმუნდებით, რომ იგი მაშინ შეიძლება იყოს იგივურად ნულის ტოლი, როცა კერძო ინტეგრალებს აქვს სახე

$$y=e^{sx}, \tag{7.1}$$

სადაც s სკალარული პარამეტრია. აქედან მივიღებთ

$$y'=se^{sx},\ y''=s^2e^{sx}, \ldots, y^{(n)}=s^n e^{sx}. \tag{7.2}$$

შევიტანოთ საძიებელი y ფუნქციისა და $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ წარმოებულების მნიშვნელობები (1.2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$L[e^{sx}]=e^{sx}\,(s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n)=0,$$

საიდანაც, რაკი $e^{sx}\neq 0$, გვექნება

$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0. \tag{7.3}$$

ამ ალგებრულ განტოლებას ეწოდება (1.2) დიფერენციალური განტოლების მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. როგორც ვხედავთ, (7.1) სახის ფუნქციები მაშინ იქნება (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალები, როცა პარამეტრი s არის (7.3) განტოლების ფესვი. მახასიათებელ განტოლებას აქვს n ფესვი:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n. \tag{7.4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფესვები ნამდვილი და მარტივი ფესვებია. მაშინ (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალები იქნება

$$y_1=e^{s_1x},\ y_2=e^{s_2x}, \ldots, y_n=e^{s_nx}. \tag{7.5}$$

დავამტკიცოთ, რომ მაჩვენებლიანი (ექსპონენციალური) ფუნქციები (7.5) წარმოადგენს (1.2) დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტურ სისტემას. ამისათვის შევადგინოთ ვრონსკის დეტერმინანტი

$$D[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \begin{vmatrix} e^{s_1 x} & e^{s_2 x} & \dots & e^{s_n x} \\ s_1 e^{s_1 x} & s_2 e^{s_2 x} & \dots & s_n e^{s_n x} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_1^n e^{s_1 x} & s_2^n e^{s_2 x} & \dots & s_n^n e^{s_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(s_1+s_2+\dots+s_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

უკანასკნელი თანამამრავლი ვანდერმონდის დეტერმინანტია და, ვინაიდან (7.3) მახასიათებელი განტოლების ფესვები მარტივია, ამიტომ გვექნება

$$D[y_1, y_2, \cdots, y_n] =$$
$$= e^{(s_1+s_2+\dots+s_n)x}(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)\dots(s_1 - s_n)\dots(s_{n-1} - s_n) \neq 0$$

და გამოთქმული წინადადება დამტკიცებულია.

ამრიგად, როცა მახასიათებელი განტოლების ფესვები მარტივი და ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ, თანახმად § 3-ში დამტკიცებული თეორემისა, (1.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება ფუნქცია

$$y = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + \dots + C_n e^{s_n x},$$

სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. მახასიათებელი განტოლება იქნება: $s^3 - s^2 - 4s + 4 = 0$. მას აქვს ნამდვილი მარტივი ფესვები $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = -2$. კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა იქნება: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{-2x}$. მაშასადამე, ფუნქცია $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ არის საძიებელი ზოგადი ინტეგრალი, სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

4 **§ 8. კომპლექსური მარტივი ფესვების შემთხვევა.** განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (7.3) განტოლებას აქვს კომპლექსური მარტივი ფესვები. ვინაიდან (1.2) დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, ამიტომ (7.3) განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ წყვილწყვილად შეუღლებული კომპლექსური ფესვები. ვთქვათ კომპლექსური ფესვების ერთ-ერთი ასეთი წყვილია $z = \alpha + \beta i$, $\bar{z} = \alpha - \beta i$. მაშინ, თანახმად (7.1) ტოლობისა, z ფესვის შესაბამისი კერძო ინტეგრალი იქნება ნამდვილი x ცვლადის კომპლექსური ფუნქცია

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \tag{8.1}$$

რომელიც, თანახმად ეილერის ცნობილი ფორმულებისა, შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x). \qquad (8.2)$$

ადვილი სანახავია, რომ (8.2) ტოლობით წარმოდგენილი კომპლექსური კერძო ინტეგრალი წარმოქმნის ორ, წრფივად დამოუკიდებელ, ნამდვილ კერძო ინტეგრალს: $y_{11}=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{12}=e^{\alpha x}\sin\beta x$. მართლაც, თანახმად დიფერენცირების ოპერატორის თვისებებისა (იხ. § 2), გვაქვს

$$L[y_1]=L[e^{(\alpha+\beta i)x}]=L[e^{\alpha x}\cos\beta x]+iL[e^{\alpha x}\sin\beta x]\equiv 0,$$

საიდანაც $L[y_{11}]=0$, $L[y_{12}]=0$, გარდა ამისა, ცხადია y_{11} და y_{12} წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ z ფესვის შეუღლებული $\bar{z}$ ფესვის შესაბამისი კომპლექსური ინტეგრალი

$$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

წარმოადგენს იმავე y_{11} და y_{12} ნამდვილი კერძო ინტეგრალების წრფივ კომბინაციას.

ამრიგად, მახასიათებელი განტოლების ფესვების ყოველ კომპლექსურ შეუღლებულ წყვილს შეესაბამება (1.2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ორი ნამდვილი კერძო ინტეგრალი y_{11} და y_{12}.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ მატერიალური წერტილის თავისუფალი ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0. \qquad (8.3)$$

მისი მახასიათებელი განტოლება არის $s^2+k^2=0$, რომელსაც აქვს მარტივი კომპლექსური შეუღლებული ფესვები $s_1=ki$ და $s_2=-ki$. კერძო კომპლექსური ინტეგრალები (8.3) განტოლებისა იქნება $x_1=e^{ikt}$ და $x_2=e^{-ikt}$, ხოლო მათი შესაბამისი წრფივად დამოუკიდებელი ნამდვილი ინტეგრალები არის $\cos kt$ და $\sin kt$. მაშასადამე, (8.3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 9. ჯერადი ფესვების შემთხვევა. როცა მახასიათებელ განტოლებას (7.3) აქვს ჯერადი ფესვები, მაშინ ერთმანეთისაგან განსხვავებული მისი ფესვების რიცხვი ნაკლებია n-ზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ინტეგრალების რიცხვი, რომლებსაც აქვს (7.1) სახე, აგრეთვე ნაკლები იქნება n-ზე. მაშასადამე, (7.1) სახის კერძო ინტეგრალების რიცხვი საკმარისი არ იქნება ზოგადი ინტეგრალის შესადგენად. ამ შემთხვევაში წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალები, რომლებიც ფუნდამენტურ სისტემას აკლია, საჭიროა (7.1) ფუნქციისაგან განსხვავებული სახით ვეძებოთ. დავამტკიცოთ შემდეგი

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$

თეორემა თუ s_i არის (7.3) მახასიათებელი განტოლების λ_i ჯერადი ნამდვილი ფესვი, მაშინ (1.2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალები იქნება ფუნქციები: $e^{s_i x}$, $xe^{s_i x}$, $x^2 e^{s_i x}, \ldots, x^{\lambda_i - 1} e^{s_i x}$.

ჯერ დავუშვათ, რომ $s_i = 0$. ამ შემთხვევაში მახასიათებელ განტოლებას მარცხენა ნაწილში აქვს საერთო მამრავლი s^{λ_i}, ე. ი. $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\lambda_i+1} = 0$. დიფერენციალურ განტოლებას (1.2) ექნება სახე

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-\lambda_i} y^{(\lambda_i)} = 0, \tag{9.1}$$

რომლის მახასიათებელი განტოლება არის

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-\lambda_i} s^{\lambda_i} = 0. \tag{9.2}$$

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციები

$$1,\ x,\ x^2, \ldots, x^{\lambda_i - 1} \tag{9.3}$$

წარმოადგენს (9.1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ინტეგრალებს. ამრიგად, λ_i ჯერად ფესვს $s_i = 0$ შეესაბამება წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალები (9.3), რომელთა რიცხვი უდრის λ_i.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა როცა მახასიათებელი განტოლების ჯერადი ფესვი $s_i \neq 0$.

დავამტკიცოთ, რომ ეს შემთხვევა დაიყვანება წინა შემთხვევაზე. მართლაც, შემოვიღოთ ახალი საძიებელი ფუნქცია $z = z(x)$ შემდეგი ჩასმით:

$$y = e^{s_i x} z. \tag{9.4}$$

მოვძებნოთ (9.4) ტოლობით განსაზღვრული y ფუნქციის წარმოებულები $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, შევიტანოთ მათი და y ფუნქციის მნიშვნელობანი (1.2) განტოლებაში, მივიღებთ ისევ n რიგის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას მუდმივი ნამდვილი კოეფიციენტებით უცნობი z ფუნქციით:

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} z' + b_n z = 0. \tag{9.5}$$

უკანასკნელი განტოლების მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_{n-1} p + b_n = 0. \tag{9.6}$$

შევნიშნოთ, რომ რაკი $y = e^{sx}$ სახის კერძო ინტეგრალსა და (9.5) განტოლების $z = e^{px}$ სახის კერძო ინტეგრალს შორის უნდა იყოს დამოკიდებულება $e^{sx} = e^{px} \cdot e^{s_i x} = e^{(p+s_i)x}$, ამიტომ (7.3) მახასიათებელი განტოლების ყოველი ფესვი s განსხვავდება (9.6) განტოლების შესაბამისი p ფესვისაგან s_i შესაკრებით. ამასთან s_i და $p_i = 0$ ფესვების ჯერადობა თანატოლია, ე. ი. p_i ფესვის ჯერადობაც უდრის λ_i.

(9.5) განტოლების მახასიათებელი განტოლების λ_i ჯერად ფესვს $p_i=0$ შეესაბამება წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალები $z=1$, $z=x, \ldots, z=x^{\lambda_i-1}$. მაშასადამე, (1.2) დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი კერძო ინტეგრალები, თანახმად (9.4) ჩასმისა, იქნება

$$y=e^{s_ix}, \ y=xe^{s_ix}, \ldots, \ y=x^{\lambda_i-1}e^{s_ix}. \tag{9.7}$$

ადვილად მტკიცდება, რომ კერძო ინტეგრალები (9,7) ნებისმიერ სასრულ სეგმენტზე, წრფივად დამოუკიდებელია.

მაშასადამე, იმ შემთხვევაში, როცა მახასიათებელ განტოლებას (7.3) ჯერადი ფესვები აქვს, (1.2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება

$$y=\sum_{i=1}^{m}(C_{0i}+C_{1i}x+C_{2i}x^2+\cdots+C_{\lambda_i-1,\,i}\,x^{\lambda_i-1})\,e^{s_ix},$$

სადაც m არის (7.3) მახასიათებელი განტოლების ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვების რიცხვი, ხოლო C_{ri} $(r=0, 1, 2, \ldots, \lambda_i-1)$ ნებისმიერი მუდმივებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა: $y^{(4)}-3y'''+3y''-y'=0$.

მახასიათებელი განტოლება იქნება: $s^4-3s^3+3s^2-s=0$, რომელსაც აქვს ერთი ნამდვილი ფესვი $s_1=0$ და სამჯერადი ნამდვილი ფესვი $s_2=s_3=s_4=1$. წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალებია 1, e^x, xe^x, x^2e^x, ხოლო ზოგადი ინტეგრალი $y=C_1+(C_2+C_3x+C_4x^2)\,e^x$, სადაც C_1, C_2, C_3, C_4 ნებისმიერი მუდმივებია.

როცა მახასიათებელ განტოლებას (7.3) აქვს ν ჯერადი ფესვი $\alpha+\beta i$, მაშინ შესაბამისი კერძო ინტეგრალები

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, \ xe^{(\alpha+\beta i)x}, \ x^2e^{(\alpha+\beta i)x}, \ldots, \ x^{\nu-1}e^{(\alpha+\beta i)x}$$

უნდა გარდავქმნათ ეილერის ფორმულით და განვაცალკევოთ ამ კომპლექსური ფუნქციების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. ამის შემდეგ წარმოიქმნება 2ν რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ნამდვილი კერძო ინტეგრალები:

$$\left.\begin{aligned}&e^{\alpha x}\cos\beta x, \ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, \ x^{\nu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\&e^{\alpha x}\sin\beta x, \ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, \ x^{\nu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

მახასიათებელი განტოლების ν ჯერადი ფესვი $\alpha-\beta i$, შეუღლებული $\alpha+\beta i$ ფესვისა, წარმოქმნის იმავე კერძო ინტეგრალებს. ამრიგად, ν ჯერადი კომპლექსური ფესვები $\alpha\pm\beta i$ გვაძლევს წრფივად დამოუკიდებელ ნამდვილ ინტეგრალებს (9.8) სახისა, რომელთა რიცხვია 2ν. ამის შემდეგ ზოგადი ინტეგრალი (1.2) განტოლებისა დაიწერება ჩვეულებრივი წესით.

მაგალითი. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა

$$y^{(6)}+3y^{(4)}+3y''+y=0.$$

მახასიათებელ განტოლებას ექნება სახე: $(s^2+1)^3=0$, რომელსაც აქვს სამჯერადი კომპლექსური ფესვები $\pm i$. ამიტომ, ზოგადი ინტეგრალი იქნება: $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\cos x+(C_4+C_5x+C_6x^2)\sin x$, სადაც $C_1,\ldots,C_6$ ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 10. ეილერის დიფერენციალური განტოლება. ზოგიერთი ცვლადი კოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება შეიძლება მივიყვანოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. ასეთ განტოლებებს განეკუთვნება ეილერის დიფერენციალური განტოლება:

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0. \tag{10.1}$$

სადაც a_i $(i=0, 1,\ldots, n)$ მუდმივი რიცხვებია. მისი ინტეგრებისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ ჩასმა

$$x=e^t, \tag{10.2}$$

სადაც t ახალი დამოუკიდებელი ცვლადია. იგულისხმება, რომ $x>0$. როცა $x<0$, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა $x=-e^t$. გამოვსახოთ საძიებელი y ფუნქციის წარმოებულები $y', y'',\ldots, y^{(n)}$ ახალი t ცვლადის საშუალებით, გვექნება

$$\left.\begin{aligned}
y'&=e^{-t}\frac{dy}{dt},\\
y''&=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)}&=e^{-nt}\left(\gamma_1\frac{dy}{dt}+\gamma_2\frac{d^2y}{dt^2}+\cdots+\gamma_n\frac{d^ny}{dt^n}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

სადაც $\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n$ მუდმივი რიცხვებია. შევიტანოთ წარმოებულების მნიშვნელობები (10.3) მოცემულ განტოლებაში (10.1), თანაც გავითვალისწინოთ, რომ $x^k=e^{kt}$, მივიღებთ n რიგის წრფივ ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0,$$

რომლის ინტეგრების ხერხი ზევით იყო შესწავლილი.

მაგალითი. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა

$$x^4y^{(4)}+2x^3y'''-2x^2y''+4xy'-4y=0. \tag{10.4}$$

ავიღოთ ჩასმა (10.2). გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4}-6\frac{d^3y}{dt^3}+11\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}\right).$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{d^4y}{dt^4}-4\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-4y=0. \tag{10.5}$$

მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$s^4-4s^3+3s^2+4s-4=0,$$

რომლის ფესვებია $s_1=s_2=2$, $s_3=1$ და $s_4=-1$. მაშასადამე, (10.5) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$y=(C_1+C_2t)\,e^{2t}+C_3e^t+C_4e^{-t},$$

ხოლო მოცემული (10.4) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება

$$y=(C_1+C_2\ln x)x^2+C_3x+C_4x^{-1},$$

სადაც C_1, C_2, C_3, C_4 ნებისმიერი მუდმივებია.

ხშირად ეილერის დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ აგრეთვე შემდეგ განტოლებას:

$$a_0(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=0,$$

რომლის ინტეგრება ადვილად მიიყვანება (10.1) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. ამისათვის საკმარისია შემოვიღოთ ახალი ცვლადი ტოლობით $ax+b=e^t$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$(3x+2)^2y''+7(3x+2)y'=0.$$

ავიღოთ ჩასმა $3x+2=e^t$. მაშინ $y'=3e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $y''=9e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\right.$

$-\frac{dy}{dt}\Big)$. მოცემული განტოლება მიიყვანება შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებაზე მუდმივი კოეფიციენტებით

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{4}{3}\ \frac{dy}{dt}=0.$$

მისი მახასიათებელი განტოლება იქნება: $s^2+\frac{4}{3}s=0$, საიდანაც $s_1=0$, $s_2=-\frac{4}{3}$. მაშასადამე, უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალია $y=C_1+C_2e^{-\frac{4}{3}t}$, ხოლო მოცემული დიფერენციალური განტოლებისა — ფუნქცია $y=C_1+C_2(3x+2)^{-\frac{4}{3}}$, სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 11. n რიგის არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით. n რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი (1.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის (ლაგრანჟის) მეთოდით. ჩვენ ვნახეთ (იხ. § 6), რომ თუ $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\cdots$, $y_n=y_n(x)$ არის არაერთგვაროვანი (1.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ ხსენებული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს არაერთგვაროვანი (1.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი დავწეროთ კვადრატურების საშუალებით (იხ. § 6, ტოლობა (6.5)).

ზოგჯერ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაში (1.1) თავისუფალი წევრი $f(x)$ ისეთი სახისაა, რომ შესაძლებელია მისი კერძო ინტეგრალი $Y(x)$ ვიპოვოთ კვადრატურების გარეშე. ამ შემთხვევაში (1.1) ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად, თანახმად § 5-ში დამტკიცებული თეორემისა, საკმარისია შევკრიბოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი (1.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და არაერთგვართვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი.

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალის მოსაძებნად ზოგჯერ ხელსაყრელია ვიცოდეთ შემდეგი

თეორემა. თუ (1.1) არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა ნაწილია $f(x)=f_1(x)+$ $+f_2(x)$, ე. ი. თუ (1.1) განტოლებას აქვს სახე

$$L[y]=f_1(x)+f_2(x), \tag{11.1}$$

ამასთან ფუნქცია $Y_1=Y_1(x)$ არის $L[y]=f_1(x)$ განტოლების კერძო ინტეგრალი, ხოლო $Y_2=Y_2(x)$ არის $L[y]=f_2(x)$ გან-

ტოლების კერძო ინტეგრალი, მაშინ ფუნქცია $Y=Y_1(x)+$ $+Y_2(x)$ წარმოადგენს (11.1) განტოლების კერძო ინტეგრალს.

დამტკიცება იქიდან გამომდინარეობს, რომ ვინაიდან

$$L[Y]=L[Y_1(x)+Y_2(x)]=L[Y_1(x)]+L[Y_2(x)]$$

და, ვინაიდან პირობის ძალით

$$L[Y_1(x)]=f_1(x),\quad L[Y_2(x)]=f_2(x),$$

ამიტომ

$$L[Y]=f_1(x)+f_2(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 12. შემთხვევა როცა თავისუფალი წევრი მრავალწევრია. განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=P_m(x), \qquad (12.1)$$

სადაც $P_m(x)$ არის m ხარისხის მრავალწევრი ნამდვილი ან კომპლექსური კოეფიციენტებით:

$$P_m(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_{m-1}x+A_m.$$

აქ საჭიროა განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა:

ა) ვთქვათ დიფერენციალურ განტოლებაში (1.1) კოეფიციენტი $a_n\neq 0$. ვუჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში (12.1) განტოლების კერძო ინტეგრალი არის m ხარისხის მრავალწევრი:

$$Q_m(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\dots+B_{m-1}x+B_m. \qquad (12.2)$$

გავაწარმოოთ იგი მიმდევრობით n-ჯერ და (12.2) მრავალწევრისა და $Q'_m(x)$, $Q''_m(x),\dots,Q^{(n)}_m(x)$ წარმოებულების მნიშვნელობანი შევიტანოთ, შესაბამისად, y ფუნქციის და $y', y'',\dots,y^{(n)}$ წარმოებულების ნაცვლად (12.1) განტოლების მარცხენა ნაწილში, მივიღებთ

$$L[Q_m(x)]=P_m(x).$$

გაუტოლოთ ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში x ცვლადის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები. ასე წარმოიქმნება განტოლებათა შემდეგი წრფივი სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l}
a_nB_0=A_0\\
ma_{n-1}B_0+a_nB_1=A_1,\\
m(m-1)a_{n-2}B_0+(m-1)a_{n-1}B_1+a_nB_2=A_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
m!B_0+m(m-1)\dots2a_1B_1+\dots+a_nB_n=A_m,
\end{array}\right\} \qquad (12.3)$$

m

რომელშიც უცნობებია (11.2) მრავალწევრის კოეფიციენტები $B_0, B_1, \cdots, B_m$. ადვილი შესამჩნევია, რომ (12.3) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ასე განისაზღვრება მრავალწევრი $Q_m(x)$ და, მაშასადამე, კერძო ინტეგრალი (12.1) დიფერენციალური განტოლებისა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა

$$y'' + 4y' + 3y = x. \tag{12.4}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება იქნება $y'' + 4y' + 3y = 0$, რომლის მახასიათებელი განტოლებაა $s^2 + 4s + 3 = 0$. აქედან $s_1 = -1$, $s_2 = -3$. მაშასადამე ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

ვეძებოთ ახლა (12.4) განტოლების კერძო ინტეგრალი $Q_1(x) = B_0 x + B_1$ სახით. მაშინ $Q_1'(x) = B_0$, $Q_1''(x) = 0$. შევიტანოთ $Q_1(x)$, $Q_1'(x)$, $Q_1''(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობანი (12.4) განტოლების მარცხენა ნაწილში შესაბამისად y, y', y'' ფუნქციების ნაცვლად. მივიღებთ

$$3B_0 x + (4B_0 + 3B_1) = x,$$

საიდანაც, კოეფიციენტების გატოლების შემდეგ, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} 3B_0 &= 1, \\ 4B_0 + 3B_1 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

აქედან $B_0 = \frac{1}{3}$, $B_1 = -\frac{4}{9}$, ამრიგად, (12.4) განტოლების კერძო ინტეგრალია $Q_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$, ხოლო ზოგადი ინტეგრალი —

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

ბ) ახლა განვიხილოთ შემთხვევა როცა (12.1) განტოლებაში კოეფიციენტები $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-p} = 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ (12.1) განტოლებაში უმცირესი რიგის წარმოებული საძიებელი ფუნქციისა არის $y^{(p)}$, ე. ი. დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-p} y^{(p)} = P_m(x). \tag{12.1}$$

მისი მახასიათებელი განტოლების

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-p} s^p = 0$$

ერთ-ერთი ფესვი არის $s = 0$, რომლის ჯერადობა უდრის p. თუ გამოვიყენებთ ჩასმას $z = y^{(p)}$, მივიღებთ ახალ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას

$$z^{(n-p)}+a_1z^{(n-p-1)}+\ldots+a_{n-p}z=P_m(x), \qquad (12.5)$$

რომელშიც კოეფიციენტი $a_{n-p}\neq 0$. ზემოგანხილული შემთხვევის მიხედვით, (12.5) განტოლების კერძო ინტეგრალი m ხარისხის მრავალწევრია, რომელიც აღვნიშნოთ $R_m(x)$-ით, მაშინ გვექნება

$$y^{(p)}=R_m(x).$$

უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად საკმარისია იგი მიმდევრობით ვაინტეგროთ p-ჯერ, გვექნება

$$y(x)=B_0x^{m+p}+B_1x^{m+p-1}+\ldots+B_mx^p+C_1x^{p-1}+$$
$$+C_2x^{p-2}+\ldots+C_{p-1}x+C_p,$$

სადაც $C_1, C_2,\ldots, C_p$ ნებისმიერი მუდმივებია. იმისათვის, რომ მივიღოთ (12.1) განტოლების კერძო ინტეგრალი $Y(x)$, საკმარისია დავუშვათ $C_1=C_2=\ldots=C_p=0$, მაშინ

$$Y(x)=x^p(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m). \qquad (12.6)$$

მაშასადამე, როცა (12.1) განტოლებაში კოეფიციენტები $a_n=a_{n-1}=\ldots=a_{n-p}=0$, მაშინ მისი კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ (12.6) სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y'''-3y''=2x^2-1 \qquad (12.7)$$

ზოგადი ინტეგრალი.

მახასიათებელ განტოლებას $s^3-3s^2=0$ აქვს ფესვები $s_1=s_2=0$, $s_3=3$. ამიტომ, (12.7) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება $\overline{y}(x)=C_1+C_2x+C_3e^{3x}$, სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია. (12.7) განტოლების კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$Q_2(x)=x^2(B_0x^2+B_1x+B_2),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$Q_2'(x)=4B_0x^3+3B_1x^2+2B_2x,$$

$$Q_2''(y)=12B_0x^2+6B_1x+2B_2,$$

$$Q_2'''(x)=24B_0x+6B_1.$$

ჩავსვათ $Q_2(x)$, $Q_2'(x)$, $Q_2''(x)$, $Q_2'''(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობანი (12.7) განტოლებაში, გვექნება

$$-36B_0x^2+(24B_0-18B_1)x+6(B_1-B_2)=2x^2-1.$$

აქედან, ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში x-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტების გატოლების შემდეგ, B_0, B_1, B_2 კოეფიციენ-

ტების განსაზღვრისათვის, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ წრფივ სისტემას:

$$18B_0=-1,\ 4B_0-3B_1=0,\ B_2-B_1=\frac{1}{6},$$

საიდანაც გვექნება $B_0=-\frac{1}{18}$, $B_1=-\frac{2}{27}$, $B_2=\frac{5}{54}$. მაშასადამე, (2.7) განტოლების კერძო ინტეგრალია $Q_2(x)=x^2\left(\frac{5}{54}x^2-\frac{2}{27}x^3-\frac{1}{18}x^4\right)$, ხოლო ზოგადი ინტეგრალი (12.7) დიფერენციალური განტოლებისა იქნება

$$y(x)=\overline{y}(x)+Q_2(x)=C_1+C_2x+C_3e^{3x}+$$
$$+x^2\left(\frac{5}{54}x^2-\frac{2}{27}x^3-\frac{1}{18}x^4\right).$$

§ 13. შემთხვევა, როცა თავისუფალი წევრის სახეა $P_m(x)e^{\alpha x}$. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ α ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვია, $P_m(x)$ — მოცემული m ხარისხის მრავალწევრი ნამდვილი ან კომპლექსური კოეფიციენტებით. დიფერენციალურ განტოლებას

$$L[y]=P_m(x)\,e^{\alpha x}, \tag{13.1}$$

როცა α არ არის $L[y]=0$ განტოლების მახასიათებელი განტოლების ფესვი, აქვს $Y(x)=Q_m(x)\,e^{\alpha x}$ სახის კერძო ინტეგრალი, სადაც $Q_m(x)$ არის m ხარისხის მრავალწევრი. თუკი α მახასიათებელი განტოლების p-ჯერადი ფესვია, სადაც $p\geqslant 1$, მაშინ (13.1) განტოლების კერძო ინტეგრალს აქვს სახე: $Y(x)=x^pQ_m(x)\,e^{\alpha x}$.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ α არ არის (13.1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი განტოლების ფესვი. საძიებელი $y=y(x)$ ფუნქციის ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქცია შემდეგი ტოლობით: $y=ze^{\alpha x}$ და შევიტანოთ იგი (13.1) განტოლებაში, გვექნება

$$z^{(n)}+\ldots+\frac{\varphi^{(r)}(\alpha)}{r!}z^{(r)}+\ldots+\frac{\varphi'(\alpha)}{1!}z'+\varphi(\alpha)z=P_m(x); \tag{13.2}$$

სადაც

$$\varphi(\alpha)=\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n.$$

რაკი პირობის ძალით α არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ $\varphi(\alpha)\neq 0$. განტოლება (13.2) წარმოადგენს § 12-ში შესწავლილ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის კერძო ინტეგ-

რალი, როგორც ვიცით, არის m ხარისხის მრავალწევრი $Q_m(x)$. ამრიგად, თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ α არის მახასიათებელი განტოლების p-ჯერადი ფესვი. ამ შემთხვევაში $\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\ldots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$, $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით (იხ. § 12), (13,2) განტოლების კერძო ინტეგრალია $x^pQ_m(x)$ სახის ფუნქცია და, მაშასადამე, (13.1) განტოლების კერძო ინტეგრალი იქნება $Y(x)=x^pQ_m(x)\,e^{\alpha x}$ სახის ფუნქცია. ამით თეორემის მეორე ნაწილიც დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y'''-3y'+2y=(9x+1)\,e^x+9e^{-2x} \tag{13.3}$$

ზოგადი ინტეგრალი.

მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე

$$s^3-3s+2=0,$$

საიდანაც $s_1=s_2=1$, $s_3=-2$.

მაშასადამე, (13.3) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$\bar{y}(x)=(C_1+C_2x)\,e^x+C_3\,e^{-2x},$$

სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ (13.3) განტოლების კერძო ინტეგრალი, ჯერ ვიპოვოთ კერძო ინტეგრალი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისა

$$y'''-3y'+2y=(9x+1)\,e^x. \tag{13.4}$$

რადგან მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორჯერადი ფესვი $s_1=s_2=1$, ამიტომ (13.4) განტოლების კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ $Y_1(x)=$ $=x^2(B_0x+B_1)\,e^x$ ფუნქციის სახით. შევიტანოთ (13.4) განტოლების მარცხენა ნაწილში $Y_1(x)$, $Y_1'(x)$, $Y_1'''(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობანი და მიღებული ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში x ცვლადის ტოლი ხარისხების კოეფიციენტები ერთმანეთს გავუტოლოთ, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა წრფივ სისტემას

$$\left.\begin{aligned} 18B_0&=9,\\ 6(B_0+B_1)&=1, \end{aligned}\right\}$$

საიდანაც $B_0=\dfrac{1}{2}$, $B_1=-\dfrac{1}{3}$. ამრიგად, $Y_1(x)=x^2\left(\dfrac{1}{2}\,x-\dfrac{1}{3}\right)e^x$.

ახლა მოვძებნოთ

$$y'''-3y'+2y=9e^{-2x} \tag{13.5}$$

არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალი. ვინაიდან $s_3=-2$ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, ამიტომ (13.5) განტოლების კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ $Y_2(x)=Axe^{-2x}$ ფუნქციის სახით. მარტივი გამოთვლების შემდეგ, მივიღებთ $A=1$. მაშასადამე, (13.5) განტოლების კერძო ინტეგრალი არის $Y_2(x)=xe^{-2x}$. გამოვიყენოთ § 11 ში დამტკიცებული თეორემა, რომლის მიხედვით (13.3) განტოლების კერძო ინტეგრალი იქნება ფუნქცია

$$Y(x)=Y_1(x)+Y_2(x)=x^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)e^x+xe^{-2x}.$$

ამის შემდეგ (13.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება:

$$y=\overline{y}(x)+Y(x)=\left(C_1+C_2x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)+(C_3+x)e^{-2x}.$$

§ 14. შემთხვევა, როცა თავისუფალი წევრი არის $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$ სახისა. განვიხილოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=$$
$$=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x], \tag{14.1}$$

სადაც α და β ნამდვილი რიცხვებია, $P_m(x)$ და $Q_m(x)$ მოცემული მრავალწევრებია, რომელთა ხარისხები არ აღემატება m-ს. მართებულია შემდეგი

თეორემა. თუ $\alpha\pm\beta i$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვები, მაშინ (14.1) განტოლების კერძო ინტეგრალს აქვს სახე

$$Y(x)=e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(1)}(x)\sin\beta x],$$

სადაც $P_m^{(1)}(x)$ და $Q_m^{(1)}(x)$ მრავალწევრებია, რომელთა ხარისხი არ აღემატება m-ს. თუ $\alpha\pm\beta i$ წარმოადგენს მახასიათებელი განტოლების p-ჯერად ფესვებს, მაშინ (14.1) განტოლების კერძო ინტეგრალს აქვს სახე

$$Y(x)=x^pe^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(1)}(x)\sin\beta x].$$

ადვილი სანახავია, რომ (14.1) განტოლების კერძო ინტეგრალის მოძებნის ამოცანა მიიყვანება § 13-ში განხილულ შემთხვევაზე. მართლაც, თუ ფუნქციებს $\cos\beta x$ და $\sin\beta x$ ეილერის ფორმულებით გარდავქმნით:

$$\cos\beta x=\frac{1}{2}(e^{\beta ix}+e^{-\beta ix}),\qquad \sin\beta x=\frac{1}{2i}(e^{\beta ix}-e^{-\beta ix}),$$

მაშინ განტოლება (14.1) ასე ჩაიწერება:

$$L[y]=\widetilde{P}_m(x)e^{(\alpha+\beta i)x}+\widetilde{Q}_m(x)e^{(\alpha-\beta i)x}, \tag{14.1'}$$

სადაც

$$\widetilde{P}_m = \frac{1}{2}\,[P_m(x) - iQ_m(x)],\quad \widetilde{Q}_m(x) = \frac{1}{2}\,[P_m(x) + iQ_m(x)]$$

წარმოადგენს მრავალწევრებს კომპლექსური კოეფიციენტებით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება m-ს.

ახლა საკმარისია ცალ-ცალკე ვიპოვოთ კერძო ინტეგრალი $Y_1(x)$ დიფერენციალური განტოლებისა

$$L[y] = \widetilde{P}_m(x)\, e^{(\alpha + \beta i)x} \tag{14.2}$$

და კერძო ინტეგრალი $Y_2(x)$ დიფერენციალური განტოლებისა

$$L[y] = \widetilde{Q}_m(x)\, e^{(\alpha - \beta i)x}. \tag{14.3}$$

მაშინ, თანახმად § 11-ში დამტკიცებული თეორემისა, (14.1) განტოლების კერძო ინტეგრალი იქნება ფუნქცია $Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x)$. კერძო ინტეგრალები (14.2) და (14.3) დიფერენციალური განტოლებებისა მოიძებნება § 13-ში შესწავლილი წესით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ დიფერენციალური განტოლების

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x \tag{14.4}$$

ზოგადი ინტეგრალი.

ადვილი სანახავია, რომ შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$\bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}.$$

შევნიშნოთ, რომ (14.4) განტოლების კერძო ინტეგრალი იქნება დიფერენციალური განტოლების

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} (\cos x + i \sin x) = x^2 e^{(i-1)x} \tag{14.5}$$

კერძო ინტეგრალის ნამდვილი ნაწილი. (14.5) განტოლების კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ შემდეგი ფუნქციის სახით:

$$\overline{Y}(x) = e^{(i-1)x}\,(B_0 x^2 + B_1 x + B_2),$$

მაშინ

$$\overline{Y}'(x) = e^{(i-1)x}\,[(i-1)(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + 2B_0 x + B_1],$$

$$\overline{Y}''(x) = e^{(i-1)}\,[(i-1)^2 (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + 2(i-1)(2B_0 + B_1) + 2B_0].$$

ჩავსვათ y, y', y'' სიდიდეთა ნაცვლად შესაბამისად $\overline{Y}(x)$, $\overline{Y}'(x)$, $\overline{Y}''(x)$ ფუნქციები (14.5) განტოლების მარცხენა ნაწილში, მივიღებთ

$$[(i-1)^2 + 2(i-1) + 1]\,(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + [2(i-1) + 2]\,(2B_0 x + B_1) + 2B_0 = x^2$$

ანუ

$$-B_0x^2 - B_1x - B_2 + 2i(2B_0x + B_1) + 2B_0 = x^2.$$

აქედან მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში x ცვლადის ტოლი ხარისხების კოეფიციენტების გატოლების შემდეგ, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} -B_0 &= 1, \\ -B_1 + 4B_0 i &= 0, \\ -B_2 + 2B_1 i + 2B_0 &= 0, \end{aligned}\right\},$$

საიდანაც

$$B_0 = -1, \; B_1 = -4i, \; B_2 = 6.$$

ამრიგად, (14.5) განტოლების კერძო ინტეგრალი არის ფუნქცია

$$\overline{Y}(x) = e^{(i-1)x}(-x^2 - 4ix + 6) =$$

$$= e^{-x}\{(6 - x^2)\cos x + 4x\sin x + i[(6 - x^2)\sin x - 4x\cos x]\},$$

რომლის ნამდვილი ნაწილი

$$Y(x) = e^{-x}[(6 - x^2)\cos x + 4x\sin x]$$

წარმოადგენს (14.4) განტოლების კერძო ინტეგრალს. მაშასადამე, მოცემული (14.4) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება

$$y = \overline{y} + Y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} + [(6 - x^2)\cos x + 4x\sin x]\, e^{-x}$$

ანუ

$$y = e^{-x}[C_1 + C_2x + 4x\sin x + (6 - x^2)\cos x],$$

სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

სავარჯიშო

მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი შემდეგი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $2y'' + 7y' - 15y = 0$, პასუხი: $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{\frac{3}{2}x}$.
2. $y''' - 3y' + 2y = 0$, პასუხი: $y = C_1e^{-2x} + (C_2 + C_3x)e^x$.
3. $y''' - 2y'' + 5y' + 26y = 0$,

   პასუხი: $y = C_1e^{-2x} + (C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)e^{2x}$.
4. $y^{(4)} - a^4y = 0$,

   პასუხი: $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\sin ax$.

5. $y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=0$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)e^x$.

6. $y^{(5)}-6y^{(4)}+16y'''-32y''+48y'-32y=0$,

პასუხი: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+(C_3+C_4x+C_5x^2)e^{2x}$.

7. $y^{(4)}-y'''-3y''+5y'-2y=0$,

პასუხი: $y=C_1e^{-2x}+(C_2+C_3x+C_4x^2)e^x$.

8. $$y^{(n)}+ny^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}y^{(n-2)}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{(n-3)}+\ldots+ny'+y=0,$$

პასუხი: $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_nx^{n-1})e^{-x}$.

9. $y^{(6)}+2y^{(5)}+9y^{(4)}+16y'''+24y''+32y'+16y=0$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+(C_3+C_4x)\sin 2x+(C_5+C_6y)\cos 2x$.

10. ვიპოვოთ კერძო ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა $y''+2y'+5y=0$, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს: როცა $x=0$, მაშინ $y=2$, $y'=4$.

პასუხი: $y=(2\cos 2x+3\sin 2x)e^{-x}$.

11. ვიპოვოთ კერძო ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა $y'''-7y'+6y=0$, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს: როცა $x=0$, მაშინ $y=2$, $y'=8$, $y''=0$.

პასუხი: $y=e^x+2e^{2x}-e^{3x}$.

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი შემდეგი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებისა:

1. $y''-4y'+4y=x^2$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$.

2. $y^{(4)}+2y'''+3y''+2y'+y=1+x+x^2$,

პასუხი: $$y=e^{-\frac{x}{2}}\left[(C_1+C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\right.$$

$$\left.+(C_3+C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]+x^2-3x+1.$$

3. $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4$.

4. $y''+y=e^x$, პასუხი: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$.

5. $y''-2y'+y=\sin ax$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{(1-a^2)\sin ax+2a\cos ax}{(2+a^2)^2}$.

6. $y''+y=2\cos^3 x(\sec^2 x-1)$,

პასუხი: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{16}(4x\sin x+\cos 3x)$.

7. $y''-6y'+9y=x^{3}(9x^2+6x+2)$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{1}{x}$.

8. $y''+y'-6y=a^x$,

პასუხი: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}-\frac{a^x}{(2-\lg a)(3+\lg a)}$.

9. $y''+y=\sec x$,

პასუხი: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln(\cos x)$.

10. $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$,

პასუხი: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$.

11. $y'''+y''+y'+y=x^3+3x^2+6x+6$,

პასუხი: $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+x^3$.

12. $y^{(4)}+5y''+6y=\sin ax$,

პასუხი: $y=C_1\cos\sqrt{2}\,x+C_2\sin\sqrt{2}\,x+$

$+C_3\cos\sqrt{3}\,x+C_4\sin\sqrt{3}\,x+\frac{\sin ax}{a^4-5a^2+6}$.

13. $y^{(4)}+8y''+16y=\cos x$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x+\frac{1}{9}\cos x$.

14. $y^{(4)}-a^4y=1+x^2$,

პასუხი: $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin a^x-\frac{1}{a^4}(1+x^2)$.

15. $y^{(5)}-2y^{(4)}+5y'''-10y''-36y'+72y=e^{ax}$,

პასუხი: $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+(C_3+C_4x)e^{2x}+$

$+C_5e^{-2x}+\frac{e^{ax}}{(a-2)^2(a+2)(a^2+9)}$.

16. $y^{(5)}+y''=x$,

პასუხი: $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+$

$$+e^{\frac{x}{2}}\left(C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_5\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+\frac{x^3}{6}.$$

17. $y^{(6)}+3y^{(4)}+3y''+y=n\sin ax$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\cos x+$

$$+(C_4+C_5x+C_6x^2)\sin x-\frac{a\sin ax}{(a^2-1)^3}.$$

18. $y^{(4)}-4y'''+8y''-16y'+16y=96xe^{2x}$,

პასუხი: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+(C_3+C_4x-3x^2+2x^3)e^{2x}$.

19. $y^{(4)}+2a^2y''+a^4y=\cos ax$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\dfrac{x^2\cos ax}{8a^2}$.

20. $y^{(4)}-2y''+y=8(e^x+e^{-x})+4(\sin x+\cos x)$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x+x^2)e^x+(C_3+C_4x+x^2)e^{-x}+\sin x+\cos x$.

21. $y''+2y'+y=x^2e^{-x}\cos x$,

პასუხი: $y=[C_1+C_2x+4x\sin x+(6-x^2)\cos x]e^{-x}$.

22. $y^{(4)}-a^4y=5a^4e^{ax}\sin ax$,

პასუხი: $y=(C_1-\sin ax)e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

23. $y''-2y'+y=e^{-x}\sin x+4e^x$,

პასუხი: $y=(C_1+C_2x)e^x+2x^2e^x+\dfrac{3\sin x+4\cos x}{25}e^{-x}$.

24. $y''+y=\sin x\sin 2x$,

პასუხი: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{4}x\sin x+\dfrac{1}{16}\cos 3x$.

25. მოძებნეთ კერძო ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა

$$y'''-y''-y'+y=4e^x(6x-1)+3x,$$

რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: როცა $x=0$, მაშინ $y=1$, $y'=-1$ $y''=0$.

პასუხი: $y=(2x^3-4x^2+5x-5{,}5)e^x+3(x+1)+3{,}5e^{-x}$.

26. მოვძებნოთ კერძო ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებისა

$$y''+4y=\sin x,$$

რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: როცა $x=0$, მაშინ $y=1$, $y'=1$.

მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემომოყვანილი დიფერენციალური განტოლებებისა ცვლადი კოეფიციენტებით.

27. $(x+a)^2y''-4(x+a)y'+6y=0.$

პასუხი: $y=C_1(x+a)^3+C_2(x+a)^2.$

28. $x^3y'''+xy'-y=0,$

პასუხი: $y=[C_1+C_2\ln x+C_3(\ln x)^2]x.$

29. $(2x+3)^3y'''-8(2x+3)y'+32y=0,$

პასუხი: $y=(2x+3)^2[C_1+C_2\ln(2x+3)]+\dfrac{C_3}{2x+3}.$

30. $x^2y''-2xy'+2y+x-2x^3=0,$

პასუხი: $y=\dfrac{x}{2}+C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x).$

31. $x^4y^{(4)}-11x^2y''+49xy'-81y=0,$

პასუხი: $y=x^3(C_1+C_2\ln x+C_3\ln^2 x)+\dfrac{C_4}{x^3}.$

32. $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{2}{x},$

პასუხი: $y=x(C_1+C_2\ln x+\ln^2 x).$

33. $(x+1)^2y''-3(x+1)y'+4y=(1+x)^3,$

პასუხი: $y=(x+1)^2[C_1+x+C_2\ln(x+1)].$

34. $x^2y''-xy'-3y+\dfrac{16\ln x}{x}=0,$

პასუხი: $y=\dfrac{1}{x}(C_1+C_2x^4+\ln x+2\ln^2 x).$

35. $(2x-1)^3y'''+6(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'+8y=\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1},$

პასუხი: $$y=\frac{1}{2x-1}\left\{C_1+\frac{1}{24}\ln(2x-1)+\frac{1}{48}\ln^2(2x-1)\right\}+$$
$$+\sqrt{2x-1}\left\{C_2\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2x-1)\right]+\right.$$
$$\left.+C_3\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2x-1)\right]\right\}.$$

36. $x^3y'''-9x^2y''+37xy'-64y=6x^4(1+4\ln x+10\ln^2 x),$

პასუხი: $y=x^4(C_1+C_2\ln x+C_3\ln^2 x+\ln^4 x+\ln^5 x).$

37. $x^2y''+3xy'+y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$,

პასუხი: $y=\dfrac{1}{x}\left(C_1+C_2\ln x+\ln\dfrac{x}{1-x}\right)$.

38. $x^4y''-a^2y=0$; მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა $x=\dfrac{1}{t}$.

პასუხი: $y=x\left(C_1e^{\frac{a}{x}}+C_2e^{-\frac{a}{x}}\right)$.

39. $x^4y''-2x^3y'+2(x^2+2)y=0$;

მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა $x=\dfrac{1}{t}$.

პასუხი: $y=x^2\left(C_1\sin\dfrac{2}{x}+C_2\cos\dfrac{2}{x}\right)$.

40. $xy''+2y'+a^2xy=0$; მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $xy=t$.

პასუხი: $y=\dfrac{1}{x}(C_1\sin ax+C_2\cos ax)$.

41. $y'''+\dfrac{3}{y}y''-y=0$; მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $xy=t$.

პასუხი: $y=\dfrac{1}{x}\left[C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

42. $y''-\dfrac{2}{x}y'-\left(a^2-\dfrac{2}{x^2}\right)y=0$;

მითითება: გამოიყენეთ ჩასმა: $y=tx$.

პასუხი: $y=x(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax})$.

რიგის დაწევით მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი ქვემომოყვანილი დიფერენციალური განტოლებებისა, რომლებშიც ცნობილია ერთი კერძო ინტეგრალი $y_1=y_1(x)$.

პრაქტიკულად, საკმარისია გამოვიყენოთ ჩასმა $y=y_1\int z(x)\,dx$, სადაც $z=z(x)$ არის ახალი საძიებელი ფუნქცია.

1. $x(2-x)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$, $y_1=x^2$,

პასუხი: $y=C_1e^x+C_2x^2$.

2. $x(1-x)^2y''-2y=0$, $y_1=\dfrac{x}{1-x}$,

პასუხი: $y=C_1\left(x+1+\dfrac{2x\ln x}{1-x}\right)+\dfrac{C_2x}{1-x}$.

3. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0, \quad y_1=\frac{\sin x}{x}$,

პასუხი: $y=\frac{1}{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

4. $(2x+1)y''+2(2x-1)y'-8y=0,\ y_1=e^{kx},\ k=\text{const.}$,

პასუხი: $y=C_1(4x^2+1)+C_2e^{-2x}$.

5. $x(4x-1)y''+2(2x-1)y'-4y=6x(2x-1)$, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი არის $y_1=\frac{1}{x}$.

პასუხი: $y=\frac{C_1}{x}+C_2(2x-1)+x^2$.

6. $(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0,\ y_1=(x+\sqrt{1+x^2})^n$,

პასუხი: $y=C_1(x-\sqrt{1+x^2})^n+C_2(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

7. $xy''-(1+x)y'+y=0,\ y_1=1+x$,

პასუხი: $y=C_1e^x+C_2(1+x)$.

8. $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=\frac{x\cos x-(1+x^2)\sin x}{x^2}$, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი $y_1=x$.

პასუხი: $y=\frac{C_1}{x}+C_2x+\sin x$.

9. $y''-y'+ye^{2x}=xe^{2x}-1$, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი არის $y_1=\sin e^x$.

პასუხი: $y=x+C_1\cos e^x+C_2\sin e^x$.

თავი V

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემები

§ 1. ნორმალური სისტემა. ინტეგრალის არსებობისა და ერთადობის თეორემა.

ვთქვათ ერთსა და იმავე შუალედზე წარმოებადი n ფუნქცია $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\dots, y_n=y_n(x)$ დაკავშირებულია x ცვლადთან და $y_1', y_2',\dots, y_n'$ წარმოებულებთან შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \varphi_1(x, y_1, y_2,\dots, y_n),\\ y_2' &= \varphi_2(x, y_1, y_2,\dots, y_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n' &= \varphi_n(x, y_1, y_2,\dots, y_n), \end{aligned}\right\}, \tag{1.1}$$

სადაც ყოველი $\varphi_i(x, y_1, y_2,\dots, y_n)$, $(i=1, 2,\dots, n)$ არის თავისი $n+1$ არგუმენტის მოცემული ფუნქცია. იგულისხმება, რომ n ნატურალური რიცხვია. განტოლებების ერთობლიობას (1.1) უწოდებენ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ნორმალურ სისტემას. ფუნქციების მიმდევრობას $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ ეწოდება (1.1) სისტემის ინტეგრალი თუ ამ მიმდევრობის ფუნქციები აღებულ შუალედზე იგივურად აკმაყოფილებენ (1.1) სისტემის ყოველ განტოლებას. შევამჩნიოთ, რომ დიფერენციალური განტოლებების ნორმალურ სისტემაში საძიებელი ფუნქციების წარმოებულები გამოსახულია დამოუკიდებელი x ცვლადითა და თვით საძიებელი ფუნქციებით. ამასთან განტოლებათა რიცხვი და საძიებელი ფუნქციების რიცხვი თანატოლია.

ავიღოთ $n+1$ განზომილების არე (D), რომლის წერტილის კოორდინატები იყოს $(x, y_1, y_2,\dots, y_n)$, სადაც $x\in[x_0-a, x_0+a]$, $y_i\in[y_{i0}-b_i, y_{i0}+b]$; a, b_i, x_0 მოცემული რიცხვებია, $y_{i0}=y_i(x_0)$, $(i=1, 2,\dots, n)$. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. თუ (D) არეში (1.1) სისტემის მარჯვენა ნაწილები $\varphi_i=\varphi_i(x, y_1, y_2\dots, y_n)$ წარმოადგენენ თავისი არგუმენტების ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციებს (და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი რიცხვი M, რომ $|\varphi_i|\leqslant M$), ამავე არეში

აკმაყოფილებენ ლიპშიცის პირობას $y_1, y_2, \ldots, y_n$ არგუმენტების მიმართ:

$$|\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - \varphi_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqslant N \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_1|,$$

სადაც $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(x, z_1, z_2, \ldots, z_n) \in (D)$ ნებისმიერი წერტილებია, მაშინ არსებობს (1.1) სისტემის ერთადერთი ისეთი ინტეგრალი $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს $y_i(x_0) = y_{i0}$.

თეორემის დასამტკიცებლად ავაგოთ წრფივი ფუნქციონალური სივრცე C_n, რომლის ელემენტი (წერტილი) ვუწოდოთ $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების ერთობლიობას $(z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$, სადაც $h_0 \leqslant \min\left(a, \dfrac{b_1}{M}, \dfrac{b_2}{M}, \ldots, \dfrac{b_n}{M}\right)$. ვთქვათ $Z^{(1)} = (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)})$ და $Z^{(2)} = (z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)})$ არის C_n სივრცის ნებისმიერი ორი ელემენტი. მანძილი ამ ელემენტებს შორის განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით:

$$\rho(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = \max_x |z_i^{(1)} - z_i^{(2)}|,$$

$$x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0], \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

ცხადია, $\rho(Z^{(1)}, Z^{(2)})$ დააკმაყოფილებს მეტრიკისათვის სავალდებულო ყველა აქსიომას (იხ. თავი II, § 1). C_n სივრცის ელემენტების კრებადობა (1.2) მეტრიკით ნიშნავს თანაბარ კრებადობას. ამის გამო, ზოგჯერ, C_n სივრცეს თანაბარი კრებადობის სივრცეს უწოდებენ. გარდა ამისა, C_n სრული სივრცეა.

(1.1) სისტემის ინტეგრალი $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს, შეგვიძლია ვეძებოთ ეკვივალენტური ინტეგრალური განტოლებების შემდეგი სისტემიდან:

$$y_i = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

განვიხილოთ ოპერატორი $U[Y]$, რომელიც განსაზღვრულია C_n სივრცეზე შემდეგნაირად:

$$U[Y] = \left(y_{10} + \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx, \ldots, y_{n0} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x} \varphi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx\right). \tag{1.4}$$

ვინაიდან

$$|y_i - y_{i0}| = \left| \int_{x_0}^{x} \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx \right| \leqslant M \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| \leqslant M h_0 \leqslant b_i,$$

ამიტომ $U[Y]$ ოპერატორი C_n სივრცის ყოველ ელემენტს გადასახავს ამავე სივრცის ელემენტში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ $h_0 \leqslant \frac{\alpha}{nN}$, სადაც $\alpha < 1$, მაშინ $U[Y]$ კუმშვის ოპერატორია. მართლაც, ვთქვათ $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ და $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ არის C_n სივრცის ნებისმიერი ელემენტები, მაშინ გვექნება

$$\rho(U[Y], U[Z]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in (D)} \left| \int_{x_0}^{x} [\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) - \varphi_i(x, z_1, \ldots, z_n)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in (D)} \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in (D)} |y_i - z_i| \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in (D)} \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| =$$

$$= N n h_0 \rho(Y, Z) \leqslant \alpha \rho(Y, Z), \quad \alpha < 1.$$

თანახმად ბანახისა დი კაჩიოპოლის თეორემისა (იხ, თავი II, § 6) C_n სივრცეში არსებობს ერთადერთი ელემენტი $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა

$$U[Y^*] = Y^*,$$

ე. ი.

$$y_i^* = y_{i0}^* + \int_{x_0}^{x} \varphi_i(x, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)\, dx, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. n რიგის დიფერენციალური განტოლების დაყვანა სისტემაზე. ვთქვათ მოცემულია n რიგის დიფერენციალური განტოლება ერთი უცნობი ფუნქციით, რომელიც ამოხსნილია საძიებელი ფუნქციის უმაღლესი წარმოებულის მიმართ:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2.1}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველი (2.1) ყაიდის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება შეიძლება დავიყვანოთ ნორმალური სახის დიფე-

რენციალური განტოლებების სისტემის ინტეგრებაზე n უცნობი ფუნქციით.

მართლაც, შემოვიღოთ ახალი საძიებელი ფუნქციები: $y_1=y'$, $y_2=y''$, ..., $y_{n-1}=y^{(n-1)}$. მაშინ განტოლება (2.1) ჩაიწერება შემდეგი ეკვივალენტური სახით:

$$\left.\begin{aligned} & y'=y_1 \quad , \\ & y_1'=y_2 \quad , \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & y_{n-2}'=y_{n-1} \quad , \\ & y_{n-1}'=f(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

ცხადია, რომ (2.2) წარმოადგენს წინა პარაგრაფში განხილული (1.1) სისტემის კერძო სახეს, რომელშიც საძიებელი ფუნქციები არის y, y_1, y_2, ..., y_{n-1}. ამით წინადადება დამტკიცებულია.

§ 3. **ნორმალური სისტემის დაყვანა ერთ დიფერენციალურ განტოლებაზე.** დავამტკიცოთ, რომ გარკვეულ პირობებში მართებულია წინა პარაგრაფში დამტკიცებული წინადადების შებრუნებული წინადადებაც. სახელდობრ, (1.1) სისტემის ინტეგრება ტოლფასია ერთი ისეთი n-რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებისა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ უცნობ ფუნქციას.

მართლაც, ავიღოთ (1.1) სისტემის ერთ-ერთი განტოლება, მაგალითად, პირველი განტოლება:

$$y_1'=\varphi_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \qquad (3.1_1)$$

და გავაწარმოვოთ იგი x ცვლადით, მივიღებთ

$$y_1''=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}y_1'+\cdots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}y_n'.$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ჩავსვათ წარმოებულების y_1', y_2', ..., y_n' ნაცვლად მათი მნიშვნელობებისა (1.1) სისტემიდან, მივიღებთ

$$y_1''=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\varphi_1+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\varphi_2+\cdots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}\varphi_n,$$

ე. ი. გვექნება შემდეგი სახის განტოლება

$$y_1''=f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad (3.1_2)$$

სადაც $f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ აღნიშნავს წინა განტოლების მარჯვენა ნაწილს. ახლა (3.1_2) განტოლება გავაწარმოვოთ ისევ x ცვლადით და მიღებული შედეგის მარჯვენა ნაწილში გამოვიყენოთ (1.1) სისტემის განტოლებები, მივიღებთ:

$$y_1'''=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\varphi_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\varphi_2+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\varphi_n,$$

ანუ

$$y_1'''=f_2(x, y_1, y_2,\cdots, y_n). \tag{3.1$_3$}$$

გავაგრძელოთ მსგავსი გამოთვლები, გვექნება

$$y_1^{(n-1)}=f_{n-2}(x, y_1, y_2,\cdots, y_n), \tag{3.1$_{n-1}$}$$

$$y_1^{(n)}=f_{n-1}(x, y_1, y_2,\cdots, y_n). \tag{3.1$_n$}$$

ახლა განტოლებები (3.1_1), $(3.1_2),\ldots,$ (3.1_{n-1}) ამოვხსნათ (როცა ეს შესაძლებელია) $y_2, y_3,\cdots, y_n$ ფუნქციების მიმართ (ცხადია, ისინი გამოისახებიან $x, y_1, y_1', y_1'',\ldots, y_1^{(n-1)}$ სიდიდეებით) და მათი მნიშვნელობანი შევიტანოთ (3.1_n) განტოლებაში, მივიღებთ ერთ დიფერენციალურ განტოლებას უცნობი $y_1=y_1(x)$ ფუნქციით:

$$y_1^{(n)}=F(x, y_1, y_1', y_1'',\ldots, y_1^{(n-1)}). \tag{3.2}$$

ვთქვათ (3.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$y_1=\Phi(x, C_1, C_2,\ldots, C_n). \tag{3.3}$$

თუ y_1 ფუნქციის მიღებულ მნიშვნელობას და მის წარმოებულებს $y_1', y_1'',\ldots, y_1^{(n-1)}$ შევიტანთ (3.1_1), $(3,1_2),\ldots,(3,1_{n-1})$ განტოლებებში, მივიღებთ $n-1$ სასრულ (არადიფერენციალურ) განტოლებას, საიდანაც მოვძებნით დანარჩენ $y_2, y_3,\cdots, y_n$ უცნობ ფუნქციებს.

შესაძლებელია ისეთი შემთხვევაც, როცა უცნობი $y_1, y_2,\cdots, y_n$ ფუნქციების გამორიცხვა ხდება არა ყველა (3.1_1), $(3.1_2),\ldots,(3.1_{n-1})$ განტოლების გამოყენებით, არამედ უფრო შემოკლებული სისტემიდან, რომელიც არ შეიცავს ერთ ან რამდენიმე უკანასკნელ განტოლებას. ვთქვათ, მაგალითად, უცნობი $y_2, y_3,\cdots, y_n$ ფუნქციების გამორიცხვა შესაძლებელია k $(k<n)$ განტოლებიდან:

$$\left.\begin{aligned} y_1'&=\varphi_1(x, y_1, y_2,\cdots, y_n),\\ y_1''&=f_1(x, y_1, y_2,\cdots, y_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_1^{(k)}&=f_{k-1}(x, y_1, y_2,\cdots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{3·4}$$

აქედან, $y_1, y_2,\cdots, y_n$ ფუნქციების გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$y_1^{(k)}=F(x, y_1, y_1',\ldots, y_1^{(k-1)}), \tag{3.5}$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$y_1=\Phi(x, C_1, C_2,\ldots, C_k)$$

სახისა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ დანარჩენი $n-1$ ფუნქცია, ავიღოთ დიფერენციალური განტოლებების სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_1^{(k-1)} &= f_{k-2}(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

საიდანაც გამოვსახოთ $k-1$ უცნობი ფუნქცია $x, C_1, C_2, \dots, C_k$ და დანარჩენი $n-k$ უცნობი ფუნქციის საშუალებით. ასე გამოსახული უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობა შევიტანოთ (1.1) სისტემის იმ $n-k$ განტოლებაში, რომელთა მარცხენა ნაწილები შეიცავს სწორედ დარჩენილი $n-k$ უცნობი ფუნქციების წარმოებულებს. მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალურ სისტემას. ეს სისტემა, თავის მხრივ, დაიყვანება ან ერთ $n-k$ რიგის დიფერენციალურ განტოლებაზე ერთი უცნობი ფუნქციით, ანდა დაიყვანება r რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე და ახალ $n-k-r$ რიგის ნორმალურ სისტემაზე და ასე შემდეგ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოვძებნოთ შემდეგი სისტემის ინტეგრალი:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 8y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 3y_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

პირველი განტოლების გაწარმოების შემდეგ, გვექნება

$$y_1'' = 3y_1' + 8y_2'.$$

შევიტანოთ უკანასკნელი განტოლების მარჯვენა ნაწილში y_1' და y_2' წარმოებულების ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (3.7) განტოლებებიდან, მივიღებთ მეორე რიგის ერთ განტოლებას:

$$y_1'' - y_1 = 0,$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{-x}. \tag{3.8}$$

აქედან გაწარმოებით მივიღებთ

$$y_1' = C_1e^x - C_2e^{-x}. \tag{3.9}$$

ჩავსვათ y_1 და y_1' ფუნქციების (3.8) და (3.9) მნიშვნელობანი (3,7) სისტემის პირველ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y_2 = -\frac{1}{4}(C_1e^x + 2C_2e^{-x}).$$

ამრიგად, (3.7) სისტემის ინტეგრალი იქნება:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{-x},$$

$$y_2 = -\frac{1}{4}(C_1 e^x + 2C_2 e^{-x}),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვძებნოთ შემდეგი სისტემის

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y+z, \\ \frac{dy}{dt} &= x+z, \\ \frac{dz}{dt} &= x+y. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

ინტეგრალი.

გავაწარმოოთ პირველი განტოლება, გვექნება

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2x + y + z.$$

ამ განტოლებიდან და (3.10) სისტემის პირველი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ $y+z$, გვექნება

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

უკანასკნელი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

ახლა (3.10) სისტემის პირველი განტოლებიდან განსაზღვრული მნიშვნელობა $z = \frac{dx}{dt} - y$ შევიტანოთ სისტემის მეორე განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + x - y$$

ანუ

$$\frac{dy}{dt} + y = 3C_2 e^{2t},$$

საიდანაც

$$y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

ამის შემდეგ

$$z = \frac{dx}{dt} - y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t},$$

სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

ამრიგად, (3.10) სისტემის ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y &= C_3e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ z &= -(C_1+C_2)\,e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{aligned}\right\}.$$

§ 4. სისტემის პირველადი ინტეგრალები. ზოგჯერ დიფერენციალური განტოლებების (1.1) სისტემის ინტეგრება მიზანშეწონილია ჩავატაროთ ეგრეთწოდებული ინტეგრებადი კომბინაციების ხელსაყრელი შერჩევით. *ინტეგრებად კომბინაციას* უწოდებენ ისეთ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც შედეგია (1.1) სისტემისა და მისი ინტეგრება უფრო მარტივია ვიდრე (1.1) სისტემისა ან მისი რომელიმე განტოლებისა. მაგალითად, თუ დიფერენციალური განტოლება

$$d\Phi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0 \tag{4.1}$$

წარმოადგენს (1.1) სისტემიდან გამომდინარე შედეგს, მაშინ იგი არის (1.1) სისტემის ინტეგრებადი კომბინაცია. მისი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\Phi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = C, \tag{4.2}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელ ტოლობას უწოდებენ (1.1) სისტემის პირველ ინტეგრალს. იგი დამოუკიდებელ x ცვლადს უკავშირებს საძიებელ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ფუნქციებს ნებისმიერი C მუდმივის საშუალებით.

როცა მუდმივი C ფიქსირებულია, მაშინ პირველადი ინტეგრალი (4.2) გეომეტრიულად წარმოადგენს n განზომილების $S^{(n)}$ ზედაპირს $n+1$ განზომილების სივრცეში, რომლის წერტილის კოორდინატებია $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$. (1.1) სისტემის ყოველი ინტეგრალური წირი, რომელსაც $S^{(n)}$ ზედაპირთან საერთო წერტილი აქვს, მთლიანად ამ ზედაპირზე მდებარეობს.

ვთქვათ მოძებნილია (1.1) სისტემის k პირველადი ინტეგრალი:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) &= C_1, \\ \Phi_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) &= C_2, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \Phi_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) &= C_k. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ ისინი დამოუკიდებელი პირველადი ინტეგრალებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტებიდან

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{D(y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_k})}$$

ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, სადაც $y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_k}$ არის $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ფუნქციებიდან აღებული ნებისმიერი k ფუნქცია.

ამ პირობებში პირველი ინტეგრალებიდან (4.3) შეგვიძლია k უცნობი ფუნქცია გამოვსახოთ დანარჩენი $n-k$ ფუნქციის საშუალებით. შევიტანოთ რა ამ ფუნქციების გამოთვლილ მნიშვნელობებს (1.1) სისტემაში, მივიღებთ ახალ სისტემას უკვე $n-k$ უცნობი ფუნქციით. კერძოდ, როცა $k=n$, მაშინ ყველა უცნობი ფუნქციები განისაზღვრებიან დამოუკიდებელი პირველადი ინტეგრალების (4.3) სისტემიდან.

მაგალითი 1. ვაინტეგროთ სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2}. \end{aligned}\right\}$$

მოცემული სისტემიდან გვექნება

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

საიდანაც $\frac{y}{z}=C_1$, სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. მოცემული სისტემა ახლა ასე ჩავწეროთ

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz},$$

აქედან

$$\frac{xdx}{x(x^2-y^2-z^2)}=\frac{ydy}{2xy^2}=\frac{zdz}{2xz^2}.$$

შევადგინოთ პროპორცია

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy}$$

და ვაინტეგროთ იგი, გვექნება

$$\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln|y|+\ln C_2,$$

ანუ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2,$$

სადაც C_2 ნებისმიერი მუდმივია.

ამრიგად, მოცემული სისტემის (ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი) პირველი ინტეგრალებია

$$\frac{y}{z}=C_1,\qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2,$$

რომლებიც იმავე დროს წარმოადგენს მოცემული სისტემის ყველა ინტეგრალურ წირებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაინტეგროთ სისტემა

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u+z-y, \\ \frac{dz}{dx} &= y+z+u, \\ \frac{du}{dx} &= y+z-u. \end{aligned}\right|$$

გავაწარმოოთ სისტემის უკანასკნელი განტოლება ორჯერ x ცვლადით და მიღებულ განტოლებებში შევიტანოთ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ წარმოებულების მნიშვნელობანი მოცემული სისტემიდან, გვექნება

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}-\frac{du}{dx}=z+3u-y, \tag{4.4}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{dz}{dx}+3\frac{du}{dx}-\frac{dy}{dx}=5y+3z-3u. \tag{4.5}$$

ახლა მოცემული სისტემის უკანასკნელი განტოლებიდან და (4.4) ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=2(z+u),$$

საიდანაც

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)-u \tag{4.6}$$

და

$$\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}=2(y-2u),$$

საიდანაც

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2u. \tag{4.7}$$

ჩავსვათ y და z ფუნქციების მოძებნილი მნიშვნელობანი (4.5) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{3}{2}\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\right)-3u+\frac{5}{2}\left(\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)+$$

$$+10u-3u=4\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}+4u.$$

მაშასადამე, ჩატარებული გარდაქმნების შედეგად, მივიღებთ ერთ დიფერენციალურ განტოლებას ერთი უცნობი ფუნქციით:

$$\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^2u}{dx^2}-4\frac{du}{dx}-4u=0,$$

რომლის მახასიათებელი განტოლებაა

$$s^3+s^2-4s-4=0,$$

ხოლო ზოგადი ინტეგრალი

$$u=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}. \tag{4.8}$$

გავაწარმოოთ მიღებული ფუნქცია ორჯერ:

$$\frac{du}{dx}=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}-2C_3e^{-2x},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}+4C_3e^{-2x}.$$

ახლა, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ ფუნქციების მნიშვნელობები შევიტანოთ (4.6), (4.7) განტოლებებში, მივიღებთ ტოლობებს

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-C_3e^{-2x},$$

$$z=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x},$$

რომლებიც, (4.8) ტოლობასთან ერთად, გვაძლევს მოცემული სისტემის ინტეგრალს.

§ 5. **წრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა.** დიფერენციალური განტოლებების სისტემას ეწოდება წრფივი, თუ მასში შემავალი განტოლებანი პირველი ხარისხისა არიან უცნობი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულების მიმართ.

წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ნორმალური სისტემა ასე იწერება:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}+\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\cdots+\alpha_{1n}y_n=\varphi_1(x),\\
&\frac{dy_2}{dx}+\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\cdots+\alpha_{2n}y_n=\varphi_2(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dx}+\alpha_{n1}y_1+\alpha_{n2}y_2+\cdots+\alpha_{nn}y_n=\varphi_n(x),
\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

სადაც $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\dots, y_n=y_n(x)$ უცნობი ფუნქციებია, კოეფიციენტები $\alpha_{ij}=\alpha_{ij}(x)$ და მარჯვენა ნაწილები $\varphi_i(x)$, $(i, j=1, 2,\dots, n)$ მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციებია ერთსა და იმავე შუალედში $]a, b[$. იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi_i(x)$ ფუნქციებიდან ერთი მაინც იგივურად არ არის ნულის ტოლი $]a, b[$ შუალედში, მაშინ (5.1) სისტემას **არაერთგვაროვანი სისტემა** ეწოდება. თუკი ყველა $\varphi_i(x)\equiv 0$, როცა $x\in\,]a, b[$, მაშინ (5.1) სისტემას აქვს სახე

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}+\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=0,\\
&\frac{dy_2}{dx}+\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\dots+\alpha_{2n}y_n=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dy_n}{dx}+\alpha_{n1}y_1+\alpha_{n2}y_2+\dots+\alpha_{nn}y_n=0,
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

და არაერთგვაროვანი (5.1) სისტემის შესაბამისი **ერთგვაროვანი სისტემა** ეწოდება.

როცა ყველა α_{ij} და $\varphi_i(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $]a, b[$ შუალედში, მაშინ ყოველი $(x_0, y_{10}, y_{20},\dots, y_{n0})\in(D)$ წერტილის საკმარისად მცირე მიდამოში არსებობს ერთადერთი კერძო ინტეგრალი (5.1) სისტემისა, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს $y_i(x_0)=y_{i0}$, $(i=1, 2,\dots, n)$.

(5.1) სისტემის ინტეგრალი $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\dots, y_n=y_n(x)$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც n-განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქცია $Y=(y_1, y_2,\dots, y_n)$, რომლის კოორდინატებია $y_1, y_2,\dots, y_n$. ამნაირადვე (5.1) სისტემის მარჯვენა ნაწილები $\varphi_i(x)$ ჩავთვალოთ კოორდინატებად n-განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციისა $\Phi=(\varphi_1, \varphi_2,\dots, \varphi_n)$. უცნობი ფუნქციების წარმოებულები განვიხილოთ როგორც $\dfrac{dY}{dx}$ ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატები: $\dfrac{dY}{dx}=(y_1', y_2',\dots, y_n')$. ჩავწეროთ Y, Φ, $\dfrac{dY}{dx}$ ვექტორ-ფუნქციები, (5.1) სისტემის კოეფიციენტები და n-განზომილებიანი ვექტორთა სივრცის ნულოვანი ვექტორ-ფუნქცია $\theta=(0, 0,\dots, 0)$ მატრიცების სახით:

$$Y=\begin{Vmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{Vmatrix},\quad \Phi=\begin{Vmatrix} \varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_n\end{Vmatrix},\quad \frac{dY}{dx}=\begin{Vmatrix} \dfrac{dy_1}{dx}\\ \dfrac{dy_2}{dx}\\ \vdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}\end{Vmatrix},\quad \theta=\begin{Vmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12}\cdots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}\,\alpha_{22}\cdots\alpha_{2n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \alpha_{n1}\,\alpha_{n2}\cdots\alpha_{nn}\end{Vmatrix},$$

მაშინ, მატრიცებზე მოქმედების ცნობილი წესების მიხედვით, გვექნება

$$AY=\left\|\begin{matrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}y_j\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_{2j}y_j\\ \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_{nj}y_j\end{matrix}\right\|,\quad \frac{dY}{dx}+AY=\left\|\begin{matrix}\frac{dy_1}{dx}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}y_j\\ \frac{dy_2}{dx}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{2j}y_j\\ \cdots\cdots\\ \frac{dy_n}{dx}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{nj}y_j\end{matrix}\right\|$$

და არაერთგვაროვანი სისტემა (5.1) ვექტორული სახით ასე ჩაიწერება:

$$\frac{dY}{dx}+AY=\Phi, \tag{5.1'}$$

ხოლო ერთგვაროვანი სისტემა (5.2) — ასე:

$$\frac{dY}{dx}+AY=0, \tag{5.2'}$$

§ 6. ერთგვაროვანი წრფივი სისტემა. განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ერთგვაროვანი სისტემა (5.2) (ანუ, ვექტორული სახით (5.2')). როგორც ზევით აღვნიშნეთ, იგულისხმება, რომ კოეფიციენტები α_{ij} $(i,\ j=1, 2,\ldots, n)$ უწყვეტი ფუნქციებია $]a, b[$ შუალედში. ადვილი შესამჩნევია, რომ მართებულია შემდეგი ორი თეორემა:

თეორემა 1. თუ ვექტორ-ფუნქცია $Y=(y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x))$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალს, მაშინ ვექტორ-ფუნქცია $CY=(Cy_1(x),\ Cy_2(x),\ldots, Cy_n(x))$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, იქნება იმავე სისტემის ინტეგრალი.

თეორემა 2. თუ $Y^{(1)}=(y_1^{(1)}, y_2^{(1)},\ldots, y_n^{(1)})$ და $Y^{(2)}=(y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x),\ldots, y_n^{(2)}(x))$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალებს, მაშინ ჯამი $Y^{(1)}+Y^{(2)}=(y_1^{(1)}(x)+y_1^{(2)}(x),\ldots, y_n^{(1)}(x)+y_n^{(2)}(x))$ იქნება იმავე სისტემის კერძო ინტეგრალი.

ამ თეორემების გამოყენებით მივიღებთ: თუ $Y^{(1)}=(y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x),\ldots, y_n^{(1)}(x))$; $Y^{(2)}=(y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x),\ldots,\ y_n^{(2)}(x)),\ldots,\ Y^{(m)}=(y_1^{(m)}(x),\ y_2^{(m)}(x),\ldots, y_n^{(m)}(x))$ წარმოადგენს ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალებს, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია: $Y=\left(\sum_{i=1}^{m}C_iy_1^{(i)},\ \sum_{i=1}^{m}C_iy_2^{(i)},\ldots,\ \sum_{i=1}^{m}C_iy_n^{(i)}\right)$, სა-

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ნებისმიერი მუდმივებია, აგრეთვე იქნება იმავე სისტემის კერძო ინტეგრალი.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 3. თუ ერთგვაროვან (5.2) სისტემას აქვს კომპლექსური კერძო ინტეგრალი $Y=U+iV$, სადაც $U=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ და $V=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ არის n-განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციები, მაშინ U და V ცალ-ცალკე იქნება იმავე სისტემის კერძო ინტეგრალები.

მართლაც, 1 და 2 თეორემების ძალით, გვექნება

$$\frac{dY}{dx}+AY=\frac{d(U+iV)}{dx}+A(U+iV)\equiv$$

$$=\left(\frac{dU}{dx}+AU\right)+i\left(\frac{dV}{dx}+AV\right)\equiv\theta,$$

საიდანაც

$$\frac{dU}{dx}+AU\equiv\theta \quad \text{და} \quad \frac{dV}{dx}+AV\equiv\theta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. ერთგვაროვანი წრფივი სისტემის ზოგადი ინტეგრალი. განვიხილოთ (5.2) სისტემის ისეთი კერძო n ინტეგრალი

$$\left.\begin{aligned}
&Y^{(1)}=(y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x),\ldots,\ y_n^{(1)}(x)),\\
&Y^{(2)}=(y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x),\ldots,\ y_n^{(2)}(x)),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&Y^{(n)}=(y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x),\ldots,\ y_n^{(n)}(x)),
\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$D(x)=\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) \cdots y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) \cdots y_n^{(2)}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) \cdots y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \tag{7.2}$$

იგივურად ნული არ იყოს $]a, b[$ შუალედში. კერძო ინტეგრალების ასეთ მიმდევრობას (7.1) უწოდებენ ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტურ სისტემას. (5.2) ერთგვაროვანი სისტემის კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემები არსებობენ. იმისათვის, რომ ამ წინადადების ჭეშმარიტებაში დავრწმუნდეთ, ავიღოთ ისეთი რიცხვები $\gamma_i^{(k)}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, რომელთა რაოდენობა უდრის n^2 და, რომელთა დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. ამის შემდეგ (5.2) სისტემის ისეთი n კერძო ინტეგრალი $y_1^{(k)}(x)$, $y_2^{(k)}(x)$, $y_n^{(k)}(x)$, $(k=1, 2, \ldots, n)$

განვსაზღვროთ, რომ $y_i^{(k)}(x_0)=\gamma_i^{(k)}$, სადაც $x_0 \in]a, b[$ მოცემული წერტილია. არსებობისა და ერთადობის თეორემის ძალით, ასეთი კერძო ინტეგრალები არსებობენ. რაკი $D(x_0) \neq 0$ და $y_i^{(k)}(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $]a, b[$ შუალედში, ამიტომ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიც $D(x) \neq 0$.

აქ შეიძლება დავამტკიცოთ უფრო საყურადღებო დებულება:

თეორემა. *თუ დეტერმინანტი $D(x)$ ერთ წერტილში $x_0 \in]a, b[$ ნულიდან განსხვავებულია: $D(x_0) \neq 0$, მაშინ $D(x) \neq 0$ მთელ $]a, b[$ შუალედში.*

დამტკიცებისათვის გავაწარმოოთ $D(x)$ დეტერმინანტი x ცვლადით, გვექნება

$$D'(x)=\begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(1)}}{dx} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \frac{dy_1^{(2)}}{dx} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_1^{(n)}}{dx} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & \frac{dy_2^{(1)}}{dx} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & \frac{dy_2^{(2)}}{dx} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & \frac{dy_2^{(n)}}{dx} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} +$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & \frac{dy_n^{(1)}}{dx} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & \frac{dy_n^{(2)}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & \frac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix} \tag{7.3}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირველი დეტერმინანტის პირველ სვეტში წარმოებულები $\frac{dy_1^{(k)}}{dx}$ $(k=1, 2, \dots, n)$, შევცვალოთ მათი ტოლი შესაბამისი მნიშვნელობებით: $-\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, y_j^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots, n)$, რომლებიც გამოთვლილია (5.2) სისტემიდან. ამის შემდეგ (7.3) ტოლობის პირველი დეტერმინანტი ასე წარმოვადგინოთ

$$-\alpha_{11}\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} y_2^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_2^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - \dots -$$

$$
-\alpha_{1n}\begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_n^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -\alpha_{11}D(x).
$$

უკანასკნელი ტოლობა იმის შედეგია, რომ მის მარცხენა ნაწილში ყველა დეტერმინანტი ნულის ტოლია, გარდა პირველისა, რომელიც უდრის $D(x)$ დეტერმინანტს.

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ (7.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მომდევნო შესაკრებები შესაბამისად ტოლია შემდეგი ფუნქციებისა:

$$
-\alpha_{22}\,D(x),\ -\alpha_{33}\,D(x),\ldots,\ -\alpha_{nn}\,D(x).
$$

ჩატარებული გარდაქმნების შემდეგ, (7.3) ტოლობიდან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$
D'(x) = -D(x)\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kk},
$$

საიდანაც

$$
D(x) = D(x_0)\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{kk}\,dx}.
$$

როგორც ვხედავთ, როცა $D(x_0)\neq 0$, მაშინ $D(x)\neq 0$ ნებისმიერი $x\in\,]a,\,b[$.

ახლა გავეცნოთ დიფერენციალური განტოლებების წრფივი სისტემის ზოგადი ინტეგრალის აგების მარტივ წესს.

თეორემა. თუ ფუნქციები $y_1^{(k)}=y_1^{(k)}(x),\ y_2^{(k)}=y_2^{(k)}(x),\ldots,\ y_n^{(k)}=y_n^{(k)}(x),\ (k=1,2,\cdots,n)$ წარმოადგენენ (5.2) სისტემის ინტეგრალების ფუნდამენტურ სისტემას, მაშინ მისი ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{i=1}^{n} C_i\,y_1^{(i)}(x),\\
y_2 &= \sum_{i=1}^{n} C_i\,y_2^{(i)}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= \sum_{i=1}^{n} C_i\,y_n^{(i)}(x),
\end{aligned}\right\} \tag{7.4}
$$

სადაც C_i ნებისმიერი მუდმივებია.

ზევით § 6-ში შესწავლილი დებულებების ძალით, ცხადია, (7.4) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები $y_1, y_2, \ldots, y_n$ წარმოადგენს (5.2) სისტემის ინტეგრალს. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქციები წარმოადგენს (5.2) სისტემის ზოგად ინტეგრალს. სხვანაირად, უნდა ვუჩვენოთ, რომ (7.4) ტოლობებიდან შეიძლება მივიღოთ (5.2) სისტემის ნებისმიერი კერძო ინტეგრალი. ამისათვის საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ ყოველთვის შეიძლება ისე შევარჩიოთ მუდმივები $C_1, C_2, \ldots, C_n$, რომ როცა $x=x_0$, მაშინ $y_k(x_0)=y_k^{(0)}$, $(k=1, 2, \ldots, n)$, სადაც $y_k^{(0)}$ ნებისმიერი რიცხვებია. თუ მოცემულ საწყის მნიშვნელობებს შევიტანთ (7.4) ტოლობებში, გვექნება

$$C_1 y_i^{(1)}(x_0)+C_2 y_i^{(2)}(x_0)+\ldots+C_n y_i^{(n)}(x_0)=y_i^{(0)}, \quad (i=1, 2, \ldots, n), \quad (7.5)$$

საიდანაც უნდა განისაზღვროს მუდმივები $C_1, C_2, \ldots, C_n$. ვინაიდან $D(x_0) \neq 0$, ამიტომ წრფივი ალგებრული სისტემა (7.5) თავსებადია. თუ შევიტანთ (7.5) სისტემიდან ცალსახად განსაზღვრულ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მუდმივების მნიშვნელობებს (7.4) ტოლობებში, მივიღებთ (5.2) სისტემის საძიებელ კერძო ინტეგრალს. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ვიტყვით, რომ (7.1) ვექტორ-ფუნქციები წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ა $]a, b[$ შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივები $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i Y^{(i)} = \theta, \quad x \in]a, b[. \quad (7.6)$$

იმ შემთხვევაში, როცა იგივეობა (7.6) მართებულია მხოლოდ $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=0$ მნიშვნელობისათვის, მაშინ $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$ წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ვექტორ-ფუნქციებია.

ადვილი სანახავია, რომ თუ $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$ არის (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალების წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორ-ფუნქციები $]a, b[$ შუალედში, მაშინ ისინი ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემაც იქნება იმავე შუალედში და პირიქით.

§ 8. წრფივი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვანი სისტემა. განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვანი ნორმალური სისტემა (5.1) (ანუ, რაც იგივეა, (5.1′)). მართებულია შემდეგი

თეორემა. თ უ ც ნ ო ბ ი ლ ი ა ა რ ა ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი (5.1) ს ი ს ტ ე მ ი ს კ ე რ ძ ო ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $\overline{Y}(x)=(\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(x), \ldots, \overline{y}_n(x))$, მ ა შ ი ნ მ ი ს ი ზ ო გ ა დ ი ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს მ ო ძ ე ბ ნ ი ს ს ა კ ი თ ხ ი დ ა ი ყ ვ ა ნ ე ბ ა შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი (5.2) ს ი ს ტ ე მ ი ს

(*ანუ, რაც იგივეა,* (5.2′) *სისტემის) ზოგადი ინტეგრალის მოძებნაზე.*

მართლაც, შემოვიღოთ არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ინტეგრალის $Y(x)=(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ ნაცვლად ახალი უცნობი ვექტორ-ფუნქცია $Z(x)=(z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$, რომელიც $Y(x)$ ვექტორ-ფუნქციასთან დაკავშირებულია ტოლობით $Y(x)=Z(x)+\overline{Y}(x)$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (5.1′) სისტემაში და თანაც გავითვალისწინოთ, რომ, პირობის ძალით, მართებულია იგივეობა

$$\frac{d\overline{Y}(x)}{dx}+A\overline{Y}(x)\equiv\Phi(x),$$

მაშინ მივიღებთ დიფერენციალური განტოლებების ერთგვაროვან სისტემას

$$\frac{dZ(x)}{dx}+AZ(x)=0$$

უცნობი ფუნქციით $Z(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

იმავე წესით, როგორც n რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი ერთი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში (იხ. თავი IV, § 5), დავრწმუნდებით, რომ თუ

$$Y^{(k)}(x)=(y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), \ldots, y_n^{(k)}(x)), \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

არის არაერთგვაროვანი სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ინტეგრალების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1(x)=C_1y_1^{(1)}(x)+C_2y_1^{(2)}(x)+\cdots+C_ny_1^{(n)}(x)+\overline{y}_1(x),\\
y_2(x)=C_1y_2^{(1)}(x)+C_2y_2^{(2)}(x)+\cdots+C_ny_2^{(n)}(x)+\overline{y}_2(x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n(x)=C_1y_n^{(1)}(x)+C_2y_n^{(2)}(x)+\cdots+C_ny_n^{(n)}(x)+\overline{y}_n(x),
\end{array}\right\},$$

სადაც $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 9. არაერთგვაროვანი სისტემის ინტეგრება ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის (ლაგრანჟის) მეთოდით. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. *თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი* (5.1) *სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი* (5.2) *სისტემის ზოგადი ინტეგრალი, მაშინ არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება მივიღოთ* (5.2) *სისტემის ზოგადი ინტეგრალიდან ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდით.*

თანახმად თეორემის პირობებისა, მოცემულია (5.2) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი (7.4). ვიგულისხმოთ, რომ (7.4) ფორმულებში კოეფიციენ-

ტები $C_1, C_2, \ldots, C_n$ არიან x ცვლადის წარმოებადი ფუნქციები: $C_i = C_i(x)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. ვუჩვენოთ, რომ შესაძლებელია ამ ფუნქციების ისე შერჩევა, რომ თუ მათ შერჩეულ მნიშვნელობებს (7.4) ტოლობებში შევიტანთ, მივიღებთ არაერთგვაროვანი (5.1) სისტემის ზოგად ინტეგრალს.

ამისათვის გავაწარმოოთ (7.4) ტოლობები x ცვლადით, გვექნება

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dy_i^{(k)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \frac{dC_k}{dx}, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{9.1}$$

ჩავსვათ (9.1) და (7-4) მნიშვნელობები არაერთგვაროვან სისტემაში (5.1), მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} C_k\left(\frac{dy_1^{(k)}}{dx} + \alpha_{11} y_1^{(k)} + \cdots + \alpha_{1n} y_n^{(k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} y_1^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = \varphi_1(x),\\
&\sum_{k=1}^{n} C_k\left(\frac{dy_2^{(k)}}{dx} + \alpha_{21} y_1^{(k)} + \cdots + \alpha_{2n} y_n^{(k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} y_2^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = \varphi_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{k=1}^{n} C_k\left(\frac{dy_n^{(k)}}{dx} + \alpha_{n1} y_1^{(k)} + \cdots + \alpha_{nn} y_n^{(k)}\right) + \sum_{k=1}^{n} y_n^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = \varphi_n(x).
\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

ვინაიდან, თეორემის პირობის ძალით, ფუნქციები $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(n)}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ წარმოადგენენ ერთგვაროვანი სისტემის ინტეგრალებს. ამიტომ (9.2) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} y_1^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = \varphi_1(x),\\
&\sum_{k=1}^{n} y_2^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = \varphi_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{k=1}^{n} y_n^{(k)} \frac{dC_k}{dx} = \varphi_n(x).
\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

ასეთია განტოლებათა სისტემა, საიდანაც უნდა მოიძებნოს ჯერ საძიებელი ფუნქციების წარმოებულები $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \ldots, \frac{dC_n}{dx}$ და შემდეგ თვით საძიებელი ფუნქციები $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x), \ldots, C_n = C_n(x)$. შევნიშნოთ,

რომ (9.3) წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა არაერთგვაროვან სისტემას $\frac{dC_k}{dx}$, $(k=1, 2, \ldots, n)$, უცნობების მიმართ. რაკი ვიგულისხმეთ, რომ ფუნქციები $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(n)}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, არიან ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის ფუნდამენტური ინტეგრალები, ამიტომ (9.3) სისტემის დეტერმინანტი $D(x) \neq 0$. მაშასადამე, სისტემა (9.3) თავსებადია და მისი ამოხსნა მოგვცემს:

$$\frac{dC_j}{dx}=\frac{\sum_{i=1}^{n} D_{ij}\,\varphi_i(x)}{D(x)}=\psi_j(x), \quad (j=1, 2, \ldots, n), \tag{9.4}$$

სადაც D_{ij} $(i, j, =1, 2, \ldots, n)$ წარმოადგენს $D(x)$ დეტერმინანტის იმ მინორს, რომელიც $y_i^{(j)}$ კოეფიციენტს შეესაბამება.

ახლა (9.4) განტოლებების ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$C_j(x)=\int \psi_j(x)\,dx+C_j', \tag{9.5}$$

სადაც C_j' ინტეგრების მუდმივებია.

ამრიგად, თუ (7.4) ტოლობებში $C_j=C_j(x)$ ფუნქციებს (9.5) ფორმულებით შევარჩევთ, მივიღებთ არაერთგვაროვანი (5.1) სისტემის ზოგად ინტეგრალს

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} C_j' y_i^{(j)}+\overline{y_i}, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{9.6}$$

სადაც ფუნქციები $\sum_{j=1}^{n} C_j' y_i^{(j)}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ არის ერთგვაროვანი (5.2) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი, ხოლო ფუნქციები

$$\overline{y_i}=y_i^{(1)}\int\psi_1(x)\,dx+y_i^{(2)}\int\psi_2(x)\,dx+\cdots+y_i^{(n)}\int\psi_n(x)dx, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

წარმოადგენენ არაერთგვაროვანი (5.1) სისტემის კერძო ინტეგრალებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ შემდეგი არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ინტეგრალი

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}-z=x,\\ &\frac{dz}{dx}+y=1. \end{aligned}\right\} \tag{9,7}$$

ამისათვის ჯერ მოვძებნოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}-z=0,\\ \frac{dz}{dx}+y=0.\end{aligned}\right\}\tag{9.8}$$

ზოგადი ინტეგრალი. გავაწარმოოთ უკანასკნელი სისტემის პირველი განტოლება და მიღებულ ტოლობაში გავითვალისწინოთ, რომ $\frac{dz}{dx}=-y$, მივიღებთ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის $y=C_1\cos x+ C_2\sin x$, სადაც C_1 და C_2 მუდმივებია. ამის შემდეგ ადვილად მივიღებთ, რომ ერთგვაროვანი (9.8) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი არის

$$\left.\begin{aligned}x&=C_1\cos x+C_2\sin x,\\ z&=-C_1\sin x+C_2\cos x.\end{aligned}\right\}.\tag{9.10}$$

ჩავთვალოთ, რომ $C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$ და ჩავსვათ y და z ფუნქციების მნიშვნელობები (9.10) ტოლობებიდან (9.7) განტოლებებში. მაშინ, მარტივი გამოთვლების შემდეგ, $C_1(x)$ და $C_2(x)$ ფუნქციების წარმოებულების განსაზღვრისათვის მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dC_1(x)}{dx}\cos x+\frac{dC_2(x)}{dx}\sin x=x,\\ -\frac{dC_1(x)}{dx}\sin x+\frac{dC_2(x)}{dx}\cos x=1.\end{aligned}\right\}.$$

აქედან გვაქვს

$$\frac{dC_1(x)}{dx}=x\cos x-\sin x,\quad \frac{dC_2(x)}{dx}=x\sin x+\cos x.\tag{9.11}$$

ამ განტოლებების ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}G_1(x)&=x\sin x+2\,\mathrm{sos}\,x+C_1'.\\ C_2(x)&=-x\cos x+2\sin x+C_2',\end{aligned}\right\},\tag{9.12}$$

სადაც C_1' და C_2' არიან ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივები. შევიტანოთ $C_1(x)$ და $C_2(x)$ ფუნქციების მოძებნილი მნიშვნელობები (9.12) განტოლებებიდან (9.10) განტოლებებში, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} y&=C_1'\cos x+C_2'\sin x+2,\\ z&=-C_1'\sin x+C_2'\cos x-x.\end{aligned}\right\}.$$

ასეთია არაერთგვაროვანი (9.7) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი.

§ 10. დიფერენციალური განტოლებების სისტემა მუდმივი კოეფიციენტებით. მარტივი ფესვების შემთხვევა. განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ერთგვაროვანი სისტემა (5.2), რომელშიც ვიგულისხმოთ, რომ კოეფიციენტები a_{ij} $(i, j=1, 2,\ldots, n)$ მუდმივი რიცხვებია. ვეძებოთ მისი კერძო ინტეგრალი მაჩვენებლიანი ფუნქციების სახით:

$$y_1=\lambda_1 e^{sx},\ y_2=\lambda_2 e^{sx},\ldots,\ y_n=\lambda_n e^{sx}, \tag{10.1}$$

სადაც λ_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ და s მუდმივებია. საჭიროა ეს მუდმივები ისე შევარჩიოთ, რომ ფუნქციები (10.1) წარმოადგენდეს (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალს. ამისათვის (10.1) ფუნქციები და მათი წარმოებულები შევიტანოთ (5.2) სისტემაში, მაშინ გამარტივების შემდეგ, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}+s)\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\ldots+a_{1n}\lambda_n=0,\\ &a_{21}\lambda_1+(a_{22}+s)\lambda_2+\ldots+a_{2n}\lambda_n=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n1}\lambda_1+a_{n2}\lambda_2+\ldots+(a_{nn}+s)\lambda_n=0.\end{aligned}\right\}. \tag{10.2}$$

(10.2) განტოლებები წარმოადგენს ერთგვაროვან წრფივ სისტემას λ_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ უცნობების მიმართ. იმისათვის, რომ (10.2) სისტემას არატრივიალური ამონახსნი ჰქონდეს, როგორც ცნობილია, უნდა მოვითხოვოთ, რომ დეტერმინანტი

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} a_{11}+s & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+s & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+s\end{vmatrix}=0. \tag{10.3}$$

როგორც ვხედავთ იმისათვის, რომ ფუნქციები (10.1) წარმოადგენდეს (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალს, საჭიროა s იყოს (10.3) განტოლების ფესვი. (10.3) არის (5.2) სისტემის მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. ცხადია, იგი წარმოადგენს n ხარისხის ალგებრულ განტოლებას s-ის მიმართ.

აქ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება. სახელდობრ: მახასიათებელ განტოლებას აქვს მარტივი ფესვები და მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ პირველ შემთხვევას.

ვთქვათ $s_1, s_2,\ldots, s_n$ არის (10.3) განტოლების მარტივი ფესვები, დავამტკიცოთ, რომ $s=s_j$ წერტილზე $\Delta(s)$ დეტერმინანტის ყველა $n-1$ რიგის მინორებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, სადაც

$s=s_j$ არის (10.3) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი. მართლაც, გავაწარმოოთ $\Delta(s)$ დეტერმინანტი s-ით, მივიღებთ

$$\frac{d\Delta(s)}{ds}=\begin{vmatrix} \alpha_{22}+s & \alpha_{23} & \dots\alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33}+s & \dots\alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots\alpha_{nn}+s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_{11}+s & \alpha_{13} & \dots\alpha_{1n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33}+s & \dots\alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n3} & \dots\alpha_{nn}+s \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} \alpha_{11}+s & \alpha_{12} & \dots\alpha_{1,n-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+s & \dots\alpha_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots\alpha_{n-1,n-1}+s \end{vmatrix} \tag{10.4}$$

იმის გამო, რომ $s=s_j$ არის (10.3) განტოლების მარტივი ფესვი, ამიტომ $\left[\frac{d\Delta(s)}{ds}\right]_{s=s_j}\neq 0$ და, მაშასადამე, $s=s_j$ წერტილზე (10.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ერთი დიაგონალური მინორი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. გარდა ამისა, რადგან $\Delta(s_j)=0$ და (10.2) სისტემის კოეფიციენტების მატრიცის რანგი $s=s_j$ წერტილზე უდრის $n-1$, ამიტომ (10.2) სისტემას აქვს ნულიდან განსხვავებული ამონახსნები $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)},\dots, \lambda_n^{(j)}$ და ეს ამონახსნები განსაზღვრულია ნებისმიერი მამრავლის სიზუსტით: $\lambda_1^{(j)}=C_j r_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}=C_j r_2^{(j)},\dots, \lambda_n^{(j)}=C_j r_n^{(j)}$, სადაც ყოველი $r_m^{(j)}$ $(m=1, 2,\dots, n)$ ცნობილი რიცხვია.

ამრიგად, (10.3) განტოლების ყოველ მარტივ ფესვს $s=s_j$ შეესაბამება (5.2) სისტემის კერძო ინტეგრალი:

$$y_1^{(j)}=r_1^{(j)}e^{s_j x},\ y_2^{(j)}=r_2^{(j)}e^{s_j x},\dots,\ y_n^{(j)}=r_n^{(j)}e^{s_j x}. \tag{10.5}$$

როცა ნიშნაკი j გაირბენს მნიშვნელობებს $1, 2,\dots, n$, მაშინ (10.5) ტოლობებიდან მივიღებთ (5.2) სისტემის n კერძო ინტეგრალს. ადვილად მტკიცდება, რომ (10.5) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

ვიცით რა (5.2) სისტემის n წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ინტეგრალი, შეგვიძლია დავწეროთ მისი ზოგადი ინტეგრალი:

$$y_1=\sum_{k=1}^{n} C_k y_1^{(k)},\ y_2=\sum_{k=1}^{n} C_k y_2^{(k)},\dots,\ y_n=\sum_{k=1}^{n} C_k y_n^{(k)},$$

სადაც C_k ნებისმიერი მუდმივებია.

იმ შემთხვევაში როცა მახასიათებელი განტოლების ფესვი (ან ფესვები) კომპლექსურია, მაშინ მას ექნება ამ ფესვის შეუღლებული ფესვიც. ვთქვათ $s_1=p+iq$, $s_2=p-iq$. მათი შესაბამისი კერძო ინტეგრალები იქნება:

$$y_j^{(1)}=r_j^{(1)}\,e^{(p+iq)x},\quad y_j^{(2)}=r_j^{(2)}\,e^{(p-iq)x}.$$

თუ $r_j^{(1)}$ და $r_j^{(2)}$ კოეფიციენტებს ავიღებთ $\Delta(p+iq)$ და $\Delta(p-iq)$ დეტერმინანტების შესაბამისი სტრიქონების მინორების ტოლად, მაშინ ისინი იქნებიან შეუღლებული კომპლექსური რიცხვები. ვთქვათ $r_j^{(1)}=\gamma_j^{(1)}+i\gamma_j^{(2)}$, $r_j^{(2)}=\gamma_j^{(1)}-i\gamma_i^{(2)}$, მაშინ $s=p\pm iq$ ფესვების შესაბამის კერძო ინტეგრალებს ექნებათ სახე

$$\widetilde{y}_j^{(1)}=e^{px}(\gamma_j^{(1)}\cos qx-\gamma_j^{(2)}\sin qx),$$

$$\widetilde{y}_j^{(2)}=e^{px}(\gamma_j^{(1)}\sin qx+\gamma_j^{(2)}\cos qx)$$

სადაც $\gamma_j^{(1)}$ და $\gamma_j^{(2)}$ ნამდვილი რიცხვებია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოვძებნოთ შემდეგი სისტემის ზოგადი ინტეგრალი:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}-y-2z=0,\\ \frac{dz}{dx}-4y-3z=0.\end{aligned}\right\}. \tag{10.6}$$

ვეძებოთ კერძო ინტეგრალები $y=\lambda_1 e^{sx}$, $z=\lambda_2 e^{sx}$ სახით. შევიტანოთ საძიებელი ფუნქციების ეს მნიშვნელობანი (10.6) სისტემაში, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}(1-s)\lambda_1+2\lambda_2=0,\\ 4\lambda_1+(3-s)\lambda_2=0.\end{aligned}\right\}. \tag{10.7}$$

უკანასკნელი სისტემის თავსებადობის პირობა მოგვცემს (10.6) სისტემის მახასიათებელ განტოლებას:

$$\begin{vmatrix}1-s & 1\\ 4 & 3-s\end{vmatrix}=0,\quad \text{ე. ი.}\quad s^2-4s-5=0,$$

საიდანაც $s_1=5$, $s_2=-1$. მაშასადამე, კერძო ინტეგრალები უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y_1=\lambda_1^{(1)}\,e^{5x},\quad z_1=\lambda_2^{(1)}\,e^{5x} \tag{10.8}$$

და

$$y_2=\lambda_1^{(2)}\,e^{-x},\quad z_2=\lambda_2^{(2)}\,e^{-x}. \tag{10.9}$$

ჩავსვათ ჯერ y_1 და z_1 ფუნქციების მნიშვნელობები (10.8) ტოლობებიდან (10.6) სისტემაში, მივიღებთ $\lambda_2^{(1)}=2\lambda_1^{(1)}$. როგორც ვხედავთ, ფუნქციები (10.8) მაშინ წარმოადგენს (10.6) სისტემის კერძო ინტეგრალს, როცა $\lambda_1^{(1)}=C_1$ ნებისმიერი რიცხვია, ხოლო $\lambda_2^{(1)}=2C_1$. ამრიგად, პირველი კერძო ინტეგრალი იქნება:

$$y_1=C_1\,e^{5x},\quad z_2=2C_1\,e^{5x}.$$

ახლა (10.6) სისტემაში შევიტანოთ y_2 და z_2 ფუნქციების მნიშვნელობები (10.9) ტოლობებიდან, მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ

$$y_2 = C_2 e^{-x}, \quad z_2 = -C_2 e^{-x}, \quad \text{სადაც } C_2 = \lambda_1^{(2)}.$$

საბოლოოდ (10.6) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი იქნება:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}, \\ z &= 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}, \end{aligned}\right\},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვძებნოთ ზოგადი ინტეგრალი სისტემისა:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - y + 5z &= 0, \\ \frac{dz}{dx} - 2y + z &= 0. \end{aligned} \tag{10.10}$$

ვეძებოთ კერძო ინტეგრალები $y = \lambda_1 e^{sx}$, $z = \lambda_2 e^{sx}$ ფუნქციების სახით. მათი ჩასმით მოცემულ სისტემაში მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} (s-1)\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 - (s+1)\lambda_2 &= 0. \end{aligned}\right\}. \tag{10.11}$$

მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} s-1 & 5 \\ 2 & -s-1 \end{vmatrix} = s^2 + 9 = 0,$$

რომლის ფესვებია $s_1 = 3i$, $s_2 = -3i$. იმისათვის რომ განვსაზღვროთ λ_1 და λ_2, ჩავსვათ (10.11) სისტემაში ჯერ პირველი ფესვი, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned} (3i-1)\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 - (3i+1)\lambda_2 &= 0, \end{aligned}\right\},$$

რომელსაც აკმაყოფილებს, მაგალითად, მნიშვნელობები $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1 - 3i$. მაშასადამე, (10.10) სისტემის კერძო ინტეგრალია

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 5e^{3ix} = 5(\cos 3x + i \sin 3x), \\ z_1^{(1)} &= (1-3i)e^{3ix} = (1-3i)(\cos 3x + i \sin 3x). \end{aligned}\right\}. \tag{10.12}$$

შევნიშნოთ, რომ ამ კომპლექსური კერძო ინტეგრალის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები აგრეთვე კერძო ინტეგრალებია მოცემული სისტემისა. მეორე $s_2 = -3i$ ფესვის შესაბამისი კერძო ინტეგრალი ანალოგიურად მოიძებნება, იგი შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\left.\begin{aligned} y_2^{(1)} &= 5e^{-3ix} = 5(\cos 3x - i \sin 3x), \\ z_2^{(2} &= (1+3i)e^{-3ix} = (1+3i)(\cos 3x - i \sin 3x). \end{aligned}\right\}. \tag{10.13}$$

ამრიგად, (10.10) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება

$$\left.\begin{aligned} y&=5C_1\cos 3x+5C_2\sin 3x, \\ z&=C_1(\cos 3x+3\sin 3x)+C_2(\sin 3x-3\cos 3x), \end{aligned}\right\},$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

§ 11. ჯერადი ფესვების შემთხვევა. ვთქვათ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს შორის s_1 არის m ჯერადი ფესვი. მაშინ $s=s_1$ მნიშვნელობისათვის $\Delta(s)$ დეტერმინანტის m რიგის წარმოებული $\Delta^{(m)}(s_1)\neq 0$. $\Delta(s)$ დეტერმინანტის ყველა $n-m$ რიგის მინორებს შორის $s=s_1$ მნიშვნელობისათვის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. (10.2) სისტემის კოეფიციენტების მატრიცის რანგი $r\geqslant n-m$. გარდა ამისა, (10.2) სისტემის $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ უცნობებს შორის $n-r$ უცნობი ნებისმიერია: $\lambda_1=C_1$, $\lambda_2=C_2,\ldots, \lambda_{n-r}=C_{n-r}$, ხოლო დანარჩენი $\lambda_{n-r+1}, \lambda_{n-r+2},\ldots, \lambda_n$ უცნობები წარმოადგენს $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_{n-r}$ უცნობების წრფივ კომბინაციას:

$$\lambda_j=\sum_{i=1}^{n-r}C_i\,\mu_j^{(i)},\quad j=n-r+1,\ n-r+2,\ldots, n.$$

ამ შემთხვევაში მივიღებთ (5.2) სისტემის ისეთ ინტეგრალებს, რომლებიც დამოკიდებული იქნებიან $C_1, C_2,\ldots, C_{n-r}$ ნებისმიერი მუდმივებისაგან, სახელდობრ, გვექნება

$$y_i=C_i\,e^{s_1x},\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n-r),$$

$$y_{n-r+\nu}=e^{s_1x}\sum_{k=1}^{n-r}C_k\,\mu_{n-r+\nu}^{(k)},\quad (\nu=1,\ 2,\ldots,\ r).$$

მაშასადამე, მახასიათებელი განტოლების m ჯერად ფესვს $s=s_1$ შეესაბამება $n-r\leqslant m$ კერძო ინტეგრალები, რომელთა მისაღებად საკმარისია დავუშვათ $C_1=C_2=\ldots=C_{n-r}=1$, ხოლო ყველა დანარჩენი $C_{n-r+1}=$ $=C_{n-r+2}=\ldots=C_n=0$. ეს კერძო ინტეგრალები იქნება:

$$\left.\begin{aligned} &y_1^{(1)}=e^{s_1x},\ y_2^{(1)}=0,\ldots,\ y_{n-r}^{(1)}=0, \\ &y_{n-r+1}^{(1)}=\mu_{n-r+1}^{(1)}e^{s_1x},\ldots,\ y_n^{(1)}=\mu_n^{(1)}\,e^{s_1x}, \\ &y_1^{(2)}=0,\ y_2^{(2)}=e^{s_1x},\ldots,\ y_{n-r}^{(2)}=0, \\ &y_{n-r+1}^{(2)}=\mu_{n-r+1}^{(2)}\,e^{s_1x},\ldots,\ y_n^{(2)}=\mu_n^{(2)}\,e^{s_1x}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_1^{(n-r)}=0,\ y_2^{(n-r)}=0,\ldots,\ y_{n-r}^{(n-r)}=e^{s_1x}, \\ &y_{n-r+1}^{(n-r)}\,e^{s_1x},\ldots,\ y_n^{(n-r)}=\mu_n^{(n-r)}\,e^{s_1x} \end{aligned}\right\} \quad (11.1)$$

ამ ტოლობებში პირველი სტრიქონი წარმოადგენს პირველ კერძო ინტეგრალს, მეორე სტრიქონი — მეორე კერძო ინტეგრალს და ა. შ. შევნიშნოთ, რომ (11.1) ტოლობების სტრიქონებში შემავალი $e^{s_1 x}$ ფუნქციის კოეფიციენტების მატრიცის

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \ldots \mu_{n-r+1}^{(1)} \ldots \mu_n^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 \ldots \mu_{n-r+1}^{(2)} \ldots \mu_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \mu_{n-r+1}^{(n-r)} \ldots \mu_n^{(n-r)} \end{matrix} \right\| \tag{11.2}$$

რანგი უდრის $n-r$. ეს იმას ნიშნავს, რომ (11.1) ტოლობები გვაძლევს, $s=s_1$ ფესვის შესაბამის, $n-r$ რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ინტეგრალებს. თუ $s=s_1$ მნიშვნელობისათვის (11.2) მატრიცის რანგი უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს, ე. ი. $r=n-m$, მაშინ (11.1) ტოლობებში კერძო ინტეგრალების რიცხვი უდრის $s=s_1$ ფესვის ჯერადობას m-ს. ამ შემთხვევაში (11.1) ტოლობები მოგვცემს, $s=s_1$ ფესვის შესაბამის, ყველა წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ინტეგრალს (5.2) სისტემისა. კერძოდ, როცა $s=s_1$ ფესვის ჯერადობა $m=1$, მაშინ გვექნება § 10-ში შესწავლილი მარტივი ფესვის შემთხვევა.

როცა $r>n-m$, მაშინ (11.1) ტოლობებით განსაზღვრული კერძო ინტეგრალების რიცხვი $n-r$ ნაკლები იქნება $s=s_1$ ფესვის m ჯერადობაზე. წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ინტეგრალების უკმარისობის შევსებად საჭიროა ვეძებოთ ისინი $e^{s_1 x}$, $xe^{s_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{s_1 x}$ ფუნქციების წრფივი კომბინაციების საშუალებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ ზოგადი ინტეგრალი სისტემისა:

$$\frac{dy}{dx}-2y-z-u=0, \quad \frac{dz}{dx}+2y+u=0, \quad \frac{du}{dx}-2y-2u=0. \tag{11.3}$$

ვეძებოთ კერძო ინტეგრალები $y=\mu^{(1)} e^{sx}$, $z=\mu^{(2)} e^{sx}$, $u=\mu^{(3)} e^{sx}$ ფუნქციების სახით. მაშინ $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გვექნება შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} &(s-2)\mu^{(1)}-\mu^{(2)}-\mu^{(3)}=0, \\ &2\mu^{(1)}+s\mu^{(2)}+\mu^{(3)}=0, \\ &2\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+(2-s)\mu^{(3)}=0. \end{aligned}\right\}. \tag{11.4}$$

გავუტოლოთ ნულს ამ სისტემის კოეფიციენტების დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} s-2 & -1 & -1 \\ 2 & s & 1 \\ 2 & 1 & 2-s \end{vmatrix}=0,$$

საიდანაც $s_1=2$, $s_2=s_3=1$. მარტივი ფესვისათვის $s_1=2$ გვექნება სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}\mu^{(2)}+\mu^{(3)}=0,\\ 2\mu^{(1)}+2\mu^{(2)}+\mu^{(3)}=0,\\ 2\mu^{(1)}+\mu^{(2)}=0,\end{aligned}\right\},$$

საიდანაც $\mu^{(1)}=1$, $\mu^{(2)}=-2$, $\mu^{(3)}=2$. მაშასადამე, (11.3) სისტემის პირველი კერძო ინტეგრალი იქნება

$$y=e^{2x},\ z=-2e^{2x},\ u=2e^{2x}.$$

ორჯერადი ფესვისათვის $s_2=s_3=1$ განტოლებათა (11.4) სისტემის კოეფიციენტების მატრიცის რანგი $r=2$. (11.3) სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ინტეგრალების რიცხვი $n-r=3-2=1$. რადგან ფესვის ჯერადობა $m=2$ და $m>n-r=1$, ამიტომ შესაბამისი კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ შემდეგი ფუნქციების სახით:

$$y=(a_1+b_1x)\,e^x,\ z=(a_2+b_2x)\,e^x,\ u=(a_3+b_3x)\,e^x,$$

სადაც a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 მუდმივებია. ჩავსვათ ეს ფუნქციები (11.3) სისტემაში და x ცვლადის კოეფიციენტები გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}b_1+b_2+b_3=0,\ 2b_1+b_3+b_2=0,\quad a_1+a_2+a_3-b_1=0,\\ 2b_1+b_2+b_3=0,\ 2a_1+a_2+a_3-b_3=0,\ 2a_1+a_2+a_3+b_2=0,\end{aligned}\right\},\quad (11.5)$$

რომელიც არ წარმოადგენს დამოუკიდებელ განტოლებათა სისტემას. (11.5) სისტემის პირველი ორი განტოლებიდან $b_1=0$, $b_3=-b_2$. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (11.5) სისტემაში, მივიღებთ

$$\left.\begin{aligned}a_1+a_2+a_3=0,\\ 2a_1+a_2+a_3+b_2=0.\end{aligned}\right\}.$$

ამოვხსნათ უკანასკნელი სისტემა, მაგალითად, a_1 და a_3 უცნობების მიმართ, მივიღებთ $a_1=-b_2$, $a_3=b_2-a_2$ და ამით (11.5) სისტემის ყველა უცნობი გამოსახული იქნება a_2 და b_2 უცნობთა საშუალებით. ახლა დავუშვათ, რომ ორი უკანასკნელი უცნობი ნებისმიერი რიცხვებია $a_2=C_1$, $b_2=C_2$, მაშინ $a_1=-C_2$, $a_3=C_2-C_1$, $b_3=-C_2$. ამის შემდეგ (11.3) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$y=-C_2e^x+C_3e^{2x},\ z=(C_1+C_2x)\,e^x-2C_3e^{2x},$$

$$u=(C_2-C_1-C_2x)\,e^x+2C_3e^{2x},$$

სადაც C_1, C_2, C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

სავარჯიშო

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი დიფერენციალური განტოლებების ქვემოთ მოყვანილი ყოველი სისტემისა:

1) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=z-y,\\&\frac{dz}{dx}=-y-3z.\end{aligned}\right\}$$ პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x},\\&z=(C_2-C_1-C_2x)\,e^{-2x}.\end{aligned}\right\}$$

2) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y-3z,\\&\frac{dz}{dx}=3y+z.\end{aligned}\right\}$$ პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\,e^{x},\\&z=(C_1\sin 3x-C_2\cos 3x)\,e^{x}.\end{aligned}\right\}$$

3) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}+z=0,\\&\frac{dz}{dx}+4y=0.\end{aligned}\right\}$$ პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x},\\&z=-2C_1e^{2x}-C_2e^{-2x}.\end{aligned}\right\}$$

4) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}+y-8z=0,\\&\frac{dz}{dx}-y-z=0.\end{aligned}\right\}$$ პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=2C_1e^{3x}-4C_2e^{-3x},\\&z=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}.\end{aligned}\right\}$$

5) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y+5z,\\&\frac{dz}{dx}+y+3z=0.\end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x),\\&z=e^{-x}\left[\frac{1}{5}(C_2-2C_1)\cos x-\frac{1}{5}(C_1+2C_2)\sin x\right]\end{aligned}\right\}$$

6) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}-2y-z=0,\\&\frac{dz}{dx}+y-4z=0.\end{aligned}\right\}$$ პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=(C_1+C_2x)\,e^{3x},\\&z=(C_1+C_2+C_2x)\,e^{3x}.\end{aligned}\right\}$$

7) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}-3z+4u=0,\\&\frac{dz}{dx}+u=0,\\&\frac{du}{dx}+2y-z=0.\end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{3x},\\&z=C_1e^{-x}+\frac{2}{5}C_2e^{-2x}+\frac{1}{5}C_3e^{3x}\\&u=C_1e^{-x}+\frac{4}{5}C_2e^{-2x}-\frac{3}{5}C_3e^{3x}.\end{aligned}\right\}$$

8) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}-y-z=0,\\&\frac{dy}{dt}-x-z=0,\\&\frac{dz}{dt}-x-y=0.\end{aligned}\right\}$$ პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t},\\&y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t},\\&z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}.\end{aligned}\right\}$$

9) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}-4x-y+36t=0,\\&\frac{dy}{dt}+2x=y-2e^t.\end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&x=6t-1-e^t+C_1e^{2t}+C_2e^{3t},\\&y=12t+10+3e^t-2C_1e^{2t}-C_2e^{3t}.\end{aligned}\right\}$$

10) $$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}+2y+4z=4x+1,\\&\frac{dz}{dx}+y-z=1,5x^2.\end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned}&y=x+x^2-C_1e^{2x}+4C_2e^{-3x},\\&z=-\frac{x^2}{2}+C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}.\end{aligned}\right\}$$

11) $$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=y+2e^t,\\ \frac{dy}{dt}&=x+t^2. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} x&=C_1 e^t+C_2 e^{-t}+t e^t-t^2-2,\\ y&=C_1 e^t-C_2 e^{-t}(t-1) e^t-2t. \end{aligned}\right\}$$

12) $$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=2x-y,\\ \frac{dy}{dt}&=2y-x-5e^t \sin t. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} x&=C_1 e^t+C_2 e^{3t}+(2\cos t-\sin t)\, e^t,\\ y&=C_1 e^t-C_2 e^{3t}+(3\cos t+\sin t)\, e^t. \end{aligned}\right\}.$$

13) $$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}-y+1+\ln^2 t=0,\\ &\frac{dy}{dt}+x-\ln t=0. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} x&=C_1\cos t+C_2\sin t+\ln t,\\ y&=-C_1\sin t+C_2\cos t+2. \end{aligned}\right\}$$

14) $$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+3y+4z=2x,\\ &\frac{dz}{dx}-y-z=x. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} y&=(C_2-2C_1-2C_2x)\, e^{-x}+14-6x,\\ z&=(C_1+C_2x)\, e^{-x}+5x-9. \end{aligned}\right\}$$

15) $$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+2y+z-\sin x=0,\\ &\frac{dz}{dx}-4y-2z-\cos x=0. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} y&=C_1+C_2x+2\sin x,\\ z&=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x. \end{aligned}\right\}$$

16) $$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+z-1=0,\\ &\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x^2}\,y-\ln x=0. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} &y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{18}\,(3\ln^2 x-2\ln x),\\ &z=1-2C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x}{9}\,(3\ln^2 x+\ln x-1). \end{aligned}\right\}$$

17) $$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}-3x+2y=0,\\ &\frac{dy}{dt}-2x+y-15\sqrt{t}\,e^t. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} &x=\left(C_1+2C_2t+8t^{\frac{5}{2}}\right)e^t,\\ &y=\left(C_1+2C_2t-C_2-8t^{\frac{5}{2}}+10t^{\frac{3}{2}}\right)e^t. \end{aligned}\right\}$$

18) $$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}-2y-2z=0,\\ &\frac{dz}{dx}+2z-y-2\sin x=0. \end{aligned}\right\}$$

პასუხი: $$\left.\begin{aligned} &y=3C_1\,e^x+C_2\,e^{-x}+3\sin x,\\ &z=C_1\,e^x+C_3\,e^{-x}-\cos x+2\sin x. \end{aligned}\right\}$$

თავი VI

პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების განსაზღვრა და მისი ინტეგრების ამოცანა. ვთქვათ უცნობი ფუნქცია $W = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ დამოკიდებულია n ცვლადზე $x_1, x_2, \ldots, x_n$. განტოლებას

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k w}{\partial x_1^k}, \ldots\right) = 0, \quad (1.1)$$

რომელიც აკავშირებს უცნობ ფუნქციას w, დამოუკიდებელ ცვლადებს $x_1, x_2, \ldots, x_n$ და უცნობი ფუნქციის სხვადასხვა რიგის ნაწილობით წარმოებულებს, ეწოდება ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. იგულისხმება, რომ x_1, x_2, x_n იცვლებიან n-განზომილებიანი R_n სივრცის მოცემულ (D) არეში, ხოლო f წარმოადგენს თავისი არგუმენტების მოცემულ ფუნქციას. უცნობი ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულის უმაღლეს რიგს, რომელიც (1.1) განტოლებაში მონაწილეობს, ეწოდება დიფერენციალური განტოლების რიგი. ასე მაგალითად

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (1.2)$$

არის პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება, ხოლო

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\right) = 0$$

არის მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება და ა. შ.

ფიზიკის მრავალი ამოცანა მიიყვანება ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე, მაგალითად, სინათლის სხივის გავრცელების ამოცანა არაერთგვაროვან გარემოში, რომლის გარდატეხის კოეფიციენტია $n = n(x, y, z)$, მიიყვანება პირველი რიგის შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლების

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=n(x, y, z)$$

ინტეგრებაზე. მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

წარმოადგენს სიმის რხევის განტოლებას, ხოლო

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

არის ღეროში ტემპერატურის ცვალებადობის დიფერენციალური განტოლება და ა. შ.

(1.1) განტოლების კერძო ინტეგრალი ეწოდება ისეთ დიფერენცირებად ფუნქციას $w=w(x_1, x_2,\dots, x_n)$, რომელიც ამ განტოლებას გადააქცევს იგივეობად (D) არეში.

ქვემოთ მოკლედ შევეხებით მხოლოდ პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ზოგიერთ საკითხს. მისი ინტეგრება დაკავშირებულია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ინტეგრებასთან, რომლის ზოგადი ინტეგრალი, როგორც ვიცით, შეიცავს გარკვეული რაოდენობის ნებისმიერ მუდმივებს. დამტკიცებული იქნება, რომ პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს ნებისმიერ ფუნქციას, საიდანაც შეიძლება მივიღოთ ამ განტოლების ყოველი კერძო ინტეგრალი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{\partial w\,(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}=x_1^2+x_2^3.$$

ვაინტეგროთ იგი x_1 ცვლადით, მივიღებთ ზოგად ინტეგრალს

$$w(x_1,\ x_2)=\frac{1}{3}\,x_1^3+x_1x_2^3+\varphi(x_2),$$

სადაც φ არის x_2 ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია.

§ 2. კოშის ამოცანა. ვთქვათ განტოლება (1.2) ამოხსნილია საძიებელი ფუნქციის ერთ-ერთი ნაწილობითი წარმოებულის $\left(\text{მაგალითად, } \frac{\partial w}{\partial x_n}\right.$ წარმოებულის$\left.\right)$ მიმართ:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\Psi\left(x_1, x_2,\ldots, x_n, w, \frac{\partial w}{\partial x_2},\ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\right). \qquad (2.1)$$

კოშის ამოცანა პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი განტოლებისათვის (2.1) შემდეგია: მოვძებნოთ (2.1) განტოლების ისეთი ინტეგრალი $w=\Phi(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, რომელიც მოცემული $x_1=x_1^0$ მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს დანარჩენი ცვლადების მოცემულ ფუნქციას $w=\varphi(x_2, x_3,\ldots, x_n)$.

ზოგჯერ (2.1) განტოლების ინტეგრალს $w=\Phi(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ უწოდებენ n-განზომილებიან ინტეგრალურ ჰიპერზედაპირს, ხოლო კოშის ამოცანაში შემავალ პირობას $n-1$ განზომილებიან ჰიპერზედაპირს, რომელზედაც n-განზომილებიანმა ინტეგრალურმა ჰიპერზედაპირმა უნდა გაიაროს.

დავუშვათ კერძოდ, რომ (2.1) განტოლებაში დამოუკიდებელი ცვლადების რიცხვი ორია, ე. ი. გვაქვს განტოლება

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\Psi\left(x_1, x_2, w, \frac{\partial w}{\partial x_2}\right). \qquad (2.2)$$

ცხადია, ამ განტოლების ინტეგრალი

$$W=\Phi(x_1, x_2) \qquad (2.3)$$

სამგანზომილებიან სივრცეში, რომელშიც წერტილის კოორდინატებია (x_1, x_2, w), წარმოადგენს ინტეგრალურ ზედაპირს. ისიც შევნიშნოთ, რომ (2.3) ზედაპირის მხები სიბრტყე (x_1, x_2, w) წერტილში იქნება

$$W-w=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(X_1-x_1)+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(X_2-x_2), \qquad (2.4)$$

სადაც (X_1, X_2, W) სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია, (x_1, x_2, w) შეხების წერტილის კოორდინატები, ხოლო $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}$ — შემხები სიბრტყის კუთხური კოეფიციენტები. როგორც ვხედავთ, დიფერენციალური განტოლება (2.2) აკავშირებს ინტეგრალური ზედაპირის (x_1, x_2, w) კოორდინატებს ამ წერტილში გავლებულ შემხები სიბრტყის კუთხურ კოეფიციენტებთან.

განხილულ შემთხვევაში კოშის ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა ვიპოვოთ (2.2) განტოლების ისეთი ინტეგრალური ზედაპირი, რომელიც გაივლის წირზე: $x_1=x_1^0$, $w=\varphi(x_2)$.

§ 3. პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. ვთქვათ $X_i=X_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, $i=1, 2,\ldots, n$ აღნიშნავენ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ დამოუკიდებელი ცვლადების უწყვეტ და უწყვეტად წარმოებად მოცემულ ფუნქციებს რაიმე $(D)\subset R_n$

არეში, რომლის არც ერთ წერტილში X_i ფუნქციები ერთდროულად არ არის ნულის ტოლი. განტოლებას

$$X_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0 \tag{3.1}$$

ეწოდება პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. $w = w(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ აღნიშნავს (D) არეში საძიებელ დიფერენცირებად ფუნქციას.

ჩვენი უახლოესი მიზანია მოვძებნოთ (3.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, ე. ი. ისეთი ინტეგრალი, რომელიც შეიცავს ამ განტოლების ყველა კერძო ინტეგრალს. ამისათვის განვიხილოთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების შემდეგი სისტემა:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{3.2}$$

რომელსაც (3.1) განტოლების შესაბამისი სისტემა ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ პირობები, რომელსაც აკმაყოფილებენ $X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ფუნქციები და მათი ნაწილობითი წარმოებულები (D) არეში, საკმარისია (3.2) სისტემის ინტეგრალის არსებობისა და ერთადობისათვის.

მოვძებნოთ (3.2) სისტემის $n-1$ დამოუკიდებელი პირველადი ინტეგრალი:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ &\Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

განტოლებების უკანასკნელი სისტემა განსაზღვრავს $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ პარამეტრებზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახს n-განზომილებიან სივრცეში. ყველა ამ წირს (3.1) დიფერენციალური განტოლების მახასიათებლებს უწოდებენ. ადვილი სანახავია, რომ (3.2) სისტემის ყოველი პირველადი ინტეგრალი $\Psi = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წარმოადგენს (3.1) განტოლების ინტეგრალს. მართლაც, ერთი მხრივ, ყოველი ინტეგრალური წირის გასწვრივ $\Psi = C$, ამიტომ

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx_i = 0. \tag{3.4}$$

მეორე მხრივ, თანახმად (3.2) ტოლობებისა, dx_i დიფერენციალები პროპორციულია X_i ფუნქციებისა, ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} X_i = 0. \tag{3.5}$$

(D) არის ყოველ წერტილზე გადის (3.2) სისტემის ინტეგრალური წირი და, როგორც (3.5) ტოლობიდან ჩანს, მისი მარცხენა ნაწილი არ არის დამოკიდებული $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ მუდმივებზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა ერთი ინტეგრალური წირიდან გადავდივართ მეორე ინტეგრალურ წირზე, მაშინ (3.2) განტოლების მარცხენა ნაწილი არ იცვლება. ამრიგად (3.5) იგივეობა მართებულია არა მხოლოდ ერთი რომელიმე ინტეგრალური წირის გასწვრივ, არამედ იგი მართებულია (D) არის ყოველ წერტილში. მაშასადამე, ფუნქცია $\Psi = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წარმოადგენს თავიდან აღებული (3.1) განტოლების ინტეგრალს.

ახლა ისიც შევნიშნოთ, რომ, რადგან (3.2) სისტემის ინტეგრალური წირის გასწვრივ $\Psi_i, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ ფუნქციები მუდმივებია, ამიტომ ამ სისტემის ინტეგრალური წირის გასწვრივ მუდმივი იქნება აგრეთვე ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია

$$\Phi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}) = C \tag{3.6}$$

და, მაშასადამე, ეს უკანასკნელიც ისევ (3.2) სისტემის პირველადი ინტეგრალია.

§ 4. პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. წინა პარაგრაფში მოყვანილი ფუნქცია $\Phi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1})$, სადაც Φ არის თავისი არგუმენტების ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია, წარმოადგენს (3.1) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ თუ $\Psi = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის (3.1) განტოლების რაიმე ინტეგრალი, მაშინ არსებობს ისეთი Φ ფუნქცია, რომ $\Psi = \Phi((\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1})$, სადაც $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ არის (3.2) სისტემის $n-1$ დამოუკიდებელი პირველადი ინტეგრალები. ცხადია, მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} \equiv 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} \equiv 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial x_i} \equiv 0. \tag{4.1}$$

როგორც ვიცით (იხ. წინა პარაგრაფის დასაწყისი), (D) არის არც ერთ წერტილში ფუნქციები X_i ერთდროულად არ არის ნულის ტოლი. მაშასადამე, თუ (4.1) ტოლობებს განვიხილავთ როგორც n განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას X_i ფუნქციების მიმართ, მაშინ ამ სისტემას ექნება არატრივიალური ამონახსნი X_i ფუნქციების მიმართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ (D) არეში ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_i}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

როგორც ვხედავთ, უკანასკნელი დეტერმინანტი არის $\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ ფუნქციების შესაბამისი იაკობის დეტერმინანტი $J = \frac{D(\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, რომლის ნულთან იგივური ტოლობა იმას ნიშნავს, რომ ამ ფუნქციებს შორის არსებობს

$$F(\Psi, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}) = 0 \tag{4.2}$$

სახის დამოკიდებულება. რადგან, ამასთან ერთად, $\Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ ფუნქციები წარმოადგენენ (3.2) სისტემის პირველად ინტეგრალებს, ამიტომ J დეტერმინანტის ყველა $n-1$ რიგის მინორებიდან ერთი მინორი მაინც განსხვავდება ნულისაგან.

$$\frac{D(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})} \neq 0.$$

მაშასადამე, ტოლობა (4.2) შეიძლება ამოვხსნათ Ψ ფუნქციის მიმართ:

$$\Psi = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების

$$x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \tag{4.3}$$

ზოგადი ინტეგრალი.

ამ განტოლების მახასიათებელთა დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3},$$

რომლის დამოუკიდებელი პირველადი ინტეგრალები იქნება:

$$\frac{x_1}{x_3}=C_1, \quad \frac{x_2}{x_3}=C_2,$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

თანახმად დამტკიცებული თეორემისა, (4.3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$W=\Phi\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right),$$

სადაც Φ არის თავისი არგუმენტების ნებისმიერი ფუნქცია. როგორც ვხედავთ, ზოგადი ინტეგრალი წარმოადგენს ერთგვაროვან ფუნქციას, რომლის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი ნულის ტოლია.

§ 5. პირველი რიგის არაერთგვაროვანი წრფივი ნაწილობითი წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. ასე ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)\frac{\partial w}{\partial x_i}=Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, w), \tag{5.1}$$

სადაც კოეფიციენტები $X_i=X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ და $Z=Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, w)$ მოცემული უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $n+1$ განზომილებიანი სივრცის რაიმე (D') არეში, $W=W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის საძიებელი ფუნქცია. ცხადია, § 3 და § 4-ში შესწავლილი ერთგვაროვანი განტოლება წარმოადგენს (5.1) ყაიდის განტოლების კერძო სახეს. მართლაც, როცა $Z\equiv 0$ და კოეფიციენტები X_i წარმოადგენენ მხოლოდ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციებს, მაშინ განტოლება (5.1) იქნება ერთგვაროვანი განტოლება (3.1).

ქვემოთ ვნახავთ, რომ განტოლება (5.1) მიიყვანება ერთგვაროვან განტოლებაზე. მართლაც, ვეძებოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქცია W არაცხადი სახით:

$$R(w, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \tag{5.2}$$

თანაც ვიგულისხმოთ, რომ ყველგან (D) არეში კერძო წარმოებული

$$\frac{\partial R}{\partial w}\neq 0.$$

(5.2) ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial R}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial R}{\partial w}}, \quad (i=1, \ldots, n). \tag{5.3}$$

შევიტანოთ (5.3) მნიშვნელობანი (5.1) განტოლებაში და იგი ასე ჩავწეროთ:

$$X_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial R}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial R}{\partial x_n} + Z \frac{\partial R}{\partial w} = 0. \tag{5.4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ (5.2) განტოლება განსაზღვრავს (5.1) განტოლების ინტეგრალს w. მაშინ განტოლება (5.4) იგივურად უნდა დააკმაყოფილდეს $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ (D) არეში, თუ მასში w ფუნქციის იმ მნიშვნელობას შევიტანთ, რომელიც გამოთვლილია (5.2) განტოლებიდან. ჩავთვალოთ, რომ გარდა $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადებისა დამოუკიდებელი ცვლადია აგრეთვე w. ამასთან მოვითხოვოთ, რომ R ფუნქცია ყველა $x_1, x_2, \dots, x_n, w$ დამოუკიდებელი ცვლადების მიმართ იგივურად აკმაყოფილებს (5.4) განტოლებას (D') არეში. მაშინ (5.4) შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება საძიებელი R ფუნქციით, რომელიც $n+1$ ცვლადზეა დამოკიდებული. საზოგადოდ, (5.4) განტოლების ყოველი ინტეგრალი შეიცავს w ცვლადს. თუ ამ ინტეგრალს გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ (5.2) ყაიდის განტოლებას, საიდანაც მოძებნილი $w = w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია წარმოადგენს (5.1) განტოლების ინტეგრალს.

(5.4) განტოლების შესაბამისი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა იქნება

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dw}{Z},$$

რომლის დამოუკიდებელი პირველადი ინტეგრალები იყოს

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = C_1,$$
$$f_2(x_1, x_3, \dots, x_n, w) = C_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = C_n.$$

ამის შემდეგ, როგორც ვიცით, (5.4) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი ასე ჩაიწერება:

$$F(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0. \tag{5.5}$$

სადაც F არის თავისი არგუმენტების ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია. განტოლებიდან (5.5) განისაზღვრება ფუნქცია $w = w(x_1, x_2, \dots, x_n)$, რომელიც წარმოადგენს (5.1) განტოლების ინტეგრალს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ შემდეგი არაერთგვაროვანი განტოლების

$$x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial w}{\partial x_3} = w + \frac{x_1 x_2}{x_3} \tag{5.6}$$

ზოგადი ინტეგრალი.

შევადგინოთ (5.6) განტოლების შესაბამისი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემა, გვექნება

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3}=\frac{dw}{w+\frac{x_1 x_2}{x_3}}.$$

აქედან, განტოლების

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}$$

ზოგადი ინტეგრალია $\frac{x_1}{x_2}=C_1$. ასევე, განტოლების

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_3}{x_3}$$

ზოგადი ინტეგრალია $\frac{x_1}{x_3}=C_2$. ახლა შევნიშნოთ, რომ $\frac{x_2}{x_3}=\frac{C_2}{C_1}$, რომლის ძალით, განტოლება

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dw}{w+\frac{x_1 x_2}{x_3}}$$

ასე ჩაიწერება

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{w}{x_1}=\frac{C_2}{C_1}.$$

უკანასკნელი განტოლების ზოგადი ინტეგრალია

$$w=x_1\left(\frac{C_2}{C_1}\ln x_1+C_3\right)$$

ანუ

$$w=\frac{x_1 x_2}{x_3}\ln x_1+C_3 x_1.$$

ამრიგად, (5.6) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება

$$w=\frac{x_1 x_2}{x_3}\ln x_1+x_1 F\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1}{x_3}\right),$$

სადაც F არის თავისი არგუმენტების ნებისმიერი ფუნქცია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

მოძებნეთ ზოგადი ინტეგრალი:

1. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=z$, პ ა ს უ ხ ი: $z=(x+y)\,F(x^2-y^2)$.

2. $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y,$

პასუხი: $z = \sin y + F(\sin x - \sin y)$.

3. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,$ პასუხი: $xyz = \frac{1}{3} x^3 + F(xy)$.

4. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x(1+x^2) = 0,$

პასუხი: $4xyz = F(xy) - 2x^2 - x^4$.

5. $xy \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2yz,$ პასუხი: $z = x^2 F(x^2 - y^2)$.

6. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x,$ პასუხი: $z^2 = xy + F\left(\frac{y}{x}\right)$.

7. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z,$ პასუხი: $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$.

8. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0,$ პასუხი: $xyz = \frac{1}{3} y^3 + F(xy)$.

9. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y,$ პასუხი: $z = x + y + F(xy)$.

10. $x \frac{\partial z}{\partial x} + \left(y - \sqrt{R^2 - z^2}\right) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$

პასუხი: $x - y + \sqrt{R^2 - z^2} = F(z)$.

11. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 - z^2 = 0,$

პასუხი: $z = xF\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$.

12. $y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} - axz = 0,$ პასუხი: $\ln x = F(xy) - \frac{ax}{3y^2}$.

13. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{z},$ პასუხი: $z^2 = xy + F\left(\frac{x}{y}\right)$.

14. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \sqrt{a^2 - z^2},$

პასუხი: $z = a \sin\left[xy + F\left(\frac{y}{x}\right)\right]$.

15. $\frac{1}{x^n}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y^n}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^{n+1}}$,

პასუხი: $z=\ln x+F(x^{n+1}-y^{n+1})$.

16. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$, პასუხი: $z=yF(x^2-y^2)$.

17. $(x^2-y^2+z^2)\frac{\partial z}{\partial y}-2xy\frac{\partial z}{\partial x}+2yz=0$,

პასუხი: $x^2+y^2+z^2=xF\left(\frac{z}{x}\right)$.

18. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+z^2$, პასუხი: $z=\frac{y^2F(y)+xy}{y-xF(y)}$.

19. $2x^3\frac{\partial z}{\partial x}+(3x^2y+y^3)\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2z$,

პასუხი: $z=xF\left(\frac{x^3+xy^2}{y^2}\right)$.

20. $(e^x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(e^y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-e^{x+y}$,

პასუხი: $F(x+ze^{-y},\ y+ze^{-x})=0$.

21. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=u$,

პასუხი: $u=e^{-\frac{1}{x}}F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)$.

22. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}=z$,

პასუხი: $z=\sqrt{x^2+y^2}\,F\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)+\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]$.

23. $(x+y)\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+z\frac{\partial z}{\partial x}=0$,

პასუხი: $F\left[\frac{z}{x+y+z}+\ln(x+y+z)\,y+z\right]=0$.

24. $x\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=y+z$,

პასუხი: $F\left[x(y-z),\ x(y-u),\ \frac{y+z+u}{x^2}\right]=0.$

25. $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z,$

პასუხი: $F\left[(x-u)\sqrt[3]{x+y+z+u},\ (y-u)\sqrt[3]{x+y+z+u},\right.$

$$\left.(z-u)\sqrt[3]{x+y+z+u}\right]=0.$$

26. ვიპოვოთ ზედაპირი, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

და გაივლის წირზე

$$z=0,\ \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1.$$

პასუხი: $\frac{(x-az)^2}{m^2}+\frac{(y-bz)^2}{n^2}=1.$

27. ვიპოვოთ ზედაპირი, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0$$

და გაივლის წირზე

$$z=0,\ xy=a^2.$$

პასუხი: $xy+z^2=a^2.$

28. ვიპოვოთ ზედაპირი, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

და გაივლის წირზე

$$x=0,\ y^2=2pz.$$

პასუხი: $x^2+y^2=2pz,$

29. ვიპოვოთ ზედაპირი, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

და გაივლის წირზე

$$x=a,\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

პასუხი; $\frac{x^2z^2}{c^2} - \frac{a^2y^2}{b^2} + x^2 = 0.$

30. ვიპოვოთ ზედაპირი, რომელიც დააკმაყოფილებს განტოლებას

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

და გაივლის წირზე

$$x + y + z = 0, \; x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

პასუხი: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2r^2(x^2 + y^2 + xy).$

თ ა ვ ი VII

ვარიაციათა აღრიცხვა

უმარტივესი ამოცანა

§ 1. შესავალი. მთელი მათემატიკური ანალიზის საფუძველს ფუნქციის ცნება წარმოადგენს. ამ ცნებაზეა აგებული დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, დიფერენციალურ განტოლებათა თეორია და ა. შ.

ვარიაციათა აღრიცხვა, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დამყარებულია ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნების განზოგადებაზე და ამიტომ მიეკუთვნება ფუნქციონალურ ანალიზს. იგი, როგორც მათემატიკის ერთ-ერთი მიმართულება, წარმოიშვა XVIII საუკუნეში, თუმცა ზოგიერთი მისი ამოცანა დაყენებული იყო ჯერ კიდევ ჩვენ წელთაღრიცხვამდე.

დიფერენციალურ აღრიცხვაში განხილული გვქონდა ერთ (ან რამდენიმე) ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციის ექსტრემუმი. ვარიაციათა აღრიცხვაში შეისწავლება განზღვრული ინტეგრალის ექსტრემუმის საკითხები. იმისათვის, რომ წარმოვიდგინოთ შესასწავლი მეცნიერების საგანი, მივმართოთ დამახასიათებელ მაგალითებს.

1. ყველა ბრტყელ წირს შორის $y=y(x)$, რომლებიც მოცემულ $A=A(x_1, y_1)$ და $B=B(x_2, y_2)$ წერტილებს აერთებს (ე. ი. $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$), ვიპოვოთ ის წირი, რომელსაც უმცირესი სიგრძე აქვს.

ეს ამოცანა დაიყვანება ინტეგრალის

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{1.1}$$

მინიმუმის მოძებნაზე, სადაც იგულისხმება, რომ ფუნქცია $y=y(x)$ უწყვეტად წარმოებადია $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე.

2. ბ რ ა ქ ი ს ტ ო ქ რ ო ნ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა. სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები $A=A(x_1, y_1)$ და $B=B(x_2, y_2)$; შევაერთოთ A და B წერტილები ისეთი $y=y(x)$ წირით, რომ მატერიალურმა წერტილმა M მასით m, რომელიც სიმძიმის ძალის გავლენით მოძრაობს ამ წირის გასწვრივ საწყისი სიჩქარით V_0, უმცირესი დროის განმავლობაში მიაღწიოს A წერტილიდან B წერტილამდე (ნახ. 9). აქაც იგულისხმება, რომ

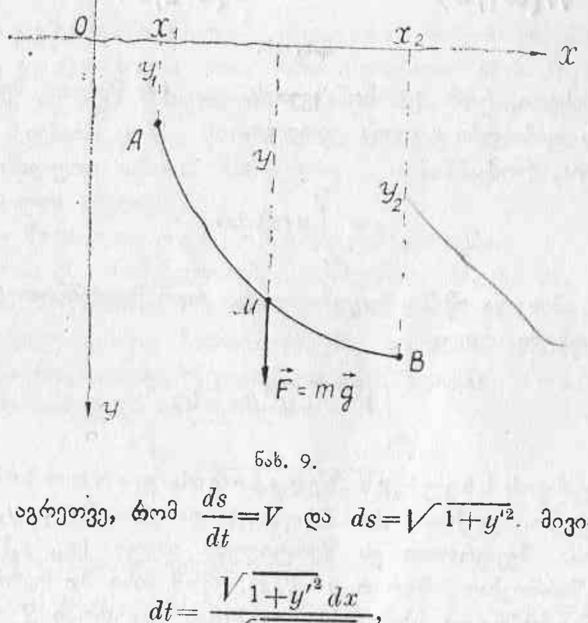
ფუნქცია $y=y(x)$ არის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე.

M წერტილის სიჩქარე ნებისმიერ t მომენტში იყოს $V\frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$, ხოლო განვლილი მანძილი იყოს $s=s(t)$. მაშინ დინამიკიდან ცნობილი ფორმულის მიხედვით დავწერთ

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=mg(y-y_1),$$

საიდანაც

$$V=\sqrt{V_0^2+2g(y-y_1)}=k\sqrt{a+y-y_1},\ k=\sqrt{2g},\quad a=\frac{V_0^2}{2g}.$$



ნახ. 9.

გავიხსენოთ აგრეთვე, რომ $\frac{ds}{dt}=V$ და $ds=\sqrt{1+y'^2}$. მივიღებთ

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{k\sqrt{y-y_1+a}},$$

საიდანაც

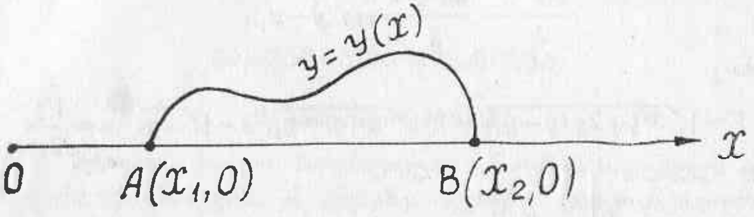
$$t=\frac{1}{k}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{y-y_2+a}} \tag{1.2}$$

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ A და B წერტილების შემაერთებელ წირთა შორის მოვძებნოთ ის წირი $y=y(x)$, რომლისთვისაც ინტეგრალი (1.2) მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

როგორც ვხედავთ, აქ საქმე გვაქვს ისეთ ამოცანასთან, რომელშიც

(1.2) გამოსახულების მინიმუმი დამოკიდებულია A და B წერტილების შემაერთებელი წირის $y=y(x)$-ის სახეზე.

3. იაკობ ბერნულის ამოცანა. ვთქვათ AB არის $A=A(x_1, 0)$ და $B=B(x_2, 0)$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი (ნახ. 10). ყველა იმ უწყვეტად წარმოებად წირებს შორის $y=y(x)$. რომლებსაც ერთი და იგივე მოცემული l სიგრძე აქვთ და A და B წერტილებს აერთებენ,



ნახ. 10.

შევარჩიოთ ისეთი, რომ AB მონაკვეთისა და $\overset{\smile}{AB}$ წირით შემოფარგლული ნაკვთის ფართობი s იყოს უდიდესი.

ცნობილია, რომ

$$s=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx. \tag{1.3}$$

მაშასადამე, ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ მოვძებნოთ (1.3) ინტეგრალის მაქსიმუმი, როცა

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx=l. \tag{1.4}$$

4. ბრუნვის სხეულის ზედაპირის ფართობის მინიმუმის ამოცანა. ვთქვათ $A=A(x_1, y_1)$ და $B=B(x_2, y_2)$ მოცემული წერტილებია. შევაერთოთ ეს წერტილები ისეთი $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი წირით $y=y(x)$, რომ მისი Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით წარმოქმნილი სხეულის ზედაპირის ფართობი S იყოს მინიმალური.

როგორც ვიცით, ბრუნვის სხეულის ზედაპირის ფართი გამოისახება ფორმულით

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1.5}$$

და, მაშასადამე, საკითხი შეეხება A და B წერტილების შემაერთებელ წირთა შორის იმ წირის მოძებნას, რომელიც (1.5) ინტეგრალს მიანიჭებს მინიმუმს.

5. იზოპერიმეტრული ამოცანა. ერთი და იმავე l სიგრძის ყველა შეკრულ (L) წირს შორის მოვძებნოთ უწყვეტად წარმოებადი ისეთი წირი, რომლის შიგნით მოქცეული ნაკვთის ფართობი უდიდესი იქნება.

აქ საჭიროა ვიპოვოთ წირი $x=x(t)$, $y=y(t)$, რომელიც მაქსიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_{(L)}(xy'-yx')\,dt. \tag{1.6}$$

და დააკმაყოფილებს პირობას

$$\int\limits_{(L)}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=l. \tag{1.7}$$

6. გეოდეზიური წირის ამოცანა. ვთქვათ მოცემულია ზედაპირი $f(x, y, z)=0$ და მისი ორი წერტილი $M_1=M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2=M_2(x_2, y_2, z_2)$. წერტილები M_1 და M_2 შევაერთოთ მოცემულ ზედაპირზე მდებარე ისეთი წირით $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, რომლის სიგრძე მინიმალური იქნება. პარამეტრი s აღნიშნავს M_1 წერტილიდან ათვლილ რკალის სიგრძეს.

საძიებელ წირს გეოდეზიური წირი ეწოდება.

პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც M_1 და M_2 წერტილებს შეესაბამებიან, აღვნიშნოთ შესაბამისად s_1-ით და s_2 ით. მოყვანილი ამოცანა მათემატიკურად ასე ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ $[s_1, s_2]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, რომლებიც მინიმუმს მიანიჭებენ ინტეგრალს

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,ds \tag{1.8}$$

და დააკმაყოფილებენ პირობებს:

$$f(x(s), y(s), z(s))=0,\ x'^2+y'^2+z'^2-1=0,\ x_1=x(s_1),$$

$$y_1=y(s_1),\ z_1=z(s_1),\ x_2=x(s_2),\ y_2=y(s_2),\ z_2=z(s_2).$$

ყველა ჩამოთვლილ ამოცანებში 1—6 საკითხი შეეხება წირთა გარკვეულ ოჯახში ისეთი წირის მოძებნას, რომელიც მინიმუმს ან მაქსიმუმს მიანიჭებს სათანადო განსაზღვრულ ინტეგრალს და დააკმაყოფილებს მოცემულ დამატებით პირობებს. ვარიაციათა აღრიცხვა შეისწავლის ამგვარი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდებს.

§ 2. **წრფივი სივრცე.** ვარიაციათა აღრიცხვის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შესწავლისათვის წინასწარ შევჩერდეთ ზოგადი მათემატიკური ანალიზის რამდენიმე ცნებაზე.

ნებისმიერ E სიმრავლეს წრფივი სივრცე ეწოდება, თუ მისი $x, y, z, \ldots$ ელემენტებისათვის განსაზღვრულია: 1) შეკრების ოპერაცია, 2) ოპერაცია რიცხვის გამრავლებისა ელემენტზე. ამასთან, ეს ოპერაციები ისეთი უნდა იყოს, რომ დაცული იყოს პირობები:

1. $x+y=y+x \in E$, $\forall x, y \in E$ ელემენტებისათვის.

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x, y, z \in E$ ელემენტებისათვის.

3. არსებობს ცალსახად განსაზღვრული ისეთი ელემენტი $\theta \in E$, რომელსაც E სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი ეწოდება, რომ $\theta+x=x$, $\forall x \in E$ ელემენტისათვის.

4. $\forall x \in E$ ელემენტისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული ისეთი $-x \in E$ ელემენტი, რომ $x+(-x)=\theta$.

5. $\forall \mu_1, \mu_2$ რიცხვებისათვის და $\forall x \in E$ ელემენტისათვის მართებულია ტოლობა: $(\mu_1\mu_2)x=\mu_1(\mu_2 x)$.

6. $\forall x \in E$ ელემენტისათვის $1 \cdot x=x$.

7. $\forall \mu_1, \mu_2$ რიცხვებისათვის და $\forall x \in E$ ელემენტისათვის

$$(\mu_1+\mu_2)x=\mu_1 x+\mu_2 x.$$

8. $\forall \mu$ რიცხვისათვის და $\forall x, y \in E$ ელემენტებისათვის

$$\mu(x+y)=\mu x+\mu y.$$

§ 3. წრფივი სივრცის მაგალითები 1. განვიხილოთ ე. წ. n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე E_n, რომლის ელემენტი x ეწოდება ნამდვილი რიცხვის დალაგებულ ერთობლიობას: $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები E_n სივრცეში განსაზღვრულია ასე:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=(\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_n+\eta_n), \\ \mu x&=(\mu\xi_1, \ldots, \mu\xi_n), \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$\forall x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \ldots \eta_n)$ ელემენტებისათვის და $\forall \mu$ რიცხვისათვის. ცხადია, (3.1) ტოლობებით განსაზღვრული ოპერაციები შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლებისა, დააკმაყოფილებს წინა პარაგრაფის 1—8 პირობებს; ნულოვანი ელემენტი $\theta=(0, \ldots, 0) \in E$. ხშირად ელემენტს $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ უწოდებენ n-განზომილებიან ვექტორს.

წრფივად დამოუკიდებელ სასრულ მიმდევრობას

$$\{e_i\}_{i=1}^{n} \in E_n, \quad e_i=(\gamma_i^1, \ldots, \gamma_i^n),$$

სადაც

$$\gamma_i^j=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

უწოდებენ E_n სივრცის ბაზისს.

2. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე $C[a, b]$. თუ $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ ფუნქციების ჯამს განვსაზღვრავთ ტოლობით: $y_1+y_2=y_1(x)+y_2(x)$, ხოლო μ რიცხვისა და $y=y(x)$ ელემენტის ნამრავლს ტოლობით: $\mu y=\mu y(x) \in C[a, b]$, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შესრულებული იქნება § 2-ის ყველა 1—8 პირობები. ამის გამო $C[a, b]$ წრფივი სივრცეა.

ისიც შევნიშნოთ, რომ $C[a, b]$ წარმოადგენს უსასრულო განზომილების წრფივ სივრცეს. მართლაც, ამ სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტების რაოდენობა უსასრულოა. მაგალითად, $C[a, b]$ სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელი უწყვეტი ფუნქციების უსასრულო მიმდევრობას წარმოადგენს ხარისხები: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ ხარისხების მოყვანილი უსასრულო მიმდევრობა არის $C[a, b]$ სივრცის ერთ-ერთი ბაზისი $[a, b]$ სეგმენტზე.

3. ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ყველა უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების სიმრავლე $C^{(1)}[a, b]$. ცხადია, $[a, b]$ სეგმენტზე ორი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციის ჯამი არის ამავე სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. გარდა ამისა, რიცხვისა და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციის ნამრავლი ისევ უწყვეტი ფუნქციაა. ამასთან, ორივე მოყვანილი ოპერაციისათვის დაცულია § 2-ის 1—8 პირობები. ამრიგად, სიმრავლე $C^{(1)}[a, b]$ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ მართებულია ჩართვა: $C^{(1)}[a, b] \subset C[a, b]$ წრფივ სივრცეთა სიმრავლე უსასრულოა.

§ 4. ნორმირებული წრფივი სივრცე. ნებისმიერ E სიმრავლეს ნ ო რ მ ი რ ე ბ უ ლ ი წ რ ფ ი ვ ი ს ი ვ რ ც ე ეწოდება, თუ იგი წრფივია და, თუ მის $\forall x \in E$ ელემენტს შესაძლოა შევუსაბამოთ ისეთი არაუარყოფითი რიცხვი $\|x\|$, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1′) $\forall x \in E$ ელემენტისათვის $\|x\| \geqslant 0$, სადაც $\|x\|=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $x=\theta \in E$.

2′) $\forall \mu$ რიცხვისათვის $\|\mu x\|=|\mu|\,\|x\|$.

3′) $\forall x, y \in E$ ელემენტებისათვის $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$.

არაუარყოფით რიცხვს $\|x\|$ ეწოდება x ე ლ ე მ ე ნ ტ ი ს ნ ო რ მ ა.

წრფივ სივრცეში ელემენტის ნორმის ცნება ხელსაყრელია მანძილის განსაზღვრისათვის. ჩვეულებრივ, $\forall x, y \in E$ ელემენტებს შორის მანძილს $\rho(x, y)$ უწოდებენ ნორმას:

$$\rho(x, y)=\|x-y\|.$$

ნორმის აქსიომებიდან 1′)—3′) გამომდინარეობს, რომ $\forall x, y, z \in E$ ელემენტებისათვის ორი ცვლადის ფუნქცია $\rho(x, y)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1″. $\rho(x, y) \geqslant 0$, ამასთან $\rho(x, y)=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$.

2″. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

$3''$. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

მანძილისა და ნორმის ცნებები ხშირად გამოიყენება მათემატიკური ანალიზის სხვადასხვა საკითხებში.

§ 5. **ნორმირებული წრფივი სივრცის მაგალითები.** 1. ადვილი სანახავია, რომ E_n, რომელშიც $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ელემენტის ნორმა განსაზღვრულია ტოლობით

$$\|x\| = \left[\sum_{j=1}^{n} \xi_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

წარმოადგენს ნორმირებულ წრფივ სივრცეს. ნორმისათვის სავალდებულო აქსიომები $1')$—$3')$, ცხადია, დაკმაყოფილებულია. მათ შორის აქსიომა $3')$ შედეგია უტოლობისა

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i+\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

სადაც $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n) \in E_n$ ნებისმიერი ელემენტებია.

რაც შეეხება მანძილს $\forall x, y \in E_n$ ელემენტებს შორის, იგი უნდა განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

რომელიც, ცხადია, აკმაყოფილებს § 4-ის $1''$—$3''$ პირობებს.

2. უწყვეტ ფუნქციათა წრფივ სივრცეში $x=x(t) \in C[a, b]$ ელემენტის ნორმა შემოღებულია ტოლობით:

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)| \tag{5.1}$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული ნორმა, ცხადია, დააკმაყოფილებს § 4-ის $1')$ და $2')$ აქსიომებს. დავრწმუნდეთ, რომ (5.1) ტოლობით განსაზღვრული ნორმა დააკმაყოფილებს $3')$ აქსიომასაც. მართლაც, ავიღოთ $\forall x(t), y(t) \in C[a, b]$ ელემენტები. გვექნება

$$|x(t)+y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)| = \|x\| + \|y\|.$$

აქედან მივიღებთ

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)+y(t)| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

ე. ი.

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

3. უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა წრფივ სივრცეში

$$x = x(t) \in C^{(1)}[a, b]$$

ელემენტის ნორმას ჩვეულებრივად ასე განსაზღვრავენ:

$$\| x \| = \sup (\| x \|, \| x' \|),$$

რომელიც, როგორც ადვილი შესამჩნევია, აკმაყოფილებს ნორმისათვის სავალდებულო ყველა აქსიომას.

§ 6. ბრტყელი წირების მახლობლობა. ვთქვათ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ სიბრტყეზე მდებარე მოცემული წერტილებია. შევაერთოთ ეს წერტილები ერთმანეთთან წირებით $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$. თუ $\forall x \in [x_1, x_2]$ წერტილისათვის და რაიმე რიცხვისათვის $\varepsilon > 0$ შესრულებულია უტოლობა

$$| y(x) - \overline{y}(x) | < \varepsilon, \tag{6.1}$$

მაშინ ვიტყვით, რომ წირები $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$ ერთმანეთთან იმყოფებიან ნ უ ლ ი რ ი გ ი ს ε მ ა ხ ლ ო ბ ლ ო ბ ა შ ი. თუკი ფუნქციებს $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$ სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ სასრული წარმოებულები გააჩნიათ და, გარდა პირობისა (6.1), შესრულებულია აგრეთვე უტოლობა

$$| y'(x) - \overline{y}'(x) | < \varepsilon, \tag{6.2}$$

მაშინ ვიტყვით, რომ წირები $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$ ერთმანეთთან იმყოფება პ ი რ ვ ე ლ ი რ ი გ ი ს ε მ ა ხ ლ ო ბ ლ ო ბ ა შ ი. გეომეტრიულად (6.1) და (6.2) პირობები იმას ნიშნავს, რომ, გარდა $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$ წირების ორდინატების ε მახლობლობისა $\forall x \in [x_1, x_2]$ წერტილში, ერთმანეთთან ε მახლობლობაშია ამ წირების მხები წრფეებიც, რომლებიც გავლებულია შესაბამის (x, y) და $(x, \overline{y})$ წერტილებში.

საზოგადოდ, როცა $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$ ფუნქციებს სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ აქვთ სასრული წარმოებულები k რიგამდე ჩათვლით და ერთობლივ შესრულებულია პირობები:

$$| y(x) - \overline{y}(x) | < \varepsilon,$$
$$| y'(x) - \overline{y}'(x) | < \varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$| y^{(k)}(x) - \overline{y}^{(k)}(x) | < \varepsilon,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ ფუნქციები (წირები) $y = y(x)$ და $\overline{y} = \overline{y}(x)$ ერთმანეთთან k რ ი გ ი ს ε მ ა ხ ლ ო ბ ლ ო ბ ა შ ი ა, ცხადია, როცა ორი წირი, k რიგის ε მახლობლობაშია, მაშინ ისინი ერთმანეთთან k რიცხვზე ნაკლები რიგის ε მახლობლობაშიც იქნებიან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. წირები $y = \varepsilon \sin \dfrac{x}{\varepsilon}$ და $\overline{y} = 0$ (ე. ი. Ox ღერძი) ერთ-

მანეთთან ნული რიგის ε მახლობლობაშია, როცა $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\varepsilon\right[$.

მართლაც, გვაქვს

$$|y-\overline{y}|=\left|\varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} - 0\right| < \varepsilon.$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $y'=\cos \frac{x}{\varepsilon}$, ამიტომ არ იქნება შესრულებული პირობა (6.2). ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული წირები ერთმანეთთან არ არის პირველი რიგის ε მახლობლობაში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. წირები $y=\varepsilon \sin x$ და $\overline{y}=0$ (ე. ი. Ox ღერძი) ერთმანეთთან ნებისმიერი რიგის ε მახლობლობაშია, როცა $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

მართლაც, ამ წირებისათვის ერთობლივ შესრულებულია პირობები:

$|y-\overline{y}|=\varepsilon \sin x| < \varepsilon$, $|y'-\overline{y}'|=|\varepsilon \cos x| < \varepsilon$, $|y''-\overline{y}''|=|\varepsilon \sin x| < \varepsilon$ და ა. შ.

§ 7. **ფუნქციონალი.** ვთქვათ M წარმოადგენს სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია ფუნქციები $y=y(x) \in M$. გარდა ამისა, ვთქვათ მოცემულია რაიმე წესი, რომლის მიხედვით M სიმრავლის ყოველ $y=y(x)$ ელემენტს შეესაბამება გარკვეული რიცხვი $J[y]$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ M სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფ უ ნ ქ ც ი ო ნ ა ლ ი. რიცხვი $J[y]$ იცვლება როცა y ელემენტი იცვლება M სიმრავლეზე. M სიმრავლეს ეწოდება $J[y]$ ფუნქციონალის განსაზღვრის არე, ხოლო ფუნქციას $y=y(x)$ ეწოდება $J[y]$ ფუნქციონალის არგუმენტი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ M არის სიმრავლე ყველა ერთ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციებისა $y=y(x) \in M$. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა ამ $y(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეების თანაკვეთა ω არ არის ცარიელი სიმრავლე. ავიღოთ ერთ-ერთი წერტილი $x_0 \in \omega$. მაშინ $J[y]=y(x_0)$ წარმოადგენს M სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციონალს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ზემოთ § 1-ში მოყვანილი ინტეგრალი (1.1) წარმოადგენს ფუნქციონალს, რომლის განსაზღვრის არეა $A=A(x_1, y_1)$ და $B=B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი ყველა უწყვეტად წარმოებადი წირების სიმრავლე.

§ 1-ში მოყვანილი ინტეგრალები (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) აგრეთვე ფუნქციონალების მაგალითებია.

შევნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილ მაგალითებში ფუნქციონალები დამოკიდებულია ერთ არგუმენტზე. ვარიაციათა აღრიცხვაში შეისწავლება ისეთი ფუნქციონალებიც, რომლებიც დამოკიდებული არიან მრავალ არგუმენტზე. ასე მაგალითად, გეოდეზიური წირის ამოცანაში (იხ. § 1) ინტეგრალი (1.8) წარმოადგენს სამ არგუმენტზე დამოკიდებულ ფუნქციონალს.

§ 8. **ფუნქციონალის ექსტრემუმის (მაქსიმუმისა და მინიმუმის) სახესხვაობანი.** შევისწავლოთ $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემუმის სახესხვაობანი. ვთქვათ $\overline{y}=\overline{y}(x)$ არის ერთ-ერთი ფუნქცია, რომელზედაც შესაძლოა $J[y]$ ფუნქციონალს ჰქონდეს ექსტრემუმი, იმის დასადასტურებლად, რომ $\overline{y}=\overline{y}(x)$ არის სწორედ ის ფუნქცია (ანუ წირი), რომელზედაც ფუნქციონალი $J(y)$ მიაღწევს მინიმუმს, საჭიროა $J[\overline{y}]$ შევადაროთ $J[y]$ ფუნქციონალის მნიშვნელობებს $\overline{y}=\overline{y}(x)$ წირის მახლობელ წირებზე, რომლებსაც შესადარებელი წირები ანუ დასაშვები წირები ეწოდება. შესადარებელ წირთა სიმრავლე აღვნიშნოთ Ω-თი, თუ წირზე $\overline{y}=\overline{y}(x)$ ფუნქციონალი $J[y]$ მიაღწევს მინიმუმს, მაშინ

$$\Delta J[y]=J[y]-J[\overline{y}]\geqslant 0, \tag{8.1}$$

სადაც $y=y(x)$ არის Ω სიმრავლის ნებისმიერი წირი.

ამასთან, თუ $\Delta J[y]=0$ მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y(x)=\overline{y}(x)$, მაშინ ვიტყვით: ფუნქციონალი $J[y]$ წირზე აღწევს მკაცრ მინიმუმს. იმ შემთხვევაში, როცა $y^*=y^*(x)\in\Omega$ და წირზე ფუნქციონალი $J[y]$ მიაღწევს მაქსიმუმს, მაშინ

$$\overline{\Delta} J[y]=J[y]-J[y^*]\leqslant 0, \tag{8.2}$$

სადაც $y=y(x)\in\Omega$ არის ნებისმიერი წირი. ამასთან, თუ $\overline{\Delta}J[y]=0$ მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y(x)=y^*(x)$, ვამბობთ: ფუნქციონალი $J[y]$ წირზე $y=y^*$ აღწევს მკაცრ მაქსიმუმს.

გავეცნოთ ფუნქციონალის ეგრეთწოდებული ძლიერი და სუსტი ექსტრემუმის განსაზღვრებს.

თუ Ω სიმრავლე შედგება ნული რიგის ε მახლობლობაში მყოფი წირებისაგან, მაშინ $J[y]$ ფუნქციონალის მინიმუმს $J[\overline{y}]$ ძლიერი მინიმუმი ეწოდება, ხოლო მაქსიმუმს $J[y^*]$ ძლიერი მაქსიმუმი.

თუ Ω არის პირველი რიგის ε მახლობლობაში მყოფი წირების სიმრავლე, მაშინ $J[y]$ ფუნქციონალის მინიმუმს $J[\overline{y}]$ სუსტი მინიმუმი ეწოდება, ხოლო მაქსიმუმს $J[y^*]$ — სუსტი მაქსიმუმი.

ცხადია, ფუნქციონალის ძლიერი ექსტრემუმი მისი სუსტი ექსტრემუმიც იქნება.

ფუნქციონალის ექსტრემუმს, მისი განსაზღვრის მთელ არეზე (და არა უსათუოდ რაიმე რიგის ε მახლობლობაში მყოფი წირების სიმრავლეზე), აბსოლუტური ექსტრემუმი ეწოდება.

მაგალითი. წრფივ ნორმირებულ $C^{(1)}[0, \pi]$ სივრცის წირებს შორის მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს $y(0)=y[\pi]=0$ და მინიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს

$$J[y]=\int_0^{\pi}(1-y'^2)\,y^2\,dx. \tag{8.3}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევნიშნოთ, რომ, რაკი ყველა იმ შესადარებელ წირს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს $|y(x)|<\varepsilon$, $|y'(x)|<\varepsilon$, $\varepsilon<1$, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დადებითია $[0, \pi]$ სეგმენტზე და ნულის ტოლია მხოლოდ წირზე $y(x)=0$, ამიტომ 0-სა და π რიცხვებს შორის მდებარე მონაკვეთი Ox ღერძისა $J[y]$ ფუნქციონალს მიანიჭებს სუსტ მინიმუმს.

ადვილი სანახავია, რომ $C^{(1)}[0, \pi]$ სივრცეში იგივე ფუნქციონალი არც ერთ შესადარებელ წირზე, რომელიც აკმაყოფილებს მხოლოდ პირობებს $|y(x)|<\varepsilon$, $\varepsilon<1$, ვერ მიაღწევს მინიმუმს. მართლაც, ავიღოთ, მაგალითად, შესადარებელი წირები

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx, \quad n=1, 2, \ldots$$

მაშინ, ერთი მხრივ, გვექნება

$$J[y_n]=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\right)$$

და, მაშასადამე, უარყოფითია როცა $n>4$. მეორე მხრივ, აღებული შესადარებელი წირები $[0, \pi]$ სეგმენტზე, საკმარისად დიდი n რიცხვისათვის, ნული რიგის ε მახლობლობაში არიან Ox ღერძთან.

ამრიგად, ფუნქციონალს (8.3) აქვს სუსტი მინიმუმი, რომელსაც იგი მიაღწევს $C^{(1)}[0, \pi]$ სივრცის ელემენტზე $y=0$, მაგრამ ამავე სივრცეში არა აქვს ძლიერი მინიმუმი.

§ 9. ზოგიერთი განსაზღვრა. ვთქვათ $C^{(k)}[x_1, x_2]$ აღნიშნავს ყველა $y=y(x)$ ფუნქციების (ელემენტების) სიმრავლეს, რომლებსაც $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე აქვთ ყველა წარმოებული k რიგამდე ჩათვლით. ვთქვათ, გარდა ამისა, ფუნქციონალი $J[y]$ განსაზღვრულია $C^{(k)}[x_1, x_2]$ სიმრავლეზე.

ვიტყვით, რომ ფუნქციონალი $J[y]$ უწყვეტია $C^{(k)}[x_1, x_2]$ სიმრავლის $y_0=y_0(x)$ ელემენტზე, თუ ნებისმიერი რიცხვისათვის $\varepsilon>0$ მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\delta>0$, რომ

$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon,$$

როცა

$$|y^{(s)}(x)-y_0^{(s)}|<\delta, \quad s=0, 1, \ldots, k,$$

სადაც $y=y(x)\in C^{(k)}[x_1, x_2]$ არის $y_0=y_0(x)$ ელემენტის k რიგის δ მახლობლობაში ნებისმიერი ელემენტი[1].

---

[1] იგულისხმება, რომ $y^{(0)}(x)=y(x)$.

ახლა ვთქვათ E ნებისმიერი წრფივი სივრცეა.

ფუნქციონალს $J[y]$ ეწოდება წრფივი ფუნქციონალი, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $J[cy]=cJ[y]$

სადაც c მუდმივია, ხოლო y არის E სივრცის ნებისმიერი ელემენტი.

ბ) $J[y_1+y_2]=J[y_1]+J[y_2]$,

სადაც y_1 და y_2 არის E სივრცის ნებისმიერი ელემენტები.

გავეცნოთ ფუნქციონალის ვარიაციის განსაზღვრას.

ვიგულისხმოთ, რომ $y=y(x)$ არის უწყვეტი ფუნქციების წრფივი ნორმირებული $C[x_1, x_2]$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი და

$$\delta y=\delta y(x)\in C[x_1, x_2],\ \delta y\neq 0,$$

წარმოადგენს $y=y(x)$ ელემენტის რაიმე ნაზრდს. სხვაობას

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]. \tag{9.1}$$

ეწოდება $J[y]$ ფუნქციონალის ნაზრდი. დავუშვათ, რომ ფუნქციონალის ნაზრდი ΔJ შესაძლოა წარმოვადგინოთ ორი ფუნქციონალის ჯამის სახით:

$$\Delta J=dJ[y;\ \delta y]+\|\delta y\|\,\omega(y;\ \delta y), \tag{9.2}$$

რომელშიც $dJ[y;\ \delta y]$ წარმოადგენს წრფივ ფუნქციონალს δy ნაზრდის მიმართ, ხოლო ფუნქციონალი $\omega(y;\ \delta y)\to 0$, როცა $\|\delta y\|\to 0$.

ფუნქციონალს $dJ[y;\ \delta y]$ უწოდებენ $J[y]$ ფუნქციონალის პირველ ვარიაციას და აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\delta J[y]=dJ[y;\ \delta y]$.

როგორც ვხედავთ, $J(y)$ ფუნქციონალის ვარიაცია $\delta J[y]$ წარმოადგენს ამ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდის მთავარ ნაწილს, წრფივად დამოკიდებულს არგუმენტის δy ნაზრდზე.

§ 10. ფუნქციონალის პირველი ვარიაციის სხვაგვარი განსაზღვრა. ვთქვათ α სკალარული პარამეტრია. გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნები და დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. როცა არსებობს $J[y]$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია, როგორც ამ ფუნქციონალის ნაზრდის მთავარი ნაწილი, მაშინ არსებობს $J[y+\alpha\delta y]$ ფუნქციონალის ნაწილობითი წარმოებული α პარამეტრით და მართებულია ტოლობა:

$$\delta J[y]=\left.\frac{\partial J[y+\alpha\delta y]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

მართლაც, მივცეთ y არგუმენტს ნაზრდი $\alpha\delta y$. იმის გამო, რომ არსებობს ფუნქციონალის ვარიაცია, როგორც მისი ნაზრდის მთავარი ნაწილი, ამიტომ, ერთი მხრივ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta J = J[y+\alpha\delta y] - J[y] = dJ[y;\ \alpha\delta y] + |\alpha|\,\|\delta y\|\,\omega(y;\ \alpha\delta y),$$

სადაც $dJ[y;\ \alpha\delta y]$ წრფივი ფუნქციონალია $\alpha\delta y$ ნაზრდის მიმართ, ხოლო $\omega(y;\ \alpha\delta y)\to 0$, როცა

$$\|\alpha\delta y\| = |\alpha|\,\|\delta y\| \to 0.$$

მეორე მხრივ, რადგან

$$dJ[y;\ \alpha\delta y] = \alpha dJ[y;\ \delta y],$$

ამიტომ გვექნება

$$\left.\frac{\partial J[y+\alpha\delta y]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{dJ[y;\ \alpha\delta y] + \|\alpha\delta y\|\,\omega(y;\ \alpha\delta y)}{\alpha} =$$

$$= dJ[y;\ \delta y] + \|\delta y\|\operatorname{sign}\alpha\lim_{\alpha\to 0}\omega(y;\ \alpha\delta y) = dJ[y;\ \delta y].$$

ამრიგად, როცა არსებობს $J[y]$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია $\delta J[y]$, როგორც მისი ნაზრდის მთავარი ნაწილი, მაშინ არსებობს და იმავე $\delta J[y]$-ის ტოლია $J[y]$ ფუნქციონალის ვარიაცია, როგორც α პარამეტრზე დამოკიდებული $J[y+\alpha\delta y]$ ფუნქციონალის წარმოებული α პარამეტრით როცა $\alpha=0$.

ახლა შეგვიძლია გავეცნოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმის (მინიმუმის და მიქსიმუმის) აუცილებელ პირობას.

თეორემა. ვთქვათ შესრულებულია პირობები:

1. ფუნქციონალი $J[y]$ განსაზღვრულია შესადარებელ წირთა Ω სიმრავლეზე.

2. $J[y]$ ფუნქციონალი ელემენტზე $y=y_0(x)$ აღწევს ექსტრემუმს.

3. ფუნქციონალს $J[y]$ აქვს პირველი ვარიაცია Ω სიმრავლეზე. მაშინ,

$$\delta J[y_0] = dJ[y_0;\ \delta y] = 0.$$

დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ ფიქსირებული ელემენტისათვის $y=y_0(x)$ და ფიქსირებული δy ნაზრდისათვის ფუნქციონალი $J[y_0(x)+$ $+\alpha\delta y]$ წარმოადგენს ერთი α ცვლადის ნამდვილ ფუნქციას

$$\varphi(\alpha) = J[y_0(x)+\alpha\delta y],$$

რომელიც, თანახმად თეორემის 2) პირობისა, აღწევს ექსტრემუმს (მინიმუმს ან მაქსიმუმს) როცა $\alpha=0$. მაგრამ მაშინ, როგორც ცნობილია დიფერენციალური აღრიცხვიდან, მართებულია ტოლობა:

$$\varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial a}J[y_0(x)+\alpha\delta y]\,|_{\alpha=0} = \delta J[y_0] = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 11. **ექსტრემუმის სხვაგვარი აუცილებელი პირობა.** ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა სხვანაირადაც შეიძლება გამოვიყვანოთ. სახელდობრ, მართებულია.

თეორემა. ვთქვათ $y=y(x, \alpha)$ არის დასაშვები წირების ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ისეთი ოჯახი, რომ $y(x, 0)=y_0(x)$, $y(x, 1)=y_0(x)+\delta y$, სადაც $y_0(x)=y_0$ წარმოადგენს $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალს. მაშინ $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემუმისათვის აუცილებელია პირობა:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x, \alpha)]\Big|_{\alpha=0}=0. \tag{11.1}$$

მართლაც, მოცემულ პირობებში $J[y(x, \alpha)]$ წარმოადგენს α პარამეტრზე დამოკიდებულ ფუნქციონალს, რომელიც თანახმად წირთა $y=y(x, \alpha)$ ოჯახის განსაზღვრისა, ექსტრემუმს აღწევს როცა $\alpha=0$. ანალიზურად ეს იმას ნიშნავს, რომ შესრულებულია ტოლობა (11.1).

§ 12. **ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემა.** თუ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის

$$\eta=\eta(x), \ \eta(x_1)=\eta(x_2)=0,$$

შესრულებულია ტოლობა

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)\,dx=0, \tag{12.1}$$

სადაც $M(x)$ არის $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ მთელ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე $M\equiv 0$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ თეორემის პირობები შესრულებულია, მაგრამ არსებობს ისეთი წერტილი $x^* \in [x_1, x_2]$, რომელშიც $M(x^*)\neq 0$. მაშინ $M(x)$ ფუნქცია x^* წერტილის რაიმე მიდამოში $[x_1^* \leqslant x \leqslant x_2^*]$ ნიშანს ინარჩუნებს. შევარჩიოთ უწყვეტი ფუნქცია $\eta(x)$ ისე, რომ $[x_1^*, x_2^*]$ სეგმენტზე მუდმივ ნიშანს ინარჩუნებდეს, ხოლო $[x_1, x_2]\setminus[x_1^*, x_2^*]$ სიმრავლეზე ნულის ტოლი იყოს (იხ. ნახაზი 11).

ამ პირობებში ფუნქცია $M(x)\eta(x)$ ნულის ტოლია $[x_1^*, x_2^*]$ სეგმენტის გარეთ და ამ სეგმენტზე კი მუდმივ ნიშანს ინარჩუნებს. ამის გამო გვექნება

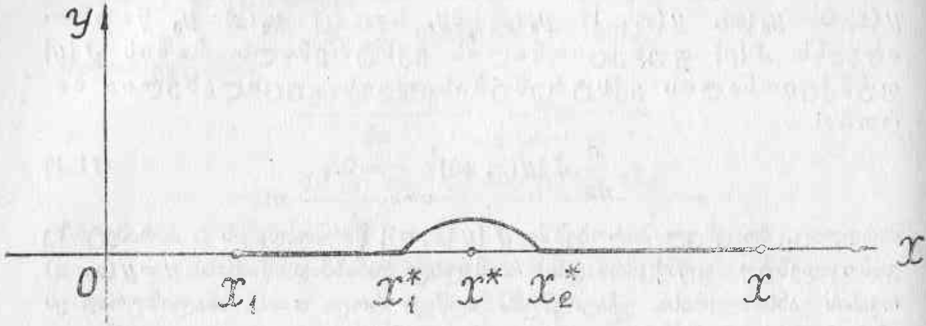
$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)\,dx=\int_{x_1^*}^{x_2^*} M(x)\eta(x)\,dx \neq 0$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (12.1) პირობას. ლემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული ლემა ძალაშია მაშინაც, როცა ფუნქცია $\eta(x)$ არის $C^{(k)}[x_1, x_2]$ სივრცის ისეთი ელემენტი, რომელიც, ყველა მის წარმოებუ-

ლებთან ერთად $k-1$ რიგამდე ჩათვლით, ნულის ტოლია სეგმენტის ბოლო წერტილებზე.

იმ შემთხვევაში, როცა M არის მრავალი ცვლადის ფუნქცია, ლემა სიტყვასიტყვით ისევე ჩამოყალიბდება და დამტკიცდება, როგორც ერთი



ნახ. 11.

ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში. მაგალითად, ორი ცვლადის ფუნქციისათვის იგი შემდეგნაირად შეიძლება გამოვთქვათ: *თუ რაიმე D არეში უწყვეტი ფუნქციისათვის $M=M(x, y)$ მართებულია ტოლობა*

$$\iint\limits_{(D)} M(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy \equiv 0, \tag{12.2}$$

სადაც $\eta(x, y)$ არის უწყვეტად წარმოებადი ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც (D) არის საზღვარზე ნულის ტოლია, მაშინ (D) არეზე $M(x, y)\equiv 0$.

§ 13. ეილერის განტოლება. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ფუნქციონალი

$$J[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,\ y(x),\ y'(x))dx, \tag{13.1}$$

სადაც $F=F(x,\ y(x)\ y'(x))$ წარმოადგენს თავისი სამივე არგუმენტის მოცემულ ფუნქციას, რომელსაც გარკვეულ არეში აქვს ნაწილობითი უწყვეტი წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$ და (x_1, y_1), (x_2, y_2) სიბრტყის მოცემული წერტილებია.

ცხადია, § 1-ში მოყვანილი ინტეგრალები (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) წარმოადგენენ (13.1) ფუნქციონალის კერძო სახეს.

ზემოთ დამტკიცებული იყო (იხ. § 10), რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმისათვის აუცილებელია მისი ვარიაცია იყოს ნულის ტოლი. შევისწავლოთ რა სახე აქვს (13.1) ფუნქციონალისათვის ექსტრემუმის აუცი-

ლებელ პირობას. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ შესადარებელ წირთა სიმრავლე Ω შედგება $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი წირებისაგან. დავუშვათ, რომ (13.1) ფუნქციონალი შესადარებელ წირთა Ω სიმრავლის წირზე $y=y(x)$ აღწევს ექსტრემუმს. ავიღოთ ამ წირის მახლობლობაში Ω სიმრავლის სხვა შესადარებელი წირი $\widetilde{y}=\widetilde{y}(x)$ და ავაგოთ α პარამეტრზე დამოკიდებული წირთა შემდეგი ოჯახი:

$$y(x, \alpha)=y(x)+\alpha(\widetilde{y}(x)-y(x))=y(x)+\alpha\delta y, \tag{13.2}$$

სადაც, როგორც ვიცით, $\delta y=\widetilde{y}(x)-y(x)$ არის $y(x)$ ფუნქციის ვარიაცია და წარმოადგენს x ცვლადის ფუნქციას. ამასთან, როცა $\alpha=0$, მაშინ $y(x, 0)=y(x)$, ხოლო როცა $\alpha=1$, მაშინ $y(x, 1)=\widetilde{y}(x)$. ვიგულისხმოთ, რომ Ω სიმრავლის ელემენტები $C^{(1)}[x_1, x_2]$ სივრცის ფუნქციებია, მაშინ

$$(\delta y)'=\widetilde{y}'(x)-y'(x)=\delta y'.$$

ფუნქციონალი (13.1), განხილული (13.2) ოჯახის წირებზე, წარმოადგენს α პარამეტრის ფუნქციას:

$$J[y(x, \alpha)]=\int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)]dx \tag{13.3}$$

და რაკი $\alpha=0$ მნიშვნელობისათვის, თანახმად პირობისა, იგი ექსტრემალურ მნიშვნელობას აღწევს, ამიტომ

$$J'_\alpha[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0}=\delta J[y]=0. \tag{13.4}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$J'_\alpha[y,(x, \alpha]=\int_{x_1}^{x_2}[F_y(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha))\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x, \alpha)+$$

$$+F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha))\frac{\partial}{\partial\alpha}y'_x(x, \alpha)]\,dx,$$

სადაც

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x, \alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}[y(x)+\alpha\delta y]=\delta y,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y'_x(x, \alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}[y'(x)+\alpha\delta y']=\delta y',$$

მაშასადამე, (13.4) ტოლობიდან მივიღებთ

$$J'_\alpha[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}[F_y(x, y(x), y'(x))\delta y+$$

$$+F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y']\,dx, \tag{13.5}$$

გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ჯამის მეორე შესაკრების ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. გვექნება

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y'\,dx = \int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\,\delta y'\,dx =$$

$$= [F_{y'}\,\delta y]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} F_{y'}\,\delta y\,dx.$$

ვინაიდან წირები $y = y(x)$ და $\vec{y} = \vec{y}(x)$ გადიან მოცემულ $(x_1,\ y_1)$ და $(x_2,\ y_2)$ წერტილებზე, ამიტომ

$$\delta y\,|_{x=x_1} = \tilde{y}(x_1) - y(x_1) = 0,\ \delta y\,|_{x=x_2} = \tilde{y}(x_2) - y(x_2) = 0$$

და

$$[F_{y'}\,\delta y]_{x_1}^{x_2} = 0.$$

ამის შემდეგ, (13.5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$J'_\alpha\,[y(x,\ \alpha)]\,|_{\alpha=0} = \delta J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y\,dx. \qquad (13.6)$$

უკანასკნელ ტოლობაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულება არის x ცვლადზე დამოკიდებული ორი ფუნქციის ნამრავლი. პირველი თანამამრავლი $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ არის მოცემული უწყვეტი ფუნქცია $y = y(x)$ წირზე. რაც შეეხება მეორე თანამამრავლს $\delta y = \tilde{y}(x) - y(x)$, ვინაიდან $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ ნებისმიერი შესადარებელი წირია Ω სიმრავლიდან, წარმოადგენს $[x_1,\ x_2]$ სეგმენტზე ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას და თანაც

$$\delta y\,|_{x=x_1} = \delta y\,|_{x=x_2} = 0.$$

როგორც ვხედავთ, მამრავლები $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ და δy აკმაყოფილებენ ძირითადი ლემის (იხ. § 12) პირობებს და, მაშასადამე, მართებულია ტოლობა

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \qquad (13.7)$$

ამ განტოლებას **ეილერის დიფერენციალური განტოლება** ეწოდება. იგი (13.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობაა. (13.6) განტოლების ინტეგრალებს ეწოდება (13.1) **ფუნქციონალის ექსტრემალები**. ექსტრემალთა შორის უნდა ვეძებოთ წირი $y = y(x)$, რომელიც ფაქტიურად განახორციელებს (13.1) ფუნქციონალის

ექსტრემუმს. ხშირად, იმ წირს $y=y(x)$, რომელზედაც ფუნქციონალი $J[y]$ მიაღწევს ექსტრემუმს, უწოდებენ ამ ფუნქციონალის ექსტრემალს.

ისიც შევნიშნოთ, რომ (13.6) არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება და მისი ინტეგრალების ოჯახი დამოკიდებული იქნება ორ ნებისმიერ მუდმივზე. ეს მუდმივები უნდა გამოვთვალოთ მოცემული სასაზღვრო პირობებით: $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$. ამის შემდეგ მივიღებთ (13.1) ფუნქციონალის იმ ექსტრემალებს, რომლებიც წარმოადგენენ (13.7) განტოლების ინტეგრალებს და აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს. სწორედ ამ ექსტრემალთა შორის შესაძლოა წირის (ექსტრემალის) არსებობა, რომელზედაც (13.1) ფუნქციონალი მიაღწევს ექსტრემუმს (მინიმუმს ან მაქსიმუმს).

§ 14. მაგალითები: 1) მოვძებნოთ შემდეგი ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(y^2+y'^2-2y\sin x)\,dx$$

ექსტრემალები.

ვინაიდან $F(x,\ y,\ y')=y^2+y'^2-2y\sin x$, ამიტომ

$$F_y=2y-2\sin x,\ F_{y'}=2y',\ \frac{d}{dx}F_{y'}=2y''.$$

ეილერის განტოლებას ექნება სახე

$$y''-y=-\sin x,$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალი

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$$

წარმოადგენს ექსტრემალთა ოჯახის განტოლებას, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

2) რომელია ის წირი, რომელზედაც შესაძლოა ფუნქციონალმა

$$J(y)=\int_0^1(y'^2+12xy)\,dx,\quad y(0)=0.\ y(1)=1,$$

მიაღწიოს ექსტრემუმს.

შევადგინოთ ეილერის დიფერენციალური განტოლება, გვექნება

$$y''=6x,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ $y=x^3+C_1x+C_2$. რადგან ექსტრემალებმა უნდა გაიარონ (0, 0) და (1, 1) წერტილებზე, ამიტომ $C_1=C_2=0$. მაშასადამე, წირი რომელზედაც შესაძლოა მოცემულმა ფუნქციონალმა ექსტრემუმს მიაღწიოს, არის კუბიკური პარაბოლი $y=x^3$.

3) მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$\int_{-1}^{1} x^2 y'^2\,dx$$

ექსტრემალები.

აქ $F=x^2y'^2$, $F_y=0$, $F_{y'}=2x^2y'$. ეილერის განტოლება იქნება

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{d}{dx}\,(2x^2y')=0,$$

საიდანაც $x^2y'=\mathrm{const}$ და, მაშასადამე, $y=\frac{C_1}{x}+C_2$ სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. თუ გამოვიყენებთ მოცემულ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ $C_1=1$, $C_2=0$. ამრიგად, $y=\frac{1}{x}$. როგორც ვხედავთ, მოცემულ ფუნქციონალს სეგმენტზე $[-1, 1]$ არ გააჩნია უწყვეტი ექსტრემალები.

§ 15. შემთხვევა, როცა ფუნქცია F არ შეიცავს წარმოებულს y'. ამ შემთხვევაში $F_{y'}=0$ და ეილერის განტოლებიდან მივიღებთ:

$$F_y(x, y(x))=0. \tag{15.1}$$

ეს ტოლობა არ წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას. იგი უბრალოდ გვაძლევს არაცხად ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას x და y ცვლადებს შორის. (15.1) განტოლების ამონახსნი $y=y(x)$ ფუნქციის მიმართ არ შეიცავს ნებისმიერ მუდმივებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ წირი შემთხვევით არ გადის მოცემულ წერტილებზე $A=A(x_1, y_1)$, $B=B(x_2, y_2)$ ჩვენ არავითარი შესაძლებლობა არ გვექნება დავაკმაყოფილოთ სასაზღვრო პირობები. სხვანაირად, ვარიაციულ ამოცანას არ აქვს ამოხსნა, გარდა გამონაკლისისა, როცა $F_y(x, y)=0$ განტოლებით განსაზღვრული წირი შემთხვევით გადის A და B წერტილებზე, რომელზედაც შესაძლოა ფუნქციონალმა მიაღწიოს ექსტრემუმს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx \tag{15.2}$$

ექსტრემალები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ პირობებს: $y(x_1)=y(x_2)=0$. ამ ამოცანაში ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y=0$.

აქ ექსტრემალთა ოჯახი ერთადერთი უწყვეტი წირისაგან შედგება: $y=0$, რომელიც სასაზღვრო პირობებსაც აკმაყოფილებს: იგი Ox ღერძის მონაკვეთია, რომელიც ამ ღერძის x_1 და x_2 წერტილებს აერთებს. ადვილად

დავრწმუნდებით, რომ (15.2) ფუნქციონალის ექსტრემალი არის სწორედ მონაკვეთი x_1, x_2, რომელიც ფუნქციონალს მიანიჭებს მინიმუმს. მართლაც, $J[y] \geqslant 0$ და $J[y]=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $y=0$.

§ 16. შემთხვევა, როცა F ცხადად არ შეიცავს x ცვლადს. ამ შემთხვევაში ეილერის განტოლება ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$F_y - F_{y'y}\, y' - F_{y'y'}\, y'' = 0.$$

უკანასკნელი განტოლება, როცა $y' \neq 0$, ეკვივალენტურია შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$F - y' F_{y'} = C, \tag{16.1}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. როგორც ვხედავთ, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ცხადი სახით არ შეიცავს x ცვლადს, მაშინ ეილერის განტოლების ინტეგრება მიიყვანება პირველი რიგის (16.1) სახის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავუბრუნდეთ ბრუნვის სხეულის ზედაპირის მინიმუმის ამოცანას (იხ. § 1, მაგალითი 4). საკითხი შეეხება მოცემული $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების ისეთი წირით შეერთებას, რომლის ბრუნვით, $0x$ ღერძის გარშემო, წარმოქმნილი სხეულის ზედაპირი იქნება მინიმალური. ამოცანა, როგორც ვიცით, მიიყვანება ფუნქციონალის

$$S[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{16.2}$$

მინიმუმის მოძებნამდე. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F = y\sqrt{1+y'^2}$ არ არის ცხადად დამოკიდებული x ცვლადზე. დასმული ამოცანისათვის განტოლებას (16.1) ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებისათვის ხელსაყრელია მივმართოთ ცვლადის გარდაქმნას: $y' = \operatorname{sh} t$; მაშინ, წინა განტოლებიდან მივიღებთ $y = C_1 \operatorname{ch} t$. გარდა ამისა, გვექნება $dx = \frac{dy}{y}$, საიდანაც $x = C_1 t + C_2$. აქ C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ამის შემდეგ ექსტრემალთა ოჯახის განტოლება პარამეტრული სახით ასე ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 t + C_2, \\ y &= C_1 \operatorname{ch} t. \end{aligned}\right\}$$

პარამეტრის გამორიცხვის შემდეგ, მივიღებთ ჯაჭვწირების ოჯახს:

$$y=C_1\frac{e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}}{2}=e_1\, ch\frac{x-C_2}{C_1}. \tag{16.3}$$

მუდმივები C_1 და C_2 უნდა გამოვთვალოთ სასაზღვრო პირობებიდან. ჯაჭვწირის ბრუნვით წარმოქმნილი სხეულის ზედაპირს კატენოიდი ეწოდება.

განტოლება (16.3) ჯერჯერობით გვაძლევს ამოცანის მხოლოდ ფორმალურ გადაწყვეტას, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ რომელიმე წირი მინიმუმს მიანიჭებს (16.2) ფუნქციონალს, იგი უსათუოდ (16.3) ოჯახში შემავალი ჯაჭვწირი იქნება.

სხვათაშორის, დასმულ ამოცანას ყოველთვის არა აქვს ცალსახა ამოხსნა. A და B წერტილების მდებარეობის მიხედვით მას შეიძლება ჰქონდეს ორი ან ერთი ამოხსნა, ანდა შეიძლება არ ჰქონდეს არც ერთი ამონახსნი. ამ საკითხს გავარკვევთ იმის შემდეგ, როცა გავეცნობით ექსტრემუმის საკმარის პირობებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ ბრახისტოქრონის ამოცანა (იხ. § 1, ამოცანა 2), რომელშიც გამოთვლების გაადვილებისათვის ვიგულისხმოთ, რომ მატერიალური წერტილი M მოძრაობას იწყებს კოორდინატთა სათავიდან, ე. ი. $x_1=y_1=0$. გარდა ამისა ჩავთვალოთ, რომ საწყისი სიჩქარე $v_0=0$. ამ პირობებში ამოცანა მიიყვანება შემდეგი ფუნქციონალის

$$T[y]=\int\limits_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

მინიმუმის მოძებნამდე. აქაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ არ შეიცავს ცხადი სახით x ცვლადს. განტოლება (16.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$C_1=\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}=1$$

ანუ

$$y(1+y'^2)=2a$$

სადაც $2a=C_1^{-2}$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$dx=\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,dy.$$

შემოვიღოთ y ცვლადის მაგივრად ახალი ცვლადი φ, შემდეგი ტოლობით:

$$y=a(1-\cos\varphi). \tag{16.4}$$

მაშინ, წინა ტოლობიდან გვექნება

$$dx = a\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}\sin\varphi d\varphi = a(1-\cos\varphi)\,d\varphi,$$

საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) + C_2. \tag{16.5}$$

პირობის ძალით, საძიებელი წირები გადიან კოორდინატთა სათავეზე. (16.4) განტოლებიდან $y=0$, როცა $\varphi=0$, მაგრამ მაშინ ნულის ტოლია აგრეთვე x. ეს კი შესაძლოა, როცა $C_2=0$. ამრიგად, ექსტრემალთა ოჯახს წარმოადგენს ციკლოიდები, რომელთა პარამეტრული განტოლებებია

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin\varphi), \\ y &= a(1-\cos\varphi). \end{aligned}\right\},$$

სადაც φ პარამეტრია.

§ 17. შემთხვევა, როცა F დამოკიდებულია მხოლოდ წარმოებულზე y'. რადგან $F=F(y')$, ამიტომ ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y'' F_{y'y'} = 0,$$

საიდანაც $y''=0$ ან $F_{y'y'}=0$. პირველ შემთხვევაში $y=C_1x+C_2$, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ექსტრემალები წარმოადგენენ ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ოჯახს. მეორე შემთხვევაში $F_{y'y'} = F_{y'y'}(y')=0$ განტოლების ამონახსნები y' წარმოებულის მიმართ იყოს:

$$y'=\mu_1,\ y'=\mu_2, \dots, y'=\mu_n.$$

მაშინ

$$y=\mu_i x + C,\ (i=1,\ 2, \dots, n).$$

აქ, როგორც ჩანს, ექსტრემალები არიან ერთ (სახელდობრ C) პარამეტრზე დამოკიდებული წრფეების ოჯახი, რომელიც, ცხადია, შედის პირველ შემთხვევაში მიღებული ექსტრემალების ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ოჯახში.

ამრიგად, როცა $F=F(y')$, მაშინ (13.1) ფუნქციონალის ექსტრემალებია ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ წრფეთა ოჯახი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ ფუნქციონალი (იხ. § 1, § 1).

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

რადგან $F=\sqrt{1+y'^2}$. ამიტომ ამ ფუნქციონალის ექსტრემალები წრფეებია. სხვანაირად, ყველა ბრტყელ წირებს შორის, რომლებიც $A=A(x_1,\ y_1)$ და $B=B(x_2,\ y_2)$ წერტილებზე გაივლიან, მინიმალური მნიშვნელობა $J[y]$ ფუნქციონალს შეუძლია მიანიჭოს მხოლოდ წრფემ.

§ 18. შემთხვევა, როცა F დამოკიდებულია მხოლოდ x და y' ცვლადებზე. როცა $F=F(x, y')$, მაშინ ეილერის განტოლება ასე ჩაიწერება: $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y')=0$, რომლის პირველი ინტეგრალია

$$F_{y'}(x, y')=C_1, \tag{18.1}$$

ეს უკანასკნელი ისეთი პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს, რომელიც არ შეიცავს y ცვლადს. როგორც ვიცით (იხ. თავი I, § 20), მისი ინტეგრებისათვის საკმარისია ამოვხსნათ (როცა ეს შესაძლოა) იგი y' წარმოებულის მიმართ x ცვლადის საშუალებით და ასე მიღებული განტოლება ვაინტეგროთ.

იგივე განტოლება (18.1) შეიძლება ვაინტეგროთ ხელსაყრელი ხერხით შერჩეული პარამეტრის დახმარებითაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx$$

ექსტრემალები. ამ შემთხვევაში $F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ და ეილერის შესაბამისი განტოლების პირველი ინტეგრალი იქნება

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{C_1}.$$

შემოვიღოთ t პარამეტრი ტოლობით $y'=\operatorname{tg} t$. მაშინ, წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$x=\frac{C_1y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1\sin t. \tag{18.2}$$

გარდა ამისა გვაქვს

$$dy=\operatorname{tg} t\,dx=C_1\sin t\,dt,$$

საიდანაც ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$y=C_2-C_1\cos t\cdot \tag{18.3}$$

გამოვრიცხოთ (18.2) და (18.3) ტოლობებიდან პარამეტრი t, გვექნება

$$x^2+(y-C_2)^2=C_1^2.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალები არის ორ პარამეტრზე დამოკიდებული წრეწირების ოჯახი, რომელთა ცენტრები Oy ღერძზე მდებარეობენ.

§ 19. შემთხვევა, როცა F არის წრფივი ფუნქცია y' წარმოებულის მიმართ. ვთქვათ (13.1) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა ფუნქციას აქვს სახე

$$F = M(x, y) + N(x, y)y', \tag{19.1}$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ მოცემული წარმოებადი ფუნქციებია. მაშინ, ცხადია

$$F_y = \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y', \ F_{y'} = N, \ \frac{d}{dx}F_{y'} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}y'$$

და ეილერის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{19.2}$$

ეს განტოლება არ არის დიფერენციალური განტოლება. გავარჩიოთ შემთხვევა, როცა (19.2) არ წარმოადგენს იგივეობას. მაშინ იგი განსაზღვრავს გარკვეულ ექსტრემალს, რომელიც არ შეიცავს ისეთ პარამეტრს, რომლის რეგულირებით შევძლებდით დაგვეკმაყოფილებინა სასაზღვრო პირობები. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში ვარიაციულ ამოცანას, საზოგადოდ, არა აქვს ამოხსნა, გარდა გამონაკლისისა, როცა (19.2) განტოლების ამონახსნი შემთხვევით გადის მოცემულ წერტილებზე A და B.

ახლა ის შემთხვევაც განვიხილოთ, როცა (19.2) ტოლობა წარმოადგენს იგივეობას. ამ შემთხვევაში დიფერენციალი

$$F dx = (M + Ny')\,dx = M dx + N dy$$

წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს და ინტეგრალის

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} M dx + N dy \tag{19.3}$$

მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების მდებარეობაზე და დამოუკიდებელია მათი შემაერთებელი წირის სახეზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ (19.3) ინტეგრალის ყველა შესადარებელ წირებზე აქვს ერთი და იგივე მუდმივი მნიშვნელობა. მაშასადამე, ვარიაციულ ამოცანას არ აქვს აზრი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. შევისწავლოთ ექსტრემუმი ფუნქციონალისა

$$J[y] = \int_0^1 [y' \sin \pi y - (x+y)^2]\,dx, \ y(0) = 0, \ y(1) = -1. \tag{19.4}$$

აქ $M = -(x+y)^2$, $N = \sin \pi y$. განტოლება (19.2) იქნება $y = -x$, ექსტრემალთა ოჯახი შედგება მხოლოდ ერთი წრფისაგან, ამ წრფეზე

(19.4) ფუნქციონალის მნიშვნელობა უდრის $\frac{2}{\pi}$. მართლაც, როცა $y=$ $=-x$ გვაქვს

$$J[-x]=\int_0^1 \sin \pi x \, dx=\frac{2}{\pi},$$

ისიც შევნიშნოთ, რომ რადგანაც

$$J[y] \leqslant \int_0^1 y' \sin \pi y \, dx=\frac{2}{\pi}$$

ამიტომ წრფეზე $y=-x$ ფუნქციონალი (13.4) აღწევს მაქსიმუმს და ეს მაქსიმუმი უდრის $\frac{2}{\pi}$.

მაგალითი 2. ავიღოთ ფუნქციონალი

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(y+xy')\,dx, \quad y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2. \tag{19.5}$$

განტოლება (19.2) გადაიქცევა იგივეობად $1=1$. ყველა შესადარებელ წირებზე, რომლებიც (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებს შეაერთებენ, ფუნქციონალს (19.5) აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა: $J[y]=x_2y_2-x_1y_1$.

ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანას არა აქვს აზრი.

§ 20. დიუ-ბუა-რეიმონის ლემა. ზოგჯერ ხელსაყრელია ეილერის განტოლების ინტეგრალური სახით ჩაწერა. ამასთან დაკავშირებით წინასწარ დავამტკიცოთ დიუ-ბუა-რეიმონის შემდეგი

ლემა. თუ უწყვეტი ფუნქციისათვის $M(x)$ შესრულებულია ტოლობა

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\,\eta'(x)\,dx=0, \tag{20.1}$$

სადაც $\eta(x)$ არის $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე ნებისმიერი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია და $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, მაშინ ამ სეგმენტზე ფუნქცია $M(x)$ მუდმივია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვუჩვენოთ, რომ მაშინ შესაძლებელია ავაგოთ ისეთი ფუნქცია $\eta(x)$, რომელიც დააკმაყოფილებს ლემის პირობებს, მაგრამ ამ ფუნქციისათვის

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\,\eta'(x)dx>0.$$

მართლაც, დაშვების ძალით, არსებობს ორი ისეთი წერტილი მაინც $\xi_1, \xi_2 \in [x_1, x_2]$, რომ $M(\xi_1) \neq M(\xi_2)$. ვთქვათ $M(\xi_1) > M(\xi_2)$. ავიღოთ ისეთი რიცხვები d_1 და d_2, $d_1 > d_2$, რომ $M(\xi_1) > d_1 > d_2 > M(\xi_2)$. თუ n საკმარისად დიდი ნატურალური რიცხვია, მაშინ შესაძლოა სეგმენტიდან $[x_1, x_2]$ გამოვყოთ ორი ისეთი სეგმენტი

$$\left[x_3, x_3+\frac{\pi}{n}\right], \left[x_4, x_4+\frac{\pi}{n}\right] \subset [x_1, x_2[,$$

რომ $M(x) > d_1$ როცა

$$x \in \left[x_3, x_3+\frac{\pi}{n}\right]$$

და

$$M(x) < d_2$$

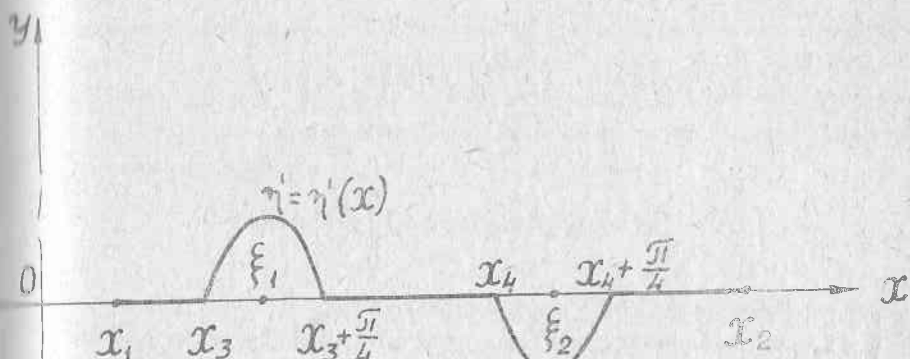
როცა

$$x \in \left[x_4, x_4+\frac{\pi}{n}\right],$$

სადაც $x_3, x_4 \in [x_1, x_2]$ და

$$\left[x_3, x_3+\frac{\pi}{n}\right] \cap \left[x_4, x_4+\frac{\pi}{n}\right]$$

ცარიელი სიმრავლეა. ახლა სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ ავიღოთ შემდეგი სახის ფუნქცია (იხ. ნახაზი 12):



ნახ.12.

$$\eta'(x) = \begin{cases} \sin^2[n(x-x_3)], \text{ როცა } x \in \left[x_3, x_3+\frac{\pi}{n}\right], \\ -\sin^2[n(x-x_4)], \text{ როცა } x \in \left[x_4, x_4+\frac{\pi}{n}\right], \\ 0, \text{ როცა } x \in [x_1, x_2] \setminus \left\{\left[x_3, x_3+\frac{\pi}{n}\right] \cup \left[x_4, x_4+\frac{\pi}{n}\right]\right. \end{cases} \qquad (20.2)$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $\eta'(x)$ ასეა განსაზღვრული, მაშინ ფუნქცია

$$\eta(x)=\int_{x_1}^{x}\eta'(x)\,dx \tag{20.3}$$

უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადია და $\eta(x_1)=0$. გარდა ამისა, თანახმად (20.2) და (20.3) ტოლობებისა, გვაქვს

$$\eta(x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\eta'(x)\,dx=\int_{x_3}^{x_3+\frac{\pi}{n}}\sin^2[n(x-x_3)]\,dx-$$

$$-\int_{x_4}^{x_4+\frac{\pi}{n}}\sin^2[n(x-x_4)]\,dx=0.$$

ამრიგად, ფუნქცია $\eta(x)$ აკმაყოფილებს ლემაში მოთხოვნილ ყველა პირობას და ამიტომ, ერთი მხრივ, (20.2) ტოლობებით განსაზღვრული $\eta'(x)$ ფუნქციისათვის უნდა შესრულებული იყოს ტოლობა (20.1).

მეორე მხრივ, მართებულია უტოლობა

$$\int_{x_1}^{x_2}M(x)\,\eta'(x)\,dx=\int_{x_3}^{x_3+\frac{\pi}{n}}M(x)\sin^2[n(x-x_3)]dx-$$

$$-\int_{x_4}^{x_4+\frac{\pi}{n}}\sin^2[n(x-x_4)]\,dx>(d_1-d_2)\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\sin^2 nx dx>0$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემას.

§ 21. ეილერის განტოლების ინტეგრალური სახე. ხელახლა განვიხილოთ ფუნქციონალი (13.1), განსაზღვრული $C^{(1)}[x_1, x_2]$ სივრცის წირებზე $\widetilde{y}=\widetilde{y}(x)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს $\widetilde{y}(x_1)=y_1$, $\widetilde{y}(x_2)=y_2$. ვიგულისხმოთ, რომ დასაშვები ელემენტების სიმრავლე შედგება წირებისაგან, რომლებიც ერთმანეთთან პირველი რიგის ε მახლობლობაშია, ვთქვათ $y=y(x)$ წარმოადგენს წირს, რომელიც (13.1) ფუნქციონალს ანიჭებს სუსტ ექსტრემუმს. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით (იხ. § 13), ფუნქციონალის ვარიაცია ასე იწერება:

$$\delta J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx, \tag{21.1}$$

სადაც

$$\delta y=\delta y\,(x)=\widetilde{y}\,(x)-y\,(x),\ \ \delta y\,(x_1)=\delta y\,(x_2)=0.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი და სასაზღვრო პირობები, გვექნება:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_y\,\delta y\,dx=-\int_{x_1}^{x_2} N\,(x)\,\delta y'\,dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y\,\frac{d}{dx}\,F_{y'}\,dx=-\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\,\delta y'\,dx,$$

სადაც

$$N\,(x)=\int_{x_1}^{x} F_y dx.$$

ამ გარდაქმნების შემდეგ, ფუნქციონალის ვარიაცია (21.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\delta J\ [y]=\int_{x_1}^{x_2} (F_{y'}-N)\,\delta y'\,dx, \tag{21.2}$$

რომელიც მართებულია ნებისმიერი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციისათვის δy. ამასთან δy აკმაყოფილებს პირობებს: $\delta y\,(x_1)=\delta y\,(x_2)=0$. ფუნქცია $F_{y'}-N$ უწყვეტია სეგმენტზე $[x_1,\ x_2]$. მაშასადამე, ფუნქციები δy და $F_{y'}-N$ აკმაყოფილებენ დიუ-ბუა-რეიმონის ლემის ყველა პირობას და, ამიტომ, გვექნება

$$F_{y'}-N=F_{y'}-\int_{x_1}^{x} F_y dx=C. \tag{21.3}$$

ასეთია ეილერის განტოლების ინტეგრალური სახე.

შევნიშნოთ, რომ $N'\,(x)=F_y$ არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია $[x_1,\ x_2]$ სეგმენტზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ უწყვეტი წარმოებული აქვს აგრეთვე ფუნქციას $F_{y'}=C+N\,(x)$ იმავე სეგმენტზე და

$$\frac{d}{dx}\,F_{y'}=N'\,(x)=Fy.$$

როგორც ვხედავთ, (21.3) განტოლებიდან მიიღება ეილერის განტოლება (13.7) სახით და თანაც მტკიცდება, რომ არსებობს $F_{y'}$ ფუნქციის წარმოებული x ცვლადით $[x_1,\ x_2]$ სეგმენტზე.

§ 22. ჰილბერტის თეორემა. გავიხსენოთ, რომ ეილერის თეორემის გამოყვანისას იგულისხმებოდა, რომ შესადარებელ წირთა სიმრავლე Ω

შედგებოდა $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი წირებისაგან. მაგრამ ეილერის განტოლება

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{xy'} - F_{yy'}\, y' - F_{y'y'}\, y'' = 0 \qquad (22.1)$$

შეიცავს $y=y(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს, რომლის არსებობა არ არის ცნობილი. იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ დამატებითი პირობა $y''=y''(x)$ წარმოებულის არსებობის შესახებ, დავამტკიცოთ ჰილბერტის შემდეგი

თეორემა. *თუ $y=y(x)\in\Omega$ წარმოადგენს (13.1) ფუნქციონალის ექსტრემალს, მაშინ $[x_1, x_2]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე, რომელზეც $F_{y'y'}\neq 0$, არსებობს ექსტრემალის მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული $y''=y''(x)$.*

დამტკიცება. ვთქვათ x არის $[x_1, x_2]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი და $\Delta x\neq 0$ მისი ნაზრდი. აღვნიშნოთ $y(x)$ და $y'(x)$ ფუნქციების შესაბამისი ნაზრდები Δy და $\Delta y'$-ით. გამოვიდეთ ტოლობიდან

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F_{y'}(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ y'+\Delta y') - F_{y'}(x,\ y,\ y')}{\Delta x},$$

რომლის მარჯვენა ნაწილის მრიცხველი გარდავქმნათ ლაგრანჟის ფორმულით ფუნქციის სასრული ნაზრდის შესახებ, გვექნება

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \lim_{\Delta x\to 0} F_{xy'}(x+\theta_1\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y,\ y'+\theta_3\Delta y') +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0} F_{yy'}(x+\theta_1\Delta x,\ y+Q_2\Delta y,\ y'+Q_3\Delta y') \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0} F_{y'y'}(x+\theta_1\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y,\ y'+\theta_3\Delta y') \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x},$$

$$0<\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3<1.$$

ვინაიდან ნაწილობითი წარმოებულები $F_{xy'}$, $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$, უწყვეტი ფუნქციებია, ამიტომ ზღვარზე გადასვლის ოპერაციის შესრულების შედეგად, წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{xy'}(x,\ y,\ y') + F_{yy'}(x,\ y,\ y')\, y' + F_{y'y'} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}.$$

წინა პარაგრაფის ბოლოში მოყვანილი შენიშვნის ძალით არსებობს $\frac{d}{dx}F_{y'}$, და უდრის F_y. ამის გამო წინა ტოლობიდან, გვაქვს

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{F_y - F_{xy'} - F_{yy'}\, y'}{F_{y'y'}}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 23. მეორე ვარიაცია. ხელახლა განვიხილოთ ფუნქციონალი (13.1) განსაზღვრული $C^{(1)}[x_1, x_2]$ სივრცის ისეთ წირებზე, რომლებიც აერთებენ მოცემულ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილებს. შესადარებელი წირები ავიღოთ $y_1(x)=y(x)+\delta y(x)=y+\delta y$ სახით, სადაც δy წარმოადგენს $y=y(x)$ ექსტრემალის ვარიაციას და აკმაყოფილებს პირობებს $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$. ამის შემდეგ (13.1) ფუნქციონალის ნაზრდი ასე ჩაიწერება

$$J[y_1]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}[F(x, y+\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')]dx. \tag{23.1}$$

დავშალოთ $F(x, y+\delta y, y'+\delta y')$ ტეილორის ფორმულით, მაშინ წინა ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$J[y_1]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(\widetilde{F}_{yy}\delta y^2+2\widetilde{F}_{yy'}\delta y\,\delta y'+\widetilde{F}_{y'y'}\delta y'^2)\,dx, \tag{23.2}$$

სადაც

$$\widetilde{F}_{yy}=F_{yy}(x, y+\theta_1\delta y, y'+\theta_2\delta y'),$$

$$\widetilde{F}_{yy'}=F_{yy'}(x, y+\theta_1\delta y, y'+\theta_2\delta y'),$$

$$\widetilde{F}_{y'y'}=F_{y'y'}(x, y+\theta_1\delta y, y'+\theta_2\delta y'),\ 0<\theta_1,\ \theta_2<1.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ წირები $y=y(x)$ და $y_1=y_1(x)$ ერთმანეთთან პირველი რიგის საკმარისად მცირე ε მახლობლობაში იმყოფებიან, მაშინ F_{yy}, $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$ ფუნქციების უწყვეტობის გამო, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\widetilde{F}_{yy}=F_{yy}(x, y, y')+\varepsilon_1,\ \widetilde{F}_{yy'}=F_{yy'}(x, y, y')+\varepsilon_2,$$

$$\widetilde{F}_{y'y'}=F_{y'y'}(x, y, y')+\varepsilon 3,$$

სადაც $\max|\varepsilon_1|$, $\max|\varepsilon_2[$, $\max|\varepsilon_3|\to 0$, როცა $\varepsilon\to 0$. ახლა (23.2) ტოლობა ასე წარმოგვიდგება

$$J[y_1]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(F_{yy}\delta y^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}\delta y'^2)dx+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}(\varepsilon_1\delta y^2+2\varepsilon_2\delta y\,\delta y'+\varepsilon_3\delta y'^2)dx=\delta J[y]+\delta^2 J[y]+\eta, \tag{23.3}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned}
\delta J[y]&=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx,\\
\delta^2 J[y]&=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(F_{yy}\delta y^2+2F_{yy'}\delta y\,\delta y'+F_{y'y'}\delta y'^2)dx,\\
\eta&=\int_{x_1}^{x_2}(\varepsilon_1\delta y^2+2\varepsilon_2\delta y\,\delta y'+\varepsilon_3\delta y'^2)dx.
\end{aligned}\right\} \tag{23,4}$$

ადვილი სანახავია, რომ რაკი

$$|\delta y|=|y_1-y|<\varepsilon,\quad |\delta y'|=|y_1'-y'|<\varepsilon$$

და $|2\delta y\,\delta y'|\leqslant\delta y^2+\delta y'^2$, ამიტომ როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ η უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა ვიდრე ε^2.

თუ (23.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ჩამოვაცილებთ უკანასკნელ შესაკრებს, მივიღებთ

$$J[y_1]-J[y]\approx\delta J[y]+\delta^2 J[y].$$

$\delta^2 J[y]$ ფუნქციონალს უწოდებენ $J[y]$ ფუნქციონალის მეორე ვარიაციას. აქ მნიშვნელოვანია შემდეგი

თეორემა: თუ წირი $y=y(x)\in\Omega$ მინიმუმს (მაქსიმუმს) ანიჭებს (13.1) ფუნქციონალს, მაშინ ნებისმიერი ფუნქციისათვის $\gamma=\gamma(x)\in C^{(1)}[x_1, x_2]$, $\gamma(x_1)=\gamma(x_2)=0$, ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია არაუარყოფითია: $\delta^2 J[y]\geqslant 0$ (შესაბამისად, არადადებითია მაქსიმუმის შემთხვევაში: $\delta^2 J[y]\leqslant 0$).

დამტკიცება. დავუშვათ არსებობს ისეთი ფუნქცია $\gamma=\gamma(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს, მაგრამ $\delta^2 J[y]<0$. ავიღოთ შესადარებელ წირთა ოჯახი $y_1(x)=y(x)+t\gamma(x)$, სადაც t პარამეტრია. მაშინ გვექნება

$$J[y_1]-J[y]=t\delta J[y]+t^2\delta^2 J[y]+t^2\varepsilon^2\bar{\varepsilon}, \tag{23.5}$$

სადაც $\bar{\varepsilon}\to 0$, როცა $t\to 0$. ვინაიდან წირი $y=y(x)$ მინიმუმს ანიჭებს (13.1) ფუნქციონალს, ამიტომ $\delta J[y]=0$ და როცა t საკმარისად მცირეა,

მაშინ (23.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს აქვს $\delta^2 J[y]$ მეორე ვარიაციის ნიშანი, ე. ი.

$$J[y_1]-J[y]<0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 24. მეორე ვარიაციის დაყვანა კვადრატულ ფუნქციონალზე. ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია საშუალებას გვაძლევს გამოვიყვანოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმის ახალი აუცილებელი პირობა. იგი ხელსაყრელია აგრეთვე, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ფუნქციონალის ექსტრემუმის საკმარისი პირობის მისაღებადაც.

შევეცადოთ წინასწარ მეორე ვარიაციის შესაძლო გამარტივებას. თუ გამოვიყენებთ პირობებს $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$ და ნაწილობითი ინტეგრების ხერხს, გვექნება

$$2\int_{x_1}^{x_2} F_{yy'}\,\delta y\,\delta y'\,dx=\int_{x_1}^{x_2} F_{yy'}\,d(\delta y^2(x))=-\int_{x_1}^{x_2}\delta y^2\frac{d}{dx}(F_{yy'})\,dx.$$

გავითვალისწინებთ რა უკანასკნელ გარდაქმნას მეორე ვარიაციის გამოსახულებაში (23.4), მივიღებთ

$$\delta^2 J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(P\,\delta y^2+Q\,\delta y'^2)dx, \tag{24.1}$$

სადაც

$$P=\frac{1}{2}\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right),\qquad Q=\frac{1}{2}F_{y'y'}.$$

გამოსახულებას (24.1) უწოდებენ ფუნქციონალის მეორე ვარიაციას კვადრატული სახით.

§ 25. ლეჟანდრის აუცილებელი პირობა ექსტრემუმისა. დავამტკიცოთ

თეორემა. იმისათვის, რომ ნებისმიერი ფუნქციისათვის $\delta y\in C^{(1)}[x_1, x_2]$, $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$, კვადრატული ფუნქციონალი (24.1) იყოს არაუარყოფითი აუცილებელია მთელ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე $Q=Q(x)\geqslant 0$.

დამტკიცება. დავუშვათ წინააღმდეგი, ე. ი. დავუშვათ, რომ შესრულებულია თეორემის პირობები, მაგრამ არსებობს ისეთი წერტილი $x_0\in[x_1, x_2]$, რომელზედაც $Q(x_0)=-2c$, სადაც $c>0$. ვინაიდან $Q(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო $[x_1', x_1'+h]\subset[x_1, x_2]$, რომელშიც $Q(x)=-c$, როცა $x\in[x_1', x_1'+h]$. გარდა ამისა, აღვნიშნოთ $M=\max|P(x)|$, როცა $x\in[x_1, x_2]$. რიცხვი M არსებობს, ვინაიდან $P=P(x)$ არის უწყვეტი ფუნქცია $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე.

ახლა სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ ავაგოთ ფუნქცია $\delta y=\delta y(x)$ შემდეგნაირად:

$$\delta y(x)=\begin{cases} \sin^2 \dfrac{x-x_1'}{h}\pi, & \text{როცა } x\in[x_1', x_1'+h] \\ 0, & \text{როცა } x\in[x_1, x_2]\setminus[x_1', x_1'+h]. \end{cases}$$

ასე განსაზღვრული ფუნქცია $\delta y(x)$ აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს. ამ ფუნქციისათვის მართებულია უტოლობა:

$$\delta^2 J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(P\delta y^2+Q\delta y'^2)dx=\int_{x_1'}^{x_1'+h} P\sin^4 \frac{x-x_1'}{h}\pi\, dx+$$

$$+\frac{\pi^2}{h^2}\int_{x_1'}^{x_1'+h} Q\sin^2\frac{x-x_1'}{h}2\pi\, dx<Mh-\frac{\pi^2 c}{h},$$

საიდანაც, ცხადია, $\delta^2 J[y]<0$ როცა h საკმარისად მცირეა.

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს ლეჟანდრის შემდეგი აუცილებელი პირობა ექსტრემუმისა: იმისათვის, რომ ფუნქცია $y=y(x)$ ანიჭებდეს მინიმუმს (13.1) ფუნქციონალს, აუცილებელია $F_{y'y'}\geqslant 0$.

სრულიად ასევე: იმისათვის, რომ ფუნქცია $y=y(x)$ ანიჭებდეს მაქსიმუმს (13.1) ფუნქციონალს აუცილებელია $F_{y'y'}\leqslant 0$.

§ 26. მაგალითები: 1) განვიხილოთ § 1-ში მოყვანილი ამოცანა 1, რომელშიც მოითხოვება მოცემული $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილები შევაერთოთ მინიმალური სიგრძის წირით. როგორც ვიცით (იხ. § 17), ექსტრემალთა ოჯახი შედგება ორ პარამეტრზე დამოკიდებული წრფეებისაგან $y=C_1x+C_2$. თუ სასაზღვრო პირობებით გამოვთვლით C_1 და C_2 მუდმივებს, მაშინ შესაძლო ექსტრემალს ექნება სახე

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{26.1}$$

დავრწმუნდეთ, რომ შესრულებულია მინიმუმის აუცილებელი პირობა ლეჟანდრისა. მართლაც, ვინაიდან $F=\sqrt{1+y'^2}$, ამიტომ

$$F_{y'y'}=\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}>0.$$

მაშასადამე, თუ რომელიმე წირი მინიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს (1.1), იგი უნდა იყოს წრფე, რომლის განტოლებაა (26.1).

2) ახლა ავიღოთ § 1-ში მოყვანილი ამოცანა 4, ბრუნვის სხეულის ზედაპირის მინიმუმის შესახებ. ამოცანა მიიყვანება ისეთი წირის მოძებ-

ნაზე, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს (1.5). აქ $F=y\sqrt{1+y'^2}$, სადაც შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $y>0$. მაშასადამე, გვექნება

$$F_{y'y'}=\frac{y}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}>0.$$

როგორც ვხედავთ, შესრულებულია მინიმუმის აუცილებელი პირობა ლეჟანდრისა. მაშასადამე, თუ რომელიმე წირი მინიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს (1.5), იგი უნდა იყოს $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელი ჯაჭვწირი

$$y=C_1 ch\frac{x-C_2}{C_1},$$

სადაც C_1 და C_2 განისაზღვრება სასაზღვრო პირობების დახმარებით.

3) განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(y'^3-3y')\,dx \tag{26.2}$$

და ვუჩვენოთ, რომ არ არსებობს $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, რომელიც ამ ინტეგრალს მიანიჭებს ექსტრემუმს.

მართლაც, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F=y'^3-3y'$ და $F_{y'y'}=6y'$. უკანასკნელი გამოსახულება, საზოგადოდ, ნიშანს იცვლის $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე. მაშასადამე, ფუნქციონალისათვის (26.2) არ არის დაცული ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა ლეჟანდრისა.

4) შევისწავლოთ შესრულებულია თუ არა ლეჟანდრის აუცილებელი პირობა მინიმუმისა ფუნქციონალისათვის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\sin(yy')\,dx,\ y_1=y(x_1),\ y_2=y(x_2), \tag{26.3}$$

ვინაიდან აქ $F=\sin(yy')$, ამიტომ ეილერის შესაბამისი დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე

$$F_y-y'F_{yy'}-y''F_{y'y'}=0. \tag{26.4}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$F_y=y'\cos(yy'),\ F_{yy'}=-yy'\sin(yy'),\ F_{y'y'}=-y^2\sin(yy').$$

მაშასადამე, განტოლება (26.4) ასე ჩაიწერება

$$(yy'^2+y^2y'')\sin(yy')=0.$$

ვთქვათ $yy'\neq k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2,\ldots)$, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$y'^2+yy'=0$$

ანუ

$$p^2+py\frac{dp}{dy}=0,\ p=y',\ p\neq 0.$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{dp}{p}=-\frac{1}{y},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{y},\ y^2=C_1x+C_2.$$

გამოვიყენებთ რა სასაზღვრო პირობებს: $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$ გვექნება

$$C_1=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2-x_1},\quad C_2=\frac{x_2y_1^2-x_1y_2^2}{x_2-x_1}.$$

გარდა ამისა, რადგან $2yy'=C_1$, ამიტომ $yy'=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{2(x_2-x_1)}$.

ახლა ცხადია

$$F_{y'y'}=-y^2\sin(yy')=-y^2\sin\frac{y_2^2-y_1^2}{2(x_2-x_1)}.$$

ლეჟანდრის აუცილებელი პირობა მინიმუმისა $F_{y'y'}\geqslant 0$ მაშინ შესრულდება, როცა

$$-\pi<\frac{y_2^2-y_1^2}{2(x_2-x_1)}<0. \tag{26.5}$$

ამრიგად, ფუნქციამ

$$y^2=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2-x_1}x+\frac{x_2y_1^2-x_1y_2^2}{x_2-x_1}$$

შესაძლოა მინიმუმი მიანიჭოს ფუნქციონალს (26.3) მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა (26.5).

5) მოვძებნოთ წირი, რომელმაც შესაძლოა მინიმუმი მიანიჭოს ფუნქციონალს

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(xy'+y)^2\,dx,\ y_1=y(x_1),\ y_2=y(x_2). \tag{26.6}$$

ვინაიდან $F=(xy'+y)^2$, $F_y=2(xy'+y)$, $F_{y'}=2x(xy'+y)$, $F_{yy'}=2x$, $F_{y'y'}=2x^2$, $Fxy'=4xy'+2y$, ამიტომ ეილერის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე:

$$2y'+xy''=0,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$y=-\frac{C_1^2}{x}+C_2. \tag{26.7}$$

გამოვთვალოთ მუდმივები C_1 და C_2 სასაზღვრო პირობების დახმარებით და ჩავსვათ მათი მნიშვნელობანი (26.7) განტოლებაში, გვექნება

$$y=\frac{x_2(y_1-y_2)}{x_2-x_1}\frac{1}{x}+\frac{x_2y_2-x_1y_1}{x_2-x_1}. \tag{26.8}$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ რაკი $F_{y'y'}=2x^2>0$, ამიტომ (26.6) ფუნქციონალისათვის შესრულებულია მინიმუმის აუცილებელი პირობა ლეჟანდრისა. დასკვნა ასეთია: თუ რომელიმე წირი მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს (26.6), მაშინ იგი იქნება (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილების შემაერთებელი რკალი ჰიპერბოლისა, რომლის განტოლებაა (26.8).

თ ა ვ ი VIII

მარტივი ამოცანის ზოგიერთი განზოგადება

§ **1. მრავალ არგუმენტზე დამოკიდებული ფუნქციონალის ექსტრემუმი.** განვიხილოთ $2n+1$ არგუმენტზე დამოკიდებული ფუნქცია

$$F=F(x, y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2',\ldots, y_n'(x))=$$
$$=F(x, y_1, y_2,\ldots, y_n, y_1', y_2',\ldots, y_n'),$$

სადაც $y_1, y_2,\ldots, y_n$ უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია სეგმენტზე $[x_1, x_2]$. როგორც ვარიაციათა აღრიცხვის მარტივი ამოცანის შემთხვევაში, აქაც $n+1$ განზომილებიანი სივრცის ყველა უწყვეტ და უწყვეტად წარმოებად წირების Ω სიმრავლეს ვუწოდოთ შესადარებელ (ან დასაშვებ) წირთა კლასი. დავაყენოთ საკითხი Ω სიმრავლის ისეთი $y_1, y_2,\ldots, y_n$ ფუნქციების მოძებნის შესახებ, რომლებიც ექსტრემუმს მიანიჭებენ ფუნქციონალს

$$J[y_1, y_2,\ldots, y_n]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2,\ldots, y_n, y_1', y_2',\ldots, y_n')\,dx \qquad (1.1)$$

და დააკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს: $y_1(x_1)=y_{11}$, $y_2(x_1)=y_{21},\ldots, y_n(x_1)=y_{n1}$, $y_1(x_2)=y_{12}$, $y_2(x_2)=y_{22},\ldots, y_n(x_2)=y_{n2}$.

ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ F და მისი ნაწილობითი წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციებია თავისი $2n+1$ არგუმენტების მიმართ.

გეომეტრიულად ფუნქციათა მიმდევრობა: $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\ldots, y_n=y_n(x)$ განსაზღვრავს წირს $n+1$ განზომილებიან სივრცეში.

იმ შემთხვევაში როცა ფუნქციებს $y_1, y_2,\ldots, y_n$ და $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2,\ldots, \tilde{y}_n$ გააჩნიათ წარმოებულები k რიგამდე ჩათვლით, მაშინ მათი ε მახლობლობა იმნაირადვე განისაზღვრება, როგორც ვარიაციათა აღრიცხვის მარტივი ამოცანის შემთხვევაში. სახელდობრ ვიტყვით, რომ ეს ფუნქციები ერთმანეთთან ε მახლობლობაში იმყოფებიან, თუ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე შესრულებულია პირობები

$$|\tilde{y}_i^{(j)}-y_i^{(j)}|<\varepsilon, \quad i=1, 2,\ldots, n;\ j=0, 1, 2,\ldots, k, \qquad (1.2)$$

სადაც

$$\widetilde{y_i^{(0)}}=\widetilde{y_i}, \quad y_i^{(0)}=y_i.$$

§ 2. **ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა $J[y_1, y_2,\dots, y_n]$ ფუნქციონალისა.**

თეორემა. თუ $n+1$ განზომილებიანი ფუნქციონალური სივრცის დასაშვები წირი: $y_1=y_1(x), y_2=y_2(x),\dots, y_n=y_n(x)\in\Omega$ ექსტრემუმს ანიჭებს $J[y_1, y_2,\dots, y_n]$ ფუნქციონალს, მაშინ ფუნქციები $y_i(x)$ $(i=1, 2,\dots, n)$ წარმოადგენენ ინტეგრალს შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების სისტემისა:

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0, \quad (i=1, 2,\dots, n). \tag{2.1}$$

განტოლებებს (2.1) უწოდებენ ეილერის განტოლებათა სისტემას. იგი აუცილებელი პირობებია როგორც ძლიერი, ისე სუსტი და აბსოლუტური ექსტრემუმისა.

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ თუ წირი $y_i=y_i(x)$ $(i=1, 2,\dots, n)$ ექსტრემუმს ანიჭებს ფუნქციონალს (1.1), მაშინ $y_i=y_i(x)$ ფუნქციების ნებისმიერი მცირე ვარიაცია გამოიწვევს (1.1) ფუნქციონალის შეცვლას (ვარიაციას). ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალი (1.1) იცვლება მაშინაც, როცა ყველა ფუნქციას $y_i(x)$ უცვლელსა ვტოვებთ, გარდა ერთი $y_i=y_j(x)$ ფუნქციისა, რომელსაც ვანიჭებთ მცირე ვარიაციას. ამ პირობებში (1.1) გადაიქცევა მხოლოდ ერთ არგუმენტზე დამოკიდებულ ფუნქციონალად, რომლის ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას (როგორც წინა VII თავში ვნახეთ) აქვს სახე:

$$F_{y_j}-\frac{d}{dx}F_{y_j'}=0.$$

მოყვანილი მსჯელობა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერ y_j $(j=1, 2,\dots, n)$ ფუნქციაზე და, ამიტომ ექსტრემუმის პირობა ჩაიწერება (2.1) სახით. თეორემა დამტკიცებულია.

(2.1) სისტემის ყოველი განტოლება არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება და, ცხადია, მისი ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს $2n$ ნებისმიერ მუდმივს:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=y_1(x, C_1, C_2,\dots, C_{2n}), \\ y_2=y_2(x, C_1, C_2,\dots, C_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n=y_n(x, C_1, C_2,\dots, C_{2n}). \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

მაშასადამე, (1.1) ფუნქციონალის ექსტრემალის მოძებნის ამოცანა, როცა იგი არსებობს, იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა მოვძებნოთ (2.1) სისტე-

მის ზოგადი ინტეგრალი, რომელშიც შემდეგ უნდა განვსაზღვროთ ნებისმიერი მუდმივები $C_1, C_2, \ldots, C_n$ მოცემული სასაზღვრო პირობებით (1.2).

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ (2.1) აუცილებელი პირობების გამოყვანისას იგულისხმება, რომ არსებობენ $y_i(x)$ ფუნქციების მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები. მაგრამ, თუ ეილერის განტოლებათა სისტემას, ანალოგიურად ექსტრემუმის მარტივი ამოცანის შემთხვევისა, ჩავწერთ ინტეგრალური სახით, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ გარკვეულ პირობებში ფუნქციებს $y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ გააჩნიათ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები.

§ 3. **მაგალითები.** 1) სინათლის სხივის რეფრაქციის ამოცანა. ვიგულისხმოთ, რომ სინათლის სხივის გავრცელების სიჩქარე არაერთგვაროვან გარემოში წარმოადგენს სივრცის წერტილის მდებარეობის ფუნქციას: $v=v(x, y, z)$.

განვსაზღვროთ სინათლის სხივის გავრცელების ტრაექტორია, რომელიც გამოდის მოცემული $A(a_1, b_1, c_1)$ წერტილიდან და უმცირეს დროში მიაღწევს მოცემულ $B(a_2, b_2, c_2)$ წერტილს.

ფერმას პრინციპის თანახმად, A და B წერტილების შემაერთებელ წირთა შორის, სინათლის სხივის გავრცელების ტრაექტორია წარმოადგენს სწორედ იმ წირს, რომლის გასწვრივ მოძრავი სხივი უმცირეს დროში გადადის A წერტილიდან B წერტილში.

ვთქვათ $y=y(x)$, $z=z(x)$ არის A და B წერტილების შემაერთებელი s წირის განტოლება. სხივის გავრცელების სიჩქარე მოცემული იქნება ფორმულით:

$$v(x, y, z)=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{dt}dx,$$

საიდანაც

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}dx.$$

თუ ვაინტეგრებთ უკანასკნელ ტოლობას, მივიღებთ T დროს, რომელიც დასჭირდება სხივს იმისათვის, რომ გადავიდეს A წერტილიდან B წერტილში:

$$T[y, z]=T=\int_{a_1}^{a_2}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}dx. \tag{3.1}$$

ამრიგად, ამოცანა მიიყვანება სივრცის წირის: $y=y(x)$, $z=z(x)$ მოძებნაზე, რომელიც T ფუნქციონალს მიანიჭებს უმცირეს მნიშვნელობას.

გავითვალისწინებთ რა, რომ მოყვანილ ამოცანაში

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)},$$

ეილერის განტოლებათა სისტემა (2.1) ფუნქციონალისათვის (3.1) ასე ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2(x,y,z)}\,\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}+\frac{d}{dx}\,\frac{y'}{v(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,\\ \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2(x,y,z)}\,\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+\frac{d}{dx}\,\frac{z'}{v(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0.\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

ასეთია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, საიდანაც განისაზღვრება სხივის გავრცელების ტრაექტორია.

2) განვსაზღვროთ ექსტრემალთა ოჯახი შემდეგი ფუნქციონალისა:

$$J[y_1(x),\ y_2(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(y_1',\ y_2')\,dx.\tag{3.3}$$

ეილერის დიფერენციალური განტოლებების სისტემა (2.1) ამ შემთხვევაში იქნება:

$$F_{y_1'y_1'}y_1''+F_{y_1'y_2'}y_2''=0,\quad F_{y_1'y_2'}y_1''+F_{y_2'y_2'}y_2''=0,$$

საიდანაც, თუ $F_{y_1'y_1'}-(F_{y_1'y_2'})^2\neq 0$, მივიღებთ $y_1''=0$, $y_2''=0$. ექსტრემალთა ოჯახი იქნება სივრცის წრფეები: $y_1=C_1x+C_2$, $y_2=C_3x+C_4$, სადაც C_1, C_2, C_3, C_4 ნებისმიერი მუდმივებია.

3) მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y_1,\ y_2]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2)\,dx$$

ექსტრემალები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს:

$$y_1(0)=0,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y_2(0)=0,\quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

შევადგინოთ ეილერის განტოლებათა სისტემა, გვექნება

$$\left.\begin{aligned}y_1''-y_2=0,\\ y_2''-y_1=0,\end{aligned}\right\},$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ მეოთხე რიგის წრფივ და ერთგვაროვან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$y_1^{(4)}-y_1=0.$$

უკანასკნელი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი არის

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

და ვინაიდან $y_1''=y_2$, ამიტომ

$$y_2=C_1 e^x+C_2 e^{-x}-C_3 \cos x-C_4 \sin x,$$

გამოვიყენოთ მოცემული სასაზღვრო პირობები, მივიღებთ $C_1=C_2=C_3=0$, $C_4=1$. ამის შემდეგ, ექსტრემალის განტოლება ასე წარმოგვიდგება: $y_1=\sin x$, $y_2=-\sin x$. როგორც ვხედავთ ექსტრემალთა ოჯახი შედგება ერთადერთი სივრცითი წირისაგან.

§ 4. მაღალი რიგის წარმოებულებზე დამოკიდებული ფუნქციონალის ექსტრემუმი. ფიზიკისა და მექანიკის მრავალი ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება ისეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის გამოკვლევაზე, რომელშიც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დამოკიდებულია საძიებელი ექსტრემალის პირველი და მაღალი რიგის წარმოებულებზე. ქვემოთ განზრახული გვაქვს გამოვიყვანოთ ასეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა.

განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$J[y, y', y'',\dots, y^{(n)}]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x), y''(x),\dots, y^{(n)}(x))\, dx, \qquad (4.1)$$

სადაც F არის $n+2$-ჯერ წარმოებადი ფუნქცია მისი ყველა არგუმენტის მიმართ და წერტილებზე $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ შესრულებულია სასაზღვრო პირობები:

$$\left.\begin{aligned} y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y_1',\dots,\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)},\\ y(x_2)=y_2,\ y'(x_2)=y_2',\dots,\ y^{(n-1)}(x_2)=y_2^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ ექსტრემალი $y=y(x)$ და შესადარებელი წირები $\widetilde{y}=\widetilde{y}(x)$ წარმოადგენენ $2n$-ჯერ წარმოებად ფუნქციებს სეგმენტზე $[x_1, x_2]$.

გამოვიდეთ α პარამეტრზე დამოკიდებულ ფუნქციათა შემდეგი ოჯახიდან: $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha\delta y(x)$, სადაც $\delta y(x)=\widetilde{y}(x)-y(x)$. ცხადია, $y(x, 0)=y(x)$ და $y(x, 1)=\widetilde{y}(x)$. ფუნქციონალი (4.1) წირთა ოჯახზე $y(x, \alpha)$ წარმოადგენს α პარამეტრის ფუნქციას, რომელიც ექსტრემალურ მნიშვნელობას მიაღწევს როცა $\alpha=0$. მაშასადამე, შესრულებული უნდა იყოს შემდეგი აუცილებელი პირობა:

$$\left\{\frac{d}{d\alpha} J[y(x, \alpha), y'(x, \alpha),\dots, y^{(n)}(x, \alpha)]\right\}_{\alpha=1} =$$

$$=\left\{\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha),\dots, y^{(n)}(x, \alpha))\, dx\right\}_{\alpha=0} =$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + \ldots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)})\, dx = 0. \tag{4.3}$$

ინტეგრალს

$$\delta J[y, y', \ldots, y^{(n)}] = \int_{x_1}^{x_2} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + \ldots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)})\, dx$$

ეწოდება (4.1) ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია.

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების წესი, გვექნება

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'} \delta y'\, dx = [F_{y'} \delta y]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} F_{y'}\, dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y''} \delta y'' dx = [F_{y''} \delta y']_{x_1}^{x_2} - \left[\delta y \frac{d}{dx} F_{y''}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} F_{y''}\, dx,$$

. . . .

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}\, dx = [\delta y^{(n-1)} F_{y^{(n)}}]_{x_1}^{x_2} -$$

$$- \left[\delta y^{(n-2)} \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}}\right]_{x_1}^{x_2} + \ldots + (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\, dx.$$

ვინაიდან ამ ტოლობების მარჯვენა ნაწილები, გარდა ინტეგრალებით ჩაწერილი შესაკრებებისა, (4.2) სასაზღვრო პირობების ძალით, ნულის ტოლია, ამიტომ (4.1) ფუნქციონალის პირველი ვარიაციისათვის მივიღებთ:

$$\delta J[y, y', \ldots, y^{(n)}] =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\right) \delta y\, dx = 0.$$

რადგან უკანასკნელი ტოლობა მართებულია ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის δy, $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$, ხოლო ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველი თანამამრავლი უწყვეტია სეგმენტზე $[x_1, x_2]$, ამიტომ ძირითადი ლემის ძალით (იხ. § 12), მთელ სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ იგივურად შესრულდება ტოლობა

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \tag{4.4}$$

ასეთია (4.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა. განტოლებას (4.4) ეწოდება ე ი ლ ე რ - პ უ ა ს ო ნ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ-

რი განტოლება. იგი წარმოადგენს, როგორც ვხედავთ, $2n$ რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს $2n$ ნებისმიერ მუდმივს, რომლებიც, საზოგადოდ, უნდა განისაზღვროს სასაზღვრო პირობების დახმარებით.

§ 5. **ეილერ-პუასონის განტოლების რიგის დაწევა.** ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში შესაძლოა (4.4) განტოლების რიგის დაწევა ერთი ერთეულით.

შემთხვევა 1. ვთქვათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია F არ არის ცხადად დამოკიდებული y ცვლადისაგან. მაშინ $F_y=0$ და (4.4) განტოლება შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}+\cdots\mp\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}\right)=0,$$

საიდანაც

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}+\cdots\mp\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}=C_1.$$

უკანასკნელი განტოლება არის $2n-1$ რიგისა და წარმოადგენს (4.4) განტოლების პირველ ინტეგრალს.

შემთხვევა 2. ახლა ვთქვათ ფუნქცია F არ შეიცავს ცხადი სახით x ცვლადს. შევასრულოთ ცვლადის გარდაქმნა ინტეგრალში (4.1). დამოუკიდებელ ცვლადად მივიჩნიოთ y, ხოლო x ჩავთვალოთ უცნობ ფუნქციად. მაშინ გვექნება

$$dx=x'dy,\ y'=\frac{1}{x'},\ y''=-\frac{x''}{x'^3},\ y'''=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5},\ldots,$$

სადაც

$$x'=\frac{dx}{dy},\ x''=\frac{d^2x}{dy^2},\ldots,\ x^{(n)}=\frac{d^nx}{dy^n}.$$

ამის შემდეგ ფუნქციონალი (4.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$J[y,y',y'',\ldots,y^{(n)}]=\int_{y_1}^{y_2}F\left(y,\frac{1}{x'},-\frac{x''}{x'^3},\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5},\ldots\right)x'dy=$$

$$=\int_{y_1}^{y_2}\overline{F}(y,x',x'',\ldots,x^{(n)})\,dy, \tag{5.1}$$

სადაც

$$\overline{F}(y,x',x'',\ldots,x^{(n)})=F\left(y,\frac{1}{x'},-\frac{x''}{x'^3},\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5},\ldots\right)x'.$$

ინტეგრალში (5.1) ფუნქცია $\overline{F}$ ცხადი სახით არ შეიცავს საძიებელ ფუნქციას x, ამიტომ საქმე გვაქვს ზემოთ განხილულ პირველ შემთხვევასთან. ეილერ-პუასონის განტოლებას ექნება სახე:

$$\overline{F}_{x'} - \frac{d}{dy} F_{x''} + \dots \mp \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \overline{F}_{x^{(n)}} = 0,$$

რომლის რიგი უდრის $2n - 1$.

შემთხვევა 3. ვთქვათ (4.1) ფუნქციონალში ფუნქცია F დამოკიდებულია მხოლოდ წარმოებულზე $y^{(n)}$. მაშინ შესაბამისი ეილერ-პუასონის განტოლების ინტეგრება უშუალოდ შესრულდება ბოლომდე. მართლაც, გვექნება

$$\frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \quad \text{ანუ} \quad F_{y^{(n)}} = P_{n-1}(x),$$

სადაც $P_{n-1}(x)$ არის $n-1$ ხარისხის მრავალწევრი ნებისმიერი კოეფიციენტებით. განვსაზღვროთ უკანასკნელი ტოლობიდან

$$y^{(n)} = f(P_{n-1}(x)),$$

საიდანაც n-ჯერ განმეორებითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$y = \overbrace{\int\int \cdots \int}^{n} f(P_{n-1}(x))\, dx^n + Q_{n-1}(x),$$

აქ $Q_{n-1}(x)$ წარმოადგენს $n-1$ ხარისხის მრავალწევრს ნებისმიერი კოეფიციენტებით.

§ 6. მაგალითები. 1) მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y, y''] = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 - y''^2 + x^2)\, dx$$

ექსტრემალთა ოჯახი.

აქ ფუნქცია $F = 16y^2 - y''^2 + x^2$. განტოლებას (4.4) აქვს სახე

$$y^{(4)} - 16y = 0.$$

იგი, როგორც ვხედავთ, არის მეოთხე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით, რომლის ზოგადი ინტეგრალი

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x$$

წარმოადგენს ექსტრემალთა საძიებელ ოჯახს.

2) მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y, y'''] = \int_{x_1}^{x_2} (2xy + y'''^2)\, dx$$

ექსტრემალთა ოჯახი.

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F=2xy+y'''^2$. ეილერ-პუასონის განტოლება იქნება: $y^{(6)}=x$, რომლის ზოგადი ინტეგრალი $y=\frac{1}{7!}x^7+C_1x^5+$ $+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$ არის ექვს პარამეტრზე დამოკიდებული მეშვიდე ხარისხის მრავალწევრების ოჯახი.

3) შევისწავლოთ ფუნქციონალის

$$J[y, y'']=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-y^2+x^2)\,dx$$

ექსტრემუმი შემდეგ სასაზღვრო პირობებში:

$$y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

ეილერ-პუასონის განტოლება არის $y^{(4)}-y=0$, რომლის ზოგადი ინტეგრალია $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები, გვექნება $C_1=C_2=C_4=0$, $C_3=1$. მაშასადამე, მოცემულმა ფუნქციონალმა შეიძლება ექსტრემუმს მიაღწიოს მხოლოდ წირზე $y=\cos x$.

§ 7. **მრავალ არგუმენტზე და მათი მაღალი რიგის წარმოებულებზე დამოკიდებული ფუნქციონალის ექსტრემუმი.** ავიღოთ ორ არგუმენტზე და მათი მაღალი რიგის წარმოებულებზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[y, y',\ldots, y^{(n)}, z, z',\ldots, z^{(m)}]=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}F(x, y, y',\ldots, y^{(n)}, z, z',\ldots, z^{(m)})\,dx \tag{7.1}$$

და შევისწავლოთ მისი ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა. ამისათვის ჯერ უცვლელი დავტოვოთ ფუნქცია $z=z(x)$ და ვიგულისხმოთ, რომ მხოლოდ ფუნქცია $y=y(x)$ განიცდის ვარირებას. მაშინ შეგვიძლია (7.1) განვიხილოთ როგორც ერთ $y=y(x)$ არგუმენტზე და მისი მაღალი რიგის წარმოებულებზე დამოკიდებული ფუნქციონალი. ექსტრემუმის აუცილებელი პირობის გამოსაყვანად, როგორც ვხედავთ, საკმარისია გავიმეოროთ § 4-ის გამოყენებული მსჯელობა. შედეგად მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0. \tag{7.2}$$

ახლა უცვლელი დავტოვოთ ფუნქცია $y=y(x)$ და ვიგულისხმოთ, რომ მხოლოდ ფუნქცია $z=z(x)$ განიცდის ვარირებას. მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0. \tag{7.3}$$

მაშასადამე, (7.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა საბოლოოდ ჩაიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის სახით:

$$\left.\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{7.4}$$

ცხადია, როცა F დამოკიდებულია r ფუნქციაზე და მათ სხვადასხვა რიგის მაღალ წარმოებულებზე:

$$J[y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}; \ldots; y_r, y_r', \ldots, y_r^{(k_r)}] =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}; \ldots; y_r, y_r', \ldots, y_r^{(k_r)})\, dx,$$

მაშინ მისი ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა ჩაიწერება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების შემდეგი სისტემით

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \ldots + (-1)^{(k_i)} \frac{d^{k_i}}{dx^{k_i}} F_{y_i^{(k_i)}} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, r.$$

§ 8. **ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემა ორჯერადი ინტეგრალისათვის.** ქვემოთ დაგვჭირდება შემდეგი

ლემა. *ვთქვათ ფუნქცია $f(x, y)$ უწყვეტია C წირით შემოსაზღვრულ არეში D. გარდა ამისა, ვთქვათ ნებისმიერი ფუნქციისათვის $\eta(x, y)$, რომელიც პირველი რიგის ნაწილობით წარმოებულებთან ერთად უწყვეტია D არეში და ნულის ტოლი C წირზე, მართებულია ტოლობა*

$$\iint_D f(x, y)\, \eta(x, y)\, dx\, dy = 0, \tag{8.1}$$

მაშინ D არის ყოველ წერტილში $f(x, y) = 0$.

დამტკიცება. ვთქვათ D არის შიგნით არსებობს წერტილი (x_1, y_1), რომელშიც $f(x_1, y_1) > 0$. მაშინ, არსებობს ისეთი წრეწირი $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varepsilon^2$, რადიუსით ε, რომელშიც ფუნქცია $f(x, y) > 0$.

განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \geq \varepsilon^2, \\ [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \varepsilon^2]^2 & \text{როცა } (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < \varepsilon^2. \end{cases}$$

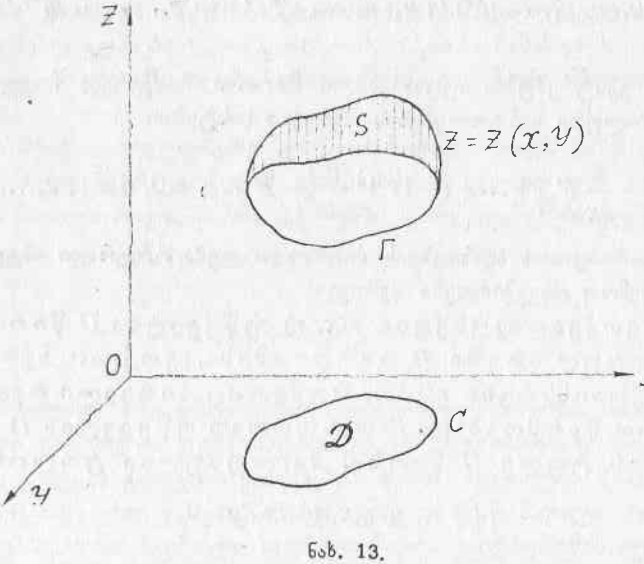
ასე განსაზღვრული ფუნქცია $\eta(x, y)$ აკმაყოფილებს ლემის პირობებს და, მაშასადამე, ერთი მხრივ, შესრულებული უნდა იყოს პირობა (8.1). თუმცა, მეორე მხრივ, გვაქვს

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, \eta(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x, y)\, \eta(x, y)\, dxdy > 0,$$

სადაც D_ε აღნიშნავს $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\varepsilon^2$ წრეწირის შიგა წერტილების სიმრავლეს, რომელზედაც $\eta(x, y)=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-\varepsilon^2]^2$.

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემას.

§ 9. მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალის ექსტრემუმი. ვარიაციათა აღრიცხვა შეისწავლის ისეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანასაც, რომელიც დამოკიდებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე. გამოთვლების შემოკლებისათვის ქვემოთ შევისწავლით ორი ცვლადის ფუნქციაზე და მისი პირველი რიგის ნაწილობით წარმოებულებზე დამოკიდებულ ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას.



ნახ. 13.

ვთქვათ $z=z(x, y)$ არის s ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის სივრცის შეკრულ Γ წირზე. ვიგულისხმოთ, რომ Γ წირის პროექცია xOy სიბრტყეში არის მარტივი შეკრული C კონტური, რომელიც წარმოადგენს ამ სიბრტყეში მდებარე ბრტყელი D არის საზღვარს (ნახ. 13). მოვითხოვოთ, რომ ფუნქცია $z=z(x, y)$ და მისი ნაწილობითი წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ უწყვეტი ფუნქციებია D არეში. s ზედაპირს,

რომლის განტოლება $z=z(x, y)$ ამ პირობებს აკმაყოფილებს, დასაშვები ზედაპირი ვუწოდოთ. ვთქვათ, გარდა ამისა, ფუნქციას

$$F=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=F(x, y, z, p, q)$$

აქვს უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით ყველა არგუმენტის მიმართ გარკვეულ ხუთგანზომილებიან R არეში, რომელშიც იცვლებიან x, y, z, p, q.

ავიღოთ ფუნქციონალი

$$J[z]=\iint_D F(x, y, z, p, q)\, dxdy, \tag{9.1}$$

რომელიც განსაზღვრულია Γ წირზე გამავალ დასაშვები ზედაპირების სიმრავლეზე. ვთქვათ $z=z(x, y)$ არის ექსტრემალური ზედაპირი. განვიხილოთ ერთ პარამეტრზე დამოკიდებული ზედაპირების ოჯახი: $z(x, y, \alpha)= =z(x, y)+\alpha\,[\widetilde{z}(x, y)-z(x, y)]=z(x, y)+\alpha\delta z(x, y)$, სადაც α პარამეტრია, $\widetilde{z}=\widetilde{z}(x, y)$ არის ერთ-ერთი დასაშვები ზედაპირი, $\delta z(x, y)$ წარმოადგენს $z=z(x, y)$ ზედაპირის ვარიაციას. ცხადია, როცა $\alpha=0$, მაშინ $z(x, y, \alpha)$ ოჯახიდან მივიღებთ ექსტრემალურ ზედაპირს: $z(x, y, 0)=z(x, y)$; როცა $\alpha=1$, მაშინ იმავე ოჯახიდან მივიღებთ დასაშვებ ზედაპირს $\widetilde{z}=\widetilde{z}(x, y)$. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალი (9.1), განსაზღვრული $z= =z(x, y, \alpha)$ ზედაპირების ოჯახზე, წარმოადგენს α პარამეტრის ფუნქციას, რომელიც მნიშვნელობისათვის $\alpha=0$ მიაღწევს ექსტრემუმს. ამისათვის კი, როგორც ვიცით, აუცილებელია ფუნქციონალის ვარიაცია იყოს ნულის ტოლი:

$$\delta J=\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\iint_D F(x, y, z(x, y, \alpha),\ p(x, y, \alpha),\ q(x, y, \alpha))\, dxdy\right\}_{\alpha=0}=$$

$$=\iint_D (F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q)\, dx\, dy, \tag{9.2}$$

სადაც

$$p(x, y, \alpha)=\frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x}=p(x, y)+\alpha\delta p,$$

$$q(x, y, \alpha)=q(x, y)+\alpha\delta q.$$

წარმოვადგინოთ ტოლობა (9.2) შემდეგნაირად:

$$\iint_D F_z\delta z dxdy+\iint_D (F_p\delta p+F_q\delta q)\, dx\, dy=0. \tag{9.3}$$

გამოვიყენოთ ახლა იგივეობებიდან

$$F_p\delta p=\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)-\delta z\frac{\partial}{\partial x}(F_p),$$

$$F_q\delta q=\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z)-\delta z\frac{\partial}{\partial y}(F_q),$$

რომელთა ორივე ნაწილებს თუ გავამრავლებთ $dx\,dy$-ზე, მიღებულ შედეგებს შევკრებთ და შემდეგ D არეზე ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$\iint\limits_D (F_p\delta p+F_q\delta q)\,dxdy=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z)\right]dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q)\right]\delta z\,dx\,dy, \tag{9.4}$$

სადაც

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p)=F_{px}+F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x}+F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_q)=F_{qy}+F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y}+F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y}+F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

გარდავქმნათ (9.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი ინტეგრალი გრინის ცნობილი ფორმულით (იხ. ჩვენი კურსის ტომი II, გვ. 456), რომელიც D არეზე გავრცელებულ ორჯერად ინტეგრალს აკავშირებს D არის C საზღვარზე აღებული წირით ინტეგრალთან, გვექნება

$$\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z)\right]dx\,dy=\int\limits_C(F_p dy-F_q dx)\,\delta z.$$

ვინაიდან, პირობის მიხედვით, ყველა დასაშვები ზედაპირი Γ წირზე გადის, ამიტომ C წირზე ზედაპირის ვარიაცია $\delta z=0$. მაშასადამე, უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში წირითი ინტეგრალი უდრის ნულს.

ამის შემდეგ, ტოლობა (9.4) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iint\limits_D(F_p\delta p+F_q\delta q)\,dx\,dy=-\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p)+\frac{\partial}{\partial y}(F_q)\right]\delta z\,dx\,dy.$$

დავუბრუნდეთ ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას (9,3), საიდანაც, უკანასკნელი ტოლობის ძალით, დავწერთ

$$\iint\limits_D\left[F_z-\frac{\partial}{\partial x}(F_p)-\frac{\partial}{\partial y}(F_q)\right]\delta z\,dx\,dy=0. \tag{9.5}$$

ტოლობაში (9.5) ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველი მამრავლი წარმოადგენს ორი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას C წირით შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში. მეორე მამრავლი δz წარმოადგენს $z=z(x, y)$ ფუნქციის ნებისმიერ ვარიაციას, რომელიც უწყვეტია თავისი ნაწილობითი წარმოებულებით D არეში და ნულის ტოლია C საზღვარზე. ამ პირობებში, § 8-ში დამტკიცებული ლემის ძალით, ტოლობა (9.5) შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა D არის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}(F_p)-\frac{\partial}{\partial y}(F_q)=0. \tag{9.6}$$

ასეთია (9.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა, რომელსაც ოსტროგრადსკის პირობას უწოდებენ. ცხადია, განტოლება (9.6) წარმოადგენს მეორე რიგის არაწრფივ ნაწილობით წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას. ფუნქცია, რომელსაც შეუძლია ექსტრემუმი მიანიჭოს (9.1) ფუნქციონალს, უნდა აკმაყოფილებდეს (9.6) განტოლებას.

§ 10. მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანის ზოგიერთი განზოგადება. 1. წინა პარაგრაფში განხილული ამოცანა შეიძლება შევისწავლოთ n-განზომილებიან სივრცეში.

ავიღოთ n-განზომილებიანი სივრცის შემოსაზღვრული არე T და ამ არეზე განსაზღვრული ისეთი უწყვეტი $z=z(x_1,\ldots, x_n)$ ფუნქციების სიმრავლე C_1, რომლებსაც T არეში აქვთ პირველი რიგის უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები $p_i=\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, $i=1, 2,\ldots, n$. აღვნიშნოთ C_1 სიმრავლის ყველა ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც T არის საზღვარზე s მიიღებენ წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობებს $\overline{C}_1$-ით.

დავაყენოთ შემდეგი ამოცანა: $\overline{C}_1$ სიმრავლის ყველა ფუნქციას შორის მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც ექსტრემალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს ფუნქციონალს

$$J[z]=\int\limits_T\cdots\int F(x_1,\ldots, x_n, z, p_1,\ldots, p_n)\, dx_1\cdots dx_n, \tag{10.1}$$

სადაც F წარმოადგენს $2n+1$ არგუმენტის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციას, რომელსაც ყველა არგუმენტის მიმართ გააჩნია ნაწილობითი წარმოებულები მესამე რიგამდე ჩათვლით.

ამოცანის გამოკვლევისათვის უნდა გამოვიყენოთ ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემა n-ჯერადი ინტეგრალისათვის: თუ $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას T არეში, $\eta(x_1,\ldots, x_n)$ არის თავის პირველი რიგის ნაწილობით წარმოებულებთან ერთად ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია T არეში, რომელიც s საზღვარზე ნულის ტოლია, ამასთან თუ

$$\int_T \cdots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, \eta(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

მაშინ T არის ყოველ წერტილში $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

ლემა მტკიცდება ორ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციის შემთხვევის ანალოგიურად.

მოყვანილი ლემის დახმარებით დავასკვნით, რომ (10.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმისათვის აუცილებელია ექსტრემალი $z = z(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{C}_1$ წარმოადგენდეს დიფერენციალური განტოლების

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{p_i}) = 0 \tag{10.2}$$

ინტეგრალს.

2. ხშირად, მათემატიკური ფიზიკის განტოლებათა თეორიაში, გვხვდება ისეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის გამოკვლევა, რომლის ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეიცავს მაღალი რიგის ნაწილობით წარმოებულებსაც. თუ გავიმეორებთ § 9-ში მოყვანილ გარდაქმნებს საჭირო რიცხვჯერ, ადვილად მივიღებთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესაბამის აუცილებელ პირობას. მაგალითად, ფუნქციონალის

$$J[z] = \iint_D F(x, y, z, p, q, r, s, t)\, dx\, dy \tag{10.3}$$

ექსტრემალი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგი სახის მეოთხე რიგის ნაწილობით წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}(F_p) - \frac{\partial}{\partial y}(E_q) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_r) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(F_s) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_t) = 0, \tag{10.4}$$

სადაც

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

§ **11. მაგალითები.** მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[z] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{11.1}$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა.

ეს ინტეგრალი წარმოადგენს (9.1) ყაიდის ფუნქციონალს. მისი ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას (9.6) ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

ანუ

$$\Delta z=0, \tag{11.2}$$

რომელიც წარმოადგენს ლაპლასის ცნობილ დიფერენციალურ განტოლებას. მოცემული (11.1) ფუნქციონალის ექსტრემალური ზედაპირი უნდა იყოს (11.2) განტოლების უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ისეთი ინტეგრალი D არეში, რომელიც D არის საზღვარზე მიიღებს მოცემულ მნიშვნელობას. როგორც ვხედავთ, საქმე გვაქვს დირიხლეს ამოცანასთან, რომლის გადაწყვეტის მეთოდი ცნობილია მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში.

2. ავიღოთ ფუნქციონალი

$$J[z]=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x, y)\right]dx\,dy, \tag{11.3}$$

სადაც $f(x, y)$ წარმოადგენს მოცემულ უწყვეტ ფუნქციას D არეში. ვეძებოთ მისი უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ექსტრემალური ზედაპირი, რომელიც D არის საზღვარზე ღებულობს მოცემულ მნიშვნელობას.

აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$F(x, y, z, p, q)=p^2+q^2+2zf(x, y),$$

ამიტომ

$$F_z=2f(x, y),\ F_p=2p,\ F_q=2q,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p)=2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial y}(F_q)=2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

ოსტროგრადსკის განტოლებას (9.6) ექნება სახე

$$\Delta z=f(x, y), \tag{11.4}$$

რომელიც მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში ცნობილია პუასონის განტოლების სახელწოდებით.

ამრიგად ფუნქცია, რომელიც ექსტრემუმს ანიჭებს ფუნქციონალს (11.3) უნდა იყოს პუასონის (11.4) განტოლების ინტეგრალი D არეში, რომელიც D არის საზღვარზე ღებულობს მოცემულ მნიშვნელობას.

3. სამგანზომილებიან სივრცეში მოვძებნოთ ისეთი ზედაპირი $z=z(x, y)$, რომელიც მოჭიმულია მოცემულ წირზე Γ და ექნება უმცირესი ფართობი.

ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება ფუნქციონალის

$$J[z]=\iint\limits_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \tag{11.5}$$

მინიმუმის მოძებნაზე, სადაც $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. იგულისხმება, რომ Γ წირზე მოჭიმული ზედაპირები $z=z(x, y)$ უწყვეტად წარმოებადია და აქვთ სასრული მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულები D არეში.

განტოლება (9.6) მოგვცემს

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0, \tag{11.6}$$

სადაც $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. ექსტრემალური ზედაპირი აკმაყოფილებს (11.6) განტოლებას, რომელსაც მინიმალური ზედაპირის დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ. მინიმალური ზედაპირის დამახასიათებელი ის არის, რომ საშუალო სიმრუდე მის ნებისმიერ წერტილში ნულის ტოლია. ფიზიკურად მინიმალური ზედაპირი წარმოადგენს საპნის ქაფის აპკს, რომელიც მოჭიმულია Γ წირზე.

4. დავსვათ საკითხი ისეთი $u=u(x, y, z)$ ფუნქციის მოძებნის შესახებ, რომელიც მიანიჭებს მინიმუმს სამჯერად ინტეგრალს

$$J[u]=\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz \tag{11.7}$$

და ინტეგრების V არის საზღვარზე σ მიიღებს მოცემულ მნიშვნელობას.

ამოცანის ამოხსნისათვის უნდა გამოვიყენოთ განტოლება (10.2), რომელშიც $n=3$. მაშინ, გვექნება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

მაშასადამე, საძიებელი ფუნქცია წარმოადგენს ლაპლასის განტოლების ისეთ ინტეგრალს, რომლის მნიშვნელობა σ საზღვარზე მოცემულია. საკითხი მიყვანილია დირიხლეს ამოცანაზე სამგანზომილებიან სივრცეში, რომლის გადაწყვეტა ცნობილია მათემატიკური ფიზიკის კურსში.

ელექტროდინამიკაში ცნობილია, რომ დირიხლეს ამოცანის ინტეგრალი $u(x, y, z)$ წარმოადგენს ელექტრონული ველის პოტენციალს, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ველის სრულ ენერგიას, გამოსახულს (11.7) ინტეგრალით.

თავი IX

ვარიაციული ამოცანა პარამეტრული სახით

§ 1. **შესავალი.** ვარიაციათა აღრიცხვის მარტივ ამოცანაში (თავი VII), რომელიც შეეხებოდა ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \tag{1.1}$$

ექსტრემუმს, დასაშვები წირების განტოლებას ჰქონდა სახე: $y=y(x)$. ამასთან ვგულისხმობდით, რომ $y=y(x)$ არის ცალსახა ფუნქცია სეგმენტზე $[x_1, x_2]$. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ განხილვიდან გამორიცხული იყო შემთხვევა, როცა Oy ღერძის პარალელური წრფე დასაშვებ წირს $y=y(x)$ კვეთს ერთზე მეტ წერტილში. გამორიცხული იყო განხილვიდან აგრეთვე შემთხვევა, როცა $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემაერთებელ დასაშვებ წირს რომელიმე წერტილში აქვს Oy ღერძის პარალელური მხები. შესადარებელი წირების მიმართ ასეთი შეზღუდვები ვარიაციათა აღრიცხვის ამოცანებს ვიწრო ჩარჩოებში აყენებს.

იმისათვის, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანას ჩამოვაცილოთ ხსენებული შეზღუდვები, საჭიროა განვიხილოთ ექსტრემუმის საკითხი პარამეტრული სახით.

§ 2. **ზოგიერთი წინასწარი შენიშვნა.** ვიგულისხმოთ, რომ დასაშვები წირის განტოლება ჩაწერილია პარამეტრული სახით

$$x=x(t), \quad y=y(t), \tag{2.1}$$

სადაც t პარამეტრია, ხოლო $x(t)$ და $y(t)$ — მოცემული წარმოებადი ფუნქციები. მაშინ არსებობს იმავე წირის პარამეტრული ჩაწერის მრავალი სხვა ვარიანტი. მაგალითად, ელიფსის განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

შეიძლება ჩავწეროთ პარამეტრული სახით ასე

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t,$$

ან ასე

$$x=-\frac{2a^2b\tau}{b^2+a^2\tau^2},\quad y=\frac{b(b^2-a^2\tau^2)}{b^2+a^2\tau^2},$$

ან კიდევ ასე

$$x=\frac{2a\nu}{1+\nu^2},\quad y=\frac{b(1-\nu^2)}{1+\nu^2}$$

და ა. შ. წირის განტოლების პარამეტრული სახით ჩაწერის სხვადასხვა ვარიანტები მიიღება ერთიმეორისაგან პარამეტრის სათანადო გარდაქმნით. ვთქვათ $t=\varphi(\tau)$, სადაც τ ახალი პარამეტრია და $\varphi(\tau)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია. მაშინ (2.1) ტოლობებიდან მივიღებთ იმავე დასაშვები წირის განტოლების ჩაწერას ახალი პარამეტრით

$$x=x(\varphi(\tau))=f_1(\tau),\quad y=y(\varphi(\tau))=f_2(\tau),$$

ამასთან

$$x'_\tau=x'_t\,\varphi'(\tau),\quad y'_\tau=y'_t\,\varphi'(\tau).$$

მოვითხოვოთ, რომ $t=\varphi(\tau)$ არის მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია. ეს იმას ნიშნავს, რომ t და τ პარამეტრებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება, $\varphi'(\tau)>0$ და როცა ისინი ერთდროულად იზრდებიან, მაშინ დასაშვები წირის შემოვლა ერთი და იმავე მიმართულებით ხდება.

ვთქვათ დასაშვები წირის განტოლება ჩაწერილია პარამეტრული სახით (2.1). განვიხილოთ (2.1) წირის გასწვრივ აღებული წირითი ინტეგრალი

$$J=\int_{t_1}^{t_2}F(x(t),y(t),x'(t),y'(t))\,dt,\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,\tag{2.2}$$

სადაც t_1 და t_2 წარმოადგენენ t პარამეტრის მნიშვნელობებს, რომლებიც შეესაბამებიან წირის საწყის და ბოლო წერტილებს. ვიგულისხმოთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ერთობლივ უწყვეტია თავისი არგუმენტების მიმართ და აქვს უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები მესამე რიგამდე ჩათვლით. თუ გადავალთ ახალ პარამეტრზე $t=\varphi(\tau)$, მივიღებთ იმავე წირის გასწვრივ გამოსათვლელ ინტეგრალს

$$J_1=\int_{\tau_1}^{\tau_2}F(x,y,x'_\tau,y'_\tau)\,d\tau,$$

რომელიც საზოგადოდ არ უდრის J ინტეგრალს. როგორც ვიცით, წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობა დამოკიდებულია არა მარტო წირისაგან, რომლის გასწვრივ ინტეგრება უნდა შესრულდეს, არამედ დამოკიდებულია აგრეთვე პარამეტრის შერჩევისაგან, რომლის საშუალებითაც წირის

განტოლებაა ჩაწერილი. იმისათვის, რომ ნებისმიერი დასაშვები წირის გასწვრივ აღებული J ინტეგრალის მნიშვნელობა დამოუკიდებელი იყოს პარამეტრის შერჩევისაგან, საჭიროა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია F აკმაყოფილებდეს გარკვეულ პირობებს. სახელდობრ, რაკი მოვითხოვთ, რომ უნდა $J=J_1$, ამიტომ ნებისმიერი ზედა და ქვედა საზღვრებისათვის τ_2 და τ_1 მართებული უნდა იყოს ტოლობა

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F\left(x,\, y,\, \frac{x'(\tau)}{\varphi'(\tau)},\, \frac{y'(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right)\varphi'(\tau)\, d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2} F(x,\, y,\, x'(\tau),\, y'(\tau))\, d\tau.$$

თუ ახლა ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში დავაფიქსირებთ ქვედა საზღვარს τ_1, მაშინ ორივე ინტეგრალი წარმოგვიდგება როგორც ცვლადი ზედა საზღვრის ფუნქციები, რომელთა გაწარმოება ზედა საზღვრით მოგვცემს

$$F\left(x,\, y,\, \frac{x'(\tau)}{\varphi'(\tau)},\, \frac{y'(\tau)}{\varphi'(\tau)}\right)\varphi'(\tau)=F(x,\, y,\, x'(\tau),\, y'(\tau))$$

ანუ

$$F(x,\, y,\, kx',\, ky')=kF(x,\, y,\, x',\, y'), \tag{2.3}$$

სადაც $k=\dfrac{1}{\varphi'(\tau)}>0$. როგორც ვხედავთ, იმისათვის რომ ინტეგრალი (2.2) დამოკიდებული იყოს მხოლოდ საინტეგრო წირისაგან $x=x(t)$, $y=y(t)$ და დამოუკიდებელი იყოს პარამეტრის შერჩევისაგან, საკმარისია ინტეგრალქვეშა ფუნქცია F იყოს x' და y' ცვლადების მიმართ დადებითად ერთგვაროვანი ფუნქცია, რომლის ერთგვაროვნების მაჩვენებელი უდრის ერთს. ქვევით ვიგულისხმებთ, რომ ეს პირობა შესრულებულია.

ისიც შევნიშნოთ, რომ თანახმად ეილერის თეორემისა ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ (იხ. ჩვენი კურსის მეორე ტომი, გვ. 214), მართებულია ტოლობა

$$F(x,\, y,\, x',\, y')=x'F_{x'}+y'F_{y'}, \tag{2.4}$$

სადაც $F_{x'}$ და $F_{y'}$ ნაწილობითი წარმოებულებია F ფუნქციისა x' და y' არგუმენტებით.

§ 3. პარამეტრული სახით მოცემული წირების ε მახლობლობა. მინიმალური და მაქსიმალური წირები. ვთქვათ γ_1 აღნიშნავს $C^{(1)}[t_1,\, t_2]$ სივრცის წირს, რომლის განტოლება ჩაწერილია პარამეტრული სახით (2.1). ვუწოდოთ $\gamma_2 \in C^{(1)}[t_1,\, t_2]$ წირს γ_1 წირის ε მახლობელი წირი, თუ მისი წერტილების მანძილები γ_1 წირის შესაბამის წერტილებამდე ნაკლებია $\varepsilon>0$ რიცხვზე. ვიტყვით, რომ $A(x(t_1),\, y(t_1))$ და $B(x(t_2),\, y(t_2))$ წერტილების შემაერთებელ წირთა შორის, წირი γ_1 მ ი ნ ი მ ა ლ უ რ ი წ ი რ ი ა ფუნქციონალისა (2.2), თუ არსებობს ისეთი $\varepsilon>0$, რომ γ_1 წირის გასწვ-

რივ აღებულ (2.2) ინტეგრალს უმცირესი მნიშვნელობა აქვს ყველა სხვა γ_2 წირის გასწვრივ აღებული იმავე ინტეგრალის მნიშვნელობასთან შედარებით, რომელიც ε მახლობლობაშია γ_1 წირთან.

მსგავსად განისაზღვრება (2.2) ფუნქციონალის მაქსიმალური წირი.

წირს, რომელიც ზემომოყვანილი აზრით, უმცირეს (მინიმალურ) ან უდიდეს (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას ანიჭებს (2.2) ფუნქციონალს ექსტრემალი ეწოდება.

§ 4. **დამხმარე ტოლობები.** გავაწარმოოთ (2.4) ტოლობა x, y, x', y' ცვლადების მიმართ, გვექნება

$$\left.\begin{aligned} F_x=x'F_{xx'}+y'F_{xy'}, \quad F_y=x'F_{yx'}+y'F_{yy'}, \\ x'F_{x'^2}+y'F_{x'y'}=0, \quad x'F_{x'y'}+y'F_{y'^2}=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

უკანასკნელი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{F_{x'^2}}{y'^2}=\frac{F_{x'y'}}{-x'y'}=\frac{F_{y'^2}}{x'^2}=F_1(x, y, x', y'), \tag{4.2}$$

სადაც $F_1(x, y, x', y')$ უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, ამასთან x' და y' ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან: $x'^2+y'^2 \neq 0$. გარდა ამისა, $F_1(x, y, x', y')$ არის ერთგვართვანი ფუნქცია x' და y' არგუმენტების მიმართ, რომლის ერთგვაროვნების მაჩვენებელია -3. მართლაც, F ფუნქციის ყოველი გაწარმოების შედეგად x' და y' ცვლადის მიმართ მისი ერთგვაროვნების მაჩვენებელი ერთი ერთეულით შემცირდება. მაშასადამე, $F_{x'}$ და $F_{y'}$ არიან ნული რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციები x' და y' ცვლადების მიმართ, ხოლო $F_{x'^2}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'^2}$ იქნებიან ერთგვაროვანი ფუნქციები ერთგვაროვნების მაჩვენებლით -1. ცხადია, რადგან F_1 მიღებულია მინუს ერთი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციის გაყოფით იმავე ცვლადების მიმართ მეორე რიგის ერთგვაროვან ფუნქციაზე, ამიტომ $F_1(x, y, x', y')$ იქნება -3 რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x', y' ცვლადების მიმართ.

§ 5. **პარამეტრული სახით ჩაწერილი ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები.** (2.2) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობების მოსაძებნად დავუშვათ, რომ γ_1 ექსტრემალის განტოლება ჩაწერილია (2.1) სახით. შესადარებელი წირის განტოლებები ავიღოთ შემდეგი სახით:

$$x=x(t)+\alpha\xi(t), \quad y=y(t)+\alpha\eta(t), \tag{5.1}$$

სადაც $\xi(t)$ და $\eta(t)$ არიან $C^{(1)}[t_1, t_2]$ სივრცის ნებისმიერი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს $\xi(t_1)=\eta(t_1)=0$, $\xi(t_2)=$

$=\eta(t_2)=0$, ხოლო α პარამეტრია. შესადარებელი წირისათვის (5.1) ფუნქციონალი (2.2) წარმოადგენს α პარამეტრის ფუნქციას

$$J[\alpha]=\int\limits_{t_1}^{t_2} F(x(t)+\alpha\xi(t)\ y(t)+\alpha\eta(t),\ x'(t)+\alpha\xi'(t),\ y'(t)+\alpha\eta'(t))dt, \tag{5.2}$$

რომელიც ექსტრემუმს მიაღწევს როცა $\alpha=0$. ამისათვის კი აუცილებელია, რომ პირველი ვარიაცია $\delta J[\alpha]=0$. თუ მივმართავთ ვარიაციათა აღრიცხვის მარტივ ამოცანაში გამოყენებულ გარდაქმნებს (თავი VII) დავრწმუნდებით, რომ (5.2) ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\delta J[\alpha]=\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\left[F_x+\frac{d}{dt}F_{x'}\right]\xi(t)+\left[F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}\right]\eta(t)\right\}dt.$$

ვინაიდან $\xi(t)$ და $\eta(t)$ ნებისმიერი ფუნქციებია, თანახმად ძირითადი ლემისა (თავი VII, § 12), აქედან გვექნება

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0,\ \ F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0. \tag{5.3}$$

ამრიგად, მივიღეთ დიფერენციალური განტოლებების სისტემა ორი უცნობი ფუნქციით $x(t)$ და $y(t)$.

შევნიშნოთ, რომ (5.3) არ წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლებების დამოუკიდებელ სისტემას. მართლაც, (5.3) განტოლებებს დააკმაყოფილებს არა მარტო ფუნქციების წყვილი $x(t)$ და $y(t)$, არამედ მას დააკმაყოფილებს აგრეთვე ფუნქციების ნებისმიერი სხვა წყვილი, რომლებიც გვაძლევენ იმავე წირის სხვაგვარ პარამეტრულ წარმოდგენას.

მართლაც, ჩავწეროთ სისტემა (5.3) გაშლილი სახით:

$$\left.\begin{aligned} &F_x-F_{xx'}x'-F_{yx'}-F_{x'^2}x''-F_{x'y'}y''=0,\\ &F_y-F_{yy'}y'-F_{xy'}x'-F_{x'y'}x''-F_{y'^2}y''=0,\end{aligned}\right\},$$

რომელშიც წარმოებულები F_x და F_y შევცვალოთ (4.1) ფორმულებიდან, ხოლო წარმოებულები $F_{x'^2}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'^2}$ შევცვალოთ (4.2) ტოლობებიდან. ამის შემდეგ წინა განტოლებები ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$x'w=0,\ y'w=0, \tag{5.4}$$

სადაც

$$w=(x'y''-y'x'')F_1(x,\ y,\ x',\ y')+F_{xy'}-F_{yx'}.$$

ახლა ისიც გავიხსენოთ, რომ ცვლადები x' და y' ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან და, მაშასადამე, (5.4) ტოლობები მიიყვანება შემდეგი სახის ერთ დიფერენციალურ განტოლებამდე:

$$(x'y''-y'x'')\,F_1(x,\,y,\,x',\,y')+F_{xy'}-F_{yx'}=0. \tag{5.5}$$

ვთქვათ ფუნქციების წყვილი $x=x(t)$, $y=y(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას (5.5). წარმოვადგინოთ იმავე წირის განტოლება ახალი τ პარამეტრის საშუალებით: $x=x(\varphi(\tau))$, $y=y(\varphi(\tau))$, სადაც $t=\varphi(\tau)$. მაშინ ეს უკანასკნელი წყვილი ფუნქციებისა აგრეთვე აკმაყოფილებს (5.5) განტოლებას. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია განტოლებაში (5.5) უშუალოდ ჩავსვათ ფუნქციები $x=x(\varphi(\tau))$, $y=y(\varphi(\tau))$ და თანაც ვისარგებლოთ იმით, რომ $F_1(x,\,y,\,x',\,y')$ არის ერთგვაროვანი ფუნქცია x' და y' არგუმენტების მიმართ, რომლის ერთგვაროვნების მაჩვენებელია -3.

განტოლებათა სისტემა (5.3) დამოუკიდებელი სისტემა რომ ყოფილიყო, მაშინ მოცემულ სასაზღვრო პირობებში იარსებებდა მხოლოდ ერთადერთი წყვილი $x=x(t)$, $y=y(t)$ ფუნქციებისა, რომელიც დააკმაყოფილებდა (5.5) დიფერენციალურ განტოლებას.

ახლა უკვე ცხადია, რომ შეუძლებელია (5.5) განტოლებიდან განვსაზღვროთ ორი უცნობი ფუნქცია $x(t)$ და $y(t)$. იმისათვის, რომ მოვძებნოთ (2.2) ფუნქციონალის ექსტრემალური წირი, საჭიროა ვაინტეგროთ დიფერენციალური განტოლება (5.5) იმ განტოლებასთან ერთად, რომლის მიხედვითაც პარამეტრია შერჩეული. მაგალითად, თუ t პარამეტრის როლში ავიღებთ x ცვლადს, მაშინ $x=x(t)$, $y=y(t)$ ფუნქციების მოსაძებნად უნდა ვაინტეგროთ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი დამოუკიდებელი სისტემა

$$w=0,\ x'(t)=1,$$

თუ პარამეტრის როლში ავიღებთ დასაშვები წირის რკალის სიგრძეს, მაშინ ექსტრემალი უნდა აკმაყოფილებდეს დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$w=0,\ x'^2+y'^2=1.$$

და ა. შ.

საზოგადოდ, განტოლებას $w=0$ შეიძლება მივუერთოთ ნებისმიერი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს. მიერთების შედეგად მიღებული დიფერენციალური განტოლებების დამოუკიდებელი სისტემიდან განისაზღვრებიან ფუნქციები $x(t)$, $y(t)$ ინტეგრების მუდმივების სიზუსტით, რომლებიც მოგვცემენ დასაშვები წირის პარამეტრულ წარმოდგენას. ეს იმას ნიშნავს, რომ $w=0$ განტოლებასთან მიერთებული განტოლება ფაქტიურად განსაზღვრავს პარამეტრის შერჩევას.

განტოლებას (5.5) უწოდებენ ეილერის განტოლებას ვეიერშტრასის სახით. იგი შეიძლება ასეც ჩაიწეროს;

$$\frac{1}{r}=\frac{F_{xy'}-F_{yx'}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}F_1(x, y, x', y')}, \qquad (5.6)$$

სადაც r არის ექსტრემალის სიმრუდის რადიუსი.

§ 6. ვეიერშტრასის სახის დიფერენციალური განტოლების ინვარიანტობა. ეილერის განტოლების ვეიერშტრასისებურ სახეს აქვს ინვარიანტობის საყურადღებო თვისება.

თეორემა. დიფერენციალური განტოლება (5.6) ინვარიანტულია პარამეტრის გარდაქმნის მიმართ.

მართლაც, ექსტრემალის სიმრუდე $\frac{1}{r}$, ცხადია, არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რომელი პარამეტრით ჩავწერთ წირის განტოლებას. შევისწავლოთ (5.6) განტოლების მარჯვენა ნაწილი. ფუნქციები $F_{xy'}$, $F_{yx'}$ და, მაშასადამე, მათი სხვაობაც $F_{xy'}-F_{yx'}$, წარმოადგენენ ნული რიგის დადებითად განსაზღვრულ ერთგვაროვან ფუნქციებს x' და y' ცვლადების მიმართ. ფუნქცია $F_1(x, y. x', y')$, როგორც § 4-ში ვნახეთ ზემოთ, არის იმავე ცვლადების მიმართ —3 რიგის დადებითად განსაზღვრული ერთგვაროვანი ფუნქცია, ხოლო ფუნქცია $(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ წარმოადგენს +3 რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (5.6) განტოლების მარჯვენა ნაწილი არის ნული რიგის დადებითად ერთგვაროვანი ფუნქცია x', y' არგუმენტების მიმართ. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ (5.6) განტოლების მარჯვენა ნაწილი არ შეიცვლება თუ ცვლადებს x', y' გავამრავლებთ ნებისმიერ დადებით სიდიდეზე. შევცვალოთ ახლა პარამეტრი t ახალი პარამეტრით: $t=\varphi(\tau)$. მაშინ განტოლებაში (5.6) ცვლადები x', y' უნდა გავამრავლოთ ფუნქციაზე $\frac{dt}{d\tau}>0$. რაკი (5.6) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი არის ნული რიგის დადებითად ერთგვაროვანი ფუნქცია x', y' ცვლადების მიმართ, ამიტომ ახალი პარამეტრის შემოყვანით იგი არ შეიცვლება.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. ლეჟანდრის აუცილებელი პირობა პარამეტრული ამოცანისა. ვარიაციათა აღრიცხვის მარტივი ამოცანის შესწავლისას დამტკიცებული გვქონდა, რომ $J[y]$ ფუნქციონალის მინიმუმისათვის აუცილებელია მეორე ვარიაცია $\delta^2 J[y]$ იყოს არაუარყოფითი (იხ. თავი VII, § 23).

ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ როცა ფუნქციონალი ჩაწერილია პარამეტრული სახით (2.2), მაშინ მისი მინიმუმისათვის აუცილებელია არაუარყოფითი იყოს კვადრატული ფორმა:

$$T=F_{x'^2}\xi'^2(t)+2F_{x'y'}\xi'(t)\,\eta'(t)+F_{y'^2}\eta'^2(t)\geqslant 0, \qquad (7.1)$$

ფუნქცია T შეიძლება წარმოვადგინოთ $F_1(x, y, x', y')$ ფუნქციის საშუალებით. ამისათვის გამოვიყენოთ ფორმულები (4.2), საიდანაც გვექნება

$$F_{x'^2}=y'^2F_1,\ F_{x'y'}=-x'y'F_1,\ F_{y'^2}=x'^2F_1.$$

გავითვალისწინებთ რა უკანასკნელ ტოლობებს, (7.1) პირობიდან მივიღებთ

$$T=F_1(x, y, x', y')(\xi' y' - \eta' x')^2 \geqslant 0$$

და მინიმუმის პირობა მიიღებს სახეს

$$F_1(x, y, x', y') \geqslant 0. \qquad (7.2)$$

ამ უტოლობას უწოდებენ პარამეტრული ამოცანის მინიმუმის აუცილებელ პირობას ლეჟანდრისა.

§ 8. **პარამეტრული ამოცანის განზოგადება.** განვიხილოთ n-განზომილებიანი სივრცის დასაშვები წირის გასწვრივ აღებული ფუნქციონალი

$$J=\int_{t_1}^{t_2} F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n')\,dt, \qquad (8.1)$$

სადაც $x_i=x_i(t)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. ვიგულისხმოთ, რომ F წარმოადგენს პირველი რიგის დადებითად განსაზღვრულ ერთგვაროვან ფუნქციას $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ არგუმენტების მიმართ. მაშინ (8.1) ფუნქციონალის მნიშვნელობა დამოუკიდებელია დასაშვები წირის პარამეტრულ წარმოდგენაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ წირზე, რომლის გასწვრივაც აღებულია ინტეგრალი. სრულიად ისევე გამოვიყვანთ, როგორც § 5-ში, რომ J ფუნქციონალის ექსტრემუმისათვის აუცილებელია ექსტრემალი აკმაყოფილებდეს ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}=0, \quad i=1, 2, \ldots, n. \qquad (8.2)$$

რომელიც შეიძლება ასეც ჩაიწეროს

$$F_{x_i}-\sum_{j=1}^{n} x_j' F_{x_i' x_j}-\sum_{j=1}^{n} x_j'' F_{x_i' x_j'}=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (8.3)$$

სისტემა (8.3) არ წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლებების დამოუკიდებელ სისტემას. ადვილი სანახავია, რომ (8.2) და (8.3) განტოლებების მარცხენა ნაწილები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი იგივური ტოლობით:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'\left(F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i}-\sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j F_{x_i' x_j}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j'' F_{x_i' x_j'} = 0. \tag{8.4}$$

იმისათვის რომ ამ ტოლობის ჭეშმარიტებაში დავრწმუნდეთ, გამოვიყენოთ ეილერის თეორემა ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ, გვექნება

$$F=\sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i'}.$$

გავაწარმოვოთ უკანასკნელი ტოლობა ჯერ x_j ცვლადით და შემდეგ x_j' ცვლადით, მივიღებთ

$$F_{x_j}=\sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i' x_j}, \quad 0=\sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i' x_j'}.$$

ამ იგივეობებიდან გამომდინარეობს, რომ (8.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში შუა შესაკრები ნულის ტოლია:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j' F_{x_i' x_j}=0.$$

ამრიგად, სისტემაში (8.2) ერთ-ერთი განტოლება დანარჩენი $n-1$ განტოლების შედეგია, სრულიად ისევე, როგორც § 5-ში, ექსტრემალის მისაღებად საჭიროა (8.2) სისტემას მივუერთოთ დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ფაქტიურად განსაზღვრავს პარამეტრის შერჩევას. ამის შემდეგ გვექნება n დიფერენციალური განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა ამავე რაოდენობის საძიებელი ფუნქციებით $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

§ 9. **გეოდეზიური წირები სამგანზომილებიან სივრცეში.** ცნობილია, რომ სამგანზომილებიან სივრცეში (s) ზედაპირის არაცხადი სახის განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში აქვს სახე:

$$f(x, y, z)=0. \tag{9.1}$$

თუ დეკარტის კოორდინატებს შევცვლით u და v პარამეტრებით, მაშინ იმავე (s) ზედაპირის განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ პარამეტრული სახითაც:

$$x=x(u, v), \; y=y(u, v), \; z=z(u, v). \tag{9.2}$$

გამოვსახოთ (9.2) ზედაპირზე მდებარე რაიმე (l) წირის სიგრძის ელემენტის კვადრატი u და v პარამეტრების საშუალებით:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=(x_u du+x_v dv)^2+(y_u du+y_v dv)^2+$$
$$+(z_u du+z_v dv)^2$$

ანუ

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2, \tag{9.3}$$

სადაც

$$E(u, v) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F(u, v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G(u, v) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

გამოსახულებას (9.3) უწოდებენ **გაუსის პირველ დიფერენციალურ ფორმას**. ვიგულისხმოთ, რომ (l) წირის გასწვრივ v პარამეტრი არის u ცვლადის ფუნქცია: $v = v(u)$, მაშინ (9.3) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = (E + 2FV_u + GV_u^2)\,du^2.$$

განვიხილოთ (s) ზედაპირზე მდებარე ყველა წირის სიმრავლე (Ω), რომლებიც ზედაპირის ორ მოცემულ A და B წერტილებს აერთებენ. უმოკლეს წირს (Ω) სიმრავლიდან უწოდებენ **გეოდეზიურ წირს**. ამრიგად, გეოდეზიური წირი მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს

$$J = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E + 2FV_u + GV_u^2}\,du, \tag{9.4}$$

სადაც u_1 და u_2 არის u პარამეტრის მნიშვნელობანი, რომლებიც შეესაბამებიან A და B წერტილებს. (9.4) ფუნქციონალის მინიმუმის აუცილებელი პირობა გამოისახება ეილერის დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{1}{2}\,\frac{E_v + 2F_v V_u + G_v V_u^2}{\sqrt{E + 2FV_u + GV_u^2}} - \frac{d}{du}\,\frac{F + GV_u}{\sqrt{E + 2FV_u + GV_u^2}} = 0. \tag{9.5}$$

განტოლებას (9.5) უწოდებენ გეოდეზიური წირების დიფერენციალურ განტოლებას.

ავიღოთ კერძოდ, სფერო სამგანზომილებიან სივრცეში, რომლის რადიუსია ერთი და ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში. ჩავწეროთ მისი განტოლება სფერულ კოორდინატებში

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = \sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = \cos\vartheta,$$

მაშინ გვექნება

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2$$

და ფუნქციონალი (9.4) მიიღებს სახეს

$$J = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{1 + \varphi_\vartheta^2 \sin^2\vartheta}\,d\vartheta, \tag{9.6}$$

სადაც φ_ϑ აღნიშნავს φ კოორდინატის წარმოებულს ϑ ცვლადით. შევნიშნოთ, რომ J ფუნქციონალში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ შეიცავს

φ ფუნქციას და, ამიტომ, ეილერის დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი იქნება

$$\frac{\sin^2 \vartheta \cdot \varphi_\vartheta}{\sqrt{1+\varphi_\vartheta^2 \sin^2 \vartheta}}=C_1,$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. თუ ავიღებთ $C_1=0$, მივიღებთ $\varphi_\vartheta=0$, ე. ი. $\varphi=C$. ეს იმას ნიშნავს, რომ გეოდეზიური წირების სიმრავლეს წარმოადგენს სფეროს ყველა მერიდიანი. სხვანაირად, სფეროზე მდებარე გეოდეზიური წირები წარმოადგენენ სფეროს პოლუსებზე გამავალ წრეწირებს, რომლებსაც დიდი წრეწირები ეწოდება. ცხადია, პოლუსებში $\vartheta=0$ და $\vartheta=\pi$.

§ 10. გეოდეზიური წირები n-განზომილებიან სივრცეში. ვთქვათ n-განზომილებიან სივრცეში მოცემულია წირი

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\dots,\ x_n=x_n(t),$$

რომლის რკალის დიფერენციალის კვადრატი მოცემულია დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმით

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dy_h. \tag{10.1}$$

იგულისხმება, რომ კოეფიციენტები $a_{ik}=a_{ki}$ წარმოადგენენ $x_1, x_2,\dots, x_n$ არგუმენტების ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციებს, რომლებსაც გააჩნიათ უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები არგუმენტების მიმართ. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ x_i $(i=1,\dots, n)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია სეგმენტზე $[t_1, t_2]$.

ამ პირობებში მოცემული წირის სიგრძე გამოისახება ინტეგრალით

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i'\, x_k'}\, dt. \tag{10.2}$$

წირებს, რომლებისთვისაც (10.2) ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია უდრის ნულს (ე. ი. $\delta J=0$), ეწოდება გეოდეზიური წირები n-განზომილებიან სივრცეში. გეოდეზიური წირებისათვის ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ექნება სახე

$$\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\,\varphi_{x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\,\varphi_{x_i'}\right)=0,\quad (i=1,\dots, n), \tag{10.3}$$

სადაც

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i'\, x_k'. \tag{10 4}$$

სისტემა (10.3) შეიცავს $n-1$ დამოუკიდებელ განტოლებას. იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს $x_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ ფუნქციების განსაზღვრა, საჭიროა სისტემას (10.3) მივუერთოთ კიდევ ერთი დიფერენციალური განტოლება. ასეთი განტოლების როლში ავიღოთ

$$\varphi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i' x_k'=1, \tag{10.5}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ t პარამეტრის როლში აღებულია n-განზომილებიანი წირის რკალის სიგრძე s. ახლა, (10.5) განტოლების დახმარებით, სისტემა (10.3) გამარტივებული სახით წარმოგვიდგება:

$$\varphi_{x_i}-\frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}=0, \quad (i=1,\ldots,n). \tag{10.6}$$

დიფერენციალური განტოლებების უკანასკნელი სისტემის ინტეგრებისათვის გავითვალისწინოთ, რომ ფუნქცია φ, რომელიც დამოკიდებულია $x_i=x_i(s)$ და $x_i'=x_i'(s)$ $(i=1,\ldots,n)$ არგუმენტებზე, წარმოადგენს ერთგვაროვან ფუნქციას x_i' არგუმენტების მიმართ ერთგვაროვნების მაჩვენებლით 2 და, მაშასადამე, მართებულია ტოლობები:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i} x_i'+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i'} x_i'',$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i'} x_i'=2\varphi.$$

გავაწარმოვოთ მეორე ტოლობა ცვლადით, გვექნება

$$2\frac{d\varphi}{ds}=\sum_{i=1}^{n} x_i'\frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i'} x_i''.$$

თუ გამოვიყენებთ ამ ტოლობას, პირველი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{d\varphi}{ds}=2\frac{d\varphi}{ds}+\sum_{i=1}^{n} x_i'\left(\varphi_{x_i}-\frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}\right)$$

და, მაშასადამე, (10.6) განტოლებების ძალით, მივიღებთ $\dfrac{d\varphi}{ds}=0$, ე. ი. $\varphi=C$. ასეთია (10.6) სისტემის ინტეგრალი, საიდანაც კერძოდ მიიღება დამატებითი განტოლება (10.5), როცა $C=1$.

§ **11. გეოდეზიური წირები ცილინდრულ ზედაპირზე.** ავიღოთ კოორდინატთა xOy სიბრტყეში ცილინდრის მიმმართველი წირის განტოლე-

ბა პარამეტრული სახით: $x=x(\sigma)$, $y=y(\sigma)$, რომელშიც პარამეტრის როლში აღებულია მიმმართველის რკალის სიგრძე. ცხადია, ფუნქციები $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ დაკავშირებულია ერთმანეთთან ტოლობით

$$x'^2+y'^2=1.$$

საკოორდინატო ღერძი Oz გავავლოთ ცილინდრული ზედაპირის მსახველების პარალელურად. ცილინდრის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა დავახასიათოთ σ პარამეტრით და წერტილის აპლიკატით z. დავაყენოთ ამოცანა: ცილინდრულ ზედაპირზე მდებარე ყველა წირს შორის, რომლებიც ცილინდრის მოცემულ ორ წერტილს აერთებენ, მოვძებნოთ უმოკლესი წირი. საძიებელ წირს უწოდებენ ცილინდრის ზედაპირზე მდებარე გეოდეზიურ წირს.

გეოდეზიური წირის რკალის დიფერენციალის კვადრატი მოცემული იქნება ტოლობით

$$ds^2=d\sigma^2+dz^2.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევადარებთ წინა პარაგრაფის (10.1) ტოლობას, დავრწმუნდებით, რომ $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{12}=a_{21}=0$. სისტემა (10.6) ასე ჩაიწერება: $\sigma''=0$, $z''=0$, სადაც წარმოებულები აღებულია s ცვლადის მიხედვით. დიფერენციალური განტოლებების მიღებული სისტემის ზოგადი ინტეგრალი იქნება: $\sigma=C_1z+C_2$, $z=C_3\sigma+C_4$. თუ $C_1\neq 0$, მაშინ შეგვიძლია z გამოვსახოთ σ ცვლადით: $z=A\sigma+B$, სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია. ამის შემდეგ, ცილინდრული ზედაპირის მიმმართველის განტოლებებთან ერთად გვექნება

$$x=x(\sigma),\ y=y(\sigma),\ z=A\sigma+B, \tag{11.1}$$

რომელიც გვაძლევს ცილინდრულ ზედაპირზე მდებარე გეოდეზიური წირების განტოლებას პარამეტრული სახით. გეოდეზიური წირის დამახასიათებელი ის არის, რომ მისი მხები ნებისმიერ წერტილში შეადგენს მუდმივ φ კუთხეს Oz ღერძთან.

თუ ცილინდრი წრიულია, რომლის მიმმართველის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, რადიუსი უდრის ერთს, პარამეტრული განტოლებებია: $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$ და განტოლებებში (11.1) პარამეტრი $\sigma=\varphi$, მაშინ გვექნება

$$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=V\varphi+B. \tag{11.2}$$

წრიულ ცილინდრზე მდებარე წირს, რომლის პარამეტრული განტოლებები არის (11.2), ეწოდება ხრახნწირი. ხრახნწირის რკალი, რომელიც ცილინდრის ორ მოცემულ წერტილს აერთებს, უმოკლესია იმავე წერტილების შემაერთებელ ყველა სხვა წირის რკალის სიგრძესთან შედარებით.

თავი X

პირობითი ექსტრემუმი

§ 1. შესავალი. აქამდე განიხილებოდა ისეთი ამოცანები, რომლებშიც დასაშვები წირები იყვნენ $C^{(1)}[x_1, x_2]$ სივრცის ელემენტები და აკმაყოფილებდნენ მხოლოდ მოცემულ სასაზღვრო პირობებს. ხშირად ფიზიკისა და სხვა მეცნიერებათა შესწავლისას მრავალ ვარიაციულ ამოცანაში მოითხოვება, რომ დასაშვები წირები, გარდა ხსენებული პირობებისა, უნდა აკმაყოფილებდენ გარკვეულ დამატებით პირობებს. ამასთან, დამატებითი პირობები სხვადასხვანაირი შეიძლება იყოს, რომელთა შორის ზოგიერთი გავრცელებული შემთხვევები განზრახული გვაქვს შევისწავლოთ ქვემოთ.

§ 2. ამოცანის დასმა. პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: მოვძებნოთ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე ფუნქციები $y=y(x)$, $z=z(x)$, რომლებიც ექსტრემუმს შიანიჭებენ ფუნქციონალს

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\, dx, \tag{2.1}$$

დააკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას

$$G(x, y, z)=0 \tag{2.2}$$

და სასაზღვრო პირობებს

$$y_1=y(x_1), \ z_1=z(x_1),$$

$$y_2=y(x_2), \ z_2=z(x_2),$$

სადაც, ცხადია, $G(x_1, y_1, z_1)=G(x_2, y_2, z_2)=0$.

ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას $F(x, y, z, y', z')$ გარკვეულ არეში აქვს ნაწილობითი წარმოებულები მესამე რიგამდე ჩათვლით ყველა არგუმენტის მიმართ, ხოლო საძიებელ ფუნქციებს $y=y(x)$, $z=z(x)$ აქვთ წარმოებულები საჭირო რიგამდე.

დასმული ამოცანა გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ უნდა მოვძებნოთ წირი, რომელიც მდებარეობს (2.2) ზედაპირზე, აერთებს ამ ზედაპირის მოცემულ ორ წერტილს (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) და ანიჭებს ექსტრემუმს (2.1) ინტეგრალს. შევნიშნოთ, რომ თუ (2.2) განტოლებიდან

შესაძლოა გამოვსახოთ $z=\varphi(x, y)$ და, თუ z ცვლადის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2.1) ინტეგრალში, მაშინ ზემოთ დასმული ამოცანა მიიყვანება ვარიაციათა აღრიცხვის მარტივ („უპირობო“ ან „თავისუფალ“) ამოცანაზე, რომელიც შესწავლილი იყო VII თავში. უკანასკნელი გარემოება გვიკარნახებს მოვითხოვოთ პირობა $\dfrac{\partial G}{\partial z} \neq 0$. ამის შემდეგ ფუნქციონალი (2.1) ასე ჩაიწერება:

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \varphi, y', \varphi_x+\varphi_y y')\, dx=\int_{x_1}^{x_2} \widetilde{F}(x, y, y')\, dx. \qquad (2.3)$$

ახლა უნდა ვეძებოთ ბრტყელი წირი l, რომელიც წარმოადგენს (2.2) ზედაპირზე მდებარე $y=y(x)$, $z=z(x)$ წირის გეგმილს xOy სიბრტყეზე და ექსტრემუმს ანიჭებს ფუნქციონალს (2.3). ამისათვის, როგორც ვიცით, აუცილებელია წირი l იყოს (2.3) ფუნქციონალისათვის დაწერილი ეილერის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი. იმისათვის, რომ ფაქტიურად დავწეროთ ეილერის დიფერენციალური განტოლება, წინასწარ მოვამზადოთ შემდეგი წარმოებულები:

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}=F_y+F_z \varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{y^2} y'),$$

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y'}=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\frac{d}{dx}F_{z'}+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy'}),$$

ამის შემდეგ ეილერის განტოლებას (2.3) ფუნქციონალისათვის ექნება სახე:

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y'}=F_y+\varphi_y\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)-\frac{d}{dx}F_{y'}=0. \qquad (2.4)$$

ახლა თუ განტოლებას (2.2) გავაწარმოებთ y ცვლადის მიმართ:

$$G_y+G_z\varphi_y=0$$

და აქედან გამოთვლილ ფუნქციას φ_y შევიტანთ (2.4) განტოლებაში, მიღებული შედეგი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y}{G_y}=\frac{\frac{d}{dx}F_{z'}-F_z}{G_z}. \qquad (2.5)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y=\lambda(x),$$

მაშინ (2.5) პროპორციიდან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}F_{y'}-[F_y+\lambda(x)\,G_y]=0,\\&\frac{d}{dx}F_{z'}-[F_z+\lambda(x)\,G_z]=0.\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

ეს სისტემა წარმოადგენს (2.1) ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს. იმისათვის, რომ სივრცის წირი $y=y(x)$, $z=z(x)$, რომელიც მდებარეობს ზედაპირზე (2.2) და აერთებს მის მოცემულ ორ წერტილს (x_1, y_1, z_1) და (x_2, y_2, z_2), მინიმუმს (ან მაქსიმუმს) ანიჭებდეს (2.1) ინტეგრალს, აუცილებელია იგი იყოს (2.6) სისტემის ინტეგრალი, განტოლებებს (2.6) ეწოდება ე ი ლ ე რ - ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა- ლ უ რ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა ს ი ს ტ ე მ ა.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩავწეროთ სისტემა (2.6) შემდეგი სახითაც:

$$\frac{d}{dx}F^*_{y'}-F^*_y=0,\quad \frac{d}{dx}F^*_{z'}-F^*_z=0,\tag{2.7}$$

სადაც $F^*=F+\lambda(x)\,G$.

განტოლებები (2.7) წარმოადგენენ ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ფუნქციონალისათვის

$$J_1=\int_{x_1}^{x_2}[F+\lambda(x)\,G]\,dx.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ფუნქციები $y=y(x)$, $z=z(x)$ პირობით ექსტრემუმს ანიჭებენ ფუნქციონალს (2.1), მაშინ იგივე ფუნქციები წარმოადგენენ უპირობო ექსტრემალს J_1 ინტეგრალისა, რომლის ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა F^*. ხშირად, F^* ფუნქციას ლაგრანჟის ფუნქციას უწოდებენ.

პრაქტიკულად ექსტრემალის მოსაძებნად, როცა იგი არსებობს, საკმარისია (2.2) და (2.7) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ $\lambda(x)$ და ერთ-ერთი უცნობი, მაგალითად $z=z(x)$ ფუნქცია, მივიღებთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას საძიებელი $y=y(x)$ ფუნქციის მიმართ. უკანასკნელი განტოლების ინტეგრებით წარმოქმნილი ორი ნებისმიერი მუდმივი უნდა გამოვთვალოთ მოცემული სასაზღვრო პირობებით $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$.

§ 3. **პირობითი ექსტრემუმის ამოცანის განზოგადება.** შევისწავლოთ პირობითი ექსტრემუმის შემდეგი ამოცანა: მოცემულია ფუნქციონალი

$$J=J[y_1, y_2,\dots, y_n]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1,\dots, y_n; y_1',\dots, y_n')\,dx. \tag{3.1}$$

მოვძებნოთ ფუნქციები: $y_1=y_1(x),\dots, y_n=y_n(x)$, რომლებიც ექსტრემუმს მიანიჭებენ ფუნქციონალს (3.1), დააკმაყოფილებენ მოცემულ დამატებით პირობებს

$$\varphi_i(x, y_1, y_2,\dots, y_n)=0, \quad i=1, 2,\dots, m;\ m<n \tag{3.2}$$

და სასაზღვრო პირობებს

$$\begin{aligned} &y_1(x_1)=y_{11},\ y_2(x_1)=y_{21},\dots,\ y_n(x_1)=y_{n1},\\ &y_1(x_2)=y_{12},\ y_2(x_2)=y_{22},\dots,\ y_n(x_2)=y_{n2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

იგულისხმება, რომ (3.2) დამოუკიდებელი განტოლებებია, ე. ი. არც ერთი მათგანი არ წარმოადგენს დანარჩენი განტოლებების შედეგს.

ხშირად, (3.2) სახის დამატებით პირობებს ჰოლონომურ ბმებს უწოდებენ. ჰოლონომური ბმების დამახასიათებელი ის არის, რომ განტოლებებში (3.2) არ მონაწილეობენ საძიებელი $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ ფუნქციების წარმოებულები.

მართებულია შემდეგი

თეორემა. *ფუნქციები: $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$, რომლებიც პირობით ექსტრემუმს ანიჭებენ ფუნქციონალს (3.1), წარმოადგენენ ფუნქციონალის*

$$J^*=\int_{x_1}^{x_2}\left[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\,\varphi_i\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}F^*\,dx \tag{3.4}$$

თავისუფალი (უპირობო) ექსტრემუმის ექსტრემალს. ამასთან ფუნქციები $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ და $\lambda_1(x), \lambda_2(x),\dots, \lambda_m(x)$ ცალსახად განისაზღვრებიან (3.4) ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლებების სისტემიდან

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}=0, \quad (j=1, 2,\dots, n), \tag{3.5}$$

დამატებითი პირობებიდან (3.2) და სასაზღვრო პირობებიდან (3.3), თუ ფუნქციების φ_i $(i=1, 2,\dots, m)$ და y_i $(i=1, 2,\dots, n)$ შესაბამისი ერთ-ერთი ფუნქციონალური დეტერმინანტი იაკობისა, მაგალითად

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0. \tag{3.6}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მოცემული ფუნქციონალისათვის (3.1) ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} (F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j')\, dx = 0. \tag{3.6}$$

თუ აქ

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y_j'} \delta y_j'\, dx$$

სახის შესაკრებებზე შევასრულებთ ნაწილობით ინტეგრებას (იხ. თავი VII, § 13) და გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს (3.3), მაშინ განტოლება (3.6) ასე გარდაიქმნება

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j\, dx = 0. \tag{3.7}$$

ვინაიდან ფუნქციები $y_1, y_2, \ldots y_n$ ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან (3.2) პირობებით, ამიტომ ტოლობაში (3.7) არ შეიძლება გამოვიყენოთ ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემა (იხ. თავი VII, § 12).

განტოლებათა სისტემიდან (3.2) გვაქვს

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.8}$$

ექსტრემალი უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობებს (3.2) იმას ნიშნავს, რომ $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ ფუნქციების ვარიაციები $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$ დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან განტოლებათა სისტემით (3.8). ამ ვარიაციებიდან ნებისმიერ ფუნქციებად შეგვიძლია მივიჩნიოთ მხოლოდ $n-m$ ფუნქცია, მაგალითად $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$, ხოლო დანარჩენი ფუნქციები $\delta y_1, \ldots, \delta y_m$ განისაზღვრებიან (3.8) სისტემიდან. ვთქვათ $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ არიან ჯერჯერობით განუსაზღვრელი უწყვეტი ფუნქციები სეგმენტზე $[x_1, x_2]$. თუ (3.8) სისტემის ყოველ განტოლებას შესაბამისად გავამრავლებთ $\lambda_1(x)dx, \lambda_2(x)dx, \ldots, \lambda_m(x)dx$ დიფერენციალებზე და მიღებულ განტოლებებს ვაინტეგრებთ სეგმენტზე $[x_t, x_2]$, მივიღებთ სისტემას

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j\, dx = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

საიდანაც გვექნება

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j \, dx = 0. \tag{3.9}$$

შევკრიბოთ (3.7) და (3.9) ტოლობები, მივიღებთ

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} \left[F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \right] \delta y_j \, dx = 0 \tag{3.10}$$

ანუ

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0, \tag{3.11}$$

სადაც

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i. \tag{3.12}$$

ცხადია, რაკი $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$ არ არიან ნებისმიერი ვარიაციები, ამიტომ ტოლობაში (3.11) ხელახლა არ შეიძლება ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემის გამოყენება. თეორემის დამტკიცების დასაბოლოვებლად, შევარჩიოთ მამრავლები $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ ისე, რომ აკმაყოფილებდნენ განტოლებათა სისტემას

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.13}$$

ანუ, რაც იგივეა, აკმაყოფილებდნენ სისტემას

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.13'}$$

შევნიშნოთ, რომ (3.13′) წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ ფუნქციების მიმართ. ვინაიდან, ამასთან, შესრულებულია პირობა (3.6), ამიტომ სისტემიდან (3.13′) ცალსახად განისაზღვრებიან ფუნქციები $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$. ნათქვამის ძალით, განტოლება (3.11) ახლა ასე ჩაიწერება

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0. \tag{3.14}$$

აქ $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$ უკვე ნებისმიერი ფუნქციებია. დავუშვათ მოწინააღმდეგე: ... რიგეობით, რომ ერთი მათგანი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა

დანარჩენი ნულის ტოლია და თანაც გამოვიყენოთ ძირითადი ლემა. ამ წესით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$F^*_{y_j}-\frac{b}{dx}F^*_{y'_j}=0, \quad (j=m+1, m+2,\ldots, n),$$

რომელსაც უნდა დაემატოს სისტემა (3.13). საბოლოოდ მივდივართ შემდეგ დასკვნაზე: (3.1) ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემალი $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots, y_n(x)$ და ფუნქციონალური მამრავლები $\lambda_1(x), \lambda_2(x),\ldots \lambda_m(x)$ უნდა განისაზღვრონ დიფერენციალური განტოლებების სისტემიდან

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0, \quad (j=1, 2,\ldots, n) \tag{3.15}$$

და დამატებითი პირობებიდან (3.2). ნებისმიერი მუდმივები, რომლებიც წარმოიქმნებიან (3.15) სისტემის ინტეგრების შედეგად, განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებით (3.3). თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. **არაჰოლონომური ბმების შემთხვევა.** შევისწავლოთ შემთხვევა, როცა § 3-ში მოყვანილი დამატებითი პირობები (3.2), რომელსაც ექსტრემალი უნდა აკმაყოფილებდეს, გარდა ფუნქციებისა $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ შეიცავენ ამ ფუნქციების წარმოებულებსაც.

ვარიაციათა აღრიცხვის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა ახლა ასე ჩამოყალიბდება: მოვძებნოთ ფუნქციები $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, რომლებიც ექსტრემუმს მიანიჭებენ ფუნქციონალს (3.1), დააკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით მოცემულ დამატებით პირობებს

$$\varphi_i(x, y_1, y_2,\ldots, y_n; y'_1, y'_2,\ldots, y'_n)=0, \quad (i=1,\ldots, m.\ m<n) \tag{4.1}$$

და სასაზღვრო პირობებს (3.2).

დამატებით პირობებს (4.1) ხშირად არაჰოლონომურ ბმებს უწოდებენ.

აქ მართებულია წინადადება: თუ ფუნქციები $\lambda_1(x), \lambda_2(x),\ldots, \lambda_m(x)$ სათანადოდ არიან შერჩეული, მაშინ ფუნქციები $y_i(x)$, $(i=1, 2,\ldots, n)$, რომლებიც ექსტრემუმს ანიჭებენ ფუნქციონალს (3.1), აკმაყოფილებენ დამატებით პირობებს (4.1) და სასაზღვრო პირობებს (3.2), უნდა წარმოადგენდნენ ფუნქციონალის

$$J^*=\int_{x_1}^{x_2}\left[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_1(x)\,\varphi_i\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}F^*\,dx \tag{4.2}$$

ექსტრემალს, სადაც

$$F^*=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\,\varphi_i.$$

მართლაც, ვთქვათ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (4.1) დამოუკიდებელი სისტემაა, ამისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ ერთ-ერთი ფუნქციონალური დეტერმინანტი, მაგალითად, დეტერმინანტი

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} \neq 0. \tag{4.3}$$

გამოვსახოთ განტოლებებიდან (4.1) წარმოებულები $y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_m'(x)$ დანარჩენი $y_{m+1}'(x), y_{m+2}'(x), \dots, y_n'(x)$ წარმოებულების საშუალებით (ეს შესაძლებელია (4·3) პირობის ძალით):

$$y_i' = \Psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y_{m+1}', \dots, y_n'), \quad (i=1, 2, \dots, m). \tag{4.4}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $y_{m+1}'(x), y_{m+2}'(x), \dots, y_n'(x)$ ნებისმიერი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია სეგმენტზე $[x_1, x_2]$, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ შესაბამის სასაზღვრო პირობებს (3.2) პირობებიდან, მაშინ მათი ვარიაციები $\delta y_{m+1}', \delta y_{m+2}', \dots, \delta y_n'$ აგრეთვე ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციები იქნებიან იმავე სეგმენტზე.

ვთქვათ, $y_1, y_2, \dots, y_n$ წარმოადგენს დასაშვები ფუნქციების ნებისმიერ მიმდევრობას. თანახმად დამატებითი პირობებისა (4.1), დავწეროთ:

$$\varphi_i(x, y_1+\delta y_1, y_2+\delta y_2, \dots, y_n+\delta y_n; y_1'+\delta y_1', y_2'+\delta y_2', \dots, y_n'+\delta y_n') -$$
$$- \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots y_n; y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

დავშალოთ ამ განტოლებების მარცხენა ნაწილები ტეილორის ფორმულის მიხედვით, გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' + R_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m). \tag{4.5}$$

რომელშიც R_i ნაშთის რიგი ერთზე მეტია δy_j და $\delta y_j'$ ვარიაციების მიმართ. ვინაიდან ჩვენ გვაინტერესებს ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია, ე. ი. წევრები, რომლებიც შეიცავენ δy_j და $\delta y_j'$ ვარიაციების მხოლოდ პირველ ხარისხებს, ამიტომ R_i შეგვიძლია უკუვაგდოთ და განტოლებები (4.5) ასე ჩავწეროთ:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m). \tag{4.6}$$

სისტემიდან (4,6) ადვილად მივიღებთ

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j \, \delta x + \int_{x_1}^{x_2} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' \, dx = 0, \tag{4.7}$$

სადაც $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ ჯერჯერობით განუსაზღვრელი, სეგმენტზე $[x_1, x_2]$ უწყვეტად წარმოებადი, ფუნქციონალური მამრავლებია. (4.7) ტოლობის მარცხენა ნაწილის მეორე შესაკრების ყოველი შესაკრები ნაწილობითი ინტეგრებით გარდავქმნათ და თანაც მხედველობაში მივიღოთ, რომ $(\delta y_j)_{x=x_1}=(\delta y_j)_{x=x_2}=0$ და $\delta y_j'=(\delta y_j)'$, მაშინ (4.7) ასე ჩაიწერება:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\left(\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j'}\right)\right]\delta y_j\,dx=0,\quad (i=1, 2,\ldots, m). \tag{4.8}$$

გარდა ამისა, გვაქვს:

$$\delta J=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}(F_{y_j}\delta y_j+F_{y_j'}\delta y_j')\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{d}{dx}F_{y_j'}\right)\delta y_j\,dx=$$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{d}{dx}F_{y_j'}\right)\delta y_j=0. \tag{4.9}$$

ახლა თუ წევრობრივ შევკრებთ (4.8) განტოლებებს და განტოლებას (4.9) მივიღებთ:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left(F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}\right)\delta y_j\,dx=0, \tag{4.10}$$

სადაც

$$F^*=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\,\varphi_i.$$

შევარჩიოთ აქამდე ნებისმიერი ფუნქციები $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ ისე, რომ აკმაყოფილებდნენ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}=0,\quad (j=1, 2,\ldots, m). \tag{4.11}$$

განტოლებათა სისტემაში (4.11) უცნობი ფუნქციები $\lambda_i(x)$ და მათი წარმოებულები $\lambda_i'(x)$, $(i=1, 2,\ldots, m)$ წრფივად შედიან და, მაშასადამე, იგი წრფივი სისტემაა. ზოგადი ინტეგრალი სისტემისა (4·11) შეიცავს m ნებისმიერ მუდმივს.

ამის შემდეგ განტოლება (4.10) მიიღებს სახეს

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{j=m+1}^{n}\left(F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}\right)\delta y_j\,dx=0,$$

რომელშიც $y_{m+1}(x),\dots,y_n(x)$ ფუნქციების ვარიაციები $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2},\dots,\delta y_n$ უკვე ნებისმიერი ფუნქციებია. დავუშვებთ რა მორიგეობით, რომ რომელიმე ამ ვარიაციათაგან ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო ყველა დანარჩენი ნულის ტოლია, თანაც გამოვიყენებთ ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითად ლემას (იხ. თავი VII, § 12), მივიღებთ

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0,\quad (j=m+1, m+2,\dots, n).$$

ამრიგად J ფუნქციონალის ექსტრემალი $y_1(x), y_2(x),\dots y_n(x)$ და მამრავლები $\lambda_1(x), \lambda_2(x),\dots, \lambda_m(x)$ უნდა აკმაყოფილებდნენ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y'_j}=0,\quad (j=1, 2,\dots, n),$$

$$\varphi_i(x, y_1,\dots, y_n; y'_1,\dots, y'_n)=0,\quad (i=1, 2,\dots, m).$$

სხვანაირად, ფუნქციები $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x),\dots, \lambda_m(x)$ J^* ფუნქციონალს უნდა ანიჭებდნენ თავისუფალ (უპირობო) ექსტრემუმს. წინადადება დამტკიცებულია.

§ 5. ჰამილტონის პრინციპი. განვიხილოთ ნივთიერ წერტილთა მოძრავი სისტემა $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2),\dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$, რომელთა მასები იყოს შესაბამისად $m_1, m_2,\dots, m_n$. დავუშვათ, რომ სისტემის მოძრაობა ემორჩილება ჰოლონომურ ბმებს:

$$\varphi_i(t, x_1, y_1, z_1,\dots, x_n, y_n, z_n)=0,\quad (i=1, 2,\dots, m). \tag{5.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ სისტემაზე მოქმედ ძალებს $\vec{F}_k(X_k, Y_k, Z_k)$ $(k=1, 2,\dots, n)$ გააჩნიათ ძალთა ფუნქცია $u=u(t, x_1, y_1, z_1,\dots, x_n, y_n, z_n)$, მაშინ

$$X_k=\frac{\partial u}{\partial x_k},\quad Y_k=\frac{\partial u}{\partial y_k},\quad Z_k=\frac{\partial u}{\partial z_k}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(x'^2_k+y'^2_k+z'^2_k).$$

ჰამილტონის პრინციპი იმაში მდგომარეობს, რომ სისტემის ყველა შესაძლო გადაადგილებათა შორის (A) მდებარეობიდან (B) მდებარეობაში ნამდვილი გადაადგილება ექსტრემუმს (მინიმუმს) ანიჭებს ფუნქციონალს

$$J=\int_{t_1}^{t_2}(T+U)\,dt, \tag{5.2}$$

სადაც t_1 და t_2 არიან t დროის მნიშვნელობები, რომლებიც სისტემის (A) და (B) მდებარეობებს შეესაბამებიან.

ყოველ შესაძლო გადაადგილებას შეესაბამება სისტემის წერტილთა მდებარეობის გამსაზღვრელი კოორდინატები: $x_k = x_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, $z_k = z_k(t)$, $(k=1, 2,\ldots, n)$, რომლებიც უნდა აკმაყოფილებდნენ საწყის პირობებს $t=t_1$ და $t=t_2$ წერტილებზე:

$$x_{k1} = x_k(t_1),\ y_{k1} = y_k(t_1),\ z_{k1} = z_k(t_1),$$
$$x_{k2} = x_k(t_2),\ y_{k2} = y_k(t_2),\ z_{k2} = z_k(t_2). \tag{5.3}$$

შევადგინოთ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები.

აქ საქმე გვაქვს § 3-ში შესწავლილ ვარიაციულ ამოცანასთან. მისი გადაწყვეტისათვის დავწეროთ ლაგრანჟის შესაბამისი ფუნქცია

$$F^* = T + U + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\,\varphi_i,$$

რომლის საშუალებით ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის

$$J^* = \int_{t_1}^{t_2} F^*\,dt$$

ფუნქციონალის თავისუფალი ექსტრემუმის აუცილებელი პირობების მოძებნაზე. როგორც ვიცით, ხსენებული აუცილებელი პირობები გამოისახება ეილერის დიფერენციალური განტოლებების სისტემით:

$$\left.\begin{aligned} m_k x_k'' &= X_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},\\ m_k y_k'' &= Y_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k},\\ m_k z_k'' &= Z_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k}.\\ &(k=1, 2,\ldots, n). \end{aligned}\right| \tag{5.4}$$

ასეთია მოძრავ წერტილთა დიფერენციალური განტოლებების საძიებელი სისტემა.

§ 6. **ბრაქისტოქრონის განზოგადებული ამოცანა.** ვთქვათ სამგანზომილებიან სივრცეში მოცემულია ორი წერტილი $A(x_1 y_1 z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$.

შევაერთოთ ეს წერტილები ისეთი წირით, რომ ნივთიერმა წერტილმა, რომელიც A წერტილიდან მოცემული საწყისი v_1 სიჩქარით გამოდის და ამ წირის გასწვრივ v სიჩქარით მოძრაობს, უმცირეს დროში მიაღწიოს B წერტილს მოცემული v_2 სიჩქარით. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ გარემოს წინაღობის ძალა წარმოადგენს სიჩქარის მოცემულ ფუნქციას $R(v)$.

გამოთვლების გამარტივებისათვის ჩავთვალოთ, რომ ნივთიერი წერტილის მასა უდრის ერთს.

კოორდინატთა ორთოგონალური სისტემის Ox და Oy ღერძები ჰორიზონტალურ სიბრტყეში ავიღოთ, ხოლო Oz ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვემოთ.

გავიხსენოთ წერტილის დინამიკიდან ცნობილი პრინციპი იმის შესახებ, რომ მოძრავი ნივთიერი წერტილის ცოცხალი ძალის დიფერენციალი შესრულებული ელემენტარული მუშაობის ტოლია:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right)=g dz-R(v)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

სადაც g აღნიშნავს სიმძიმის ძალის აჩქარებას. აღვნიშნოთ წერტილის მდებარეობის და მისი სიჩქარის დამახასიათებელი პარამეტრი τ ასოთი, მაშინ წინა განტოლებიდან გვექნება

$$vv'=gz'-R(v)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}. \tag{6.1}$$

ახლა ისიც გავიხსენოთ, რომ სივრცითი წირის რკალის დიფერენციალი

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

და რაკი $v=\dfrac{ds}{dt}$, ამიტომ

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{v}. \tag{6.2}$$

ასეთია დროის დიფერენციალის გამოსახულება, რომელიც დასჭირდება მოძრავ წერტილს ds რკალის გარბენისათვის. სრული დრო t, რომელიც წერტილს დასჭირდება A წერტილიდან B წერტილში გადასვლისათვის, მიიღება (6.2) ტოლობის ინტეგრებით:

$$t=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{v}\,d\tau, \tag{6.3}$$

τ_1 და τ_2 არიან τ პარამეტრის მნიშვნელობანი, რომლებიც განსაზღვრავენ მოძრავ წერტილს შესაბამისად A და B მდებარეობაში.

ამ შენიშვნების შემდეგ ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: ყველა უწყვეტად წარმოებად x, y, z, v ფუნქციებს შორის ვეძებოთ ისეთი ფუნქ-

ციები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებას (6.1), დააკმაყოფილებენ მოცემულ საწყის პირობებს:

$$\left.\begin{array}{l} x(\tau_1)=x_1,\ y(\tau_1)=y_1,\ z(\tau_1)=z_1,\ v(\tau_1)=v_1, \\ x(\tau_2)=x_2,\ y(\tau_2)=y_2,\ z(\tau_2)=z_2,\ v(\tau_2)=v_2 \end{array}\right\} \quad (6.4)$$

და მინიმუმს მიანიჭებენ ფუნქციონალს (6.3).

ლაგრანჟის ფუნქციას ჩვენს ამოცანაში აქვს სახე:

$$F^*=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,H+\lambda v v'-\lambda g z', \quad (6.5)$$

სადაც $H=\frac{1}{v}$. ვინაიდან ფუნქციონალში

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F^*\,d\tau$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ შეიცავს არგუმენტებს x, y, z. ამ არგუმენტების შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლებების პირველი ინტეგრალები იქნება:

$$\frac{Hx'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=C_1, \quad (6.6)$$

$$\frac{Hy'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=C_2, \quad (6{,}6')$$

$$\frac{Hz'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=C_3+\lambda g, \quad (6.6'')$$

ხოლო ეილერის დიფერენციალური განტოლება v არგუმენტის მიმართ იქნება

$$\frac{v\lambda'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{\partial H}{\partial v}. \quad (6.7)$$

განტოლებებიდან (6.6) და (6.6′) გამომდინარეობს:

$$C_1y'-C_2x'=0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია მდებარეობს Oz ღერძის პარალელურ სიბრტყეში და, თუ მას საკოორდინატო xOz სიბრტყედ მივიჩნევთ, მაშინ $y=0$. გარდა ამისა, განტოლებებიდან (6.6) და (6.6′′) გვაქვს განტოლება

$$H^2=C_1+(C_3+\lambda g)^2, \quad (6.8)$$

რომელიც განსაზღვრავს λ მამრავლს, როგორც v ცვლადის ფუნქციას. გავყოთ განტოლებები (6.6) და (6.6′) ცალ-ცალკე განტოლებაზე (6.7), მივიღებთ:

$$\frac{C_1 v d\lambda}{H\dfrac{\partial H}{\partial v}}=dx, \quad \frac{(C_3+\lambda g) v d\lambda}{H\dfrac{\partial H}{\partial v}}=dz,$$

რომელშიც, თუ შევიტანთ (6.8) ტოლობიდან განსაზღვრულ მნიშვნელობას λ მამრავლისა და მიღებულ ტოლობებს ვაინტეგრებთ, მივიღებთ:

$$x=C_4+\varphi_1(v, C_1, C_3), \; z=C_5+\varphi_2(v, C_1, C_3), \tag{6.9}$$

სადაც მუდმივები C_1, C_3, C_4, C_5 უნდა განისაზღვრონ საწყისი პირობებით (6.4).

§ 7. იზოპერიმეტრული ამოცანა. ფიზიკის მრავალი ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება ისეთი წირის მოძებნაზე, რომელიც მოცემულ ფუნქციონალს მიანიჭებს ექსტრემუმს, გაივლის მოცემულ A და B წერტილებზე და დააკმაყოფილებს გარკვეულ ინტეგრალურ პირობებს. ასეთი შინაარსის ამოცანებს ვარიაციათა აღრიცხვაში იზოპერიმეტრული ამოცანები ეწოდება.

მაგალითად, იზომეტრული შინაარსისაა შემდეგი ამოცანა: მოცემული სიგრძის ბრტყელ შეკრულ წირებს შორის მოვძებნოთ ისეთი, რომელიც შემოსაზღვრავს უდიდეს ფართობს.

ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა ზოგადად. მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J_1=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \tag{7.1}$$

ექსტრემალი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას

$$J_2=\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\,dx=l, \tag{7.2}$$

სადაც l მოცემული მუდმივია.

მოვითხოვოთ, რომ ფუნქციებს $F=F(x, y, y')$ და $G=G(x, y, y')$ გარკვეულ არეში R აქვთ პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები ყველა არგუმენტის მიმართ. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს დასმული ამოცანის ამოხსნა და საძიებელი წირი $y=y(x)$ არ წარმოადგენს (7.2) ფუნქციონალის ექსტრემალს. დასაშვები წირები ეკუთვნიან ფუნქციონალურ სივრცეს $C^{(1)}[x_1, x_2]$ და გადიან მოცემულ წერტილებზე $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$.

როცა ჩამოთვლილი პირობები შესრულებულია, მაშინ $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე არსებობს ექსტრემალის მეორე რიგის წარმოებული (იხ. თავი VII, § 22, ჰილბერტის თეორემა).

§ 8. იზოპერიმეტრული ამოცანის გამოკვლევა. განვიხილოთ წირთა ოჯახი:

$$y(x, \alpha_1, \alpha_2) = y(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x) \tag{8.1}$$

სადაც

$$\eta_1(x),\ \eta_2(x) \in C^{(1)}[x_1, x_2],\ \eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = 0,\ \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0.$$

α_1 და α_2 პარამეტრების საკმარისად მცირე მნიშვნელობებისათვის (8.1) ოჯახის წირები ნებისმიერ ε მახლობლობაში იმყოფებიან წირთან $y = y(x)$ და აკმაყოფილებენ დასაშვები წირებისათვის § 7-ში მოთხოვნილ პირობებს. აქამდე ნებისმიერი პარამეტრები α_1 და α_2 ახლა ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულებული იყოს ტოლობა

$$J_2(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2, y' + \alpha_1\eta_1' + \alpha_2\eta_2')\, dx = l. \tag{8.2}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, მაშინ $y(x, 0, 0) = y(x)$ და, (7.2) ტოლობის ძალით, შესრულებულია (8.2). როცა α_1 და α_2 არ არიან ერთდროულად ნულის ტოლი, მაშინ ტოლობა (8.2) გამოსახავს პირობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ პარამეტრები α_1 და α_2. იმისათვის რომ წირთა ოჯახი (8.1) შეიცავდეს $y = y(x)$ წირის მახლობელ დასაშვებ წირებს, საჭიროა $\alpha_1 = 0$ და $\alpha_2 = 0$ მნიშვნელობათა მახლობლად არსებობდეს α_1 და α_2 პარამეტრების ისეთი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას (8.2). ასეთი მნიშვნელობების არსებობისათვის, როგორც ქვემოთ დავრწმუნდებით, უნდა მოვითხოვოთ ფუნქციებისაგან $y = y(x)$, $\eta_1 = \eta_1(x)$, $\eta_2 = \eta_2(x)$ გარკვეული პირობები.

პირობები, რომლებიც მოვითხოვეთ ფუნქციისაგან $G(x, y, y')$, საკმარისია იმისათვის, რომ $J_2(\alpha_1, \alpha_2)$ ფუნქციას α_1 და α_2 არგუმენტების საკმარისად მცირე მნიშვნელობებისათვის ჰქონდეს უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები $\dfrac{\partial J_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1}$, $\dfrac{\partial J_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2}$. თუ, მაგალითად, წარმოებული $\dfrac{\partial J_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \neq 0$, როცა $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, მაშინ არაცხადი ფუნქციის შესახებ ცნობილი თეორემის ძალით, ტოლობიდან (8.2), საკმარისად მცირე მნიშვნელობისათვის $|\alpha_1|$, განისაზღვრება α_2 როგორც α_1 ცვლადის ისეთი ფუნქცია, რომელიც წერტილში $\alpha_1 = 0$ ნულის ტოლია.

გამოვთვალოთ ფაქტიურად ნაწილობითი წარმოებული $J_2(\alpha_1, \alpha_2)$ ფუნქციისა α_2 ცვლადით წერტილში $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, გვექნება

$$\left[\frac{\partial J_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right]_{\substack{\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0}} = \int_{x_1}^{x_2} (G_y \eta_2 + G_{y'} \eta_2')\, dx.$$

გამოვიყენოთ მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების წესი და პირობები $\eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0$, მაშინ წინა ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\left[\frac{\partial J_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right]_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}} = \int_{x_1}^{x_2} \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}\right) \eta_2 \, dx. \tag{8.3}$$

ვინაიდან ფუნქცია $y=y(x)$ არ წარმოადგენს (7.2) ფუნქციონალის ექსტრემალს, ამიტომ

$$G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \neq 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს მრავალი ისეთი ფუნქცია $\eta_2(x)$, რომლისთვისაც ინტეგრალი (8.3) ნულიდან განსხვავებულია. მაშასადამე, როცა $y=y(x)$ არ არის (7.2) ინტეგრალის ექსტრემალი, მაშინ განტოლებას (8.2), შერჩეული ფუნქციისათვის $\eta_2=\eta_2(x)$ საკმარისად მცირე შუალედში, უსათუოდ ექნება ამონახსნი α პარამეტრის მიმართ.

ჩავსვათ ინტეგრალში (7.1) ფუნქციები (8.1), გვექნება

$$J_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2, y'+\alpha_1\eta_1'+\alpha_2\eta_2')\, dx. \tag{8.4}$$

ამრიგად, ახლა ჩვენ ვეძებთ ისეთ ფუნქციას, რომელიც ექსტრემუმს ანიჭებს ორი ცვლადის ფუნქციას (8.4) როცა $\alpha_1=\alpha_2=0$ და დააკმაყოფილებს პირობას (8.2). როგორც ცნობილია მრავალი ცვლადის დიფერენციალური აღრიცხვიდან, მოცემულ პირობებში არსებობენ ისეთი რიცხვები λ_1 და λ_2, რომლებიც არ არიან ერთდროულად ნულის ტოლი, რომ ფუნქციის $\lambda_1 J_1(\alpha_1, \alpha_2)+\lambda_2 J_2(\alpha_1, \alpha_2)$ ნაწილობითი წარმოებულები α_1 და α_2 ცვლადებით წერტილში $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ არიან ნულის ტოლი:

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} + \lambda_2 \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}\right)_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}} = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 (F_y \eta_1 + F_{y'} \eta_1')\, dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 (G_y \eta_1 + G_{y'} \eta_1')\, dx = 0,$$

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} + \lambda_2 \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}\right)_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=0}} = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 (F_y \eta_2 + F_{y'} \eta_2')\, dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 (G_y \eta_2 + G_{y'} \eta_2')\, dx = 0.$$

მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ უკანასკნელი განტოლებები ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლებებისა:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_1 F+\lambda_2 G)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\lambda_1 F+\lambda_2 G)\right]\eta_1\,dx=0,\\&\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_1 F+\lambda_2 G)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\lambda_1 F+\lambda_2 G)\right]\eta_2\,dx=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა ფუნქციები $\eta_1=\eta_1(x)$ და $\eta_2=\eta_2(x)$ იცვლებიან, მაშინ იცვლება (8.2) ტოლობით მოცემული დამოკიდებულება α_1 და α_2 პარამეტრებს შორის, და, მაშასადამე, იცვლებიან (8.5) ტოლობებში შემავალი λ_1 და λ_2 რიცხვებიც. ამის გამო ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ლემის უშუალო გამოყენება ტოლობებში (8.5) არ შეგვიძლია. მაგრამ, თუ ყურადღებას მივაქცევთ იმას, რომ (8.5) სისტემის მეორე განტოლებაში λ_1 და λ_2 რიცხვების შეფარდება დამოკიდებული არ არის $\eta_1=\eta_1(x)$ ფუნქციისაგან, მაშინ $\eta_1(x)$ ფუნქციის ნებისმიერობის გამო (8.5) სისტემის პირველი განტოლებიდან, ძირითადი ლემის გამოყენებით, გვექნება

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_1 F+\lambda_2 G)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\lambda_1 F+\lambda_2 G)=0. \tag{8.6}$$

აქ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda_1\neq 0$. მართლაც, რომ $\lambda_1=0$, მაშინ, პირობის ძალით, $\lambda_2\neq 0$ და ტოლობიდან (8.6) მივიღებდით

$$G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}=0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია $y=y(x)$ წარმოადგენს (7.2) ფუნქციონალის ექსტრემალს. უკანასკნელი კი ეწინააღმდეგება პირობას.

აღვნიშნოთ $\lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ და (8.6) ახლა საბოლოოდ ასე ჩავწეროთ

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'}=0. \tag{8.7}$$

ასეთია დასმული იზოპერიმეტრული ამოცანის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ექსტრემალი. საგულისხმო განტოლებაში (8.7) ის არის, რომ ლაგრანჟის მამრავლი λ მასში მუდმივია.

§ **9. შენიშვნები.** 1. რაკი (8.7) წარმოადგენს მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, ამიტომ ცხადია ექსტრემალთა ოჯახი შეიცავს ინტეგრების ორ ნებისმიერ C_1 და C_2 მუდმივს და ლაგრანჟის მუდმივს λ:

$$y=y(x, \lambda, C_1, C_2).$$

იმისათვის, რომ ამ ოჯახიდან გამოვყოთ წირი, რომელიც ამოცანის ყველა პირობას დააკმაყოფილებს, საჭიროა λ, C_1, C_2 მუდმივები გამოვთვალოთ მოცემული სასაზღვრო პირობებით და (7.2) ტოლობით:

$$y_1=y(x_1, \lambda, C_1, C_2), \ y_2=y(x_2, \lambda, C_1, C_2),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y(x, \lambda, C_1, C_2), y'(x, \lambda, C_1, C_2))\, dx=l.$$

2. შევნიშნოთ, რომ განტოლება (8.6) არ შეიცვლება თუ მასში F და G ფუნქციებს გამოვუცვლით ადგილებს. სახელდობრ, ფუნქციონალის

$$J_1=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

ექსტრემალები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$J_2=\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\, dx=l$$

წარმოადგენს იმავე დროს ფუნქციონალის

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\, dx$$

ექსტრემალებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx=l.$$

მოყვანილ თვისებას იზოპერიმეტრული ამოცანის შექცევადობის კანონი ეწოდება.

§ **10. იზოპერიმეტრული ამოცანა არაჰოლონომური პირობების შემთხვევაში.** ვთქვათ საძიებელია ფუნქციონალის

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx \tag{10.1}$$

ექსტრემუმი, როცა ექსტრემალი აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int_{x_1}^{x_2} F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx = l_i, \quad (i=1,\ldots, m), \tag{10.2}$$

სადაც l_i მოცემული მუდმივებია, ხოლო m—ნატურალური რიცხვი, მეტი, ნაკლები n რიცხვზე ან მისი ტოლი. ტოლობებს (10.2) უწოდებენ იზომეტრულობის არაჰოლონომურ პირობებს. ვუჩვენოთ, რომ დასმული ამოცანა დაიყვანება პირობითი ექსტრემუმის ამოცანაზე, რომელიც შესწავლილი იყო ზემოთ § 4-ში.

მართლაც, შემოვიღოთ ახალი უცნობი ფუნქციები:

$$z_i(x) = \int_{x_1}^{x} F_i\, dx, \quad (i=1, 2,\ldots, m). \tag{10.3}$$

ცხადია, რომ $z_i(x_1)=0$ და $z_i(x_2)=l_i$. ახლა, თუ (10.3) ინტეგრალებს გავაწარმოებთ ცვლადი ზედა საზღვრით x, მივიღებთ

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n;\ y_1', y_2', \ldots, y_n'). \tag{10.4}$$

როგორც ვხედავთ, გარდაქმნებით (10.3) იზომეტრულობის არაჰოლონომური ინტეგრალური პირობები შეიცვლება იზომეტრული არაჰოლონომური დიფერენციალური პირობებით. გამოვიყენებთ რა ლაგრანჟის მამრავლების წესს (იხ. ამ თავის § 4), ნაცვლად (10.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესწავლისა პირობებით $F_i - z_i = 0$ $(i=1, 2,\ldots, m)$, შეგვიძლია შევისწავლოთ ფუნქციონალის

$$J^* = \int_{x_1}^{x_2} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\,(F_i - z_i) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} F^*\, dx$$

თავისუფალი ექსტრემუმი, სადაც

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\,(F_i - z_i).$$

ეილერის დიფერენციალური განტოლებების სისტემას ფუნქციონალისათვის J^* ექნება სახე

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0, \quad (j=1, 2,\ldots, n)$$

$$F^*_{z_i} - \frac{d}{dx} F^*_{z_i'} = 0, \quad (i=1, 2,\ldots, m)$$

ანუ

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial F_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial F_i}{\partial y_j'}\right)=0, \tag{10.5}$$

$$(j=1, 2,\ldots n)$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_i(x)=0, \quad (i=1, 2,\ldots, m). \tag{10.6}$$

განტოლებებიდან (10.6) გამომდინარეობს, რომ $\lambda_1(x), \lambda_2(x),\ldots, \lambda_m(x)$ მამრავლები მუდმივებია. რაც შეეხება განტოლებათა სისტემას (10.5) იგი წარმოადგენს ფუნქციონალის

$$J^{**}=\int_{x_1}^{x_2}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}F^{**}\,dx \tag{10.7}$$

ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას, სადაც $F^{**}=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i$.

ამრიგად, იმისათვის, რომ დავწეროთ (10.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა, როცა ექსტრემალი აკმაყოფილებს იზომეტრიულობის არაჰოლონომურ პირობებს (10.2), საკმარისია დავწეროთ ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (10.7) ფუნქციონალის თავისუფალი ექსტრემუმისა, რომელშიც ყველა λ_i მუდმივი რიცხვია. რიცხვებს λ_i ლაგრანჟის მამრავლები ეწოდება.

ნებისმიერი მუდმივები $C_1, C_2,\ldots, C_{2n}$, რომლებიც წარმოიქმნებიან (10.5) დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებით და მუდმივი მამრავლები $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m$ უნდა განისაზღვრონ მოცემული საწყისი პირობებით

$$y_j(x_1)=y_{j1}, \; y_j(x_2)=y_{j2}, \quad (j=1, 2,\ldots, n)$$

და იზომეტრიულობის პირობებით (10.2).

§ 11. იზოპერიმეტრული ამოცანის უმარტივესი მაგალითი. დავუბრუნდეთ § 7-ში მოყვანილ მაგალითს: მოცემული $2L$ სიგრძის ყველა ბრტყელ შეკრულ წირს შორის მოვძებნოთ წირი, რომელიც შემოსაზღვრავს უდიდეს ფართობს.

ავიღოთ Ox ღერძის როლში ნებისმიერი წრფე, რომელიც დასაშვებ წირს შუაზე გაყოფს. ვთქვათ, A და B არის წირისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილები. მათი აბსცისები იყოს შესაბამისად x_1 და x_2. ამის შემდეგ ამოცანა შეიძლება შემდეგი სახით ჩამოვაყალიბოთ: $A(x_1, 0)$ და $B(x_2, 0)$ წერტილების შემაერთებელ ყველა L სიგრძის წირს შორის

მოვძებნოთ წირი, რომელიც $x_1 x_2$ მონაკვეთთან ერთად შემოსაზღვრავს უდიდეს ფართობს.

ამოცანის ამოხსნისათვის დავწეროთ ეილერის დიფერენციალური განტოლება ფუნქციონალისათვის

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(y+\lambda \sqrt{1+y'^2}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} F^{**}\, dx,$$

სადაც λ მუდმივი მამრავლია. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია F^{**} ცხადი სახით არ შეიცავს x ცვლადს, ამიტომ ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალი იქნება (იხ. თავი VII, § 16):

$$F^{**} - y' \frac{\partial F^{**}}{\partial y'} = y + \lambda \sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

სადაც C_1 ინტეგრების მუდმივია. გამოვთვალოთ ამ განტოლებიდან წარმოებული y':

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 + (y - C_1)^2}}{y - C_1} \quad \text{ანუ} \quad \frac{(y - C_1)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 + (y - C_1)^2}} = dx,$$

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,$$

სადაც C_2 მუდმივია. როგორც ვხედავთ, დასმული იზოპერიმეტრული ამოცანის ექსტრემალები წრეწირებია რადიუსით λ.

იმისათვის, რომ უკანასკნელ განტოლებაში განვსაზღვროთ λ, აღვნიშნოთ ϑ ასოთი კუთხე, რომლითაც მონაკვეთი AB მოჩანს წრეწირის ცენტრიდან. მაშინ გვექნება

$$x_2 - x_1 = 2\lambda \sin \frac{\vartheta}{2} \quad \text{და} \quad L = \lambda\vartheta,$$

საიდანაც ϑ კუთხის განსაზღვრისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\frac{\vartheta}{2}}.$$

განვსაზღვრავთ რა ϑ კუთხეს, განტოლებიდან $L = \lambda\vartheta$ განისაზღვრება λ. მუდმივები C_1 და C_2 გამოითვლება სასაზღვრო პირობებიდან: $x = x_1$, $y(x_1) = 0$ და $x = x_2$, $y(x_2) = 0$.

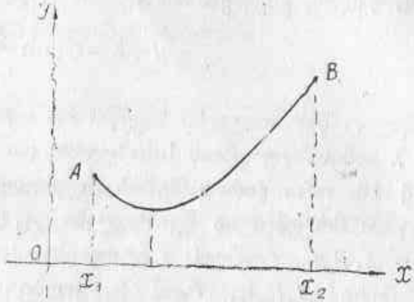
§ **12. ჯაჭვწირის ამოცანა.** ეს ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: ვიპოვოთ წონასწორობაში მყოფი მძიმე ღუნვადი უჭიმადი ერთგვაროვანი

სიგრძის ძაფის განტოლება, თუ იგი ბოლოებით ჩამოკიდულია მოცემულ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილებზე (იხ. ნახაზი 14).

ვინაიდან ძაფი AB წონასწორობაშია, ამიტომ მისი სიმძიმის ცენტრი უმცირესი მანძილით იქნება დაშორებული ჰორიზონტალურად გავლებული $0x$ ღერძიდან. მათემატიკურად ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება ძაფის სტატიკური მომენტის, ე. ი. ფუნქციონალის

$$J=\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

მინიმუმის მოძებნაზე $0x$ ღერძის მიმართ, როცა შესრულებულია იზოპერიმეტრულობის პირობა



ნახ. 14.

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx=l.$$

შევადგინოთ ფუნქციონალი (10·7):

$$J^{**}=\int_{x_1}^{x_2} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

რომლის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების

$$\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\,\frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

პირველი ინტეგრალი იქნება (იხ. თავი VII, § 16):

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-\frac{(y+\lambda)\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

სადაც C_1 ინტეგრების მუდმივია. აქედან მივიღებთ

$$C_1\sqrt{1+y'^2}=y+\lambda$$

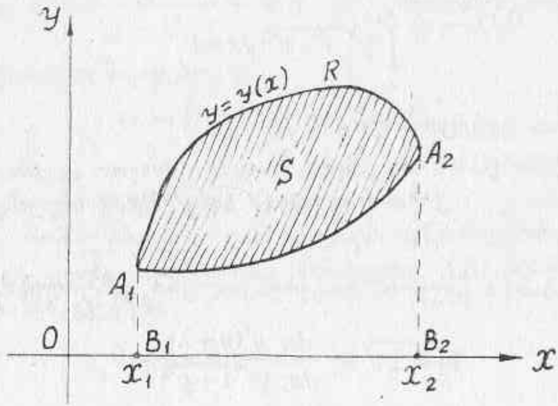
უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებისათვის შემოვიღოთ პარამეტრი t შემდეგი ტოლობით: $y'=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})=\mathrm{sh}\,x$. მაშინ $\mathrm{ch}\,t=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}=\sqrt{1+y'^2}$ და, მაშასადამე, $C_1\,\mathrm{ch}\,t=y+\lambda$. გარდა

ამისა, ცხადია $dx=\frac{dy}{\operatorname{sh} t}=C_1 dt$ და $x=C_1 t+C_2$, სადაც C_2 ინტეგრების ახალი ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად, ეილერის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი პარამეტრული სახით ასე წარმოგვიდგება: $x=C_1 t+C_2$, $y+\lambda=C_1 \operatorname{ch} t$. ამ განტოლებებიდან პარამეტრის გამორიცხვის შემდეგ გვექნება

$$y+\lambda=C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1},$$

რომელიც წარმოადგენს ჯაჭვწირთა ოჯახის განტოლებას. მუდმივები C_1, C_2, λ განისაზღვრებიან სასაზღვრო და იზომეტრულობის პირობებიდან.

§ 13. **ორი წირით შემოსაზღვრული ფართობის მაქსიმუმი.** ამოვხსნათ ამოცანა: მოცემულია წერტილები $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ და ბრტყელი წირი A_1PA_2, რომლის განტოლებაა $y=f(x)$. მოვძებნოთ ისეთი l სიგრძის წირი A_2RA_2, რომ ფართობი $A_1PA_2RA_1$ იყოს უდიდესი (იხ. ნახ. 15).



ნახ. 15.

ამოხსნა: ვინაიდან ფართობი ნაკვთისა $B_1B_2A_2RA_1B_1$ წარმოადგენს ინტეგრალს

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx,$$

სადაც $y=y(x)$ საძიებელი წირია, ხოლო ფართობი ნაკვთისა $B_1B_2A_2PA_1B_1$ არის ინტეგრალი

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,$$

სადაც $y=f(x)$ არის მოცემული l სიგრძის წირი, ამიტომ ფართობი s ნაკვთისა $A_1PA_2RA_1$ წარმოგვიდგება შემდეგი ინტეგრალით:

$$s=\int_{x_1}^{x_2}[y(x)-f(x)]\,dx. \tag{13.1}$$

ახლა ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: მოვძებნოთ ისეთი წირი $y=y(x)$, რომელიც დააკმაყოფილებს იზოპერიმეტრულობის პირობას

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l \tag{13.2}$$

და მაქსიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს (13.1).

როგორც ვიცით, ამისათვის უნდა ვეძებოთ ფუნქციონალის

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[y-f(x)+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right]dx$$

თავისუფალი ექსტრემუმი, სადაც λ მუდმივი მამრავლია. ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=1,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x+C_1,$$

სადაც C_1 ინტეგრების მუდმივია. უკანასკნელი განტოლებიდან გვექნება

$$\frac{y'}{\lambda}=\frac{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x+C_1}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+C_1}{\lambda}\right)^2}},$$

რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$\frac{y+C_2}{\lambda}=\sqrt{1-\left(\frac{x+C_1}{\lambda}\right)^2}$$

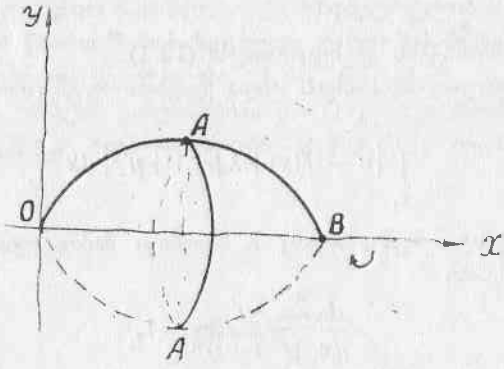
ანუ

$$(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=\lambda^2. \tag{13.3}$$

როგორც ვხედავთ ექსტრემალი წრეწირია, რომლის ცენტრი მდებარეობს $(-C_1,\ -C_2)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი უდრის λ. მუდმივები C_1, C_2, λ გამოითვლებიან $(x_1+C_1)^2+(y_1+C_2)^2=\lambda^2$, $(x_2+C_1)^2+(y_2+C_2)^2=\lambda^2$ ტოლობებისა და იზოპერიმეტრულობის (13.2) პირობის დახმარებით.

§ **14. ბერნულის ამოცანა.** როგორი სახე აქვს ბრუნვის სხეულის ჩაკეტილ ზედაპირს, რომლის ფართობი s მოცემულია, ხოლო მოცულობა უდიდესია.

ამოხსნა. ვთქვათ OAB არის ბრუნვის სხეულის მერიდიანი, ხოლო Ox ბრუნვის ღერძი. ამოცანის ამოხსნისათვის საკმარისია ვიპოვოთ მერიდიანის განტოლება. იმისათვის, რომ ბრუნვის ზედაპირი იყოს ჩაკეტილი, საჭიროა მერიდიანის ბოლოები O და B მდებარეობდნენ Ox ღერძზე. ბრუნვის სხეულის მოცულობა არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სათავის შერჩევისაგან, და ამიტომ, მოხერხებულია, სათავის როლში ავიღოთ ერთ-ერთი პოლუსი (იხ. ნახ. 16). მოყვანილი შენიშვნების შემდეგ საკითხი დაიყვანება შემდეგ ამოცანაზე: ვიპოვოთ მაქსიმუმი ფუნქციონალისა



ნახ. 16.

$$v=\pi\int_0^{x_2} y^2(x)\,dx, \tag{14.1}$$

როცა ექსტრემალი $y=y(x)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$s=2\pi\int_0^{x_2} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \tag{14.2}$$

ამასთან: როცა $x=x_1=0$, მაშინ $y(x_1)=0$; როცა $x=x_2$, მაშინაც $y(x_2)=0$.

ცხადია, (14.1) ტოლობაში კოეფიციენტი π გავლენას არ ახდენს ამოცანის გადაწყვეტაზე, ამიტომ შეიძლება ნაცვლად (14.1) ფუნქციონალისა განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$v'=\int_0^{x_2} y^2(x)\,dx. \tag{14.1'}$$

გარდა ამისა, ტოლობა (14.2) შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$s'=\int_0^{x_2} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \tag{14.2'}$$

სადაც $s'=\frac{1}{2\pi}s$.

დაყენებულ ამოცანაში უნდა ვეძებოთ თავისუფალი ექსტრემუმი ფუნქციონალისა

$$\int_0^{x_2}\left(y^2+\lambda y\sqrt{1+y'^2}\right)dx, \tag{14.3}$$

სადაც λ მუდმივი რიცხვია. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ შეიცავს ცხადი სახით x ცვლადს, ამიტომ (14.3) ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი იქნება

$$y^2+\lambda y\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

უკანასკნელი ტოლობა შესრულებული უნდა იყოს x ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის სეგმენტზე $[0, x_2]$. კერძოდ, როცა $x=x_2$, მაშინ $y(x_2)=0$ და, ამიტომ $C_1=0$. მაშასადამე, ახლა უნდა ვაინტეგროთ დიფერენციალური განტოლება

$$y^2+\lambda y\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

ანუ განტოლება

$$y\left(y\sqrt{1+y'^2}+\lambda\right)=0.$$

ვინაიდან შეუძლებელია ფუნქცია $y=y(x)$ იგივურად ნულის ტოლი იყოს სეგმენტზე $[0, x_2]$, ამიტომ წინა ტოლობიდან გვექნება

$$y\sqrt{1+y'^2}+\lambda=0,$$

საიდანაც

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{\lambda^2-y^2}}.$$

ინტეგრების შემდეგ აქედან მივიღებთ

$$(x-C_2)^2+y^2=\lambda^2,$$

სადაც C_2 ინტეგრების მუდმივია. მუდმივები C_2 და λ განისაზღვრებიან სასაზღვრო და იზომეტრულობის (14.2) პირობებიდან.

როგორც ვხედავთ საძიებელი მერიდიანი წრეწირია, რომლის ცენტრი მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ბრუნვის ჩაკეტილი ზედაპირი წარმოადგენს სფეროს, რომლის რადიუსი ტოლი არის λ.

§ 15. იზოპერიმეტრული ამოცანა ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში. ვთქვათ $F=F(x, y, z, p, q)$ და $G=G(x, y, z, p, q)$ წარმოადგენენ $C^{(2)}(\Omega)$ სივრცის ფუნქციებს სამგანზომილებიანი სივრცის რაიმე Ω არეში, რომელშიც $z=z(x, y)$, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ არის სასრული ფუნქციები. აღვნიშნოთ Γ ასოთი Ω არეში შეკრული წირი, რომლის გეგმილი xOy სიბრტყეში არის მარტივი უწყვეტად წარმოებადი წირი γ. გარდა ამისა, ვთქვათ D წარმოადგენს γ წირით შემოსაზღვრულ არეს.

Ω არეში მდებარე ზედაპირს $z=z(x, y)$ ვუწოდოთ დასაშვები ზედაპირი თუ იგი გადის Γ წირზე, განსაზღვრულია D არეზე და ამავე არეზე აქვს პირველი რიგის უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები p და q.

იზოპერიმეტრული ამოცანა ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში შემდეგში მდგომარეობს: ყველა დასაშვებ ზედაპირს შორის მოვძებნოთ ის ზედაპირი, რომელიც ექსტრემუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$J=\iint_D F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$$

და დააკმაყოფილებს პირობას

$$\iint_D G(x, y, z, p, q)\,dx\,dy=k,$$

სადაც, იგულისხმება, რომ F და G წარმოადგენენ x, y, z, p, q არგუმენტების მოცემულ ფუნქციებს, ხოლო k მოცემული რიცხვია.

იმავე მეთოდით, როგორითაც მარტივი (ერთჯერადი) ინტეგრალის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ თუ დასაშვებ ზედაპირებს შორის არსებობს $C^{(2)}[\Omega]$ სივრცის კუთვნილი ექსტრემალური ზედაპირი $z=z(x, y)$, მაშინ იგი წარმოადგენს $F^*=\lambda_1 F+\lambda_2 G$ ფუნქციის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების

$$\frac{\partial F^*}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^*}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F^*}{\partial q}\right)=0$$

ინტეგრალს, სადაც λ_1 და λ_2 რიცხვებია, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

ანალოგიურად უნდა ჩამოვაყალიბოთ იზოპერიმეტრული ამოცანა და შევადგინოთ ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა n ჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში, როცა $n>2$.

§ **16. დასაშვები წირები მოძრავი ბოლოებით.** აქამდე, ყველგან ზემოთ, შევისწავლიდით ვარიაციათა აღრიცხვის ისეთ ამოცანებს, რომლებშიც დასაშვები წირები და, მაშასადამე, ექსტრემალიც გადიან ორ მოცემულ წერტილზე. მაგრამ, ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა, ხშირად, საჭიროა შევისწავლოთ მაშინაც, როცა ყოველი შესადარებელი წირი გამოდის ერთი მოცემული (დამაგრებული) წერტილიდან $A(x_1, y_1)$, ხოლო ბოლო წერტილი მოძრაობს მოცემულ წირზე. ასეთი შინაარსისაა, მაგალითად, ამოცანა: მოვძებნოთ უმოკლესი მანძილი მოცემული წერტილიდან მოცემულ წირამდე.

შესაძლოა ისეთი შემთხვევაც წარმოგვიდგეს, როცა შესადარებელი წირის ორივე ბოლო წერტილი მოძრავია რაიმე პირობებით განსაზღვრულ არეებზე. ამ შემთხვევებში შესადარებელი წირების ოჯახი, გარდა წირებისა საერთო ბოლოებით, შედგება ისეთი წირებისაგან, რომლებსაც არა აქვთ საერთო ბოლო წერტილები. სხვანაირად, დასაშვები წირების ოჯახი, როცა მათი ბოლოები მოძრავია, უფრო ფართო ოჯახია, ვიდრე დასაშვები წირების ოჯახი უძრავი $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ ბოლო წერტილებით. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ფუნქციონალი

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \tag{16.1}$$

ექსტრემუმს აღწევს წირზე $y=y(x)$, რომელიც ეკუთვნის წირთა ოჯახს მოძრავი ბოლოებით, მაშინ იგი ექსტრემუმს მიაღწევს წირთა ოჯახზე უძრავი ბოლოებით, რომლებსაც საერთო ბოლოები აქვთ წირთან $y=y(x)$. მაშასადამე, ფუნქცია $y=y(x)$ წარმოადგენს ეილერის დიფერენციალური განტოლების

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{16.2}$$

ინტეგრალს. როგორც ვიცით, ეილერის განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივს. როცა ფუნქციონალის ექსტრემუმს ვეძებდით შესადარებელ წირთა ოჯახში უძრავი ბოლოებით, მაშინ ინტეგრების მუდმივების გამოთვლა ხერხდებოდა მოცემული სასაზღვრო პირობებით: $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$. როცა ამოცანის გადაწყვეტას ვეძებთ შესადარებელ წირთა ოჯახში მოძრავი ბოლოებით, მაშინ ექსტრემალის შესაბამისი მუდმივების მოძებნისათვის ამგვარი სასაზღვრო პირობები არ გვაქვს. ეილერის განტოლების ზოგადი ინტეგრალიდან ექსტრემალის გამოყოფისათვის, ამ შემთხვევაში, მიმართავენ ფუნქციონალის ექსტრემუმის ძირითად აუცილებელ პირობას $\delta J=0$.

§ **17. ფუნქციონალის პირველი ვარიაციის სახე დასაშვები წირებისათვის მოძრავი ბოლო წერტილებით.** ავიღოთ ფუნქციონალი

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx, \tag{17.1}$$

რომელშიც ვიგულისხმოთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F(x, y, y')$ განსაზღვრულია x და y ცვლადების მიმართ სიბრტყის რაიმე არეში R და y' წარმოებულის ყველა სასრული მნიშვნელობისათვის. ამასთან ჩავთვალოთ, რომ ფუნქციას $F(x, y, y')$ გააჩნია ნაწილობითი წარმოებულები თავისი არგუმენტების მიმართ მეორე რიგამდე ჩათვლით. გარდა ამისა, ავიღოთ R არეში მდებარე რაიმე უწყვეტად წარმოებადი წირი, რომლის განტოლება იყოს $y=f(x)$, $x\in[x_1, x_2]$. განვიხილოთ R არეში მდებარე ერთ ან რამდენიმე პარამეტრზე დამოკიდებული წირების ისეთი ოჯახი, საიდანაც პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობისათვის მიიღება წირი $y=f(x)$. აზრის გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ წირთა ეს ოჯახი დამოკიდებულია ერთ სასრულ პარამეტრზე: $y=f(x, \alpha)$, სადაც ფუნქციას $f(x, \alpha)$ აქვს უწყვეტი ნაწილობითი წარმოებულები პირველი რიგისა და შერეული წარმოებული მეორე რიგისა, $y=f(x, 0)$ არის წირი $y=f(x)$. შევნიშნოთ, რომ როცა $y=f(x, \alpha)$ წირთა ოჯახის ერთი წირიდან გადავდივართ ამავე ოჯახის მეორე წირზე, მაშინ გარდა თვით წირისა, იცვლებიან ინტეგრების საზღვრები x_1 და x_2. სხვანაირად, x_1 და x_2 წარმოადგენენ α პარამეტრის ფუნქციებს: $x_1=x_1(\alpha)$, $x_2=x_2(\alpha)$, $x\in[x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$. მოვითხოვოთ, რომ $x_1(\alpha)$ და $x_2(\alpha)$ არის α პარამეტრის წარმოებადი ფუნქციები და აკმაყოფილებენ საწყის პირობებს: $x_1(0)=x_1$, $x_2(0)=x_2$. ფუნქციონალი (17.1) შეესაბამება წირს $y=f(x, 0)=f(x)$. დავწეროთ იგივე ფუნქციონალი $y=f(x, \alpha)$ წირთა ოჯახის სხვა წირისათვის. ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალის ქვემოთ $y=f(x)$ უნდა შევცვალოთ $y=f(x, \alpha)$ ფუნქციით, ხოლო ინტეგრების საზღვრები x_1 და x_2 უნდა შევცვალოთ შესაბამისად $x_1(\alpha)$ და $x_2(\alpha)$ საზღვრებით. ამის შემდეგ ფუნქციონალი (17.1) გადაიქცევა α პარამეტრის ფუნქციად:

$$J[\alpha]=\int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} F[x, f(x, \alpha), f'_x(x, \alpha)]\,dx. \tag{17.2}$$

$J[y]$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია $\delta J[\alpha]$ ასე განვსაზღვროთ.

$$\delta J[y]=\left[\frac{dJ[\alpha]}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha, \tag{17.3}$$

ხოლო $y=f(x, \alpha)$ წირის ბოლო წერტილების აბსცისების და y და y' ფუნქციების ვარიაციები იყოს

$$
\left.\begin{aligned}
\delta x_1 &= \left[\frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha, \quad \delta x_2=\left[\frac{dx_2(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha,\\
\delta y &= \left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial a}\right]_{\alpha=0} d\alpha, \quad \delta y'=\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\right]_{\alpha=0} d\alpha=\\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha=\frac{d}{dx}\,\delta y.
\end{aligned}\right\} \tag{17.4}
$$

ახლა ტოლობაში (17.3) შევასრულოთ $J[\alpha]$ ფუნქციის გაწარმოება α პარამეტრით და გამოვთვალოთ გაწარმოების შედეგად მიღებული ფუნქციის მნიშვნელობა როცა $\alpha=0$. გაწარმოება α პარამეტრით, ცხადია, უნდა შევასრულოთ ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესის მიხედვით, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და ინტეგრების საზღვრებიც დამოკიდებული არიან პარამეტრზე. გამოვიყენებთ რა (17.4) ტოლობებს, გვექნება

$$
\begin{aligned}
\delta J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx+\\
+F(x_2, y_2, y_2')\,\delta x_2-F(x_1, y_1, y_1')\,\delta x_1
\end{aligned} \tag{17.5}
$$

ანუ

$$
\delta J[y]=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\,\delta y+F_{y'}\,\delta y')\,dx+[F(x, y, y')\,\delta x]_1^2,
$$

სადაც

$$
[F(x, y, y')]_1^2=F(x_2, y_2, y_2')\,\delta x_2-F(x_1, y_1, y_1')\,\delta x_1.
$$

გარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების წესით ინტეგრალი

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\,\delta y'\,dx=\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\frac{d}{dx}\,\delta y\,dx=F_{y'}(x_2, y_2, y_2')\,(\delta y_2)-\\
-F_{y'}(x_1, y_1, y_1')\,(\delta y)_1-\int_{x_1}^{x_2}\delta y\,\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx,
\end{aligned} \tag{17.6}
$$

სადაც

$$
(\delta y)_1=\left[\frac{\partial f(x_1,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha, \quad (\delta y)_2=\left[\frac{\partial f(x_2,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha. \tag{17.7}
$$

ახლა მოვძებნოთ $y=f(x, \alpha)$ წირის ბოლო წერტილების ორდინატების პირველი ვარიაციები. გვაქვს

$$\left.\begin{aligned} \delta y_1 &= \left[\frac{d}{d\alpha} f(x_1(\alpha), \alpha)\right]_{\alpha=0} d\alpha = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha = y_1' \delta x_1 + (\delta y)_1, \\ \delta y_2 &= y_2' \delta x_2 + (\delta y)_2. \end{aligned}\right\} \quad (17.8)$$

თუ გავითვალისწინებთ (17.6), (17.7), (17.8) ფორმულებს, მაშინ (17.5) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\delta J[y] = [(F - y' F_{y'}) \delta x + F_{y'} \delta y]_1^2 + \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y \, dx. \quad (17.9)$$

ასეთია პირველი ვარიაციის სახე დასაშვები წირებისათვის მოძრავი ბოლო წერტილებით. იმ შემთხვევაში როცა $y=f(x, \alpha)$ ოჯახის წირი წარმოადგენს ექსტრემალს, მაშინ (17.9) ტოლობაში ინტეგრალური შესაკრები ნულის ტოლი იქნება და მაშინ პირველი ვარიაცია დამოკიდებული იქნება მხოლოდ ექსტრემალური წირის ბოლო წერტილების კოორდინატებისაგან, ამ ბოლო წერტილების პირველი ვარიაციებისაგან δx_1, δx_2, $\delta y_1^{(2)}$, $\delta y_2^{(2)}$, $\delta y_1^{(1)}$, $\delta y_2^{(1)}$ და ექსტრემალის ბოლო წერტილებზე გავლებული მხებთა კუთხურ კოეფიციენტებზე y_1', y_2'.

§ 18. ტრანსვერსალი. როგორც წინა პარაგრაფებში ვნახეთ, დასაშვები წირები მოძრავი ბოლო წერტილებით წარმოადგენენ ეილერის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალებს. ვთქვათ (16.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალია $y=y(x, \alpha, \beta)$, სადაც α და β ნებისმიერი მუდმივებია. თუ ჩავსვამთ ამ ფუნქციას (16.1) ფუნქციონალში, მაშინ იგი გადაიქცევა α და β პარამეტრების და ინტეგრების x_1 და x_2 საზღვრების ფუნქციად $J[y(x, \alpha, \beta)]$. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა შესადარებელი წირები გამოდიან ერთი მოცემული წერტილიდან $A(x_1, y_1)$, ხოლო მეორე ბოლო (x_2, y_2) წერტილიდან გადადის წერტილში $(x_2+\delta x_2, y_2+\delta y_2)$. დასაშვებ წირებს $y=y(x)$ და $y=y(x)+\delta y$ ვუწოდოთ მახლობელი წირები თუ $|\delta y|$ და $|\delta y'|$ მცირე ფუნქციებია და მცირეა აგრეთვე δx_2 და δy_2.

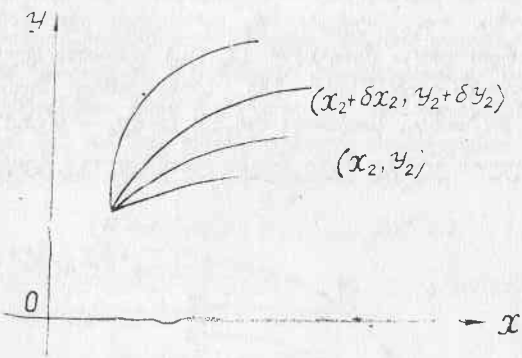
ცხადია (x_1, y_1) წერტილიდან გამომავალი შესადარებელ წირთა კონაზე ფუნქციონალი (16.1) წარმოადგენს x_2 და y_2 ცვლადების ფუნქციას. თუ კონის წირები $y=y(x, \beta)$ ექსტრემალის მიდამოში არ ჰკვეთენ ერთმანეთს, მაშინ $J[y(x, \beta)]$ იქნება x_2 და y_2 ცვლადების ცალსახა ფუნქცია. განვიხილოთ $J[y(x, \beta)]$ ფუნქციონალის ვარიაცია როცა წერტილი (x_2, y_2) გადაინაცვლებს წერტილში $(x_2+\delta x_2, y_2+\delta y_2)$ (იხ. ნახ. 17). ვინაიდან ფუნქციონალი კონის წირებზე წარმოადგენს x_2 და y_2 ცვლადების ჩვეულებრივ ფუნქციას, ამიტომ $J[y(x, \beta)]$ ფუნქციონალის საძიებელი ვარიაცია იქნება ამ ფუნქციის დიფერენციალი. ამრიგად, საჭიროა მოვძებნოთ

$J[y(x, \beta)]$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდის მთავარი ნაწილი წრფივად დამოკიდებული δx_2 და δy_2 ვარიაციებისაგან. გვექნება:

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx +$$

$$+ \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx. \qquad (18.3)$$



ნახ. 17.

დავშალოთ პირველ შესაკრებში ინტეგრალქვეშა სხვაობა ტეილორის ფორმულით, მივიღებთ:

$$\int_{x_1}^{x_2} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [F_y(x, y, y')\,\delta y + F_{y'}(x, y, y')\,\delta y']\,dx + R_1, \qquad (18.4)$$

სადაც R_1 უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა, ვიდრე δy ან $\delta y'$. შევნიშნოთ, რომ (18.4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები წრფივად არის დამოკიდებული δy და $\delta y'$ ვარიაციებისაგან. გარდა ამისა, გვაქვს:

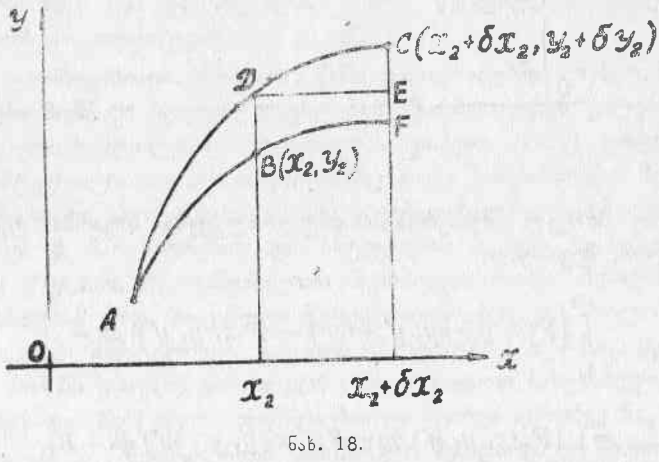
$$\int_{x_1}^{x_2} F_y(x, y, y')\,\delta y \delta x + \int_{x_1}^{x_2} F_{y'}(x, y, y')\,\delta y'\,dx =$$

$$= [F_{y'}\,\delta y]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx,$$

მაგრამ რაკი $\delta y(x_1) = 0$ და $F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0$, ამიტომ

$$\int_{x_1}^{x_2} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\, dx = [F_{y'}\,\delta y]_{x=x_2}. \tag{18.5}$$

აქ მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ $\delta y|_{x=x_2}$ არ უდრის y_2 ორდინატის δy_2 ნაზრდს. მართლაც, $\delta y|_{x=x_2}$ აღნიშნავს ორდინატის ნაზრდს x_2 წერტილში როცა (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილებზე გამავალი ექსტრემალიდან გადავდივართ (x_1, y_1) და $(x_2+\delta x_2,\ y_2+\delta y_2)$ წერტილებზე გამავალ ექსტრემალზე, რაც შეეხება δy_2 ვარიაციას იგი წარმოადგენს y_2 ორდინატის ნაზრდს როცა წერტილი (x_2, y_2) გადაინაცვლებს $(x_2+\delta x_2,\ y_2+\delta y_2)$ წერტილში (იხ. ნახ. 18). ახლა ისიც შევნიშნოთ, რომ $BD = \delta y|_{x=x_2}$, $FC = \delta y_2$, საიდანაც $\delta y|_{x=x_2} \approx \delta y_2 - y'(x_2)\,\delta x_2$. მიახლოვება აქაც აღებულია ერთზე მეტი რიგის უსასრულოდ მცირეების სიზუს-



ნახ. 18.

ტით. დავუბრუნდეთ ტოლობას (18.3) და მარჯვენა ნაწილში ახლა მეორე შესაკრები გარდავქმნათ ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით:

$$\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x,\ y+\delta y,\ y'+\delta y')\, dx =$$

$$= F|_{x=x_2+\Theta\delta x_2} \cdot \delta x_2 = F(x,\ y,\ y')\,|_{x=x_2}\,\delta x_2 + \varepsilon\delta x_2, \tag{18.6}$$

სადაც $0<\theta<1$ და $\varepsilon\to 0$, როცა $\delta x_2\to 0$ და $\delta y_2\to 0$. ამის შემდეგ, (18.3) ტოლობიდან, (18.5) და (18.6) ტოლობების ძალით, მივიღებთ

$$\delta J = F|_{x=x_2}\,\delta x_2 + F_{y'}|_{x=x_2}(\delta y_2 - y'(x_2)\,\delta x_2) =$$
$$= (F - y'\,F_{y'})_{x=x_2}\,\delta x_2 + F_{y'}|_{x=x_2}\,\delta y_2.$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა ჩაიწერება ასე:

$$(F - y'\,F_{y'})_{x=x_2}\,\delta x_2 + F_{y'}|_{x=x_2}\,\delta y_2 = 0. \tag{18.7}$$

როცა δx_2 და δy_2 დამოუკიდებელი არიან, მაშინ წინა განტოლებიდან წარმოიქმნება შემდეგი ტოლობები:

$$(F - y'\,F_{y'})_{x=x_2} = 0, \quad F_{y'}|_{x=x_2} = 0.$$

ჩვეულებრივად, პრაქტიკულ ამოცანებში, მოცემულია ხოლმე შესადარებელი წირის ბოლო B წერტილის გადაადგილების წესი სიბრტყეზე. მაგალითად, დავუშვათ რომ წერტილი B მოძრაობს წირზე $y_2=\varphi(x_2)$. მაშინ, ცხადია, δx_2 და δy_2 დამოკიდებული სიდიდეებია: $\delta y_2 = \varphi'(x_2)\,\delta x_2$ და, მაშასადამე, განტოლება (18.7) მიიღებს სახეს:

$$[F + (\varphi' - y')\,F_{y'}]\,|_{x=x_2}\,\delta x_2 = 0.$$

ვინაიდან δx_2 დამოუკიდებლად იცვლება, ამიტომ განხილულ შემთხვევაში ექსტრემუმის აუცილებელ პირობას ექნება სახე:

$$F + (\varphi' - y')\,F_{y'}|_{x=x_2} = 0. \tag{18.8}$$

მიღებულ ტოლობას (18.8), რომელიც ექსტრემალის ბოლო წერტილში ერთმანეთთან აკავშირებს კუთხურ კოეფიციენტებს y' და φ', უწოდებენ **ტრანსვერსალობის** პირობას. ტრანსვერსალობის პირობა (18.8) და პირობა $y_2=\varphi(x_2)$ საშუალებას გვაძლევს წირთა კონიდან $y=y(x,\beta)$. გამოვყოთ ერთი ან რამდენიმე წირი, რომლებზედაც შესაძლოა მოცემულმა ფუნქციონალმა მიაღწიოს ექსტრემუმს. როცა წირის განტოლება, რომელზედაც შესადარებელი წირის ბოლო წერტილი B გადაინაცვლებს, არაცხადი სახით არის მოცემული $\Phi(x_2, y_2)=0$, მაშინ ტრანსვერსალობის პირობა (18.8) შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{F - y'\,F_{y'}}{\Phi_x} = \frac{F_{y'}}{\Phi_y}, \tag{18.9}$$

რომელიც შესრულებული უნდა იყოს $\Phi(x_2, y_2)=0$ წირის ყოველ წერტილში.

§ **19. მაგალითები.** მოვძებნოთ ტრანსვერსალობის პირობა ფუნქციონალისათვის

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\gamma(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{19.1}$$

თუ შესადარებელი წირები გამოდიან უძრავი წერტილიდან $A(x_1, y_1)$, რომელთა ბოლოები მდებარეობენ წირზე $y_2=\varphi(x_2)$, სადაც $\gamma(x, y)$ არის მოცემული ფუნქცია $\gamma(x_2, y_2)\neq 0$.

ამოხსნა. ვინაიდან $F=\gamma(x, y)\sqrt{1+y'^2}$, ამიტომ წინა პარაგრაფში გამოყვანილ ტრანსვერსალობის პირობას (16.8) ფუნქციონალისათვის (19.1) ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{\gamma(x, y)(1+y'\varphi')}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

საიდანაც $y'\varphi'+1=0$. ამრიგად ტრანსვერსალობის პირობას მოცემული ფუნქციონალისათვის წარმოადგენს დასაშვები და $y_2=\varphi(x_2)$ წირების ორთოგონალობა.

2. შევისწავლოთ ფუნქციონალის

$$J=\int_{0}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \tag{19.2}$$

ექსტრემუმი, თუ შესადარებელი წირები გამოდიან კოორდინატთა სათავიდან, რომელთა ბოლოები იმყოფებიან წრფეზე $y_2=x_2-5$.

ამოხსნა. ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ ცხადი სახით არ შეიცავს x ცვლადს, ამიტომ (19.2) ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი იქნება (იხ. თავი VII, § 16):

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

ანუ

$$C_1 y\sqrt{1+y'^2}=1.$$

უკანასკნელი განტოლება წარმოადგენს პირველი რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ცხადი სახით არ შეიცავს დამოუკიდებელ ცვლადს x. მისი ინტეგრება შეიძლება ჩავატაროთ ცვლადთა განცალების ხერხით, მივიღებთ

$$(x-C_1)^2+y^2=C_2^2. \tag{19.3}$$

გამოვიყენოთ პირველი სასაზღვრო პირობა, რომლის მიხედვით წირები გამოდიან კოორდინატთა სათავიდან. გვექნება $C_1=C_2$. ახლა შევნიშნოთ, რომ (19.2) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კერძო სახეა წინა მაგალითში განხილული ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა ფუნქციისა. ამიტომ ტრანსვერსალობის პირობა მოცემული ფუნქციონალისა ნიშნავს (19.3) წირებისა და $y_2=x_2-5$ წრფის ორთოგონალობას ამ წრფის ყოველ წერტილში. ეს იმას ნიშნავს, რომ წრფე $y_2=x_2-5$ არის იმ წრეწირის დიამეტრი, რომლის ცენტრი (0,5) წარმოადგენს $y_2=x_2-5$ წრფისა და $0x$ ღერძის გადაკვეთას. მაშასადამე, $C_1=C_2=5$ და (19.3) განტოლებიდან მივიღებთ $(x-5)^2+y^2=25$. მოცემულ ფუნქციონალს შეუძლია ექსტრემუმს მიაღწიოს მხოლოდ წრეწირებზე $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

§ **20. განზოგადება სამგანზომილებიანი სივრცისათვის.** ახლა განვიხილოთ ფუნქციონალის

$$J[y, z]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\,dx \tag{20.1}$$

ექსტრემუმის ამოცანა, როცა ყოველი დასაშვები წირი გამოდის მოცემული უძრავი წერტილიდან $A(x_1, y_1, z_1)$, ხოლო ბოლო წერტილი $B(x_2, y_2\ z_2)$ მოძრაობს სამგანზომილებიანი სივრცის წირზე: $y_2=\varphi_1(x_2)$, $z_2=\varphi_2(x_2)$. ვთქვათ ფუნქციონალი (20.1) ექსტრემუმს აღწევს ექსტრემალზე (l). ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალი $J[y, z]$ ექსტრემუმს აღწევს როგორც იმ შესადარებელ წირთა შორის, რომლებსაც (l) წირის ბოლო წერტილები აქვთ, ისე იმ შესადარებელ წირთა შორის, რომელთა ბოლო წერტილები არ ემთხვევა (l) წირის ბოლო წერტილს. შესადარებელი წირების სიმრავლე, რომელთა ბოლო წერტილები ემთხვევა ან არ ემთხვევა (l) წირის ბოლო წერტილს, ცხადია, შეიცავს დასაშვები წირების სიმრავლეს, რომელთა ბოლო წერტილები ემთხვევა (l) წირის ბოლო წერტილს. მაშასადამე, (20.1) ფუნქციონალი მით უმეტეს მიაღწევს ექსტრემუმს წირებზე, რომლების ბოლო წერტილები ემთხვევიან ექსტრემალის ბოლო წერტილს. სხვანაირად, წირი (l) უნდა იყოს ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\quad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0 \tag{20.2}$$

ინტეგრალი. ამ სისტემის ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს ოთხ ნებისმიერ მუდმივს, რომელთაგან ორი ნებისმიერი მუდმივი განისაზღვრება მოცემული სასაზღვრო პირობიდან იმის შესახებ, რომ ზოგადი ინტეგრალის ყოველი წირი უნდა გამოდიოდეს მოცემული წერტილიდან $A(x_1, y_1, z_1)$. დანარჩენი ორი ნებისმიერი მუდმივის განსაზღვრისათვის უნდა გამოვიყე-

ნოთ პირობა $\delta J[y, z]=0$, რომელშიც იგულისხმება, რომ ფუნქციონალი $J[y, z]$ განსაზღვრულია (20.2) სისტემის ინტეგრალურ წირებზე.

გადავიდეთ (20.1) ფუნქციონალის პირველი ვარიაციის მოძებნაზე (20.2) სისტემის ინტეგრალურ წირებზე. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $J[y, z]$ ფუნქციონალი დიფერენციალურ განტოლებათა (20.2) სისტემის ინტეგრალურ წირებზე წარმოადგენს $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილის კოორდინატების ფუნქციას $\psi=\psi(x, y, z)$, რომლის სრული დიფერენციალი $d\psi=$ $=\delta J[y, z]$. მსგავსად § 16-ში ჩატარებული მსჯელობისა დავრწმუნდებით, რომ $J[y, z]$ ფუნქციონალის სრული ნაზრდი იქნება:

$$\Delta J[y, z]=\int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\, dx-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\, dx=$$

$$=\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\, dx+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} [F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')-F(x, y, z, y', z')]\, dx.$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველ ინტეგრალს საშუალო მნიშვნელობის ფორმულით გარდავქმნით, ხოლო მეორე შესაკრების ინტეგრალქვეშა სხვაობას დავშლით ტეილორის ფორმულის მიხედვით და გამოვყოფთ ინტეგრალის მთავარ ნაწილს, წრფივად დამოკიდებულს δy, δz, $\delta y'$, $\delta z'$ ვარიაციებისაგან, მაშინ $J[y, z]$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია (ანუ ψ ფუნქციის სრული დიფერენციალი) ასე წარმოგვიდგება:

$$\delta J[y, z]=F|_{x=x_2}\delta x_2+\int_{x_1}^{x_2} (F_y\delta y+F_z\delta z+F_{y'}\delta y'+F_{z'}\delta z')\, dx, \quad (20.3)$$

გარდავქმნათ $F_{y'}\delta y'$ და $F_{z'}\delta z'$ შესაკრებების ინტეგრალები ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით, გვექნება

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\delta y'\, dx=[F_{y'}\delta y]_{x=x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}(F_{y'})\,\delta y\, dx,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{z'}\delta z'\, dx=[F_{z'}\delta z]_{x=x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}(F_{z'})\,\delta z\, dx.$$

ამის შემდეგ ტოლობა (20.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\delta J[y, z]=F|_{x=x_2}\delta x_2+[F_{y'}\delta y]_{x=x_2}+[F_{z'}\delta z]_{x=x_2}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\,dx$$

და, რაკი (20.2) ტოლობების ძალით, უკანასკნელი ორი შესაკრები ნულის ტოლია, ამიტომ მივიღებთ

$$\delta J[y, z]=F|_{x=x_2}\delta x_2+[F_{y'}\delta y]_{x=x_2}+[F_{z'}\delta z]_{x=x_2}. \tag{20.4}$$

ისევე დავრწმუნდებით როგორც § 16-ში, რომ

$$\delta y|_{x=x_2}\approx\delta y_2-y'(x_2)\,\delta x_2,\quad \delta z|_{x=x_2}\approx\delta z_2-z'(x_2)\,\delta x_2.$$

ამის შემდეგ, თანახმად გამოსახულებისა (20.4), ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა ასე ჩაიწერება

$$\delta J[y, z]=[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_2}\delta x_2+$$

$$+F_{y'}|_{x=x_2}\delta y_2+F_{z'}|_{x=x_2}\delta z_2=0. \tag{20.5}$$

ვინაიდან წერტილი $B(x_2\ y_2,\ z_2)$ მოძრაობს სივრცის წირზე: $y_2=\varphi_1(x_2)$, $z_2=\varphi_2(x_2)$, ამიტომ $\delta y_2=\varphi_1'(x_2)\,\delta x_2$ და $\delta z_2=\varphi_2'(x_2)\,\delta x_2$ და ტოლობიდან (20.5) მივიღებთ

$$[F+(\varphi_1'-y')\,F_{y'}+(\varphi_2'-z')\,F_{z'}]_{x=x_2}\,\delta x_2=0.$$

ვინაიდან ვარიაცია δx_2 ნებისმიერია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გვექნება

$$[F+(\varphi_1'-y')\,F_{y'}+(\varphi_2'-z')\,F_{z'}]_{x=x_2}=0. \tag{20.6}$$

გამოყვანილ ტოლობას (20.6) უწოდებენ (20.1) ფუნქციონალის შესაბამის *ტრანსვერსალობის პირობას*.

პირობა (20.6) და მოცემული წირის განტოლებები: $y_2=\varphi_1(x_2)$, $z_2=\varphi_2(x_2)$ წარმოადგენენ იმ პირობებს, რომელთა დახმარებით უნდა განისაზღვროს დიფერენციალურ განტოლებათა (20.2) სისტემის ზოგად ინტეგრალში შემავალი ორი დანარჩენი ნებისმიერი მუდმივი. ასე განისაზღვრება (20.2) სისტემის ზოგად ინტეგრალში შემავალი ექსტრემალის შესაბამისი ოთხივე ნებისმიერი მუდმივი და, მაშასადამე თვით ექსტრემალი.

§ 21. შემთხვევა, როცა შესადარებელი წირის ბოლო წერტილი მოძრაობს მოცემულ ზედაპირზე. ადვილად გამოვიყვანთ (20.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს იმ შემთხვევაშიც, როცა დასაშვები წირი გამოდის მოცემული უძრავი წერტილიდან $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, ხოლო ბოლო წერტილი $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ მოძრაობს მოცემულ ზედაპირზე

$z_2=\psi(x_2, y_2)$. ამ შემთხვევაში ზედაპირის ვარიაცია $\delta z_2=\psi'_{x_2}\delta x_2+\psi'_{y_2}\delta y_2$. ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა (20.5) ჩაიწერება ასე:

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_2}\delta x_2+F_{y'}|_{x=x_2}\delta y_2+$$
$$+F_{z'}|_{x=x_2}\delta z_2=0 \tag{21.1}$$

ანუ

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+\psi'_{x_2}F_{z'}]_{x=x_2}\delta x_2+$$
$$+[F_{y'}+F_{z'}\psi'_{y_2}]_{x=x_2}\delta y_2=0,$$

საიდანაც δx_2 და δy_2 ვარიაციების ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ

$$[F-y'F_{y'}+(\psi'_{x_2}-z')F_{z'}]_{x=x_2}=0,$$
$$[F_{y'}+F_{z'}\psi'_{y_2}]_{x=x_2}=0. \tag{21.2}$$

პირობა იმის შესახებ, რომ შესადარებელი წირები გამოდიან მოცემული წერტილიდან $A(x_1, y_1, z_1)$, მოცემული ზედაპირის განტოლება და ტრანსვერსალობის პირობები (21.2) საშუალებას გვაძლევს ეილერის დიფერენციალური განტოლებების (20.2) სისტემის ზოგად ინტეგრალში განვსაზღვროთ ნებისმიერი მუდმივები.

ამრიგად, (20.1) ფუნქციონალის ექსტრემალი შეიძლება იყოს მხოლოდ ის ინტეგრალური წირი დიფერენციალური განტოლებების (20.2) სისტემისა, რომელიც გამოდის მოცემული წერტილიდან $A(x_1, y_1, z_1)$, ბოლო წერტილი მდებარეობს მოცემულ ზედაპირზე $z_2=\psi(x_2, y_2)$ და აკმაყოფილებს ტრანსვერსალობის პირობებს (21.2).

იმ შემთხვევაში, როცა ზედაპირის განტოლება მოცემულია არაცხადი სახით $\Phi(x_2, y_2, z_2)=0$, მაშინ ადვილი სანახავია, რომ ტრანსვერსალობის პირობა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\frac{F-y'F_{y'}-z'F_{z'}}{\Phi_{x_2}}=\frac{F_{y'}}{\Phi_{y_2}}=\frac{F_{z'}}{\Phi_{z_2}},\quad x=x_2 \tag{21.3}$$

რომელიც გვაძლევს x, y, z, y', z' სიდიდეებს შორის დამაკავშირებელ ორ ტოლობას.

§ 22. მაგალითები. 1. მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y, z]=\int_{x_1}^{x_2}\gamma(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \tag{22.1}$$

შესაბამისი ტრანსვერსალობის პირობა, თუ შესადარებელი წირების კონა გამოდის უძრავი წერტილიდან $A(x_1\, y_1, z_1)$ და კონის წირთა ბოლოები $B(x_2, y_2, z_2)$ მდებარეობენ მოცემულ $z=\psi(x, y)$ ზედაპირზე.

მოცემული ფუნქციონალისათვის $F(x, y, z)=\gamma(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ და, ამიტომ, ტრანსვერსალობის პირობებს (21.2) ექნება შემდეგი სახე:

$$z'\psi'_x+1=0, \quad z'\psi'_y+y'=0, \quad \text{როცა } x=x_2$$

ანუ

$$\frac{1}{\psi'_x}=\frac{y'}{\psi'_y}=\frac{z'}{-1}, \quad \text{როცა } x=x_2.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი ექსტრემალის მხები ვექტორი $\vec{T}=\vec{T}(1, y', z')$ და $z=\psi(x, y)$ ზედაპირის ნორმალური ვექტორი $\vec{N}=\vec{N}(\psi'_x, \psi'_y, -1)$ წერტილში $B(x_2, y_2, z_2)$ ურთიერთპარალელურია. სხვანაირად, (22.1) ფუნქციონალის შესაბამისი ტრანსვერსალობის პირობას წარმოადგენს ექსტრემალისა და $z=\psi(x, y)$ ზედაპირის მართობულობა.

2. შევისწავლოთ ფუნქციონალის

$$J[y, z]=\int_0^{x_2}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx \tag{22.2}$$

ექსტრემუმი, თუ შესადარებელი წირების კონა გამოდის კოორდინატთა სათავიდან $A(0, 0, 0)$, ხოლო ბოლო წერტილები მდებარეობენ საკოორდინატო yz სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში $x=x_2$.

ჯერ დავწეროთ, (22.2) ფუნქციონალის შესაბამისი, ეილერის დიფერენციალური განტოლებების სისტემა (20,2), გვექნება:

$$y''-z=0, \quad z''-y=0, \tag{22.3}$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ: $y^{(4)}-y=0$. უკანასკნელი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალია: $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+C_3\cos x+C_4\sin x$, სადაც C_1, C_2, C_3, C_4 ნებისმიერი მუდმივებია. ვინაიდან $y=z''$, ამიტომ z ფუნქციისათვის მივიღებთ: $z=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x-C_3\cos x-C_4\sin x$. ამრიგად, (20.3) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\left.\begin{aligned} y&=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+C_3\cos x+C_4\sin x,\\ z&=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x-C_3\cos x-C_4\sin x.\end{aligned}\right\}. \tag{22.4}$$

იმისათვის, რომ ზოგადი ინტეგრალიდან (22.4) გამოვყოთ ექსტრემალი, უნდა გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები. რაკი ინტეგრალური წირები გამოდიან $A(0, 0, 0)$ წერტილიდან, ამიტომ $y(0)=0$, $z(0)=0$ და, მაშასადამე, ინტეგრების C_1 და C_3 მუდმივების განსაზღვრისათვის (22.4) ტოლობებიდან მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას: $C_1+C_3=0$, $C_1-C_3=0$, საიდანაც $C_1=C_3=0$· დანარჩენი C_2 და C_4 მუდმივების

განსაზღვრისათვის მივმართოთ ტრანსვერსალობის პირობას (21.1), რომელშიც პირველი შესაკრები, რადგან $\delta x_2=0$, ნულის ტოლია:

$$[F-y' F_{y'}-z' F_{z'}]_{x=x_2}\,\delta x_2=0$$

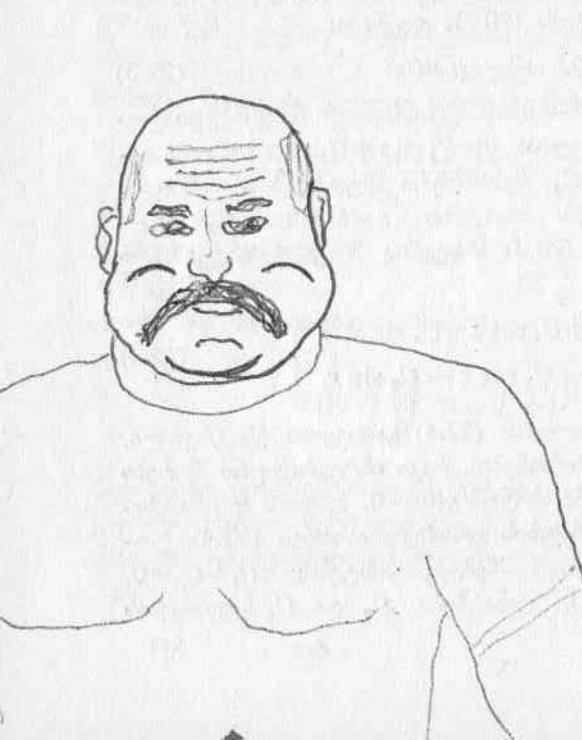
ტრანსვერსალობის პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F_{y'}|_{x=x_2}\,\delta y_2+F_{z'}|_{x=x_2}\,\delta z_2=0\,,$$

საიდანაც, δy_2 და δz_2 ვარიაციების ნებისმიერობის გამო, გვექნება

$$F_{y'}|_{x=x_2}=0,\quad F_{z'}|_{x=x_2}=0.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $F=y'^2+z'^2+2yz$, $F_{y'}=2y'$, $F_{z'}=2z'$, გვექნება $y'(0)=0$, $z'(0)=0$, ე. ი. $C_2\,\mathrm{ch}\,x_2+C_4\cos x_2=0$, $C_2\,\mathrm{ch}\,x_2-C_4\cos x_2=0$. ჩავთვალოთ, რომ $\cos x_2\neq 0$. მაშინ ერთგვაროვან სისტემას აქვს ამონახსნი $C_2=C_4=0$. ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება წრფე: $y=0$, $z=0$. თუკი $\cos x_2=0$ ე. ი. $x_2=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $(n=0,\ \pm 1,\ldots)$, მაშინ $C_2=0$, ხოლო C_4 ნებისმიერია. გვექნება $y=C_4\sin x$, $z=-C_4\sin x$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში, C_4 მუდმივის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მოცემული ფუნქციონალი (22.2) ნულის ტოლია.



თ ა ვ ი XI

ექსტრემალთა ველი. ექსტრემუმის საკმარისი პირობები

§ 1. ექსტრემალთა ველი სიბრტყეზე. როგორც ვიცით ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \tag{1.1}$$

ექსტრემალთა სიმრავლე წარმოადგენს ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ ბრტყელი წირების ოჯახს. განვიხილოთ ექსტრემალთა ოჯახის ის ნაწილი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ C პარამეტრზე:

$$y=\varphi(x, C). \tag{1.2}$$

ვიტყვით, რომ სიბრტყის არე (D) წარმოადგენს ექსტრემალთა საკუთრივ ველს, თუ (D) არის ყოველ წერტილზე გადის (1.2) ოჯახის ერთადერთი ექსტრემალი. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ ფუნქციას $\varphi(x, C)$ აქვს პირველი და მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულები x და C არგუმენტების მიმართ.

დავუშვათ, რომ ექსტრემალთა წირები (1.2) გამოდიან მოცემული $A(x_1, y_1)\in(D)$ წერტილიდან. ზოგჯერ ამ წირების სიმრავლეს უწოდებენ $A(x_1, y_1)$ წერტილიდან გამომავალ ექსტრემალთა კონას, ხოლო $A(x_1, y_1)$ წერტილს—ექსტრემალთა ცენტრს. თუ ექსტრემალთა ცენტრიდან გამომავალი წირები (D) არეში ერთმანეთს არსად კვეთენ, მაშინ წირთა ოჯახს (1.2) უწოდებენ ექსტრემალთა ცენტრალურ ველს. ქვემოთ შევეხებით ექსტრემალთა ცენტრალური ველის ზოგიერთ საკითხს. წინასწარ განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ (D) არე წარმოადგენს წრის $x^2+y^2\leqslant1$ წერტილთა სიმრავლეს. ავიღოთ c პარამეტრზე დამოკიდებულ ექსტრემალთა ოჯახი $y=x+c$. ცხადია, მოცემული წრის ყოველ წერტილზე გაივლის $y=x+c$ სახის ერთადერთი წრფე. ამასთან, $y=x+c$ ოჯახის წრფეები ურთიერთპარალელურია და, მაშასადამე, (D) არეში ერთმანეთს

არ გადაკვეთენ. თანახმად განმარტებისა, წრფეები $y=x+c$ წარმოადგენენ ექსტრემალთა საკუთრივ ველს წრეში $x^2+y^2 \leqslant 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ავიღოთ კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი ექსტრემალების ოჯახი, რომელიც წარმოადგენს სინუსოიდების კონას $y=c \sin x$, დამოკიდებულს c პარამეტრზე. ამ ოჯახის წირები, რომლებიც Ox ღერძის $0 \leqslant x \leqslant a_1$ $(a_1 < \pi)$ მონაკვეთის საკმარისად მცირე მახლობლობაში იმყოფებიან, წარმოქმნიან ექსტრემალთა ცენტრალურ ველს. იმავე სინუსოიდების ოჯახის წირები, რომლებიც Ox ღერძის $\varepsilon \leqslant x \leqslant a_1$, $(\varepsilon > 0,\ a_1 < \pi)$ მონაკვეთის საკმარისად მცირე მახლობლობაში არიან, წარმოქმნიან ექსტრემალთა საკუთრივ ველს. მაგრამ, თუ ავიღებთ ექსტრემალთა კონის იმ წირებს, რომლებიც Ox ღერძის მონაკვეთის $0 \leqslant x \leqslant a_2$ $(a_2 > \pi)$ საკმარისად მცირე მახლობლობაში იმყოფებიან, მაშინ ისინი არ წარმოქმნიან ექსტრემალთა არც საკუთრივ და არც ცენტრალურ ველს.

§ 2. ექსტრემალთა ველის დახრის დიფერენციალური განტოლება სიბრტყეზე. ექსტრემალთა ცენტრალური ველის ნებისმიერი წირის (x, y) წერტილში გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს $p=p(x, y)=y'$ ეწოდება ე ქ ს ტ რ ე მ ა ლ თ ა ვ ე ლ ი ს დ ა ხ რ ა (x, y) წ ე რ ტ ი ლ შ ი. ექსტრემალთა ველის დახრის მოსაძებნად საკმარისია განტოლებიდან $y'=\varphi_x'(x, c)$ გამოვრიცხოთ c პარამეტრი (1.2) განტოლების დახმარებით. ისიც შევნიშნოთ, რომ რაკი ფუნქციას $y=\varphi(x, c)$ პირველი და მეორე რიგის ნაწილობითი წარმოებულები აქვს, ამიტომ ექსტრემალთა ველის დახრა $p=p(x, y)$ და მისი პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულები იქნებიან უწყვეტი ფუნქციები (D) არეში. როცა ამბობენ მოცემულია ექსტრემალთა ველი. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულია ველის დახრა $p=p(x, y)$. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ, პირიქით, თუ მოცემულია ველის დახრა, მაშინ განსაზღვრულია ექსტრემალთა ოჯახი, რომლითაც ექსტრემალთა ველია წარმოქმნილი. მართლაც, ვინაიდან ფუნქცია $p(x, y)$ მოცემულია, ამიტომ ველის ყველა ექსტრემალები იქნებიან დიფერენციალური განტოლების

$$y'=p(x, y) \tag{2.1}$$

ინტეგრალური წირები. ახლა ისიც გავითვალისწინოთ, რომ საძიებელი ექსტრემალები, გარდა დიფერენციალური განტოლებისა (2.1), უნდა აკმაყოფილებდნენ აგრეთვე ეილერის დიფერენციალურ განტოლებასაც (იხ. თავი VII, § 13)

$$F_y - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'} - F_{xy'} = 0. \tag{2.2}$$

განტოლებიდან (2.1) გვაქვს

$$y'' = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} p. \tag{2.3}$$

ჩავსვათ y'' წარმოებულის მნიშვნელობა (2.2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$F_y(x, y, p)-F_{yy'}(x, y, p)\,p-E_{xy'}(x, y, p)-$$
$$-F_{y'y'}(x, y, p)\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}p\right)=0. \qquad (2.4)$$

ასეთია დიფერენციალური განტოლება ნაწილობითი წარმოებულებით, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია $p(x, y)$. მას უწოდებენ ექსტრემალთა ველის დახრის დიფერენციალურ განტოლებას.

§ 3. ტრანსვერსალთა ველი. რაიმე წირისა და მოცემული ექსტრემალის ტრანსვერსალობის ზოგადი პირობა, რომელიც ზემოთ იყო გამოყვანილი (თავი X, § 18, ფორმულა (18.7)), ჩავწეროთ ასე:

$$[F(x, y, y')-y'F_{y'}(x, y, y')]\,\delta x+F_{y'}(x, y, y')\,\delta y=0, \qquad (3.1)$$

სადაც y' აღნიშნავს ექსტრემალის კუთხურ კოეფიციენტს, ხოლო δx და δy არის აღებული წირის წერტილის კოორდინატების დიფერენციალები. ტრანსვერსალობის პირობიდან (3.1) შეგვიძლია განვსაზღვროთ წირის კუთხური კოეფიციენტი $\frac{\delta y}{\delta x}$, როცა ცნობილია ექსტრემალის კუთხური კოეფიციენტი y' და პირიქით. ვთქვათ (1.1) ფუნქციონალის ექსტრემალთა ველის წარმომქმნელ წირთა ოჯახია $y=\varphi(x, c)$. წირს, რომელიც ექსტრემალთა ველის ყოველ წირს გადაკვეთს და დააკმაყოფილებს პირობას (3.1), ეწოდება ექსტრემალთა ველის ტრანსვერსალი. შევადგინოთ ექსტრემალთა მოცემული ველის ტრანსვერსალთა ოჯახის, ანუ ტრანსვერსალთა ველის განტოლება. ვთქვათ, როგორც ზემოთ, δx და δy აღნიშნავენ ნებისმიერი ტრანსვერსალის წერტილის კოორდინატების, დიფერენციალებს, ხოლო $p=p(x, y)$—ექსტრემალთა ველის დახრას. მაშინ, განტოლებიდან (3.1), დავწერთ

$$[F(x, y, p)-pF_{y'}(x, y, p)]\,\delta x+F_{y'}(x, y, p)\,\delta y=0. \qquad (3.2)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს საძიებელ ტრანსვერსალთა ველის დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ზოგადი ინტეგრალის მოსაძებნად შევნიშნოთ, რომ მართებულია ტოლობა:

$$\frac{\partial}{\partial x}[F_{y'}(x, y, p)]=\frac{\partial}{\partial y}[F(x, y, p)-pF_{y'}(x, y, p)],$$

რომლის ჭეშმარიტებაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ფაქტიურად შევასრულებთ ამ ტოლობაში შემავალ გაწარმოების ოპერაციებს და გამოვიყენებთ დიფერენციალურ განტოლებას (2.4). როგორც ვხედავთ, (3.2) განტოლების მარცხენა ნაწილი სრული დიფერენციალია და, მაშასადამე, მის ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$W(x, y)=\overline{C} \qquad (3.3)$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}&=F(x, y, p)-pF_y(x, y, p),\\ \frac{\partial W}{\partial y}&=F_{y'}(x, y, p), \ \overline{C}=\text{const.}\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

განტოლება (3.3) წარმოადგენს მოცემულ ექსტრემალთა ველის ტრანსვერსალთა ოჯახის განტოლებას.

შევასრულოთ (3.2) განტოლების ინტეგრება, მაშინ ფუნქცია $W(x,y)$ წარმოგვიდგება შემდეგი წირითი ინტეგრალით:

$$W(x, y)=\int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)}[F(x, y, p)-pF_{y'}(x, y, p)]dx+F_{y'}(x, y, p)dy. \tag{3.5}$$

საკუთრივი ველის შემთხვევაში ინტეგრალი (3.5) დამოუკიდებელია (x_1, y_1) და (x, y) წერტილების შემაერთებელი საინტეგრო წირისაგან. თუკი ველი ცენტრალურია, (x_1, y_1) და (x, y) წერტილების შემაერთებელი წირი მოცემული ექსტრემალია, ცნობილია ველის დახრა p, მაშინ $y'=p$, $F_{y'}dy-pF_{y'}dx=0$ და ინტეგრალი (3.5) მოგვცემს ძირითად ინტეგრალს (1.1).

ექსტრემალთა ოჯახი $y=y(x, C)$ და ტრანსვერსალთა ოჯახი $W(x, y)=\overline{C}$ წარმოადგენენ ურთიერთგადამკვეთ წირთა სიმრავლეს, რომელიც ფარავს ექსტრემალთა ველს.

§ 4. ექსტრემალთა ველის თვისება. დავამტკიცოთ შემდეგი **თეორემა.** ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x, y, y')\,dx \tag{4.1}$$

მნიშვნელობა, გამოთვლილი ექსტრემალის იმ უბანზე, რომელიც მოთავსებულია ორ ტრანსვერსალს შორის, ყველა ექსტრემალისათვის ერთი და იგივეა.

დამტკიცება. გამოვთვალოთ (4.1) ფუნქციონალის მნიშვნელობა $y=\varphi(x, C)$ ექსტრემალთა ოჯახის ნებისმიერი წირის იმ უბანზე, რომელიც მოთავსებულია ორ $W(x, y)=C_1$ და $W(x, y)=C_2$ ტრანსვერსალს შორის. ცხადია, ეს მნიშვნელობა დამოკიდებულია C პარამეტრზე და ასე გამოისახება:

$$J[c]=\int_{x_1(C)}^{x_2(C)}F\left[x, \varphi(x, c), \frac{\partial\varphi(x, c)}{dx}\right]dx.$$

იმისათვის, რომ c პარამეტრზე დამოკიდებული უკანასკნელი ფუნქცია ყველა ექსტრემალისათვის ერთი და იგივე იყოს საკმარისია $J[c]$ ფუნქციის წარმოებული c პარამეტრით ნულის ტოლი იყოს:

$$\frac{dJ[c]}{dc}=0.$$

ავიღოთ (4.1) ინტეგრალის ვარიაციის ზოგადი სახე (იხ. თავი X § 17, ფორმულა (17,9)):

$$\delta J=[(F-y'F_{y'})\delta x+F_{y'}\delta y]_1^2+\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx, \quad (4.2)$$

სადაც პირველი შესაკრები აღნიშნავს ფრჩხილების $[\ \ ]_1^2$ შიგნით ჩაწერილი ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობას წირის მარჯვენა და მარცხენა ბოლო წერტილებზე, ხოლო δx და δy აღნიშნავენ წირის ბოლო წერტილების დეკარტის კოორდინატების პირველ ვარიაციებს. ვინაიდან ექსტრემალის ბოლო წერტილები ტრანსვერსალებზე მდებარეობენ, ამიტომ შესრულებული იქნება პირობა (თავი X. § 18, ფორმულა (18.7)):

$$[F(x, y, y')-y'F_{y'}(x, y. y')]\delta x+F_{y'}(x, y, y')\delta y=0,$$

მაშასადამე, ტოლობიდან (4.2) მივიღებთ, რომ მართებულია იგივურად ტოლობა

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx=0,$$

ე. ი, $J[c]$ ყველა ექსტრემალისათვის ერთი და იგივეა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. **ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლება.** ზემოთ მესამე პარაგრაფში დამტკიცებული იყო, რომ როცა ცნობილია ექსტრემალთა ველის დახრა $p(x, y)$, მაშინ განტოლება (3.3) წარმოადგენს ექსტრემალთა ველის ტრანსვერსალთა ოჯახის განტოლებას. მივმართოთ ტოლობებს (3.4), რომლებიც გამოსახავენ $W(x, y)$ ფუნქციის ნაწილობით წარმოებულებს x და y ცვლადებით. გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან ველის დახრის ფუნქცია $p(x, y)$. გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ

$$\Phi\left(x, y\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right)=0 \quad (5.1)$$

სახის დიფერენციალურ განტოლებას ნაწილობითი წარმოებულებით, რომელსაც ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. როცა (3.3) წარმოადგენს მოცემული ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალთა ველის ტრანსვერსალების ოჯახის განტოლებას, მაშინ ფუნქცია $W(x, y)$

აკმაყოფილებს განტოლებას (5.1). პირიქით, თუ $W(x, y)$ არის (5.1) განტოლების რომელიმე ინტეგრალი, მაშინ განტოლება (3.3) იქნება ექსტრემალთა რაიმე ველის ტრანსვერსალთა ოჯახი. მართლაც, ვთქვათ $W(x, y)$ არის (5.1) განტოლების რომელიმე ინტეგრალი- მისი შესაბამისი ექსტრემალთა ველის ასაგებად, რომლის დახრა არის $p(x, y)$, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ ფუნქცია $p(x, y)$ წარმოადგენს (2.4) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს. ამისათვის გავაწარმოვოთ (3.4) სისტემის პირველი განტოლება y ცვლადით, მეორე განტოლება x ცვლადით, მიღებული შედეგები ერთმანეთს გავუტოლოთ. მივიღებთ განტოლებას (2.4). ეს იმას ნიშნავს, რომ $p(x, y)$ წარმოადგენს რაღაც ექსტრემალთა ველის დახრას და წანადადება დამტკიცებულია.

§ 6. ჰამილტონის ფუნქცია. ხშირად ხელსაყრელია (1.1) ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლება, აგრეთვე ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლება, ჩავწეროთ ე. წ. ჰამილტონის ფუნქციის დახმარებით. ამისათვის ჩავთვალოთ, რომ y და y' არიან უცნობი ფუნქციები და ეილერის განტოლება

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

წარმოვადგინოთ ორი დიფერენციალური განტოლებისაგან შემდგარი შემდეგი სისტემის სახით:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0, \\ &\frac{dy}{dx} = y'. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

შემოვიღოთ y' წარმოებულის ნაცვლად ახალი ფუნქცია $u = F_{y'}$, ამასთან ვიგულისხმოთ $F_{y'y'} \neq 0$. თუ ტოლობას $u = F_{y'}$ ამოვხსნით y' ფუნქციის მიმართ, გვექნება

$$y' = y'(x, y, u). \tag{6.2}$$

ფუნქციას

$$H(x, y, U) = Uy' - F(x, y, U), \tag{6.3}$$

რომელშიც y' წარმოებულის ნაცვლად ჩასმულია მისი გამოსახულება (6.2), უწოდებენ ჰ ა მ ი ლ ტ ო ნ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ა ს. ტოლობიდან (6.3) ადვილად მივიღებთ:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = U \frac{\partial y'}{\partial y} - F_y - F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = U \frac{\partial y'}{\partial y} - F_y - U \frac{\partial y'}{\partial y} = -F_y,$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = y' + U \frac{\partial y'}{\partial U} - F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial U} = y' + U \frac{\partial y'}{\partial U} - U \frac{\partial y'}{\partial U} = y'.$$

გამოვიყენებთ რა უკანასკნელ ტოლობებს, განტოლებათა სისტემა (6.1) მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial H}{\partial y},\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial U}, \tag{6.4}$$

რომელსაც უწოდებენ ეილერის დიფერენციალური განტოლებების კანონიკურ სისტემას. როგორც ვხედავთ იგი ჩაწერილია ჰამილტონის ფუნქციის საშუალებით.

ახლა u ფუნქციის მაგივრად შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$V=F_{y'}(x,\ y,\ u) \tag{6.5}$$

და გამოვსახოთ ჰამილტონის ფუნქცია V ცვლადით:

$$H(x,\ y,\ V)=uF_{y'}(x,\ y,\ u)-F(x,\ y,\ u),$$

რომელშიც იგულისხმება, რომ u შეცვლილია ტოლობიდან (6.5). სისტემა (3.4) მიიღებს სახეს:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}&=-H(x,\ y,\ V),\\ \frac{\partial W}{\partial y}&=V,\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

საიდანაც V ცვლადის გამორიცხვის შემდეგ, მივიღებთ ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალურ განტოლებას ნაწილობითი წარმოებულებით

$$\frac{\partial W(x,\ y)}{\partial x}+H\left(x,\ y,\ \frac{\partial W(x,\ y)}{\partial y}\right)=0, \tag{6.7}$$

ჩაწერილს ჰამილტონის ფუნქციით, რომელსაც აკმაყოფილებს ტრანსვერსალთა ველის (3.3) განტოლებაში შემავალი ფუნქცია $W(x,\ y)$.

§ 7. შენიშვნა პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების შესახებ. განვიხილოთ არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\Psi\left(x_1, x_2, z, \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)=0, \tag{7.1}$$

სადაც Ψ არის თავისი არგუმენტების მოცემული ფუნქცია, x_1 და x_2 დამოუკიდებელი ცვლადები, $z=z(x_1,\ x_2)$-საძიებელი ფუნქცია. კერძოდ, როცა Ψ არის $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ და $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ ნაწილობითი წარმოებულების წრფივი ფუნქცია, და განტოლება (7.1) მიიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე ნაწილობითი წარმოებულების მიმართ, რომელიც შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$X_1(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2}=0, \tag{7.2}$$

მაშინ, როგორც ვიცით (იხ. თავი VI, § 5), უკანასკნელი განტოლების ინტეგრალის მოძებნის ამოცანა მიიყვანება

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2)} \tag{7.3}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებაზე. თუ $f_1(x_1, x_2)=c_1$ წარმოადგენს (7.3) განტოლების ზოგად ინტეგრალს, მაშინ ფუნქცია

$$z=X[f_1(x_1, x_2)] \tag{7.4}$$

იქნება (7.2) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი, სადაც X არის ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია x_1 და x_2 ცვლადების მიმართ.

ზოგადი ინტეგრალი არაწრფივი განტოლებისა (7.1) განისაზღვრება მსგავსად წრფივი შემთხვევისა. სახელდობრ, (7.1) განტოლების **ზოგადი ინტეგრალი** ეწოდება ამ განტოლების ისეთ ინტეგრალს, რომელიც შეიცავს ნებისმიერ ფუნქციას. პირველი რიგის ნაწილობითი წარმოებულებიანი არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში მტკიცდება, რომ (7.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მოძებნისათვის საკმარისია ვიცოდეთ მისი ისეთი ინტეგრალი, რომელიც დამოკიდებული იქნება ორ ნებისმიერ მუდმივზე

$$z=V(x_1, x_2, C_1, C_2) \tag{7.5}$$

და შესაძლებელი იქნება განტოლებათა სისტემიდან:

$$\left.\begin{aligned} &z=V(x_1, x_2, C_1, C_2),\\ &\frac{\partial z}{\partial x_1}=\frac{\partial V(x_1, x_2, C_1, C_2)}{\partial x_1},\\ &\frac{\partial z}{\partial x_2}=\frac{\partial V(x_1, x_2, C_1, C_2)}{\partial x_2} \end{aligned}\right\}$$

ნებისმიერი მუდმივების C_1 და C_2 გამორიცხვის შედეგად მივიღოთ განტოლება (7.1). ფუნქციას $z=V(x_1, x_2, C_1, C_2)$ უწოდებენ (7.1) დიფერენციალური განტოლების სრულ ინტეგრალს. როცა ცნობილია სრული ინტეგრალი (7.5), მაშინ (7.1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მიიღება განტოლებათა სისტემიდან

$$\left.\begin{aligned} &z-V(x_1, x_2, C_1, C_2)=0,\\ &\frac{\partial V}{\partial C_1}+\frac{\partial V}{\partial \lambda}\lambda'(C_1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

C_1 პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად, სადაც $\lambda = \lambda(C_1)$ არის ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია C_1 პარამეტრისა.

§ 8. დამოკიდებულება ეილერისა და ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრალებს შორის. აქ გავეცნობით ორ წინადადებას, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ ეილერისა და ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრალებს.

თეორემა. ეილერის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი წარმოადგენს ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლების სრულ ინტეგრალს.

მართლაც, ვთქვათ (4.1) ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალია ფუნქცია

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \tag{8.1}$$

დავაფიქსიროთ C_2. მაშინ საქმე გვექნება ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ექსტრემალთა ველთან, რომელიც წარმოიქმნება C_1 პარამეტრის ცვლილებით. ვთქვათ $p = p(x, y, C_2)$ წარმოადგენს ამ ველის დახრას. იგი მიიღება სისტემიდან

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, C_2), \\ p &= \varphi'_x(x, C_1, C_2). \end{aligned} \right\} \tag{8.2}$$

C_1 პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად. განვიხილოთ (8.1) ექსტრემალების შესაბამისი ტრანსვერსალების ოჯახი $W = W(x, y, C_2)$. ეს უკანასკნელი მოიძებნება ტრანსვერსალთა ველის დიფერენციალური განტოლებიდან (3.1). გარდა ამისა ვიცით, რომ იგი აკმაყოფილებს ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას (6.8) (იხ. § 6). განტოლებიდან (6.8) ჩანს, რომ თუ დავუმატებთ ფუნქციას $W(x, y, C_2)$ ნებისმიერ მუდმივს C_3, მივიღებთ ისევ (6.8) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს

$$W = W(x, y, C_2) + C_3, \tag{8.3}$$

რომელიც დამოკიდებულია ორ პარამეტრზე. მაშასადამე, ფუნქცია (8.3) წარმოადგენს ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლების სრულ ინტეგრალს. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა კი დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა. (4.1) ფუნქციონალის შესაბამისი ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლების სრული ინტეგრალი არის ამავე ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

ვთქვათ $W(x, y, C_2)$ წარმოადგენს ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ინტეგრალს და $\dfrac{\partial^2 W(x, y, C_2)}{\partial y \partial C_2}$. მაშინ ეილერის დიფერენციალური

განტოლების ზოგადი ინტეგრალის მისაღებად საკმარისია ამოვხსნათ განტოლება.

$$\frac{\partial W(x, y, C_2)}{\partial C_2}=C_1 \tag{8.4}$$

y ცვლადის მიმართ. მართლაც, C_2 პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის ფუნქცია $W(x, y, C_2)$ განსაზღვრავს მოცემული ვარიაციული ამოცანის ტრანსვერსალთა ოჯახს და, ამასთან, განსაზღვრავს ექსტრემალთა ველსაც. ექსტრემალთა ველის დახრა იყოს $p=p(x, y, C_2)$. ფუნქციები W და p აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას (3.4), საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial C_2}=F_{y'y'}(x, y, p)\frac{\partial p}{\partial C_2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial C_2}=-F_{y'y'}(x, y, p)\frac{\partial p}{\partial C_2}p. \tag{8.5}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial W}{\partial C_2}=\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial C_2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial C_2}\frac{dy}{dx}=$$

$$=\left(\frac{dy}{dx}-p(x, y, C_2)\right)F_{y'y'}(x, y, p)\frac{\partial p}{\partial C_2}. \tag{8.6}$$

შევნიშნოთ, რომ (8.4) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია y დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ მუდმივზე. ვუჩვენოთ, რომ იგი იქნება ეილერის განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ეს იქიდან ჩანს, რომ y ფუნქციისათვის (8.6) განტოლების მარცხენა ნაწილი არის ნული. მაგრამ, მაშინ

$$\frac{dy}{dx}=p(x, y, C_2). \tag{8.7}$$

ვინაიდან, (8.5) სისტემის პირველი განტოლებისა და $\dfrac{\partial^2 W(x, y, C_1)}{\partial y \partial C_2}\neq 0$ პირობის ძალით: $\dfrac{\partial p}{\partial C_2}F_{y'y'}(x, y, p)\neq 0$. განტოლება (8.7) წარმოადგენს მოცემული ველის ექსტრემალთა დიფერენციალურ განტოლებას და რაკი y აკმაყოფილებს ამ განტოლებას, ამიტომ იგი არის ექსტრემალი და აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას.

დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ ეილერის და ჰამილტონ-იაკობის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების ამოცანები ეკვივალენტური ამოცანებია.

§ 9. მაგალითი. შევისწავლოთ ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx \tag{9.1}$$

ტრანსვერსალთა ოჯახი.

ექსტრემალთა ოჯახი, როგორც მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, შედგება წრფეებისაგან. ტრანსვერსალობის პირობა, თანახმად (3.1) ფორმულისა, ასე ჩაიწერება

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{2}y'.$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ექსტრემალთა ველის ნებისმიერ წერტილში ტრანსვერსალის კუთხური კოეფიციენტი ორჯერ ნაკლებია ექსტრემალის კუთხურ კოეფიციენტზე. ავიღოთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფეთა კონა $y=kx$. იგი (9.1) ფუნქციონალისათვის ექსტრემალთა ველის განტოლებაა. შევადგინოთ შესაბამისი ტრანსვერსალები. გვაქვს: $y=kx$, $p=k=\frac{y}{x}$, სადაც p ექსტრემალთა ველის დახრაა. თანახმად განტოლებისა (3.4), დავწერთ

$$\frac{\partial W}{\partial x}=-p^2,\ \frac{\partial W}{\partial y}=2p,$$

ამიტომ, (3.5) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$W(x_2,\ y_2)=\int\limits_{(0,\,0)}^{(x_2,\,y_2)} 2p\,dy-p^2dx.$$

უკანასკნელი წირული ინტეგრალის გამოსათვლელად ინტეგრების წირის როლში ავიღოთ წრფე $y=\frac{y_2}{x_2}x$, მაშინ $p=y'=\frac{y_2}{x_2}$ და მივიღებთ: $W(x_2,\ y_2)=\frac{y_2^2}{x_2}$. როგორც ვხედავთ, (9.1) ფუნქციონალის ტრანსვერსალების ოჯახია პარაბოლები $y^2=Cx$, რომელთა სიმეტრიის ღერძია Ox ღერძი და რომელთა წვეროები კოორდინატთა სათავეა.

§ 10. ტრანსვერსალობის პირობა სამგანზომილებიან სივრცეში. ავიღოთ სამგანზომილებიან სივრცეში ორი ზედაპირი s_1 და s_2, რომელთა განტოლებები შესაბამისად იყოს

$$\varphi_1(x,\ y,\ z)=0,\quad \varphi_2(x,\ y,\ z)=0. \tag{10.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ s_1 და s_2 ზედაპირებს ყოველ წერტილში აქვთ მხები სიბრტყე. დავაყენოთ ამოცანა: ყველა უწყვეტად წარმოებად წირებს შორის, რომელთა საწყისი წერტილი s_1 წირზეა, ხოლო ბოლო წერტილი s_2 ზედაპირზე, მოვძებნოთ ის წირი γ, რომელიც ექსტრემუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს

$$J[y,\ z]=\int\limits_{\gamma} F(x,\ y,\ z,\ y',\ z')\,dx. \tag{10.2}$$

γ წირის სათავე და ბოლო წერტილები იყოს A და B, მისი განტოლება კი ავილოთ შემდეგი სახით:

$$y=f_1(x), \quad z=f_2(x)\cdot \tag{10.3}$$

ისეთივე მსჯელობით, რომელიც გამოყენებული გვქონდა ორგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში დავამტკიცებთ, რომ γ წირის არსებობისათვის აუცილებელია შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები: წირი γ უნდა იყოს ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \quad F_z=\frac{d}{dx}F_{z'}=0 \tag{10.4}$$

ინტეგრალი. საწყის წერტილში A უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_A\,\delta x_1+[F_{y'}]_A\,\delta y_1+[F_{z'}]_A\,\delta z_1=0, \tag{10.5}$$

ბოლო B წერტილში კი—პირობას

$$[F-y'F_{y'}-z'\,F_{z'}]_B\,\delta x_2+[F_{y'}]_B\,\delta y_2+[F_{z'}]_B\,\delta z_2=0, \tag{10.6}$$

სადაც სიმბოლოები $[\quad]_A$ და $[\quad]_B$ აღნიშნავენ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებების მნიშვნელობებს შესაბამისად A და B წერტილებში, δx_1, δy_1, δz_1 და δx_2, δy_2, δz_2 წარმოადგენენ A და B წერტილების ნებისმიერი გადაადგილების კომპონენტებს შესაბამის შემხებ სიბრტყეებში. წარმოვიდგინოთ, რომ ზედაპირი s, რომელსაც ყოველ წერტილში შემხები სიბრტყე აქვს, გადაკვეთს γ ექსტრემალს წერტილში $M(x, y, z)$. ვთქვათ, გარდა ამისა, δx, δy, δz აღნიშნავენ M წერტილის გადაადგილების კომპონენტებს s ზედაპირის შემხებ სიბრტყეში. ვიტყვით, რომ წირი γ და ზედაპირი s გადაიკვეთებიან ტრანსვერსალურად, თუ შესრულებულია პირობა

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{y'}]\,\delta x+F_{y'}\,\delta y+F_{z'}\,\delta z=0\cdot \tag{10.7}$$

როცა s ზედაპირის განტოლება ჩაწერილია $\varphi(x, y, z)=0$ სახით, მაშინ შესრულებული იქნება პირობა

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\delta z=0,$$

სადაც $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ არის s ზედაპირის ნორმალის მიმართულების კოეფიციენტები M წერტილში.

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, განტოლება (10.7) შეიძლება ასეც ჩაიწეროს

$$\frac{F-y'F_{y'}-z'F_{z'}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{F_{y'}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{F_{z'}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}. \tag{10.8}$$

უკანასკნელი განტოლება აკავშირებს გადაკვეთის M წერტილის x, y, z კოორდინატებსა და გადაკვეთის წერტილში გავლებული γ წირის მხების მიმართულების y', z' კოეფიციენტებს სიდიდეებთან $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ იმავე წერტილში· ტოლობას (10.7) უწოდებენ **ტრანსვერსალობის პირობას** სამგანზომილებიან სივრცეში.

შევნიშნოთ, რომ ეილერის დიფერენციალურ განტოლებათა (10.4) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი

$$\left.\begin{aligned} y&=f_1(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4),\\ z&=f_2(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4)\end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

შეიცავს ოთხ ნებისმიერ მუდმივს. ტრანსვერსალობის პირობები (10.8) გამოყენებული A და B წერტილებისათვის მოგვცემს ოთხ განტოლებას, რომლებსაც დაემატება კიდევ ორი განტოლება $\varphi_1(x_1,\ y_1,\ z_1)=0$ და $\varphi_2(x_2,\ y_2,\ z_2)=0$, მოგვცემს ექვსი განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას C_1, C_2, C_3, C_4, x_1, x_2 უცნობთა განსაზღვრისათვის. ამის შემდეგ განტოლებები (10.9) მოგვცემს ექსტრემალს, რომელმაც ფუნქციონალს (10.1) შესაძლოა მიანიჭოს ექსტრემალური მნიშვნელობა.

§ 11. კანონიკური ცვლადები. განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$J\,[y,\ z]=\int_{x_1}^{x_2} F\,(x,\ y,\ z,\ y',\ z')\,dx, \tag{11.1}$$

სადაც $F\,(x,\ y,\ z,\ y',\ z')$ განსაზღვრულია სამგანზომილებიანი სივრცის მოცემულ (D) არეში x, y, z ცვლადების და ყველა სასრული y', z' წარმოებულების მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ F ფუნქციას აქვს ნაწილობითი წარმოებულები მესამე რიგამდე თავისი არგუმენტების მიმართ. დასაშვები წირები განსაზღვრული არიან $y=y\,(x)$, $z=z\,(x)$ განტოლებებით, გადიან წერტილებზე $A\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)\in(D)$ და ეკუთვნიან $C^{(1)}[x_1,\ x_2]$ სივრცეს.

როცა ექსტრემალის ერთ-ერთი ბოლო წერტილი, მაგალითად $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ წერტილი, მოძრაობს მოცემულ s ზედაპირზე, მაშინ ამ ბოლო წერტილზე შესრულებული იქნება ტრანსვერსალობის პირობა (10.6). გარდა ამისა, ექსტრემალი უნდა იყოს ეილერის დიფერენციალური განტოლებების (10.4) სისტემის ინტეგრალი.

შემოვიღოთ ახალი ცვლადები

$$u=F_{y'},\quad v=F_{z'}, \tag{11.2}$$

სადაც ვიგულისხმოთ, რომ განტოლებები (11.2) ამოხსნადია y' და z' ცვლადების მიმართ. ამისათვის საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$\frac{D(F_{y'}, F_{z'})}{D(y', z')} \neq 0.$$

გარდა ამისა, შემოვიღოთ ფუნქცია

$$H = H(x, y, z, u, v) = y'u + z'v - F = y'F_{y'} + z'F_{z'} - F. \quad (11.3)$$

თუ გამოვთვლით H ფუნქციის ნაწილობით წარმოებულებს y, z, u, v ცვლადების მიმართ და თანაც გამოვიყენებთ (11.2) ტოლობებს, მივიღებთ

$$H_y = -F_y, \quad H_z = -F_z, \quad H_u = y', \quad H_v = z'. \quad (11.4)$$

ფუნქცია F ახალი H ფუნქციის საშუალებით ასე წარმოგვიდგება:

$$F = uF_u + vF_v - H. \quad (11.5)$$

მოყვანილი გარდაქმნების შემდეგ ნაცვლად დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისა (10.4), რომლის თითოეული განტოლება მეორე რიგისაა, გვექნება ეკვივალენტური ახალი სისტემა ოთხი განტოლებისა

$$\frac{dy}{dx} = H_u, \quad \frac{dz}{dx} = H_v, \quad \frac{du}{dx} = -H_y, \quad \frac{dv}{dx} = -H_z, \quad (11{\cdot}6)$$

რომლის თითოეული განტოლება პირველი რიგისაა. (11.2) ტოლობებით განსაზღვრულ u და v ცვლადებს კანონიკურ ცვლადებს უწოდებენ, ხოლო (11.6) სისტემას—ეილერის დიფერენციალური განტოლებების კანონიკურ სისტემას.

§ 12. **ექსტრემალთა ველის დახრის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა სამგანზომილებიან სივრცეში.** დიფერენციალურ განტოლებათა (11.6) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი შეიცავს ოთხ ნებისმიერ მუდმივს. როცა უზრუნველყოფილია ამ სისტემის ინტეგრალის არსებობისა და ერთადობის პირობები, მაშინ, მივცემთ რა y' და z' წარმოებულებს ნებისმიერ სასრულ მნიშვნელობებს, სამგანზომილებიანი სივრცის ყოველ წერტილზე (x, y, z) შეგვიძლია გავავლოთ ექსტრემალთა კონა, რომელიც წარმოადგენს ორ პარამეტრზე (სახელდობრ y' და z' პარამეტრებზე) დამოკიდებულ სივრცითი წირების ოჯახს. შემოვიღოთ (10.2) ფუნქციონალის ექსტრემალთა ველის განსაზღვრა. (10.2) ფუნქციონალის ექსტრემალთა ველი ვუწოდოთ ეილერის დიფერენციალური განტოლებების (11.6) კანონიკური სისტემის ორ პარამეტრზე დამოკიდებულ ინტეგრალურ წირებს, რომლებიც ავსებენ სამგანზომილებიანი სივრცის რაიმე ნაწილს და ამ ნაწილში ერთმანეთს არ გადაკვეთენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა ამ თვისების ექსტრემალური წირები არსებობენ, მაშინ ველის ყოველ წერტილში არსებობენ y' და z' წარმოებულების სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობანი და, მაშასადამე, ველის ყოველ წერტილში არსებობენ u და v ცვლადების გარკვეული მნიშვნელობანი. სხვანაირად, სივრცის იმ ნაწილში,

რომელიც შევსებულია აღნიშნული თვისების ინტეგრალური წირებით, ცვლადები u და v წარმოადგენენ სივრცის ამ ნაწილის ნებისმიერი (x, y, z) წერტილის ფუნქციებს: $u=U(x, y, z)$, $v=V(x, y, z)$. უკანასკნელ ფუნქციებს უწოდებენ ე ქ ს ტ რ ე მ ა ლ თ ა ვ ე ლ ი ს დ ა ხ რ ა ს წერტილში (x, y, z).

ვუჩვენოთ, რომ ექსტრემალთა ველის დახრა $U(x, y, z)$ და $V(x, y, z)$ აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებათა გარკვეულ სისტემას ნაწილობითი წარმოებულებით, რომელსაც ე ქ ს ტ რ ე მ ა ლ თ ა ვ ე ლ ი ს დ ა ხ რ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ უ რ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა თ ა ს ი ს ტ ე მ ა ს უწოდებენ. მართლაც, ვთქვათ ფუნქციები $y(x)$, $z(x)$, $U[x, y(x), z(x)]$, $V[x, y(x), z(x)]$ წარმოადგენენ (11.6) სისტემის ინტეგრალს. თუ (11.6) სისტემის უკანასკნელ ორ განტოლებაში შევიტანთ ფუნქციებს $U[x, y(x), z(x)]$ და $V[x, y(x), z(x)]$, გვექნება

$$U_x+U_y\frac{dy}{dx}+U_z\frac{dz}{dx}=-H_y, \quad V_x+V_y\frac{dy}{dx}+V_z\frac{dz}{dx}=-H_z \qquad (12.1)$$

საიდანაც, (11.6) სისტემის პირველი ორი განტოლების დახმარებით, მივიღებთ

$$U_x+U_yH_u+U_zH_v=-H_y, \quad V_x+V_yH_u+V_zH_v=-H_z. \qquad (12.2)$$

აკეთია ექსტრემალთა დახრის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ნაწილობითი წარმოებულებით, რომელსაც აკმაყოფილებენ ექსტრემალთა ველის დახრა $U(x, y, z)$ და $V(x, y, z)$.

პირიქით, თუ მოძებნილია (12.2) სისტემის ინტეგრალი, მაშინ შესაძლოა ავაგოთ ამ ინტეგრალის შესაბამისი ექსტრემალების ოჯახი, რომლისთვისაც (12.2) სისტემის ინტეგრალი იქნება ველის დახრა. მართლაც, ვთქვათ $u(x, y, z)$ და $v(x, y, z)$ წარმოადგენენ (12.2) სისტემის რაიმე ინტეგრალს. ჩავსვათ ეს ფუნქციები (11.6) სისტემის პირველი ორი განტოლების მარჯვენა ნაწილებში, მივიღებთ ორი განტოლებისაგან შედგენილ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას y და z უცნობი ფუნქციებით. ვთქვათ ფუნქციები $y=y(x, C_1, C_2)$ და $z=z(x, C_1, C_2)$ არიან ამ სისტემის ზოგადი ინტეგრალი. ჩავსვამთ რა უკანასკნელ ფუნქციებს $U(x, y, z)$ და $V(x, y, z)$ ფუნქციებში ისინი გადაიქცევიან x ცვლადზე და C_1, C_2 ნებისმიერ მუდმივებზე დამოკიდებულ ფუნქციებად. ამასთან, როგორც ადვილი სანახავია, დაკმაყოფილებული იქნება აგრეთვე (11.6) სისტემის უკანასკნელი ორი განტოლებაც. თუ $y=y(x, C_1, C_2)$, $z=z(x, C_1, C_2)$ განტოლებებით განსაზღვრული ექსტრემალები ავსებენ სივრცის რაიმე ნაწილს და ამ ნაწილში ერთმანეთს არ გადაკვეთენ, მაშინ მათი შესაბამისი $U(x, y, z)$ და $V(x, y, z)$ ფუნქციები წარმოადგენს ექსტრემალთა ველის დახრას. წინადადება დამტკიცებულია.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ თუ გამოვიყენებთ (11.3) ტოლობას, მაშინ (10.7) განტოლება შეგვიძლია შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$-H(x,\ y,\ z,\ U,\ V)\,\delta x+U\,\delta y+V\,\delta z=0. \tag{12.3}$$

ასეთია ტრანსვერსალობის პირობა სამგანზომილებიან სივრცეში ჩაწერილი ნორმალური ცვლადებით.

§ 13. ვეიერშტრასის ფუნქცია. ვარიაციათა აღრიცხვის ზევით შესწავლილ თავებში განხილული იყო ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx \tag{13.1}$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები. იმისათვის, რომ გადავიდეთ (13.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის საკმარისი პირობების განხილვაზე, წინასწარ გავეცნოთ ვეიერშტრასის ფუნქციას.

როგორც ვიცით, წირი $y=f(x)$ მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon>0$, რომ $C^{(1)}[x_1,\ x_2]$ სივრცის ნებისმიერი ფუნქციისათვის $\delta y(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0,\quad |\,\delta y(x)\,|<\varepsilon,\quad \delta y(x)\neq 0 \text{ როცა } x\in\,]x_1,\ x_2[, \tag{13.2}$$

მართებულია უტოლობა:

$$\Delta J[y]=\int_{x_1}^{x_2} F[x,\ f(x)+\delta y(x),\ f'(x)+\delta y'(x)]\,dx-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} F[x,\ f(x),\ f'(x)]\,dx>0. \tag{13.3}$$

ვიგულისხმოთ, რომ მოძებნილია წირთა ველი $y=\varphi(x,\ c)$, რომელიც $C=C_0$ მნიშვნელობისათვის გვაძლევს ფუნქციას $f(x)=\varphi(x,\ C_0)$, ხოლო როცა $C\in[C_1,\ C_2]$, მაშინ ფარავს სიბრტყის რაღაც ჩაკეტილ s არეს $x=x_1$ და $x=x_2$ წრფეებს შორის. ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა ველი საკუთრივია, მაშინ საკმარისად მცირე $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $y=f(x)+\varepsilon$, $y=f(x)-\varepsilon$ წირებსა და $x=x_1$, $x=x_2$ წრფეებს შორის მოთავსებული წერტილები წარმოადგენენ s არის შიგა წერტილებს. თანაც s არის ყოველ წერტილზე გადის ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი. იმ შემთხვევაში კი, როცა ველი ცენტრალურია, მაშინ $y=f(x)$ ექსტრემალის ყოველი წერტილი, გარდა მისი ბოლო A და B წერტილებისა, არის s არის შიგა წერტილი და s არის ყოველ წერტილზე, გარდა ველის ცენტრისა, გადის ერთი და მხოლოდ ერთი ექსტრემალი. ამასთან, წირთა $y=\varphi(x,\ c)$ ოჯახის ყოველი წირი გადის ველის ცენტრზე A.

მოვითხოვოთ, რომ როცა ველი საკუთრივია, მაშინ ველის დახრა

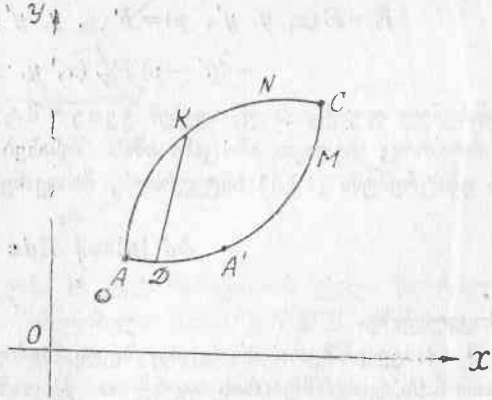
$p=p(x, y)$ განსაზღვრულია და უწყვეტი მთელ s არეზე. როცა ველი ცენტრალურია, მაშინ ველის დახრა განსაზღვრულია და უწყვეტი s არეზე გარდა A წერტილისა. უკანასკნელ შემთხვევაში $p(x, y)$ ფუნქციას არა აქვს განსაზღვრული მნიშვნელობა A წერტილში, მაგრამ არსებობს მისი ზღვარი როცა A წერტილს ვუახლოვდებით გარკვეული მიმართულებით და ეს ზღვარი უდრის აღებული მიმართულების კუთხურ კოეფიციენტს ამ წერტილში.

როგორც ვიცით (იხ. § 3), საკუთრივი ველის შემთხვევაში წირითი ინტეგრალი

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} [F(x, y, p)-pF_{y'}(x, y, p)]\, dx+F_{y'}(x, y, p)dy \qquad (13.4)$$

დამოკიდებული არ არის ველის წერტილების შემაერთებელი წირისაგან და როცა წირი, რომლის გასწვრივაც ინტეგრებას ვაწარმოებთ, ექსტრემალია, მაშინ იგი გადაიქცევა ძირითად ინტეგრალად (13.1).

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (13.4) ინტეგრალს იგივე თვისებები აქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა ველი ცენტრალურია. მართლაც, საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ (13.4) ინტეგრალის ზემოხსენებული თვისებები ძალაშია მაშინაც, როცა წირი, რომლის გასწვრივაც უნდა გამოვთვალოთ ინტეგრალი, გადის A წერტილზე. ვთქვათ AMC ინტეგრების რაიმე წირია. მივიჩნიოთ (13.4) ინტეგრალის მნიშვნელობად ზღვარი ინტეგრალისა იმავე დიფერენციალიდან $A'C$ წირის გასწვრივ როცა $A' \to A$. ასე განსაზღვრული ინტეგრალი (13.4), დამოუკიდებელია ველში მდებარე ინტეგრების წირისაგან. ამის დასამტკიცებლად ავიღოთ A და C წერტილების შემაერთებელი ორი წირი AMC და ANC (იხ. ნახ. 19). გავავლოთ წრფის მონაკვეთი DK, რომელიც არ არის პარალელური Oy ღერძისა. მაშინ ინტეგრალი (13.4), აღებული ველში მდებარე შეკრული $CDKC$ წირის გასწვრივ, ნულის ტოლია. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ წერტილები D და K მიისწრაფვიან A წერტილისაკენ შესაბამისად AD და AK რკალების გასწვრივ.



ნახ. 19.

მაშინ ინტეგრალი $CDKC$ წირის გასწვრივ მიისწრაფვის ინტეგრალისაკენ $AMCNA$ შეკრული წირის გასწვრივ, რომელიც აგრეთვე ნულის ტოლი იქნება. ნათქვამის გამო ინტეგრალი (13.4) დამოუკიდებელია საინტეგრო წირისაგან. იმ შემთხვევაში, როცა წირი AC ექსტრემალია, მაშინ ინტეგრალები (13.1) და (13.4) თანატოლია ამ ექსტრემალის ნებისმიერ $A'C$ უბანზე და, მაშასადამე, ისინი თანატოლნი იქნებიან როცა $A' \to A$, ე. ი. თანატოლნი იქნებიან თვით AC წირის გასწვრივაც.

ზემოთ შესწავლილი თვისებები (13.4) ინტეგრალისა საშუალებას გვაძლევს (13.3) უტოლობაში ძირითადი ინტეგრალი შევცვალოთ მისი ტოლი (13.4) ინტეგრალით, რომელიც აღებულია მახლობელ წირზე $y = f(x) + \delta y(x)$. თუკი, ამასთან, დიფერენციალს dy შევცვლით ტოლი მნიშვნელობით $y'dx$, მაშინ (13.3) უტოლობის მარცხენა ნაწილი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} [F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) F_{y'}(x, y, p)] dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', p)\, dx, \tag{13.5}$$

სადაც

$$E = E(x, y, y', p) = F(x, y, y') - F(x, y, p) -$$

$$-(y' - p) F_{y'}(x, y, p). \tag{13.6}$$

უკანასკნელ ფუნქციას უწოდებენ ვეიერშტრასის ფუნქციას.

როგორც ვხედავთ ამოცანა იმის შესახებ წირი $y = f(x)$ ანიჭებს თუ არა ექსტრემუმს (13.1) ინტეგრალს, მიიყვანება ინტეგრალის

$$\Delta J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} E dx \tag{13.7}$$

გამოკვლევაზე.

§ 14. ვეიერშტრასის აუცილებელი პირობა. როგორც (13.6) პირობიდან ჩანს, ვეიერშტრასის ფუნქცია E დამოკიდებულია წირის წერტილის კოორდინატებზე (x, y), წირის კუთხურ კოეფიციენტზე y' და ექსტრემალთა ველის დახრაზე $p = p(x, y)$ წერტილში (x, y). ისიც შევნიშნოთ, რომ რაკი ველში მდებარე ყოველ ექსტრემალზე $y' = p(x, y)$, ამიტომ ველის ყოველ ექსტრემალზე ფუნქცია E ნულის ტოლია. დავამტკიცოთ ვეიერშტრასის შემდეგი

თეორემა. იმისათვის, რომ ცენტრალური ველის კუთვნილი ექსტრემალი $y = f(x)$ მინიმუმს ანიჭებდეს ფუნქციონალს (13,1) აუცილებელია, y' წარმოებულის ყველა

სასრული მნიშვნელობისათვის და $x \in [x_1, x_2]$ ცვლადის ყველა მნიშვნელობისათვის, შესრულებული იყოს უტოლობა

$$E[x,\ f(x),\ y',\ p(x,\ f(x))] \geqslant 0. \tag{14.1}$$

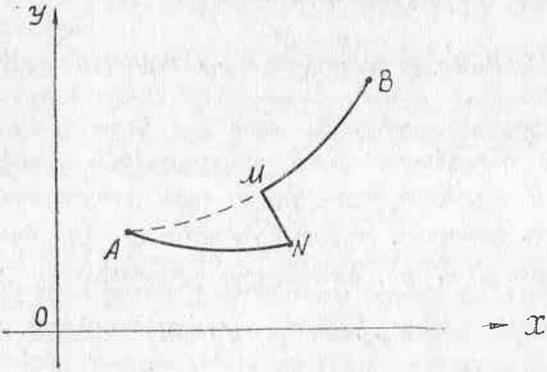
დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ ცენტრალური ველის AB ექსტრემალის $(\overline{x},\ \overline{y})$ წერტილში (იხ. ნახაზი 20), წარმოებულის რაღაც სასრული მნიშვნელობისათვის $y' = \overline{y'}$, ვეიერშტრასის ფუნქცია უარყოფითია

$$E[\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{y'},\ p(\overline{x},\ \overline{y})] < 0. \tag{14.2}$$

გავავლოთ $(\overline{x},\ \overline{y})$ წერტილზე წრფე კუთხური კოეფიციენტით $\overline{y'}$. მისი განტოლება იქნება

$$y - \overline{y} = \overline{y'}\,(x - \overline{x}). \tag{14.3}$$

შევარჩიოთ იმდენად მცირე h, რომ შესრულებული იყოს პირობები: ა) $M(\overline{x},\ \overline{y})$ და $N(\overline{x} - h,\ \overline{y} - h\overline{y'})$ წერტილების შემაერთებელი მონა-



ნახ. 20.

კვეთი MN ეკუთვნოდეს ველს. ბ) MN მონაკვეთის ყველა წერტილებში $E < 0$. ავიღოთ AB წირის მახლობელი წირი $ANMB$, რომელიც შედგება A და N წერტილებზე გამავალი ექსტრემალისაგან (ასეთი ექსტრემალი არსებობს, ვინაიდან N ველის წერტილია); წრფის NM მონაკვეთისაგან და ექსტრემალის MB ნაწილისაგან. შევადაროთ (13.1) ინტეგრალის მნიშვნელობანი AB ექსტრემალზე და $ANMB$ შესადარებელ წირზე. თანახმად ფორმულისა (13.7), დავწერთ

$$\Delta J[y] = \int\limits_{ANMB} E\,dx = \int\limits_{AN} E\,dx + \int\limits_{NM} E\,dx + \int\limits_{MB} E\,dx. \tag{14.4}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში პირველი და მესამე ინტეგრალები ნულის ტოლნი არიან, რადგან ისინი ასაღებია ექსტრემალთა რკალებზე.

რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს იგი უარყოფითია, ვინაიდან NM მონაკვეთზე $E<0$.

ამრიგად, (14.4) ტოლობიდან გვექნება

$$\Delta J[y]<0,$$

რაც შეუძლებელია, ვინაიდან $y=f(x)$, პირობის ძალით, მინიმუმს ანიჭებდა ინტეგრალს (13.1).

§ 15. კავშირი ვეიერშტრასისა და ლეჟანდრის პირობებს შორის. დავშალოთ (13.1) ტოლობაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $F(x, y, y')$ ტეილორის ფორმულით, ცვლადის მიხედვით მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$F(x, y, y')=F(x, y, p)+\frac{y'-p}{1!}F_{y'}+$$

$$+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}[x, y, p+\theta(y'-p)], \quad 0<\theta<1. \qquad (15.1)$$

აქედან, თანახმად (13.6) ტოლობისა, მივიღებთ

$$E(x, y, y', p)=\frac{(y-p)^2}{2!}F_{y'y'}[x, y, \theta(y'-p)]. \qquad (15.2)$$

უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ თუ წირი $y=f(x)$ მინიმუმს ანიჭებს (13.1) ინტეგრალს, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მეორე წარმოებული y' ცვლადით შეუძლებელია იყოს უარყოფითი შესასწავლი წირის გასწვრივ. მართლაც, ვთქვათ წერტილში $(\overline{x}, \overline{y})$, რომელშიც ველის დახრაა $\overline{p}=p(\overline{x}, \overline{y})$, მართებულია უტოლობა

$$F_{y'y'}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')<0.$$

მაშინ, რაკი $F_{y'y'}$ უწყვეტია, ამიტომ იგი უწყვეტი იქნება $\overline{y}'$ წარმოებულის მახლობელი მნიშვნელობებისთვისაც და ტოლობიდან (15.2) მივიღებთ

$$E(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}', \overline{p})=\frac{(\overline{y}'-p)^2}{2}F_{y'y'}[\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}'+\theta(\overline{y}^1-p)].$$

ეს კი ეწინააღმდეგება წინა პარაგრაფის პირობას (14.1).

მაშასადამე, იმისათვის რომ ექსტრემალი $y=f(x)$ მინიმუმს ანიჭებდეს (13.1) ფუნქციონალს, ა ცილებელია შესრულებული იყოს ლეჟანდრის პირობა

$$F_{y'y'}[x, f(x), f'(x)]\geqslant 0. \qquad (15.3)$$

როგორც ვხედავთ, ფუნქციონალის მინიმუმის აუცილებელი პირობა ლეჟანდრისა გამომდინარეობს ვეიერშტრასის პირობიდან.

§ 16. **ექსტრემუმის საკმარისი პირობები.** დავუბრუნდეთ პირობას (13.7), საიდანაც ადვილად მივიღებთ (13.1) ფუნქციონალის მინიმუმის საკმარის პირობას.

თეორემა. იმისათვის, რომ ექსტრემალი $y=f(x)$ მინიმუმს ანიჭებდეს (13.1) ინტეგრალს, საკმარისია არსებობდეს $y=f(x)$ წირის შემცველი ექსტრემალთა ისეთი საკუთრივი s ველი, რომლის ყოველ $(x, y) \in s$ წერტილში, $y' \neq p(x, y)$ პარამეტრის ყველა სასრული მნიშვნელობისათვის, შესრულებული იყოს პირობა

$$E(x, y, y', p(x, y))>0. \tag{16.1}$$

თეორემის ჭეშმარიტება იქიდან გამომდინარეობს, რომ s ველში მდებარე ყოველ წირზე, რომელიც $y=f(x)$ წირის ნული რიგის ε მახლობლობაშია, შესრულდება უტოლობა $\Delta J[y]>0$.

ამ თეორემაში, საზოგადოდ, ლაპარაკია შედარებით მინიმუმზე. იმ შემთხვევაში, როცა ველი s ემთხვევა (x, y) წერტილის ცვლილების მთელ (D) არეს, მაშინ $y=f(x)$ ექსტრემალზე ფუნქციონალი (13.1) მიაღწევს აბსოლუტურ მინიმუმს.

როგორც ტოლობიდან (15.2) ვრწმუნდებით ვეიერშტრასის საკმარისი პირობა (16.1) მუდამ იქნება შესრულებული როცა, ყოველ შემთხვევაში, წერტილებისათვის $(x, y) \in s$ და y'-ის ყველა სასრული მნიშვნელობისათვის მართებულია ლეჟანდრის პირობა

$$F_{y'y'}(x, y, y')>0, \tag{16.2}$$

მაშასადამე, (16.2) უტოლობა აგრეთვე მინიმუმის საკმარისი პირობაა, თანაც უფრო ძლიერი ვიდრე ვეიერშტრასის პირობა (16.1). თუ ამოცანა შეეხება (13.1) ფუნქციონალის არა მინიმუმს, არამედ მაქსიმუმს, მაშინ საკმარისი პირობები მიიღება (16.1) და (16.2) უტოლობების მიმართულების შეცვლით.

მინიმუმის საკმარისი პირობები (13.1) ფუნქციონალისათვის გამოვიყვანეთ იმ შემთხვევაში, როცა ნული რიგის ε მახლობელ წირებზე, ე. ი. წირებზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|y-f(x)|<\varepsilon$, შესრულებულია უტოლობა $\Delta J[y]>0$. სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ საკმარისი პირობები გამოყვანილია ძლიერი მინიმუმისათვის. იმ შემთხვევაში როცა უტოლობა $\Delta J[y]>0$ მართებულია ისეთი წირებისათვის, რომლებიც ერთმანეთთან იმყოფებიან პირველი რიგის ε მახლობლობაში, ე. ი. წირებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $|y-f(x)|<\varepsilon$, $|y'-f'(x)|<\varepsilon$. მაშინ (16.1) და (16.2) იქნება სუსტი მინიმუმის საკმარისი პირობები.

§ 17. **მაგალითები.** 1. მოვძებნოთ $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილებზე გამავალი წირი, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს

$$J\,[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx.$$

მოცემული ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალურ წირთა ოჯახია წრფეები $y=ax+b$. იმ წრფის პარამეტრები a და b, რომელმაც შესაძლოა მინიმუმი მიანიჭოს მოცემულ ფუნქციონალს, განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით. უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ ხსენებული წრფე მოცემულ ფუნქციონალს მიანიჭებს აბსოლუტურ მინიმუმს. მართლაც, ვთქვათ $y=ax+b+\alpha(x)$ წარმოადგენს A და B წერტილების შემაერთებელ რომელიმე სხვა წირს, სადაც $\alpha(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა და $\alpha(x_1)=\alpha(x_2)=0$. მაშინ მოცემული ფუნქციონალის სრული ვარიაცია იქნება

$$\Delta J\,[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}[\,(ax+b+\alpha(x))']^2\,dx-\int\limits_{x_1}^{x_2}[\,(ax+b)']^2\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\alpha'^2(x)\,dx>0$$

და გამოთქმული წინადადება დამტკიცებულია.

2. მოვძებნოთ შეკრული (s) კონტურით შემოსაზღვრულ D არეში ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $z=z(x,\ y)$, რომელიც (s) კონტურზე მოცემულია და მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს

$$J\,[z]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \tag{17.1}$$

მინიმუმის აუცილებელ პირობას ამ შემთხვევაში წარმოადგენს (იხ. თავი VIII, § 9, განტოლება (9.6) ლაპლასის ორგანზომილებიანი განტოლება

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{17.2}$$

და, მაშასადამე, ექსტრემალური ფუნქციები არიან ჰარმონიული ფუნქციები D არეში.

ვთქვათ $z=z(x,\ y)$ არის ჰარმონიული ფუნქცია D არეში, რომელიც (s) კონტურზე მოცემულია, ხოლო $\widetilde{z}=\widetilde{z}(x,\ y)$ არის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ნებისმიერი ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები (s) კონტურზე იგივეა როგორიც ფუნქციისა $z=z(x,\ y)$. მაშინ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\widetilde{z}=\vec{z}(x,\ y)=z(x,\ y)+\alpha(x,\ y),$$

სადაც $\alpha=\alpha(x,\ y)\neq 0$ არის D არეში ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია და $\alpha(x,\ y)\big|_{(s)}=0$. გამოვთვალოთ (17.1) ფუნქციონალის სრული ვარიაცია $z=z(x,\ y)$ და $\widetilde{z}=\widetilde{z}(x,\ y)$ ფუნქციებისათვის გვექნება

$$\Delta J[z]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-$$

$$-\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=2\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=$$

$$=2\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\alpha\right)\right]dxdy-$$

$$-2\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dx\,dy+\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\Big]dxdy. \qquad (17.3)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, (17.2) განტოლების ძალით, მეორე ინტეგრალი ნულის ტოლია, პირველი ინტეგრალი კი, გრინისა და რიმანის ცნობილი ფორმულის მიხედვით, შეიძლება ასე გარდავქმნათ:

$$\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\alpha\right)\right]dxdy=\int\limits_{(S)}\alpha\frac{\partial z}{\partial y}dy-\alpha\frac{\partial z}{\partial x}dx.$$

ვინაიდან წირზე (s) ფუნქცია $\alpha(x, y)=0$, ამიტომ უკანასკნელი ინტეგრალი აგრეთვე ნულის ტოლია. უკანასკნელი შენიშვნების შემდეგ, ტოლობიდან (17.3), მივიღებთ

$$\Delta J[z]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy>0.$$

ამრიგად, ფუნქცია $z=z(x, y)$ ანიჭებს აბსოლუტურ მინიმუმს ფუნქციონალს (17.1). როგორც ვხედავთ ზედაპირი $z=z(x, y)$, რომელიც (17.1) ფუნქციონალს აბსოლუტურ მინიმუმს ანიჭებს, წარმოადგენს (17.2) განტოლებისათვის დასმული დირიხლეს ამოცანის ამონახსნს.

3. განვიხილოთ სიბრტყეზე გეომეტრიული ოპტიკიდან ცნობილი ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} n(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (17.4)$$

მინიმუმის ამოცანა, სადაც $n(x, y)>0$ არის მოცემული ფუნქცია.

მოცემულ ამოცანაში $F(x, y, y')=n(x, y)\sqrt{1+y'^2}$ და, ამიტომ ცვლადების ყველა სასრული მნიშვნელობებისათვის გვექნება

$$F_{y'y'}=\frac{n(x,\ y)}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

ე. ი. შესრულებულია ლეჟანდრის პირობა. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ველი, რომელიც შეიცავს (17.4) ფუნქციონალის ექსტრემალებს. მაშინ არსებობს ექსტრემალი, რომელიც (17.4) ფუნქციონალს მიანიჭებს ძლიერ მინიმუმს, კერძოდ, როცა $n(x,\ y)=\frac{1}{y}$, მაშინ (17.4) ფუნქციონალის ექსტრემალებია წრეწირები, რომელთა ცენტრი აბსცისების ღერძზეა. როცა $n(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$, მაშინ საქმე გვაქვს ბრაქისტოქრონის ამოცანასთან, რომლის ექსტრემალებს წარმოადგენენ ციკლოიდების ოჯახი, რომელთა წვეროები მდებარეობენ $0x$ ღერძზე.

4. შევისწავლოთ ინტეგრალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} y'^2(1+y'^2)dx$$

მინიმუმის ამოცანა.

აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ წარმოებულზე y', ექსტრემალები არიან წრფეები $y=ax+b$. შევადგინოთ ვეიერშტრასის ფუნქცია

$$E(x,\ y,\ y',\ p)=y'^2(1+y'^2)^2-a^2(1+a^2)^2-$$
$$-(y'-a)[2a(1+a)^2+2a^2(1+a)]=(y'-a)^2[(y'+a+1)^2+2a(a+1)].$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $a>0$ ან $a<-1$, მაშინ y' წარმოებულის ყველა სასრული მნიშვნელობისათვის $E(x,\ y,\ y',\ p)>0$. მაშასადამე, წრფე $y=ax+b$ მოცემულ ინტეგრალს მიანიჭებს ძლიერ მინიმუმს.

§ 18. ცენტრალური ველის არსებობის პირობები. ზემოთ, მეთექვსმეტე პარაგრაფში, გამოყვანილი იყო (13.1) ფუნქციონალის ექსტრემუმის საკმარისი პირობები იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს ველი, რომელიც შეიცავს მოცემულ ექსტრემალს. ახლა შევისწავლოთ პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ცენტრალური ველის არსებობას.

ვთქვათ $y=f(x)$ არის ექსტრემალის განტოლება, რომელიც გადის $A(x_1,\ y_1)$ და $B(x_2,\ y_2)$ წერტილებზე. ვიგულისხმოთ, რომ ამ ექსტრემალისათვის შესრულებულია ლეჟანდრის პირობა: $F_{y'y'}(x,\ y,\ y')>0$. ავიღოთ $A(x_1,\ y_1)$ წერტილზე გამავალ ექსტრემალთა ოჯახი

$$y=y(x,\ \tau), \tag{18.1}$$

სადაც პარამეტრი τ აღნიშნავს ექსტრემალის კუთხურ კოეფიციენტს $A(x_1,\ y_1)$ წერტილში, $y(x_1,\ \tau)=y_1$, $y'(x_1,\ \tau)=\tau$. ჩავთვალოთ, რომ

უწყვეტ ფუნქციას $y(x, \tau)$ აქვს ყველა ნაწილობითი წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით თავისი არგუმენტების მიმართ. ვთქვათ $\tau=\tau_0$ არის τ პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $y=f(x)$ ექსტრემალს: $f(x)=y(x, \tau_0)$. იმისათვის, რომ წირთა ოჯახი (18.1) იყოს $y=f(x)$ ექსტრემალის შემცველი ველი, საკმარისია τ პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ახლო არიან τ_0 რიცხვთან, წარმოადგენდეს ერთმანეთის არაგადამკვეთი წირების ოჯახს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ტოლობა (18.1) უნდა იყოს τ პარამეტრის ცალსახა ფუნქცია. ამისათვის კი საკმარისია მოვითხოვოთ:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}=y'_\tau(x, \tau)>0, \quad \text{როცა } x\in\,]x_1, x_2[, \ |\tau-\tau_0|<\varepsilon \tag{18.2}$$

აქ მართებულია შემდეგი

თეორემა (იაკობი). იმისათვის, რომ წირთა ოჯახი $y=y(x,\tau)$ წარმოადგენდეს ცენტრალურ ველს, რომელიც შეიცავს $y=f(x)$ ექსტრემალს, საკმარისია შესრულებული იყოს უტოლობა

$$y'_\tau(x, \tau_0)=\left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_0}>0, \tag{18.3}$$

როცა $x\in\,]x_1, x_2[$.

დამტკიცებისათვის საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ საკმარისად მცირე რიცხვისათვის $\varepsilon>0$ უტოლობიდან (18.3) გამომდინარეობს (18.2). მართლაც, რაკი მეორე რიგის წარმოებული $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \tau}$ უწყვეტია და

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \tau}\right]_{x=x_0}=\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x_0}=\frac{\partial}{\partial \tau}\tau=1,$$

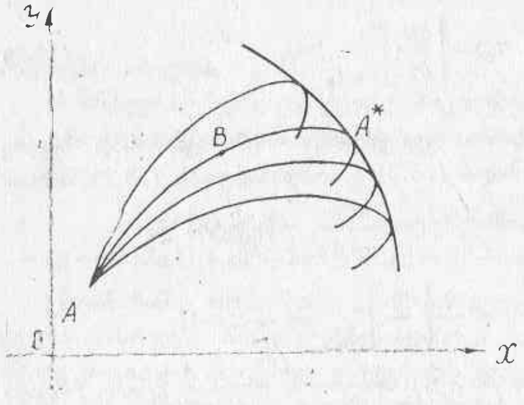
ამიტომ ნებისმიერი რიცხვისათვის $a>0$ არსებობს იმდენად მცირე რიცხვი $\delta>0$, რომ როცა $x\in[x_1, x_1+\delta]$, $\tau\in\,]\tau_0-a, \tau_0+a[$, მაშინ მართებული იყოს უტოლობა $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \tau}>0$. გარდა ამისა, ნაწილობითი წარმოებულის $\dfrac{\partial y}{\partial \tau}$ უწყვეტობისა და (18.3) პირობის ძალით, შეგვიძლია ავიღოთ ისეთი რიცხვი $\varepsilon<a$, რომ როცა $x\in[x_1+\delta, x_1]$ და $\tau\in[\tau_0-\varepsilon, \tau_0+\varepsilon]$, მაშინ შესრულებული იყოს უტოლობა

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}>0. \tag{18.4}$$

ახლა ცხადია, რომ როცა $x\geqslant x_1+\delta$, მაშინ (18.4) უტოლობის ძალით, აღებული რიცხვისათვის ε შესრულებულია (18.2). ისიც შევნიშნოთ,

რომ ვინაიდან $\left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_0}=0$ და $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \tau}>0$, ამიტომ როცა $x<x_1+\delta$, მაშინ წარმოებული, $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ ზრდადი ფუნქციაა და, მაშასადამე, ამ შემთხვევაშიც შესრულებულია (18.2). თეორემა დამტკიცებულია.

§ 19. იაკობის დიფერენციალური განტოლება. როგორც დავრწმუნდით (§ 18) იმისათვის, რომ არსებობდეს ცენტრალური ველი $y=y(x,\tau)$, რომელიც შეიცავს მოცემულ ექსტრემალს $y=f(x)$, საკმარისია $\left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_0}>0$ როცა $x\in]x_1, x_2[$. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ AB ექსტრემალის ყოველ წერტილში წარმოებული $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ დადებითია და პირველი წერტილი A^*, რომელშიც $\frac{\partial y}{\partial \tau}=0$, შესაძლოა შეგვხვდეს მხოლოდ B წერტილის შემდეგ. ამ წერტილს A წერტილის შეუღლებული წერტილი ეწოდება. შეუღლებული წერტილის მოსაძებნად საჭიროა ექსტრემალის განტოლებასთან ერთად ამოვხსნათ განტოლება $\frac{\partial y}{\partial \tau}=0$. სხვანაირად, A წერტილის შეუღლებული წერტილი A^* წარმოადგენს A წერტილიდან გამომავალ ექსტრემალთა კონის მომვლების გადაკვეთის წერტილს ექსტრემალთან $y=f(x)$ (იხ. ნახ. 21). შემოვიღოთ აღნიშვნა $\xi=\xi(x)=\left[\frac{\partial y}{\partial \tau}\right]_{\tau=\tau_0}$. ჩავსვათ ფუნქცია $y=y(x,\tau)$ ეილერის დიფერენციალურ განტოლებაში, გავაწარმოოთ მიღებული შედეგი τ პარამეტრით და წარმოქმნილ ტოლობაში τ პარამეტრის ნაცვლად შევიტანოთ მნიშვნელობა τ_0, გვექნება



ნახ. 21.

$$F_{yy}\xi+F_{yy'}\xi'-\frac{d}{dx}(F_{yy'}\xi+F_{y'y'})=0.$$

თუ აქ წარმოებულებში F_{yy}, $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$ ნაცვლად ფუნქციებისა y და y' შევიტანთ $f(x)$ და $f'(x)$, შედეგად მიღებულ ფუნქციებს, შესაბამისად აღვნიშნავთ P, Q, R-ით, მაშინ წინა ტოლობიდან გვექნება

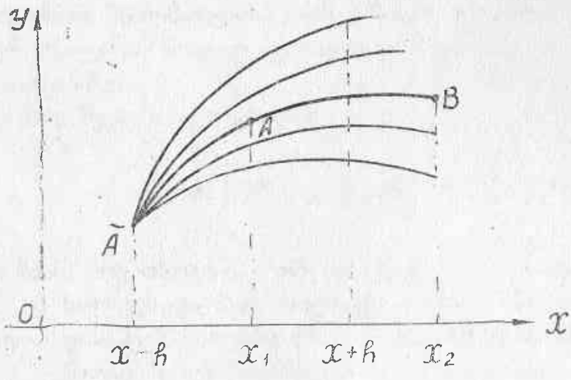
$$R\xi''+R'\xi'+(Q'-P)\xi=0. \qquad (19.1)$$

უკანასკნელი მეორე რიგის წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ **იაკობის დიფერენციალურ განტოლებას**. ფუნქცია ξ წარმოადგენს (19.1) განტოლების კერძო ინტეგრალს, რომელიც შეესაბამება საწყის პირობებს:

$$[\xi]_{x=x_1}=0, \quad \left[\frac{d\xi}{dx}\right]_{x=x_1}=1. \qquad (19.2)$$

ამრიგად, ცენტრალური ველის არსებობისათვის საკმარისია (19.1) დიფერენციალური განტოლების კერძო ინტეგრალი, რომელიც შეესაბამება საწყის პირობებს (19.2), იყოს დადებითი, როცა $x \in]x_1, x_2[$. ამ პირობას **იაკობის პირობა** ეწოდება.

§ 20. საკუთრივი ველის არსებობის საკმარისი პირობები. დავამტკიცოთ, რომ იაკობის პირობა ცენტრალური ველის არსებობისა, საკმარი-



ნახ. 22.

სია აგრეთვე საკუთრივი ველის არსებობისთვისაც. ამისათვის ექსტრემალის საწყისი წერტილი A გადავწიოთ ექსტრემალის გასწვრივ წერტილის მარცხნივ წერტილში $\tilde{A}(x_1-h, f(x_1-h))$. მაშინ წინა პარაგრაფში შემოყვანილი ფუნქცია ξ, რომელიც დამოკიდებული იყო x ცვლადზე და τ პარამეტრის τ_0 მნიშვნელობაზე, დამოკიდებული იქნება x ცვლადზე და x_1-h სიდიდეზე: $\xi=\xi(x, x_1-h)$. ახლა დავრწმუნდეთ შემდეგი წინადადების ჭეშმარიტებაში: შეიძლება შევარჩიოთ იმდენად მცირე h, რომ როცა $x \in]x_1-h, x_2[$, მაშინ $\xi(x, x_1-h)>0$. მართლაც, თანახმად პირობებისა (19.2), არსებობს ისეთი რიცხვი $\delta_0>0$, რომ როცა $x \in]x_1, x_1+$ $+\delta_0[$, მაშინ $\dfrac{\partial\xi(x, x_1)}{\partial x}>0$, ხოლო როცა $x \in]x_1+\delta_0, x_2[$, მაშინ

$\xi(x, x_1)>0$. გარდა ამისა, ფუნქციები $\xi(x, x_1)$ და $\dfrac{\partial \xi(x, x_1)}{\partial x}$ უწყვეტად არიან დამოკიდებული x და x_1 არგუმენტებზე და, ამიტომ საკმაოდ მცირე h-ისათვის, როცა $x \in]x_1-h, x_1+\delta_0[$, მაშინ წარმოებული

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\xi(x, x_1-h)>0,$$

ხოლო როცა $x \in]x_1+\delta_0, x_2[$, მაშინ $\xi(x, x_1-h)>0$. გამოთქმული წინადადება დამტკიცებულია.

როგორც ვხედავთ, ექსტრემალისათვის $\widetilde{AB}$ შესრულებულია იაკობის პირობა (იხ. ნახაზი 22). მაშასადამე, არსებობს $\widetilde{A}$ წერტილიდან გამომავალი ცენტრალური ველი, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს AB ექსტრემალს. იგივე ველი წარმოადგენს AB ექსტრემალის ჩვეულებრივ ველს. ეს იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობა ცენტრალური ველის არსებობის შესახებ, რომელიც წინა პარაგრაფში გამოვიყვანეთ, საკმარისი პირობაა საკუთრივი ველის არსებობისთვისაც.

თავი XII

ვარიაციათა აღრიცხვის პირდაპირი მეთოდები

§ **1. ზოგადი შენიშვნები.** წინა თავებში შესწავლილი მასალიდან დავრწმუნდით, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა შეისწავლება სათანადო დიფერენციალური განტოლების საშუალებით, რომლის ინტეგრება სასრული სახით, როგორც წესი, შეუძლებელია. ვარიაციათა აღრიცხვის პირდაპირი მეთოდები წარმოიქმნა ამ სიძნელის თავიდან აცილების სურვილით. ძირითადი მოსაზრება, რომელიც საფუძვლად უდევს პირდაპირ მეთოდებს, იმაში მდგომარეობს, რომ ვარიაციული შინაარსის ამოცანა ცდილობენ დაიყვანონ მრავალ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციის ექსტრემუმის ამოცანაზე.

ვთქვათ საკითხი შეეხება ინტეგრალის

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \tag{1.1}$$

მინიმუმის მოძებნას. მოვითხოვოთ, რომ დასაშვებ წირთა სიმრავლე ეკუთვნის $C^{(1)}[x_1, x_2]$ სივრცეს და მათი ბოლოები უძრავი ან მოძრავია. ვიგულისხმოთ, რომ დასაშვებ წირებზე (1.1) ფუნქციონალის მნიშვნელობათა სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია და m აღნიშნავს ამ სიმრავლის ზუსტ ქვედა საზღვარს. აქ ისმება ორი საკითხი: 1. დასაშვებ წირთა შორის არსებობს თუ არა ისეთი წირი $y=y(x)$, რომელზედაც $J[y]=m$, 2. როცა იგი არსებობს როგორ მოვძებნოთ.

დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ უწყვეტი ფუნქცია დახურულ არეში უსათუოდ მიაღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს. ვარიაციათა აღრიცხვაში კი მრავალია მაგალითი ფუნქციონალისა, რომელიც არც ერთ დასაშვებ წირზე ვერ მიაღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს. მაგალითად, $C^{(1)}[-1, +1]$ სივრცის წირებისათვის, რომლებიც $A(-1, -1)$ და $B(+1, +1)$ წერტილებს აერთებენ, ინტეგრალის

$$J[y]=\int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\, dx$$

მნიშვნელობათა ზუსტი ქვედა საზღვარია ნული, მაგრამ არ არსებობს მოცემული წერტილების შემაერთებელი არც ერთი უწყვეტი წირი, რომელზედაც აღებული ინტეგრალი ნულის მნიშვნელობას მიიღებს.

მიუხედავად ხსენებული სიძნელისა, თუ დასაშვებ წირთა სიმრავლიდან შესაძლებელია (1.1) ინტეგრალისათვის გამოვყოთ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა $\{y_n\}$, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} J[y_n]=J[\lim\limits_{n\to\infty} y_n]=m$, მაშინ ზევით დასმული ორივე საკითხი 1 და 2 გადაწყვეტილი იქნება. მიმდევრობას $\{y_n\}$ მინიმალური მიმდევრობა ეწოდება. მინიმალური მიმდევრობის ფაქტიური აგების საკითხი დამოკიდებულია გადასაწყვეტი ამოცანის ხასიათზე. ექსტრემუმის მოძებნას, მინიმალური მიმდევრობის გამოყენებით, მივყევართ იმ დასკვნამდე, რომ $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემუმის საკითხს საჭიროა შევხედოთ, როგორც უსასრულო რაოდენობის არგუმენტებზე დამოკიდებული ფუნქციის ექსტრემუმის ამოცანას.

§ 2. **რიცის მეთოდი.** შევისწავლოთ ინტეგრალის

$$J[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx \tag{2.1}$$

მინიმუმის ამოცანა რიცის მეთოდით. მისი შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ (2.1) ინტეგრალის მნიშვნელობანი განიხილება არა ყველა დასაშვები წირებისათვის, არამედ ყოველგვარი წრფივი კომბინაციებისათვის

$$y_n=\sum_{i=1}^{n} a_i\,w_i(x), \tag{2.2}$$

სადაც a_i მუდმივი კოეფიციენტებია, ხოლო $w_i=w_i(x)$, $(i=1,\ 2,\ldots,\ n,\ldots)$ არიან სასაზღვრო პირობების მიხედვით შერჩეული უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი რაღაც ფუნქციები, რომლებიც y_n ფუნქციებთან ერთად წარმოადგენენ დასაშვებ წირებს. საჭიროა ტოლობაში (2.2) კოეფიციენტები a_i ისე შევარჩიოთ, რომ ზღვარზე გადასვლის შედეგად, როცა $n\to\infty$, მივიღოთ ფუნქცია, რომელიც ფაქტიურად მიანიჭებს მინიმუმს ინტეგრალს (2.1) და დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

ჩავსვათ ტოლობაში (2.1) ნაცვლად y ფუნქციისა (2.2) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია y_n. მაშინ, $J[y_n]$ წარმოგვიდგება a_i კოეფიციენტების ჩვეულებრივი ფუნქციის სახით, რომლებიც ისე განვსაზღვროთ, რომ $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ პარამეტრებზე დამოკიდებული ფუნქცია $J[y_n]$ აღწევდეს მინიმუმს. ამისათვის, როგორც ვიცით, საჭიროა ამოვხსნათ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\frac{\partial J[y_n]}{\partial a_i}=0,\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{2,3}$$

თუ ამოვხსნით უკანასკნელ სისტემას a_i უცნობების მიმართ და მათ მნიშვნელობებს შევიტანთ ტოლობაში (2.2), მივიღებთ w_i ფუნქციების გარკვეულ წრფივ კომბინაციას ცნობილი კოეფიციენტებით a_i, რომელიც აღვნიშნოთ $\widetilde{y}_n$-ით. ახლა კი ავიღოთ რიცხვთა მიმდევრობა $\{J[\widetilde{y}_n]\}$. შევნიშნოთ, რომ $J[\widetilde{y}_{n+1}] \leqslant J[\widetilde{y}_n]$. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $J[\widetilde{y}_{n+1}]$ გამოთვლილია უფრო ფართო კლასზე ფუნქციებისა ვიდრე $J[\widetilde{y}_n]$ და, მაშასადამე, მინიმუმი ინტეგრალისა (2.1), როცა ფუნქციიდან $\widetilde{y}_n$ გადავდივართ ფუნქციაზე $\widetilde{y}_{n+1}$, არ იზრდება. გარდა ამისა, მიმდევრობა $\{J[\widetilde{y}_n]\}$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან m რიცხვით. არაზრდად და ქვემოდან შემოსაზღვრულ მიმდევრობას $\{J[\widetilde{y}_n]\}$ უსათუოდ ექნება ზღვარი და ეს ზღვარი m რიცხვზე ნაკლები არ იქნება. შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ თუ არსებობს ისეთი წრფივი კომბინაცია $\widetilde{y}_n$, რომლისთვისაც $|J[\widetilde{y}_n] - J[y]|$ ნებისმიერად მცირეა, მაშინ $\{\widetilde{y}_n\}$ უსათუოდ მინიმალური მიმდევრობა იქნება.

საჭიროა გვახსოვდეს შემდეგი გარემოება: როცა $\lim\limits_{n\to\infty} J[\widetilde{y}_n] = m$ ეს კიდევ არ ნიშნავს, რომ უსათუოდ იარსებებს $\{\widetilde{y}_n\}$ მიმდევრობის ზღვარიც. იმ შემთხვევაშიც კი როცა არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{y}_n$, ყოველთვის არ შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ეს ზღვარი უსათუოდ იქნება დასაშვები ფუნქცია. მოყვანილი შენიშვნები ყოველ კერძო ამოცანაში საჭიროა შევამოწმოთ.

ჩვეულებრივ, (2.2) ტოლობაში შემავალ ფუნქციებს w_i საკოორდინატო ფუნქციებს უწოდებენ. კერძოდ, როცა სასაზღვრო პირობებს აქვთ ერთგვაროვანი სახე: $y(x_1)=0$, $y(x_2)=0$, მაშინ საკოორდინატო ფუნქციების როლში შეგვიძლია ავიღოთ ფუნქციები $w_i(x)=(x-x_1)(x-x_2)\,\varphi_i(x)$, სადაც $\varphi_i(x)$ უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი რაღაც ფუნქციებია. თუ ვარიაციული ამოცანა დასმულია არაერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებში: $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$, სადაც y_1 და y_2 სიდიდეთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ვარიაციული ამოცანის ამოხსნა მიზანშეწონილია ვეძებოთ სახით

$$y_n(x)=w_0(x)+\sum_{i=1}^{n} a_i w_i(x),$$

სადაც $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $w_0(x)$ აკმაყოფილებს არაერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს: $w_0(x_1)=y_1$, $w_0(x_2)=y_2$, ხოლო იმავე სეგმენტზე უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები $w_i(x)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასა-

ზღვრო პირობებს: $w_i(x_1)=w_i(x_2)=0$. ასე შერჩეული $w_0(x)$ და $w_i(x)$ ფუნქციების საშუალებით განსაზღვრული $y_n(x)$ იქნება უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია სეგმენტზე $[x_1, x_2]$, რომელიც დააკმაყოფილებს არაერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს.

იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს $\{\widetilde{y_n}\}$ მიმდევრობის ზღვარი და ეს ზღვარი დასაშვები წირია, ამასთან $\lim\limits_{n\to\infty} J[\widetilde{y_n}]=m$, მაშინ $\{\widetilde{y_n}\}$ მიმდევრობის ზღვარი გვაძლევს ვარიაციული ამოცანის ზუსტ ამოხსნას. თუ მიმდევრობაში $\{\widetilde{y_n}\}$ არ გადავალთ ზღვარზე და დავკმაყოფილდებით მხოლოდ პირველი n წევრით $\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \dots, \widetilde{y_n}$, მივიღებთ ამოცანის მიახლოებით ამოხსნას.

რიცის მეთოდი, რომელიც ზემოთ შესწავლილი იყო ფუნქციონალისათვის (2.1), ადვილად გადაიტანება $J[z(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ სახის ფუნქციონალზეც და იმ შემთხვევაზეც, როცა ფუნქციონალი დამოკიდებულია რამდენიმე საძიებელ ფუნქციაზე.

§ 3. იზოპერიმეტრული ამოცანის ამოხსნა რიცის მეთოდით. იზოპერიმეტრული ამოცანა უმარტივესი სახით განხილული გვქონდა ზემოთ (იხ. თავი X, § 11). აქ განზრახული გვაქვს იგივე ამოცანა გადავწყვიტოთ რიცის მეთოდის გამოყენებით. ამრიგად, ყველა l სიგრძის შეკრულ ბრტყელ წირებს შორის მოვძებნოთ წირი, რომელიც შემოსაზღვრავს უდიდეს ფართობს.

ვიგულისხმოთ, რომ დასაშვები წირები არ შეიცავენ ისეთ წირებს, რომლებსაც აქვთ კუთხური წერტილები.

პარამეტრის როლში ავიღოთ წირის რკალის სიგრძე s, რომლის ათვლის წერტილი იყოს ამ წირის ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილი. ჩავწეროთ წირის განტოლება პარამეტრული სახით:

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad s\in[0, l], \tag{3.1}$$

სადაც $x(s)$, $y(s)$ არიან s პარამეტრის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები სეგმენტზე $[0, l]$. როგორც ვიცით, (3.1) სახით ჩაწერილი წირის რკალის დიფერენციალი გამოისახება ტოლობით:

$$dl=\sqrt{x'^2(s)+y'^2(s)}\,ds.$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2=1. \tag{3.2}$$

შემდგომი გამოთვლების გამარტივებისათვის შემოვიღოთ გარდაქმნა $s=\dfrac{l}{2\pi}t$, მაშინ $t\in[0, 2\pi]$ და ტოლობა (3.2) ასე ჩაიწერება:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{l^2}{4\pi^2},$$

საიდანაც t ცვლადით ინტეგრების შემდეგ, გვექნება

$$l^2=2\pi\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]dt. \tag{3.3}$$

რაც შეეხება შეკრული (3.1) წირით შემოსაზღვრულ s ფართობს, იგი გამოისახება ინტეგრალით:

$$s=\int_0^{2\pi}x\cdot\frac{dy}{dt}\,dt. \tag{3.4}$$

მოყვანილი შენიშვნების შემდეგ ამოსახსნელი ვარიაციული ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: მოვძებნოთ შეკრული ბრტყელი წირი $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[0,\ 2\pi]$, რომელიც მაქსიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს (3.4) და დააკმაყოფილებს იზოპერიმეტრულობის პირობას (3.3).

საკოორდინატო ფუნქციების როლში ავიღოთ მიმდევრობის

$$1,\ \sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t,\dots$$

ფუნქციები და შევადგინოთ შემდეგი სახის წრფივი კომბინაციები

$$x_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{\mu=1}^{n}(a_\mu\cos\mu x+b_\mu\sin\mu x),$$

$$y_n=\frac{c_0}{2}+\sum_{\mu=1}^{n}(c_\mu\cos\mu x+d_\mu\sin\mu x).$$

თუ (3.4) და (3.3) ტოლობებში x, y, $\frac{dx}{dt}$ და $\frac{dy}{dt}$ ფუნქციებს შევცვლით შესაბამისად x_n, y_n, $\frac{dx_n}{dt}$ და $\frac{dy_n}{dt}$ ფუნქციებით და ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ორთოგონალობის თვისებას სეგმენტზე $[0,\ 2\pi]$, მივიღებთ

$$s=\pi\sum_{\mu=1}^{n}\mu(a_\mu d_\mu-b_\mu c_\mu), \tag{3.5}$$

$$l^2=2\pi^2\sum_{\mu=1}^{n}(a_\mu^2+b_\mu^2+c_\mu^2+d_\mu^2). \tag{3.6}$$

ახლა საჭიროა ისე განვსაზღვროთ კოეფიციენტები a_μ, b_μ, c_μ d_μ, რომ მრავალი ცვლადის S ფუნქციამ მიაღწიოს მაქსიმალურ მნიშვნელობას და თანაც დააკმაყოფილონ პირობა (3.6). უკანასკნელი ამოცანა მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის შესახებ, როგორც ცნობილია, მიიყვანება $\Phi=S+\lambda l^2$ ფუნქციის თავისუფალი ექსტრემუმის ამოცანაზე. იმისათვის, რომ მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწიოს Φ ფუნქციამ, აუცილებელია შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial a_\mu}&=\pi\mu d_\mu+4\pi^2\mu^2\lambda a_\mu=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial d_\mu}&=\pi\mu a_\mu+4\pi^2\mu^2\lambda d_\mu=0. \end{aligned}\right\},\quad (\mu=1,2,\ldots,n). \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial b_\mu}&=-\pi\mu c_\mu+4\pi^2\mu^2\lambda b_\mu=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial c_\mu}&=-\pi\mu b_\mu+4\pi^2\mu^2\lambda c_\mu=0. \end{aligned}\right\}\quad (\mu=1,2,\ldots,n), \tag{3.8}$$

როგორც ვხედავთ, (3.7) და (3.8) წარმოადგენენ ალგებრული ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემას a_μ, b_μ, c_μ, d_μ უცნობების მიმართ და არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნატურალური μ პარამეტრის რაიმე მნიშვნელობისათვის $\mu=m$ დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \pi m & 4\pi^2 m\lambda \\ 4\pi^2 m^2\lambda & \pi m \end{vmatrix}=0.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან განისაზღვრება მამრავლი λ, გვექნება

$$\lambda=\pm\frac{1}{4\pi m}. \tag{3.9}$$

მაშასადამე, (3.7) და (3.8) სისტემების ყველა დეტერმინანტი, როცა $\mu=1, 2,\ldots, n$ განსხვავებული არიან ნულისაგან, გარდა $\mu=m$ მნიშვნელობისა. ამის გამო ყველა უცნობი $a_\mu=b_\mu=c_\mu=d_\mu=0$, გარდა უცნობებისა a_m, b_m, c_m, d_m. λ მამრავლისათვის (3.9) ტოლობაში ავიღოთ ნიშანი მინუსი. მაშინ, (3.7) და (3.8) სისტემებიდან გვექნება:

$$a_m=d_m,\quad b_m=-c_m,\quad l^2=4\pi^2m^2(a_m^2+b_m^2),$$

$$S=\pi m(a_m^2+b_m^2)=\frac{l^2}{4\pi m}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან პირდაპირ ჩანს, რომ ფართობი S მიაღწევს მაქსიმუმს მნიშვნელობისათვის $m=1$. როცა $m=1$, მაშინ $\lambda=-\frac{1}{4\pi}$, $\mu=1$, $a_1=d_1$, $b_1=-c_1$. ყველა დანარჩენი: $a_\mu=b_\mu=c_\mu=d_\mu=0$.

როცა $m=1$, მაშინ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+b_1\sin t,\\ y&=\frac{c_0}{2}-b_1\cos t+a_1\sin t.\end{aligned}\right\}.$$

ეს განტოლებები წარმოადგენს წრეწირის პარამეტრულ განტოლებას.

ტოლობაში (3.9) მამრავლისათვის λ რომ აგვეღო ნიშანი $+$, შედეგი არ შეიცვლებოდა.

§ 4. **პუასონის განტოლების ამოხსნა რიცის მეთოდით.** ხშირად რიცის მეთოდი გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის სასაზღვრო ამოცანების ზუსტი ან მიახლოებითი ამოხსნისათვის. მოვიყვანოთ მაგალითი პუასონის დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისა. ამოცანის შინაარსი ასეთია: მოვძებნოთ ისეთი ფუნქცია $z=z(x, y)$, რომელიც მოცემულ არეში D დააკმაყოფილებს პუასონის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x, y). \tag{4.1}$$

და D არის საზღვარზე მიიღებს მოცემულ მნიშვნელობებს. მოყვანილი ამოცანა შეიძლება შევცვალოთ ფუნქციონალის

$$J[z]=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x, y)\right]dx\,dy \tag{4.2}$$

ექსტრემუმის ამოცანით, რომლისთვისაც (4.1) წარმოადგენს ეილერის დიფერენციალურ განტოლებას. ვიგულისხმოთ, რომ D არე წარმოადგენს მართკუთხედს: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, რომლის საზღვარზე (4.1) განტოლების ინტეგრალი ნულის ტოლია: $z|_D=0$. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ (4.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოცემული ფუნქცია $f(x, y)$ მართკუთხედში D იშლება თანაბრად კრებად შემდეგი სახის მწკრივად:

$$f(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_{pq}\sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi qy}{b}. \tag{4.3}$$

საკოორდინატო ფუნქციების როლში ავილოთ

$$\sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}, \quad (m, n=1, 2,\ldots) \tag{4.4}$$

მიმდევრობის ელემენტები. ამ მიმდევრობის ყოველი ფუნქცია, ისე როგორც მათი ყოველი წრფივი კომბინაცია, ცხადია, მოცემული მართკუთხედის საზღვარზე ნულის ტოლია. ისიც შევნიშნოთ, რომ D არეში ფუნქციათა სისტემა (4.4) ორთოგონალური სისტემაა, ე. ი. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებისათვის p, q, p_1, q_1 მართებულია ტოლობები

$$\iint\limits_D \sin\frac{\pi p x}{a}\sin\frac{\pi q y}{b}\sin\frac{\pi p_1 x}{a}\sin\frac{\pi q_1 y}{b}\,dx\,dy=0. \tag{4.5}$$

გარდა მნიშვნელობებისა $p=p_1$, $q=q_1$. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, როგორც მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, გვაქვს

$$\iint\limits_D \sin^2\frac{\pi p x}{a}\sin^2\frac{\pi q y}{b}\,dx\,dy=\frac{ab}{4}. \tag{4.6}$$

ახლა შევადგინოთ (4.4) საკოორდინატო ფუნქციების წრფივი კომბინაცია

$$z_{nm}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\alpha_{pq}\sin\frac{\pi p x}{a}\sin\frac{\pi q y}{b} \tag{4.7}$$

და ჩავსვათ იგი ფუნქციის ნაცვლად (4.2) ფუნქციონალში. გამოვიყენებთ რა (4.3), (4.5) და (4.6) ტოლობებს, გვექნება

$$J[z_{nm}]=\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2z_{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\gamma_{pq}\sin\frac{\pi p x}{a}\sin\frac{\pi q y}{b}\right]dx\,dy=$$

$$-\frac{\pi ab}{4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\alpha_{pq}^2+\frac{ab}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\alpha_{pq}\gamma_{pq}=\varphi(\alpha_{pq}).$$

უკანასკნელი $\varphi(\alpha_{pq})$ ფუნქციის ექსტრემუმისათვის აუცილებელია შესრულებული იყოს პირობები

$$\frac{\partial\varphi(\alpha_{pq})}{\partial\alpha_{pq}}=0, \quad p=1, 2,\ldots, n;\ q=1, 2,\ldots, m;$$

ე. ი.

$$\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\alpha_{pq}+\gamma_{pq}=0,$$

საიდანაც

$$\alpha_{pq}=-\frac{\gamma_{pq}}{\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}.$$

ამის შემდეგ, წრფივი კომბინაცია (4.7) ასე წარმოგვიდგება

$$z_{nm}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\frac{\gamma_{pq}}{\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi qy}{b}.$$

ახლა, თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $n, m\to\infty$, მივიღებთ ფუნქციას

$$z=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} z_{nm}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\sin\frac{\pi px}{a}\sin\frac{\pi qy}{b},$$

რომელიც წარმოადგენს (4.1) დიფერენციალური განტოლების ისეთ ინტეგრალს, რომელიც მოცემული მართკუთხედის საზღვარზე ნულის ტოლა.

§ 5. **ფუნქციონალის მინიმალური წირის მიახლოებითი მოძებნა რიცის მეთოდით.** მოვიყვანოთ მაგალითი ფუნქციონალის მინიმალური წირის მიახლოებითი განსაზღვრისა რიცის მეთოდით.

მოვძებნოთ ფუნქცია, რომელიც მიახლოებით მინიმუმს მიანიჭებს ფუნქციონალს

$$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2xy-y^2+y'^2)\,dx \tag{5.1}$$

და დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

საკოორდინატო ფუნქციების როლში ავირჩიოთ ფუნქციები

$$W_k(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)x^k,\quad (k=1,\ 2,\ldots). \tag{5.2}$$

ამ მიმდევრობის ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელი უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს $W_k(0)=W_k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. ავიღოთ $k=1$ და განვიხილოთ მი-

ახლოებითი ფუნქცია $y_1(x)=a_1\left(\frac{\pi}{2}-x\right)x$. ჩავსვათ იგი მოცემულ ფუნქციონალში (5.1) და გამოვთვალოთ მიღებული ინტეგრალი, გვექნება

$$J[y_1(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2xy_1-y_1^2+y_1'^2)\,dx=$$

$$=\frac{\pi^4}{96}a_1+\pi^3\left(\frac{1}{24}-\frac{5\pi^2}{192}\right)a_1^2=\varphi(a_1).$$

კოეფიციენტი a_1 უნდა განისაზღვროს განტოლებიდან

$$\frac{\partial\varphi(a_1)}{\partial a_1}=\frac{\pi^4}{96}+\pi^3\left(\frac{1}{12}-\frac{5\pi^2}{96}\right)a_1=0,$$

საიდანაც

$$a_1=\frac{\pi}{5\pi^2-8}.$$

ფუნქციას, რომელიც მიახლოებით მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს (5.1) და დააკმაყოფილებს მოცემულ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, ექნება შემდეგი სახე

$$y_1=y_1(x)=\frac{\pi}{5\pi^2-8}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)x.$$

იმისათვის, რომ წარმოდგენა გვქონდეს ცდომილებაზე, რომელიც წარმოიქმნება როცა მინიმალურ წირს შევცვლით მოძებნილი მიახლოებითი წირით, უნდა ზუსტად ვიცოდეთ (5.1) ფუნქციონალის მინიმალური წირი. ეილერის განტოლება ფუნქციონალისა (5.1) არის მეორე რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება სახისა

$$y''+y=x,$$

რომლის ზოგადი ინტეგრალია ფუნქცია

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x.$$

ნებისმიერი მუდმივები ინტეგრებისა გამოითვლებიან მოცემული სასაზღვრო პირობებით: $C_1=0$, $C_2=-\frac{\pi}{2}$. ამრიგად, ზუსტი მინიმალური წირი იქნება $y=x-\frac{\pi}{2}\sin x$. გადახრა ფუნქციისა $y_1(x)$ ზუსტი მინიმალური წირისაგან y, ე. ი. მოდული $|y-y_1|$, მოგვცემს ცდომილებას $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე.

§ 6. **ეილერის სასრული სხვაობების მეთოდი.** განვიხილოთ ვარიაციათა აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა: მოვძებნოთ ფუნქცია $y=y(x)\in C^{(1)}[a, b]$, რომელიც მინიმუმს მიანიჭებს ინტეგრალს

$$J[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \tag{6.1}$$

და დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს $y(x_1)=a$, $y(x_2)=b$.

ეილერის მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ (6.1) ინტეგრალის მინიმუმის ამოცანა შეისწავლება არა ყველა დასაშვები წირისათვის, არამედ განიხილება ტეხილ წირებზე, რომელთაგან ყოველი შედგენილია n სწორხაზოვანი მონაკვეთისაგან. ტეხილის წვეროების აბსცისები იყოს: $x_1+\Delta x$, $x_1+2\Delta x,\ldots, x_1+(n-1)\Delta x$, სადაც $\Delta x=\frac{x_2-x_1}{n}$, ხოლო შესაბამისი ორდინატები აღვნიშნოთ $y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}$-ით. ფუნქციონალი (6.1) ტეხილი წირის გასწვრივ, ცხადია, წარმოადგენს ტეხილის წვეროების ორდინატების ფუნქციას: $J[y]=\varphi(y_1, y_2,\ldots, y_{n-1})$. იმისათვის, რომ უკანასკნელმა ფუნქციამ მინიმუმს მიაღწიოს, აუცილებელია ორდინატები $y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}$ განვსაზღვროთ განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0,\ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0. \tag{6.2}$$

ამის შემდეგ, უკანასკნელი სისტემიდან განსაზღვრულ მიმდევრობაში $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ საჭიროა გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$. თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია F აკმაყოფილებს სათანადო პირობებს, მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ და იგი უნდა იყოს მოცემული ვარიაციული ამოცანის ამოხსნა. თუ მიმდევრობაში $y_1, y_2,\ldots, y_n$ ზღვარზე არ გადავალთ, მაშინ $(x_1; a)$, $(x_1+\Delta x; y_1)$, $(x_1+2\Delta x; y_2),\ldots, (x_1+(n-1)\Delta x; y_{n-1})$, $(x_2; b)$ წერტილების შემაერთებელი ტეხილის წვეროების ორდინატები იქნებიან ექსტრემალის მიახლოებითი მნიშვნელობები ამ წერტილებში. ჩვეულებრივ, ინტეგრალის გამოთვლას აწარმოებენ სხვადასხვა მიახლოებითი ფორმულებით, ამასთან წერტილზე $(x_1+i\Delta x; y_i)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობად უნდა მივიღოთ $\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}$. აღწერილ მეთოდს უწოდებენ ეილერის სასრული სხვაობების მეთოდს. იგი მარტივად გადაიტანება ვარიაციათა აღრიცხვის სხვა სახის ამოცანებზეც.

§ 7. **მაგალითი.** მოვძებნოთ ფუნქციონალის

$$J[y]=\int_0^1 (y'^2+2y)\,dx, \quad y(0)=y(1)=0 \tag{7.1}$$

მინიმალური წირის მიახლოებითი მნიშვნელობანი სეგმენტზე [0, 1].

დავყოთ სეგმენტი [0, 1] თანაბრად $\Delta x=\dfrac{1-0}{5}=0{,}2$ ნაბიჯის მიხედვით და გამოვიყენოთ აღნიშვნები: $y_0=y(0)=0$; $y_1=y(0,2)$, $y_2=y(0,4)$; $y_3=y(0,6)$; $y_4=y(0,8)$; $y_5=y(1)=0$. დაყოფის წერტილებში წარმოებულების მიახლოებითი მნიშვნელობები გამოვთვალოთ ფორმულებით:

$$y'_k=y'(x_k)\approx\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}, \quad k=0, 1, 2, 3, 4;$$

მაშინ

$$y'(0)\approx\frac{y_1-0}{0{,}2}, \quad y'(0,2)\approx\frac{y_2-y_1}{0{,}2}, \quad y'(0,4)\approx\frac{y_3-y_2}{0{,}2},$$

$$y'(0,6)\approx\frac{y_4-y_3}{0{,}2}, \quad y'(0,8)\approx\frac{0-y_4}{0{,}2}.$$

ახლა გავიხსენოთ ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx[f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})]\,\Delta x.$$

ინტეგრალისათვის (7.1), გვექნება

$$J[y]=\int_0^1 (y'^2+2y)\,dx\approx\left[\left(\frac{y_1}{0{,}2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{0{,}2}\right)^2+\right.$$

$$+2y_1+\left(\frac{y_3-y_2}{0{,}2}\right)^2+2y_2+\left(\frac{y_4-y_3}{0{,}2}\right)^2+$$

$$\left.+2y_3+\left(-\frac{y_4}{0{,}2}\right)^2+2y_4\right]\cdot 0{,}2=\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

აქ ორდინატები y_1, y_2, y_3, y_4 ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ფუნქციამ $\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$ მინიმალურ მნიშვნელობას მიაღწიოს. ამისათვის აუცილებელია, რომ მისი წარმოებულები y_1, y_2, y_3, y_4 ორდინატებით იყოს ნულის ტოლი:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_3}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_4}=0$$

ანუ

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= -0,04, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &= -0,04, \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 &= -0,04, \\ -y_3 + 2y_4 &= -0,04. \end{aligned}\right\}$$

წრფივ განტოლებათა მიღებული არაერთგვაროვანი სისტემის ამოხსნა მოგვცემს: $y_1 = -0,08$; $y_2 = -0,12$; $y_3 = -0,12$; $y_4 = -0,08$. ასეთია ექსტრემალის მიახლოებითი მნიშვნელობები $[0, 1]$ სეგმენტის წერტილებზე: $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0,6$; $x_4 = 0,8$. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ მოვძებნით ამოცანის ზუსტ ამოხსნას $y = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, მაშინ მისი მნიშვნელობები იმავე წერტილებში დაემთხვევა გამოთვლილ მიახლოებით მნიშვნელობებს მეასედის სიზუსტით.

შინაარსი

Цитланадзе Элизбар Семенович

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том III

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета

Тбилиси 1981

გამომცემლობის რადაქტორი ა. კაჭარავა
ტექნიკური რედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ც. მოლოდინი

სბ 487

გადაეცა წარმოებას 14. 11. 80. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 8. 07. 81.
უე 05920. საბეჭდი ქაღალდი $60\times90^{1}/_{16}$. პირობითი ნაბეჭდი
თაბახი 21, 25. სააღრ.-საგამომც. თაბახი 18,3

ტირაჟი 2500. შეკვეთის № 1938

ფასი 1 მან.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.
Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.
Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.