ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტ. I

ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე

მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტომი I

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუდენტებისათვის

თსუ

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1976

მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოს პირველი ტომი (II გამოცემა) განკუთვნილია უნივერსიტეტის ფიზიკისა და მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

სახელმძღვანელოს I—V და XII—XIV თავები დაწერილია ვლ. ჭელიძის მიერ, ხოლო VI—XI თავები ეკუთვნის ე. წითლანაძეს.

$Ч \frac{20203}{M-603(08)-76} 1—76$

წინასიტყვაობა

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტები დღემდე მოკლებული არიან მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოს მშობლიურ ენაზე. ასეთი სახელმძღვანელოს საჭიროება დიდი ხანია მომწიფდა. ამ ხარვეზის შევსებას ვიწყებთ მათემატიკური ანალიზის კურსის წინამდებარე I ტომის გამოცემით.

ამ ტომის შედგენისას ვხელმძღვანელობდით უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის პირველი ორი სემესტრის პროგრამით მათემატიკურ ანალიზში.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის, პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებს.

როგორც ცნობილია, კლასიკური მათემატიკური ანალიზისათვის ერთ-ერთი ძირითადი განსაზღვრა არის ორ (ან რამდენიმე) ცვლადს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნება. იგი უშუალოდ დაკავშირებულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან, რომლის სისტემატური თეორია დამუშავებული იყო გერმანელი მათემატიკოსების — დედეკინდისა და კანტორის მიერ.

ჩვენი სახელმძღვანელოს პირველ თავში განხილულია ნამდვილ რიცხვთა თეორიის ის საკითხები, რომლებიც საფუძვლად უდევს ფუნქციის ცნებას.

მეორე თავში — ფუნქციონალური დამოკიდებულების განსაზღვრა, დახასიათებულია იმ ფუნქციების ძირითადი სახეობანი, რომლებიც გამოიყენება დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის თეორიულსა და პრაქტიკულ საკითხებში.

მესამე თავში განხილულია ნამდვილ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობები. განსაზღვრულია მიმდევრობის ზღვარი, დამტკიცებულია რიცხვთა მიმდევრობის ზღვართან დაკავშირებული ძირითადი წინადადებები. აქვე განსაზღვრულია ნეპერის რიცხვი და ნატურალური ლოგარითმი.

სახელმძღვანელოს მეოთხე თავი შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა მწკრივებს. განხილულია დადებით, ნიშანმონაცვლეობით და აბსოლუტურად და არააბსოლუტურად კრებად მწკრივებთან დაკავშირებული საკითხები. მოყვანილია მწკრივის კრებადობის ზოგიერთი კლასიკური ნიშანი და განხილულია ძირითადი ოპერაციები მწკრივებზე.

მეხუთე თავში განხილულია მათემატიკური ანალიზის ორი ძირითადი საკითხი: ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის უწყვეტობა. აგრეთვე ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები, უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეების მნიშვნელოვანი საკითხები.

მეექვსე თავში გადმოცემულია ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი და მათი მოძებნის წესები, განხილულია უმაღლესი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები.

მეშვიდე თავი განკუთვნილია ფუნქციის გამოკვლევისათვის წარმოებულის გამოყენებით. შესწავლილია ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის ამოცანა და ფუნქციის გრაფიკის აგების ზოგიერთი საკითხი წარმოებულის გამოყენებით.

მერვე თავი განკუთვნილია განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებისა, ძირითადი თვისებებისა და მისი გამოთვლის უმარტივესი მეთოდებისათვის.

მეცხრე თავში გადმოცემულია რაციონალური ფუნქციის ინტეგრების საკითხი. დამტკიცებულია, რომ რაციონალური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მეათე თავში განხილულია ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალები, რომლებიც ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენენ.

მეთერთმეტე თავი დათმობილი აქვს ზოგიერთი ტიპის ტრანსცენდენტური ფუნქციების ინტეგრებას.

სახელმძღვანელოს მეთორმეტე თავი ეძღვნება განსაზღვრული ინტეგრალის თეორიას. აქ დახასიათებულია ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი და დამტკიცებულია ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა. გამოყვანილია ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულები, განხილულია არასაკუთრივი ინტეგრალი და შესწავლილია მისი კრებადობის პირობები.

მეცამეტე თავი შეიცავს განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის საკითხებს და ინტეგრალის გამოთვლის მიახლოებით ფორმულებს.

უკანასკნელ მეთოთხმეტე თავში თავმოყრილია ინტეგრალის გამოყენების საკითხები გეომეტრიაში და ფიზიკაში.

თეორიული მასალის უკეთესად ათვისების მიზნით ყოველ თავს დართული აქვს სათანადო მაგალითები და ამოცანები. გარდა ამისა, სტუდენტთა პრაქტიკული ჩვევების გამოსამუშავებლად წიგნში შეტანილია მრავალი სავარჯიშო მასალა.

წიგნის ხელნაწერი წაიკითხა და სასარგებლო შენიშვნები გააკეთა დოცენტმა არჩილ სულაქველიძემ, რისთვისაც მას მადლობას ვუძღვნით. მადლობას მოვახსენებთ აგრეთვე კარლო წითლანაძეს და მერი შკუბულიანს, რომლებიც დაგვეხმარნენ წიგნის გამოსაცემად მომზადებაში.

ავტორები სიამოვნებით მიიღებენ მკითხველის ყველა საქმიან შენიშვნას, რომელიც გათვალისწინებული იქნება სახელმძღვანელოს შემდგომ გამოცემაში.

ვლ. ჭელიძე
ე. წითლანაძე

I ლათინური ანბანი

A	a—ა	N	n—ენ
B	b—ბე	O	o—ო
C	c—ცე	P	p—პე
D	d—დე	Q	q—ქუ
E	e—ე	R	r—ერ
F	f—ეფ	S	s—ეს
G	g—ჟე (გე)	T	t—ტე
H	h—აშ (ჰა)	U	u—უ
I	i—ი	V	v—ვე
J	j—ჟი (იოტი)	W	w—დუბლ-ვე
K	k—კა	X	x—იქს
L	l—ელ	Y	y—იგრეკ
M	m—ემ	Z	z—ზეტ

II ბერძნული ანბანი

Α	α—ალფა	Ν	ν—ენი (ნიუ)
Β	β—ბეტა	Ξ	ξ—ქსი
Γ	γ—გამა	Ο	ο—ომიკრონი
Δ	δ—დელტა	Π	π—პი
Ε	ε—ეპსილონი	Ρ	ρ—რო
Ζ	ζ—ძეტა	Σ	σ—სიგმა
Η	η—ეტა	Τ	τ—ტაუ
Θ	ϑ—თეტა	Υ	υ—იპსილონი
Ι	ι—იოტა	Φ	φ—ფი
Κ	κ—კაპა	Χ	χ—ხი
Λ	λ—ლამბდა	Ψ	ψ—ფსი
Μ	μ—მი (მიუ)	Ω	ω—ომეგა

თავი I

ნამდვილ რიცხვთა თეორია

მათემატიკური ანალიზის განვითარებასთან დაკავშირებით XVII—XVIII საუკუნეებში ნამდვილი რიცხვები გამოკვლევის ძირითადი ობიექტი გახდა. XIX საუკუნის მეორე ნახევარში რ. დედეკინდის, გ. კანტორისა და კ. ვაიერშტრასის მიერ აგებულ იქნა ნამდვილ რიცხვთა ფორმალური თეორიები, რომლებიც ერთმანეთის ტოლფასია. ამ თეორიების აგებისას ცნობილად იგულისხმება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. ამ თავში ჩვენ გადმოვცემთ დედეკინდის მიერ შექმნილ ნამდვილ რიცხვთა თეორიას.

ჯერ განვიხილოთ ზოგიერთი საკითხი სიმრავლეთა თეორიიდან.

§ 1. სიმრავლის ცნება

ყოველი მეცნიერება, რომელიც ზოგად თეორიას ავითარებს, შეიცავს რიგ საწყის ცნებას, რომლებსაც იგი ეყრდნობა. ყველა ძირითადი ცნების განსაზღვრა შეუძლებელია, ვინაიდან ცნების განსაზღვრა ხდება უკვე ცნობილი ცნებების საშუალებით, მაგრამ ეს პროცესი სადმე უნდა შეწყდეს, მივალთ რა საწყის ცნებებამდე, რომლებსაც ზუსტად ვერ განვსაზღვრავთ. საწყისი ცნებების აზრი მაგალითებით უნდა გავაშუქოთ.

მათემატიკის ერთ-ერთი საწყისი ცნებაა სიმრავლის ცნება. ამ ცნებას გავეცნოთ კონკრეტული მაგალითებით. შეიძლება ლაპარაკი იმ სტუდენტთა სიმრავლეზე, რომლებიც თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში სწავლობენ; იმ თევზების სიმრავლეზე, რომლებიც შავ ზღვაში დაცურავენ და სხვა. სიტყვა სიმრავლის ნაცვლად შეიძლება ვიხმაროთ სიტყვები: ერთობლიობა, კლასი, კოლექცია, სისტემა, ოჯახი და სხვა.

იმ ობიექტებს, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, სიმრავლის *ელემენტები* ეწოდება. ეს ელემენტები შეიძლება სხვადასხვაგვარი იყოს: რიცხვები, წერტილები, ფუნქციები, სამკუთხედები და სხვ.

როდესაც ცნობილი არაა, თუ რა კონკრეტული თვისებისაა სიმრავლის ცალკეული ელემენტი, მაშინ სიმრავლეს აბსტრაქტული სიმრავლე ეწოდება.

მათემატიკურ დისციპლინას, რომელიც შეისწავლის სიმრავლეთა თვისებებს იმ ობიექტების ბუნებისაგან დამოუკიდებლად, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, სიმრავლეთა თეორია ეწოდება. ამ თეორიის განვითარება დაიწყო XIX საუკუნის ბოლოს და XX საუკუნის დასაწყისში.

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელია გერმანელი მათემატიკოსი გ. კანტორი (**G. Cantor**, 1845 — 1918). ამ თეორიის შექმნის საქმეში კანტორის წინამორბედი იყო ჩეხი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი ბ. ბოლცანო (**B. Bolzano**, 1781 — 1848).

თანამედროვე მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორია ძირითადი მნიშვნელობისაა. ამ თეორიის იდეები და ცნებები შესულია მათემატიკის ყველა დარგში, ამიტომ შეუძლებელია სწორი წარმოდგენა ვიქონიოთ თანამედროვე მათემატიკაზე, თუ არ გავეცნობით სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს.

სიმრავლეები, ჩვეულებრივ, ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღინიშნება, სიმრავლის ელემენტები კი პატარა ასოებით. თუ A არის სიმრავლე, ხოლო a წარმოადგენს რომელიმე ობიექტს, მაშინ ჩაწერა

$$a \in A$$

ნიშნავს, რომ a არის A სიმრავლის ელემენტი და იკითხება „a შედის A სიმრავლეში" ან „a ეკუთვნის A სიმრავლეს". თუკი a არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ წერენ

$$a \overline{\in} A.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც x არის A სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის ზოგადი აღნიშვნა, წერენ

$$A = \{x\}$$

და x-ს ეწოდება მოცემული სიმრავლის ცვლადი ელემენტი.

თუ შესაძლებელია სიმრავლის ყველა ელემენტის ჩამოთვლა, მაშინ ფიგურულ ფრჩხილებში ერთიმეორის მიყოლებით ჩაიწერება სიმრავლის ყველა ელემენტი. მაგალითად, თუ E ოთხკუთხედის გვერდთა სიმრავლეა და ეს გვერდები აღნიშნულია a, b, c, d ასოებით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$E = \{a, b, c, d\}.$$

§ 2. ცარიელი სიმრავლე. სიმრავლის ნაწილი

სიმრავლეთა თეორიაში განიხილება აგრეთვე ეგრეთ წოდებული ცარიელი სიმრავლე, ე. ი. ისეთი სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს არცერთ ელემენტს. ცარიელი სიმრავლის შემოღება სასარგებლოა ფორმულირებათა ზოგადობისა და სიმარტივის მიზნით, როდესაც ვლაპარაკობთ სიმრავლეზე, ზოგჯერ ცნობილი არაა ეს სიმრავლე შეიცავს თუ არა რაიმე ელემენტს.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, A არის თბილისში მცხოვრებ იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებიც ერთდროულად არიან როგორც მათემატიკოსები და ექიმები, ასევე ინჟინრები და ალპინისტები. მაგრამ ასეთი ადამიანები შეიძლება თბილისში სრულებით არ აღმოჩნდეს. მაშინ A იქნება ცარიელი სიმრავლე.

ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. ცარიელ სიმრავლესთან ერთად გვხვდება ერთელემენტიანი სიმრავლეც. საჭიროა განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან a ელემენტი და ერთელემენტიანი $\{a\}$ სიმრავლე, რომ ავიცდინოთ წინააღმდეგობანი. მაგალითად, ვთქვათ, A სიმრავლე შედგება a, b, c ელემენტებისაგან. განვიხილოთ

$$E=\{A\}$$

სიმრავლე. ეს სიმრავლე ერთელემენტიანია: მისი ერთადერთი ელემენტია თვით A სიმრავლე. თუ ერთმანეთისაგან არ განვასხვავებთ E სიმრავლეს მის ერთადერთ A ელემენტისაგან, მაშინ წავაწყდებით წინააღმდეგობას, ვინაიდან, ერთი მხრით, E როგორც ერთელემენტიანი სიმრავლე შედგება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან, მეორე მხრივ კი A სიმრავლე შედგება სამი ელემენტისაგან.

განსაზღვრა 1. A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში წერენ

$$A\subset B \quad \text{ანუ} \quad B\supset A$$

და იკითხება: A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში, ანუ B სიმრავლე შეიცავს A სიმრავლეს.

$\subset$ და $\supset$ სიმბოლოებს ეწოდება ჩართვის სიმბოლოები.

თუ E რაიმე სიმრავლეა, მაშინ E და $\varnothing$ სიმრავლეებს ეწოდება E სიმრავლის არასაკუთრივი ნაწილები, E სიმრავლის დანარჩენ ნაწილებს კი E სიმრავლის საკუთრივი ნაწილები.

მაგალითად, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლე საკუთრივი ნაწილია ამავე უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლისა, ხოლო ყველა ფაკულტეტის სტუდენტთა სიმრავლე არასაკუთრივი ნაწილია ამ უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლისა.

განსაზღვრა 2. თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეში შედის და, პირიქით, B სიმრავლის ყოველი ელემენტი A სიმრავლეს ეკუთვნის, მაშინ A და B ტოლი სიმრავლეებია და წერენ

$$A=B.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ ჩართვის დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი თვისებები: ნებისმიერი სამი A, B და C სიმრავლისათვის მართებულია დამოკიდებულებანი:

1° $\varnothing\subset A$, ე. ი. ცარიელი სიმრავლე შედის ნებისმიერ სიმრავლეში.

2°. $A\subset A$, ჩართვის რეფლექსურობა.

3°. თუ $A\subset B$ და $B\subset A$, მაშინ $A=B$.

4°. თუ $A\subset B$ და $B\subset C$, მაშინ $A\subset C$, ჩართვის ტრანზიტულობა.

თუ სიმრავლის ელემენტებია სიმრავლეები, მაშინ ვიხმართ ტერმინს „სიმრავლეთა სისტემა“

§ 3. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები

განვიხილოთ რაიმე ორი A და B სიმრავლე. თუ A სიმრავლის ყოველ x ელემენტს რაიმე წესით შეესაბამება B სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი y ელემენტი ისე, რომ B სიმრავლის ყოველი y ელემენტი შესაბამებულია A სიმრავლის ერთ და მხოლოდ ერთ x ელემენტთან, მაშინ იტყვიან, რომ A და B სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. ამ შემთხვევაში A სიმრავლეს B სიმრავლის ეკვივალენტური ეწოდება და წერენ $A\sim B$.

მოვიყვანოთ ეკვივალენტურ სიმრავლეთა მაგალითები.

1 ავიღოთ შემდეგი ორი სიმრავლე:

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\},\quad B=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}.$$

თუ a ელემენტს შევუსაბამებთ α ელემენტს, b ელემენტს—β ელემენტს, c ელემენტს კი γ ელემენტს, ხოლო d-ს შევუსაბამებთ δ

ელემენტს, ამით A და B სიმრავლეს შორის დამყარებული იქნება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და, მაშასადამე, $A \sim B$.

2. განვიხილოთ ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლე

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

და ყველა დადებითი ლუწი რიცხვის სიმრავლე

$$M = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}.$$

ამ სიმრავლეთა შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეგვიძლია ასე დავამყაროთ: N სიმრავლის ყოველ n ელემენტს შევუსაბამოთ M სიმრავლის ელემენტი $2n$. მაშინ ამ შესაბამისობაში მონაწილეობას მიიღებს როგორც პირველი სიმრავლის, ისე მეორე სიმრავლის ყოველი ელემენტი. ცხადია, რომ $N \sim M$. ამრიგად, N სიმრავლე თავისი საკუთრივი M ნაწილის ეკვივალენტურია.

განსაზღვრა 3. სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი თავისი რაიმე საკუთრივი ნაწილის ეკვივალენტურია.

ამ განსაზღვრის მიხედვით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. უსასრულო სიმრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ეკუთვნის გერმანელ მათემატიკოსს რ. დედეკინდს (R. Dedekind, 1831 — 1916).

სასრული სიმრავლე უარყოფის გზით განისაზღვრება. სიმრავლე სასრულია, თუ იგი უსასრულო არაა, ე. ი. სიმრავლე სასრულია, თუ არ არსებობს მისი საკუთრივი ნაწილი, რომელიც მთელი სიმრავლის ეკვივალენტურია.

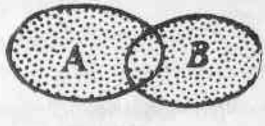
ზოგიერთი მეცნიერის აზრით უსასრულო სიმრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა მიუღებელია, ვინაიდან უსასრულო სიმრავლის ცნება განსაზღვრულია, როგორც პირველადი, ხოლო სასრული სიმრავლის ცნებას მიცემული აქვს მეორადი ხასიათი, იმ დროს, როდესაც ჯერ სასრული გვაქვს და შემდეგ უსასრულო. ასეთი მოსაზრება სწორი არაა, ვინაიდან უსასრულო გვაქვს სასრულთან ერთად, მისგან განუყრელად და არა სასრულის შემდეგ.

§ 4. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

სიმრავლეებზე შეიძლება ვაწარმოოთ სხვადასხვა მოქმედება. თუ გვაქვს ორი A და B სიმრავლე, შეგვიძლია ყველა ისეთი ობიექტის სიმრავლე შევადგინოთ, რომლებიც შედიან ან A ან B სიმრავლეში. ეს ის სიმრავლეა, რომელშიც გაერთიანდება A და B სიმრავლის ელემენტები. ასეთ სიმრავლეს ეწოდება A და B სიმ-

რავლის *ჯამი* ანუ *გაერთიანება* და აღინიშნება $A \cup B$. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი

განსაზღვრა 4. ორი A და B სიმრავლის *ჯამი* ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის (ნახ. 1).



ნახ. 1.

სიმრავლეთა ჯამის ცნება განვსაზღვრეთ ორი შესაკრებისათვის. ახლა ვთქვათ, გვაქვს რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, \dots, A_n$. ამ სიმრავლეთა ჯამი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან. აღებულ სიმრავლეთა ჯამი აღინიშნება ასე:

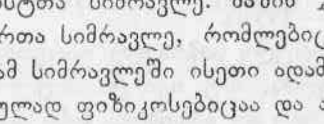
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{ან} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა ჯამის მაგალითები.

1. ვთქვათ, A არის თბილისში მცხოვრებ ფიზიკოსთა სიმრავლე, B კი ამავე ქალაქის ალპინისტთა სიმრავლე. მაშინ $A \cup B$ იქნება თბილისში მცხოვრებ იმ პირთა სიმრავლე, რომლებიც ფიზიკოსია ან ალპინისტი. კერძოდ, ამ სიმრავლეში ისეთი ადამიანებიც შედიან, რომლებიც ერთდროულად ფიზიკოსებიცაა და ალპინისტებიც.

2. ვთქვათ, A ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლეა, B — ყველა კენტი რიცხვისა, C კი ყველა მარტივი რიცხვის სიმრავლე. მაშინ $A \cup B \cup C$ იქნება ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე.

3. ვთქვათ, A ყველა იმ კენტი რიცხვის სიმრავლეა, რომლებიც სამზე არ იყოფა, B კი ყველა ლუწი რიცხვის, ხოლო C ყველა იმ მთელი რიცხვის სიმრავლეა, რომლებიც სამზე იყოფა. ცხადია, $A \cup B \cup C$ ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეა.



ნახ. 2.

განსაზღვრა 5. A და B სიმრავლის *გადაკვეთა* ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის როგორც A, ისე B სიმრავლეს (ნახ. 2).

A და B სიმრავლეთა გადაკვეთა აღინიშნება $A \cap B$ სიმბოლოთი.

თუ A ყველა მართკუთხედის სიმრავლეა, B კი ყველა რომბის სიმრავლე, მაშინ ამ ორი სიმრავლის გადაკვეთა $A \cap B$ იქნება ყველა კვადრატის სიმრავლე.

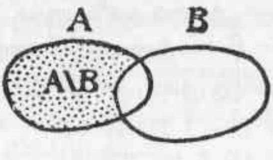
ახლა ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, \dots, A_n$. ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სიმრავლეთა გადაკვეთა ასე აღინიშნება:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad \text{ან} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

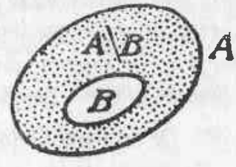
შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ აღებული სიმრავლეთა გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. მაგალითად, თუ A არის 10-წლიან მოსწავლეთა სიმრავლე, B კი 12-წლიან მოსწავლეთა სიმრავლე, მაშინ $A \cap B$ გადაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, ვინაიდან შეუძლებელია რომელიმე მოსწავლე ერთდროულად იყოს 10 და 12 წლისა.

განსაზღვრა 6. ორ A და B სიმრავლეს **ურთიერთარაგადამკვეთი** ეწოდება, თუ მათი გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

განსაზღვრა 7. A და B სიმრავლეთა **სხვაობა** ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან (ნახ. 3 და 4).



ნახ. 3.



ნახ. 4.

A და B სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$ სიმბოლოთი.

სიმრავლეთა გამოკლების ოპერაცია არ წარმოადგენს, საზოგადოდ, სიმრავლეთა შეკრების ოპერაციის მიმართ შებრუნებულ ოპერაციას, ე. ი. საზოგადოდ

$$(A \setminus B) \cup B \neq A.$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$A=\{1, 2, 3, 4\}, \quad B=\{1, 2, 5, 6, 7\}.$$

ცხადია, რომ

$$A \setminus B = \{3, 4\},$$

მაგრამ

$$(A \setminus B) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

§ 5. სიდიდის ცნება

სიდიდის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, რომელიც ყოველ ნაბიჯზე გვხვდება ბუნების მოვლენათა შესწავლისას. სიდიდის ცნება საწყის ცნებათა რიცხვს ეკუთვნის. სიდიდე შეიძლება გაიზომოს და გამოისახოს რიცხვით (ან რიცხვებით), ე. ი. სიდიდე ისეთი ობიექტია, რომლისადმი შეიძლება რაიმე სახით გამოყენებულ იქნას გაზომვის პროცესი.

ბუნებისმეტყველსა და ტექნიკოსს პრაქტიკულ საქმიანობაში ხვდება სხვადასხვა სიდიდე, როგორიცაა, მაგალითად, სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, წონა, ტემპერატურა, სიჩქარე, ძალა და სხვა.

მათემატიკა არ განიხილავს კონკრეტულ სიდიდეებს. მათემატიკურ ანალიზში მოცემულია ზოგადი თეორია, რომელიც გამოიყენება სხვადასხვა ბუნების სიდიდეზე. ამის მისაღწევად ახდენენ სიდიდეთა კონკრეტული ბუნებისაგან აბსტრაჰირებას, ე. ი. მხედველობაში ღებულობენ მხოლოდ მათ რიცხვით მნიშვნელობებს. მათემატიკაში საზოგადოდ განიხილავენ აბსტრაქტულ სიდიდეს და ჩვეულებრივ მას აღნიშნავენ რაიმე სიმბოლოთი. რადგან მხედველობაში არაა მიღებული სიდიდის კონკრეტული ფიზიკური შინაარსი, მათემატიკური თეორიები ერთნაირი წარმატებით გამოიყენება ყოველ კონკრეტულ სიდიდეზე. სწორედ ესაა მათემატიკის ზოგადობა და უნივერსალობა.

§ 6. რაციონალური რიცხვები

მთელ და წილად რიცხვებს, როგორც დადებითს ისე უარყოფითს, ნულის ჩათვლით, რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ეწოდება. ყოველ რაციონალურ რიცხვს აქვს სახე $\frac{m}{n}$, სადაც m და n მთელი რიცხვებია, ამასთანავე n ნულისაგან განსხვავებულია.

აღვნიშნოთ რაციონალურ რიცხვთა ძირითადი თვისებები. თუ a, b და c ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს არითმეტიკის შემდეგ აქსიომებს:

1. $a+b$ ცალსახად განსაზღვრული რიცხვია.
2. $a+b=b+a$, შეკრების კომუტატიურობის კანონი.
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$, შეკრების ასოციურობის კანონი
4. ab ცალსახად განსაზღვრული რიცხვია.
5. $ab=ba$, გამრავლების კომუტატიურობის კანონი.
6. $(ab)c=a(bc)$, გამრავლების ასოციურობის კანონი.
7. $a(b+c)=ab+ac$, დისტრიბუტიულობის კანონი.
8. განტოლებას $a+x=b$ აქვს ერთადერთი ამონახსნი.
9. თუ $a\neq 0$, მაშინ განტოლებას $ax+b=0$ აქვს ერთადერთი ამონახსნი.
10. სამი დამოკიდებულებიდან $a=b$, $a>b$, $a<b$ ადგილი აქვს ყოველთვის ერთსა და მხოლოდ ერთს.
11. თუ $a<b$ და $b<c$, მაშინ $a<c$.
12. თუ $a<b$, მაშინ $a+c<b+c$ — მონოტონურობის კანონი შეკრებისათვის.
13. თუ c დადებითია, მაშინ $a<b$ უტოლობიდან გამომდინარეობს $ac<bc$ უტოლობა, ხოლო თუ c უარყოფითია, მაშინ $ac>bc$ — მონოტონურობის კანონი გამრავლებისათვის.

თუ a, b და c რიცხვები ისეთია, რომ $a<c<b$, მაშინ ამბობენ, რომ c რიცხვი მოთავსებულია a და b რიცხვებს შორის.

თეორემა 1. *ყოველ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის მოთავსებულია უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b რაციონალური რიცხვებია და $a<b$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ რიცხვების საშუალო არითმეტიკული $a_1=\frac{a+b}{2}$ მოთავსებულია a და b რიცხვებს შორის: $a<a_1<b$. ამავე წესით მოვძებნით ახალ რაციონალურ a_2 რიცხვს, რომელიც მოთავსებულია a და a_1 რაციონალურ რიცხვებს შორის. ასევე, a და a_2 რიცხვებს შორის ვიპოვით რაციონალურ a_3 რიცხვს და ა. შ. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებულ თვისებას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის *სიმკვრივის თვისება* ეწოდება.

თეორემა 2. *არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი ორის ტოლია.*

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი $\frac{m}{n}$, რომ

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2,$$

ამასთანავე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ m და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია. აქედან

$$m^2=2n^2 \tag{6.1}$$

და, მაშასადამე, m წარმოადგენს ლუწ რიცხვს. ვთქვათ, $m=2k$, სადაც k მთელი რიცხვია. მაშინ (6.1) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$4k^2=2n^2,$$

საიდანაც $n^2=2k^2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ n ლუწი რიცხვია. გამოდის, რომ m და n ლუწი რიცხვებია, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი ორის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ რაციონალური რიცხვები საკმარისი არაა ყველა სიდიდის გასაზომად. მაგალითად, მე-2 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ კვადრატის დიაგონალი და მისი გვერდი უთანაზომო მონაკვეთებია, ე. ი. მათ საერთო ზომა არა აქვთ. ასე რომ კვადრატის დიაგონალი და მისი გვერდი ერთი და იგივე ერთეულით ვერ გამოისახება მთელი რიცხვებით. ამიტომ, ასეთი და მსგავსი საკითხებისათვის შემოღებულ იქნა ირაციონალური რიცხვები. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ მოგვყავს ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრა, რომელიც დედეკინდს ეკუთვნის.

§ 7. ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრა

აღვნიშნოთ R-ით ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე და დავყოთ იგი ორ A და B ქვესიმრავლედ ისე, რომ დაცული იყოს შემდეგი სამი პირობა:

1. არც ერთი A და B სიმრავლეებიდან ცარიელი არაა.

2. A სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B სიმრავლის ყოველ რიცხვზე.

3. A სიმრავლეში არაა უდიდესი რიცხვი.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის განკვეთა და მას აღნიშნავენ $A \mid B$ სიმბოლოთი. A სიმრავლეს ეწოდება ქვედა კლასი, B სიმრავლეს კი ზედა კლასი.

განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის განკვეთის მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი **1.** ავიღოთ რაიმე რაციონალური r რიცხვი. A კლასში მოვათავსოთ ყველა ის რაციონალური რიცხვი, რომლებიც r-ზე ნაკლებია, ხოლო ყველა დანარჩენი რაციონალური რიცხვი B კლასს მივაკუთვნოთ. ცხადია, B კლასში მოთავსდება რიცხვი r და მასზე მეტი ყველა რაციონალური რიცხვი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ A და B კლასად განკვეთას წარმოადგენს. ამ მაგალითში r რიცხვი B კლასის უმცირესი რიცხვია და იგი დაახასიათებს განკვეთას.

ახლა ისმის კითხვა: რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ყოველი განკვეთა იქნება თუ არა დახასიათებული ერთი რაციონალური რიცხვით? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მ ა გ ა ლ ი თ ი **2.** რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლე დავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: A კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, რიცხვი ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატი ორზე ნაკლებია, B კლასში კი დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. დავამტკიცოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ასეთ ორ A და B კლასად დაყოფა გვაძლევს განკვეთას.

ცხადია, განკვეთის პირველი და მეორე პირობები შესრულებულია. ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია მესამე პირობაც. ავიღოთ A კლასის ნებისმიერი რიცხვი $a>1$. ცხადია, რომ

$$(a+1)^2>2,$$

აქედან

$$\frac{2-a^2}{2a+1}<1.$$

ახლა შევარჩიოთ დადებითი რაციონალური რიცხვი h შემდეგი პირობით

$$h<\frac{2-a^2}{2a+1}.$$

რადგანაც $h<1$, ამიტომ

$$h<\frac{2-a^2}{2a+h}.$$

აქედან, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$(a+h)^2<2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a+h\in A$. მაშასადამე, A კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. ამრიგად, გვაქვს $A|B$ განკვეთა.

თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-2 თეორემას, B კლასში მოთავსებულია მხოლოდ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატი ორზე მეტია. დავამტკიცოთ, რომ B კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი. ავიღოთ B კლასის ნებისმიერი რიცხვი $b<2$ და განვიხილოთ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვი h, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$h<\frac{b^2-2}{2b}.$$

ცხადია, რომ $h<1$ და ამიტომ

$$h<\frac{b^2-2}{2b-h}.$$

აქედან, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$2<(b-h)^2.$$

მაშასადამე, $b-h\in B$, ე. ი. B კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი.

ამრიგად, გვაქვს ისეთი განკვეთაც, როცა ზედა კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი. ასეთი განკვეთის შემთხვევაში არ გვექნება რაციონალური რიცხვი, რომელიც მდებარეობს ქვედა და ზედა კლასების საზღვარზე, ასე რომ ამგვარი განკვეთა ერთი რაციონალური რიცხვით ვერ დახასიათდება.

განსაზღვრა 7. $A|B$ განკვეთას ვუწოდოთ პირველი გვარისა, თუ B კლასში არსებობს უმცირესი რიცხვი, ხოლო განკვეთა მეორე გვარისაა, თუ B კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი.

ყოველ პირველი გვარის $A|B$ განკვეთას შევუსაბამოთ B კლასის უმცირესი r რიცხვი, რომელსაც ვუწოდოთ გამკვეთი რიცხვი. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ რაციონალური r რიცხვი განსაზღვრულია $A|B$ განკვეთით. ცხადია, რომ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ნებისმიერი განკვეთა საზოგადოდ არ განსაზღვრავს რაციონალურ რიცხვს. განკვეთა რაციონალურ რიცხვს მაშინ განსაზღვრავს, თუ იგი პირველი გვარისაა. მეორე გვარის განკვეთის შემთხვევაში არ არსებობს გამკვეთი რიცხვი. ამიტომ ყოველ მეორე გვარის განკვეთას შევუსაბამოთ გარკვეული ობიექტი, რომელსაც ირაციონალური რიცხვი ვუწოდოთ და რომელიც განსაზღვრის მიხედვით მეტია A კლასის ყოველ რიცხვზე და ნაკლებია B კლასის ყოველ რიცხვზე.

ამრიგად, მეორე გვარის განკვეთა განსაზღვრავს ირაციონალურ რიცხვს, რომელიც წარმოადგენს A და B კლასების საზღვრით რიცხვს.

ცხადია, ირაციონალური რიცხვის შემოღების შემდეგ, რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ნებისმიერ განკვეთას შეესაბამება ერთი რიცხვი, რაციონალური ან ირაციონალური.

ყველა რაციონალური და ირაციონალური რიცხვის სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და მას, ჩვეულებრივ, Z სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს საძირკველს, რომელზედაც აგებულია მათემატიკა.

ახლა მოვიყვანოთ ირაციონალური რიცხვის მაგალითი. რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლე დავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: A კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, რიცხვი ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატები ორზე ნაკლებია, ხოლო ყველა დანარჩენი რაციონალური რიცხვი მივაკუთვნოთ B კლასს. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ამ შემთხვევაში გვაქვს მეორე გვარის $A|B$ განკვეთა და ეს განკვეთა განსაზღვრავს ირაციონალურ რიცხვს. ეს ირაციონალური რიცხვი აღინიშნება $\sqrt{2}$ სიმბოლოთი.

§ 8. ნამდვილ რიცხვთა ტოლობა და უტოლობა

იმის შემდეგ, რაც შემოღებულია ნამდვილი რიცხვის ცნება, დავადგინოთ თუ როგორ ნამდვილ რიცხვებს ეწოდება ტოლი და რას ნიშნავს, რომ ერთი ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია ან მეტია მეორე ნამდვილ რიცხვზე.

განსაზღვრა 8. ვთქვათ α და α' ნამდვილი რიცხვები განსაზღვრულია $A|B$ და $A|B'$ განკვეთებით შესაბამისად. ტოლობა $\alpha=\alpha'$ იმას ნიშნავს, რომ α იგივე ნამდვილი რიცხვია, რაც α', ე. ი. $A=A'$.

განსაზღვრა 9. α ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია α' ნამდვილ რიცხვზე, თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის α რიცხვის ზედა კლასს და α' რიცხვის ქვედა კლასს, ე. ი. A სიმრავლე A' სიმრავლის საკუთრივი ნაწილია. ამ შემთხვევაში წერენ $\alpha<\alpha'$. თუ $\alpha<\alpha'$, მაშინ ამბობენ, რომ α ნამდვილი რიცხვი მეტია α ნამდვილ რიცხვზე და წერენ $\alpha'>\alpha$.

თუ α და α' არატოლი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს ერთ-ერთს შემდეგი უტოლობებიდან: $\alpha<\alpha'$ ან $\alpha'<\alpha$.

თეორემა 3. *ორ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს შორის მოთავსებულია უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ორი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი α და α', რომლებიც განსაზღვრულია $A|B$ და $A'|B'$ განკვეთებით შესაბამისად. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha<\alpha'$. იმ შემთხვევაში, როცა α და α' რაციონალური რიცხვებია, თეორემა ზემოთ იყო დამტკიცებული. ამიტომ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც α და α' რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია. ვთქვათ, მაგალითად, რომ α ირაციონალურია. რადგანაც $\alpha<\alpha'$, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის B და A' კლასებს, ასე რომ

$$\alpha<r<\alpha'.$$

მეორე მხრით, რაკი α ირაციონალური რიცხვია, ამიტომ B კლასში არსებობს ისეთი რიცხვი r', რომელიც ნაკლებია r-ზე. მაშასადამე,

$$\alpha<r'<r<\alpha'.$$

მაგრამ r' და r რაციონალურ რიცხვებს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა. ამიტომ α და α რიცხვებს შორის მოთავსებულია უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. *თუ α, α', α'' ნამდვილი რიცხვებია და $\alpha<\alpha'$, $\alpha'<\alpha''$, მაშინ $\alpha<\alpha''$.*

დამტკიცება. ვთქვათ, α, α' და α'' რიცხვები განსაზღვრულია შესაბამისად $A|B$, $A'|B'$ და $A''|B''$ განკვეთებით. რადგანაც $\alpha<\alpha'$ და $\alpha'<\alpha''$, ამიტომ A არის A' სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი, ხოლო A' წარმოადგენს A'' სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს. მაშასადამე, A საკუთრივი ნაწილია A'' სიმრავლის, ე. ი. $\alpha<\alpha''$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული მე-3 თეორემა განსაკუთრებული მნიშვნელობისაა, ვინაიდან იგი გვიჩვენებს, რომ *ყველა რაციონალური რიცხვის R სიმრავლე ყველგან მკვრივია Z სიმრავლეში*, ე. ი. ორ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს რაციონალური რიცხვი.

განსაზღვრა **10**. თუ α ნამდვილი რიცხვია და $\alpha > 0$, მაშინ α რიცხვს დადებითი ეწოდება, ხოლო, თუ $\alpha < 0$, მაშინ α უარყოფითი რიცხვია.

§ 9. ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები

ვთქვათ, მოცემულია ირაციონალური რიცხვი α, რომელიც განსაზღვრულია $A|B$ განკვეთით. დავუშვათ, რომ a და b რაციონალური რიცხვებია, რომლებიც A და B კლასებს ეკუთვნიან შესაბამისად. თუ

$$b - a = \varepsilon,$$

სადაც ε მოცემული დადებითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ a-ს ეწოდება α რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით ε სიზუსტით, b-ს კი α რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით ε სიზუსტით.

თეორემა 5. თუ α ირაციონალური რიცხვი წარმოდგენილია $A|B$ განკვეთით, მაშინ ყოველი დადებითი რაციონალური ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რაციონალური რიცხვები $a \in A$ და $b \in B$, რომ $b - a = \varepsilon$.

დამტკიცება. ავიღოთ A და B კლასებში შესაბამისად a_0 და b_0 რიცხვები და განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესია

$$a_0,\ a_0+\varepsilon,\ a_0+2\varepsilon, \ldots,\ a_0+n\varepsilon, \ldots \tag{9.1}$$

შევარჩიოთ მთელი დადებითი n რიცხვი ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}.$$

მაშინ

$$a_0 + n\varepsilon > b_0$$

და რაკი $b_0 \in B$, ამიტომ $a_0 + n\varepsilon \in B$. ვთქვათ, $a_0 + k\varepsilon$ არის (9.1) პროგრესიის უმცირესი წევრი, რომელიც B კლასს ეკუთვნის. ასეთი $a_0 + k\varepsilon$ რიცხვი უეჭველად არსებობს, ვინაიდან $a_0 + n\varepsilon$ რიცხვი B კლასს ეკუთვნის და $a_0 \in A$: რიცხვი $a_0 + (k-1)\varepsilon$ ეკუთვნის A კლასს. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a = a_0 + (k-1)\varepsilon, \quad b = a_0 + k\varepsilon.$$

გვექნება $b - a = \varepsilon$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ α ირაციონალური რიცხვი წარმოდგენილია $A|B$ განკვეთით, მაშინ ყოველი დადებითი ε

რიცხვისათვის მოიძებნება A და B კლასებში ისეთი ორი a და b რიცხვი, რომ $b-a<\varepsilon$.

მართლაც, ავიღოთ რაიმე დადებითი რაციონალური რიცხვი $\varepsilon'<\varepsilon$. წინა თეორემის თანახმად, ε' რიცხვისათვის არსებობს A და B კლასებში შესაბამისად ისეთი a და b რიცხვები, რომ $b-a=\varepsilon'$. მაშასადამე, $b-a<\varepsilon$.

§ 10. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობა

ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლე დავყოთ ორ X და Y კლასად ისე, რომ დაცული იყოს შემდეგი სამი პირობა:

1. არც X და არც Y ცარიელი არაა.

2. X კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Y კლასის ყოველ რიცხვზე.

3. X კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს ნამდვილი რიცხვთა Z სიმრავლის განკვეთა და მას აღნიშნავენ $X|Y$ სიმბოლოთი.

მეშვიდე პარაგრაფში განვიხილეთ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ისეთი განკვეთა, როდესაც ზედა კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი. ამ შემთხვევაში შემოვიყვანეთ ახალი ობიექტი, რომელსაც ირაციონალური რიცხვი ვუწოდეთ. ბუნებრივად ისმის კითხვა: თუ მოვახდენთ ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლის განკვეთას, შეიძლება თუ არა Y კლასში არ არსებობდეს უმცირესი რიცხვი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს დედეკინდის შემდეგი

თეორემა 6. როგორიც გინდა იყოს ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლის $X|Y$ განკვეთა, Y კლასში ყოველთვის არსებობს უმცირესი რიცხვი.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A და B სიმბოლოებით X და Y კლასებში შემავალი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები შესაბამისად. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ A და B კლასები შემდეგ სამ პირობას აკმაყოფილებენ:

1. არც A და არც B ცარიელი არაა.

2. A კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B კლასის ყოველ რიცხვზე.

3. A კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. მაშასადამე, გვაქვს რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის $A|B$ განკვეთა. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რომელიმე α ნამდვილ რიცხვს.

დავამტკიცოთ, რომ $\alpha\in Y$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\alpha\in X$. რადგანაც X კლასში არაა უდიდესი რიცხვი, ამიტომ X კლასში

მოიძებნება ისეთი x რიცხვი, რომ $x > \alpha$. ახლა x და α რიცხვებს შორის ავიღოთ რაციონალური რიცხვი r. მაშინ ეს რიცხვი ერთდროულად უნდა მიეკუთვნოს როგორც A კლასს, ისე B კლასსაც, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $\alpha \in Y$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ α არის Y კლასის უმცირესი რიცხვი. დავუშვათ, რომ Y კლასში არსებობს ისეთი y რიცხვი, რომელიც ნაკლებია α-ზე. y და α რიცხვებს შორის ავიღოთ რაციონალური რიცხვი r:

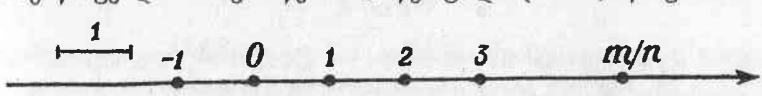
$$y<r<\alpha.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ r ეკუთვნის ერთდროულად A და B კლასებს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, α წარმოადგენს Y კლასის უმცირეს რიცხვს. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ნამდვილ რიცხვთა Z სიმრავლეს აქვს ის თვისება, რომ ყოველი $X|Y$ განკვეთისათვის Y კლასში არსებობს უმცირესი რიცხვი. ამის გამო ამბობენ, რომ Z არის *უწყვეტი სიმრავლე*. რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლე არ წარმოადგენს უწყვეტ სიმრავლეს, ვინაიდან არსებობს R სიმრავლის ისეთი განკვეთაც, რომლის ზედა კლასში არაა უმცირესი რიცხვი.

§ 11. ნამდვილ რიცხვთა გეომეტრიული წარმოდგენა

დიდი მნიშვნელობა აქვს ნამდვილი რიცხვების გეომეტრიულ წარმოდგენას. იგი გვიჩვენებს, თუ რითაა გამოწვეული ირაციონალური რიცხვების შემოღების აუცილებლობა. ამისათვის ავიღოთ რაიმე წრფე და მასზე საწყისი O წერტილი (ნახ. 5). წრფის რაიმე



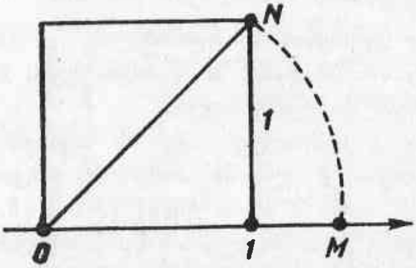
ნახ. 5.

მონაკვეთი მივიჩნიოთ სიგრძის ერთეულად. მაშინ ყოველ რაციონალურ რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ გარკვეული წერტილი.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია რაციონალური რიცხვი $\frac{m}{n}$. სიგრძის ერთეულად მიჩნეული მონაკვეთი გავყოთ n ტოლ ნაწილად და სათავიდან მოვზომოთ m ასეთი მონაკვეთი O წერტილის მარჯვნივ, თუ m დადებითია, ხოლო O წერტილის მარცხნივ, თუ m უარყოფითია (n იგულისხმება დადებითად). მიღებული მონაკვე-

თის ბოლო წერტილს შევუსაბამოთ რაციონალური რიცხვი $\frac{m}{n}$ თვით ამ წერტილს *რაციონალური წერტილი* ეწოდება. კერძოდ, 0 რიცხვს შეესაბამება O წერტილი.

რაციონალური წერტილებით ვერ ამოიწურება წრფის წერტილთა სიმრავლე. მართლაც, ავიღოთ კვადრატი, რომლის გვერდი სიგრძის ერთეულის ტოლია და O სათავიდან მოვზომოთ მარჯვნივ ამ კვადრატის დიაგონალი, მივიღებთ M წერტილს(ნახ. 6). დავამტკიცოთ, რომ M წერტილი რაციონალური არაა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, M რაციონალური წერტილია, მაშინ M წერტილს შეესაბამება გარკვეული რაციონალური რიცხვი $\frac{m}{n}$. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ m და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია. პითაგორას თეორემის თანახმად



ნახ. 6.

$$OM^2=ON^2=2,$$

ე. ი.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2.$$

მაგრამ მე-2 თეორემის თანახმად, ამ ტოლობას ადგილი არა აქვს. მაშასადამე, M არ არის რაციონალური წერტილი.

ამრიგად, წრფეზე აღმოვაჩინეთ ერთი არარაციონალური წერტილი. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ წრფეზე არსებობს უამრავი არარაციონალური წერტილი. თუ განვიხილავთ ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, მაშინ შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ამ სიმრავლესა და წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის, მხოლოდ უნდა ვიგულისხმოთ შემდეგი ორი აქსიომის შესრულება:

1. წრფის ყოველ ორ წერტილს შორის მოთავსებულია ერთი რაციონალური წერტილი მაინც.

2. თუ წრფის ყველა წერტილის სიმრავლეს დავყოფთ ისეთ ორ X^* და Y^* კლასად, რომ X^* კლასის ყოველი წერტილი ძევს

Y^* კლასის ნებისმიერი წერტილის მარცხნივ და X^* კლასში არ არსებობს ამ კლასის ყველაზე მარჯვენა წერტილი, მაშინ Y^* კლასში არსებობს ყველაზე მარცხენა წერტილი.

უკანასკნელ აქსიომას უწოდებენ წრფის უწყვეტობის აქსიომას. ახლა შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 7. *წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ნამდვილი რიცხვი, ყოველ ნამდვილ რიცხვს კი გარკვეული წერტილი.*

დამტკიცება. ჯერ შევნიშნოთ შემდეგი: თუ a^* და b^* წარმოადგენენ რაციონალური a და b რიცხვების შესაბამის წერტილებს წრფეზე, მაშინ $a<b$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ a^* წერტილი მდებარეობს b^* წერტილის მარცხნივ.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია α ირაციონალური რიცხვი, რომელიც წარმოდგენილია რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის $A|B$ განკვეთით. აღვნიშნოთ A^* და B^* სიმბოლოებით A და B კლასების რიცხვთა შესაბამისი წერტილთა სიმრავლეები. რადგანაც A კლასში არ არის უდიდესი რიცხვი, ამიტომ A^* კლასში არ იქნება ყველაზე მარჯვენა წერტილი. მაშასადამე, გვაქვს ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლის $A^*|B^*$ განკვეთა.

აღვნიშნოთ X^* სიმბოლოთი წრფის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიდან ყოველი მათგანი ეკუთვნის ან A^* სიმრავლეს ან მდებარეობს A^* სიმრავლის რაიმე წერტილის მარცხნივ. წრფის დანარჩენ წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ Y^* სიმბოლოთი. ცხადია, რომ

$$B^*\subset Y^*$$

დავამტკიცოთ, რომ X^* კლასის ყოველი წერტილი მოთავსებულია Y^* კლასის ნებისმიერი წერტილის მარცხნივ. ვთქვათ, $x^*\in X^*$ და $y^*\in Y^*$. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ x^* წერტილი ძევს y^* წერტილის მარცხნივ. მართლაც, X^* კლასში მოიძებნება ისეთი რაციონალური წერტილი a^*, რომელიც ძევს x^* წერტილის მარჯვნივ და რაკი y^* წერტილი მდებარეობს a^* წერტილის მარჯვნივ, ამიტომ იგი ძევს x^* წერტილის მარჯვნივ.

აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ X^* კლასში არ არსებობს ყველაზე მარჯვენა წერტილი. მაშასადამე, გვაქვს $X^*|Y^*$ განკვეთა და მეორე აქსიომის თანახმად Y^* კლასში არსებობს ყველაზე მარცხენა α^* წერტილი. ეს წერტილი რაციონალური არაა. α რიცხვს შევუსაბამებთ α^* წერტილს. ამრიგად, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ წრფის გარკვეული წერტილი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველ არარაციონალურ ξ^* წერტილს შეესაბამება გარკვეული ირაციონალური რიცხვი. ამისათვის აღვნიშნოთ A^* სიმბოლოთი იმ რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც მდებარეობს ξ^* წერტილის მარცხნივ, B^* სიმბოლოთი კი დანარჩენ რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე. ცხადია, A^* სიმრავლე არ შეიცავს ყველაზე მარჯვენა წერტილს, B^* სიმრავლე კი ყველაზე მარცხენა წერტილს. თუ აღვნიშნავთ A ასოთი A^* სიმრავლის წერტილთა შესაბამის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, B ასოთი კი B^* სიმრავლის წერტილთა შესაბამის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი რაციონალური რიცხვი ეკუთვნის ან A, ან B სიმრავლეს. გარდა ამისა, A კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B კლასის ყოველ რიცხვზე და A კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი, ხოლო B კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს $A|B$ განკვეთა, რომელიც განსაზღვრავს რაიმე ირაციონალურ რიცხვს. ამრიგად, წრფის ყოველ არარაციონალურ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ირაციონალური რიცხვი და, მაშასადამე, წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ნამდვილი რიცხვი. თეორემა დამტკიცებულია.

წრფეს, რომლისთვისაც შესრულებულია 1 და 2 აქსიომები, რიცხვთა წრფე ან რ ი ც ხ ვ თ ა ღ ე რ ძ ი ეწოდება.

ზემოდამტკიცებული თეორემის საფუძველზე, ჩვენ არ განვასხვავებთ ერთმანეთისაგან ნამდვილ რიცხვს მისი შესაბამისი წერტილისაგან.

§ 12. ნამდვილ რიცხვთა შუალედები

მათემატიკურ ანალიზში საჭირო ხდება ნამდვილ რიცხვებთან ერთად განვიხილოთ ორი „არასაკუთრივი რიცხვი" $-\infty$ და $+\infty$, რომლებიც აკმაყოფილებენ, განსაზღვრის მიხედვით, პირობას: ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის

$$-\infty < a < +\infty.$$

ამის საფუძველზე ვწერთ $-\infty < +\infty$.

$-\infty$ და $+\infty$ ნიშნები იკითხება ასე: „მინუს უსასრულო" და „პლუს უსასრულო".

თუ ყველა ნამდვილი რიცხვის Z სიმრავლეს დავუმატებთ არასაკუთრივ $-\infty$ და $+\infty$ რიცხვებს, მივიღებთ ეგრეთ წოდებულ

გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. მას აღვნიშნავთ $\overline{Z}$ სიმბოლოთი.

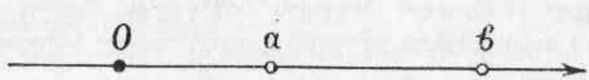
შემოვიღოთ ახლა ზოგიერთი ცნება, რომლებსაც შემდეგში გამოვიყენებთ. ვთქვათ, a და b ორი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$.

განსაზღვრა 11. a და b რიცხვებს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, თვით a და b რიცხვების ჩაუთვლელად, *ინტერვალი* ეწოდება და იგი აღინიშნება $]a, b[$ სიმბოლოთი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $]a, b[$ ინტერვალი არის ყველა იმ x რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a<x<b.$$

a და b რიცხვებს ეწოდება $]a, b[$ *ინტერვალის საზღვრები*.

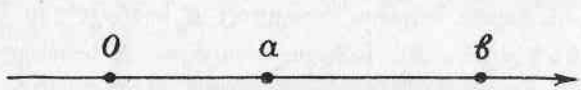
რიცხვთა ღერძზე $]a, b[$ ინტერვალს შეესაბამება a და b წერტილებით შემოსაზღვრული მონაკვეთი a და b წერტილების ჩაუთვლელად (ნახ. 7).



ნახ. 7.

განსაზღვრა 12. მოცემულ ორ a და b რიცხვს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, a და b რიცხვების ჩათვლით, *სეგმენტი* ეწოდება და იგი $[a, b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება. a და b რიცხვებს $[a, b]$ *სეგმენტის ბოლოები* ეწოდება.

რიცხვთა ღერძზე $[a, b]$ სეგმენტს შეესაბამება a და b წერტილებით შემოსაზღვრული მონაკვეთი a და b წერტილების ჩათვლით (ნახ. 8).



ნახ. 8.

განსაზღვრა 13. ყველა იმ ნამდვილი x რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $a\leqslant x<b$ ან $a<x\leqslant b$ ეწოდება *ნახევარინტერვალი* (*ნახევარსეგმენტი*).

ეს ნახევარინტერვალები აღინიშნება შესაბამისად $[a, b[$ და $]a, b]$ სიმბოლოებით.

განსაზღვრა 14. ყველა იმ ნამდვილი x რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x > a$, ეწოდება უსასრულო ინტერვალი მარცხენა a საზღვრით და აღინიშნება $]a, +\infty[$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად განისაზღვრება $]-\infty, a[$ ინტერვალი მარჯვენა a საზღვრით.

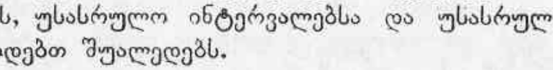
განსაზღვრა 15. ყველა იმ ნამდვილი x რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $x \geqslant a$ უტოლობას, ეწოდება უსასრულო ნახევარსეგმენტი მარცხნიდან და აღინიშნება $[a, +\infty[$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად განისაზღვრება უსასრულო $]-\infty, a]$ ნახევარსეგმენტი მარჯვნიდან.

განსაზღვრა 16. უსასრულო $]-\infty, +\infty[$ ინტერვალი ეწოდება ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, ხოლო უსასრულო $[-\infty, +\infty]$ სეგმენტი ეწოდება გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა $\bar{Z}$ სიმრავლეს.

განსაზღვრა 17. ინტერვალებს, სეგმენტებს, ნახევარინტერვალებს, უსასრულო ინტერვალებსა და უსასრულო სეგმენტს ჩვენ ვუწოდებთ შუალედებს.

განსაზღვრა 18. რაიმე a რიცხვის მიდამო ეწოდება ყოველ $]\alpha, \beta[$ ინტერვალს, რომელიც a რიცხვს შეიცავს (ნახ. 9).



ნახ. 9.

განსაზღვრა 19. ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილს ეწოდება ამ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომელიც E სიმრავლეში შედის.

განსაზღვრა 20. ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლის რაიმე ξ წერტილს ეწოდება იზოლირებული წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს E სიმრავლის არც ერთ წერტილს, გარდა ξ წერტილისა.

განსაზღვრა 21°. რაიმე a რიცხვის გაჩხვლეტილი მიდამო ეწოდება a რიცხვის შემცველ ყოველ $]\alpha, \beta[$ ინტერვალს, რომლიდან ამოგდებულია a რიცხვი.

13. სიმეტრიული რიცხვები

რაციონალური a რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი ეწოდება $-a$ რიცხვს. სიმეტრიული რიცხვის ცნება შეიძლება განზოგადებულ იქნეს ირაციონალური რიცხვის შემთხვევაშიაც.

ვთქვათ, მოცემულია α ირაციონალური რიცხვი, რომელიც წარმოდგენილია $A|B$ განკვეთით. აღვნიშნოთ A კლასის რიცხვთა სიმეტრიული რიცხვების სიმრავლე B' სიმბოლოთი, B კლასის რიცხვების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლე კი A' სიმბოლოთი. ცხადია, რომ A' და B' კლასები ცარიელი არაა.

თუ რომელიმე რაციონალური r რიცხვი A' კლასს ეკუთვნის, მაშინ მასზე ნაკლები ყოველი რაციონალური r' რიცხვიც იმავე კლასს ეკუთვნის. მართლაც, რაკი $r'<r$, ამიტომ $-r>-r$. მაგრამ რიცხვი $-r$ ეკუთვნის B კლასს და, მაშასადამე, $-r'$ რიცხვიც იმავე კლასს მიეკუთვნება. ამიტომ $r'\in A'$. ამის გარდა, A კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოვიდოდა, რომ B კლასი შეიცავს უმცირეს რიცხვს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ B' კლასი არ შეიცავს უმცირეს რიცხვს. მაშასადამე, გვაქვს $A'|B'$ განკვეთა, რომელიც განსაზღვრავს გარკვეულ ირაციონალურ α' რიცხვს. ამ რიცხვს ეწოდება α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი და იგი აღინიშნება $-\alpha$ სიმბოლოთი:

$$\alpha'=-\alpha.$$

ცხადია, თუ განვიხილავთ A' და B' კლასების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლეებს, მივიღებთ შესაბამისად B და A კლასებს. მაშასადამე,

$$-(-\alpha)=\alpha.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $\alpha>0$, მაშინ $-\alpha<0$. ამის გარდა, თუ α და α' ისეთი ირაციონალური რიცხვებია, რომ $\alpha<\alpha'$, მაშინ $-\alpha>-\alpha'$.

§ 14. შებრუნებული რიცხვები

თუ a ნულისაგან განსხვავებული რაციონალური რიცხვია, მაშინ $\dfrac{1}{a}$ რიცხვს ეწოდება a რიცხვის შებრუნებული რიცხვი.

ახლა განვსაზღვროთ $A|B$ განკვეთით წარმოდგენილი ირაციონალური α რიცხვის შებრუნებული რიცხვი.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha>0$. განვსაზღვროთ A' და B' კლასები შემდეგნაირად: A' კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, რიცხვი 0 და B კლასის რიცხვთა შებრუნებული რიცხვები, B' კლასში კი A კლასში შემავალი დადებითი რიცხვების შებრუნებული რიცხვები. ცხადია, რომ A' და B' ცარიელი არაა. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ რომელიმე რაციონალური r რიცხვი A' კლასს ეკუთვნის, მაშინ მასზე ნაკლები ყოველი რაციონალური რიცხვიც იმავე კლასს ეკუთვნის. ამის გარდა, A' კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს, B' კლასი კი — უმცირესს. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს მეორე გვარის $A'|B'$ განკვეთა. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რაიმე დადებით ირაციონალურ α' რიცხვს, რომელსაც α რიცხვის შებრუნებული რიცხვი ეწოდება. იგი აღინიშნება $\frac{1}{\alpha}$ სიმბოლოთი:

$$\alpha'=\frac{1}{\alpha}. \tag{14.1}$$

ცხადია, რომ (14.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\alpha=\frac{1}{\alpha'}.$$

თუ ირაციონალური α რიცხვი უარყოფითია, მაშინ მის შებრუნებული ეწოდება რიცხვს

$$-\left(\frac{1}{-\alpha}\right).$$

§ 15. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრები

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლე. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 21. ნამდვილ b რიცხვს ვუწოდოთ E სიმრავლის მაჟორანტი, თუ E სიმრავლის არც ერთი რიცხვი b-ს არ აღემატება, ხოლო a რიცხვს ვუწოდოთ E სიმრავლის მინორანტი, თუ E სიმრავლის არც ერთი რიცხვი a-ზე ნაკლები არაა.

განსაზღვრა 22. ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლეს ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს E სიმრავლის რაიმე b მაჟორანტი, ხოლო E სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს E სიმრავლის რაიმე a მინორანტი.

განსაზღვრა 23. ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

მაშასადამე, თუ E სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს E სიმრავლის ყველა რიცხვს.

ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო იგი ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული, ვინაიდან არ არსებობს ნამდვილი რიცხვი, რომელიც ყოველ დადებით რიცხვს აღემატებოდეს.

ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვის სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო იგი ქვემოდან შემოსაზღვრული არ არის.

ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე შემოსაზღვრული არაა არც ზემოდან და არც ქვემოდან.

განსაზღვრა 24. ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლის მაჟორანტთა შორის უმცირესს ეწოდება ამ სიმრავლის ზედა საზღვარი. E სიმრავლის მინორანტთა შორის უდიდესს E სიმრავლის ქვედა საზღვარი ეწოდება.

E სიმრავლის ზედა საზღვარი აღინიშნება $\sup E$ და იკითხება „სუპრემუმ E“, ხოლო ქვედა საზღვარი აღინიშნება $\inf E$ და იკითხება „ინფიმუმ E“.

თუ E სიმრავლე ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ დავწერთ

$$\sup E = +\infty.$$

ანალოგიურად, თუ E სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ დავწერთ $\inf E = -\infty$.

ცხადია, თუ E სიმრავლეში არსებობს უდიდესი რიცხვი, მაშინ ეს რიცხვი იქნება ზედა საზღვარი.

სიმრავლეს შეიძლება არ ჰქონდეს უდიდესი რიცხვი, მაგრამ ჰქონდეს ზედა საზღვარი. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \right\}.$$

ამ სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი. დავამტკიცოთ, რომ E სიმრავლის ზედა საზღვარია 1. ცხადია 1 არის E სიმრავლის მაჟორანტი, ვინაიდან ამ სიმრავლის არც ერთი რიცხვი არ აღემატება ერთს. გარდა ამისა, 1 წარმოადგენს მაჟორანტებს შორის

უმცირესს. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი $x<1$. ავიღოთ x-სა და 1-ს შორის რაიმე რაციონალური რიცხვი r: $x<r<1$. შევარჩიოთ მთელი დადებითი რიცხვი n შემდეგი პირობით:

$$n>\frac{r}{1-r}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$r<\frac{n}{n+1}.$$

რადგანაც $x<r$, ამიტომ

$$x<\frac{n}{n+1}.$$

მაშასადამე, ერთზე ნაკლები რიცხვი არ შეიძლება იყოს E სიმრავლის მაჟორანტი. ამიტომ რიცხვი 1 წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს.

თუ E სიმრავლეში არსებობს უმცირესი რიცხვი, მაშინ ეს რიცხვი იქნება ქვედა საზღვარი.

სიმრავლეში შეიძლება არ იყოს უმცირესი რიცხვი, მაგრამ მას ჰქონდეს ქვედა საზღვარი. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$E=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots\right\}.$$

ამ სიმრავლეში არ არის უმცირესი რიცხვი, მაგრამ მოცემული სიმრავლის ქვედა საზღვარია რიცხვი 0.

ახლა ისმის კითხვა: ყოველ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს თუ არა ზედა და ქვედა საზღვრები? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 8. ყ ო ვ ე ლ ზ ე მ ო დ ა ნ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს ა ქ ვ ს ზ ე დ ა ს ა ზ ღ ვ ა რ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, E ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ E სიმრავლეში არსებობს უდიდესი რიცხვი, მაშინ თეორემა ცხადია.

ვიგულისხმოთ, რომ E სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი. ყველა ნამდვილი რიცხვის Z სიმრავლე დავყოთ ორ X და Y კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: Y კლასში მოვათავსოთ ყველა ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომლებიც აღემატებიან E სიმრავლის ყოველ რიცხვს, X კლასში კი დანარჩენი ნამდვილი რიცხვები. ცხადია, $E\subset X$.

Z სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ X და Y კლასად გვაძლევს განკვეთას. მართლაც,

1. არც X და არც Y ცარიელი არაა.

2. X კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Y კლასის ნებისმიერ რიცხვზე. მართლაც, ავიღოთ X კლასის ნებისმიერი x რიცხვი. E სიმრავლე შეიცავს ისეთ p რიცავს, რომ $p \geqslant x$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში x მიეკუთვნებოდა Y კლასს. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ X კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Y კლასის ნებისმიერ რიცხვზე.

3. X კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს. მართლაც, ავიღოთ X კლასის ნებისმიერი ξ რიცხვი. მაშინ E-ში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი რიცხვი p, რომ $p \geqslant \xi$, ვინაიდან წინა ღმდეგ შემთხვევაში მიეკუთვნებოდა Y კლასს. რაკი E სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი, ამიტომ E-ში მოიძებნება ისეთი p' რიცხვი, რომელიც p-ზე მეტია და, მაშასადამე, $p' > \xi$. მაგრამ $p' \in X$. ამიტომ X კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი.

ამრიგად, შესრულებულია განკვეთის სამივე პირობა. მაშასადამე, გვაქვს $X|Y$ განკვეთა. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რაიმე ნამდვილ L რიცხვს. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ L წარმოადგენს E სიმრავლის ზედა საზღვარს. მართლაც, ერთი მხრით, E სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება L რიცხვს, ე. ი. L არის E სიმრავლის მაჟორანტი. მეორე მხრით, არც ერთი ნამდვილი რიცხვი $x < L$ არ შეიძლება იყოს E სიმრავლის მაჟორანტი. მაშასადამე, L არის E სიმრავლის ზედა საზღვარი. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 9. ქვემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ქვედა საზღვარი.

თეორემა 10. თუ E ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა და $E_1 \subset E$, მაშინ

$$\sup E_1 \leqslant \sup E. \tag{15.1}$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი a მაჟორანტი წარმოადგენს E_1 სიმრავლის მაჟორანტსაც. კერძოდ, $\sup E$ იქნება E_1 სიმრავლის მაჟორანტი და რაკი სიმრავლის ზედა საზღვარი ამ სიმრავლის მაჟორანტთა შორის უმცირესია, ამიტომ მართებულია (15.1) დამოკიდებულება.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 11. თუ E ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა და $E_1 \subset E$, მაშინ

$$\inf E_1 \geqslant \inf E.$$

§ 16. სეგმენტის სიგრძე

ვთქვათ, მოცემულია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი. თუ α და β რაციონალური რიცხვებია, მაშინ სეგმენტს რაციონალური სეგმენტი ეწოდება, $\beta-\alpha$ სხვაობას კი $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძე და აღინიშნება $|[\alpha, \beta]|$ სიმბოლოთი.

ახლა დავუშვათ, რომ α და β რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია. როგორც ვიცით α და β რიცხვებს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა.

აღვნიშნოთ E ასეთი $b-a$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$\alpha < a < b < \beta.$$

ცხადია, E სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, მას აქვს ზედა საზღვარი. ამ ზედა საზღვარს ეწოდება $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძე ანუ მანძილი α და β წერტილებს შორის. ამ შემთხვევაშიც $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძე აღინიშნება $|[\alpha, \beta]|$, α და β წერტილებს შორის მანძილი კი $\rho(\alpha, \beta)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრის მიხედვით

$$\rho(\alpha, \beta) = |[\alpha, \beta]|.$$

თუ მოცემულია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალი ან $[\alpha, \beta[$ ან $]\alpha, \beta]$ ნახევრადინტერვალი, მაშინ განსაზღვრას მივიღებთ

$$|]\alpha, \beta[| = |[\alpha, \beta[| = |]\alpha, \beta]| = \rho(\alpha, \beta),$$

სადაც $|]\alpha, \beta[$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალის სიგრძე.

თეორემა 12. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა ორი P და Q სიმრავლე, რომლებიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს: 1) P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Q სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე; 2) ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს P და Q სიმრავლეში ისეთი ორი რიცხვი p და q, რომ $\rho(p, q) < \varepsilon$. მაშინ

$$\sup P = \inf Q. \tag{16.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ცხადია, რომ P სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან, Q კი ქვემოდან. ამიტომ $\sup P$ და $\inf Q$ სასრული რიცხვებია. ვთქვათ,

$$\alpha=\sup P,\quad \beta=\inf Q.$$

რომ იყოს $\beta<\alpha$, მაშინ $]\beta, \alpha]$ შუალედში მოიძებნება წერტილი $x\in P$, ხოლო $[\beta, x]$ შუალედში წერტილი $y\in Q$ მაშასადამე, გვექნებოდა $y<x$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ამრიგად, $\alpha\leqslant\beta$. რომ იყოს $\alpha<\beta$, მაშინ P და Q სიმრავლეებში მოიძებნება ისეთი რიცხვები $p\in P$ და $q\in Q$, რომ $\rho(p, q)\geqslant\varepsilon$, სადაც

$$\varepsilon=\rho(\alpha, \beta).$$

ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $\alpha=\beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თ უ ნ ა მ დ ვ ი ლ რ ი ც ხ ვ თ ა E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ა რ ც ე რ თ ი რ ი ც ხ ვ ი ა რ ა ღ ე მ ა ტ ე ბ ა ξ რ ი ც ხ ვ ს, მ ა შ ი ნ $\sup E\leqslant\xi$. ა ს ე ვ ე, თ უ E ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ა რ ც ე რ თ ი რ ი ც ხ ვ ი ნ ა კ ლ ე ბ ი ა რ ა ა η რ ი ც ხ ვ ზ ე, მ ა შ ი ნ

$$\inf E\geqslant\eta.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ ნამდვილი α რიცხვი წარმოდგენილია $A\,|\,B$ განკვეთით, მაშინ

$$\sup A=\inf B=\alpha.$$

§ 17. ნამდვილ რიცხვთა ჯამი

ვთქვათ, α და α' ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც წარმოდგენილია $A\,|\,B$ და $A'\,|\,B'$ განკვეთებით შესაბამისად. განვიხილოთ $a+a'$ სახის რიცხვთა P სიმრავლე, სადაც $a\in A$ და $a'\in A$; Q-თი აღვნიშნოთ $b+b$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც $b\in B$, $b'\in B'$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P=\inf Q. \tag{17.1}$$

რადგანაც $a<b$ და $a'<b'$, ამიტომ P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Q სიმრავლის ყოველ რიცხვზე. ამას გარდა, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვები $p\in P$, $q\in Q$, რომ

$$\rho(p, q)<\varepsilon.$$

მართლაც, მე-5 თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი რიცხვები $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $a_0' \in A'$, $b_0' \in B'$, რომ

$$b_0 - a_0 = \frac{\varepsilon'}{2}, \quad b_0' - a_0' = \frac{\varepsilon'}{2},$$

სადაც ε' არის ε-ზე ნაკლები დადებითი რაციონალური რიცხვი. ამ ორი ტოლობის წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$(b_0+b_0')-(a_0+a_0')=\varepsilon'<\varepsilon.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $p=a_0+a_0'$, $q=b_0+b_0'$, გვექნება

$$\rho(p, q)<\varepsilon,$$

სადაც $p \in P$, $q \in Q$. მაშასადამე, მე-12 თეორემის თანახმად, მართებულია (17.1) ტოლობა. რიცხვს $\inf Q$ ეწოდება α და α' რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ჯ ა მ ი და იგი აღინიშნება $\alpha+\alpha'$ სიმბოლოთი.

ცხადია, თუ α და α' რაციონალური რიცხვებია, მაშინ $\alpha+\alpha'$ ჯამის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ემთხვევა რაციონალურ რიცხვთა ჯამის ჩვეულებრივ განსაზღვრას. მართლაც, Q სიმრავლის აგების მიხედვით, ამ შემთხვევაში $\alpha+\alpha'$ რიცხვი Q სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი Q სიმრავლის რიცხვებს შორის უმცირესია. მაშასადამე,

$$\alpha+\alpha'=\inf Q.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ თუ α რაციონალური რიცხვია, მაშინ $\alpha+\alpha'$ წარმოადგენს Q_0 სიმრავლის ქვედა საზღვარს, სადაც Q_0 არის $\alpha+b'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე (b' გაირბენს B' სიმრავლის ყველა რიცხვს). მართლაც, P და Q_0 სიმრავლეები აკმაყოფილებს მე-12 თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\sup P=\inf Q_0=\alpha+\alpha'.$$

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$0+\alpha=\alpha.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მართებულია კომუტატიურობის კანონი, ე. ი.

$$\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha.$$

თეორემა 13. თუ α, β, α', β' ნ ა მ დ ვ ი ლ ი რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ა და $\alpha<\beta$, $\alpha'<\beta'$, მ ა შ ი ნ $\alpha+\alpha'<\beta+\beta'$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ რაციონალური რიცხვები r, r_1, r' და r'_1, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$\alpha < r < r_1 < \beta, \ \alpha' < r' < r'_1 < \beta'.$$

ვთქვათ, P არის $a+a'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც a ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც α-ზე ნაკლებია, ხოლო a' წარმოადგენს α' რიცხვზე ნაკლებ ნებისმიერ რაციონალურ რიცხვს. შემდეგ, აღვნიშნოთ Q ასოთი $b+b'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც b ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც β-ზე ნაკლები არ არის, ხოლო b' ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც β'-ზე ნაკლები არ არის. მაშინ

$$\sup P = \alpha + \alpha', \ \inf Q = \beta + \beta'. \qquad (17.2)$$

ცხადია, რომ

$$a + a' < r + r' < r_1 + r'_1 < b + b'.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (17.2) ტოლობებს, მე-12 თეორემის შედეგის თანახმად გვექნება

$$\alpha + \alpha' \leqslant r + r' < r_1 + r'_1 \leqslant \beta + \beta',$$

ე. ი. $\alpha + \alpha' < \beta + \beta'$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ს ა მ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი α_1, α_2 და α_3 რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3). \qquad (17.3)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აღვნიშნოთ A_i სიმბოლოთი ($i=1, 2, 3$) ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α_i რიცხვზე ნაკლებია, B_i სიმბოლოთი კი ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც α_i რიცხვზე ნაკლები არ არიან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P = \{(x+y)+z\}, \ Q = \{(x'+y')+z'\},$$

სადაც

$$x \in A_1, \ y \in A_2, \ z \in A_3, \ x' \in B_1, \ y' \in B_2, \ z' = B_3.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P = \inf Q = (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3. \qquad (17.4)$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ვთქვათ, ε' დადებითი რაციონალური რიცხვია, რომელიც ნაკლებია ε-ზე. მე-5 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვები

$$x_0 \in A_1, \ y_0 \in A_2, \ z_0 \in A_3, \ x''_0 \in B_1, \ y''_0 \in B_2, \ z''_0 \in B_3.$$

რომ ადგილი ექნება ტოლობებს

$$x_0' - x_0 = \frac{\varepsilon'}{3}, \quad y_0' - y_0 = \frac{\varepsilon'}{3}, \quad z_0' - z_0 = \frac{\varepsilon'}{3}.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$(x_0' + y_0') + z_0' - [(x_0 + y_0) + z_0] = \varepsilon'.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$p = (x_0 + y_0) + z_0, \quad q = (x_0' + y_0') + z_0'.$$

გვექნება

$$\rho(p, q) = \varepsilon' < \varepsilon, \quad p \in P, \quad q \in Q.$$

მაშასადამე, მე-12 თეორემის მიხედვით

$$\sup P = \inf Q. \tag{17.5}$$

შემდეგ, რაკი

$$x + y < \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant x' + y', \quad z < \alpha_3 \leqslant z',$$

ამიტომ მე-13 თეორემის თანახმად

$$(x + y) + z < (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 \leqslant (x' + y') + z',$$

საიდანაც გვექნება

$$\sup P \leqslant (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 \leqslant \inf Q.$$

თუ გავითვალისწინებთ (17.5) ტოლობას, უკანასკნელი დამოკიდებულებიდან მიიღება (17.4) ტოლობები.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\sup P' = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3),$$

სადაც

$$P' = \{x + (y + z)\}, \quad x \in A_1, \quad y \in A_2, \quad z \in A_3.$$

მაგრამ $P' = P$ და ამიტომ მართებულია (17.3) ტოლობა. ამით შეკრების ასოციურობის კანონი დამტკიცებულია.

თეორემა 15. ყოველი ირაციონალური α რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\alpha + (-\alpha) = 0. \tag{17.6}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, α და $-\alpha$ რიცხვები წარმოდგენილია შესაბამისად $A|B$ და $A'|B'$ განკვეთებით. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P = \{a + a'\}, \quad Q = \{b + b'\},$$

სადაც
$$a \in A,\ b \in B,\ a' \in A',\ b' \in B'.$$
დავამტკიცოთ, რომ P სიმრავლის ყოველი რიცხვი უარყოფითია. ავიღოთ P სიმრავლის ნებისმიერი p რიცხვი. ამ რიცხვს აქვს სახე a_0+a_0', ე. ი.
$$p=a_0+a_0',\ a_0 \in A,\ a_0' \in A'.$$
მაგრამ $a_0=-b_0$, სადაც $b_0 \in B$, მაშასადამე, $p=a_0-b_0$ და რაკი $a_0<b_0$, ამიტომ $p<0$. მაშასადამე,
$$\sup P \leqslant 0. \tag{17.7}$$
ამავე გზით დავამტკიცებთ, რომ
$$\inf Q \geqslant 0. \tag{17.8}$$
შემდეგ, რაკი
$$\sup P=\inf Q=\alpha+(-\alpha),$$
ამიტომ (17.7) და (17.8) დამოკიდებულებათა თანახმად მართებულია (17.6) ტოლობა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 18. ორი ნამდვილი რიცხვის სხვაობა

გამოკლების ოპერაცია წარმოადგენს შეკრების ოპერაციის შებრუნებულ ოპერაციას. ამიტომ ნამდვილი α რიცხვიდან ნამდვილი α' რიცხვის გამოკლება ისეთი მესამე α'' რიცხვის მოძებნას ნიშნავს, რომელიც α' რიცხვთან მიმატებული მოგვცემს α რიცხვს.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ზემოაღნიშნული თვისების რიცხვი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 16. ნებისმიერი ორი α და β რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ξ რიცხვი, რომ
$$\alpha+\xi=\beta.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნამდვილი რიცხვი
$$\xi=\beta+(-\alpha),$$
სადაც $-\alpha$ არის α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი. გვაქვს:
$$\alpha+\xi=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0+\beta=\beta.$$
მაშასადამე, $\beta+(-\alpha)$ არის საძიებელი რიცხვი. თეორემა დამტკიცებულია.

$\beta+(-\alpha)$ რიცხვს ეწოდება β და α რიცხვების სხვაობა და იგი აღინიშნება $\beta-\alpha$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, $\beta-\alpha$ სხვაობის მისაღებად საჭიროა β რიცხვს მივუმატოთ α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი.

რადგანაც შეკრების ოპერაციის შედეგად ვღებულობთ მხოლოდ ერთ რიცხვს, ამიტომ გამოკლების ოპერაციის შედეგად გვექნება იგრეთვე მხოლოდ ერთი რიცხვი.

დასასრულ, არასაკუთრივი $-\infty$ და $+\infty$ რიცხვებისათვის განსაზღვრის მიხედვით გვაქვს:

$$(+\infty)+a=a+(+\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)+a=a+(-\infty)=-\infty,$$

სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

§ 19. ნამდვილი რიცხვების ნამრავლი

ვთქვათ, მოცემულია ორი ნამდვილი რიცხვი α და α' წარმოდგენილი $A|B$ და $A'|B'$ განკვეთებით შესაბამისად. განვსაზღვროთ α და α' რიცხვების ნამრავლი.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha>0$ და $\alpha'>0$. ამ შემთხვევაში A და A' კლასები შეიცავენ დადებით რაციონალურ რიცხვებს. აღვნიშნოთ P ასოთი ყველა aa' სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც

$$a\in A,\ a'\in A',\ a>0,\ a'>0,$$

Q ასოთი კი bb' სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც $b\in B$, $b'\in B'$. ცხადია, P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Q სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P=\inf Q. \tag{19.1}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ε რაციონალური რიცხვია. ვთქვათ, $b_0\in B$, $b_0'\in B'$. ცხადია, $b_0>0$, $b_0'>0$. ავიღოთ ისეთი ოთხი დადებითი რაციონალური რიცხვი a, b, a', b', რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$a<\alpha<b\leqslant b_0,\quad a'<\alpha'<b'\leqslant b_0',$$

$$b-a<\frac{\varepsilon}{b_0+b_0'},\quad b'-a'<\frac{\varepsilon}{b_0+b_0'}.$$

ცხადია, რომ $p\in P$, $q\in Q$, სადაც $p=aa'$, $q=bb'$. გვაქვს

$$\rho(p,q)=bb'-aa'=(bb'-ab')+(ab'-aa')=$$

$$=b'(b-a)+a(b'-a')<b_0'\cdot\frac{\varepsilon}{b_0+b_0'}+b_0\cdot\frac{\varepsilon}{b_0+b_0'}=\varepsilon.$$

ამრიგად, P და Q სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ მართებულია (19.1) ტოლობა. რიცხვს $\inf Q$ ეწოდება α და α' რიცხვების ნამრავლი და აღინიშნება $\alpha\alpha'$ სიმბოლოთი.

თუ α და α' რიცხვები ორივე რაციონალურია, მაშინ $\alpha\alpha'$ ნამრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ემთხვევა ნამრავლის ჩვეულებრივ განსაზღვრას. მართლაც, Q სიმრავლის აგების მიხედვით, ამ შემთხვევაში $\alpha\alpha'$ რიცხვი Q სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი Q სიმრავლის რიცხვებს შორის უმცირესია. მაშასადამე,

$$\alpha\alpha' = \inf Q.$$

თუ α რაციონალური რიცხვია, α' კი ირაციონალურია, მაშინ $\alpha\alpha'$ წარმოადგენს $\alpha b'$ სახის რიცხვთა Q_0 სიმრავლის ქვედა საზღვარს, სადაც $b' \in B'$. მართლაც, ადვილი საჩვენებელია, რომ P და Q_0 სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\sup P = \inf Q_0 = \alpha\alpha'.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, რომ α და α' რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია. აქ წარმოგვიდგება სამი შემთხვევა:

ა) $\alpha > 0$ და $\alpha' < 0$. ამ შემთხვევაში $\alpha\alpha'$ ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით

$$\alpha\alpha' = -[\alpha(-\alpha')].$$

ბ) $\alpha < 0$ და $\alpha' > 0$. ამ შემთხვევაში

$$\alpha\alpha' = -[(-\alpha)\alpha'].$$

გ) $\alpha < 0$ და $\alpha' < 0$. ამ შემთხვევაში

$$\alpha\alpha' = (-\alpha)(-\alpha').$$

თუ $\alpha = 0$ ან $\alpha' = 0$, მაშინ განსაზღვრის მიხედვით

$$\alpha\alpha' = 0.$$

ადვილად მტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

1. $\alpha \,.\, 1 = 1.$
2. $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha$ (გამრავლების კომუტატიურობის კანონი).
3. თუ α, α' და α'' ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ $(\alpha\alpha')\alpha'' = \alpha(\alpha'\alpha'')$ (გამრავლების ასოციურობის კანონი).
4. $\alpha(\alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha''$ (დისტრიბუტიულობის კანონი).

თეორემა 17. თუ α ირაციონალური რიცხვია, მაშინ

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1. \tag{19.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, α რიცხვი წარმოდგენილია $A|B$ განკვეთით. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha > 0$. მაშინ $\frac{1}{\alpha}$ განისაზღვრება $A'|B'$ განკვეთით (იხ. § 14). aa' და bb' სახის რიცხვთა სიმრავლეები აღვნიშნოთ შესაბამისად P და Q სიმბოლოებით, სადაც $a \in A$, $b \in B$, $a' \in A'$, $b' \in B'$, ამასთანავე a და a' დადებითი რიცხვებია.

ცხადია, P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Q სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე. დავამტკიცოთ, რომ P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია ერთზე. ავიღოთ P სიმრავლის ნებისმიერი რიცხვი

$$p = a_0 a_0'; \ a_0 \in A, \ a_0' \in A'.$$

მაგრამ $a_0' = \frac{1}{b_0}$, სადაც $b_0 \in B$. მაშასადამე, $p = \frac{a_0}{b_0}$ და რაკი $a_0 < b_0$, ამიტომ $p < 1$. ამრიგად, P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია ერთზე და ამიტომაც

$$\sup P \leqslant 1. \tag{19.3}$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\sup Q \geqslant 1. \tag{19.4}$$

შემდეგ, რადგანაც

$$\sup P = \inf Q,$$

ამიტომ (19.3) და (19.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (19.2) ტოლობის მართებულობა.

თუ $\alpha < 0$, მაშინ

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = (-\alpha) \cdot \frac{1}{(-\alpha)} = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ, არასაკუთრივი $-\infty$ და $+\infty$ რიცხვებისათვის, განსაზღვრის მიხედვით, გვაქვს:

$$(\pm \infty) \cdot a = a \cdot (\pm \infty) = \pm \infty, \text{ თუ } a > 0,$$

$$(\pm \infty) \cdot a = a \cdot (\pm \infty) = \mp \infty, \text{ თუ } a < 0.$$

§ 20. ორი ნამდვილი რიცხვის განაყოფი

გაყოფის ოპერაცია წარმოადგენს გამრავლების ოპერაციის შებრუნებულ ოპერაციას. ამიტომ α რიცხვის α' რიცხვზე გაყოფა ($\alpha' \neq 0$) ისეთი მესამე α'' რიცხვის მოძებნას ნიშნავს, რომელიც α'-ზე გამრავლებული მოგვცემს α რიცხვს.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ასეთი α'' რიცხვი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 18. ნებისმიერი ორი α და β ნამდვილი რიცხვისათვის, სადაც $\beta \neq 0$, არსებობს ისეთი ნამდვილი x რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\beta x = \alpha.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\xi = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

თუ გამოვიყენებთ მე-17 თეორემას გვექნება

$$\beta\xi = \beta\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) = \beta\left(\frac{1}{\beta} \cdot \alpha\right) = \left(\beta \cdot \frac{1}{\beta}\right)\alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

მაშასადამე, $\alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$ საძიებელი რიცხვია. ამ რიცხვს ეწოდება α და β რიცხვების განაყოფი და აღინიშნება $\dfrac{\alpha}{\beta}$ სიმბოლოთი.

დაბოლოს ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ რაციონალურ რიცხვთა ყველა ძირითად თვისებას, რომლებზედაც აგებულია ელემენტარული ალგებრა, ადგილი აქვს ნამდვილი რიცხვებისათვისაც. მაშასადამე, ნამდვილი რიცხვებისათვის შენარჩუნებულია ალგებრის ყველა წესი, რომლებიც ეხება არითმეტიკულ ოპერაციებს და ტოლობებისა და უტოლობების შეხამებას.

§ 21. n-ური ხარისხის ფესვი ნამდვილი რიცხვიდან

ვთქვათ, მოცემულია დადებითი α რიცხვი და მთელი დადებითი რიცხვი n. ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი ნამდვილი x რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$x^n = \alpha.$$

პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 19. მოცემული დადებითი α რიცხვისათვის და მთელი დადებითი n-სათვის არსებობს ისეთი დადებითი ξ რიცხვი, რომ

$$\xi^n=\alpha. \tag{21.1}$$

დამტკიცება. რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლე დავყოთ ორ A და B კლასად შემდეგი წესის მიხედვით: A კლასს მივაკუთვნოთ ყველა უ რყოფითი რაციონალური რიცხვი, ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა n-ური ხარისხი α-ზე ნაკლებია, B კლასს კი დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ A და B კლასად აკმაყოფილებს განკვეთის სამივე პირობას. მაშასადამე, გვაქვს $A|B$ განკვეთა, რომელიც განსაზღვრავს რაიმე ნამდვილ ξ რიცხვს. დავამტკიცოთ, რომ

$$\xi^n=\alpha.$$

ამისათვის განვიხილოთ ორი P და Q სიმრავლე; P შედგება a^n სახის რიცხვებისაგან, სადაც $a>0$ და $a\in A$, Q კი b^n სახის რიცხვებისაგან, სადაც $b\in B$. ცხადია, P სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია Q სიმრ ვლის ნებისმიერ რიცხვზე და გარდა ამისა, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ორი რიცხვი $a^n\in P$ და $b^n\in Q$, რომ

$$b^n-a^n<\varepsilon.$$

მართლაც, B სიმრავლეში ავიღოთ რაიმე b_0 რიცხვი. A და B კლასში ავიღოთ შესაბამისად ისეთი ორი რიცხვი a და b, რომ

$$b-a<\frac{\varepsilon}{nb_0^{n-1}},$$

მასთან $b\leqslant b_0$, $a>0$. მაგრამ

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\dots+b\,a^{n-2}+a^{n-1})<$$

$$<\frac{\varepsilon}{nb_0^{n-1}}\cdot nb_0^{n-1}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, მე-12 თეორემის თანახმად

$$\sup P=\inf Q.$$

შემდეგ, რაკი $a^n<\alpha\leqslant b^n$, ამიტომ

$$\alpha=\sup P=\inf Q.$$

მეორე მხრით,

$$a^n < \xi^n \leqslant b^n.$$

ამიტომ

$$\xi^n = \sup P = \inf Q$$

და, მაშასადამე, $\xi^n = \alpha$. თეორემა დამტკიცებულია.

ξ რიცხვს, რომელიც (21.1) ტოლობას აკმაყოფილებს, ეწოდება n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი α რიცხვიდან და აღინიშნება $\sqrt[n]{\alpha}$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha.$$

შენიშვნა. თუ $\alpha > 0$ და n ლუწი რიცხვია, მაშინ ξ რიცხვის სიმეტრიული $-\xi$ რიცხვიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(-\xi)^n = \alpha.$$

მაშასადამე, $x^n = \alpha$ განტოლებას, როცა n ლუწია და $\alpha > 0$, აქვს ორი ნამდვილი ამონახსნი

$$x = \pm \sqrt[n]{\alpha}.$$

§ 22. ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე

დადებითი α რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე ეწოდება თვით α რიცხვს; თუკი α უარყოფითია, მაშინ მისი აბსოლუტური სიდიდეა $-\alpha$ რიცხვი. ნულის აბსოლუტური სიდიდე ნულია. α რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე აღინიშნება $|\alpha|$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრის მიხედვით

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{თუ } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha & \text{თუ } \alpha < 0. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობების მართებულობა

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|.$$

ცხადია, რომ

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^2}. \tag{22.1}$$

ამრიგად, ნულისაგან განსხვავებული რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე ყოველთვის დადებითი რიცხვია. ნამდვილი α რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$|-\alpha| = |\alpha|.$$

თეორემა 20. უტოლობა $|a|<\varepsilon$, სადაც $\varepsilon>0$, ტოლფასია უტოლობებისა

$$-\varepsilon<a<\varepsilon. \tag{22.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a|<\varepsilon. \tag{22.3}$$

თუ $a\geqslant 0$. მაშინ $|a|=a$ და (22.3) უტოლობა ასე გადაიწერება

$$a<\varepsilon. \tag{22.4}$$

თუკი $a<0$, მაშინ $|a|=-a$ და ამიტომ გვექნება $-a<\varepsilon$. აქედან

$$-\varepsilon<a. \tag{22.5}$$

(22.4) და (22.5) უტოლობების გაერთიანებით მივიღებთ (22.2) უტოლობებს.

ახლა ვთქვათ, მართებულია (22.2) უტოლობები. ეს უტოლობები ასე გადავწეროთ

$$-a<\varepsilon,\ a<\varepsilon. \tag{22.6}$$

რადგანაც $|a|=a$, როცა $a\geqslant 0$ და $|a|=-a$, როცა $a<0$, ამიტომ (22.6) უტოლობათა ძალით გვექნება (22.3) უტოლობა. ამრიგად, (22.2) და (22.3) უტოლობები ერთმანეთის ტოლფასია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $|a|=\varepsilon$, მაშინ $a=\pm\varepsilon$ და, მაშასადამე, მე-20 თეორემის თანახმად მართებულია

თეორემა 21. თანაფარდობანი

$$|a|\leqslant\varepsilon \text{ და } -\varepsilon\leqslant a\leqslant\varepsilon$$

ერთმანეთის ტოლფასია.

თეორემა 22. თუ $|a|\geqslant\varepsilon$, სადაც $\varepsilon>0$, მაშინ ან $a\leqslant-\varepsilon$ ან $a\geqslant\varepsilon$.

დამტკიცება. თუ $a>0$, მაშინ $a\geqslant\varepsilon$, თუკი $a<0$, მაშინ $-a\geqslant\varepsilon$. აქედან $a\leqslant-\varepsilon$. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ უტოლობა

$$|x-7|<3. \tag{22.7}$$

ამოხსნა. მე-20 თეორემის თანახმად, მოცემული უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობებისა

$$-3<x-7<3.$$

აქედან ვღებულობთ

$$4 < x < 10.$$

მაშასადამე, (22.7) უტოლობას აკმაყოფილებს]4, 10[ინტერვალის ყველა რიცხვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ x-ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $\sqrt{4-x^2}$ გამოსახულება გვაძლევს ნამდვილ რიცხვებს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ გამოსახულებას აქვს ნამდვილი მნიშვნელობა, როცა $4-x^2 \geqslant 0$. აქედან $x^2 \leqslant 4$. თუ ვისარგებლებთ (22.1) ტოლობით და მე-20 თეორემით, გვექნება

$$|x| \leqslant 2 \quad \text{ანუ} \quad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

ამრიგად, ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს $[-2, 2]$ სეგმენტის ნებისმიერი რიცხვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ x-ის მნიშვნელობები, რომელთათვის $\sqrt{x^2-16}$ გამოსახულებას ექნება ნამდვილი მნიშვნელობები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, x უნდა აკმაყოფილებდეს უტოლობას

$$x^2 - 16 \geqslant 0.$$

აქედან $x^2 \geqslant 16$. თუ ვისარგებლებთ (22.1) ტოლობით და 22-ე თეორემით, გვექნება

$$x \geqslant 4 \text{ და } x \leqslant -4.$$

მაშასადამე, $\sqrt{x^2-16}$ გამოსახულებას ექნება ნამდვილი მნიშვნელობა ნებისმიერი x-თვის, რომელიც აღებულია $]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$ სიმრავლიდან.

თეორემა 23. რამდენიმე რიცხვის ჯამის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება შესაკრებთა აბსოლუტური სიდიდეების ჯამს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილი რიცხვები

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|. \qquad (22.8)$$

რადგანაც

$$\begin{gathered} -|\alpha_1| \leqslant \alpha_1 \leqslant |\alpha_1|, \\ -|\alpha_2| \leqslant \alpha_2 \leqslant |\alpha_2|, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -|\alpha_n| \leqslant \alpha_n \leqslant |\alpha_n|, \end{gathered}$$

ამიტომ ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$-(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)\leqslant\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\leqslant$$
$$\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|.$$

მაგრამ ეს უტოლობები ტოლფასია (22.8) უტოლობისა. თეორემა დამტკიცებულია.

(22.8) დამოკიდებულებაში ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც ყველა α_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ დადებითია ან ყველა არადადებითია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი α და β რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა

$$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

თეორემა 24. ნებისმიერი α და β რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა

$$||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha-\beta|. \tag{22.9}$$

დამტკიცება. რადგანაც $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)$, ამიტომ 23-ე თეორემის თანახმად,

$$|\alpha|\leqslant|\beta|+|\alpha-\beta|.$$

აქედან

$$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|. \tag{22.10}$$

თუ α და β რიცხვებს როლებს შევუცვლით, (22.10) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$|\beta|-|\alpha|\leqslant|\beta-\alpha|=|\alpha-\beta|. \tag{22.11}$$

(22.10) და (22.11) უტოლობებიდან გამომდინარეობს (22.9) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25. რამდენიმე რიცხვის ნამრავლის აბსოლუტური სიდიდე მამრავლთა აბსოლუტური სიდიდეების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, α და β ნამდვილი რიცხვებია. თუ $\alpha>0$, $\beta>0$, მაშინ

$$|\alpha\beta|=\alpha\beta=|\alpha|\cdot|\beta|.$$

თუკი $\alpha>0$ და $\beta<0$, მაშინ

$$|\alpha\beta|=-(\alpha\beta)=\alpha\cdot(-\beta)=|\alpha|\cdot|\beta|.$$

დასასრულ, თუ $\alpha<0$ და $\beta<0$, მაშინ

$$|\alpha\beta|=\alpha\beta=(-\alpha)(-\beta)=|\alpha|\cdot|\beta|.$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია ორი ნამდვილი რიცხვის შემთხვევაში.

საზოგადოდ, თუ მოცემულია ნამდვილი რიცხვები $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცებთ, რომ

$$|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \ldots |\alpha_n|.$$

შედეგი. თუ n მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n.$$

თეორემა 26. ორი α და β რიცხვის ფარდობის აბსოლუტური სიდიდე უდრის ამ რიცხვების აბსოლუტურ სიდიდეთა ფარდობას:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\beta \neq 0). \tag{22.12}$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma,$$

გვექნება $\alpha = \beta\gamma$. აქედან

$$|\alpha| = |\beta| \cdot |\gamma|.$$

მაშასადამე,

$$|\gamma| = \frac{|\alpha|}{|\beta|},$$

ე. ი. მართებულია (22.12) ტოლობა.

თეორემა 27. ნებისმიერი ორი x და y ნამდვილი რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

სადაც $\rho(x, y)$ არის მანძილი x და y შორის.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x < y$ და დავამტკიცოთ

$$\rho(x, y) = y - x$$

ტოლობის მართებულობა.

ვთქვათ, A არის ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც x-ზე ნაკლებია, B კი ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც x-ზე მეტია. შემდეგ, A' იყოს ისეთი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც y-ზე ნაკლებია, B' კი ისეთი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც y'-ზე მეტია.

აღვნიშნოთ E ასოთი $a'-b$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, H-ით კი $b'-a$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც

$$x<b<a'<y,\ a\in A,\ b\in B,\ a'\in A',\ b'\in B'.$$

ნახ. 10.

ცხადია, რომ

$$\inf H=y-x. \tag{22.13}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\inf H=\sup E. \tag{22.14}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ამ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვები

$$a_0\in A,\ b_0\in B,\ a_0'\in A',\ b_0'\in B',$$

რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$b_0-a_0<\frac{\varepsilon}{2},\quad b_0'-a_0'<\frac{\varepsilon}{2},\quad a_0<x<b_0<a_0'<b_0'. \tag{22.15}$$

რადგანაც

$$b_0'-a_0=(b_0-a_0)+(a_0'-b_0)+(b_0'-a_0'),$$

ამიტომ (22.15) უტოლობების თანახმად

$$(b_0'-a_0)-(a_0'-b_0)=(b_0'-a_0')+(b_0-a_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

რადგანაც $b_0'-a_0$ და $a_0'-b_0$ რაციონალური რიცხვებია, ამიტომ $(b_0'-b_0)-(a_0'-b_0)$ სხვაობა არის მანძილი იმ $(b_0'-a_0)$ და $(a_0'-b_0)$ წერტილებს შორის, რომლებიც ეკუთვნიან შესაბამისად H და E სიმრავლეებს.

ამრიგად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს H და E სიმრავლეებში ისეთი ორი წერტილი $b_0'-a_0$ და $a_0'-b_0$, რომ მათ შორის მანძილი ε-ზე ნაკლებია. ამის გარდა, E სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია H სიმრავლის ყოველ რიცხვზე. ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად მართებულია (22.14) ტოლობა. (22.13) და (22.14) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sup E=y-x.$$

მაგრამ

$$\sup E = \rho(x, y).$$

მაშასადამე,

$$\rho(x, y) = y - x$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 23. მნიშვნელოვანი უტოლობები

თეორემა 28. თუ მთელი n რიცხვი ერთზე მეტია, ხოლო $a > -1$ და $a \neq 0$, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$(1+a)^n > 1+na. \qquad (23.1)$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ (23.1) უტოლობა მართებულია, როდესაც $n=2$. მართლაც,

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2.$$

მაგრამ დადებითი a^2 რიცხვის უკუგდებით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შემცირდება და მივიღებთ

$$(1+a)^2 > 1+2a,$$

რაც (23.1) უტოლობას წარმოადგენს, როდესაც $n=2$.

ახლა დავამტკიცოთ (23.1) უტოლობა ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის, რომელიც ორზე მეტია. ამისათვის მივმართოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს. ვთქვათ, (23.1) უტოლობა მართებულია რაიმე ნებისმიერი $n=k$ რიცხვისათვის და ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებულია $n=k+1$ რიცხვისათვის. დაშვების თანახმად

$$(1+a)^k > 1+ka.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $1+a$ რიცხვზე, გვექნება

$$(1+a)^{k+1} > (1+ka)(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2.$$

მაგრამ ka^2 დადებითია და მისი უკუგდებით მარჯვენა ნაწილი შემცირდება, რის გამო გვაქვს

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a,$$

რაც (23.1) უტოლობას წარმოადგენს, როცა $n=k+1$. მაგრამ (23.1) უტოლობის მართებულობა დავამტკიცეთ, როცა $n=2$. მაშასადამე, იგივე უტოლობა მართებულია, როცა $n=2+1=3$ და ა. შ. თეორემა დამტკიცებულია.

(23.1) უტოლობას ეწოდება ი. ბერნულის (Ich. Bernoulli) უტოლობა.

შედეგი. თუ $b>1$, მაშინ ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის, რომელიც ერთზე მეტია, მართებულია უტოლობა

$$\sqrt[n]{b}-1<\frac{b-1}{n}. \tag{23.2}$$

მართლაც, ბერნულის უტოლობის თანახმად

$$b=\left[1+\left(\sqrt[n]{b}-1\right)\right]^n>1+n\left(\sqrt[n]{b}-1\right).$$

აქედან მიიღება (23.2) უტოლობა.

თეორემა 29. თუ მთელი რიცხვი n ორზე მეტია, ხოლო a დადებითი რიცხვია, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$(1+a)^n>1+na+\frac{n^2}{4}a^2. \tag{23.3}$$

დამტკიცება. (23.3) უტოლობა მართებულია, როცა $n=3$. მართლაც,

$$(1+a)^3=1+3a+3a^2+a^3.$$

მაგრამ დადებითი a^3 რიცხვის უკუგდებით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შემცირდება და მივიღებთ

$$(1+a)^3>1+3a+3a^2>1+3a+\frac{3^2}{4}a^2,$$

რაც (23.3) უტოლობას წარმოადგენს, როდესაც $n=3$.

ახლა დავამტკიცოთ (23.3) უტოლობის მართებულობა ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის, რომელიც სამს აღემატება. ამისათვის მივმართოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს. ვთქვათ (23.3) უტოლობა მართებულია რომელიმე ნებისმიერი $n=k$ რიცხვისათვის, რომელიც სამს აღემატება და ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებულია $n=k+1$ რიცხვისათვის. დაშვების თანახმად

$$(1+a)^k>1+ka+\frac{k^2}{4}a^2.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $1+a$ რიცხვზე, გვექნება

$$(1+a)^{k+1} > \left(1+ka+\frac{k^2}{4}a^2\right)(1+a) = 1+ka+$$

$$+\frac{k^2}{4}a^2+a+ka^2+\frac{k^2}{4}a^3.$$

მაგრამ $\frac{k^2}{4}a^3$ დადებითია და მისი უკუგდებით მარჯვენა ნაწილი შემცირდება, რის გამოც გვაქვს

$$(1+a)^{k+1} > 1+ka+\frac{k^2}{4}a^2+a+ka^2 = 1+(k+1)a+$$

$$+\frac{k^2+4k}{4}a^2 > 1+(k+1)a+\frac{(k+1)^2}{4}a^2,$$

რაც (23.3) უტოლობას წარმოადგენს, როცა $n=k+1$. მაგრამ (23.3) უტოლობის მართებულობა დავამტკიცეთ, როცა $n=3$. მაშასადამე, იგივე უტოლობა მართებულია, როცა $n=3+1=4$ და ა. შ. თეორემა დამტკიცებულია.

(23.3) უტოლობას ვუწოდებთ ბერნულის განზოგადებულ უტოლობას.

შედეგი. თ უ $n \geqslant 2$ დ ა a დ ა დ ე ბ ი თ ი რ ი ც ხ ვ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$(1+a)^n > \frac{a^2}{4}n^2. \tag{23.4}$$

(23.1), (23.2), (23.3) და (23.4) უტოლობებს გამოვიყენებთ შემდეგში.

24. ხარისხი ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლით

ვთქვათ, α დადებითი რიცხვია, ხოლო $r=\frac{m}{n}$ წარმოადგენს რაიმე დადებით რაციონალურ რიცხვს. განსაზღვრის მიხედვით

$$\alpha^r = \sqrt[n]{\alpha^m}.$$

თუ r უარყოფითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ

$$\alpha^r = \frac{1}{\alpha^{-r}},$$

ხოლო $\alpha^0 = 1$.

მას შემდეგ, რაც შემოყვანილია ხარისხის ცნება ნებისმიერი რაციონალური მაჩვენებლით, ასეთი ხარისხებისათვის მართებულია ის წესები, რომლებიც ცნობილია ელემენტარულ ალგებრაში. მაგალითად, თუ α და β დადებითი რიცხვებია, ხოლო r და r' წარმოადგენენ ნებისმიერ რაციონალურ რიცხვებს, მაშინ

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \ \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{rr'}, \ (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}.$$

მარტივად მტკიცდება შემდეგი თვისებები:

1. თუ r და r' რაციონალური რიცხვებია, ამასთანავე $r<r'$, მაშინ ერთზე მეტი ნებისმიერი α რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა

$$\alpha^r < \alpha^{r'}.$$

2. თუ დადებითი α და β რიცხვები ისეთია, რომ $\alpha<\beta$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური r რიცხვისათვის

$$\alpha^r < \beta^r.$$

ახლა განვსაზღვროთ ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით. ავიღოთ ნამდვილი რიცხვი $\xi > 1$. ვთქვათ, α არის ირაციონალური რიცხვი, რომელიც წარმოდგენილია $A|B$ განკვეთით. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ორი სიმრავლე

$$P = \{\xi^a\} \text{ და } Q = \{\xi^b\},$$

სადაც $a \in A$, $b \in B$. მართებულია შემდეგი

თეორემა 30. P სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, Q კი ქვემოდან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sup P = \inf Q. \tag{24.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ B კლასის რაიმე b_0 რიცხვი. მაშინ A კლასის ნებისმიერი a რიცხვისათვის გვექნება

$$\xi^a < \xi^{b_0},$$

ე. ი. P სიმრავლის ნებისმიერი რიცხვი ნაკლებია ξ^{b_0} რიცხვზე, ამიტომ P ზემოდან შემოსაზღვრულია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ Q სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან.

დასასრულ დავამტკიცოთ (24.1) ტოლობის მართებულობა. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და შევარჩიოთ მთელი დადებითი n რიცხვი ისე, რომ დაცული იყოს უტოლობა

$$\xi^{b_0} \cdot \frac{\xi - 1}{n} < \varepsilon. \qquad (24.2)$$

მე-5 თეორემის შედეგის თანახმად, აღებული n რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვები $a \in A$ და $b \in B$, რომ

$$b - a < \frac{1}{n}.$$

შემდეგ

$$\xi^b - \xi^a = \xi^a(\xi^{b-a} - 1) < \xi^a\left(\xi^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \xi^{b_0}\left(\sqrt[n]{\xi} - 1\right).$$

მაგრამ ბერნულის უტოლობის შედეგის თანახმად

$$\sqrt[n]{\xi} - 1 < \frac{\xi - 1}{n}.$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (24.2) უტოლობას, გვექნება

$$\xi^b - \xi^a < \xi^{b_0} \cdot \frac{\xi - 1}{n} < \varepsilon,$$

ე. ი.

$$\rho(\xi^a, \xi^b) < \varepsilon.$$

ამრიგად, შესრულებულია მე-12 თეორემის ორივე პირობა და ამიტომ მართებულია (24.1) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 24. ξ რიცხვის ξ^α ხარისხი ირაციონალური α მაჩვენებლით ეწოდება $\sup\{\xi^a\}$ რიცხვს.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ r და r' რაციონალური რიცხვებია და $r < \alpha < r'$, მაშინ

$$\xi^r < \xi^\alpha < \xi^{r'} \quad (\xi > 1).$$

თუ $0 < \xi < 1$, მაშინ ξ^α ხარისხს ირაციონალური α მაჩვენებლით განვსაზღვრავთ ასე

$$\xi^\alpha = \frac{1}{\eta^\alpha},$$

სადაც

$$\eta = \frac{1}{\xi}.$$

ამრიგად, თუ a ერთისაგან განსხვავებული დადებითი რიცხვია, მაშინ ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის განსაზღვრულია a^x ხარისხი.

თეორემა 31. თუ x და y ისეთი ნამდვილი რიცხვებია, რომ $x<y$, მაშინ ერთისაგან განსხვავებული ნებისმიერი დადებითი a რიცხვისათვის გვექნება

$$a^x < a^y, \text{ როცა } a > 1, \tag{24.3}$$

$$a^x > a^y, \text{ როცა } a < 1. \tag{24.4}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $a>1$ და ავიღოთ ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$x<r<y.$$

მაშინ გვექნება

$$a^x<a^r<a^y.$$

ე. ი. მართებულია (24.3) უტოლობა.

ახლა ვთქვათ, $a<1$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $b=\frac{1}{a}$, გვექნება

$$b^x<b^y,$$

ე. ი.

$$\frac{1}{a^x}<\frac{1}{b^x},$$

აქედან მიიღება (24.4) უტოლობა.

თეორემა 32. თუ ξ რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ ყოველი ნამდვილი α და α' რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\xi^{\alpha}\,.\,\xi^{\alpha'}=\xi^{\alpha+\alpha'}. \tag{24.5}$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $\xi>1$. ვთქვათ, α და α' რიცხვები წარმოდგენილია $A|B$ და $A'|B'$ განკვეთებით შესაბამისად. აღვნიშნოთ P ასოთი $a+a'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც $a\in A$, $a'\in A'$, ხოლო Q-თი $b+b'$ სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც $b\in B$, $b'\in B'$. ცხადია, რომ

$$a<\alpha\leqslant b,\; a'<\alpha'\leqslant b',$$

$$a+a'<\alpha+\alpha'\leqslant b+b'.$$

მაშასადამე,

$$\xi^a<\xi^\alpha\leqslant\xi^b,\; \xi^{a'}<\xi^{\alpha'}\leqslant\xi^{b'} \tag{24.6}$$

$$\xi^{a+a'}<\xi^{\alpha+\alpha'}\leqslant\xi^{b+b'}. \tag{24.7}$$

თუ (24.6) უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\xi^{a+a'} < \xi^{\alpha} \cdot \xi^{\alpha'} \leqslant \xi^{b+b'}. \tag{24.8}$$

მაგრამ რაკი

$$\sup\{\xi^{a+a'}\} = \inf\{\xi^{b+b'}\},$$

ამიტომ (24.7) და (24.8) დამოკიდებულებებიდან მივიღებთ (24.5) ტოლობას.

ახლა ვთქვათ, $\xi < 1$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\eta = \frac{1}{\xi},$$

გვექნება

$$\eta^{\alpha} \cdot \eta^{\alpha'} = \eta^{\alpha+\alpha'},$$

ე. ი.

$$\frac{1}{\xi^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\xi^{\alpha'}} = \frac{1}{\xi^{\alpha+\alpha'}}.$$

აქედან მიიღება (24.5) ტოლობა.

დასასრულ, თუ $\xi = 1$, მაშინ (24.5) ტოლობა ტრივიალურია. ამრიგად, თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 33. თუ a და b დადებითი რიცხვებია, x და y კი წარმოადგენენ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვებს, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

§ 25. ლოგარითმი

განვიხილოთ ორი ნებისმიერი დადებითი α და β რიცხვი, ამასთანავე $\alpha \neq 1$. მართებულია შემდეგი

თეორემა 34. არსებობს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი γ, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\alpha^{\gamma} = \beta. \tag{25.1}$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $\alpha > 1$. თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი r, რომ $\alpha^r = \beta$, მაშინ r წარმოადგენს საძიებელ რიცხვს.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ასეთი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს. დავყოთ რაციონალურ რიცხვთა R სიმრავლე ორ A და B კლასად შემდეგი წესით: A კლასში მოვათავსოთ ისეთი რაციონა-

ლური a რიცხვები, რომელთათვის $\alpha^a < \beta$, B კლასში კი დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. ცხადია, B-ში შევა ისეთი რაციონალური b რიცხვები, რომელთათვის $\alpha^b > \beta$.

დავამტკიცოთ, რომ A და B კლასები ცარიელი არაა. ავიღოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი n, რომ

$$n > \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

ბერნულის უტოლობის თანახმად,

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \cdot (\alpha - 1) = \beta.$$

მაშასადამე, $\alpha^n \in B$ და ამიტომ B კლასი ცარიელი არაა. ახლა ავიღოთ მთელი დადებითი რიცხვი n იმ პირობით, რომ

$$n > \frac{1}{\beta(\alpha - 1)}. \tag{25.2}$$

მაშინ (25.2) და ბერნულის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha - 1)} < \beta.$$

მაშასადამე, $\alpha^{-n} \in A$. აქედან გამომდინარეობს, რომ A ცარიელი არაა.

შემდეგ ცხადია, რომ A კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია B კლასის ნებისმიერ რიცხვზე. დასასრულ, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ A კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. მაშასადამე, გვაქვს $A|B$ განკვეთა. ამ განკვეთით წარმოდგენილი ნამდვილი რიცხვი ალვნიშნოთ γ-თი. ხარისხის განსაზღვრის მიხედვით, გვაქვს

$$\alpha^a < \alpha^\gamma < \alpha^b, \quad a \in A, \ b \in B. \tag{25.3}$$

მეორე მხრივ

$$\alpha^a < \beta < \alpha^b, \quad a \in A, \ b \in B.$$

თუ განვიხილავთ $P = \{\alpha^a\}$ და $Q = \{\alpha^b\}$ სიმრავლეებს, 30-ე თეორემის თანახმად გვექნება

$$\sup P = \inf Q$$

და, მაშასადამე,

$$\alpha^\gamma = \beta.$$

თეორემა დამტკიცებულია, როცა $\alpha > 1$.

თუ $\alpha < 1$, მაშინ $\frac{1}{\alpha} > 1$ და ზემოდამტკიცებულის თანახმად, არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი γ, რომ

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma} = \beta.$$

აქედან $\alpha^{-\gamma} = \beta$. თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 25. (25.1) ტოლობით განსაზღვრულ γ რიცხვს ეწოდება β რიცხვის ლოგარითმი α ფუძით და იგი $\lg_{\alpha}\beta$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

§ 26. სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება

ყოველი სიდიდე გამოისახება რიცხვით ან რიცხვთა სისტემით ტექნიკაში ამ რიცხვს ხშირად განსაზღვრავენ დაკვირვებების ან გაზომვების შედეგად.

არც ერთი გაზომვა არ შეიძლება ჩატარდეს აბსოლუტური სიზუსტით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთი და იმავე სიდიდის რამდენჯერმე გაზომვისას მიიღება სხვადასხვა რიცხვი. გაზომვათა ამ შედეგების ერთმანეთისაგან განსხვავების მიხედვით აფასებენ ჩვეულებრივ გაზომვის სიზუსტეს. ბუნებისმეტყველებასა და საინჟინრო საქმეში მათემატიკის გამოყენებისას ყოველთვის საქმე გვაქვს გამოთვლებთან. ცხადია, თუ მონაცემები ზუსტი არ არის, მაშინ მათი საშუალებით მიღებული შედეგებიც ზუსტი არ იქნება.

ყოველი ნაკეთობისათვის არსებობს გარკვეული „დაშვება", ე. ი. პროექტიდან გადახრის ის საზღვრები, რომლის დაცვისას ნაკეთობა ვარგისად ითვლება. სწორედ ამიტომ საჭირო არ არის ყოველი გამოთვლა მაქსიმალურად ზუსტად იყოს შესრულებული ზუსტი ფორმულების მიხედვით. პირიქით, შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულებით, რომელთა შესახებ წინასწარ ვიცით, რომ ისინი ზუსტი არ არის, აგრეთვე ვისარგებლოთ გამოთვლების წესებით, რომლებიც აგრეთვე ზუსტ შედეგს არ იძლევა, მაგრამ დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ მიღებული შედეგები იმაზე მეტად არ არის გადახრილი მოცემული პროექტისაგან, რის უფლებასაც „დაშვება" იძლევა.

ვთქვათ, A არის რაიმე სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობა, ან უბრალოდ რაიმე რიცხვი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 26. a რიცხვს ეწოდება A რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა α ცდომილებით, თუ

$$A-a=\alpha.$$

α ცდომილების აბსოლუტურ სიდიდეს $|\alpha|$ ეწოდება ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა.

მიახლოებითი ცდომილების აღსანიშნავად იხმარება სიმბოლო $\simeq$; ასე რომ $A\simeq a$.

a რიცხვი შეიძლება იყოს ნაკლები ან მეტი A-ზე. პირველ შემთხვევაში $\alpha>0$ და მაშინ a წარმოადგენს A რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით, მეორე შემთხვევაში კი $\alpha<0$ და a იქნება A რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ქარხანაში 1572 მუშაა. ესაა მუშათა ზუსტი რიცხვი, $A=1572$. თუ ამ რიცხვს დავამრგვალებთ 1570-მდე, მაშინ $a=1570$ იქნება მუშების მიახლოებითი რიცხვი, ხოლო $\alpha=A-a=$ $=1572-1570=2$ არის აბსოლუტური ცდომილება.

ჩვენს მაგალითში 1570 წარმოადგენს მუშათა რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით, ვინაიდან $\alpha>0$.

უფრო ხშირად ცნობილი არ არის A რიცხვი, რომელიც გამოსახავს შესასწავლ სიდიდეს ყოველგვარი შეცდომის გარეშე და არც აბსოლუტური ცდომილება ვიცით, მაგრამ შეგვიძლია დავასახელოთ ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|\alpha|\leqslant\delta. \tag{26.1}$$

ცხადია, თუ (26.1) უტოლობას აკმაყოფილებს რაიმე დადებითი δ რიცხვი, მაშინ მას დააკმაყოფილებს ყოველი δ' რიცხვი, რომელიც δ-ს აღემატება.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 27. მიახლოებითი a რიცხვის ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ეწოდება რაც შეიძლება ნაკლებ δ რიცხვს,რომლის შესახებ გარკვეულია, რომ ეს რიცხვი აბსოლუტურ ცდომილებაზე ნაკლები არ არის, ე. ი. $|A-a|\leqslant\delta$.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ სიდიდის მარტო აბსოლუტური ცდომილებისა და ზღვრული ცდომილების ცოდნით, საზოგადოდ, ვერ დავახასიათებთ მიღებული შედეგის ღირსებას. მაგალითად, თუ რაიმე სიგრძის გაზომვისას დაშვებულია 1 მმ აბსოლუტური ცდომილება, კიდევ არ შეიძლება იმის თქმა, გაზომვა კარგადაა ჩატარებული თუ ცუდად; საჭიროა ვიცოდეთ როგორია თვით გასაზომი სიდიდე. თუ ზემოთქმული ეხება ორ ქალაქს შორის მან-

ძილს, მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ შედეგი მიღებულია აქამდე მიუღწეველი სიზუსტით. თუკი ზემოთქმული ეხება წვრილი მავთულის დიამეტრის გაზომვას, მაშინ ალბათ ყველა იტყვის, რომ გაზომვა არვარგა. შედეგის ღირსება გაცილებით უკეთესია ეგრეთ წოდებული ფარდობითი ცდომილების მოცემით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 28. აბსოლუტური $|\alpha|$ ცდომილებისა და მიახლოებითი a მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდის ფარდობას ეწოდება ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა.

თუ ფარდობით ცდომილებას აღვნიშნავთ α^*-ით, მაშინ

$$\alpha^* = \frac{|\alpha|}{|a|}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. საწარმოში 1005 მუშაა. დავამრგვალოთ მუშათა რიცხვი 1000-მდე. მაშასადამე, $A = 1005$, $a = 1000$. აბსოლუტური ცდომილება $|\alpha| = |A - a| = 5$. ფარდობითი ცდომილება იქნება

$$\alpha^* = \frac{|\alpha|}{|a|} = \frac{5}{1000} = 0{,}005.$$

ჩვეულებრივ, ფარდობითი ცდომილება გამოისახება პროცენტებში. მაშასადამე,

$$\alpha^* = 0{,}5\,\%.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 29. ზღვრული აბსოლუტური δ ცდომილებისა და მიახლოებითი a მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდის ფარდობას ზ ღ ვ რ უ ლ ი ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ეწოდება.

თუ ზღვრულ ფარდობით ცდომილებას აღვნიშნავთ δ^*-ით, მაშინ

$$\delta^* = \frac{\delta}{|a|}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ღეროს სიგრძე გაზომილია სახაზავით, რომელსაც მილიმეტრიანი დანაყოფები აქვს. გაზომვის შედეგად მივიღებთ $a = 25{,}6$ სმ. როგორია გაზომვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება?

ა მ ო ხ ს ნ ა. შეგვიძლია მივიღოთ $\delta = 0{,}1$ სმ $= 1$ მმ, რადგან სახაზავს მილიმეტრიანი დანაყოფები აქვს. ზღვრული ფარდობითი ცდომილებაა

$$\delta^* = \frac{\delta}{|a|} = \frac{0{,}1}{25{,}6} \simeq 0{,}004.$$

ზღვრული ფარდობითი ცდომილებაც პროცენტებში იანგარიშება. მაშასადამე,

$$\delta^* = 0{,}4\%.$$

კ ი თ ხ ვ ე ბ ი

1. რას ეწოდება სიმრავლის ელემენტები? სიმრავლის ნაწილი? ცარიელი სიმრავლე?

2. რას შეისწავლის სიმრავლეთა თეორია?

3. რას ნიშნავს, რომ A და B სიმრავლეებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა?

4. როგორ სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური?

5. როგორ სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო სიმრავლე? სასრული სიმრავლე?

6. როგორ ობიექტს ეწოდება სიდიდე? მოიყვანეთ სიდიდეთა მაგალითები.

7. როგორ რიცხვებს ეწოდება რაციონალური?

8. რას ნიშნავს, რომ c რიცხვი მოთავსებულია a და b რიცხვებს შორის?

9. ორ რაციონალურ რიცხვს შორის რამდენი რაციონალური რიცხვია მოთავსებული?

10. როგორ განკვეთას ეწოდება პირველი გვარისა? მეორე გვარისა?

11. მოიყვანეთ მეორე გვარის განკვეთის მაგალითი.

12. როგორ რიცხვებს ეწოდება ნამდვილი რიცხვები?

13. მოიყვანეთ ორი ნამდვილი რიცხვის ტოლობისა და უტოლობის განსაზღვრა.

14. რას ნიშნავს, რომ ყველა ნამდვილი რიცხვის Z სიმრავლე უწყვეტია?

15. წრფის რა წერტილს ეწოდება რაციონალური წერტილი?

16. არსებობს თუ არა წრფეზე არარაციონალური წერტილი? მოიყვანეთ არარაციონალური წერტილის მაგალითი.

17. რას ეწოდება ინტერვალი? სეგმენტი? ნახევარინტერვალი? ნახევარსეგმენტი?

18. რას ეწოდება წერტილის მიდამო?

19. მოიყვანეთ ირაციონალური α რიცხვის სიმეტრიული რიცხვის განსაზღვრა.

20. მოიყვანეთ ირაციონალური α რიცხვის შებრუნებული რიცხვის განსაზღვრა.

21. რას ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის მაჟორანტი? მინორანტი?

22. რას ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზედა საზღვარი? ქვედა საზღვარი?

23. რას ნიშნავს, რომ E სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია? ქვემოდან შემოსაზღვრულია? შემოსაზღვრულია?

24. მოიყვანეთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის სიგრძის განსაზღვრა, როცა α და β რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია.

25. განსაზღვრეთ ნამდვილი α რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე. რა თეორემები იცით აბსოლუტურ სიდიდეთა შესახებ?

26. დაწერეთ ბერნულის უტოლობა, ბერნულის განზოგადებული უტოლობა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $[0, 1]$ სეგმენტსა და $[a, b]$ სეგმენტს შორის.

2. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $]a, b[$ ინტერვალსა და რიცხვთა ღერძს შორის.

3. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $[0, 1[$ და $[0, +\infty[$ სიმრავლეებს შორის.

4. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წრეწირსა და წრფეს შორის.

5. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ერთეულ რადიუსიან წრეწირსა და $[0, 1]$ სეგმენტს შორის.

6. დაამტკიცეთ, რომ ყველა კენტი რიცხვის სიმრავლე უსასრულოა.

7. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი სამის ტოლია.

8. ვთქვათ, E არის ერთზე ნაკლები ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ E სიმრავლეს არა აქვს უმცირესი და უდიდესი ელემენტი.

9. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლე $\{x\}$. აღვნიშნოთ $\{-x\}$ სიმბოლოთი მოცემული სიმრავლის რიცხვების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ

$$\text{ა) } \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad \text{ბ) } \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

10. ვთქვათ, $\{x+y\}$ არის ყველა $x+y$ ჯამის სიმრავლე, სადაც $x \in \{x\}$ და $y \in \{y\}$. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

ა) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$;

ბ) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

11. ვთქვათ, $\{xy\}$ არის ყველა xy ნამრავლის სიმრავლე, სადაც $x\in\{x\}$ და $y\in\{y\}$, ამასთანავე $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$;

ბ) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$.

12. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$|a+b+c|\geqslant|a|-(|b|+|c|).$$

13. ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

ა) $|x+3|<0{,}1$; ბ) $|x+5|\geqslant 10$; გ) $|2x-1|<|x-1|$.

პასუხი: ა) $-3{,}1<x<-2{,}9$; ბ) $x\leqslant-15$, $x\geqslant 5$; გ) $0<x<\frac{2}{3}$.

14. დაამტკიცეთ იგივეობა

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

15. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ ბერნულის უტოლობა

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\dots+a_n,$$

სადაც $a_1, a_2,\dots, a_n$ ერთი და იმავე ნიშნის რიცხვებია, რომლებიც -1 რიცხვს აღემატებიან.

16. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad(n\geqslant 2).$$

თავი II

ფუნქცია

§ 1. ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები

თუ დავაკვირდებით რაიმე მოვლენას ან თვალყურს ვადევნებთ ტექნიკური პროცესის მსვლელობას, შევნიშნავთ რომ ამ მოვლენაში ან პროცესში მონაწილე სიდიდეები სხვადასხვანაირად იქცევიან. ზოგიერთი არ იცვლება, ზოგი კი განიცდის ცვლილებას. მაგალითად, ჰერმეტულად დახურულ ჭურჭელში მოთავსებული გაზი გათბობისას მუდმივ მოცულობას ინარჩუნებს; მუდმივია აგრეთვე მისი მოლეკულების რიცხვიც, მაგრამ გაზის ტემპერატურა და დრეკადობა იცვლება.

ვინაიდან მათემატიკა მოქმედი იარაღია ზუსტი ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკისათვის, ამიტომ მან უნდა შექმნას აპარატი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს სისტემატურად შევისწავლოთ ბუნებასა და ტექნიკურ პროცესებში მონაწილე სიდიდეთა ცვალებადობა. ასეთი აპარატია სწორედ მათემატიკური ანალიზი.

მათემატიკური ანალიზის პირველი ძირითადი ცნებაა ცვლადი სიდიდის ცნება. ცვლადის შემოღებამ მათემატიკაში გადამწყვეტი გავლენა მოახდინა მის შემდგომ განვითარებაზე.

განსაზღვრა 1. *ცვლადი* ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელიც მოცემული საკითხის პირობებში ღებულობს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას. *მუდმივი* ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელსაც მოცემული საკითხის პირობებში აქვს ერთიდაიგივე რიცხვითი მნიშვნელობა.

თუ რაიმე სიდიდეს აღვნიშნავთ x ან a ასოთი, ეს არ გვაძლევს არავითარ მითითებას იმაზე, ცვლადია ეს სიდიდე თუ მუდმივი. ამიტომ სიდიდის ცვლილების ხასიათი ყოველთვის განსაკუთრებით უნდა იყოს აღნიშნული.

ერთი და იგივე სიდიდე ერთ შემთხვევაში შეიძლება იყოს მუდმივი, მეორეში კი ცვლადი. ასეთ სიდიდეს *პარამეტრი* ეწოდება. მაგალითად, თუ r რადიუსიან წრეს მისი რადიუსის შეუცვ-

ლელად ვაგორებთ წრფეზე, ამ წრის ცენტრის მდებარეობა შეიცვლება, ხოლო ფართობი πr^2 მუდმივი დარჩება. თუკი წრის ცენტრს უძრავად დავტოვებთ და r რადიუსს შევცვლით, წრის πr^2 ფართობი შეიცვლება. ამრიგად, წრის ფართობი ერთ შემთხვევაში მუდმივია, მეორეში კი—ცვლადი, და რაკი ორივე შემთხვევაში წრის ფართობია πr^2, ამიტომ r არის პარამეტრი.

არსებობს ისეთი მუდმივი სიდიდეები, რომლებიც თავის მნიშვნელობას ნებისმიერ პირობებში ინარჩუნებენ. ასეთ სიდიდეებს ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ი მ უ დ მ ი ვ ი ს ი დ ი დ ე ე ბ ი ეწოდება. მაგალითად, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი და წრეწირის სიგრძის ფარდობა დიამეტრთან აბსოლუტურად მუდმივი სიდიდეებია. აბსოლუტურად მუდმივია აგრეთვე ზოგიერთი ფიზიკური სიდიდეც, მაგალითად, გრავიტაციული მუდმივი.

ცვლადი სიდიდეები ჩვეულებრივ აღინიშნება ლათინური ანბანის უკანასკნელი ასოებით x, y, z, u, v, w, t, მუდმივი სიდიდეები კი პირველი ასოებით a, b, c,...

§ 2. ფუნქციის ცნება

ფუნქციის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. ფუნქცია მათემატიკური ანალიზის მთავარი ობიექტია. ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნების გამოყენებით შეგვიძლია ავსახოთ მატერიალურ სამყაროში არსებული დამოკიდებულებანი. ბუნებასა და ტექნიკაში არსებული რაოდენობითი დამოკიდებულებების განხილვისას ყოველთვის საქმე გვაქვს ფუნქციონალურ დამოკიდებულებებთან. ბუნების ერთ და იმავე მოვლენაში მონაწილე თითქმის ყველა სიდიდე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად არ იცვლება; ჩვეულებრივ ერთი მათგანის შეცვლა იწვევს მეორის შეცვლას.

სხვადასხვა სიდიდეს შორის წარმოშობილ დამოკიდებულებათა შესწავლას მივყავართ ფუნქციის ცნებამდე. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ გარკვეულ პირობებში ორი სიდიდე ერთმანეთთან დაკავშირებული იყოს ისე, რომ ერთი სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს მეორე სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობა. თუ გვაქვს ასეთი შესაბამისობა, მაშინ ამბობენ რომ მეორე სიდიდე პირველი სიდიდის ფუნქციაა.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. სხეულის ტემპერატურის შეცვლა იწვევს მისი მოცულობის

შეცვლას. მაშასადამე, სხეულის მოცულობა ტემპერატურის ფუნქციაა.

2. ჰაერის ტემპერატურა დღის სხვადასხვა დროისათვის სხვადასხვაა, რის გამოც ჰაერის ტემპერატურა დროის ფუნქციაა.

3. სხვადასხვა რადიუსიან სფეროს სხვადასხვა მოცულობა აქვს. ამიტომ სფეროს მოცულობა არის რადიუსის ფუნქცია.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა, რომელიც დირიხლეს ეკუთვნის.

განსაზღვრა 2. თუ ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლის ყოველ x რიცხვს შეესაბამება რაიმე წესით ერთი y ნამდვილი რიცხვი, მაშინ იტყვიან, რომ y არის x-ის ფუნქცია. თვით E სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება.

ის ფაქტი, რომ y არის x-ის ფუნქცია, ჩაიწერება ასე:

$$y=f(x)$$

და იკითხება: y უდრის ეფ იქსს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ x და y ცვლადებს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულება. x-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი, y-ს კი დამოკიდებული ცვლადი.

აქ f აღნიშნავს არა სიდიდეს, არამედ დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადებს შორის შესაბამისობის კანონს. კერძოდ f შეიძლება აღნიშნავდეს მათემატიკურ იმ ოპერაციათა ერთობლიობას, რომლებიც უნდა ვაწარმოოთ x-ზე, რომ მივიღოთ y-ის მნიშვნელობები.

მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია $y=2x^3$ ფუნქცია. იგი ჩაწერილია $y=f(x)$ სახით. აქ f აღნიშნავს შემდეგს: მოცემული x მნიშვნელობის შესაბამისი y მნიშვნელობის მისაღებად საჭიროა x ავახარისხოთ კუბში და გავამრავლოთ 2-ზე. $y=\cos x$ ფორმულაში ნიშანი cos არსებითად იმავე როლს ასრულებს, რომელსაც f ნიშანი $y=f(x)$ ფორმულაში, განსხვავება აქ მხოლოდ იმაშია, რომ cos ნიშანი შემოღებულია გარკვეული ფუნქციის აღსანიშნავად, იმ დროს, როდესაც f შეიძლება ვიხმაროთ ნებისმიერი ფუნქციისათვის. ცხადია, მოცემული ფუნქციის აღსანიშნავად f-ის ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი ასო, მაგალითად φ.

თუ ერთდროულად განვიხილავთ რამდენიმე სხვადასხვა ფუნქციას, მაშინ აუცილებელი ხდება სხვადასხვა აღნიშვნის შემოღება. მაგალითად, $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$, $\Phi(x)$ სხვადასხვა ფუნქციას აღნიშნავს.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია E სიმრავლეზე და x_0 არის E სიმრავლის რაიმე ელემენტი, მაშინ, $f(x_0)$ წარმოადგენს x_0-ის შესაბამის რიცხვს და მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილში.

$f(x)$ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობის სიმრავლეს ამ ფუნქციის **ცვლილების** არე ეწოდება.

შევნიშნავთ, რომ ფუნქციის განსაზღვრაში აუცილებელი არაა, რომ x არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს y ფუნქციის სხვადასხვა მნიშვნელობა. ასე რომ y-ის ყველა მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ერთიდაიგივე და მაინც y იყოს x-ის ფუნქცია. ასეთი ფუნქციაა მაგალითად, $y=\sin^2 x+\cos^2 x$, რომელიც ერთის ტოლია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. ასევე, ნებისმიერი c მუდმივი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x-ის ფუნქცია, რომელიც ინარჩუნებს ერთსა და იმავე c მნიშვნელობას არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის.

§ 8. ცალსახა და მრავალსახა ფუნქცია

ფუნქციის ცნების განსაზღვრის მიხედვით, y არის x-ის ფუნქცია, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას მოცემული არიდან შეესაბამება y-ის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. მაგრამ ზოგჯერ მიზანშეწონილია განვაზოგადოთ ფუნქციის ცნება ისე, რომ არგუმენტის მოცემულ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს არა ერთი, არამედ რამდენიმე მნიშვნელობა (უსასრულოდ ბევრიც კი). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $y=f(x)$ წარმოადგენს x-ის მ რ ა ვ ა ლ ს ა ხ ა ფუნქციას.

როდესაც არგუმენტის ყოველ მნიშვნელობას ფუნქციის განსაზღვრის არიდან შეესაბამება ფუნქციის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა, ამბობენ, რომ მოცემული ფუნქცია ც ა ლ ს ა ხ ა ა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, x და y ცვლადები შეკავშირებულია განტოლებით

$$x^2+y^2=9.$$

მაშინ x სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას $]-3, 3[$ ინტერვალიდან შეესაბამება y-ის ორი მნიშვნელობა

$$y=+\sqrt{9-x^2}, \quad y=-\sqrt{9-x^2}.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $x^2+y^2=9$ განტოლება განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ორსახა ფუნქციას.

ჩვეულებრივ, მრავალსახა ფუნქცია შეგვიძლია დავყოთ ცალსახა ფუნქციებად, ანუ როგორც იტყვიან, მოცემული მრავალსახა ფუნქციიდან შეგვიძლია გამოვყოთ მისი ცალსახა შტოები.

მაგალითად, თუ შევთანხმდებით განვიხილოთ y-ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ $x^2+y^2=9$ განტოლებას, მაშინ ჩვენ მივიღებთ $]-3, 3[$ ინტერვალში განსაზღვრულ ცალსახა ფუნქციას.

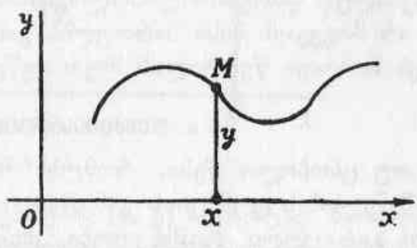
შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ცალსახა ფუნქციას, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი.

§ 4. ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ, X შუალედზე განსაზღვრულია

$$y=f(x) \tag{4.1}$$

ფუნქცია. x-ის ყოველ მნიშვნელობას X შუალედიდან შეესაბამება y-ის გარკვეული მნიშვნელობა. ამ გზით მივიღებთ (x, y) წყვილების სიმრავლეს. ავიღოთ სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა (ნახ. 11). ზემოაღნიშნულ ნამდვილ რიცხვთა ყოველ (x, y) წყვილს შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული M წერტილი, რომლის აბსცისაა x, ორდინატა კი y. ამგვარად, სიბრტყეზე მივიღებთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც $f(x)$ **ფუნქციის გრაფიკი** ეწოდება.



ნახ. 11.

$f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ჩვეულებრივ, **წირი** ჰქვია, (4.1) განტოლებას კი — **წირის განტოლება**.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$F(x, y)=0, \tag{4.2}$$

რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ორ x და y ცვლადს. ეს განტოლება, საზოგადოდ, განსაზღვრავს x ცვლადის ერთ ან რამდენიმე ფუნქციას. მაგალითად,

$$3y-5xy+7=0$$

განტოლება განსაზღვრავს ერთ ფუნქციას

$$y=\frac{7}{5x-3},$$

სადაც $x\neq\frac{3}{5}$, ხოლო განტოლება

$$x^2+y^2-4=0$$

ორ ფუნქციას

$$y=+\sqrt{4-x^2}, \quad y=-\sqrt{4-x^2}.$$

რაიმე $y=f(x)$ ფუნქციას, რომელიც გარკვეულ არეში (4.2) განტოლებას იგივურად აკმაყოფილებს, ეწოდება ამ განტოლებით განსაზღვრული **არაცხადი ფუნქცია**.

ყველა იმ (x, y) წერტილის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ $F(x, y)=0$ განტოლებას, ეწოდება ამ განტოლებით განსაზღვრული წირი, ხოლო თვით ამ განტოლებას—**წირის განტოლება არაცხადი სახით.**

შენიშვნა. წირის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ურთულესი ცნებაა. წირის ზოგადი განსაზღვრა მოცემულია მათემატიკის სპეციალურ დარგში—ტოპოლოგიაში. ამ წიგნში წირის განსაზღვრა არ მოგვყავს მისი სირთულის გამო. წირზე წარმოდგენას გვაძლევს მოძრავი წერტილის მიერ აღწერილი გზა.

§ 5. ფუნქციის მოცემის ხერხები

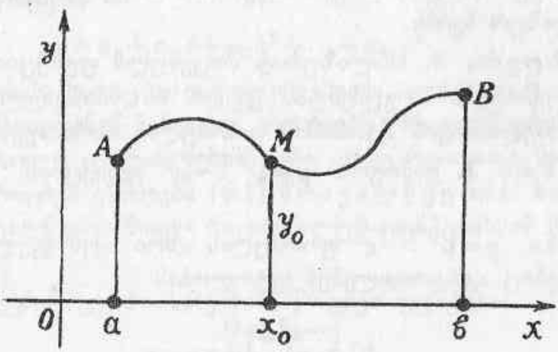
თუ ცნობილია წესი, რომლის მიხედვით არგუმენტის ყოველ მნიშვნელობას ფუნქციის განსაზღვრის არიდან შეესაბამება ფუნქციის გარკვეული მნიშვნელობა, მაშინ ეს ფუნქცია თეორიულად ცნობილად ითვლება. მაგრამ პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანია, რომ ფუნქციის მოცემის წესი იყოს შეძლებისდაგვარად ყველაზე მოხერხებული. ამ მიზანს ვაღწევთ სხვადასხვა საშუალებით; ყოველ მათგანს აქვს თავისი ღირსება და თავისი ნაკლი. ყველაზე მეტად იხმარება ფუნქციის მოცემის სამი ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

1. ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი. ამოწერენ დამოუკიდებელი ცვლადის მთელ რიგ მნიშვნელობას და ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს. ამით შედგება გარკვეული ცხრილი. მაგალითად, კარგადაა ცნობილი ლოგარითმების ცხრილი, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილი და სხვა. ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი განსაკუთრებით გავრცელებულია ბუნებისმეტყველებასა და ტექნიკაში.

ცხრილური ხერხის ღირსება იმაში მდგომარეობს, რომ არგუმენტის რიგი მნიშვნელობისათვის იგი მაშინვე გვაძლევს ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას (ზუსტს ან მიახლოებითს მოთხოვნილი სიზუსტით). ცხრილური ხერხის ნაკლი იმაში გამოიხატება, რომ ცხრილი ხშირად არ შეიცავს არგუმენტის საჭირო მნიშვნელობებს,

და მაშინ ან უნდა დავკმაყოფილდეთ არასაკმარისი სიზუსტით, ანდა ვაწარმოოთ დამატებითი გამოთვლები.

2. ფუნქციის მოცემის გრაფიკული ხერხი. ვთქვათ, სიბრტყეზე აღებულია კოორდინატთა Oxy სისტემა და ამ სისტემის მიმართ მოცემულია AB წირი, რომელსაც Oy ღერძის ყოველი პარალელური წრფე ან არ კვეთს, ან კვეთს ერთ წერტილში (ნახ. 12). ეს წი-



ნახ. 12.

რი განსაზღვრავს $y=f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე. მართლაც, ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x_0 წერტილი და მასზე გავავლოთ Oy ღერძის პარალელური წრფე; წრფის გადაკვეთის წერტილი AB წირთან აღვნიშნოთ M-ით. ამ წერტილის y_0 ორდინატა იქნება ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილში.

ფუნქციის მოცემის აღწერილ ხერხს ეწოდება ფუნქციის მოცემის *გ რ ა ფ ი კ უ ლ ი ხ ე რ ხ ი*.

ფუნქციის მოცემის გრაფიკულ ხერხს ხშირად მიმართავენ ექსპერიმენტულ შრომებში და განსაკუთრებით იქ, სადაც საშუალება გვაქვს გამოვიყენოთ თვითჩამწერი ხელსაწყოები.

3. ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი. ეს ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ შესაბამისობა x არგუმენტსა და y ფუნქციას შორის მოცემულია ფორმულით ან ფორმულათა სისტემით. მაგალითად, ფორმულა

$$y=\frac{2x^3-6x+1}{x^2+3}$$

განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ფუნქციას.

მოქმედებანი, რომლებიც ფორმულაშია ნაჩვენები, რიგ შემთხვევაში საშუალებას იძლევა მივიღოთ ფუნქციის ზუსტი მნიშვნე-

ლობები არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან; რიგ სხვა შემთხვევაში ფორმულით შეგვიძლია მივიღოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობები ნებისმიერი სიზუსტით.

ანალიზური ხერხის ნაკლი ისაა, რომ არ გვაქვს თვალსაჩინოება და ხშირ შემთხვევაში დამქანცველ გამოთვლებთან გვაქვს საქმე.

მათემატიკურ ანალიზში უპირატესობას ანიჭებენ ფუნქციის მოცემის ანალიზურ ხერხს.

განსაზღვრა 3. ანალიზურად მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობის სიმრავლეს, რომელთათვის შესაბამის ფორმულას აზრი აქვს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y=\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. $y=\sqrt{1-x^2}$ ფორმულას აზრი აქვს ყველა x-ისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$1-x^2 \geqslant 0.$$

აქედან $x^2 \leqslant 1$. მაშასადამე, $|x| \leqslant 1$. ეს უტოლობა ტოლფასია უტოლობებისა

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[-1, 1]$ სეგმენტი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=\dfrac{1}{x+2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=-2$ მნიშვნელობისა, ვინაიდან ნულზე გაყოფა არ შეიძლება. ამიტომ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $]-\infty, -2[\ \cup\ ]-2, +\infty[$ სიმრავლე.

მაგალითი 3. y ფუნქცია მოცემულია ფორმულით

$$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}.$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. $\sqrt{x-3}$ გამოსახულებას აზრი აქვს, როდესაც $x \geqslant 3$, $\sqrt{8-x}$ გამოსახულებას კი, როდესაც $x \leqslant 8$. მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[3,8]$ სეგმენტი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $y=\sqrt{-|x|}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე შედგება მხოლოდ ერთი წერტილისაგან, სახელდობრ $x=0$ წერტილისაგან.

§ 6. რაციონალური ფუნქციები

ფუნქციათა უმარტივეს კლასს მრავალწევრები შეადგენენ. მრავალწევრი ეწოდება

$$y=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n \tag{6.1}$$

სახის ფუნქციას, სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, a_0, a_1, a_2, ..., a_n წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვებს (მრავალწევრის კოეფიციენტებს), ხოლო n არის ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი. ამ n რიცხვს ეწოდება (6.1) მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი ს ხ ა რ ი ს ხ ი. ხშირად მრავალწევრს მთელ რაციონალურ ფუნქციას ან პოლინომს უწოდებენ.

მრავალწევრის კერძო სახეებია: წრფივი ფუნქცია

$$y=ax+b \quad (a\neq 0),$$

კვადრატული ფუნქცია

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0).$$

ფუნქციათა შემდეგი უფრო ფართო კლასია რაციონალურ ფუნქციათა კლასი. ორი მრავალწევრის ფარდობას ეწოდება რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა:

$$y=\frac{a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n}{b_0+b_1 x+b_2 x^2+\cdots+b_m x^m}.$$

აქ იგულისხმება, რომ მრიცხველსა და მნიშვნელს არა აქვთ საერთო ფესვი.

ასეთი ფუნქციის განსაზღვრის არეს შეადგენს x-ის ყველა მნიშვნელობა, რომლებიც მნიშვნელს ნულად არ აქცევენ. ცხადია, მთელი რაციონალური ფუნქცია წარმოადგენს რაციონალური ფუნქციის კერძო შემთხვევას.

რაციონალურ ფუნქციას

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{6.2}$$

სადაც a, b, c, d მუდმივები აკმაყოფილებენ პირობებს $c\neq 0$ და

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, ეწოდება წილადურ-წრფივი ფუნქცია. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty, +\infty) \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ სიმრავლე.

რაციონალური ფუნქციისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ამ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელად საკმარისია არგუმენტზე შევასრულოთ სასრული რაოდენობა ოთხი არითმეტიკული მოქმედებისა, როგორიცაა შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა.

ახლა განვიხილოთ ორი ცვლადის მრავალწევრი. x და y ცვლადების $F(x, y)$ მრავალწევრი ეწოდება $a_{ik} x^i y^k$ სახის წევრთა ჯამს, სადაც a_{ik} ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i და k მაჩვენებლები — არაუარყოფითი მთელი რიცხვები. $a_{ik} x^i y^k$ გამოსახულებას ეწოდება $F(x, y)$ მრავალწევრის წევრი, $i+k$ რიცხვს კი $a_{ik} x^i y^k$ წევრის ხარისხი ან რიგი.

$F(x, y)$ მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება მისი წევრების ხარისხებს შორის უდიდესს. მაგალითად,

$$F(x, y) = 2x^3y^2 - 4x^2y + 8x^{10}y^7 + 3x - y + 1$$

მე-17 ხარისხის მრავალწევრია.

თუ $F(x, y)$ მრავალწევრში y-ის უდიდესი ხარისხია n რიცხვი, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$F(x, y) = P_0(x) + P_1(x)y + \cdots + P_n(x)y^n,$$

სადაც $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ წარმოადგენენ x ცვლადის მრავალწევრებს.

მაგალითად, თუ

$$F(x, y) = x^{10}y + 2x^{20}y^2 + 3xy^3 + x + 5y + 4.$$

მაშინ იგი შეგვიძლია გადავწეროთ ასე

$$F(x, y) = (x+4) + (5 + x^{10})y + 2x^{20}y^2 + 3xy^3.$$

ამ შემთხვევაში

$$P_0(x) = x + 4, \quad P_1(x) = 5 + x^{10}, \quad P_2(x) = 2x^{20},$$
$$P_3(x) = 3x.$$

ორი ცვლადის რაციონალური ფუნქცია ეწოდება ორი ცვლადის ორი მრავალწევრის ფარდობას.

§ 7. ცხადი და არაცხადი ალგებრული ფუნქციები. ტრანსცენდენტური ფუნქციები

განსაზღვრა 4. შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას, გაყოფასა და ფესვის ამოღებას ალგებრული ოპერაციები ეწოდება.

განსაზღვრა 5. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ცხადი ალგებრული ფუნქცია, თუ ყოველი x-სათვის, ფუნქციის განსაზღვრის არიდან, მისი შესაბამისი y-ის გამოსათვლელად საჭიროა x-ზე ვაწარმოოთ მხოლოდ სასრული რიცხვი ალგებრული ოპერაციებისა.

მაგალითად,

$$y=\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{2-3x}+\frac{7x^3+2x-1}{16x^2-7x+5}$$

არის ცხადი ალგებრული ფუნქცია.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ $y=f(x)$ არის ცხადი ალგებრული ფუნქცია, მაშინ იგი აკმაყოფილებს $F(x, y)=0$ განტოლებას, სადაც $F(x, y)$ წარმოადგენს x და y-ის მიმართ რაიმე მრავალწევრს.

განსაზღვრა 6. y-ს ეწოდება x-ის არაცხადი ალგებრული ფუნქცია, თუ იგი ამონახსნია $F(x, y)=0$ განტოლებისა, სადაც $F(x, y)$ მრავალწევრია x და y-ის მიმართ.

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ყოველი არაცხადი ალგებრული y ფუნქცია იქცევა ცხად ალგებრულ ფუნქციად, თუ $F(x, y)=0$ განტოლებას ამოვხსნით y-ის მიმართ რადიკალების საშუალებით. მაგრამ ალგებრული განტოლება, საზოგადოდ, ვერ ამოიხსნება რადიკალების საშუალებით. მაშასადამე, არაცხად ალგებრულ ფუნქციათა კლასი უფრო ფართოა, ვიდრე ცხად ალგებრულ ფუნქციათა კლასი.

მაგალითად, $y^5+y+x=0$ განტოლება y-ის მიმართ ვერ ამოიხსნება რადიკალების საშუალებით. მაშასადამე, ეს განტოლება განსაზღვრავს y-ს როგორც x-ის არსებითად არაცხად ალგებრულ ფუნქციას.

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ რაციონალური ფუნქცია ცხადი ალგებრული ფუნქციის კერძო შემთხვევაა, ხოლო ცხადი ალგებრული ფუნქცია არაცხადი ალგებრული ფუნქციის კერძო სახეა.

განსაზღვრა 7. ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც რაციონალური არაა, ირაციონალური ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციას, რომელიც ალგებრული არაა, ტ რ ა ნ ს ც ე ნ დ ე ნ ტ უ რ ი ფუნქცია ეწოდება. მაგალითად, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ტრანსცენდენტური ფუნქციებია.

§ 8. ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ფუნქციის ცვლილების ხასიათის შესწავლა. ფუნქციის ცვლილების უმარტივესი შემთხვევა გვაქვს მაშინ, როდესაც ფუნქცია მხოლოდ იზრდება ან მხოლოდ კლებულობს.

განსაზღვრა 8. რაიმე X სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზ რ დ ა დ ი ამ სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x' და x'' რიცხვისათვის

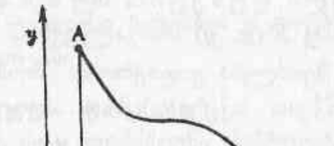
$$f(x') \leqslant f(x''), \quad \text{როდესაც} \quad x' < x'',$$

ხოლო $f(x)$ ფუნქცია კ ლ ე ბ ა დ ი ა X სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x' და x'' რიცხვისათვის

$$f(x') \geqslant f(x''), \quad \text{როდესაც} \quad x' < x''$$

მე-13 ნახაზზე მოცემულია ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი, მე-14 ნახაზზე კი კლებადი ფუნქციის გრაფიკი.

ნახ. 13.



ნახ. 14.

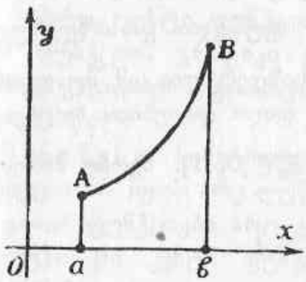
განსაზღვრა 9. X სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ა რ ს ე ბ ი თ ა დ ზ რ დ ა დ ი ამ სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x' და x'' რიცხვისათვის

$$f(x') < f(x''), \quad \text{როდესაც} \quad x' < x'',$$

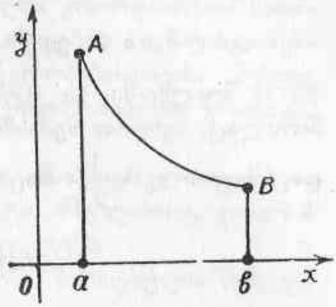
ხოლო $f(x)$ ა რ ს ე ბ ი თ ა დ კ ლ ე ბ ა დ ი ა X სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x' და x'' რიცხვისათვის

$$f(x') > f(x''), \quad \text{როდესაც} \quad x' < x''.$$

მე-15 და მე-16 ნახაზებზე წარმოდგენილია შესაბამისად არსებითად ზრდადი და არსებითად კლებადი ფუნქციების გრაფიკები.



ნახ. 15.



ნახ. 16.

განსაზღვრა 10. X სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *მონოტონური* ამ სიმრავლეზე, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი, ხოლო ფუნქცია *არსებითად მონოტონურია*, თუ იგი არსებითად ზრდადია ან არსებითად კლებადია.

მაგალითი 1. $f(x)=x^2$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია $]0, +\infty[$ შუალედში, ხოლო იგი არსებითად კლებადია $]-\infty, 0$ შუალედში. $[-3, 2]$ სეგმენტზე მოცემული ფუნქცია არც ზრდადია და არც კლებადი.

მაგალითი 2. $f(x)=x^3$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია ნებისმიერ X შუალედზე, ხოლო $\varphi(x)=-x^3$ ფუნქცია არსებითად კლებადია ნებისმიერ X შუალედზე.

§ 9. შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები

X სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(r)$ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული ამ სიმრაკლეზე, თუ არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{9.1}$$

(9.1) უტოლობა ტოლფასია უტოლობებისა

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M.$$

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *შემოუსაზღვრელი* X სიმრავლეზე, თუ ყოველი რაგინდ დიდი დადებითი A რიცხვისათვის მოიძებნება ამ სიმრავლის ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$|f(x_0)| > A.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. $f(x)=\cos x$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, რადგან ამ შუალედის ყოველი x წერტილისათვის $|\cos x| \leqslant 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]0, 1]$ შუალედში. ეს ფუნქცია შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი რიცხვი A და ავიღოთ $x_0=\frac{1}{2A}$ რიცხვი. ცხადია, $x_0 \in]0, 1]$. მეორე მხრით

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}=2A>A.$$

ამრიგად, მოცემული $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია $]0, 1]$ შუალედში.

§ 10. ლუწი და კენტი ფუნქციები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ისეთ ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ შუალედებზე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 11. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლ უ წ ი, თუ ნებისმიერი x-ისათვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან მართებულია ტოლობა

$$f(-x)=f(x).$$

ლუწი ფუნქციების მაგალითებია:

$$y=x^2,\ y=|x|,\ y=\cos x,\ y=\sin^2 x.$$

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. ამიტომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი მხოლოდ $x \geqslant 0$ მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ მიღებული გრაფიკი სარკისებრად გადავსახოთ ორდინატთა ღერძიდან.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 12. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კ ე ნ ტ ი, თუ ნებისმიერი x-სათვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან მართებულია ტოლობა

$$f(-x)=-f(x).$$

კენტი ფუნქციების მაგალითებია:

$$y=x^3, \quad y=\sin x, \quad y=\operatorname{tg} x.$$

კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. კენტი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი $x \geqslant 0$ მნიშვნელობებისათვის. შემდეგ ორმაგი გადასახვით კოორდინატთა ღერძებიდან მიიღება გრაფიკის მეორე ნაწილი.

შენიშვნა. სიმეტრიულ შუალედზე განსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება არ იყოს არც ლუწი და არც კენტი. მაგალითად, $y=x+3$ და $y=a^x$ ფუნქციები არც კენტია და არც ლუწი.

ლუწი და კენტი ფუნქციების მიმართ მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. ორი $f(x)$ და $g(x)$ ლუწი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა ლუწი ფუნქციაა.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x)=f(x)+9(x).$$

მაშინ

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x).$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $f(x)-g(x)$ სხვაობა ლუწი ფუნქციაა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. ორი კენტი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა კენტი ფუნქციაა.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 3. ორი ლუწი ან ორი კენტი ფუნქციის ნამრავლი ლუწი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x)=f(x)\,g(x).$$

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ლუწი ფუნქციებია, მაშინ

$$F(-x)=f(-x)\,g(-x)=f(x)\,g(x).$$

თუკი $f(x)$ და $g(x)$ კენტი ფუნქციებია, მაშინ

$$F(-x)=f(-x)\,g(-x)=[-f(x)]\,[-g(x)]=f(x)\,g(x)$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია სიმეტრიულ შუალედზე, შეგვიძლია

წარმოვიდგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი ორი ფუნქცია:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

ცხადია, $\varphi(x)$ არის ლუწი ფუნქცია, $\psi(x)$ კი კენტი ფუნქციაა. ამასთანავე,

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 11. პერიოდული ფუნქცია

განსაზღვრა. რაიმე არეში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული პერიოდით ω, ან მოკლედ ω—პერიოდული ფუნქცია, სადაც $\omega>0$, თუ ამ არის ყოველი x წერტილისათვის $x\pm\omega$ წერტილები ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და მართებულია ტოლობა

$$f(x+\omega)=f(x).$$

მაგალითად $\sin x$ და $\cos x$ პერიოდული ფუნქციებია და მათი პერიოდია 2π. ასევე, $\operatorname{tg} x$ და $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციებიც პერიოდულია და მათი პერიოდია π.

თუ $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია ω, მაშინ $-\omega$ რიცხვიც იქნება პერიოდი, ვინაიდან

$$f(x-\omega)=f[(x-\omega)+\omega]=f(x).$$

გარდა ამისა, თუ ω არის $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ $\pm n\omega$, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, იქნება აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის პერიოდი.

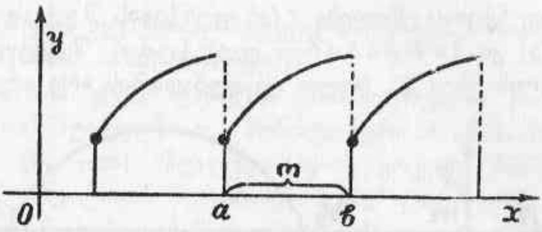
ჩვეულებრივ, ფუნქციის პერიოდს უწოდებენ ყველა დადებით პერიოდს შორის უმცირესს. $\sin x$ ფუნქციას ეწოდება 2π პერიოდის ფუნქცია, თუმცა მისი პერიოდებია აგრეთვე $2k\pi$, სადაც $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ შევნიშნავთ, რომ ფუნქციის პერიოდთა შორის შეიძლება არ არსებობდეს უმცირესი. მაგალითად, $f(x)=1$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი α, ვინაიდან

$$f(x+\alpha)=1=f(x).$$

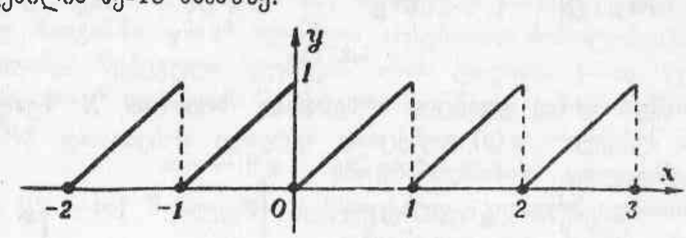
ω-პერიოდიანი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ იგი ერთი პერიოდის ფარგლებში, ე. ი. x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $x+\omega$ მნიშვნელობამდე. შემდეგ, აგებული

გრაფიკის გადაწევით მარჯვნივ და მარცხნივ ω, 2ω, 3ω,... მანძილით, მივიღებთ ფუნქციის გრაფიკულ წარმოდგენას მთელ შუალედზე (ნახ. 17).

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ავაგოთ $y=x-E(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც $E(x)$ წარმოადგენს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდი არის 1. ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია მე-18 ნახაზზე.



ნახ. 17.



ნახ. 18.

§ 12. შექცეული ფუნქცია

ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა X სიმრავლეზე განსაზღვრულია

$$y=f(x) \tag{12.1}$$

ფუნქცია. ამ ფუნქციის ცვალებადობის არე აღვნიშნოთ Y ასოთი.

ავიღოთ Y სიმრავლის რაიმე y რიცხვი. მას შეიძლება შეესაბამებოდეს x არგუმენტის რამდენიმე მნიშვნელობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-19 ნახაზზე. $y=Om'$ მნიშვნელობას შეესაბამება x-ის Om_1, Om_2 და Om_3 მნიშვნელობა.

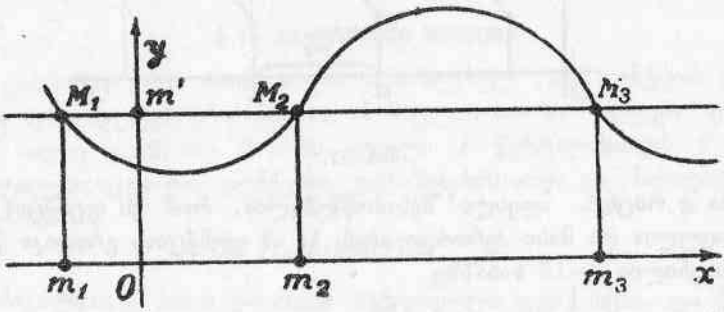
თუ $f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია ან არსებითად კლებადი X სიმრავლეზე, მაშინ ფუნქციის ზრდადობის გამო Y სიმრავ-

ლის ყოველ y რიცხვს შეესაბამება x არგუმენტის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა (ნახ. 20). მაშასადამე, თუ y-ს განვიხილავთ როგორც დამოუკიდებელ ცვლადს, მაშინ x იქნება y-ის ცალსახა ფუნქცია

$$x=\varphi(y), \tag{12.2}$$

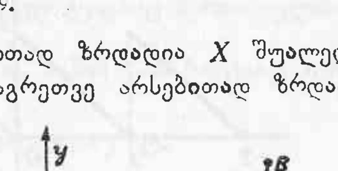
რომელიც განსაზღვრულია Y სიმრავლეზე.

$\varphi(y)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, $f(x)$ კი პირდაპირი ფუნქცია. შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არეა Y, ხოლო ცვალებადობის არე არის X.



ნახ. 19.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია X შუალედში. მაშინ შექცეული $\varphi(y)$ ფუნქციაც აგრეთვე არსებითად ზრდადია: ეს უშუალოდ გამომდინარეობს არსებითად ზრდადი ფუნქციის განსაზღვრიდან. თუ დავუშვებთ, რომ $f(x)$ არსებითად კლებადი ფუნქციაა X შუალედში, მაშინ მისი შექცეული ფუნქცია იქნება არსებითად კლებადი.



ნახ. 20.

თუ X შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონური არ არის, მაშინ საზოგადოდ არ არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მაგრამ ბევრ შემთხვევაში ხერხდება X შუალედის დაყოფა უბნებად ისე, რომ ყოველ მათგანზე $f(x)$ იყოს არსებითად მონოტონური. ახლა თუ $f(x)$ ფუნქციას განვიხილავთ ერთ-ერთ უბანზე, მაშინ შექცეული $f(x)$ ფუნქცია იქნება ცალსახა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, $y=2x+5$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ამისათვის $y=2x+5$ განტოლებიდან ვიპოვოთ x. გვაქვს

$$x=\frac{y-5}{2}.$$

ეს არის მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $y=x^2$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში და ამ შუალედში იგი მონოტონური არ არის. მისი ცვლილების არეა $[0, +\infty[$ შუალედი. y-ის ყოველ მნიშვნელობას $]0, +\infty[$ ინტერვალიდან შეესაბამება $y=x^2$ ფორმულის მიხედვით x-ის ორი მნიშვნელობა. მაშასადამე, შექცეული ფუნქცია არის ორსახა. იგი გამოისახება ფორმულით.

$$x=\pm\sqrt{y} \quad (0\leqslant y<+\infty).$$

ახლა დავყოთ $]-\infty, +\infty[$ შუალედი, რომელშიაც იცვლება $y=x^2$ ფუნქციის არგუმენტი ორ შუალედად $]-\infty, 0]$ და $[0, +\infty[$. ყოველ მათგანში $y=x^2$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია და, მაშასადამე, შექცეული ფუნქცია არის ცალსახა. $]-\infty, 0]$ შუალედში $y=x^2$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია გამოისახება ფორმულით

$$x=-\sqrt{y} \quad (0\leqslant y<+\infty),$$

ხოლო $[0, +\infty[$ შუალედში შექცეული ფუნქცია იქნება

$$x=+\sqrt{y} \quad (0\leqslant y<+\infty).$$

კოორდინატთა ერთ და იმავე Oxy სისტემაში (12.1) და (12.2) განტოლებები გამოსახავენ ერთ და იმავე წირს. (12.1) ფუნქციისათვის არგუმენტის მნიშვნელობები აღებულია Ox ღერძზე, (12.2) ფუნქციისათვის კი Oy ღერძზე.

თუ (12.2) ფორმულაში არგუმენტს x-ით აღვნიშნავთ, ისე როგორც (12.1) ფორმულაში, ფუნქციას კი y-ით, მივიღებთ

$$y=\varphi(x). \tag{12.3}$$

ჩვეულებრივ, $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის შ ე ქ ც ე უ ლ ი ფუნქცია, $f(x)$ კი პ ი რ დ ა პ ი რ ი ფუნქცია.

ახლა როგორც პირდაპირი, ისე შექცეული ფუნქციისათვის არგუმენტის მნიშვნელობები აიღება ერთ და იმავე Ox ღერძზე, ფუნქციის კი Oy ღერძზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია, ხოლო $\varphi(x)$ წარმოადგენს მის შექცეულ ფუნქციას, მაშინ

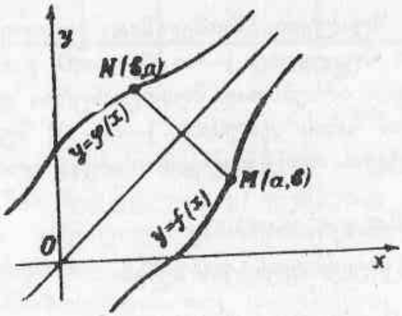
$$f[\varphi(x)]=x \quad \text{და} \quad \varphi[f(x)]=x.$$

მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია არის $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$. ამიტომ

$$f[\varphi(x)]=(\sqrt[3]{x})^3=x \quad \text{და} \quad \varphi[f(x)]=\sqrt[3]{x^3}=x.$$

თეორემა 5. *პირდაპირი და შექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულად არიან განლაგებული პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y=\varphi(x)$. ვიგულისხმოთ, რომ როცა $x=a$, მაშინ $y=f(a)=b$. ცხადია, $M(a, b)$ წერტილი ძევს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე (ნახ. 21). მაშინ $N(b, a)$ წერტილი ძევს შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, ვინაიდან $a=\varphi(b)$. მაგრამ $M(a, b)$ და $N(b, a)$ წერტილები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.



ნახ. 21.

ამრიგად, პირდაპირი ფუნქციის გრაფიკის ყოველ წერტილს შეესაბამება შექცეული ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. ეს წერტილები სიმეტრიულად არიან განლაგებული პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ. მაშასადამე, თუ მოცემულია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ მისი შექცეული ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად საჭიროა ნახაზი გადავკეცოთ პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისაზე.

§ 18. რთული ფუნქცია

ვთქვათ, U შუალედზე განსაზღვრულია u ცვლადის ფუნქცია

$$y=f(u),$$

სადაც u თავის მხრივ წარმოადგენს X შუალედზე განსაზღვრულ x ცვლადის $\varphi(x)$ ფუნქციას. ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოთავსებულია U შუალედზე. მაშინ ამ ორი ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია ავაგოთ ახალი ფუნქცია შემდეგნაირად: თუ x ნებისმიერი რიცხვია X შუალედიდან, მაშინ მას $u=\varphi(x)$ ფუნქცია შეუსაბამებს გარკვეულ u ნამდვილ რიცხვს, რომელსაც თავის მხრივ $y=f(u)$ ფუნქცია შეუსაბამებს გარკვეულ y რიცხვს. ამრიგად, y არის x-ის ფუნქცია:

$$y=F(x).$$

ასე განსაზღვრულ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ ფუნქციებით განსაზღვრული რთული ფუნქცია. მას აღნიშნავენ აგრეთვე ასე:

$$y=f[\varphi(x)]$$

და ამბობენ, რომ y ფუნქცია აგებულია $f(u)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების სუპერპოზიციით.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $y=\lg_a u$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]0, +\infty[$ შუალედში. მაშინ $y=\lg_a u$ და $u=\operatorname{tg} x$ ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ $y=\lg_a \operatorname{tg} x$ ფუნქციას.

მაგალითი 2. $y=u^3$ და $u=\sqrt[3]{5x-1}$ ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ $y=5x-1$ ფუნქციას.

რთული ფუნქცია შეგვიძლია შევადგინოთ არა ორი ფუნქციის სუპერპოზიციით, არამედ რამდენიმე ფუნქციის სუპერპოზიციით.

მაგალითი 3. $y=\operatorname{tg} u$, $u=\sqrt[3]{v}$ და $v=2x+1$ ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ რთულ ფუნქციას

$$y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{2x+1}.$$

კითხვები

1. როგორ სიდიდეებს ეწოდება ცვლადი და მუდმივი? მოიყვანეთ ცვლადი სიდიდის მაგალითები.

2. როგორ სიდიდეს ეწოდება პარამეტრი? აბსოლუტურად მუდმივი სიდიდე?

3. რას ეწოდება ფუნქცია?

4. რას ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის არე? ფუნქციის ცვლილების არე?

5. ფუნქციათა წარმოდგენის რამდენი ძირითადი წესი არსებობს?

6. როგორ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი? კლებადი? არსებითად ზრდადი? არსებითად კლებადი? მონოტონური? არსებითად მონოტონური?

7. როგორ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული? რას ნიშნავს, რომ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია?

8. როგორ ფუნქციას ეწოდება კენტი და ლუწი?

9. როგორ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული? რას ეწოდება ფუნქციის პერიოდი? ყოველ პერიოდულ ფუნქციას აქვს თუ არა უმცირესი პერიოდი?

10. როგორაა განსაზღვრული შექცეული ფუნქცია? ყოველი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა შექცეული ფუნქცია? მოიყვანეთ საკმარისი პირობა იმისა, რომ არსებობდეს მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

11. როგორ არიან განლაგებული პირდაპირი და შექცეული ფუნქციების გრაფიკები?

12. მოიყვანეთ რთული ფუნქციის განსაზღვრა.

სავარჯიშო

1. მოცემულია $f(x)=x^2+4x-1$ ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x+h)-f(x)=(2x+4)h+h^2.$$

2. მოცემულია $f(x)=x^2-9x+14$ ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(a+1)=a^2-7a+6.$$

3. მოცემულია $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(3)=f(5).$$

4. მოცემულია ფუნქცია $\varphi(x)=a^x$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y).$$

5. ვთქვათ.

$$\varphi(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

6. მოცემულია

$$\varphi(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}, \quad \psi(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y),$$
$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x).$$

7. მოცემულია $f(x)=\cos x$, დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x+h)-f(x)=-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

8. მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

ა) $y=\sqrt{x-1}$; ბ) $y=\sqrt[3]{x+1}$; გ) $y=\sqrt{x-x^3}$;

დ) $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$; ე) $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

პასუხი: ა) $[1, +\infty[$; ბ) $]-\infty, +\infty[$; გ) $[0,1]\cup]-\infty, -1]$; დ) $]-2, +2[$; ე) $]-1, 1[\cup]2, +\infty[$.

9. მოძებნეთ $y=\sqrt{\sin 2x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

პასუხი: $\left[k\pi, \dfrac{2k+1}{2}\pi\right]$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

10. გამოარკვიეთ, ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციებიდან რომელია კენტი და რომელია ლუწი:

ა) $f(x)=a^x+a^{-x}$; ბ) $f(x)=a^x-a^{-x}$;

გ) $f(x)=\sqrt[3]{1-x+x^2}-\sqrt[3]{1+x+x^2}$;

დ) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$; ე) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

პასუხი: ა) ლუწია; ბ) კენტია; გ) კენტია; დ) კენტია; ე) კენტია.

11. გამოარკვიეთ, შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია პერიოდული და იპოვეთ უმცირესი პერიოდი:

ა) $f(x)=\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}$;

ბ) $f(x)=A\cos kx+B\sin kx$;

გ) $f(x)=\sqrt{|\operatorname{ctg} x|}$; დ) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$;

ე) $f(x)=\cos^2 x$; ვ) $f(x)=\operatorname{tg} x^2$.

პასუხი: ა) პერიოდულია, $\omega=2\pi$; ბ) პერიოდულია, $\omega=\dfrac{2\pi}{k}$;

გ) პერიოდულია, $\omega=\pi$; დ) პერიოდულია, $\omega=6\pi$; ე) პერიოდულია, $\omega=\pi$; ვ) არაპერიოდულია.

12. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

ა) $y=|x|$; ბ) $y=\dfrac{x+|x|}{2}$; გ) $y=x|x|$; დ) $y=|x+1|$;

ე) $y=E(x)$, სადაც $E(x)$ არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს.

13. $y=\operatorname{sgn} x$ ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & \text{თუ } x<0, \\ 0, & \text{თუ } x=0, \\ 1, & \text{თუ } x>0. \end{cases}$$

ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი. დაამტკიცეთ, რომ

$$x \operatorname{sgn} x=|x|.$$

14. მოძებნეთ $f[g(x)]$, თუ:

ა) $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$; ბ) $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$;

გ) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } x\leqslant 0, \\ x, & \text{როდესაც } x>0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } x\leqslant 0, \\ -x^2, & \text{როდესაც } x>0. \end{cases}$

დ) $f[f(x)]$ და $f\{f[f(x)]\}$, თუ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

პასუხი: ა) 4^x; ბ) $\operatorname{sgn} x\,(x\neq 0)$; გ) 0; დ) $\dfrac{x-1}{x}$, $x\,(x\neq 0,$ $x\neq 1)$.

15. იპოვეთ $f(x)$, თუ $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$.

პასუხი: $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$.

თავი III

რიცხვთა მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი

§ 1. მიმდევრობის განსაზღვრა

თუ რაიმე წესით ყოველ მთელ დადებით n რიცხვს გარკვეული x_n ობიექტი შეესაბამება, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია ობიექტთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \qquad (1.1)$$

x_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, x_2-ს—მიმდევრობის მეორე წევრი და ა. შ. x_n-ს მიმდევრობის n-ური წევრი. x_n-ს უწოდებენ აგრეთვე მოცემული მიმდევრობის ზოგად წევრს (1.1) მიმდევრობას მოკლედ აღვნიშნავთ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ სიმბოლოთი. თუ მოცემული მიმდევრობის წევრები რიცხვებია, მაშინ მიმდევრობას *რიცხვთა მიმდევრობა* ეწოდება. ჩვენ განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობებს.

რა წესით შეიძლება მოცემულ იქნას მიმდევრობა? მიმდევრობის მოცემის ბუნებრივი წესია ანალიზური წესი, რომელიც ცხადად გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ n-ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის ზოგადი x_n წევრი.

მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იქნეს რეკურენტული დამოკიდებულებით. ეს წესი გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებებია საჭირო მიმდევრობის გამოთვლილ $x_1, x_2, \dots, x_n$ წევრებზე, რომ მივიღოთ შემდგომი x_{n+1} წევრი. გარდა ამისა, დამოკიდებულების ხასიათის მიხედვით მოცემული უნდა იყოს რამდენიმე პირველი წევრი—საწყისი მონაცემები.

განვიხილოთ მიმდევრობის რამდენიმე მაგალითი.

1. ვთქვათ, მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით

$$x_n=3n+1.$$

დავწეროთ მიმდევრობა. ცხადია, რომ

$$x_1=4,\quad x_2=7,\quad x_3=10,\dots,\ x_{20}=61,\dots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა:

$$4,\ 7,\ 10, \ldots,\ 3n+1, \ldots$$

2. ვთქვათ, მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

დავწეროთ მიმდევრობა. ცხადია, რომ

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=0,\ x_4=1, \ldots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა:

$$0,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots, \frac{1+(-1)^n}{2}, \ldots$$

3. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ მისი ზოგადი წევრია

$$x_n = \frac{2n}{3n+1}.$$

გვაქვს:

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{4}{7},\quad x_3 = \frac{3}{5}, \ldots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა

$$\frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5}, \ldots,\ \frac{2n}{3n+1}, \ldots$$

4. არითმეტიკული პროგრესია განისაზღვრება რეკურენტული დამოკიდებულებით

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (n=1,\ 2, \ldots)$$

საწყისი მონაცემით $a_1 = a$. პროგრესიას აქვს სახე

$$a,\ a+d,\ a+2d, \ldots,\ a+(n-1)d, \ldots$$

5. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. ცხადია, რომ

$$a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ a_4 = 10, \ldots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა

$$1,\ 4,\ 7,\ 10, \ldots,$$

განსაზღვრა 1. რიცხვთა $(x_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი L რიცხ-

ვი, რომელიც მიმდევრობის ყოველ წევრზე მეტია, ხოლო მიმდევრობა *ქვემოდან შემოსაზღვრულია*, თუ მოიძებნება ისეთი l რიცხვი, რომელიც ნაკლებია მოცემული მიმდევრობის ყოველ წევრზე.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მაშინ მას *შემოსაზღვრული* მიმდევრობა ეწოდება.

ცხადია, თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ისეთი სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის ყველა წევრს.

განსაზღვრა 2. რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ეწოდება *ზრდადი*, თუ $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$ და *კლებადი*, თუ $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots$

განსაზღვრა 3. რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ეწოდება *არსებითად ზრდადი*, თუ $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ და *არსებითად კლებადი*, თუ $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$

განსაზღვრა 4. რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ეწოდება *მონოტონური მიმდევრობა*, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი, ხოლო მიმდევრობა *არსებითად მონოტონურია*, თუ იგი არსებითად ზრდადია ან არსებითად კლებადი. $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას, სადაც $x_n=a\,(n=1,2,\ldots)$ ეწოდება *სტაციონარული* მიმდევრობა.

§ 2. რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი

შემოვიღოთ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის ცნება. ზღვრის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო მათემატიკური ანალიზისათვის, არამედ ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგისათვის.

განსაზღვრა 5. რაიმე a რიცხვს ეწოდება $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *მიმდევრობის ზღვარი*, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ როგორიც გინდა იყოს მთელი რიცხვი $n>N$, ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ აღებული მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი, ჩაიწერება ასე

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

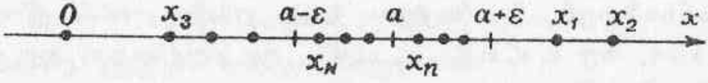
ან შემოკლებით

$$\lim x_n=a$$

და იკითხება: ზღვარი x_n-ისა, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, არის a.

აღნიშვნა lim წარმოდგება ლათინური სიტყვისაგან limes, რაც ზღვარს ნიშნავს.

მიმდევრობის ზღვრის ცნებას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი გეომეტრიული ახსნა. ვთქვათ, რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის წევრები გამოსახულია ღერძზე წერტილებით (ნახ. 22). a წერტილი იქ-



ნახ. 22.

ნება აღებული მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ მიმდევრობის ყოველი x_n წერტილი, რომლის ნომერი $n>N$, მოთავსდება $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ ინტერვალში.

რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ეწოდება *კრებადი*, თუ მას აქვს ზღვარი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობას *განშლადი* ეწოდება.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$, სადაც $x_n=\frac{n}{n+1}$. დავამტკიცოთ, რომ ამ მიმდევრობის ზღვარია რიცხვი 1.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε. რადგანაც

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1},$$

ამიტომ n-ის იმ მნიშვნელობების მოსაძებნად, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$|x_n-1|<\varepsilon.$$

საკმარისია ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

აქედან გვაქვს

$$n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

მაშასადამე, N რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$, სადაც $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ არის $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ რიცხვის მთელი ნაწილი. მაშინ $|x_n-1|<\varepsilon$ უტოლობა შესრულდება ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n>N$. თუ აღმოჩნდა, რომ $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ დადებითი არაა, მაშინ N რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ რიცხვი 1. რაკი ε ავიღეთ ნებისმიერად, ამიტომ რიცხვი 1 წარმოადგენს მოცემული მიმდევრობის ზღვარს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ რომ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას, სადაც $x_n=(-1)^n$, ზღვარი არა აქვს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მოცემულ მიმდევრობას აქვს სახე

$$-1,\ 1,\ -1, \ldots,\ (-1)^n, \ldots$$

დავუშვათ, რომ ამ მიმდევრობას ზღვრად აქვს რაიმე a რიცხვი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის, კერძოდ $\varepsilon=\frac{1}{2}$ რიცხვისათვის, მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ

$$|x_n-a|<\frac{1}{2}, \quad \text{როდესაც} \quad n>N.$$

რადგანაც x_n თანმიმდევრულად ღებულობს -1 და $+1$ მნიშვნელობებს, ამიტომ უნდა იყოს

$$|1-a|<\frac{1}{2} \quad \text{და} \quad |(-1)-a|<\frac{1}{2}.$$

მაშინ გვექნება

$$2=|(1-a)-[(-1)-a]|\leqslant|1-a|+|(-1)-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

ე. ი. $2<1$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ მიმდევრობას ზღვარი არა აქვს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ $(x_n)_{n>1}$ მიმდევრობა, სადაც

$$x_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{n},$$

კრებადია ნულისაკენ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის ავიღოთ მთელი დადებითი N რიცხვი იმ პირობით, რომ

$$N > \frac{2}{\varepsilon}.$$

აქედან

$$\frac{2}{N} < \varepsilon$$

და, მაშასადამე, ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n > N$, გვექნება

$$|x_n - 0| < \varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\lim x_n = 0$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 6. ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ზღვრად აქვს $+\infty$ (პლუს უსასრული), თუ ყოველი დადებითი A რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ

$$x_n > A, \quad \text{როდესაც} \quad n > N.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim x_n = +\infty.$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 7 ვიტყვით, რომ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ზღვარი აქვს $-\infty$ (მინუს უსასრული), თუ ყოველი უარყოფითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ

$$x_n < A, \quad \text{როდესაც} \quad n > N$$

და წერენ

$$\lim x_n = -\infty.$$

თეორემა 1. თ უ $q > 1$, მ ა შ ი ნ

$$\lim q^n = +\infty, \tag{2.1}$$

ხოლო

$$\lim q^n = 0, \quad \text{როდესაც} \quad 0 < q < 1. \tag{2.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $q > 1$. ბერნულის უტოლობის თანახმად,

$$q^n = (1+h)^n > 1 + nh,$$

სადაც $h>0$. ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$N>\frac{A-1}{h}.$$

აქედან $1+Nh>A$. მაშასადამე,

$$1+nh>A, \quad \text{როდესაც} \quad n>N,$$

ე. ი.

$$q^n>A, \quad \text{როდესაც} \quad n>N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (2.1) ტოლობა.

ახლა ვთქვათ, რომ q ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $a=\frac{1}{q}$, მაშინ

$$q^n=\frac{1}{a^n},$$

სადაც $a>1$. მაგრამ ზემოთ დამტკიცებულის მიხედვით

$$\lim a^n=+\infty.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$a^n>\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{როდესაც} \quad n>N.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{1}{a^n}<\varepsilon,$$

ე. ი.

$$q^n<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (2.2) ტოლობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი a რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1. \tag{2.3}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $a>1$. ბერნულის თეორემის შედეგის თანახმად

$$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}. \tag{2.4}$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$N > \frac{a-1}{\varepsilon}.$$

მაშინ

$$\frac{a-1}{N} < \varepsilon$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ამრიგად, (2.4) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, მართებულია (2.3) ტოლობა.

ახლა ვთქვათ, რომ $a < 1$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $b = \frac{1}{a}$. რაკი $b > 1$, ამიტომ ზემოდამტკიცებულის თანახმად

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{b} = 1.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი N, რომ უტოლობა

$$\sqrt[n]{b} - 1 < \varepsilon$$

შესრულდება ყოველთვის, როდესაც $n > N$. მაგრამ

$$1 - \sqrt[n]{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1,$$

რის გამოც

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n > N,$$

ე. ი. (2.3) ტოლობა მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა $a < 1$. თუ $a = 1$, (2.3) ტოლობა ცხადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ზღვარი, სადაც

$$x_n=\frac{2^n}{2^n+1}.$$

ბერნულის თეორემის თანახმად

$$2^n=(1+1)^n>1+n>n.$$

ახლა ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის ავიღოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას $N>\frac{1}{\varepsilon}$. მაშასადამე,

$$2^N>N>\frac{1}{\varepsilon}.$$

აქედან

$$\frac{1}{2^N}<\varepsilon.$$

ამიტომ

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

ამრიგად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ როგორც კი n გადააჭარბებს N რიცხვს, შესრულდება უტოლობა

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

შემდეგ, რადგანაც

$$1-x_n=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n},$$

ამიტომ

$$|x_n-1|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

მაშასადამე,

$$\lim x_n=1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim \sqrt[n]{n}=1. \tag{2.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. I თავის (23.4) უტოლობის თანახმად,

$$n=\left[1+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right]^n>\frac{n^2}{4}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2.$$

აქედან

$$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2<\frac{4}{n},$$

საიდანაც

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}} \quad (n\geqslant 2). \tag{2.6}$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\frac{2}{\sqrt{N}}<\varepsilon.$$

მაშინ (2.6) უტოლობის თანახმად

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N,$$

ე. ი. მართებულია (2.5) უტოლობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ $\lim x_n$, სადაც $x_n=\frac{a^n}{n^k}$ და $a>1$, $k>0$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $b=\sqrt[k]{a}$, ცხადია, $b>1$. I თავის (23.4) უტოლობის თანახმად

$$b^n=[1+(b-1)]^n>\frac{n^2}{4}(b-1)^2.$$

აქედან

$$\frac{b^n}{n}>\frac{(b-1)^2}{4}n$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n}=+\infty. \tag{2.7}$$

ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$\frac{b^n}{n}>1, \quad \text{როდესაც } n>N.$$

ამის გამო

$$\frac{a^n}{n^k}=\left(\frac{\sqrt[k]{a^n}}{n}\right)^k=\left(\frac{b^n}{n}\right)^k\geqslant\frac{b^n}{n}, \quad \text{როდესაც } n\geqslant N, \quad k\geqslant 1.$$

ამ შემთხვევაში, (2.7) ტოლობის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=+\infty. \tag{2.8}$$

ახლა ვთქვათ, $k<1$, მაშინ

$$\frac{a^n}{n^k}>\frac{a^n}{n}\quad (n=2,\ 3,\ldots).$$

აქედან გამომდინარეობს (2.8) ტოლობის მართებულობა. ამრიგად, (2.8) ტოლობა მართებულია, როცა $a>1$ და $k>0$.

§ 3. ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ

თეორემა 2. *ყოველ კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. ავიღოთ a რიცხვისაგან განსხვავებული რაიმე b რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ b არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის ზღვარი. თუ დავუშვებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=b,$$

მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_n-a|<\frac{|a-b|}{2},\quad |x_n-b|<\frac{|a-b|}{2}, \tag{3.1}$$

როდესაც $n>N$. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $n>N$. მაშინ (3.1) უტოლობების თანახმად გვექნება

$$|a-b|=|(a-x_n)+(x_n-b)|\leqslant|a-x_n|+|x_n-b|<$$
$$<\frac{|a-b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}=|a-b|,$$

რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ მიმდევრობას არ შეიძლება ჰქონდეს a რიცხვისაგან განსხვავებული ზღვარი. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემომოყვანილი თეორემა იმას არ ამტკიცებს, თითქოს ყოველ მიმდევრობას ზღვარი ჰქონდეს, არამედ იმას გვიჩვენებს, რომ თუ

მიმდევრობას ზღვარი აქვს, ასეთი ზღვარი შეიძლება მხოლოდ ერთადერთი იყოს.

განსაზღვრა 8. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ობიექტთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{3.2}$$

და განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა არსებითად ზრდადი მიმდევრობა

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \tag{3.3}$$

მიმდევრობას

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

ეწოდება (3.2) მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ცხადია, რომ $n_k \geqslant k$.

თეორემა 3. თუ რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ, მაშინ მოცემული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობაც კრებადია იმავე a რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ არის მოცემული მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. რადგანაც $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნეს უტოლობას $n_\nu > N$. მაშინ

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon, \text{ როდესაც } k > \nu.$$

მაშასადამე. $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. $\varepsilon = 1$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი ν, რომ

$$|x_n - a| < 1, \quad \text{როდესაც } n > \nu.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი დადებითი რიცხვი K, რომელიც აღემატება შემდეგ რიცხვებს:

$$1, \ |x_1 - a|, \ |x_2 - a|, \dots, \ |x_\nu - a|.$$

მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$|x_n - a| < K.$$

მაგრამ ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობებისა

$$a-K < x_n < a+K \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი: მიმდევრობას რომ ჰქონდეს სასრული ზღვარი, აუცილებელია მისი შემოსაზღვრულობა, მაგრამ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან, საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მიმდევრობის ზღვრის არსებობა.

თეორემა 5. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა ისეთი სამი მიმდევრობა $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ და $(z_n)_{n\geq 1}$, რომ

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \text{როდესაც} \quad n > \nu, \tag{3.4}$$

სადაც ν რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობებს აქვთ საერთო a ზღვარი, მაშინ $(z_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობასაც იგივე ზღვარი ექნება.

დამტკიცება. პირობის თანახმად,

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = a.$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი $N > \nu$, რომ ყოველი მთელი n რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n > N$, გვექნება

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon, \quad a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon.$$

მაგრამ რაკი $x_n \leq z_n \leq y_n$, როდესაც $n > \nu$, ამიტომ

$$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n > N.$$

მაშასადამე, $(z_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი, მაშინ $(|x_n|)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი იქნება $|a|$ რიცხვი.

დამტკიცება. რაკი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ, ამიტომ ნებისმიერ დადებით ε რიცხვისათვის მოიძებნება

ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n-a|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n>N.$$

მაგრამ, როგორც ვიცით,

$$||x_n|-|a|\leqslant|x_n-a|.$$

მაშასადამე,

$$||x_n|-|a||<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n>N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim|x_n|=|a|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. თუ $(x_n)_{n\geqslant1}$ და $(y_n)_{n\geqslant1}$ მიმდევრობების ზღვრებია შესაბამისად a და b რიცხვები, მაშინ მართებულია ტოლობები

$$\lim(x_n+y_n)=a+b, \tag{3.5}$$

$$\lim(x_n-y_n)=a-b. \tag{3.6}$$

დამტკიცება. რაკი $(x_n)_{n\geqslant1}$ და $(y_n)_{n\geqslant1}$ მიმდევრობები კრებადია შესაბამისად a და b რიცხვებისაკენ, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები N_1 და N_2, რომ

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როდესაც} \quad n>N_1$$

და

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როდესაც} \quad n>N_2.$$

თუ ავღნიშნავთ N-ით უდიდესს N_1 და N_2 რიცხვებს შორის, მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როდესაც} \quad n>N.$$

მეორე მხრივ, როდესაც $n>N$, გვექნება

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (3.5) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (3.6) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 8. თუ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ და $(y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობების ზღვრებია შესაბამისად a და b, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim (x_n\, y_n)=ab. \tag{3.7}$$

დამტკიცება. რადგანაც $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი A, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|\, x_n \,| < A \quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

აღვნიშნოთ M-ით A და $|\, b\, |$ რიცხვებს შორის უდიდესი. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მაშინ ზღვრის განსაზღვრის თანახმად არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2\,M},\quad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2\,M},\quad \text{როდესაც}\quad n>N. \tag{3.8}$$

შემდეგ, რადგანაც

$$x_n\, y_n-ab=x_n\,(y_n-b)+b\,(x_n-a),$$

ამიტომ

$$|\, x_n\, y_n-ab\, | \leqslant |\, x_n\, | \cdot |\, y_n-b\, | + |\, b\, | \cdot |\, x_n-a\, | \leqslant$$
$$\leqslant A\, |\, y_n-b\,|+|\,b\,| \cdot |\, x_n-a\,| \leqslant M\, |\, y_n-b\, | +M\, |\, x_n-a\,|.$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.8) უტოლობებს, გვექნება

$$|\, x_n\, y_n-ab\, | < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \quad \text{როდესაც}\quad n>N.$$

მაშასადამე, მართებულია (3.7) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. თუ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას ზღვრად აქვს ნულისაგან განსხვავებული a რიცხვი, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim \left(\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{a}. \tag{3.9}$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი ε, რომელიც $\dfrac{|a|}{2}$ რიცხვზე ნაკლებია. რაკი $(|\, x_n\, |)_{n>1}$ მიმდევრობა კრებადია $|a|$ რიცხვისაკენ, ამიტომ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|\, a\, |-\varepsilon<|\, x_n\, |<|\, a\, |+\varepsilon, \quad \text{როდესაც}\quad n>N. \tag{3.10}$$

მაგრამ

$$|a|-\varepsilon > \frac{|a|}{2}$$

ამიტომ (3.10) უტოლობებიდან გვაქვს

$$|x_n| > \frac{|a|}{2}, \quad \text{როდესაც} \quad n > N. \tag{3.11}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.11) უტოლობას, გვექნება

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|a|\cdot|x_n|} < \frac{|x_n - a|}{|a|\cdot\dfrac{|a|}{2}} = \frac{2}{a^2}\,|x_n - a|,$$

როდესაც $n > N$.

შემდეგ, რაკი $\lim x_n = a$, ამიტომ აღებული ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი $N^* > N$, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n - a| < \frac{a^2}{2}\varepsilon, \quad \text{როდესაც } n > N^*$$

მაშასადამე,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{2}\,\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n > N^*,$$

ე. ი. მართებულია (3.9) ტოლობა.

შედეგი. თუ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ და $(y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობები კრებადია შესაბამისად a და b რიცხვებისაკენ, ამასთანავე $b \neq 0$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

მართლაც, მე-8 და მე-9 თეორემის თანახმად

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim\left(x_n\cdot\frac{1}{y_n}\right) = \lim x_n \cdot \lim\left(\frac{1}{y_n}\right) = a\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

§ 4. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა

თეორემა 10. ნამდვილ რიცხვთა ზრდადი და ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა ზრდადი $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

სიმრავლეს აქვს ზედა საზღვარი და იგი აღვნიშნოთ a ასოთი. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim x_n = a. \tag{4.1}$$

სიმრავლის ზედა საზღვრის განსაზღვრის მიხედვით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი x_ν რიცხვი, რომ

$$x_\nu > a - \varepsilon.$$

რაკი მოცემული მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ

$$x_n > a - \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n > \nu,$$

ანუ

$$| x_n - a | < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n > \nu.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს (4.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ზრდადი მიმდევრობა ზემოდან არაა შემოსაზღვრული, მაშინ

$$\lim x_n = +\infty.$$

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 11. ნამდვილ რიცხვთა კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია. თუ კლებადი მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\lim x_n = -\infty.$$

§ 5. თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა

განვიხილოთ სეგმენტთა მიმდევრობა

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \tag{5.1}$$

რომელიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს:

1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, ე. ი. ყოველი სეგმენტი დაწყებული მეორედან, მოთავსებულია წინა სეგმენტში.

2) $[a_n, b_n]$ სეგმენტის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა $n \to \infty$, ე. ი.

$$\lim (b_n - a_n) = 0. \tag{5.2}$$

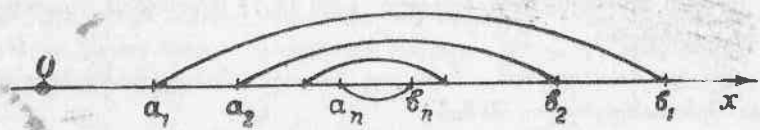
სეგმენტთა ასეთ მიმდევრობას ეწოდება *თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა* (ნახ. 23).

თეორემა 12 (კანტორი). *თუ (5.1) მიმდევრობა წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას, მაშინ არსებობს ერთადერთი რიცხვი ξ, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტს.*

დამტკიცება. რადგანაც (5.1) წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას, ამიტომ როგორიც გინდა იყოს n, გვექნება

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

ამრიგად, რიცხვთა $(a_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრულია, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კი კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ამიტომ არსებობს $\lim a_n$ და $\lim b_n$. (5.2) ტო-



ნახ. 23.

ლობის თანახმად ეს ზღვრები ტოლია და ეს საერთო ზღვარი აღვნიშნოთ ξ ასოთი. ცხადია, ყოველი n-სათვის

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n,$$

ე. ი. $\xi \in [a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \ldots)$.

ამრიგად, არსებობს ξ რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტს.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ξ ერთადერთი რიცხვია, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ ξ რიცხვის გარდა არსებობს სხვა რიცხვი ξ^*, რომელიც ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტს ეკუთვნის. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\xi < \xi^*$, მაშინ ყოველი n-სათვის

$$b_n - a_n \geqslant \xi^* - \xi.$$

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $b_n - a_n$ სხვაობა რაგინდ მცირეა, თუ n-ს ავიღებთ საკმარისად დიდს. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არაა და ამიტომ $\xi^* = \xi$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. კანტორის თეორემაში $[a_n, b_n]$ სეგმენტები, საზოგადოდ, არ შეგვიძლია შევცვალოთ $]a_n, b_n[$ ინტერვალებით. მართლაც, განვიხილოთ თავმოყრილ ინტერვალთა შემდეგი მიმდევრობა

$$]0,\ 1[,\ ]0,\ \frac{1}{2}[,\ldots,]0,\frac{1}{n}[,\ldots$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც ეკუთვნოდეს მოცემული მიმდევრობის ყველა ინტერვალს.

§ 6. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა

ქვემოთ განვიხილავთ ერთ მნიშვნელოვან თეორემას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი თეორემის დამტკიცებისათვის.

ჯერ შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა: ორ $[a, b]$ და $[c, d]$ სეგმენტს ვუწოდებთ ურთიერთ კონგრუენტულს, თუ მათი სიგრძეები თანატოლია, ე. ი, $b-a=d-c$.

თეორემა 13. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი შემოსაზღვრული $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. რადგანაც $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის ყველა წევრს. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი ორ კონგრუენტულ სეგმენტად: მაშინ ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_1, b_1]$. ვთქვათ, x_{n_1} არის მოცემული მიმდევრობის რომელიმე წევრი, რომელიც ეკუთვნის $[a_1, b_1]$ სეგმენტს.

შემდეგ, $[a_1, b_1]$ სეგმენტი გავყოთ ორ კონგრუენტულ სეგმენტად და ამ სეგმენტებიდან ის, რომელიც შეიცავს $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს აღვნიშნოთ $[a_2, b_2]$ სიმბოლოთი. აღვნიშნოთ x_{n_2} სიმბოლოთი მოცემული მიმდევრობის რაიმე ელემენტი, რომელიც მოსდევს x_{n_1} ელემენტს და ეკუთვნის $[a_2, b_2]$ სეგმენტს.

ასეთი პროცესის k-ურ საფეხურზე გამოვყოფთ $[a_k, b_k]$ სეგმენტს, რომელიც შეიცავს $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. აღვნიშნოთ x_{n_k}-თი მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, რომელიც მოსდევს $x_{n_{k-1}}$ წევრს და ეკუთვნის $[a_k, b_x]$ სეგმენტს. ეს პროცესი უსაზღვროდ განვაგრძოთ, მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots\supset[a_k, b_k]\supset\ldots \tag{6.1}$$

ამასთანავე

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k,\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \quad (k=1,\ 2, \ldots).$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\lim (b_k - a_k) = 0.$$

მაშასადამე, (6.1) მიმდევრობა წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას და ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი რიცხვი ξ, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_k,\ b_k]$ სეგმენტს, ე. ი.

$$a_k \leqslant \xi \leqslant b_k \ (k=1,\ 2, \ldots),$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$\lim a_k = \lim b_k = \xi.$$

შემდეგ, რაკი $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, ამიტომ

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \xi$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. მიმდევრობის კრებადობის კოშის ნიშანი

თუ მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა $(x_n)_{n \geqslant 1}$ და დასახელებულია რაიმე ნამდვილი რიცხვი a, ჩვენ შეგვიძლია ზღვრის განსაზღვრის საფუძველზე გამოვარკვიოთ, a რიცხვი არის თუ არა მოცემული მიმდევრობის ზღვარი. ამ გზით მიმდევრობის კრებადობის გამოკვლევა მოუხერხებელია, ვინაიდან ყველა ნამდვილი რიცხვისათვის ზემოთ აღნიშნული გარემოების შემოწმება, საზოგადოდ, შეუძლებელია. ამიტომ ისმის კითხვა: როგორი აგებულების უნდა იყოს მიმდევრობა, რომ იგი იყოს კრებადი? სანამ ამ კითხვას ვუპასუხებდეთ, შემოვიღოთ

განსაზღვრა 9. რიცხვთა $(x_n)_{n \geqslant 1}$ მიმდევრობას ვუწოდებთ ფუნდამენტალურს, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N,\ n > N.$$

ლემა. რიცხვთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_n)_{n \geqslant 1}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალუ-

რია. მაშინ $\varepsilon=1$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_m - x_n| < 1, \text{ როდესაც } m > \nu, \ n > \nu.$$

ამ უტოლობაში ვიგულისხმოთ, რომ $m=\nu+1$. მაშინ გვექნება

$$|x_{\nu+1} - x_n| < 1, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

აქედან გვაქვს

$$|x_n| < 1 + |x_{\nu+1}|, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

ახლა $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|$, $1+|x_{\nu+1}|$ რიცხვებს შორის უდიდესი აღვნიშნოთ K-თი, მაშინ n-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$|x_n| < K$$

და ამით ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. რიცხვთა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოცემული მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტალური.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მოცემული მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } k > N.$$

ახლა ვთქვათ, m და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $m > N$, $n > N$. მაშინ

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე,

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ე. ი. $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ლემის თანახმად ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია ვამოვ-

ყოთ ქვემიმდევრობა $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$, რომელიც კრებადია რომელიღაც ξ რიცხვისაკენ.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim x_n=\xi. \tag{7.1}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მაშინ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ფუნდამენტალურობის გამო მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } m>N, n>N. \tag{7.2}$$

შევარჩიოთ k ისე, რომ ერთდროულად დაცული იყოს პირობები

$$|x_{n_k}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{და} \quad n_k>N.$$

მაშინ, თუ (7.2) უტოლობაში ვიგულისხმებთ $m=n_k$, გვექნება

$$|x_{n_k}-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n>\mathrm{N}.$$

მაშასადამე, ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n>N$, გვექნება

$$|x_n-\xi|=|(x_n-x_{n_k})+(x_{n_k}-\xi)|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+$$

$$+|x_{n_k}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

ე. ი. მართებულია (7.1) ტოლობა და ამით თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებულ თეორემას ეწოდება კოშის თეორემა რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ. ამ თეორემას დიდი მნიშვნელობა აქვს მათემატიკურ ანალიზში.

§ 8. e რიცხვი. ნატურალური ლოგარითმი

უმაღლეს მათემატიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს ერთ განსაკუთრებულ რიცხვს, რომელიც ნეპერის მიერ იყო შემოღებული.

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$, სადაც

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

ეს მიმდევრობა არსებითად ზრდადია. მართლაც, თუ $n\geqslant 2$, გვექნება

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n:$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}}\cdot\frac{n}{n-1}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\frac{n}{n-1}.$$

ბერნულის უტოლობის თანახმად

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}>\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}=1,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_n>x_{n-1}$. ამრიგად, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა არსებითად ზრდადია.

ახლა განვიხილოთ $(y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა, სადაც

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ეს მიმდევრობა კლებადია. მართლაც, თუ $n\geqslant 2$, გვექნება

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n:\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}.$$

მაგრამ ბერნულის უტოლობის თანახმად,

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}>1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}>\frac{n}{n-1}.$$

მაშასადამე, $\frac{y_{n-1}}{y_n}>1$, ე. ი. $y_n<y_{n-1}$. ამრიგად, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა არსებითად კლებადია.

შემდეგ, რაკი $x_n<y_n$ $(n=1, 2,\ldots)$ და $(y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა არსებითად კლებადია, ამიტომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის

$$x_n<y_5=\left(1+\frac{1}{5}\right)^6<3.$$

მაშასადამე, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია

$\left(1+\frac{1}{5}\right)^6$ რიცხვით. ამიტომ მე-10 თეორემის თანახმად $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი. ამ ზღვარს ეწოდება ნ ე პ ე- რ ი ს რ ი ც ხ ვ ი და აღინიშნება e ასოთი. ამრიგად, განსაზღვრის მიხედვით

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e რიცხვის შეფასებისათვის შევნიშნავთ, რომ რაკი

$$2<x_n<\left(1+\frac{1}{5}\right)^6,\ n\geqslant 2,$$

ამიტომ $2<e<3$.

მტკიცდება, რომ e ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ათი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით შემდეგია

$$e=2{,}7182818284.$$

ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: რა ფუძით უნდა ავიღოთ ლოგარითმები, რომ მათი გამოყენება უფრო მოხერხებული იყოს? პრაქტიკულ გამოთვლებში უმეტეს შემთხვევაში ათობითი ანუ ბრიგის (Briggs) ლოგარითმებით სარგებლობენ. მაგრამ მათემატიკური ანალიზის სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას უფრო ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ნატურალური ანუ ნეპერის ლოგარითმებით, რომელთა ფუძედ აღებულია ნეპერის e რიცხვი.

თუ x რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ ამ რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს აღნიშნავენ $\ln x$ სიმბოლოთი.

ვიპოვოთ დამოკიდებულება ლოგარითმების სხვადასხვა სისტემებს შორის. ვთქვათ, მოცემულია ლოგარითმის ორი a და b ფუძე და რაიმე დადებითი N რიცხვი. ვიპოვოთ დამოკიდებულება $\lg_a N$ და $\lg_b N$ რიცხვებს შორის. ლოგარითმის განსაზღვრის თანახმად,

$$N=a^{\lg_a N},\quad N=b^{\lg_b N}$$

და, მაშასადამე

$$a^{\lg_a N}=b^{\lg_b N}$$

თუ ამ ტოლობას გავალოგარითმებთ b ფუძით, გვექნება

$$\lg_a N\cdot\lg_b a=\lg_b N.$$

აქედან

$$\lg_a N=\frac{1}{\lg_b a}\ \lg_b N. \tag{8.1}$$

ასეთია დამოკიდებულება აღნიშნულ ლოგარითმებს შორის. კერძოდ, თუ $b=e$, სადაც e ნეპერის რიცხვია, მაშინ (8.1) ტოლობიდან გვაქვს

$$\lg_a N = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln N. \tag{8.2}$$

როგორც ვხედავთ, $\frac{1}{\ln a}$ ის მუდმივია, რომელზედაც უნდა გავამრავლოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი, რომ მივიღოთ იმავე რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით.

$\frac{1}{\ln a}$ რიცხვს ეწოდება a ფუძიან ლოგარითმთა სისტემის მოდული ნატურალური სისტემის მიმართ. თუკი $a=10$, მაშინ (8.2) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\lg N = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln N. \tag{8.3}$$

$\frac{1}{\ln 10}$ მოდულს ამ შემთხვევაში აღნიშნავენ M-ით. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ასეთია:

$$M=0{,}43429448.$$

მწკრივთა თეორიაში განვიხილავთ ფორმულებს, რომელთა საშუალებით შევძლებთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვის ნატურალური ლოგარითმის გამოთვლას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა, სადაც

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

დავამტკიცოთ, რომ მოცემულ მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როგორც ვიცით,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e.$$

თუ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს გავალოგარითმებთ e ფუძით, მივიღებთ

$$m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) < 1,$$

საიდანაც

$$\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{m}. \tag{8.4}$$

შემდეგ,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}>e.$$

აქედან გვაქვს

$$(m+1)\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)>1,$$

საიდანაც

$$\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)>\frac{1}{m+1}. \tag{8.5}$$

(8.4) და (8.5) უტოლობათა გაერთიანებით მივიღებთ

$$\frac{1}{m+1}<\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{m},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{m+1}<\ln(m+1)-\ln m<\frac{1}{m}.$$

თუ m-ს მივცემთ მნიშვნელობებს $1, 2, \ldots, n$, გვექნება

$$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1,$$

$$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},$$

საიდანაც

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)>0.$$

მაშასადამე, $x_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$. ამრიგად, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ყველა წევრი დადებითია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია. (8.5) უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.$$

ამიტომ $x_{n+1}<x_n$. ამრიგად, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ამიტომ არსებობს $\lim x_n$. ამ ზღვარს აღნიშნავენ C ასოთი და მას ლ. ეილერის (L. Euler) *მუდმივა* ეწოდება. ეილერის მუდმივას შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობა აქვს

$$C=0,5772156649.$$

ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\rho_n, \tag{8.6}$$

სადაც ρ_n ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $n\to\infty$.

§ 9. შტოლცის თეორემა

თეორემა 15. *ვთქვათ, მოცემულია ორი მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ და $(y_n)_{n\geqslant 1}$. ამასთანავე მეორე მიმდევრობა არსებითად ზრდადია. თუ $\lim y_n=+\infty$ და*

$$\lim\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A, \tag{9.1}$$

სადაც A სასრულია, მაშინ არსებობს $\frac{x_n}{y_n}$ ფარდობის ზღვარი და

$$\lim\frac{x_n}{y_n}=A. \tag{9.2}$$

დამტკიცება. (9.1) ტოლობის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_k-x_{k-1}}{y_k-y_{k-1}}<A+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } k>\nu.$$

აქედან

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_k-y_{k-1})<x_k-x_{k-1}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_k-y_{k-1}),$$

როდესაც $k>\nu$. ახლა k-ს მივცეთ მნიშვნელობები $k=\nu+1$, $\nu+2,\ldots,n$, მივიღებთ

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{\nu+1}-y_\nu)<x_{\nu+1}-x_\nu<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{\nu+1}-y_\nu),$$

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{\nu+2}-y_{\nu+1})<x_{\nu+2}-x_{\nu+1}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{\nu+2}-y_{\nu+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_{n-1}).$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_\nu)<x_n-x_\nu<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_\nu),$$

საიდანაც

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_\nu}{y_n-y_\nu}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე, როდესაც $n>\nu$, გვაქვს

$$\left|\frac{x_n-x_\nu}{y_n-y_\nu}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.3}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{x_n}{y_n}-A=\frac{x_\nu-Ay_\nu}{y_n}+\left(1-\frac{y_\nu}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_\nu}{y_n-y_\nu}-A\right).$$

ახლა შევარჩიოთ ნატურალური რიცხვი $N>\nu$ ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left|\frac{x_\nu-Ay_\nu}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n>N. \tag{9.4}$$

მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ (9.3) და (9.4) უტოლობებს, გვექნება

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N,$$

ე. ი. მართებულია (9.2) ტოლობა. ამით შტოლცის თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შტოლცის თეორემის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4-(n-1)^4}=\frac{1}{4}.$$

§ 10. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ldots \tag{10.1}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\overline{x}_n=\sup\{x_n,\ x_{n+1},\ \ldots\},\quad \underline{x}_n=\inf\{x_n,\ x_{n+1},\cdots\}.$$

თუ (10. 1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ ყოველი n რიცხვისათვის $\overline{x}_n=+\infty$, ხოლო თუ მოცემული მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ ყოველი n-თვის $\underline{x}_n=-\infty$.

ვიგულისხმოთ, რომ (10.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ

$$\overline{x}_1\geqslant\overline{x}_2\geqslant\cdots\geqslant\overline{x}_n\geqslant\cdots.$$

ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ

$$\lim_{n\to\infty}\overline{x}_n=\xi.$$

ξ სასრულია, ან $\xi=-\infty$. ამ ξ რიცხვს ეწოდება (10.1) მიმდევრობის ზედა ზღვარი და აღინიშნება $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$ სიმბოლოთი.

თუ (10.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=+\infty.$$

შემდეგ, თუ (10.1) მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$\underline{x}_1\leqslant\underline{x}_2\leqslant\cdots\leqslant\underline{x}_n\leqslant\cdots$$

ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ

$$\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n=\eta.$$

η სასრულია, ან $\eta=+\infty$. ამ η რიცხვს ეწოდება (10.1) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი და აღინიშნება $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ სიმბოლოთი.

რადგან ყოველი n-სათვის $x_n \leqslant \overline{x_n}$, ამიტომ

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

თუ (10. 1) მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n=-\infty.$$

ცხადია, თუ (10.1) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ და $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ სასრულია.

თეორემა 16. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = -\varliminf_{n\to\infty} (-x_n). \tag{10.2}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -\varlimsup_{n\to\infty} (-x_n). \tag{10.3}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$\xi_n = \sup\{x_n, x_{n+1},\dots\}, \quad \eta_n = \inf\{-x_n, -x_{n+1}\dots\}$,

დავამტკიცოთ, რომ

$$\xi_n = -\eta_n, \ (n=1, 2,\dots). \tag{10.4}$$

რადგანაც

$$\xi_n \geqslant x_k, \quad \eta_n \leqslant -x_k \quad (k=n, n+1,\dots),$$

ამიტომ

$$-\xi_n \leqslant -x_k, \ -\eta_n \geqslant x_k \quad (k=n, n+1, \dots).$$

მაშასადამე,

$$-\xi_n \leqslant \eta_n, \quad -\eta_n \geqslant \xi_n.$$

აქედან გამომდინარეობს (10.4) ტოლობის მართებულობა. მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = -\lim_{n\to\infty} \eta_n,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (10.2) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება (10.3) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 17. თუ $\overline{\lim}\, x_n = a$, მაშინ არსებობს $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია a-კენ.

დამტკიცება. თუ $a = -\infty$, მაშინ მოცემული მიმდევრობა კრებადია $-\infty$ საკენ, ვინაიდან ყოველი n-სათვის $x_n \leqslant \overline{x}_n$. ამ შემთხვევისათვის თეორემა ტრივიალურია.

ახლა ვთქვათ, $a = +\infty$. ამ შემთხვევაში ყველა k-თვის გვექნება $\overline{x}_k = +\infty$. მაშასადამე, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული. ამიტომ მოცემული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $(x_{n_i})_{i\geqslant 1}$, რომელიც კრებადია $+\infty$ -საკენ.

დასასრულ ვიგულისხმოთ, რომ a სასრულია. ამ შემთხვევაში ყოველი $\overline{x}_n$ სასრულია. რიცხვი 1-თვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ინდექსი n_1, რომ

$$\overline{x}_1 - 1 < x_{n_1} \leqslant \overline{x}_1 .$$

შემდეგ, რიცხვი 2-თვის მოიძებნება ისეთი ინდექსი $n_2 > n_1$, რომ

$$\overline{x}_2 - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leqslant \overline{x}_2 .$$

საზოგადოდ, k რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ინდექსი $n_k > n_{k-1}$, რომ

$$\overline{x}_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leqslant \overline{x}_k . \tag{10.5}$$

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, რომელიც $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა. (10.5) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 18. თუ $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n = b$, მაშინ არსებობს $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია b-კენ.

მე-17 და მე-18 თეორემებიდან გამომდინარეობს

შ ე დ ე გ ი. $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები წარმოადგენენ შესაბამისად ამავე მიმდევრობის ყველა კრებადი ქვემიმდევრობის ზღვართა შორის უდიდესსა და უმცირესს.

თეორემა 19. თუ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა a-კ ე ნ, რ ო მ ე ლ ი ც ს ა ს რ უ ლ ი ა ა ნ უ ს ა ს რ უ ლ ო ა, მ ა შ ი ნ

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია a-კენ, ამიტომ აღნიშნული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია a-კენ და, მაშასადამე, მე-17 და მე-18 თეორემების თანახმად

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = a.$$

თეორემა 20. თუ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი ს ზ ე დ ა დ ა ქ ვ ე დ ა ზ ღ ვ რ ე ბ ი ტ ო ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ე ს მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა კ რ ე ბ ა დ ი ა ა მ ზ ღ ვ რ ე ბ ი ს ს ა ე რ თ ო მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ი ს ა კ ე ნ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მართლაც, რაკი ყოველი n-სთვის მართებულია უტოლობები $\underline{x_n} \leqslant x_n \leqslant \overline{x_n}$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x_n}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 11. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები

რაიმე E სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ იგი ეკვივალენტურია ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლისა.

თვლადი სიმრავლის განსაზღვრა ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრისა: ს ი მ რ ა ვ ლ ე ს თ ვ ლ ა დ ი ე წ ო დ ე ბ ა, თ უ შ ე ს ა ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა ა მ ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ე ლ ე მ ე ნ ტ თ ა დ ა ნ ო მ ვ რ ა.

სიმრავლის ელემენტების დანომვრა იმას ნიშნავს, რომ სიმრავლის ყოველი ელემენტისათვის შეიძლება რაიმე ნატურალური რიცხვის დასახელება, როგორც მისი ნომრისა იმგვარად, რომ ყოველ ელემენტს ჰქონდეს

მხოლოდ ერთი ნომერი და ყოველი ნატურალური რიცხვი იყოს ნომერი სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტისა.

ამრიგად, თუ E თვლადი სიმრავლეა, მაშინ იგი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$E=\{e_1, e_2, \cdots e_n, \cdots\}.$$

თეორემა 21. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ნაწილი აგრეთვე თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A რაიმე თვლადი სიმრავლეა. რაკი A თვლადია, ამიტომ მისი ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \cdots \tag{11,1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ B არის A სიმრავლის რაიმე უსასრულო ნაწილი. მაშინ B სიმრავლის ელემენტები დაიკავებენ გარკვეულ ადგილებს (11. 1) მიმდევრობაში. დავუშვათ, რომ a_{n_1} არის (11.1) მიმდევრობის პირველი ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის; იგი b_1-ით აღვნიშნოთ. a_{n_2} იყოს (11. 1) მიმდევრობის მეორე ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის; იგი b_2-ით აღვნიშნოთ. ასე შემდეგ, a_{n_k} იყოს (11.1) მიმდევრობის k-ური ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის B სიმრავლეს; იგი აღვნიშნოთ b_k-თი. ეს პროცესი შეგვიძლია განვაგრძოთ უსაზღვროდ; ასე რომ B სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$b_1, b_2, \dots, b_k, \cdots$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ B თვლადი სიმრავლეა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22. ყველა რაციონალური რიცხვის R სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვის R_+ სიმრავლე თვლადია.

რადგანაც ყოველი დადებითი რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ $\frac{p}{q}$ წილადის სახით, ამიტომ ცხრილში

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots, \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

შეხვდება ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვი. მაგრამ ამ ცხრილის ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ ერთი მიმდევრობის სახით

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

მაშასადამე, R_+ სიმრავლე თვლადია და ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$R_+=\{r_1, r_2, \dots r_n, \dots\}.$$

შემდეგ, თუ აღვნიშნავთ R_- სიმბოლოთი ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლეს, მაშინ ცხადია, რომ

$$R_-=\{-r_1, -r_2, \dots, -r_n, \dots\}.$$

ახლა R სიმრავლე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$R=\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots, r_n, -r_n, \dots\},$$

მაშასადამე, R სიმრავლე თვლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც თვლადი არაა, *არათვლადი სიმრავლე* ეწოდება.

თვლადი სიმრავლის ცნებას აზრი და მნიშვნელობა მხოლოდ მაშინ ექნება, თუ არსებობს არათვლადი სიმრავლეებიც, თვლადი სიმრავლე უსასრულო სიმრავლის გარკვეული სახეა. წინააღმდეგ შემთხ-

ვევაში თვლადი სიმრავლის ცნება იქნება მხოლოდ უსასრულო სიმრავლის ცნების მოდიფიკაცია.

ამრიგად, თვლადი სიმრავლის ღირებულება იმაზეა დამოკიდებული, არსებობს თუ არა არათვლადი სიმრავლეები. დავამტკიცოთ არათვლადი სიმრავლის არსებობა.

თეორემა 23. $\Delta=[0, 1]$ სეგმენტი არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, Δ თვლადი სიმრავლეა. მაშინ Δ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე

$$\Delta=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

გავყოთ Δ სეგმენტი სამ კონგრუენტულ სეგმენტად $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$. ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც იქნება ისეთი, რომელიც არ შეიცავს x_1 ელემენტს. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ Δ_1 სიმბოლოთი.

ახლა Δ_1 სეგმენტი გავყოთ სამ კონგრუენტულ სეგმენტად $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_1^{(3)}$. ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც იქნება ისეთი, რომელიც არ შეიცავს x_2 ელემენტს, ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ Δ_2 სიმბოლოთი.

თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ უსაზღვროდ, მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$\Delta\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset\ \ldots\ \supset\Delta_n\supset\ \ldots \tag{11.2}$$

ცხადია, რომ

$$|\Delta_1|=\frac{1}{3},\ |\Delta_2|=\frac{1}{3^2},\ldots,|\Delta_n|=\frac{1}{3^n},\ \ldots$$

მაშასადამე, (11.2) მიმდევრობა წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას. ამიტომ არსებობს ერთადერთი წერტილი ξ, რომელიც ეკუთვნის (11.2) მიმდევრობის ყველა სეგმენტს. კერძოდ $\xi\in\Delta$ და ამიტომ ξ უნდა იყოს რომელიმე x_n. მაგრამ $x_n\,\overline{\in}\,\Delta_n$ და, მაშასადამე, $\xi\,\overline{\in}\,\Delta_n$. ამრიგად, ერთდროულად გვაქვს.

$$\xi\in\Delta_n \text{ და } \xi\,\overline{\in}\,\Delta_n.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამიტომ ჩვენი დაშვება სწორი არაა. მაშასადამე, Δ არათვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

კითხვები

1. რას ეწოდება ობიექტთა მიმდევრობა? რიცხვთა მიმდევრობის მოცემის რა წესები იცით?

2. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული? ქვემოდან შემოსაზღვრული?

3. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი მიმდევრობა? კლებადი მიმდევრობა? არსებითად ზრდადი? არსებითად კლებადი? მონოტონური? არსებითად მონოტონური? სტაციონარული?

4. რას ნიშნავს, რომ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი?

5. სტაციონარულ მიმდევრობას აქვს თუ არა ზღვარი?

6. შემოსაზღვრულია თუ არა კრებადი მიმდევრობა?

7. კრებადია თუ არა ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობა?

8. შეიძლება თუ არა კრებად მიმდევრობას ორი ზღვარი ჰქონდეს?

9. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ ზრდად მიმდევრობას აქვს თუ არა სასრული ზღვარი?

10. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ კლებად მიმდევრობას აქვს თუ არა სასრული ზღვარი?

11. სეგმენტთა როგორ მიმდევრობას ეწოდება თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა?

12. რაში მდგომარეობს კანტორის თეორემა თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობის შესახებ?

13. რაში მდგომარეობს ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა?

14. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტალური?

15. შეიძლება თუ არა, რომ ფუნდამენტალური მიმდევრობა არ იყოს შემოსაზღვრული?

16. რაში მდგომარეობს კოშის თეორემა მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ?

17. რას ეწოდება ნეპერის e რიცხვი?

სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. პასუხი: 1.

2. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n = \dfrac{2n-1}{2n}$. პასუხი: 1.

3. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n = \dfrac{3n+1}{5n+1}$. პასუხი: $\dfrac{3}{5}$.

გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n = \dfrac{n^5+4n-1}{n^6-7n+2}$. პასუხი: 0.

5. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+5n^3+n+1}{n^3-6n^2+2n+3}$. პასუხი: ∞.

6. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5-3n^4+1}{3n^5+2n^3-7}$. პასუხი: $\dfrac{2}{3}$.

7. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$.

8. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. პასუხი: e.

9. დაამტკიცეთ, რომ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობას, სადაც $x_n = \cos n\pi$, ზღვარი არა აქვს.

10. ააგეთ არაკრებადი $(x_n)_{n\geqslant 1}$ და $(y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობები, ისეთი, რომ $(x_n+y_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი.

11. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

12. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0.$$

13. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty.$$

14. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

15. მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$, სადაც $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$. იპოვეთ $\underline{\lim}\, x_n$ და $\overline{\lim}\, x_n$. პასუხი: 0 და 1.

16. იპოვეთ $\underline{\lim}\, x_n$ და $\overline{\lim}\, x_n$, თუ $x_n=\cos n\pi$.
პასუხი: -1 და 1.

თავი IV

რიცხვთა მწკრივი

მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ნაწილია მწკრივთა თეორია. მწკრივების საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ მიახლოებითი მნიშვნელობები ფუნქციების, ინტეგრალებისა და ა. შ. ამ განყოფილებაში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ რიცხვთა მწკრივებს.

§ 1. ნამდვილ წევრებიანი რიცხვთა მწკრივი. კრებადობა და განშლადობა

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა $(u_n)_{n\geqslant 0}$. თუ ამ მიმდევრობის ყველა წევრს შევაერთებთ $+$ ნიშნით, მივიღებთ სიმბოლოს

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1.1}$$

რომელსაც რიცხვთა მწკრივი ეწოდება. u_n რიცხვს მწკრივის n-ური წევრი ანუ მწკრივის ზოგადი წევრი ეწოდება.

აღებულ მწკრივს ხშირად ეწოდება მწკრივი ზოგადი u_n წევრით ან მოკლედ (u_n) მწკრივი.

(1.1) სიმბოლო არ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჯამი ჩვეულებრივი აზრით, ვინაიდან არითმეტიკაში ჯამის ცნება განსაზღვრულია შესაკრებთა სასრული სიმრავლისათვის. რომ ვილაპარაკოთ (1.1) მწკრივის ჯამზე, საჭიროა გავავრცელოთ ჯამის ცნება შესაკრებთა უსასრულო სიმრავლის შემთხვევაში.

ჯამს

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

ეწოდება (1.1) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი ან უბრალოდ—კერძო ჯამი. როდესაც n გაირბენს მნიშვნელობებს 0, 1, 2, ... მივიღებთ კერძო ჯამთა მიმდევრობას

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n,\ldots$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 1. (1.1) მწკრივს ეწოდება კრებადი s რიცხვისაკენ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

ამ შემთხვევაში s რიცხვს ეწოდება მოცემული მწკრივის ჯამი და წერენ

$$s = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \cdots,$$

ან მოკლედ

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

თუ $\lim s_n$ არ არსებობს ანდა იგი უსასრულოა, მაშინ აღებულ მწკრივს გ ა ნ შ ლ ა დ ი ეწოდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ლაიბნიცის მწკრივი

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

ვიპოვოთ ამ მწკრივის ჯამი. გვაქვს:

$$s_n = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\lim s_n = 1$. მაშასადამე, აღებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $s = 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \tag{1.2}$$

ამ მწკრივს ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი მ წ კ რ ი ვ ი ეწოდება. დავამტკიცოთ, რომ ეს მწკრივი განშლადია. წინა თავის მე-8 პარაგრაფში დავადგინეთ, რომ

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

რაკი $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1)=+\infty$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$ მაშასადამე, (1.2) მწკრივი განშლადია.

თეორემა 1. თუ მწკრივში რამდენიმე წევრს ახალი წევრით შევცვლით, ან თუ მას ჩამოვაშორებთ (დავუმატებთ) რამდენიმე წევრს, ამით მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა არ დაირღვევა.

დამტკიცება. განვიხილოთ (1.1) მწკრივი და მისი რამდენიმე წევრი, მაგალითად, $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_i}$ შევცვალეთ ახალი $v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_i}$ წევრებით ($k_1<k_2<\ldots<k_i$). ვთქვათ,

$$(v_{k_1}+v_{k_2}+\ldots+v_{k_i})-(u_{k_1}+u_{k_2}+\ldots+u_{k_i})=a.$$

თუ s_n წარმოადგენს (1.1) მწკრივის n-ურ კერძო ჯამს, ხოლო s_n' არის ამ მწკრივის წევრთა შეცვლის შედეგად მიღებული მწკრივის კერძო ჯამი, მაშინ

$$s_n'-s_n=a, \text{ როდესაც } n\geqslant k_i.$$

აქედან, თუ $n\geqslant k_i$, გვაქვს

$$s_n'=s_n+a.$$

ცხადია, რომ თუ (1.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ $\lim s_n$ არსებობს და, მაშასადამე, იარსებებს $\lim s_n'$. ამიტომ (1.1) მწკრივის წევრთა შეცვლის შედეგად მიღებული მწკრივი აგრეთვე კრებადია. თუკი (1.1) მწკრივი განშლადია, მაშინ არ არსებობს $\lim s_n$ და, მაშასადამე, არ იარსებებს აგრეთვე $\lim s_n'$. ამიტომ (1.1) მწკრივის წევრთა შეცვლის შედეგად მიღებული მწკრივი აგრეთვე განშლადია.

მწკრივის რამდენიმე წევრის ჩამოშორება ამ მწკრივის სათანადო წევრის 0-ით შეცვლის ტოლფასია. ასე რომ არც ეს ოპერაცია დაარღვევს მწკრივის კრებადობას ან განშლადობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

თეორემა 2 (კოში). (u_n) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ როდესაც $n>N$ და ნებისმიერი ნატურალური p რიცხვისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon. \qquad (2.1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ მიცემული მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა

$$s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots. \qquad (2.2)$$

(u_n) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია (2.2) მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტალური, ე. ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის ისეთი ნატურალური N რიცხვი მოიძებნებოდეს, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|s_m-s_n|<\varepsilon, \text{ როდესაც } m>N, n>N. \qquad (2.3)$$

თუ ავიღებთ $m=n+p$, სადაც p ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ (2.3) პირობა ასე გადაიწერება

$$|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

ეს კი ტოლფასია (2.1) პირობისა, ვინაიდან

$$s_{n+p}-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. (u_n) მ წ კ რ ი ვ ი ს კ რ ე ბ ა დ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა, რ ო მ მ ი ს ი ზ ო გ ა დ ი u_n წ ე ვ რ ი მ ი ი ს წ რ ა ფ ვ ო დ ე ს ნ უ ლ ი ს ა კ ე ნ, რ ო დ ე ს ა ც $n\to\infty$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, (u_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ მე-2 თეორემის პირობა შესრულებულია ყოველი p-თვის, კერძოდ, როდესაც $p=1$. მივიღებთ, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ $|u_{n+1}|<\varepsilon$, როდესაც $n>N$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ისმის კითხვა: თუ ზოგადი წევრი ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ კრებადია თუ არა მწკრივი? საზოგადოდ არა. მართლაც, ჰარმონიული მწკრივის ზოგადი წევრი $u_n=\frac{1}{n}$ ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $n\to\infty$, მაგრამ მწკრივი განშლადია.

თეორემა 4. გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ი პ რ ო გ რ ე ს ი ა

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0) \qquad (2.4)$$

ა რ ი ს კ რ ე ბ ა დ ი მ წ კ რ ი ვ ი და მ ი ს ი ჯ ა მ ი ა

$$s=\frac{a}{1-q}, \tag{2.5}$$

როდესაც $|q|<1$, ხოლო ეს მწკრივი განშლადია, როდესაც $|q|\geqslant 1$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $|q|<1$. გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის მიხედვით

$$s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n=\frac{a-aq^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^{n+1}}{1-q}.$$

მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=0,$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a}{1-q},$$

ე. ი. მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი მოცემულია (2.5) ფორმულით.

ახლა ვთქვათ, $|q|\geqslant 1$. მაშინ ყოველი n-თვის $|aq^n|\geqslant|a|$ და, მაშასადამე, (2.4) მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $n\to\infty$, ამიტომ მე-3 თეორემის თანახმად მწკრივი განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. მწკრივის ძირითადი თვისებები

თეორემა 5. თუ კრებადი (u_n) მწკრივის წევრებს მათი რიგის შეუცვლელად ისე დავაჯგუფებთ, რომ ყოველი ჯგუფის წევრთა რიცხვი სასრულია და ამ ჯგუფების ჯამებისაგან მწკრივს შევადგენთ, მიღებული მწკრივი კრებადი იქნება და მისი ჯამი თავიდან აღებული მწკრივის ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $n_0<n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ და შევადგინოთ (v_k) მწკრივი, სადაც

$$v_0=u_0+u_1+\cdots+u_{n_0},$$
$$v_1=u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_k=u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

აღვნიშნოთ s_ν და s'_ν სიმბოლოებით შესაბამისად (u_n) და (v_n) მწკრივების ν-ური კერძო ჯამები. ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი k-თვის გვექნება

$$s'_k = s_{n_k}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (s'_k) მიმდევრობა წარმოადგენს (s_k) მიმდევრობის ქვემიმდევრობას. მაშასადამე, რაკი (s_n) მიმდევრობა კრებადია გარკვეული s რიცხვისაკენ, ამიტომ (s'_k) მიმდევრობაც კრებადია s რიცხვისაკენ, ე. ი. თუ (u_n) მწკრივი კრებადია s რიცხვისაკენ, მაშინ (v_k) მწკრივიც კრებადია იმავე რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (v_k) მწკრივის კრებადობიდან, საზოგადოდ არ გამომდინარეობს (u_k) მწკრივის კრებადობა. მართლაც, განვიხილოთ მწკრივი

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

ეს მწკრივი განშლადია, რადგანაც ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაგრამ მწკრივი

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$

კრებადია.

თეორემა 6. თ უ (u_n) მ წ კ რ ი ვ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა s რ ი ც ხ ვ ი ს ა კ ე ნ, მ ა შ ი ნ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი λ რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს (λu_n) მ წ კ რ ი ვ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა λs რ ი ც ხ ვ ი ს ა კ ე ნ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

$$\sigma_n = \lambda u_0 + \lambda u_1 + \dots + \lambda u_n,$$

გვექნება

$$\sigma_n = \lambda s_n.$$

პირობის ძალით $\lim s_n = s$ და, მაშასადამე, $\lim \sigma_n = \lambda s$. თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 2. (u_n) და (v_n) მწკრივების ჯამი ეწოდება $(u_n + v_n)$ მწკრივს, ხოლო მათი სხვაობა არის $(u_n - v_n)$ მწკრივი.

თეორემა 7. თ უ (u_n) და (v_n) მ წ კ რ ი ვ ე ბ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ა დ s დ ა σ რ ი ც ხ ვ ე ბ ი ს ა კ ე ნ, მ ა შ ი ნ $(u_n + v_n)$ მ წ კ რ ი ვ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა დ ა მ ი ს ი ჯ ა მ ი ა $s+\sigma$. ა ს ე ვ ე $(u_n - v_n)$ მ წ კ რ ი ვ ი ც კ რ ე ბ ა დ ი ა დ ა მ ი ს ი ჯ ა მ ი ა $s-\sigma$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

$$\sigma_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n,$$

$$t_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n).$$

თეორემის პირობის თანახმად

$$\lim s_n = s, \quad \lim \sigma_n = \sigma.$$

ამიტომ

$$\lim t_n = \lim (s_n + \sigma_n) = \lim s_n + \lim \sigma_n = s + \sigma.$$

ამრიგად, $(u_n + v_n)$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $s + \sigma$.

ანალოგიურად მტკიცდება $(u_n - v_n)$ მწკრივის კრებადობა.

შენიშვნა. შეიძლება, რომ $(u_n + v_n)$ მწკრივი იყოს კრებადი, (u_n) და (v_n) მწკრივები კი განშლადი. მართლაც, ვთქვათ, $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{-1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. ცხადია, $(u_n + v_n)$ მწკრივი კრებადია, მაგრამ (u_n) და (v_n) მწკრივები განშლადია.

განსაზღვრა 3. (u_n) მწკრივის ნაშთი n-ური წევრის შემდეგ ეწოდება $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ მწკრივს.

ცხადია, მწკრივი და მისი ნაშთი ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

§ 4. დადებითი მწკრივები

(u_n) მწკრივს, რომლის ყოველი წევრი დადებითი რიცხვია, დადებითი მწკრივი ეწოდება. მართებულია შემდეგი

თეორემა 8. დადებითი მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე დადებითი (u_n) მწკრივი. ადვილი შესამჩნევია, რომ კერძო ჯამი

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

იზრდება n-თან ერთად.

თუ (u_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ კერძო ჯამთა მიმდევრობა $(s_n)_{n \geqslant 0}$ ზემოდან შემოსაზღვრულია და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია. პირიქით, თუ კერძო ჯამთა მიმდევრობა $(s_n)_{n \geqslant 0}$ ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი კრებადია, ე. ი. (u_n) მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად მწკრივი $1+2+\ldots+n+\ldots$ განშლადია, ვინაიდან კერძო ჯამთა მიმდევრობა ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული.

თეორემა 9. ვთქვათ, $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots \geqslant 0$. მწკრივი (u_n) კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k} = u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots \tag{4.1}$$

კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

$$\sigma_k = u_1 + 2u_2 + \ldots + 2^k u_{2^k}.$$

როდესაც $n < 2^k$, გვაქვს

$$s_n \leqslant u_1 + (u_2+u_3) + (u_4+u_5+u_6+u_7) + \ldots + (u_{2^k} + \ldots + u_{2^{k+1}-1}) \leqslant$$

$$\leqslant u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots + 2^k u_{2^k} = \sigma_k,$$

ასე რომ

$$s_n \leqslant \sigma_k. \tag{4.2}$$

მეორე მხრივ, როდესაც $n > 2^k$, გვაქვს

$$s_n \geqslant u_1 + u_2 + (u_3+u_4) + (u_5+u_6+u_7+u_8) + \ldots +$$

$$+ (u_{2^{k-1}+1} + u_{2^{k-1}+2} + \ldots + u_{2^k}) \geqslant \frac{1}{2} u_1 + u_2 + 2u_4 +$$

$$+ 4u_8 + \ldots + 2^{k-1} u_{2^k} = \frac{1}{2} \sigma_k.$$

ასე რომ

$$s_n \geqslant \frac{1}{2} \sigma_k. \tag{4.3}$$

თუ (u_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ (4.3) უტოლობის ძალით (4.1) მწკრივიც კრებადია, ხოლო თუ (u_n) მწკრივი განშლადია, მაშინ (4.2) უტოლობის თანახმად (4.1) მწკრივიც განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. მწკრივი $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ კრებადია, როდესაც $\alpha > 1$, და განშლადია, როდესაც $\alpha \leqslant 1$.

დამტკიცება. თუ $\alpha \leqslant 0$, მაშინ მოცემული მწკრივის განშლადობა გამომდინარეობს მე-3 თეორემიდან. თუ $\alpha > 0$, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-9 თეორემა. ჩვენ შემთხვევაში (4.1) მწკრივი ასე გადაიწერება:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k}.$$

მივიღეთ გეომეტრიული პროგრესია, რომლის მნიშვნელია $2^{1-\alpha}$. ეს პროგრესია კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $2^{1-\alpha}<1$, ე. ი. როდესაც $\alpha > 1$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. თუ $\alpha > 1$, მაშინ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$$

კრებადია, თუკი $\alpha \leqslant 1$, მაშინ ეს მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. მიმდევრობა $\left(\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}\right)_{n \geqslant 2}$ კლებადია და ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-9 თეორემა. ამას მივყავართ მწკრივამდე

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \ln 2)^{\alpha}} = \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

მაშასადამე, ეს თეორემა მე-10 თეორემის შედეგია.

§ 5. მწკრივთა შედარების ნიშნები

ვთქვათ, მოცემულია ორი დადებითი მწკრივი (u_n) და (v_n). მართებულია შემდეგი

თეორემა 12 (შედარების პირველი ნიშანი). თუ $u_n \leqslant v_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ და (v_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ (u_n) მწკრივიც კრებადია.

დამტკიცება. ცხადია, (u_n) მწკრივის კერძო ჯამები არ აღემატება (v_n) მწკრივის სათანადო კერძო ჯამებს, და რაკი (v_n) მწკრივი კრებადია, ამიტომ (u_n) მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშასადამე, მე-8 თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივი კრებადია.

შედეგი. თუ (u_n) მწკრივი განშლადია და $u_n < v_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, მაშინ (v_n) მწკრივი განშლადია.

მართლაც, (v_n) მწკრივი კრებადი რომ იყოს, მაშინ მე-12 თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივიც კრებადი იქნებოდა.

შენიშვნა. შედარების პირველი ნიშანი ძალაში რჩება, თუ $u_n \leqslant v_n$ პირობა შესრულებულია არა ყველა n-თვის, არამედ n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული.

თეორემა 13. ვთქვათ, (u_n) და (u_n) დადებითი მწკრივებია. თუ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,$$

მაშინ (u_n) და (v_n) მწკრივები ერთდროულად კრებადი ან განშლადი არიან.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი $\varepsilon < l$. ზღვრის განსაზღვრის თანახმად მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ როდესაც $n > \nu$, გვექნება

$$l-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\varepsilon.$$

აქედან გვაქვს

$$(l-\varepsilon)v_n<u_n<(l+\varepsilon)v_n, \text{ როდესაც } n=\nu+1,\ \nu+2,\ldots$$

თუ (u_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ მე-12 თეორემის ძალით კრებადი იქნება აგრეთვე მწკრივი $\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty}(l-\varepsilon)v_n$ და, მაშასადამე, (v_n) მწკრივი კრებადია.

პირიქით, თუ (u_n) მწკრივი განშლადია, მაშინ მე-12 თეორემის შედეგის თანახმად განშლადი იქნება აგრეთვე მწკრივი $\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty}(l+\varepsilon)v_n$ და ამიტომ (v_n) მწკრივი განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14 (შედარების მეორე ნიშანი). ვთქვათ, (u_n) და (v_n) დადებითი მწკრივებია. თუ (v_n) მწკრივი კრებადია და მართებულია უტოლობები

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\tag{5.1}$$

მაშინ (u_n) მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. (5.1) უტოლობებიდან გვაქვს

$$\frac{u_1}{u_0}\leqslant\frac{v_1}{v_0},\quad \frac{u_2}{u_1}\leqslant\frac{v_2}{v_1},\ldots,\quad \frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant\frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\frac{u_1}{u_0}\cdot\frac{u_2}{u_1}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant\frac{v_1}{v_0}\cdot\frac{v_2}{v_1}\cdots\frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

სათანადო შეკვეცის შემდეგ გვექნება

$$\frac{u_n}{u_0}\leqslant\frac{v_n}{v_0}.$$

აქედან

$$u_n\leqslant\frac{u_0}{v_0}v_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

რაკი $\left(\frac{u_0}{v_0}v_n\right)$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ (u_n) მწკრივი განშლადია და შესრულებულია (5.1) პირობა, მაშინ (v_n) მწკრივიც განშლადია.

მართლაც, (v_n) მწკრივი კრებადი რომ ყოფილიყო, მაშინ მე-14 თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივიც კრებადი იქნებოდა.

შენიშვნა. შედარების მეორე ნიშანი ძალაში რჩება, თუ (5.1) პირობა შესრულებულია არა ყველა n-თვის, არამედ n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული.

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$$

კრებადია. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u_n=\frac{1}{2^n+n},\quad v_n=\frac{1}{2^n}$$

გვექნება $u_n \leqslant v_n$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$. მაგრამ (v_n) მწკრივი კრებადია, ვინაიდან იგი წარმოადგენს უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელია $\frac{1}{2}$. მაშასადამე, მე-12 თეორემის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია.

§ 6. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი. ლაიბნიცის თეორემა

ახლა შევისწავლოთ მწკრივები, რომელთა წევრები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 4. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი ეწოდება ისეთ მწკრივს, რომლის წევრებს რიგრიგობით დადებითი და უარყოფითი ნიშნები აქვთ.

ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$u_0-u_1+u_2-u_3+\cdots+(-1)^n u_n+\cdots, \tag{6.1}$$

სადაც $u_0, u_1, u_2,\ldots,u_n,\ldots$ დადებითი რიცხვებია.

თეორემა 15 (ლაიბნიცი). ნ ი შ ა ნ მ ო ნ ა ც ვ ლ ე ო ბ ი თ ი (6.1) მ წ კ რ ი ვ ი ს კ რ ე ბ ა დ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა, რ ო მ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ა ი ყ ო ს ა რ ს ე ბ ი თ ა დ კ ლ ე ბ ა დ ი და $\lim u_n=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (6.1) მწკრივის პირველი k წევრის ჯამი აღვნიშნოთ s_k-თი. მაშინ $k=2n+1$ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$s_{2n+1}=(u_0-u_1)+(u_2-u_3)+\cdots+(u_{2n}-u_{2n+1}).$$

პირობის თანახმად ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ s_{2n+1} იზრდება n-თან ერთად. მეორე მხრივ შეგვიძლია დავწეროთ

$$s_{2n+1}=u_0-(u_1-u_2)-(u_3-u_4)-\cdots-(u_{2n-1}-u_{2n})-u_{2n+1}.$$

აქედან ჩანს, რომ ყოველი n-თვის

$$s_{2n+1}<u_0.$$

ამრიგად, $(s_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია და ზრდადია, ამიტომ არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=s.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ

$$s_{2n}=s_{2n-1}+u_{2n}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (6.1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი ტოლია s. ამით ლაიბნიცის თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებული თეორემიდან ჩანს, რომ s_{2n+1} ჯამი მიისწრაფვის თავის s ზღვარისაკენ ისე, რომ იგი მუდამ მატულობს. ამრიგად, s_{2n+1} წარმოადგენს s-ის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით. პირიქით, s_{2n} არის s-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით. მართლაც, ტოლობებიდან

$$s_0 = u_0,$$

$$s_2 = u_0 - (u_1 - u_2),$$

$$s_4 = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ჩანს, რომ $s_0 > s_2 > s_4 > \ldots$

ამ რიგად, s_{2n} მიისწრაფვის s-კენ ისე, რომ იგი მუდამ კლებულობს.

უტოლობებიდან $s_1 < s < s_0$ გამომდინარეობს, რომ

$$0 < s < u_0.$$

მაშასადამე, ჩვენი მწკრივის ჯამს აქვს პირველი წევრის ნიშანი და აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია ამ წევრზე.

(6.1) მწკრივის R_n ნაშთი n-ური წევრის შემდეგ არის.

$$(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots).$$

ეს მწკრივი იმავე ხასიათისაა, რაც (6.1) მწკრივი, ამიტომ ამ ნაშთს აქვს $(-1)^{n+1}$ ნიშანი და

$$|R_n| < u_{n+1}.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$s = s_n + R_n,$$

ყველაფერი ზემოთქმული შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: თუ (6.1) მწკრივში უკუვაგდებთ ყველა წევრს n-ურის შემდეგ და კერძო ჯამს

$$s_n = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^n u_n$$

მივიჩნევთ s ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობად, მაშინ მივიღებთ გადახრას, რომელსაც ექნება იგივე ნიშანი, რაც პირველ უკუგდებულ $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ წევრს, ხოლო აბსოლუტური სიდიდით მასზე ნაკლებია, ე. ი.

$$|s - s_n| < u_{n+1}.$$

ეს თვისება შეგვიძლია გამოვიყენოთ მწკრივის ჯამის მიახლოებით გამოთვლებში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots$$

კრებადია, ვინაიდან

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მე-15 თეორემა ძალას კარგავს, თუ მოვხსნით u_n-ის კლებადობის პირობას. მაგალითად, ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{4^n} + \ldots$$

განშლადია. მართლაც, გვაქვს

$$s_{2n-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right).$$

პირველ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $n \to \infty$, ხოლო მეორე ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება ნაკლებია $\frac{1}{3}$-ზე. მაშასადამე, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. ე. ი. აღებული მწკრივი განშლადია.

§ 7. აბსოლუტურად და არააბსოლუტურად კრებადი მწკრივები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 5. (u_n) მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია ამ მწკრივის აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{7.1}$$

თეორემა 16. ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი მ წ კ რ ი ვ ი კ რ ე ბ ა დ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ვთქვათ, (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ე. ი. კრებადია (7.1) მწკრივი. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$a_n=\frac{|u_n|+u_n}{2}, \quad b_n=\frac{|u_n|-u_n}{2}.$$

ცხადია, რომ $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$. ამის გარდა,

$$a_n \leqslant |u_n|, \quad b_n \leqslant |u_n|$$

და

$$u_n=a_n-b_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

რაკი (7.1) მწკრივი კრებადია, ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად (a_n) და (b_n) მწკრივებიც კრებადია. მაშასადამე, მე-7 თეორემის თანახმად (a_n-b_n) მწკრივი კრებადია, ე. ი. კრებადია (u_n) მწკრივი და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს, მაგრამ არ იყოს აბსოლუტურად კრებადი. მართლაც, ავიღოთ მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots \tag{7.2}$$

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ეს მწკრივი კრებადია, მაგრამ მისი წევრების აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

განშლადია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 6. თუ (u_n) მწკრივი კრებადია, ხოლო $(|u_n|)$ მწკრივი განშლადია, მაშინ (u_n) მწკრივს პ ი რ ო ბ ი თ კ რ ე ბ ა დ ი მწკრივი ეწოდება.

მაგალითად, (7.2) მწკრივი პირობით კრებადი მწკრივია.

ცხადია, რომ ყოველი დადებითი კრებადი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

საზოგადოდ, თუ რაიმე კრებადი მწკრივი (u_n) შეიცავს უარყოფით წევრთა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს, ის აბსოლუტურად კრებადია.

მართლაც, თუ u_ν წარმოადგენს იმ უარყოფით წევრს. რომელსაც უდიდესი ნომერი აქვს, მაშინ მწკრივი

$$u_{\nu+1}+u_{\nu+2}+\cdots$$

კრებადია და დადებითი. მაგრამ მაშინ კრებადია $(|u_n|)$ მწკრივიც.

ასევე, თუ (u_n) მწკრივი შეიცავს დადებით წევრების მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს, მაშინ ამ მწკრივის წევრების (-1)-ზე გამრავლებით ისეთ მწკრივს მივიღებთ, რომელიც შეიცავს უარყოფით

წევრთა სასრულ სიმრავლეს, და ამიტომ, თუ ასეთი მწკრივი კრებადია, მაშინ (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

შევნიშნავთ, რომ ყოველი პირობითი კრებადი მწკრივი შეიცავს როგორც დადებით, ისე უარყოფით წევრთა უსასრულო სიმრავლეს.

§ 8. კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნები

თეორემა 17 (კოშის ნიშანი). თუ (u_n) მწკრივისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $q<1$, რომ n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული მართებულია უტოლობა

$$\sqrt[n]{|u_n|}\leqslant q, \tag{8.1}$$

მაშინ აღებული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია; თუკი n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული

$$\sqrt[n]{|u_n|}\geqslant 1, \tag{8.2}$$

მაშინ მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (8.1) პირობა. მაშინ

$$|u_n|\leqslant q^n, \quad \text{როდესაც } n=\nu+1,\ \nu+2,\ldots,$$

სადაც ν გარკვეული ნატურალური რიცხვია. რაკი $q<1$, ამიტომ მწკრივი $\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty} q^n$ კრებადია და მე-12 თეორემის თანახმად

$\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty}|u_n|$ მწკრივიც კრებადია. მაშასადამე, (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

თუ შესრულებულია (8.2) პირობა, მაშინ

$$|u_n|\geqslant 1, \quad \text{როდესაც } n=\nu+1,\ \nu+2,\ldots$$

აქედან ჩანს, რომ u_n არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $n\to\infty$. მაშასადამე, (u_n) მწკრივი განშლადია,

შედეგი. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l, \tag{8.3}$$

მაშინ (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $l<1$ და განშლადია, როდესაც $l>1$, ხოლო თუ $l=1$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, ე. ი. ამ შემთხვევაში გაურკვეველი რჩება კრებადია თუ განშლადი (u_n) მწკრივი.

საჭიროა აქ გამოვიყენოთ კრებადობის ან განშლადობის სხვა ნიშნები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ჰარმონიული მწკრივი

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

აქ

$$u_n=\frac{1}{n}, \quad \sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=1.$$

გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, მაგრამ როგორც იყო ნაჩვენები, ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 2. ვთქვათ, მოცემულია მწკრივი

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$$

როგორც ვიცით, ეს მწკრივი კრებადია. ახლა გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი, აქ

$$u_n=\frac{1}{n^2}, \quad \sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=1.$$

გვაქვს საეჭვო შემთხვევა. ამიტომ კოშის ნიშნის მიხედვით ვერ ვიტყვით კრებადია თუ განშლადია მოცემული მწკრივი.

ამრიგად, არსებობს როგორც კრებადი, ისე განშლადი მწკრივებიც, რომელთათვის $l=1$.

თეორემა 18 (დალამბერის ნიშანი). თუ (u_n) მწკრივისათვის შესრულებულია პირობა

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant q \tag{8.4}$$

n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, სადაც q ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშინ (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო თუ n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული მართებულია უტოლობა

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1. \tag{8.5}$$

მაშინ მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ მწკრივი

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \tag{8.6}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $v_n=q^n$, მაშინ

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{q^{n+1}}{q^n}=q.$$

მაშასადამე, (8.4) პირობის თანახმად გვექნება

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$$

n-ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, და რაკი (8.6) მწკრივი კრებადია, ამიტომ მე-14 თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

ახლა ვთქვათ, შესრულებულია (8.5) პირობა. მაშინ გვექნება

$$|u_{n+1}| \geqslant |u_n|, \ n=\nu+1, \ \nu+2, \ldots,$$

სადაც ν გარკვეული მთელი დადებითი რიცხვია. აქედან ჩანს, რომ მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამიტომ აღებული მწკრივი განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l, \tag{8.7}$$

მაშინ (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $l<1$ და განშლადია, როდესაც $l>1$, ხოლო თუ $l=1$ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა.

მართლაც, ვთქვათ, $l<1$ და ავიღოთ რაიმე q რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $l<q<1$. თანახმად (8.7) ტოლობისა არსებობს ისეთი ნატურალური ν რიცხვი, რომ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant q, \text{ როდესაც } n>\nu.$$

მაშასადამე, ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

თუ $l>1$, მაშინ (8.7) ტოლობის თანახმად არსებობს ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1, \text{ როდესაც } n>N.$$

ამიტომ იმავე თეორემის თანახმად (u_n) მწკრივი განშლადია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $l=1$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, ე. ი. დამტკიცებული შედეგი საშუალებას ვერ იძლევა გავარკვიოთ აღებული მწკრივის კრებადობა თუ განშლადობა. ამ შემთხვევაში საჭიროა გამოვიყენოთ კრებადობის ან განშლადობის სხვა ნიშნები.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. არსებობს როგორც კრებადი, ისე განშლადი მწკრივები, რომელთათვის $l=1$. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ მწკრივები $\left(\frac{1}{n}\right)$ და $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. თითოეული მათგანისათვის გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1,$$

მაგრამ პირველი განშლადია, მეორე კი კრებადი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$$

კრებადია. ამ შემთხვევაში

$$u_n=\frac{n!\,2^n}{n^n}.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!\,2^n}{n^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1 \text{ (} e \text{ ნეპერის რიცხვია).}$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 4. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n}$$

განშლადია. ამ შემთხვევაში $u_n = \frac{n!\,3^n}{n^n}$. გვაქვს

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!\,3^n}{n^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1.$$

ამიტომ აღებული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 5. განვიხილოთ (u_n) მწკრივი, სადაც

$$u_n = \begin{cases} q^{n/2}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია,} \\ q^{\frac{n+3}{2}}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია,} \end{cases}$$

ხოლო q ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. გაშლილი სახის ეს მწკრივი ასე ჩაიწერება

$$1+q^2+q+q^3+q^2+q^4+q^3+\ldots+q^k+q^{k-1}+q^{k+1}+q^k+\cdots$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია,} \\ q^2, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ფარდობა შეიძლება იყოს როგორც ერთზე ნაკლები, ისე ერთზე მეტი. დალამბერის ნიშანი ამ მწკრივის კრებადობას ვერ არკვევს.

ახლა აღებული მწკრივისათვის გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი. გვაქვს:

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია,} \\ q^{(n+3):2n}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{q} < 1.$$

მაშასადამე, კოშის ნიშანი არკვევს მწკრივის კრებადობას. ამ მაგალითის მიხედვით კოშის ნიშანი დალამბერის ნიშანზე ძლიერი აღმოჩნდა.

ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ თუ მწკრივის კრებადობის გასარკვევად გამოდგება დალამბერის ნიშანი, გამოდგება აგრეთვე კოშის ნიშანიც. მაშასადამე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კოშის ნიშანი დალამბერის ნიშანზე ძლიერია. ჯერ დავამტკიცოთ

თეორემა 19. თუ $(u_n)_{n>0}$ მიმდევრობა დადებითია და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{8.8}$$

სასრული ან უსასრული, მაშინ იარსებებს აგრეთვე $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{8.9}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, l ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია და ავიღოთ ერთზე და l-ზე ნაკლები ნებისმიერი რიცხვი $\varepsilon > 0$. (8.8) ტოლობის თანახმად არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \frac{\varepsilon}{3}, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < l + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_{\nu+2}}{u_{\nu+1}} < l + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_n}{u_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{3}.$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ და მოვახდენთ სათანადო გარდაქმნებს, მივიღებთ

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-\nu}<\frac{u_n}{u_\nu}<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-\nu}$$

აქედან გვაქვს

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)\sqrt[n]{u_\nu\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}}<\sqrt[n]{u_n}<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)\times$$

$$\times\sqrt[n]{u_\nu\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}} \tag{8.10}$$

შემდეგ, რაკი

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_\nu\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_\nu\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}}=1,$$

ამიტომ $\frac{\varepsilon}{3(l+1)}$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N \geqslant \nu$, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$1-\frac{\varepsilon}{3(l+1)}<\sqrt[n]{u_\nu\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}},$$

$$\sqrt[n]{u_\nu\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}}<1+\frac{\varepsilon}{3(l+1)},$$

როდესაც $n>N$. მაშასადამე, თუ $n>N$, (8.10) უტოლობებიდან გვაქვს:

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{3}\right)\left[1-\frac{\varepsilon}{3(l+1)}\right]<\sqrt[n]{u_n}<\left(l+\frac{\varepsilon}{3}\right)\left[1+\frac{\varepsilon}{3(l+1)}\right].$$

სათანადოდ გარდაქმნის შემდეგ გვექნება

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N.$$

მაშასადამე, მართებულია (8.9) ტოლობა.

ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ (8.9) ტოლობის მართებულობას, როდესაც $l=0$ ან $l=+\infty$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ მწკრივის კრებადობა დადგენილია დალამბერის ნიშნით, მაშინ კრებადობის დადგენა შეიძლება კოშის ნიშნითაც. მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-5 მაგალითს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კოშის ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე დალამბერის ნიშანი.

§ 9. კრებადობის აბელის ნიშანი

ლემა 1. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვები $u_0, u_1, \dots, u_n$, $v_0, v_1, \dots, v_n$. მაშინ

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(v_k - v_{k+1}) + s_n v_n, \tag{9.1}$$

სადაც

$$s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

დამტკიცება. თუ $k \geqslant 1$, მაშინ $u_k = s_k - s_{k-1}$, ხოლო $u_0 = s_0$. ამიტომ

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = s_0 v_0 + (s_1 - s_0) v_1 + (s_2 - s_1) v_2 + \dots + (s_{n-1} - s_{n-2}) v_{n-1}$$

$$+ (s_n - s_{n-1}) v_n = s_0(v_0 - v_1) + s_1(v_1 - v_2) + \dots + s_{n-1}(v_{n-1} - v_n) +$$

$$+ s_n v_n = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(v_k - v_{k+1}) + s_n v_n.$$

ლემა დამტკიცებულია.

(9.1) ფორმულას ეწოდება ნ. აბელის (N. H. Abel) გარდაქმნა.

ლემა 2. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვები $u_0, u_1, \dots, u_n$. თუ $v_0 \geqslant v_1 \geqslant \dots \geqslant v_n \geqslant 0$ და $l \leqslant s_k \leqslant L$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, სადაც $s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$, მაშინ

$$l v_0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k v_k \leqslant L v_0. \tag{9.2}$$

დამტკიცება. აბელის გარდაქმნის თანახმად

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(v_k - v_{k+1}) + s_n v_n.$$

აქედან

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k \geqslant l\,[\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) + v_n] = l v_0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k \leqslant L\,[\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) + v_n] = L v_0.$$

მაშასადამე, მართებულია (9.2) უტოლობები.

ეს ლემა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: თუ $|s_k| \leqslant A$ $(k=0,1,\ldots,n)$ და $v_0 \geqslant v_1 \geqslant \cdots \geqslant v_n \geqslant 0$, მაშინ

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right| \leqslant A v_0. \tag{9.3}$$

ამ უტოლობას ეწოდება აბელის უტოლობა.

განსაზღვრა 7. ჩვენ ვიტყვით, რომ მწკრივი (u_n) აკმაყოფილებს აბელის პირობას, თუ

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant A \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

თეორემა 20 (აბელი). თუ მწკრივი (u_n) აკმაყოფილებს აბელის პირობას და $(v_n)_{n\geqslant 0}$ მიმდევრობა კლებადია და ნულისაკენ კრებადი, მაშინ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k. \tag{9.4}$$

დამტკიცება. რადგანაც $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ

$$v_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

მაგრამ

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{m+p} u_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{m} u_k\right| \leqslant 2A$$

p-ს ყველა მთელი დადებითი მნიშვნელობისთვის. მაშასადამე, აბელის უტოლობის თანახმად,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} u_k v_k\right| \leqslant 2A v_{m+1} < \varepsilon$$

p-ს ყველა მთელი დადებითი მნიშვნელობისათვის. მაშასადამე, მე-2 თეორემის თანახმად (9.4) მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ნიშანმონაცვლეობითი (v_n) მწკრივის კრებადობისათვის საკმარისია, რომ $(v_n)_{n\geqslant 0}$ მიმდევრობა იყოს კლებადი და $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=0$.

მართლაც, ვთქვათ, $u_n=(-1)^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$. ცხადია, რომ (u_n) მწკრივი აკმაყოფილებს აბელის პირობას, ვინაიდან

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1 \quad (k=0,1,\ldots).$$

მაშასადამე, აბელის თეორემის თანახმად კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k v_k.$$

ასე, რომ ლაიბნიცის თეორემა წარმოადგენს აბელის თეორემის შედეგს.

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ თუ $q_1>q_2>\ldots>q_n>\ldots$ და $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=0$, მაშინ კრებადია მწკრივები

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin kx \ (x\text{—ნებისმიერია}), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx \ (x\neq 2k\pi).$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sigma_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx.$$

ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $2\sin\frac{x}{2}$ გამოსახულებაზე. გვექნება

$$\sigma_n\cdot 2\sin\frac{x}{2}=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+$$

$$+\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

აქედან, თუ $x\neq 2k\pi$, გვაქვს

$$|\sigma_n|=\frac{\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

თუკი $x=2k\pi$, მაშინ $\sigma_n=0$. მაშასადამე, ყოველი ფიქსირებული, x-სათვის მწკრივი $(\sin kx)$ აკმაყოფილებს აბელის პირობას. ამიტომ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin kx.$$

კერძოდ, კრებადია მწკრივები

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}.$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sigma_n' = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx.$$

ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $2\sin\frac{x}{2}$ გამოსახულება-ზე, გვექნება

$$\sigma_n' \cdot 2\sin\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

აქედან, თუ $x \neq 2k\pi$, გვაქვს:

$$|\sigma_n'| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

მაშასადამე, ყოველი ფიქსირებული x-სათვის, $x \neq 2k\pi$, მწკრივი $(\cos kx)$ აკმაყოფილებს აბელის პირობას. ამიტომ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx, \quad x \neq 2k\pi.$$

კერძოდ, კრებადია მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}, \quad x \neq 2k\pi.$$

§ 10. მწკრივის წევრთა გადანაცვლება

როგორც ცნობილია, სასრულ ჯამში წევრების ურთიერთგადანაცვლებით ჯამი უცვლელი რჩება. ბუნებრივად ისმის კითხვა: თუ კრებად მწკრივში მოვახდენთ წევრების ნებისმიერად გადანაცვლებას, მაშინ იქნება თუ არა ახალი მწკრივი კრებადი? ზოგიერთ კრებად მწკრივში შეიძლება წევრების ისე გადანაცვლება, რომ მიღებული მწკრივი განშლადი იყოს ან იყოს კრებადი, მაგრამ მისი ჯამი განსხვავდებოდეს აღებული მწკრივის ჯამისაგან. მოვიყვანოთ მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ კრებადი მწკრივი

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots \tag{10.1}$$

ამ მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ s-ით. ცხადია, $s\neq 0$. (10.1) მწკრივში წევრების გადანაცვლებით შეიძლება მივიღოთ მწკრივი

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\dots \tag{10.2}$$

მიღებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $\frac{s}{2}$. მართლაც, მისი კერძო ჯამისათვის s'_{3n}, რომელიც შეიცავს $3n$ წევრს, გვაქვს

$$s'_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+$$
$$+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_{2n},$$

სადაც s_{2n} არის (10.1) მწკრივის კერძო ჯამი. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} s'_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} s_{2n}=\frac{s}{2}.$$

აქედან და (10.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} s'_{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(s'_{3n}+\frac{1}{4n}\right)=\frac{s}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} s'_{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(s'_{3n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-2}\right)=\frac{s}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to\infty} s'_n = \frac{s}{2}.$$

ამრიგად, მწკრივის წევრთა გადანაცვლებით მივიღეთ კრებადი მწკრივი, რომლის ჯამი განსხვავდება აღებული მწკრივის ჯამისაგან.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 21. *პირობით კრებადი* (u_n) *მწკრივის დადებითი წევრებისაგან შედგენილი* (u'_n) *მწკრივი და უარყოფითი წევრებისაგან შედგენილი* (u''_n) *მწკრივი ორივე განშლადია.*

დამტკიცება. აღვნიშნოთ s'_n და s''_n სიმბოლოებით შესაბამისად (u'_n) და (u''_n) მწკრივების იმ წევრთა ჯამები, რომლებიც შედიან (u_n) მწკრივის s_n კერძო ჯამის შემადგენლობაში. მაშინ

$$s_n = s'_n + s''_n. \tag{10.3}$$

რაკი (u_n) მწკრივი კრებადია, s_n მიისწრაფვის გარკვეული სასრული ზღვრისაკენ, როდესაც $n\to\infty$. ამიტომ (10.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ s'_n და s''_n ჯამებიდან ერთ-ერთს აქვს სასრული ზღვარი, როცა $n\to\infty$, მაშინ მეორესაც ექნება ზღვარი. მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$s'_n - s''_n = |u_0|+|u_1|+\dots+|u_n|$$

გამოსახულება მიისწრაფვის სასრული ზღვრისაკენ, როდესაც $n\to\infty$ და, მაშასადამე, ($|u_n|$) მწკრივი კრებადი იქნება, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, s'_n და s''_n სიდიდეებს არ შეიძლება ჰქონდეს სასრული ზღვრები, როდესაც $n\to\infty$, ე. ი. (u'_n) და (u''_n) მწკრივები განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22 (რიმანი). *თუ* (u_n) *მწკრივი პირობით კრებადია, მაშინ მწკრივის წევრთა სათანადოდ გადანაცვლებით შეიძლება მივიღოთ როგორც განშლადი, ისე ნებისმიერი* s *რიცხვისაკენ კრებადი მწკრივი.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განშლადი მწკრივის მისაღებად (u_n) მწკრივის წევრები შემდეგნაირად დავალაგოთ. ავიღოთ (u_n) მწკრივის იმდენი დადებითი წევრი, რომ მათი ჯამი ერთზე მეტი იყოს, რაც ყოველთვის შეიძლება 21-ე თეორემის ძალით, და ამ ჯამს მივუმატოთ (u_n) მწკრივის პირველი უარყოფითი წევრი. მიღებულ ჯამს მივუმატოთ (u_n) მწკრივის იმდენი შემდგომი დადებითი წევრი, რომ ახლად მიღებული კერძო ჯამი ორზე მეტი იყოს. ამ კერძო ჯამს მივუმატოთ (u_n) მწკრივის მეორე უარყოფითი წევრი და მიღებულ ჯამს კი იმდენი შემდგომი დადებითი წევრი, რომ ახლადმიღებული კერძო ჯამი სამზე მეტი იყოს. 21-ე თეორემის თანახმად, ეს პროცესი უსაზღვროდ შეგვიძლია განვაგრძოთ, ამასთანავე (u_n) მწკრივის ყოველი წევრი ადრე თუ გვიან იპოვის თავის ადგილს ახალ მწკრივში. ადვილი შესამჩნევია, რომ ახალი მწკრივის ჯამია $+\infty$.

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (u_n) მწკრივის წევრები ისე შეგვიძლია გადავსვათ, რომ მიღებული მწკრივის ჯამი იყოს $-\infty$.

ახლა (u_n) მწკრივის წევრები ისე გადავანაცვლოთ, რომ მივიღოთ წინასწარ დასახელებულ s ჯამისაკენ კრებადი მწკრივი. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $s \geqslant 0$. ავიღოთ (u_n) მწკრივის დადებითი წევრები ბუნებრივი რიგით მანამდე, სანამ მათი ჯამი მეტი არ გახდება s რიცხვზე. როგორც კი გადააჭარბებს ეს ჯამი s რიცხვს, მას მივუმატოთ (u_n) მწკრივის უარყოფითი წევრები მათი ბუნებრივი რიგით მანამდე, ვიდრე მთელი ჯამი s რიცხვზე ნაკლები არ გახდება. ამის შემდეგ, კვლავ მივუმატოთ მიღებულ ჯამს (u_n) მწკრივის დადებითი წევრები, რომლებიც არ გვქონდა აღებული, მანამდე, ვიდრე ჯამი არ გახდება s-ზე მეტი და ა. შ. ამგვარად, მიღებული (v_n) მწკრივის წევრები იქნება (u_n) მწკრივის წევრები, მხოლოდ სხვა რიგით დალაგებული. ვთქვათ,

$$\sigma_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

რაკი $v_n \to 0$, როდესაც $n \to \infty$, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|v_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

განვიხილოთ რომელიმე σ_n ჯამი, სადაც $n > N$. თუ s მოთავსებულია σ_{n-1} და σ_n რიცხვებს შორის, მაშინ

$$|\sigma_n - s| \leqslant |\sigma_n - \sigma_{n-1}| = |v_n| < \varepsilon.$$

თუკი σ_n და σ_{n-1} რიცხვებიდან ან ორივე მეტია ან ორივე ნაკლებია s-ზე, მაშინ σ_n უფრო ახლოსაა s-თან, ვიდრე σ_{n-1}. ამრიგად, σ_n დაშორებულია s-დან ε-ზე ნაკლები მანძილით, ანდა σ_n უფრო ახლოსაა s-თან, ვიდრე σ_{n-1}. აქედან გამომდინარეობს, რომ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, σ_n დაშორებულია s-დან ε-ზე ნაკლები მანძილით. მაშასადამე, $\sigma_n \to s$, როდესაც $n \to \infty$. რიმანის თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 23 (დირიხლე). აბსოლუტურად კრებად მწკრივში წევრთა გადანაცვლებით მწკრივის ჯამი არ იცვლება.

დამტკიცება. ვთქვათ, (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამია s, ხოლო წევრთა რაიმე გადანაცვლებით მიღებული მწკრივია (v_n). დასამტკიცებელია, რომ ეს მწკრივიც კრებადია და მისი ჯამია s.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც (u_n) მწკრივი დადებითია. ავიღოთ (v_n) მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი σ_n. შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი m, რომ ყველა v_0, $v_1, \ldots, v_n$ რიცხვი იყოს $u_0, u_1, \ldots, u_m$ რიცხვებს შორის. ამიტომ

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n \leqslant u_0 + u_1 + \ldots + u_m,$$

ე. ი.

$$\sigma_n \leqslant s_m < s,$$

სადაც s_m არის (u_n) მწკრივის m-ური კერძო ჯამი. ამრიგად, ყოველი n-თვის $\sigma_n < s$ და რაკი σ_n არ კლებულობს, როდესაც n იზრდება, ამიტომ

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma \leqslant s, \tag{10.4}$$

ე. ი. (v_n) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია σ.

შემდეგ, თუ (v_n) მწკრივს ჩავთლით გამოსავალ მწკრივად, მაშინ (u_n) მწკრივი მიიღება (v_n) მწკრივიდან წევრთა გადანაცვლებით. ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად გვექნება

$$s \leqslant \sigma. \tag{10.5}$$

(10.4) და (10.5) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ $s = \sigma$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც (u_n) მწკრივი დადებითია.

ახლა ვთქვათ, რომ (u_n) მწკრივი დადებითი არ არის და აბსოლუტურად კრებადია. განვიხილოთ დადებითი მწკრივები

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \quad \text{და} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (|u_n| + u_n).$$

ეს მწკრივები კრებადია და, მაშასადამე, ზემოდამტკიცებულის თანახმად მწკრივები

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \quad \text{და} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (|v_n| + v_n)$$

კრებადია და აქვთ შესაბამისად იგივე ჯამები, რაც $(|u_n|)$ და $(|u_n|+u_n)$ მწკრივებს. აქედან გამომდინარეობს (v_n) მწკრივის კრებადობა და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (|v_n|+v_n) - \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (|u_n|+u_n) - \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

§ 11. მწკრივების გამრავლება

როგორც ვიცით, ორი ჯამის გასამრავლებლად საჭიროა სამრავლის ყოველი წევრი გავამრავლოთ მამრავლის ყოველ წევრზე და ყველა მიღებული ნამრავლი შევკრიბოთ. ისმის კითხვა: აქვს თუ არა ადგილი დისტრიბუტიულობის ამ კანონს უსასრულო მწკრივებისათვისაც? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს ქვემოთ მოყვანილი თეორემა. ჯერ შემოვიღოთ

განსაზღვრა 8. ვთქვათ, მოცემულია ორი (u_n) და (v_n) მწკრივი. (w_n) მწკრივს, სადაც

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

ეწოდება მოცემული ორი მწკრივის ნამრავლი კოშის აზრით, ან უბრალოდ ორი მწკრივის ნამრავლი.

თეორემა 24 (მერტენსი). თუ (u_n) და (v_n) მწკრივები კრებადია შესაბამისად s და σ რიცხვებისაკენ, ამასთანავე (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (w_n) მწკრივი კრებადია $s\sigma$ რიცხვისაკენ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$U_n=\sum_{k=0}^{n} u_k, \quad V_n=\sum_{k=0}^{n} v_k \quad W_n=\sum_{k=0}^{n} w_k.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$W_n=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\cdots+$$
$$+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\cdots+u_0v_n)=u_0(v_0+v_1+\cdots+v_n)+$$
$$+u_1(v_0+v_1+\cdots+v_{n-1})+u_2(v_0+v_1+\cdots+v_{n-2})+\cdots+$$
$$+u_{n-1}(v_0+v_1)+u_nv_0=u_0V_n+u_1V_{n-1}+u_2V_{n-2}+\cdots+$$
$$+u_{n-1}V_1+u_nV_0=\sum_{i=0}^{n} u_iV_{n-i}.$$

რადგანაც

$$V_{n-i}=\sigma+(V_{n-i}-\sigma),$$

ამიტომ

$$W_n=\sigma U_n+\rho_n, \tag{11.1}$$

სადაც

$$\rho_n=\sum_{i=0}^{n} u_i\,(V_{n-i}-\sigma).$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n=0. \tag{11.2}$$

რაკი (v_n) მწკრივი კრებადია, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N^*, რომ

$$|V_p-\sigma|<\frac{\varepsilon}{2M}, \text{ როდესაც } p>N^*, \tag{11.3}$$

სადაც

$$M=\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|.$$

რადგანაც (u_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $\nu\geqslant N^*$, რომ

$$\sum_{i=\nu+1}^{\infty}|u_i|<\frac{\varepsilon}{2M^*}, \tag{11.4}$$

სადაც

$$M^* = \sup_{0 \leqslant i < +\infty} |V_i - \sigma| .$$

ახლა ვთქვათ, რომ $n > 2\nu$. მაშინ (11.3) და (11.4) უტოლობათა თანახმად გვექნება

$$|\rho_n| \leqslant \sum_{i=0}^{\nu} |u_i| \cdot | V_{n-i} - \sigma| + \sum_{i=\nu+1}^{n} |u_i| \cdot | V_{n-i} - \sigma| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i=0}^{\nu} |u_i| + M^* \sum_{i=\nu+1}^{\infty} | u_i | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამრიგად

$$|\rho_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > 2\nu,$$

ე. ი. მართებულია (11.2) ტოლობა. მაშასადამე, თუ (11.1) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n \to \infty$, გვექნება

$$\lim_{n \to \infty} W_n = s\sigma,$$

ე. ი. (w_n) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $s\sigma$. მერტენსის თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25. თუ (u_n) და (v_n) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (w_n) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n^*, \tag{11.5}$$

სადაც

$$w_n^* = |u_0 v_n| + |u_1 v_{n-1}| + \cdots + |u_n v_0|.$$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად (11.5) მწკრივი კრებადია. შემდეგ, რაკი $|w_n| \leqslant w_n^*$ და (11.5) მწკრივი კრებადია, ამიტომ (w_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ (u_n) და (v_n) მწკრივები პირობით კრებადია, მაშინ (w_n) მწკრივი შეიძლება განშლადი აღმოჩნდეს. მართლაც, განვიხილოთ კრებადი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

შევადგინოთ ამ მწკრივის თავისთავზე ნამრავლი. ამ შემთხვევაში

$$w_n=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

აქედან

$$|w_n|>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1.$$

მაშასადამე, (w_n) მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამიტომ (w_n) მწკრივი განშლადია.

კ ი თ ხ ვ ე ბ ი

1. რას ეწოდება რიცხვთა მწკრივი? რას ეწოდება მწკრივის ზოგადი წევრი?

2. რას ეწოდება მწკრივის ჯამი? მოიყვანეთ კრებადი და განშლადი მწკრივების მაგალითები.

3. რაში მდგომარეობს მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა?

4. რაში მდგომარეობს ორი დადებითი მწკრივის შედარების პირველი და მეორე ნიშანი?

5. რაში მდგომარეობს კოშისა და დალამბერის ნიშნები?

6. მოიყვანეთ მწკრივის ისეთი მაგალითი, რომლის კრებადობას დალამბერის ნიშანი ვერ არკვევს, კოშის ნიშანი კი არკვევს.

7. როგორ მწკრივს ეწოდება ნიშანმონაცვლეობითი? რაში მდგომარეობს ასეთი მწკრივის კრებადობის ლაიბნიცის ნიშანი? დაამტკიცეთ ეს ნიშანი.

8. როგორ მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი? პირობით კრებადი? მოიყვანეთ აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის მაგალითი; პირობით კრებადი მწკრივის მაგალითი.

9. რაში მდგომარეობს რიმანის თეორემა? რაში მდგომარეობს დირიხლეს თეორემა?

10. რომელ უტოლობას ეწოდება აბელის უტოლობა? ჩამოაყალიბეთ მწკრივის კრებადობის აბელის ნიშანი.

11. ჩამოაყალიბეთ მერტენსის თეორემა. შეიძლება თუ არა ორი აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის ნამრავლი არ იყოს აბსოლუტურად კრებადი?

12. მოიყვანეთ მაგალითი ორი კრებადი მწკრივისა, რომელთა ნამრავლი განშლადია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

ქვემოთ მოყვანილი ყოველი მწკრივისათვის იპოვეთ n-ური კერძო ჯამი, უშუალოდ დაამტკიცეთ მწკრივის კრებადობა და გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი.

1. $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\dots$$

პ ა ს უ ხ ი: $s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$; $s=\frac{1}{2}$.

2. $$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\dots$$

პ ა ს უ ხ ი: $s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3n+3}$; $s=\frac{1}{3}$

3. $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\dots$$

პ ა ს უ ხ ი: $s_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$; $s=\frac{1}{4}$.

4. $$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\dots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\dots$$

პ ა ს უ ხ ი: $s_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$; $s=\frac{\pi}{4}$.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}).$$

პ ა ს უ ხ ი: $1-\sqrt{2}$.

შედარებათა ნიშნების გამოყენებით გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

6. $$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{3\,.\,2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\ldots$$

პ ა ს უ ხ ი: კრებადია.

7. $$\frac{1}{2\,.\,5}+\frac{1}{3\,.\,6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\,(n+4)}+\ldots$$

პ ა ს უ ხ ი: კრებადია.

8. $$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$$

პ ა ს უ ხ ი: განშლადია.

9. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}\,.$$

პ ა ს უ ხ ი: კრებადია.

10. $$\frac{1}{\sqrt{1\,.\,3}}+\frac{1}{\sqrt{3\,.\,5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$$

პ ა ს უ ხ ი: განშლადია.

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

11. $\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}+\ldots$, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

12. $$\frac{2}{1}+\frac{2\,.\,5}{1\,.\,5}+\ldots+\frac{2\,.\,5\ldots(3n-1)}{1\,.\,5\ldots(4n-3)}+\ldots$$

13. $$\frac{1}{3}+\frac{1\,.\,3}{3\,.\,6}+\ldots+\frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{3^n.\;n!}+\ldots$$

14. $$\frac{2\,.\,1!}{1}+\frac{2^2\,.\,2!}{2^2}+\frac{2^3\,.\,3!}{3^3}+\ldots+\frac{2^n\,.\,n!}{n^n}+\ldots$$

15. $$\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$$

16. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

კოშის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

17. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

18. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

19. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

20. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$

გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა:

21. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln^2 n}+\ldots$

პასუხი: კრებადია.

22. $\frac{1}{3\ln 3\cdot\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\cdot\ln\ln 4}+\ldots+\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}+\ldots$

პასუხი: განშლადია.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

პასუხი: განშლადია.

24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}.$

პასუხი: კრებადია.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$

პასუხი: კრებადია.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}.$

პასუხი: კრებადია.

27. დაამტკიცეთ, რომ დადებითი $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{a_n}$ მწკრივის კრებადობა.

28. ვთქვათ, დადებითი მწკრივი (a_n) განშლადია. დაამტკიცეთ, რომ

a) მწკრივი $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ განშლადია;

b) მწკრივი $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ განშლადია, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$;

c) მწკრივი $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ კრებადია.

29. ვთქვათ, დადებითი მწკრივი (a_n) კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი $\left(\frac{a_n}{r_n}\right)$ განშლადია, $\left(\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}\right)$ მწკრივი კი კრებადია, სადაც

$$r_n = a_n + a_{n+1} + \cdots$$

დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა და იპოვეთ მათი ჯამები:

30. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{2}{9}$.

31. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

პ ა ს უ ხ ი: $\ln 2$.

გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა და აბსოლუტურად კრებადობა:

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$

პასუხი: აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $\alpha > 1$; პირობით კრებადია, როდესაც $1 \geqslant \alpha > 0$.

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1/n}}$.

პასუხი: აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $\alpha > 1$: პირობით კრებადია, როდესაც $0 < \alpha \leqslant 1$.

34. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right]$.

პასუხი: აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც $\alpha > 1$: პირობით კრებადია, როდესაც $1 \geqslant \alpha > \frac{1}{2}$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

პასუხი: პირობით კრებადია, როდესაც x არ უდრის მთელ უარყოფით რიცხვს.

36. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივები $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ და $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ აბსოლუტურად კრებადი არაა $]0,\pi[$ ინტერვალში.

37. იპოვეთ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [2^{-n} + (-1)^n 3^{-n}]$ მწკრივის ჯამი.

პასუხი: $\frac{3}{4}$.

38. დაამტკიცეთ, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

39. დაამტკიცეთ, რომ კრებადი $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ და

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$ $(\beta > 0)$ მწკრივების ნამრავლი კრებადია, თუ $\alpha+\beta > 1$ და განშლადია, როდესაც $\alpha+\beta < 1$.

40. მოცემულია ორი განშლადი მწკრივი

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \text{ და } 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

დაამტკიცეთ, რომ ამ მწკრივების ნამრავლი არის აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი.

თ ა ვ ი V

ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

მე-3 თავში ჩვენ განვსაზღვრეთ კერძო სახის ფუნქციის, სახელდობრ, ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი და დავამტკიცეთ ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ. ამ თავში დაწვრილებით განვიხილავთ ფუნქციის ზღვარს და მის თვისებებს. ფუნქციის ზღვრის ცნება, თეორემები ზღვართა შესახებ და მათი გამოყენება კარგად უნდა ავითვისოთ, რომ შესაძლებელი გახდეს დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის საფუძვლიანი შესწავლა.

§ 1. ფუნქციის ზღვრის ცნება

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის გარჩვლეტილ მიდამოში. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 1. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta. \qquad (1.1)$$

სიმბოლურად ეს აღინიშნება ასე:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

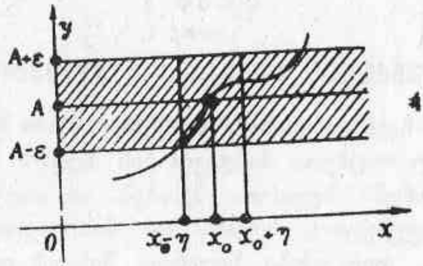
ან $f(x)\to A$, როცა $x\to x_0$.

შევნიშნავთ, რომ η რიცხვი დამოკიდებულია ε-ზე, ამასთანავე, საზოგადოდ, იგი მცირდება ε-თან ერთად.

გამოვარკვიოთ ფუნქციის ზღვრის ცნების გეომეტრიული შინაარსი. როგორც ვიცით, $y=f(x)$ განტოლება დეკარტის Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ გამოსახავს გარკვეულ წირს (ნახ. 24).

Oy ღერძზე ავიღოთ A წერტილის $]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$ მიდამო, სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს (1.1) უტოლობას, Ox ღერძზე არსებობს x_0 წერტილის

ისეთი $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის, რომელიც განსხვავებულია x_0 წერტილისაგან, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა მოთავსდება A წერტილის $]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$ მიდამოში. მაშასადამე, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც



ნახ. 24.

შეესაბამება $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ ინტერვალს, არ გამოვა დაშტრიხული ზოლის გარეთ (ნახ. 24), გარდა შესაძლებელია, გრაფიკის ერთი წერტილისა, რომელიც შეიძლება შეესაბამებოდეს x_0 წერტილს.

§ 2. ფუნქციის უწყვეტობა და წყვეტა

ბუნების სხვადასხვა მოვლენის რაოდენობითი კანონზომიერების შესწავლისას ხშირად გვხვდება პროცესები, რომლებშიც ფუნქციონალური დამოკიდებულებით დაკავშირებული სიდიდეები იცვლება ისე, რომ ერთის „საკმაოდ მცირე“ ცვლილებით მეორის „შეუმჩნევლად მცირედ“ შეცვლა ხდება. ყველასათვის ჩვეული წარმოდგენა ფუნქციის „თანდათანობით“ ცვლილების შესახებ ლოგიკურად დაკავშირებულია რთულ მათემატიკურ ცნებასთან, სახელდობრ, ფუნქციის უწყვეტობის ცნებასთან, რომლის მკაცრი დასაბუთება მხოლოდ გასულ საუკუნეში მოხერხდა. პირველ წარმოდგენას უწყვეტობის შესახებ გვაძლევს მთელი რიგი ფიზიკური მოვლენებისა, მაგალითად, ლითონის ღეროს გახურებით მისი სიგრძის ზრდა, დროის „მიმდინარეობის პროცესი“ და სხვ. მათემატიკური ანალიზი საშუალებას იძლევა უწყვეტობის ცნებას მივცეთ ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრა.

განსაზღვრა 2. x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უწყვეტი* x_0 წერტილში, თუ $f(x_0)$ სასრულია და x_0 წერტილში ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა თანატოლია:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ე. ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, როდესაც $|x-x_0|<\eta$.

გავაშუქოთ გეომეტრიულად $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა x_0 წერტილში. როგორც ვიცით, $y=f(x)$ განტოლება კოორდინატთა Oxy სისტემის მიმართ გამოსახავს გარკვეულ წირს. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta>0$, რომ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის. რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$x_0-\eta<x<x_0+\eta,$$

მართებულია უტოლობები

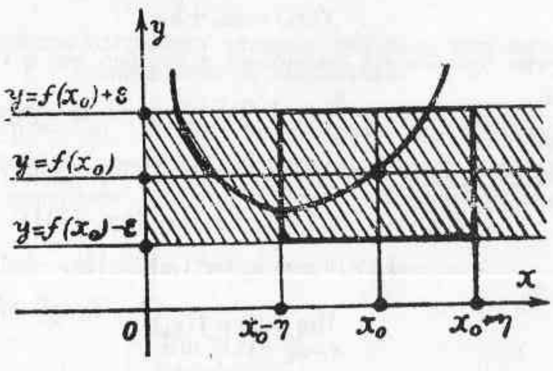
$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

განვიხილოთ Ox ღერძის პარალელური ორი წრფე, რომელთა განტოლებებია

$$y=f(x_0)-\varepsilon \quad \text{და} \quad y=f(x_0)+\varepsilon.$$

მივიღებთ ზოლს, რომლის სიგანეა 2ε (ნახ. 25).

რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ როგორიც გინდა იყოს 25-ე ნახაზზე დაშტრიხული ზოლი, ყოველთვის



ნახ. 25.

მოიძებნება x_0 წერტილის ისეთი $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ მიდამო, რომ $y=f(x)$ წირის ყველა წერტილი, რომელთა აბსცისები აღებულია ამ მიდამოდან, მოთავსდება დაშტრიხულ ზოლში.

შენიშვნა. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლეზე და x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის

იზოლირებულ წერტილს, ამასთანავე $f(x_0)$ სასრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ჩვენ ვთვლით უწყვეტად x_0 წერტილში.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, გარდა, შესაძლებელია, ამ სეგმენტის რაიმე x_0 წერტილისა. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 3. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **წყვეტის წერტილი**, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

ა) x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა;

ბ) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ არ არსებობს;

გ) x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრულია, არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, მაგრამ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, ე. ი. ფუნქციის ზღვარი არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში.

ფუნქციას, რომელსაც $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს წყვეტის რაიმე x_0 წერტილი, ამ სეგმენტზე **წყვეტილი ფუნქცია** ეწოდება.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ $f(x)=ax+b$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $x=x_0$ წერტილში.

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$f(x_0)=ax_0+b.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და η რიცხვად ავიღოთ $\frac{\varepsilon}{|a|}$, ე. ი. $\eta=\frac{\varepsilon}{|a|}$. მაშინ ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $0<|x-x_0|<\eta$, გვექნება

$$|f(x)-f(x_0)|=|(ax+b)-(ax_0+b)|=$$
$$=|a|\cdot|x-x_0|<|a|\cdot\eta=\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0),$$

ე. ი. $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

კერძოდ, $f(x)=x$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $x=x_0$ წერტილში.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} c, & \text{როდესაც } a \leqslant x < x_0 \\ c, & \text{როდესაც } x_0 < x \leqslant b, \end{cases}$$

სადაც c რაიმე რიცხვია. x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არაა. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c, \tag{2.1}$$

ე. ი. მუდმივის ზღვარი იგივე მუდმივაა.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მაშინ

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad x \neq x_0.$$

მაშასადამე, ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის გვექნება

$$|f(x) - c| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი. მართებულია (2.1) ტოლობა.

თუ $f(x_0) = c$, მაშინ მოცემული ფუნქცია იქნება უწყვეტი x_0 წერტილში.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ფუნქცია. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა. $x=0$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. მაშასადამე, $x=0$ არის მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

§ 3. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები. ფუნქციის უწყვეტობა მარჯვნიდან და მარცხნიდან

განსაზღვრა 4. A რიცხვს ეწოდება $]x_0, b[$ ინტერვალში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta > 0$, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0 < x - x_0 < \eta.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A.$$

$f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარს x_0 წერტილში აღნიშნავენ $f(x_0+)$ სიმბოლოთი.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილშიც და $f(x_0+) = f(x_0)$, ე. ი. ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში და ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში თანატოლია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან უწყვეტი x_0 წერტილში.

განსაზღვრა 5. A რიცხვს ეწოდება $]a, x_0[$ ინტერვალში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0<x_0-x<\eta.$$

სიმბოლურად ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=A.$$

$f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში აღინიშნება $f(x_0-)$ სიმბოლოთი.

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილშიც და $f(x_0-)=f(x_0)$, ე. ი. ფუნქციის მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში და ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში თანატოლია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარცხნიდან უწყვეტი x_0 წერტილში.

ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარს ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები ეწოდება.

ზღვრის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ არსებობს ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები x_0 წერტილში და ეს ზღვრები $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში არა აქვს რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი ან ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს, მაგრამ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, მაშინ x_0 წერტილში ფუნქციას არ ექნება ზღვარი.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში და ისინი თანატოლია, მაშინ ფუნქციას ექნება ზღვარი x_0 წერტილში და იგი ცალმხრივი ზღვრების საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$f(x_0+)=f(x_0-)=A.$$

ამ ტოლობების თანახმად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0<x-x_0<\eta,$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0<x_0-x<\eta.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში A რიცხვია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს თანატოლი მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი.

ანალოგიურად, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$f(x_0+)=f(x_0-)=f(x_0).$$

განსაზღვრა 6. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $]a, b[$ ინტერვალში, თუ იგი უწყვეტია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია $]a, b[$ ინტერვალში და, გარდა ამისა, a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, b წერტილში კი — მარცხნიდან.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $[0, 2]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია ასე

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{როდესაც } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x+1, & \text{როდესაც } 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

დავამტკიცოთ, რომ $f(1-)=1$ და $f(1+)=2$.

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ $0<x<1$. მაშინ

$$|f(x)-1|=|x^2-1|=|x+1|\cdot|x-1|<2|x-1|=2(1-x).$$

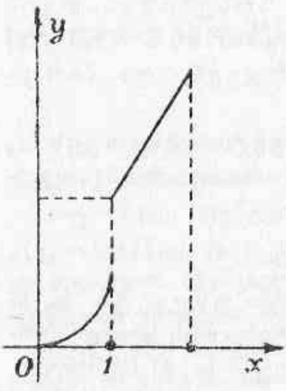
ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და η რიცხვად ავიღოთ $\frac{\varepsilon}{2}$, ე. ი. $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$. მაშინ ყოველი x-ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $0<1-x<\eta$, გვექნება

$$|f(x)-1|<\varepsilon.$$

მაშასადამე, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=2$. ამრიგად, მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=1$ წერტილში ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (ნახ. 26). მაშასადამე, $f(x)$ არაა უწყვეტი $x=1$ წერტილში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ, $f(x)=\frac{|x|}{x}$, როდესაც $x\neq 0$, ხოლო $x=0$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი $x=0$ წერტილში.



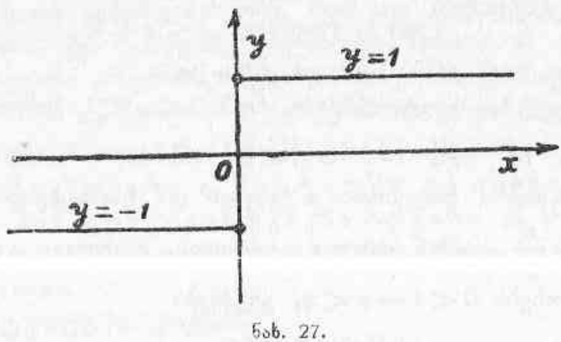
ნახ. 26.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ $x>0$, მაშინ $|x|=x$ და ამიტომ $f(x)=1$. მაშასადამე, $f(0+)=1$. თუკი $x<0$, მაშინ $f(x)=-1$ და ამიტომ $f(0-)=-1$.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი $x=0$ წერტილში ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (ნახ. 27). მაშასადამე, მოცემული ფუნქცია წყვეტილია $x=0$ წერტილში.

თეორემა 2. თ უ $]a, b[$ ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ შ ი ზ რ დ ა დ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ზ ე მ ო დ ა ნ შ ე მ ო ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ა რ ს ე ბ ო ბ ს $f(b-)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის მიხედვით, $f(x)$ ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია $]a, b[$ ინტერვალში. ამიტომ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ზემოდან შემო-



ნახ. 27.

საზღვრულია. ამ სიმრავლის ზედა საზღვარი აღვნიშნოთ A ასოთი. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება $]a, b[$ ინტერვალის ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$f(x_0)>A-\varepsilon.$$

რაკი $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია მოცემულ ინტერვალში, ამიტომ $f(x)\geqslant f(x_0)$, როდესაც $x>x_0$. მაშასადამე,

$$f(x) > A - \varepsilon, \quad \text{როდესაც } x > x_0.$$

მეორე მხრივ $]a, b[$ ინტერვალის ნებისმიერი x წერტილისათვის $f(x) \leqslant A$. ამიტომ

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad \text{როდესაც } x > x_0, \ x \in]a, b[,$$

ე. ი.

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } 0 < b - x < \eta.$$

სადაც $\eta = b - x_0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x \to b-} f(x) = A,$$

ე. ი. არსებობს $f(b-)$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 3. თუ $]a, b[$ ინტერვალში კლებადი $f(x)$ ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს $f(a+)$.

§ 4. ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \to \pm\infty$

აქამდე განვიხილავდით იმ შემთხვევას, როცა x_0 იყო სასრული რიცხვი. მაგრამ ხშირად საჭირო ხდება განვიხილოთ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x_0 = +\infty$ ან $x_0 = -\infty$.

განსაზღვრა 7. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]a, +\infty[$ შუალედში, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარია A რიცხვი, როდესაც $x \to +\infty$, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } x > N.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 8. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, a[$ შუალედში, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი A რიცხვია, როდესაც $x \to -\infty$, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } x < -N.$$

ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ, $f(x)=\frac{1}{x}$, როდესაც $x\neq 0$, ხოლო $x=0$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{და} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ვთქვათ, $N=\frac{1}{\varepsilon}$. ცხადია, თუ $x>N$, მაშინ $\frac{1}{x}<\frac{1}{N}=\varepsilon$. ამრიგად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ

$$|f(x)-0|=\frac{1}{x}<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } x>N.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოცემულია ფუნქცია $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x\neq 0$ დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $x>0$. მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$f(x)-1=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1=\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}.$$

რადგანაც $x>0$, ამიტომ

$$|f(x)-1|<\frac{1}{x}.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და განვიხილოთ რიცხვი $N=\frac{1}{\varepsilon}$. მაშინ

$$|f(x)-1|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } x>N.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x)=1.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{n\to-\infty} f(x)=-1.$$

§ 5. ფუნქციის წყვეტის წერტილთა კლასიფიკაცია

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე გაჩხვლეტილ მიდამოში. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ამ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$.

გავარჩიოთ სხვადასხვა შემთხვევა:

1°. არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ და ეს ზღვრები თანატოლია:

$$f(x_0+)=f(x_0-).$$

2°. არსებობს სასრული ზღვრები

$$f(x_0+) \text{ და } f(x_0-),$$

მაგრამ

$$f(x_0+)\neq f(x_0-).$$

3°. არ არსებობს ერთ-ერთი მაინც $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ ზღვრებიდან. ასეთია, მაგალითად, $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც არ არსებობს $f(0+)$ და $f(0-)$.

4°. მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებიდან ერთ-ერთი მაინც უსასრულოა.

განსაზღვრა 9. $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის x_0 წერტილს ეწოდება პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, თუ ადგილი აქვს 1° ან 2° შემთხვევას, ხოლო 3° ან 4° შემთხვევაში x_0 მეორე გვარის წყვეტის წერტილია.

თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი და $f(x_0+)=f(x_0-)$, მაშინ x_0 წერტილს *ასაცილებელი წყვეტის წერტილი* ეწოდება. ეს სახელწოდება სავსებით გამართლებულია, ვინაიდან ამ შემთხვევაში, თუ ფუნქციის მნიშვნელობად x_0 წერტილში ავიღებთ ფუნქციის ზღვარს x_0 წერტილში, მაშინ $f(x)$ იქნება უწყვეტი მოცემულ წერტილში.

§ 6. ფუნქციის ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის $]a, b[$ მიდამოში. მართებულია შემდეგი

თეორემა 4. *$f(x)$ ფუნქციას ზღვრად აქვს A რიცხვი x_0 წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $]a, b[$ ინტერვალის წერტილთა ყოველი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის ($x_n\neq x_0$, $n=1, 2,\ldots$), რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ ფუნქციის მნიშვნელობათა მიმდევრობა*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ldots,\ f(x_n),\ldots$$

კრებადია A რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

როდესაც

$$0<|x-x_0|<\eta.$$

განვიხილოთ $]a, b[$ ინტერვალის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ $(x_n\neq x_0,\ n=1, 2,\ldots)$, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ. ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n-x_0|<\eta,$$

როდესაც

$$n>N.$$

მაშასადამე,

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon,$$

როდესაც

$$n>N,$$

ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $]a, b[$ ინტერვალიდან აღებული წერტილთა ყოველი $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობისათვის $(x_n\neq x_0,\ n=1, 2,\ldots)$, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ, რიცხვთა მიმდევრობა $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n),\ldots$ კრებადია A

რიცხვისაკენ. დასამტკიცებელია, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვრად აქვს A რიცხვი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ზღვრად A რიცხვი. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის მოიძებნება $]a, b[$ ინტერვალის ისეთი x' წერტილი, რომ

$$|f(x')-A| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{და} \quad 0<|x'-x_0|<\eta.$$

კერძოდ, ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს $]a, b[$ ინტერვალის ისეთი x_n წერტილი, რომ

$$0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n},$$

ხოლო

$$|f(x_n)-A| \geqslant \varepsilon_0.$$

თუ n-ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს $1, 2, \ldots$, მივიღებთ $]a, b[$ ინტერვალის წერტილთა $(x_n)_{n \geqslant 1}$ მიმდევრობას, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ, ამასთანავე $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ მიმდევრობა კრებადი არ არის A რიცხვისაკენ. ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვრად აქვს A რიცხვი და ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $x_0 = \pm\infty$. დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

ეს თეორემა მთელ რიგ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობა x_0 წერტილში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, როდესაც $x \neq 0$, ხოლო $x=0$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. დავამტკიცოთ, რომ $x=0$ წერტილში არ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ წერტილთა $(x_n)_{n \geqslant 1}$ მიმდევრობა, სადაც $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ $(n=1, 2, \ldots)$. ეს მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ. ამის გარდა,

$$f(x_n)=\sin\frac{1}{x_n}=\cos n\pi=(-1)^n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

მაგრამ $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ მიმდევრობა კრებადი არაა. მაშასადამე, არ არსებობს $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$, ვინაიდან ეს ზღვარი რომ არსებობდეს, მაშინ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად იარსებებდა $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

ახლა დავამტკიცოთ კოშის თეორემა ფუნქციის ზღვრის არსებობის შესახებ. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე $]a, b[$ მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით x_0 წერტილისა. მართებულია

თეორემა 5 (კოში). $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი x_0 წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x_0 წერტილის ისეთი გაჩხვლეტილი მიდამო $U \subset]a, b[$, რომ ამ მიდამოს ორი ნებისმიერი x' და x'' წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$| f(x'') - f(x') | < \varepsilon.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვრად აქვს A რიცხვი. მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x_0 წერტილის ისეთი გაჩხვლეტილი მიდამო $U \subset]a, b[$, რომ

$$| f(x) - A | < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } x \in U.$$

ავიღოთ U მიდამოს ორი ნებისმიერი წერტილი x' და x''. მაშინ

$$| f(x') - A | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad | f(x'') - A | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობათა საფუძველზე გვაქვს:

$$| f(x'') - f(x') | = | [f(x'') - A] - [f(x') - A] | \leqslant$$

$$\leqslant | f(x'') - A | + | f(x') - A | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს x_0 წერტილის ისეთი გაჩხვლეტილი მიდამო $U \subset]a, b[$, რომ ამ მიდამოს ყოველი ორი x' და x'' წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$| f(x'') - f(x') | < \varepsilon. \tag{6.1}$$

განვიხილოთ $]a, b[$ ინტერვალის წერტილთა მიმდევრობა $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ. მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$x_n \in U, \text{ როდესაც } n > N.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.1) უტოლობას, გვექნება

$$| f(x_m) - f(x_n) | < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, n > N. \tag{6.2}$$

ამრიგად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N, რომ მართებულია (6.2) უტოლობა. მაშასადამე, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა და ამიტომ იგი კრებადია რაიმე A რიცხვისაკენ:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \tag{6.3}$$

ახლა ავიღოთ $]a, b[$ ინტერვალიდან წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობა $(x'_n)_{n \geqslant 1} (x'_n \neq x_0, n = 1, 2, \ldots)$, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = A. \tag{6.4}$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი $N_1 \geqslant N$, რომ $x'_n \in U$, როდესაც $n > N_1$. მაშინ (6.1) უტოლობის თანახმად,

$$| f(x'_n) - f(x_n) | < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N_1. \tag{6.5}$$

შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ (6.3) ტოლობას, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი $N^* \geqslant N_1$, რომ

$$| f(x_n) - A | < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N^*. \tag{6.6}$$

მაშასადამე, (6.5) და (6.6) უტოლობების თანახმად ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n > N^*$, გვექნება,

$$| f(x'_n) - A = | [f(x'_n) - f(x_n)] + [f(x_n) - A] | \leqslant$$
$$\leqslant | f(x'_n) - f(x_n) | + | f(x_n) - A | < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

ამრიგად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N^*, რომ

$$|f(x_n') - A| < 2\varepsilon, \quad \text{როდესაც } n > N^*.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია **(6,4)** ტოლობა. მაშასადამე, მე-4 თეორემის თანახმად

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

და ამით თეორემის პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 6. $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი, როდესაც $x \to +\infty$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი N, რომ $[a, +\infty[$ შუალედის ნებისმიერი ორი x' და x'' წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } x' > N, \; x'' < N.$$

§ 7. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები

მათემატიკური ანალიზის ძირითად ცნებებს, როგორიცაა წარმოებული და განსაზღვრული ინტეგრალი, საფუძვლად უდევს უსასრულოდ მცირის ცნება, რის გამოც საინტერესო და მნიშვნელოვანია უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შესწავლა.

განსაზღვრა 9. x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე x_0 წერტილში, თუ მისი ზღვარი ნულია:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

შენიშვნა. x_0 შეიძლება იყოს $+\infty$ ან $-\infty$. თუ $x_0 = +\infty$, მაშინ ამ არასაკუთრივი წერტილის მიდამოა ყოველი $]a, +\infty[$ შუალედი, ხოლო თუ $x_0 = -\infty$, მაშინ მისი მიდამოა ნებისმიერი $]-\infty, a[$ შუალედი.

უნდა გვახსოვდეს, რომ ძალიან მცირე სიდიდე არ არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ვინაიდან უსასრულოდ მცირე სიდიდე ცვლადი სიდიდეა, ძალიან მცირე სიდიდე კი მუდმივია.

თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, მაშინ $f(x) - A$ სხვაობა უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში. ეს გამომდინარეობს ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრიდან.

პირიქით, თუ $f(x)=A+\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში, მაშინ A იქნება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში.

განსაზღვრა 10. x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დადებითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x)>A, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$$

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი, რომელთა x აბსცისები აკმაყოფილებენ უტოლობებს $0<|x-x_0|<\eta$, მდებარეობენ $y=A$ წრფის ზემოთ.

განსაზღვრა 11. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უარყოფითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$f(x)<-A, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta,$$

რაც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი, რომელთა x აბსცისები აკმაყოფილებენ $0<|x-x_0|<\eta$ უტოლობებს, მდებარეობენ $y=-A$ წრფის ქვემოთ, სადაც A ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

განსაზღვრა 12. $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდებთ უსასრულოდ დიდს x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta>0$, რომ

$$|f(x)|>A, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

მაგალითი. მოცემულია ფუნქცია $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty. \tag{7,1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვი და ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{1}{(x-1)^2} > A, \quad x \neq 1. \tag{7.2}$$

აქედან

$$(x-1)^2 < \frac{1}{A}, \quad x \neq 1,$$

საიდანაც

$$0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}. \tag{7.3}$$

ამრიგად, ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (7 3) უტოლობას, მართებულია (7.2) უტოლობა. მაშასადამე, ადგილი აქვს (7,1) ტოლობას.

თეორემა 7 უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ი დ ი ს ი დ ი დ ი ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი ს ი დ ი დ ე უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ე ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $f(x)$ უსასრულოდ დიდი სიდიდეა x_0 წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ $\frac{1}{f(x)}$ უსასრულოდ მცირეა იმავე წერტილში. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. რაკი

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty,$$

ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ე. ი.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. დ ა დ ე ბ ი თ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ი ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი ს ი დ ი დ ე დ ა დ ე ბ ი თ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ი დ ი ა, უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ მ ც ი რ ი ს შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი ს ი დ ი დ ე კ ი უ ა რ ყ ო ფ ი თ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ი დ ი ა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $f(x)$ დადებითი უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვი. რაკი $f(x)>0$ და

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$0<f(x)<\frac{1}{A}, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{1}{f(x)}>A, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty.$$

ანალოგიურად მტკიცდება თეორემის მეორე ნაწილი.

§ 8. თეორემები ზღვართა შესახებ. უწყვეტ ფუნქციათა უმარტივესი თვისებები

თეორემა 9. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ზღვრად დადებითი A რიცხვი, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები K და η, რომ

$$f(x)>K, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის თანახმად, $\frac{A}{2}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta$$

ანუ

$$A-\frac{A}{2}<f(x)<A+\frac{A}{2}, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

აქედან

$$f(x)>\frac{A}{2}=K>0, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 10. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები K და η, რომ

$$f(x) < -K, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

მე-9 და მე-10 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და $f(x_0) \neq 0$, მაშინ x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას ექნება $f(x_0)$ რიცხვის ნიშანი.

თეორემა 11. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი x_0 წერტილში და $f(x) \geqslant 0$, $x \neq x_0$, მაშინ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0. \tag{8.1}$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0.$$

მაშინ, მე-10 თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $f(x) < 0$, როდესაც $0 < |x - x_0| < \eta$. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. მაშასადამე, მართებულია (8.1) უტოლობა.

თეორემა 12. ვთქვათ, x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულია $f(x)$, $\varphi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები და

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A. \tag{8.2}$$

თუ x_0 წერტილის აღნიშნულ მიდამოში ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \tag{8.3}$$

მაშინ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი და იგი A რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება. (8.2) ტოლობების თანახმად, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon,$$

როდესაც $0 < |x - x_0| < \eta$. მაშასადამე (8.3) უტოლობების თანახმად

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი.

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარია A რიცხვი x_0 წერტილში.

შედეგი. თუ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია და ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\alpha(x)\leqslant\gamma(x)\leqslant\beta(x),$$

მაშინ $\gamma(x)$ იქნება უსასრულოდ მცირე სიდიდე.

თეორემა 13. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|. \tag{8,4}$$

დამტკიცება. თეორემის პირობის თანახმად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი η, რომ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

შემდეგ, რაკი

$$||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|,$$

ამიტომ

$$||f(x)|-|A||<\varepsilon, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta,$$

ე. ი. მართებულია (8,4) ტოლობა.

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

შენიშვნა. თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობა x_0 წერტილში. მართლაც, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ -1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

ამ ფუნქციას არც ერთ წერტილში ზღვარი არა აქვს. მაგრამ ნებისმიერ x_0 წერტილში $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$.

თეორემა 14. თუ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის სასრული ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ $f(x)$ შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე გაჩხვლეტილ მიდამოში.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

სადაც A სასრული რიცხვია, მაშინ $\varepsilon=1$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)-A|<1, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta,$$

ე. ი.

$$A-1<f(x)<A+1, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15. თუ $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის გახვრეტილ მიდამოში, მაშინ $\alpha(x)f(x)$ ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის გახვრეტილ $D(x_0, \eta')$ მიდამოში. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ

$$|f(x)|<M, \text{ როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta'.$$

შემდეგ, რაკი $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta\leqslant\eta'$, რომ

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

მაშასადამე, როდესაც $0<|x-x_0|<\eta$, გვექნება

$$|\alpha(x)f(x)|=|\alpha(x)|\cdot|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon,$$

ე. ი. $\alpha(x)f(x)$ ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ $\alpha(x)\ \beta(x)$ ნამრავლიც უსასრულოდ მცირეა.

თეორემა 16. თუ არსებობს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ზღვრები x_0 წერტილში, მაშინ იარსებებს $f(x)+\varphi(x)$ და $f(x)-\varphi(x)$ ფუნქციების ზღვრები და მართებულია ტოლობები:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x), \tag{8.5}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}\varphi(x), \tag{8.6}$$

ე. ი. ალგებრული ჯამის ზღვარი შესაკრებთა ზღვრების ალგებრული ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B.$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \ |\varphi(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როდესაც } 0<|x-x_0|<\eta.$$

ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია უტოლობა $0<|x-x_0|<\eta$, მაშინ

$$|[f(x)+\varphi(x)]-(A+B)|=|[f(x)-A]+[\varphi(x)-B]|\leqslant$$

$$\leqslant|f(x)-A|+|\varphi(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

მაშასადამე, მართებულია (8.5) ტოლობა. (8.6) ტოლობის მართებულობა მტკიცდება ანალოგიურად.

ზემოდამტკიცებული თეორემა ძალაში რჩება, როცა შესაკრებთა რიცხვი ნებისმიერია, მაგრამ სასრული. თუ შესაკრებთა რიცხვი უსასრულოა, მაშინ თეორემა საზოგადოდ მართებული არაა.

შენიშვნა. შეიძლება არსებობდეს $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)]$, მაგრამ არ არსებობდეს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$. მართლაც, ვთქვათ, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, როდესაც $x\neq 0$ და $f(0)=0$, ხოლო $\varphi(x)=-f(x)$. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ არ არსებობს და, მაშასადამე, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ აგრეთვე არ არსებობს. მაგრამ

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+\varphi(x)]=0.$$

შედეგი 1. *თუ მოცემულია სასრული რიცხვი უსასრულოდ მცირეებისა $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$, მაშინ მათი ჯამი $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\ldots+\alpha_n(x)$ აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა.*

შედეგი 2. *თუ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ფუნქციები უწყვეტია x_0 წერტილში, მაშინ მათი ალგებრული ჯამი აგრეთვე უწყვეტია იმავე წერტილში.*

თეორემა 17. თუ არსებობს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ზღვრები x_0 წერტილში და

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} \varphi(x),$$

მაშინ არსებობს ისეთი $\eta > 0$, რომ

$$f(x) > \varphi(x), \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად,

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - \varphi(x)] > 0.$$

მაშასადამე, მე-9 თეორემის მიხედვით არსებობს ისეთი $\eta > 0$, რომ

$$f(x) - \varphi(x) > 0, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი.

$$f(x) > \varphi(x), \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18. თუ არსებობს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ზღვრები x_0 წერტილში და $f(x) \leqslant \varphi(x)$, $x \neq x_0$, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} \varphi(x). \tag{8.7}$$

დამტკიცება. პირობის მიხედვით,

$$\varphi(x) - f(x) \geqslant 0, \; x \neq x_0.$$

მაშასადამე, მე-11 თეორემის თანახმად

$$\lim_{x\to x_0} [\varphi(x) - f(x)] \geqslant 0.$$

აქედან მიიღება (7.7) უტოლობა.

თეორემა 19. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს აქვთ ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ არსებობს $f(x)\varphi(x)$ ნამრავლის ზღვარი და

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \varphi(x), \tag{8.8}$$

ე. ი. ნამრავლის ზღვარი ზღვართა ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \; \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B.$$

აქედან

$$f(x)=A+\alpha(x),\ \varphi(x)=B+\beta(x),$$

სადაც $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია x_0 წერტილში. შემდეგ:

$$f(x)\,\varphi(x)=[A+\alpha(x)]\,[B+\beta(x)]=AB+A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x).$$

მაგრამ მე-15 თეორემისა და მე-16 თეორემის 1-ლი შედეგის ძალით

$$\omega(x)=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$$

უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში. ამრიგად,

$$f(x)\,\varphi(x)-AB=\omega(x)$$

უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში, რის გამოც

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\,\varphi(x)]=AB,$$

ე. ი. მართებულია (8.8) ტოლობა.

ზემოდამტკიცებული თეორემა მართებულია მაშინაც, როდესაც თანამამრავლთა რიცხვი ნებისმიერია, მაგრამ სასრულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება არსებობდეს $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\,\varphi(x)]$, მაგრამ არ არსებობდეს $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

შედეგი 1. თ უ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ა x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი, მ ა შ ი ნ მ ა თ ი ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ა გ რ ე თ ვ ე უ წ ყ ვ ე ტ ი ა x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი.

შედეგი 2. თ უ ა რ ს ე ბ ო ბ ს $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ზ ღ ვ ა რ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი, მ ა შ ი ნ ყ ო ვ ე ლ ი ნ ა ტ უ რ ა ლ უ რ ი n რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს $[f(x)]^n$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ზ ღ ვ ა რ ი დ ა

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n,$$

ე. ი. ხ ა რ ი ს ხ ი ს ზ ღ ვ ა რ ი ზ ღ ვ რ ი ს ხ ა რ ი ს ხ ი ს ტ ო ლ ი ა.

მართლაც,

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=\overbrace{\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)\ldots\lim_{x\to x_0}f(x)}^{n\text{-ჯერ}}=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n.$$

შედეგი 3. თ უ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ა ქ ვ ს ზ ღ ვ ა რ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი, მ ა შ ი ნ ყ ო ვ ე ლ ი ნ ა მ დ ვ ი ლ ი A რ ი ც ხ ვ ი ს ა თ ვ ი ს ა რ ს ე ბ ო ბ ს $Af(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ზ ღ ვ ა რ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი დ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\lim_{x \to x_0} [Af(x)] = A \lim_{x \to x_0} f(x),$$

ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ.

თეორემა 20. ყოველი მრავალწევრი

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

უწყვეტია ნებისმიერ x_0 წერტილში.

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (a_0x^n) + \lim_{x \to x_0} (a_1x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \to x_0} (a_{n-1}x) + \lim_{x \to x_0} (a_n) =$$

$$= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n = P(x_0),$$

ე. ი. $P(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში. ამიტომ $P(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. თუ არსებობს $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების ზღვრები x_0 წერტილში და $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, მაშინ არსებობს $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ წილადის ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}, \tag{8.9}$$

ე. ი. წილადის ზღვარი მრიცხველისა და მნიშვნელის ზღვრების ფარდობის ტოლია, თუ მნიშვნელის ზღვარი ნული არ არის.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}. \tag{8.10}$$

ვთქვათ,

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A.$$

პირობის თანახმად, $A \neq 0$. ამიტომ მე-9 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები K და η', რომ

$$|\varphi(x)| > K, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta'.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta \leqslant \eta'$, რომ

$$|A - \varphi(x)| < \varepsilon K |A|, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

მაშასადამე, თუ x აკმაყოფილებს უტოლობებს $0 < |x - x_0| < \eta$, გვექნება

$$\left| \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|A - \varphi(x)|}{|A| \cdot |\varphi(x)|} < \frac{\varepsilon K \cdot |A|}{|A| \cdot K} = \varepsilon,$$

ე. ი. მართებულია (8.10) ტოლობა.

შემდეგ ცხადია, რომ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)$ და $f(x)$ ფუნქციები უწყვეტია x_0 წერტილში და $\varphi(x_0) \neq 0$, მაშინ $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ფარდობა აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა x_0 წერტილში.

მართლაც, $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების უწყვეტობის გამო

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)},$$

ე. ი. ფუნქციის ზღვარი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას.

თეორემა 22. თუ x_0 წერტილის მიდამოში $f(x) \geqslant 0$ და არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n$, სადაც n რაიმე ნატურალური რიცხვია, მაშინ არსებობს აგრეთვე $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = A \tag{8.11}$$

და დავუშვათ, რომ არ არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. მაშინ იარსებებს x_0 წერტილისაკენ კრებადი ისეთი ორი მიმდევრობა $(x_k')_{k \geq 1}$ და $(x_k'')_{k \geq 1}$, რომ

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k') = L_1, \quad \lim_{k \to \infty} f(x_k'') = L_2,$$

სადაც L_1 და L_2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვებია. (8.11) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$\lim_{k \to \infty} [f(x_k')]^n = L_1^n = A,$$

$$\lim_{k \to \infty} [f(x_k'')]^n = L_2^n = A.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $L_1 = L_2$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არაა სწორი.

თეორემა 23. *თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x) \geqslant 0$ და არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის იარსებებს $\sqrt[n]{f(x)}$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში და მართებულია ტოლობა*

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} \,. \tag{8.12}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x).$$

აქედან

$$f(x) = [\varphi(x)]^n.$$

პირობის მიხედვით არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} [\varphi(x)]^n$ და, ამის გარდა, x_0 წერტილის მიდამოში $\varphi(x) \geqslant 0$. ამიტომ 22-ე თეორემის თანახმად, არსებობს $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$. მაშასადამე,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = [\lim_{x \to x_0} \varphi(x)]^n,$$

საიდანაც

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)},$$

ე. ი. მართებულია (8.12) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x) \geqslant 0$, მაშინ $\sqrt[n]{f(x)}$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

შენიშვნა. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant 0$ და n კენტი რიცხვია, მაშინაც მართებულია (8.12) ტოლობა.

§ 9. ზოგიერთი მაგალითი ზღვრების მოძებნაზე

$f(x)$ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრისას ფუნქციის მნიშვნელობის შესახებ x_0 წერტილში არაფერი იყო ნათქვამი. როგორც ვიცით, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვრად აქვს A რიცხვი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

აქ მოთხოვნა $x \neq x_0$ არსებითია. ამ მოთხოვნის გარეშე შეუძლებელია, საზოგადოდ, ფუნქციის ზღვრის მოძებნა. მართლაც, ვთქვათ, საძიებელია

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

ფუნქციის ზღვარი $x = 3$ წერტილში. თუ ვიგულისხმებთ, რომ x არგუმენტი მიიღებს $x = 3$ მნიშვნელობას, მაშინ ამოცანის ამოხსნა შეუძლებელია, ვინაიდან $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ნული ხდება. თუ $x \neq 3$, მაშინ წილადი შეგვიძლია შევკვეცოთ $x - 3$ გამოსახულებაზე და ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\varphi(x) = x + 3.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{x \to 3} \varphi(x) = 6.$$

ამრიგად, x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის გამოთვლისას მხედველობაში არ უნდა მივიღოთ ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერ-

ტილში. როგორც ზემოთ დავინახეთ, $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ზღვარი x_0 წერტილში იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც იგი განსაზღვრული არ არის x_0 წერტილში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ

$$f(x)=\frac{x^3+a^3}{x+a}$$

ფუნქციის ზღვარი $x=-a$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\lim_{x\to -a} f(x) = \lim_{x\to -a} \frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)}{x+a} = \lim_{x\to -a} (x^2-ax+a^2)=3a^2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ ფუნქციის ზღვარი $x=1$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2\,(x+2)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+3)} =$$

$$=\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, ხოლო $a\neq 0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ვისარგებლებთ ბეზუს თეორემით, გვექნება

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} (x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})=na^{n-1}.$$

კერძოდ, თუ $a=1$, გვექნება

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}=n.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[q]{x^p}-1}{\sqrt[s]{x^r}-1}$, სადაც $p,\ q,\ r,\ s$ ნატურალური რიცხვებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $y=\sqrt[sq]{x}$, გვექნება

$$x=y^{qs},\quad \sqrt[q]{x^p}-1=y^{ps}-1,\quad \sqrt[s]{x^r}-1=y^{qr}-1.$$

ცხადია, რომ როდესაც $x\to 1$, მაშინ $y\to 1$, ამიტომ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[q]{x^p}-1}{\sqrt[s]{x^r}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^{ps}-1}{y^{qr}-1}=\lim_{y\to 1}\left(\frac{y^{ps}-1}{y-1}:\frac{y^{qr}-1}{y-1}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y^{ps}-1}{y-1}:\lim_{y\to 1}\frac{y^{qr}-1}{y-1}=\frac{ps}{qr}.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$, სადაც k ნატურალური რიცხვია.

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\sqrt[k]{1+x}=y$, გვექნება

$$x=y^k-1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ როდესაც $x\to 0$; მაშინ $y\to 1$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^k-1}=\frac{1}{k}.$$

§ 10. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

a^x ფუნქციას, სადაც a დადებითი რიცხვია, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty, +\infty[$ შუალედი.

a^x ფუნქცია არსებითად ზრდადია თავის განსაზღვრის არეში, როდესაც $a>1$, ხოლო არსებითად კლებადია, როდესაც $a<1$. მართლაც, თუ $a>1$, მაშინ ყოველი x_1 და x_2 რიცხვისათვის, სადაც $x_1<x_2$, გვექნება $a^{x_1}<a^{x_2}$, ხოლო თუ $a<1$, მაშინ $a^{x_1}>a^{x_2}$.

ლემა. თუ a დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{x\to 0}a^x=1. \tag{10.1}$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნულისაკენ კრებადი ნებისმიერი მიმ-

დევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$ და ვიგულისხმოთ, რომ $a>1$. როგორც ვიცით,

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}$$

და ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$a^{\frac{1}{\nu}}-1<\varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი $(x_n)_{n\geqslant 1}$ მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ

$$|x_n|<\frac{1}{\nu}, \text{ როდესაც } n>N.$$

მაშასადამე, როდესაც $n>N$, გვექნება

$$a^{|x_n|}-1<\varepsilon.$$

მაგრამ

$$|a^{x_n}-1|\leqslant a^{|x_n|}-1. \tag{10.2}$$

მართლაც, თუ $x_n\geqslant 0$, მაშინ (10.2) დამოკიდებულება ცხადია. თუკი $x_n<0$, მაშინ

$$|a^{x_n}-1|=\left|\frac{1}{a^{-x_n}}-1\right|=\frac{|1-a^{-x_n}|}{a^{-x_n}}<|1-a^{-x_n}|=$$
$$=a^{-x_n}-1=a^{|x_n|}-1.$$

ამრიგად,

$$|a^{x_n}-1|<\varepsilon, \text{ როდესაც } n>N,$$

ე. ი. მართებულია (10.1) ტოლობა, როდესაც $a>1$. თუ $a=1$, ლემა ცხადია.

ახლა ვთქვათ, $a<1$. მაშინ

$$a^x=\frac{1}{b^x}, \quad \text{სადაც} \quad b=\frac{1}{a}>1.$$

მაგრამ ზემოდამტკიცებულის თანახმად $\lim\limits_{x\to 0} b^x=1$. ამიტომ (9.1) ტოლობა მართებულია მაშინაც, როცა $a<1$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 24. მაჩვენებლიანი a^x ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი ξ რიცხვი და განვიხილოთ ξ რიცხვისაკენ კრებადი ნებისმიერი მიმდევრობა $(x_n)_{n\geq 1}$. გვაქვს

$$a^{x_n}=a^{\xi}\cdot a^{x_n-\xi}.$$

ლემის თანახმად $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n-\xi}=1$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n}=a^{\xi}.$$

მაშასადამე, a^x ფუნქცია უწყვეტია ξ წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to+\infty} a^x \quad \text{და} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x, \qquad a>0.$$

1. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $a<1$. რადგანაც a^x ფუნქცია არსებითად კლებადია და ყოველი x-სათვის $a^x>0$, ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$. ეს ზღვარი აღვნიშნოთ l ასოთი. რაკი

$$a^{x+1}=a^x\cdot a,$$

ამიტომ, თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $x\to+\infty$, მივიღებთ

$$l=l\cdot a.$$

აქედან $l(1-a)=0$. მაგრამ $1-a\neq 0$, ამიტომ $l=0$, ე. ი.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0, \text{ როდესაც } a<1.$$

ახლა ვთქვათ, $a>1$. მაშინ

$$a^x=\frac{1}{b^x}, \text{ სადაც } b=\frac{1}{a}<1.$$

მაგრამ ზემოდამტკიცებულის თანახმად $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x=0$. ამიტომ

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \text{ როდესაც } a>1.$$

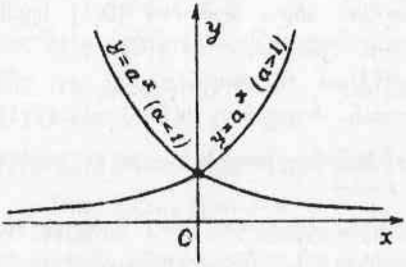
2. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x=-t$, გვექნება

$$a^x=\frac{1}{a^t}$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a^t} = \left\} \begin{array}{l} 0, \text{ თუ } a>1, \\ +\infty, \text{ თუ } a<1. \end{array}\right.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ a^x ფუნქციის გრაფიკს აქვს 28-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 28.

§ 11. რთული ფუნქციის უწყვეტობა

თეორემა 25. თუ $y=f(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, $u=\varphi(x)$ ფუნქცია კი $[a, b]$ სეგმენტზე და $\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta$, მაშინ რთული ფუნქცია $y=f[\varphi(x)]=F(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი x_0 წერტილი და ვთქვათ, $\varphi(x_0)=u_0$. რაკი $\varphi(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0} u=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0.$$

მეორე მხრივ, $f(u)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო u_0 წერტილში, გვექნება

$$\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]=F(x_0).$$

ამრიგად, რთული $F(x)=f[\varphi(x)]$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან შეიძ-

ლება იყოს უწყვეტი ფუნქცია. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $\psi(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$\psi(x)=\begin{cases} x, & \text{როდესაც } 0\leqslant x<1. \\ 0, & \text{როდესაც } x=1. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია [0,1] სეგმენტზე და წყვეტილია მხოლოდ $x=1$ წერტილში. ახლა ავიღოთ [0,1] სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია $\varphi(u)=u^2-u$. ცხადია, რომ $\varphi(0)=\varphi(1)$.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\varphi[\psi(x)]$, ე. ი. უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან. რადგანაც $\psi(1-)=1$, $f(1)=\varphi(0)$, ამიტომ

$$f(1-)=\varphi[\lim_{x\to 1-}\psi(x)]=\varphi[\psi(1-)]=\varphi(1)=\varphi(0)=f(1).$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=1$ წერტილში. შემდეგ, რაკი $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,1[შუალედში, ამიტომ $f(x)$ იქნება უწყვეტი იმავე შუალედში. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,1] სეგმენტზე, ე. ი. უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან შეიძლება უწყვეტი იყოს.

§ 12. ვაიერშტრასის თეორემები

თეორემა 26. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ რიცხვი 1-სათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტში ისეთი x_1 წერტილი, რომ

$$|f(x_1)|>1.$$

ასევე, რიცხვი 2-სათვის არსებობს $[a, b]$ სეგმენტში ისეთი x_2 წერტილი, რომ

$$|f(x_2)|>2$$

და ა. შ., რიცხვი n-სათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტში ისეთი x_n წერტილი, რომ

$$|f(x_n)|>n.$$

ეს პროცესი შეგვიძლია განვაგრძოთ უსაზღვროდ. მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას $(x_n)_{n\geqslant 1}$. ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად ამ მიმ-

დევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$, რომელიც კრებადია $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე ξ წერტილისაკენ:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi.$$

რაკი $a<x_{n_k}<b$ $(k=1, 2,\ldots)$, ამიტომ

$$a\leqslant\xi\leqslant b.$$

შემდეგ, ξ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის გამო, გვექნება

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\xi). \tag{12.1}$$

მეორე მხრივ $|f(x_{n_k})|>n_k$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k})|=+\infty$$

და, მაშასადამე, (12.1) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$|f(\xi)|=+\infty,$$

რაც შეუძლებელია. ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. ვაიერშტრასის თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას ეწოდება ვაიერშტრასის პირველი თეორემა.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალში, იგი შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული. მართლაც, ვთქვათ, $]0,1[$ ინტერვალში მოცემულია $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია. ეს ფუნქცია უწყვეტია $]0,1[$ ინტერვალში, მაგრამ ამ ინტერვალში იგი შემოუსაზღვრელია.

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია X შუალედში (ეს შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი, ინტერვალი, ნახევრადსეგმენტი). აღვნიშნოთ E-თი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ამ სიმრავლის ზედა საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზედა საზღვარი X შუალედზე და აღინიშნება $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, ხოლო E სიმრავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ქვედა საზღვარი X-ზე და აღინიშნება $\inf\limits_{x\in X} f(x)$.

თუ $f(x)$ ფუნქცია არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული X შუალედზე, მაშინ $\sup\limits_{x\in X} f(x)=+\infty$, ხოლო თუ $f(x)$ ქვემოდან არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ $\inf\limits_{x\in X} f(x)=-\infty$.

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია X შუალედზე. თუ X შუალედზე არსებობს ისეთი ξ_1 წერტილი, რომ

$$f(\xi_1)=\sup_{x\in X} f(x),$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს X შუალედზე თავის ზედა საზღვარს. ასევე, თუ X შუალედზე არსებობს ისეთი ξ_2 წერტილი, რომ

$$f(\xi_2)=\inf_{x\in X} f(x),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ქვედა საზღვარს X შუალედზე.

თეორემა 27. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი მიაღწევს ამ სეგმენტზე თავის ქვედა და ზედა საზღვრებს.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად $f(x)$ შემოსაზღვრულია სეგმენტზე. ამ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები ალვნიშნოთ შესაბამისად M და m ასოებით.

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$. ფუნქციის ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად, ყოველი ε_n რიცხვისათვის არსებობს $[a, b]$ სეგმენტის ისეთი x_n წერტილი, რომ

$$f(x_n) > M-\varepsilon_n \ (n=1, 2,\ldots). \tag{12.2}$$

მივიღეთ წერტილთა მიმდევრობა $(x_n)_{k\geqslant 1}$. რადგანაც ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$, რომელიც კრებადია $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე წერტილისაკენ.

პირობის ძალით $f(x)$ უწყვეტია ξ წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\xi). \tag{12.3}$$

მეორე მხრით, (11.2) უტოლობის თანახმად

$$f(x_{n_k})>M-\varepsilon_{n_k}.$$

აქედან, თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k\to\infty$. (11.3) ტოლობის თანახმად

$$f(\xi)\geqslant M. \tag{12.4}$$

მაგრამ

$$f(\xi) \leqslant M. \tag{12.5}$$

მაშასადამე, (12.4) და (12.5) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ

$$f(\xi)=M.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზედა საზღვარს ξ წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება $[a, b]$ სეგმენტის ისეთი ξ^* წერტილის არსებობა, რომ $f(\xi^*)=m$. ვაიერშტრასის მეორე თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება, რომ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს სეგმენტზე, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზედა ან ქვედა საზღვარს. მართლაც, განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{თუ } 0<x<1, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{როცა } x=0 \text{ და } x=1. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[0,1]$ სეგმენტზე:

$$0<f(x)<1.$$

ცხადია,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=1, \quad \inf_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=0.$$

მოცემული ფუნქცია ვერ აღწევს ვერც ზედა და ვერც ქვედა საზღვარს. ამის მიზეზი ისაა, რომ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია 0 და 1 წერტილში.

ასევე, თუ ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალში, მაშინ საზოგადოდ ვაიერშტრასის მეორე თეორემა მართებული არ არის. მართლაც. ავიღოთ $f(x)=x$ ფუნქცია, განსაზღვრული $]0,1[$ ინტერვალში. ამ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებია 0 და 1, მაგრამ ამ საზღვრებს იგი ვერ მიაღწევს $]0,1[$ ინტერვალში.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. 13. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია X შუალედში, მაშინ $M-m$ სხვაობას, სადაც $M=\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in X} f(x)$, ეწოდება ზემოაღნიშნული ფ უ ნ ქ ც ი ი ს რ ხ ე ვ ა X შუალედში და აღინიშნება ω სიმბოლოთი.

§ 13. ბოლცანოსა და კოშის თეორემები

თეორემა 28 (ბოლცანო). ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(\xi)=0$.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)<0$ და $f(b)>0$. რაკი $f(a)<0$, ამიტომ მე-10 თეორემის შედეგის თანახმად $[a, b]$ სეგმენტში არსებობს ისეთი c წერტილი, რომ

$$f(x)<0, \text{ როდესაც } a \leqslant x \leqslant c.$$

ყველა ასეთი c წერტილის სიმრავლე აღვნიშნოთ E ასოთი. E სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და ამიტომ მას აქვს ზედა საზღვარი. იგი აღვნიშნოთ ξ ასოთი. ცხადია, $a<\xi<b$.

დავამტკიცოთ, რომ

$$f(\xi)=0. \tag{13.1}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $f(\xi)$ არ შეიძლება იყოს დადებითი. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $f(\xi)>0$, მაშინ ξ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო არსებობს $[a, b]$ სეგმენტში ისეთი $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ სეგმენტი, რომლის ყოველ x წერტილში $f(x)>0$, კერძოდ, $f(\xi-\delta)>0$. მეორე მხრივ, რაკი $\xi-\delta \in E$, ამიტომ

$$f(\xi-\delta)<0.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, $f(\xi)$ არ შეიძლება იყოს დადებითი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f(\xi)$ არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $f(\xi)<0$. მაშინ მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტში ისეთი $[\xi-\eta, \xi+\eta]$ სეგმენტი, რომლის ყოველ x წერტილში $f(x)<0$. მაშინ $\xi+\eta$ წერტილი მიეკუთვნება E სიმრავლეს და ξ არ იქნება E სიმრავლის ზედა საზღვარი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, $f(\xi)$ არ შეიძლება იყოს უარყოფითი.

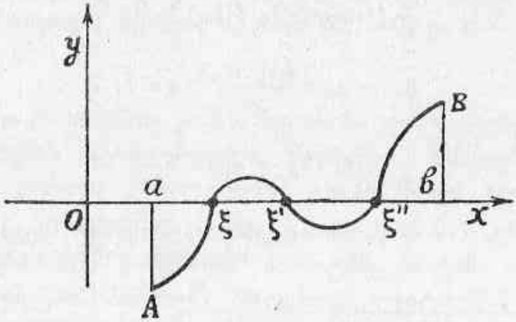
ამრიგად, $f(\xi)$ არც დადებითია და არც უარყოფითი, ამიტომ მართებულია (13.1) ტოლობა. ბოლცანოს თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს; თუ უწყვეტი $y=f(x)$ წირის A და B ბოლოები მდებარეობენ Ox ღერძის სხვადასხვა მხარეს, მაშინ ეს წირი გადაკვეთს Ox ღერძს ერთ წერტილში მაინც (ნახ. 29).

ამ ნახაზზე $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს ნულის მნიშვნელობას $[a, b]$ სეგმენტის ξ, ξ' და ξ'' წერტილებში.

x-ის იმ მნიშვნელობას, რომელზედაც $f(x)$ ნული ხდება, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნული ანუ $f(x)=0$ განტოლების ფესვი.

მეორე დამტკიცება. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი შუაზე c წერტილით, მივიღებთ ორ სეგმენტს $[a, c]$ და $[c, d]$. თუ $f(c)=0$, თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 29.

ვთქვათ, $f(c)\neq 0$. იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(c)>0$, შემოვიღოთ აღნიშვნები $a_1=a$ და $b_1=c$. ხოლო როდესაც $f(c)<0$, მაშინ $a_1=c$, $b_1=b$. ორივე შემთხვევაში $a_1<b_1$ და

$$f(a_1)<0,\ f(b_1)>0.$$

ცხადია, $[a_1, b_1]\subset[a, b]$ და

$$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}.$$

ახლა გავყოთ $[a_1, b_1]$ სეგმენტი შუაზე c_1 წერტილით, მივიღებთ ორ სეგმენტს $[a_1, c_1]$ და $[c_1, b_1]$. თუ $f(c_1)=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $f(c_1)\neq 0$. თუ $f(c_1)>0$, მაშინ იყოს $a_2=a_1$ და $b_2=c_1$, ხოლო როცა $f(c_1)<0$, ვიგულისხმოთ, რომ $a_2=c_1$ და $b_2=b_1$. ორივე შემთხვევაში გვექნება $a_2<b_2$ და

$$f(a_2)<0,\ f(b_2)>0.$$

ცხადია, $[a_2, b_2]\subset[a_1, b_1]$ და

$$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2}.$$

ასეთი მსჯელობა რომ განვაგრძოთ, მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \tag{13.2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. თუ $f(c_n)$ რიცხვებიდან ერთ-ერთი ნულია, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ყველა n-სათვის

$$f(a_n) < 0, \; f(b_n) > 0.$$

რადგანაც

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ამიტომ

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

მაშასადამე, (13.2) წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას და ამიტომ კანტორის თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი ξ წერტილი, რომელიც ეკუთვნის მოცემული მიმდევრობის ყველა სეგმენტს, ე. ი.

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

დავამტკიცოთ, რომ $f(\xi) = 0$. რაკი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ξ წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(\xi).$$

მაგრამ $f(a_n) < 0$ ყოველი n-თვის. მაშასადამე,

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leqslant 0. \tag{13.3}$$

ასევე, რადგანაც $f(b_n) > 0$ ყოველი n-თვის, ამიტომ

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geqslant 0. \tag{13.4}$$

(13.3) და (13.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(\xi) = 0$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 29 (კოში). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო შუალედზე და ამ შუალედის ორ a და b-წერტილში $f(a) \neq f(b)$, მაშინ მოცემული ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $f(a)$ და $f(b)$ შორის.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a<b$ და $f(a)<f(b)$. ავიღოთ $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის რომელიმე P რიცხვი: $f(a)<P<f(b)$. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=f(x)-P.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $[a\ \ b]$ სეგმენტზე. ამის გარდა,

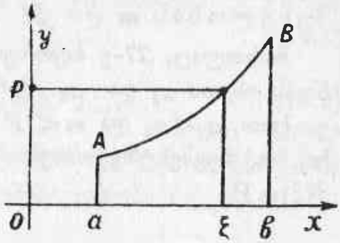
$$\varphi(a)=f(a)-P<0,\quad \varphi(b)=f(b)-P>0.$$

ამიტომ, 28-ე თეორემის თანახმად $[a, b]$ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $\varphi(\xi)=0$, ე. ი.

$$f(\xi)-P=0.$$

აქედან $f(\xi)=P$ და ამით კოშის თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: Ox ღერძის პარალელური $y=P$ წრფე კვეთს $y=f(x)$ წირს ერთ წერტილში მაინც (ნახ. 30). ამ ნახაზის მიხედვით $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს P რიცხვის მნიშვნელობას $[a, b]$ სეგმენტის ξ წერტილში.



ნახ. 30.

შენიშვნა. ზემოდამტკიცებული თეორემები საზოგადოდ მართებული არ არის, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია $[a, b]$ სეგმენტზე. მართლაც, ვთქვათ, $[-1, 1]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე

$$f(x)=\frac{|x|}{x},\ \text{როდესაც}\ x\neq 0,\ f(0)=3.$$

ეს ფუნქცია წყვეტილია $x=0$ წერტილში. ამის გარდა,

$$f(-1)=-1,\ f(+1)=1.$$

ცხადია, მოცემული ფუნქცია არ ღებულობს არცერთ მნიშვნელობას, რომლებიც მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის.

შედეგი 1. *თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო X შუალედზე და მუდმივი არ არის, მაშინ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს გარკვეულ Y შუალედს.*

მართლაც, ვთქვათ l და L წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ქვე-

და და ზედა საზღვრებს X შუალედზე. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი y_0, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $l < y_0 < L$. სიმრავლის ქვედა და ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეში არსებობს ისეთი რიცხვები $f(a)$ და $f(b)$ რომ

$$f(a) < y_0 < f(b).$$

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a < b$. რაკი $[a, b] \subset X$, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი წერტილი $\xi \subset [a, b]$, რომ $f(\xi) = y_0$. ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია ღებულობს X შუალედზე l და L შორის მოთავსებულ ნებისმიერი რიცხვის მნიშვნელობას.

შედეგი 2. თ უ m და M წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ე ნ $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე უ წ ყ ვ ე ტ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს უ მ ც ი რ ე ს ს ა და უ დ ი დ ე ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ე ბ ს, მ ა შ ი ნ ფ უ ნ ქ ც ი ა მ ი ი ღ ე ბ ს ყ ვ ე ლ ა მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს m და M შ ო რ ი ს.

მართლაც, 27-ე თეორემის თანახმად $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ისეთი x_1 და x_2 წერტილები, რომ $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. ვთქვათ, $x_1 < x_2$ და $m < P < M$. მაშინ 29-ე თეორემის თანახმად $[x_1, x_2]$ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(\xi) = P$.

§ 11. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია X შუალედზე. შემოვიღოთ

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა 14. ჩვენ ვიტყვით, რომ $f(x)$ **ფუნქცია** თ ა ნ ა ბ რ ა დ უ წ ყ ვ ე ტ ი ა X შუალედზე, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს X შუალედის წერტილებზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ X შუალედის ყოველი x' და x'' წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x'' - x'| < \eta$, მართებულია უტოლობა

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

თუ $f(x)$ თანაბრად უწყვეტი არაა X შუალედზე, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის მოიძებნება X შუალედში ისეთი ორი წერტილი x' და x'', რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x'' - x'| < \eta$ და

$$|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon_0.$$

თეორემა 30 (კანტორი). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. დასამტკიცებელია, რომ $f(x)$ თანაბრად უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი არ არის $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი ε_0 რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი η რიცხვისათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტზე ისეთი ორი წერტილი x' და x'', რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x''-x'|<\eta$, ხოლო

$$|f(x'')-f(x')|\geqslant \varepsilon_0.$$

ახლა განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$. აღებული $\eta_n (n=1, 2,\ldots)$ რიცხვისათვის მოიძებნება $[a,b]\,(\eta_n)$ სეგმენტზე ისეთი x'_n და x'_n წერტილი, რომ

$$|x''_n-x'_n|<\eta_n \quad (n=1, 2,\ldots,), \tag{14.1}$$

ხოლო

$$|f(x''_n)-f(x'_n)|\geqslant \varepsilon_0 \quad (n=1, 2,\ldots). \tag{14.2}$$

წერტილთა მიმდევრობა $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $(x'_{n_k})_{k\geqslant 1}$. ვთქვათ,

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k}=x_0.$$

ცხადია, $x_0\in[a, b]$.

(14.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty}(x''_{n_k}-x'_{n_k})=0,$$

რის გამო

$$\lim_{k\to\infty} x''_{n_k}=\lim_{k\to\infty}[(x''_{n_k}-x'_{n_k})+x'_{n_k}]=x_0.$$

(14.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x''_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqslant \varepsilon_0 \ (k=1, 2,\ldots,). \tag{14.3}$$

შემდეგ, რაკი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი უწყვეტია x_0 წერტილში. მაშასადამე,

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k})=\lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k})=f(x_0).$$

ახლა თუ გადავალთ ზღვარზე (14.3) უტოლობაში, როდესაც $k \to \infty$, მივიღებთ

$$|f(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0,$$

ე. ი. $0 \geqslant \varepsilon_0$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $f(x)$ ფუნქცია არათანაბრად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, არ არის სწორი. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, და ამით კანტორის თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ინტერვალზე, იგი უწყვეტი იქნება იმავე ინტერვალზე, მაგრამ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება არ იყოს თანაბრად უწყვეტი იმავე ინტერვალზე. განვიხილოთ

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $]0,1[$ ინტერვალზე განსაზღვრულია ფუნქცია ფორმულით

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $]0,1[$ ინტერვალზე. დავამტკიცოთ, რომ მოცემული ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია მოცემულ ინტერვალზე. მაშინ $\varepsilon = 1$ რიცხვისათვის არსებობს $]0,1[$ ინტერვალის წერტილებისაგან დამოუკიდებლად ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $]0,1[$ ინტერვალის ყოველი x' და x'' წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x'' - x'| < \eta$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'') - f(x')| < 1. \tag{14.4}$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\eta < 1$. ავიღოთ $]0,1[$ ინტერვალის ორი წერტილი $x' = \frac{\eta}{2}$, $x'' = \frac{\eta}{3}$. ცხადია, რომ

$$|x'' - x'| < \eta.$$

შემდეგ

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right| = \left|\frac{3}{\eta} - \frac{2}{\eta}\right| = \frac{1}{\eta} > 1;$$

რაც (14.4) უტოლობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არ არის და ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია არ იქნება თანაბრად უწყვეტი $]0,1[$ ინტერვალში.

§ 15. შექცეული ფუნქციის უწყვეტობა

თეორემა 31. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია და უწყვეტია X შუალედზე, მაშინ მისი შექცეული ფუნქცია $x=\varphi(y)$ არსებითად მონოტონურია და უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

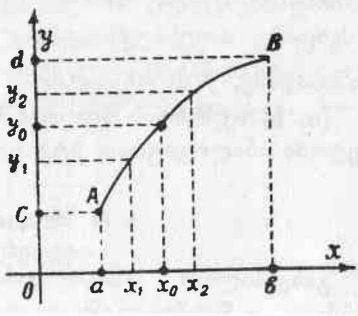
დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია X შუალედზე. აღვნიშნოთ Y-ით $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების არე. 29-ე თეორემის პირველი შედეგის თანახმად, Y წარმოადგენს შუალედს. რაკი $y=f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია X სიმრავლეზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია $x=\varphi(y)$, რომელიც განსაზღვრულია Y შუალედზე.

დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(y)$ ფუნქცია უწყვეტია Y შუალედზე. განვიხილოთ Y შუალედის ნებისმიერი შიგა წერტილი y_0. მაშინ არსებობს Y შუალედის ისეთი ორი c და d წერტილი, რომ $c<y_0<d$. ვთქვათ,

$$\varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b,\ \varphi(x_0)=y_0.$$

ცხადია, რომ $a<x_0<b$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და შევარჩიოთ ორი ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს პირობები (ნახ. 31):

$$a<x_1<x_0<x_2<b \quad \text{და} \quad 0<x_2-x_1<\varepsilon.$$



ნახ. 31.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2).$$

რადგანაც $y_1<y_2$, ამიტომ 29-ე თეორემის თანახმად, y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის $[y_1, y_2]$ სეგმენტიდან x-ის სათანადო მნიშვნელობა მოთავსებულია x_1-სა და x_2-ს შორის და, მაშასადამე, $|x-x_0|<\varepsilon$, ე. ი.

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad y_1<y<y_2.$$

ამრიგად, $x=\varphi(y)$ ფუნქცია უწყვეტია $y=y_0$ წერტილში.

თუ Y შუალედს აქვს ბოლოები, მაშინ ანალოგიურად მტკიცდება $x=\varphi(y)$ ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა შუალედის ბოლოებზე.

თეორემა 32. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებითად მონოტონური $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა $f([a, b])$ სიმრავლე სეგმენტია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ არსებითად ზრდადია $[a,b]$ სეგმენტზე; მაშინ

$$f([a,b])=[f(a),\ f(b)].$$

დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ვთქვათ, c არის $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი შიგა წერტილი. ცხადია, $f(a)<f(c)<f(b)$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი იმ პირობით, რომ დაცული იყოს უტოლობები

$$f(a)<f(c)-\varepsilon<f(c)+\varepsilon<f(b).$$

$[a, b]$ სეგმენტში მოიძებნება ისეთი c_1 და c_2 წერტილები, რომ

$$f(c_1)=f(c)-\varepsilon,\ f(c_2)=f(d)+\varepsilon,$$

ამასთანავე $c_1<c<c_2$. თუ აღვნიშნავთ η-თი უმცირესს $c-c_1$ და c_2-c რიცხვებიდან, მაშინ ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს $c-\eta<x<c+\eta$, გვექნება

$$f(c)-\varepsilon<f(x)<f(c)+\varepsilon.$$

მაშასადამე, $f(x)$ უწყვეტია წერტილში.

$[a, b]$ სეგმენტის ბოლოებში $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა ანალოგიურად მტკიცდება. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 16. ლოგარითმული ფუნქცია

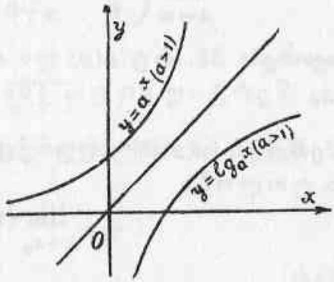
განვიხილოთ 1-საგან განსხვავებული დადებითი a რიცხვი. ვთქვათ, x წარმოადგენს y ცვლადის მაჩვენებლიან ფუნქციას

$$x=a^y. \tag{16.1}$$

მე-9 პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ a^y ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად მონოტონურია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, ამასთანავე a^y მიიღებს 0 და $+\infty$ შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობას. ამიტომ 31-ე თეორემის თანახმად (16.1) ტოლობა $]0, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრავს y-ს როგორც x-ის არსებითად მონოტონურ უწყვეტ ფუნქციას. ეს ფუნქცია ასე აღინიშნება:

$$y=\lg_a x.$$

ამ ფუნქციას ეწოდება ლოგარითმული ფუნქცია a ფუძით. იგი არსებითად ზრდადია, როდესაც $a>1$, ხოლო იგი არსებითად კლებადია, როდესაც $a<1$, ვინაიდან a^y ფუნქცია პირველ შემთხვევაში არსებითად ზრდადია, მეორე შემთხვევაში კი არსებითად კლებადია.



ნახ. 32.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \lg_a x=-\infty, \text{ როდესაც } a>1,$$

ხოლო

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \lg_a x=+\infty, \text{ როდესაც } a<1.$$

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ 1^y ფუნქცია მუდმივია. ამიტომ $x=1^y$ ტოლობა არ განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის ფუნქციას, რის გამო, ჩვეულებრივ, არ განიხილავენ ლოგარითმს ერთის ფუძით.

რადგანაც ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციები ურთიერთშექცეული ფუნქციებია, ამიტომ $y=\lg_a x$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ისეთი სახე, როგორც ეს წარმოდგენილია 32-ე ნახაზზე.

მაგალითი. განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_n)_{n\geqslant 1}$, სადაც

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

ვიპოვოთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (8.6) ფორმულის მიხედვით

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\ln(2n)+C+\rho_{2n},$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}=\ln(n-1)+C+\rho_{n-1},$$

სადაც $\lim\limits_{m\to\infty}\rho_m=0$, ხოლო C ეილერის მუდმივია. მაგრამ

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\ln(2n)-\ln(n-1)+\rho_{2n}-\rho_{n-1}=\ln\frac{2n}{n-1}+\rho_{2n}-\rho_{n-1}$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $n \to \infty$ და გავითვალისწინებთ x_n-ის გამოსახულებას, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

თეორემა 33. თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს აქვთ ზღვარი x_0 წერტილში და, ამასთანავე, $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)>0$, მაშინ არსებობს $[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქციის ზღვარი და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=\alpha^\beta,$$

სადაც

$$\alpha=\lim_{x\to x_0}u(x),\quad \beta=\lim_{x\to x_0}v(x).$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)},$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)\ln u(x)]}=e^{\beta\ln\alpha}=\alpha^\beta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 17. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $|x|\to+\infty$

III თავის მე-8 პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობას $(x_n)_{n\geqslant 1}$, სადაც

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

აქვს ზღვარი და ეს ზღვარი აღვნიშნეთ e ასოთი. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 34. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ფუნქციის ზღვარია e რიცხვი, როდესაც $|x|\to+\infty$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{17.1}$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $x \to +\infty$. მაშინ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, $x > 1$, მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი n, რომ

$$n \leqslant x < n+1.$$

აქედან

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}.$$

თუ ამ უტოლობების ყოველ წევრს დავუმატებთ 1-ს, გვექნება

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

რადგანაც

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = e,$$

ამიტომ მე-12 თეორემის ძალით

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

ახლა ვთქვათ, $x < 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x = -(1+t).$$

მაშინ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{-(1+t)} = \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-(1+t)} =$$

$$= \left(\frac{1+t}{t}\right)^{1+t} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right).$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \cdot \lim_{t \to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

ამრიგად, მართებულია (17.1) ტოლობა.

ახლა გამოვთვალოთ $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{1}{\alpha}=x$. ცხადია, რომ როდესაც $\alpha\to 0$, მაშინ $|x|\to+\infty$ და, მაშასადამე,

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

ამრიგად,

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

დასასრულ განვიხილოთ ზღვრები, რომლებიც დაკავშირებულია e რიცხვთან.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lg_a(1+\alpha)}{\alpha}=\lg_a e \ (a>0,\ a\neq 1).$$

დამტკიცება. რადგანაც $\lg_a x$ ფუნქცია უწყვეტია $]0,+\infty[$ შუალედში, ამიტომ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lg_a(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\lg_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lg_a\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]=\lg_a e.$$

კერძოდ, თუ $a=e$, გვექნება

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1.$$

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \ (a\neq 1,\ a>0)$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $a^x-1=\alpha$, გვექნება $a^x=1+\alpha$ და, მაშასადამე,

$$x\ln a=\ln(1+\alpha).$$

აქედან

$$x=\frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}.$$

როდესაც $x\to 0$, მაშინ $\alpha\to 0$. ამიტომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\ln a}{\ln(1+\alpha)}=\ln a\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}}=\ln a.$$

კერძოდ, თუ $a=e$, გვექნება $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $1-x=\dfrac{2y}{\pi}$. აქედან

$x=1-\dfrac{2}{\pi}y$. ცხადია, რომ როდესაც $x\to 1$, მაშინ $y\to 0$. მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{2y/\pi}{\cos\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}y\right)}=\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\frac{2}{\pi}.$$

მაგალითი 4. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$,

სადაც

$$x_n=\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\dots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n,\quad a_i>0\ (i=1,2\dots m),$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$x_n = \left[\frac{(\sqrt[n]{a_1}-1)+(\sqrt[n]{a_2}-1)+\ldots+(\sqrt[n]{a_m}-1)}{m}+1\right]^n.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{(\sqrt[n]{a_1}-1)+(\sqrt[n]{a_2}-1)+\ldots+(\sqrt[n]{a_m}-1)}{m}=\alpha_n,$$

გვექნება

$$x_n=(1+\alpha_n)^n=(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}\cdot n\alpha_n}.$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ და, ამის გარდა,

$$\lim_{n\to\infty}(n\,\alpha_n)=\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}-1}{1/n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt[n]{a_2}-1}{1/n}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{a_m}-1}{1/n}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}(\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_m)=\ln\sqrt[m]{a_1,\,a_2\cdots a_m}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\ln\sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_m}} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_m}\,.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $(1+x)^{\alpha}=1+t$, გვექნება $\alpha\ln(1+x)=\ln(1+t)$. მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

§ 18. ხარისხოვანი ფუნქცია

ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება $y=x^{\alpha}$ ფუნქციას, სადაც α ნამდვილი რიცხვია.

1. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $\alpha=m$ მთელი დადებითი რიცხვია. ამ შემთხვევაში

$$y=\overbrace{x\cdot x\cdots x}^{m\text{-ჯერ}}$$

აქედან ჩანს, რომ x^m ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს $]-\infty, +\infty[$ შუალედი. ამ შუალედში ეს ფუნქცია უწყვეტია, ვინაიდან იგი წარმოადგენს ნამრავლს უწყვეტი ფუნქციებისას, რომელთა რიცხვი სასრულია. თუ m ლუწია, მაშინ x^m ფუნქცია არსებითად ზრდადია $[0, +\infty[$ შუალედში, ხოლო არსებითად კლებადია $]-\infty, 0]$ შუალედში. თუკი m კენტია, მაშინ x^m წარმოადგენს არსებითად ზრდად ფუნქციას $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} x^m=+\infty, \tag{18.1}$$

სადაც m მთელი დადებითი რიცხვია. რადგანაც $x\to+\infty$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x>1$. ბერნულის უტოლობის თანახმად

$$x^m=[1+(x-1)]^m>1+(x-1)m. \tag{18.2}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი M რიცხვი. თუ ვიგულისხმებთ

$$x>\frac{M-1}{m}+1,$$

მაშინ

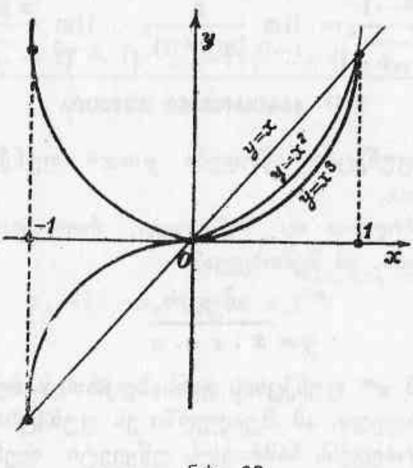
$$1+(x-1)m > M$$

და, მაშასადამე, (17.2) უტოლობის თანახმად

$$x^m > M.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (17.1) ტოლობა.

33-ე ნახაზზე მოცემულია $y=x^m$ ფუნქციის გრაფიკები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $m=1, 2, 3$.



ნახ. 33.

2. ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი ფუნქცია $f(x)=x^\alpha$, როდესაც $\alpha=-m$ მთელი უარყოფითი რიცხვია. ამ შემთხვევაში, განსაზღვრის მიხედვით,

$$f(x)=\frac{1}{x^m}.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია ყოველ $x=x_0$ წერტილში, სადაც $x_0 \neq 0$. მართლაც,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^m}=\frac{1}{x_0^m}=f(x_0),$$

ე. ი. ფუნქციის ზღვარი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში, ამიტომ $f(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში. $x=0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია. ამის გარდა, x^α ფუნქცია, α ლუწია თუ კენტი, $]0, +\infty[$ შუალედში არსებითად კლებადია. თუ α ლუწია,

მაშინ x^{α} ფუნქცია $]-\infty, 0[$ შუალედში არსებითად ზრდადია, ხოლო როცა α კენტია, ეს ფუნქცია არსებითად კლებადია იმავე შუალედში.

როდესაც $\alpha<0$, ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგ ტოლობათა მართებულება:

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha}=+\infty, \quad \lim_{|x|\to+\infty} x^{\alpha}=0,$$

$$\lim_{x\to 0-} x^{\alpha}=+\infty, \text{ როდესაც } \alpha \text{ ლუწია,}$$

$$\lim_{x\to 0-} x^{\alpha}=-\infty, \text{ როდესაც } \alpha \text{ კენტია.}$$

3 ახლა შევისწავლოთ ხარისხოვანი x^{α} ფუნქცია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც α ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც α დადებითია. α რიცხვს შეგვიძლია ასეთი სახე მივცეთ: $\alpha=\frac{p}{q}$, სადაც p და q ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში $x^{p/q}$ ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით

$$x^{p/q}=\sqrt[q]{x^p}.$$

თუ q ლუწია, მაშინ $x^{p/q}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $[0, +\infty[$ შუალედი, ხოლო თუ q კენტია, მაშინ $x^{p/q}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty, +\infty[$ შუალედი.

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $x^{p/q}$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $[0, +\infty[$ შუალედში როდესაც q ლუწია. მართლაც, $x^{p/q}$ შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ $(\sqrt[q]{x})^p$. მაგრამ $\sqrt[q]{x}$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $[0,\infty[$ შუალედში. მაშასადამე, $x^{p/q}$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია და უწყვეტია $[0, +\infty[$ შუალედში.

ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p/q}==+\infty$$

თუ p და q კენტი რიცხვებია, მაშინ $x^{p/q}$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. თუ p ლუწია და q კენტია, მაშინ $x^{p/q}$ ფუნქცია არსებითად კლებადია $]-\infty, 0]$ შუალედში და არსებითად ზრდადია $[0, +\infty[$ შუალედში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $\frac{p}{q}$ უარყოფითი რიცხვია და მასთან q ლუწია, $x^{p/q}$ ფუნქცია უწყვეტია $]0, +\infty[$ შუალედში, ხოლო თუ q კენტია, მაშინ $x^{p/q}$ ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედის ყოველ წერტილში, გარდა $x=0$ წერტილისა.

4. დასასრულ, ვთქვათ, რომ α ირაციონალური რიცხვია, ხოლო x ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს. ცხადია, რომ

$$x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x},$$

სადაც e ნეპერის რიცხვია. $e^{\alpha \ln x}$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად მონოტონურია $]0, +\infty[$ შუალედში. ამრიგად, x^{α} ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად მონოტონურია $]0, +\infty[$ შუალედში, ამასთანავე x^{α} არსებითად ზრდადია, როდესაც $\alpha>0$ და არსებითად კლებადია, როდესაც $\alpha<0$. ამის გარდა, ცხადია, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}=\begin{cases} +\infty, & \text{როდესაც } \alpha>0,\\ 0, & \text{როდესაც } \alpha<0,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha}=\begin{cases} 0, & \text{როდესაც } \alpha>0,\\ +\infty, & \text{როდესაც } \alpha<0.\end{cases}$$

§ 19. ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლება. რაციონალური ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x\to\pm\infty$

1. როგორც ვიცით, ფუნქციას

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

სადაც n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ნამდვილი რიცხვებია და ამასთანავე $a_0\neq 0$ ეწოდება n-ური ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ანუ პოლინომი.

ზემოდამტკიცებული იყო (თეორემა 20), რომ $P(x)$ მრავალწევრი უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{|x|\to+\infty}|P(x)|=+\infty. \tag{19.1}$$

გვაქვს:

$$P(x)=x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right). \tag{19.2}$$

რადგანაც

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)=a_0 \tag{19.3}$$

და

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^n| = +\infty,$$

ამიტომ მართებულია (19.1) ტოლობა. ამის გარდა, n კენტია თუ ლუწი, (19.2) და (19.3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \quad \text{თუ } a_0 > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty, \quad \text{თუ } a_0 < 0,$$

ხოლო თუ n კენტია, მაშინ

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty, \quad \text{როდესაც } a_0 > 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty, \quad \text{როდესაც } a_0 < 0.$$

ამ ტოლობათა საფუძველზე ვღებულობთ შემდეგ დებულებას:

$P(x)$ მრავალწევრს აქვს a_0x^n უფროსი წევრის ნიშანი, თუ x-ის აბსოლუტური სიდიდე საკმაოდ დიდია.

თეორემა 35. ნამდვილკოეფიციენტებიანი ყოველი კენტი ხარისხის ალგებრულ განტოლებას ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია კენტი ხარისხის ალგებრული განტოლება

$$F(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_0 > 0$ ზემოთ მიღებული დებულების თანახმად არსებობს ისეთი დადებითი α რიცხვი, რომ

$$F(-\alpha) < 0, \ F(\alpha) > 0.$$

ბოლცანოს თეორემის თანახმად, $-\alpha$ და α-ს შორის არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ რიცხვი, რომ $F(\xi) = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

2. მეორე თავის მეექვსე პარაგრაფში აღნიშნული იყო, რომ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ფუნქცია, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია და არა აქვთ საერთო ფესვები, რაციონალური ფუნქციაა. რაციონალური ფუნქცია უწყვეტია ყოველ წერტილში, გარდა იმ წერტილებისა, სადაც $Q(x)$ ისპობა. ვთქვათ, $Q(x)$ მრავალწევრის ფესვებია x_1 $x_2, \dots, x_p$. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფესვები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია და, ამის გარდა, ადგილი აქვს უტოლობებს

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p.$$

მაშინ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება

$$]-\infty,\ x_1[,\ ]x_1,\ x_2[, \ldots]x_p,\ +\infty[$$

ინტერვალთა ჯამი

$$]-\infty,\ x_1[\ \cup\ ]x_1,\ x_2[\ \cup \ldots \cup\ ]x_p,\ +\infty[.$$

თუკი $Q(x)$ მრავალწევრს არა აქვს არცერთი ნამდვილი ფესვი, მაშინ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება $]-\infty,\ +\infty[$ შუალედი და ამ შუალედში იგი უწყვეტია.

ახლა გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

სადაც

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m.$$

აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს სამი შემთხვევა.

ა) $m = n$. ამ შემთხვევაში

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{a_n}{x^n}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{b_n}{x^n}}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

ბ) $m < n$. ამ შემთხვევაში $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \ldots + \dfrac{a^n}{x^m}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_m}{x^m}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ a_0 და b_0 ერთნაირი ნიშნისაა, მაშინ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$$

მიუხედავად იმისა $n-m$ ლუწია თუ კენტი, ხოლო

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} -\infty, & \text{თუ } n-m \text{ კენტია.} \\ +\infty, & \text{თუ } n-m \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

გ) $m > n$. ამ შემთხვევაში $\frac{P(x)}{Q(x)}$ წარმოვადგინოთ ასე

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0x^{m-n} + b_1x^{m-n-1} + \dots + \frac{b_m}{x^n}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

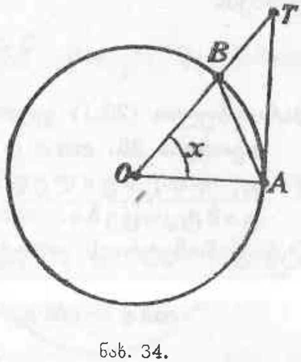
§ 20. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ფუნქციებს $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ და $\operatorname{cosec} x$ ეწოდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. მათემატიკურ ანალიზში ტრიგონომეტრიული ფუნქციის არგუმენტი არის რიცხვი, რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რაიმე კუთხის რადიანებში გამოსახული ზომა. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ამ ფუნქციების თვისებები მათი უწყვეტობის თვალსაზრისით.

1. $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების განსაზღვრის არეა $]-\infty, +\infty[$ შუალედი. ამ ფუნქციების პერიოდია 2π. სანამ შევუდგებოდეთ $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების შესწავლას მათი უწყვეტობის თვალსაზრისით, დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, მაშინ მართებულია უტოლობები

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|. \qquad (20.1)$$



ნახ. 34.

დამტკიცება. განვიხილოთ R რადიუსიან წრეში მახვილი კუთხე, AOB, AB ქორდა და AT მხები (ნახ. 34). ვთქვათ, AOB კუთხის რადიანული ზომა არის x და ვიგულისხმოთ, რომ $x > 0$. მაშინ $\breve{AB}$ რკალის სიგრძე იქნება Rx, ამიტომ AOB სექტორის ფართობი ტოლია $\frac{R^2x}{2}$. გარდა ამისა,

ფართ. $\triangle AOB = \frac{1}{2}R^2 \sin x$,

ფართ. $\triangle AOT = \frac{1}{2} R \cdot AT = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

ფართ. $\triangle AOB <$ ფართ. სექტ. $AOB <$ ფართ. $\triangle AOT$,

ე. ი.

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

ამ უტოლობების ყველა წევრი გავყოთ $\frac{1}{2} R^2$-ზე, მივიღებთ

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{20.2}$$

ახლა ვთქვათ, x უარყოფითი მახვილი კუთხეა: $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. მაშინ $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ და, მაშასადამე, (19.2) უტოლობების თანახმად გვექნება

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x),$$

ე. ი.

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

მაშასადამე, ყოველი x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

მართებულია (20.1) უტოლობები. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 36. $\cos x$ და $\sin x$ ა რ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი $]-\infty, +\infty[$ შ უ ა ლ ე დ შ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი x_0. ტრიგონომეტრიის ერთ-ერთი ფორმულის თანახმად

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

მაგრამ

$$\left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leqslant 1.$$

ლემის ძალით, თუ $0 < \left| \frac{x - x_0}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$, გვექნება

$$\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \left| \frac{x - x_0}{2} \right|.$$

მაშასადამე,

$$|\cos x - \cos x_0| < 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

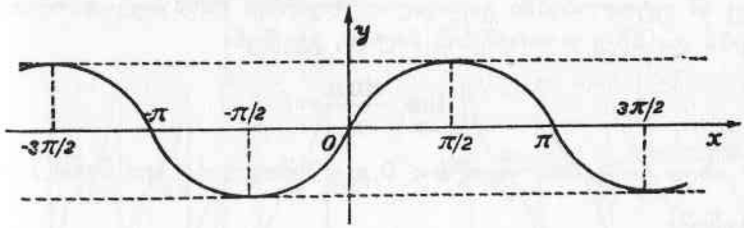
$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0.$$

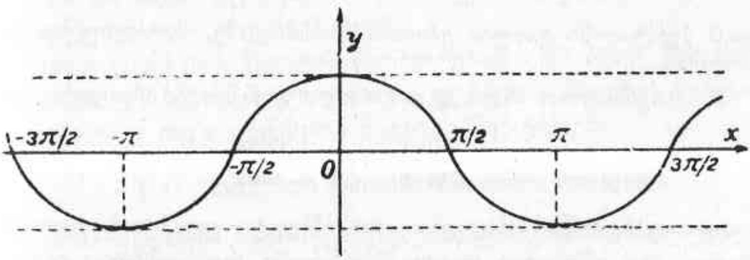
თეორემა დამტკიცებულია.

$\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების გრაფიკები მოცემულია შესაბამისად 35-ე და 36-ე ნახაზებზე.



ნახ. 35.

$\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების გრაფიკებს ეწოდება შესაბამისად სინუსოიდი და კოსინუსოიდი.



ნახ. 36.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 37. $\frac{\sin x}{x}$ ფუნქციის ზღვარია 1, როდესაც $x\to 0$, ე. ი.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1. \qquad (20.3)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $0<x<\frac{\pi}{2}$. მაშინ ლემის ძალით

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

ამ უტოლობათა ყოველი წევრი გავყოთ $\sin x$-ზე, მივიღებთ

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

აქედან გვაქვს

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

თუ ამ უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $x\to 0+$ მე-12 და 36-ე თეორემების ძალით, გვექნება

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x}=1.$$

ახლა ვთქვათ $-\frac{\pi}{2}<x<0$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $t=-x$, გვექნება

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0+} \frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t}=1.$$

ამრიგად, $\frac{\sin x}{x}$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები $x=0$ წერტილში ტოლია ერთისა. მაშასადამე, მართებულია (19.3) ტოლობა.

2. განვიხილოთ ახლა $\operatorname{tg} x$ და $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციები. როგორც ვიცით,

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

რადგანაც $\operatorname{tg} x$ წარმოადგენს ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობას, ამიტომ იგი უწყვეტია ყოველ წერტილში, რომელზედაც $\cos x$ განსხვავებულია ნულისაგან. მაგრამ $\cos x$ ნული ხდება $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ წერტილებში, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ამიტომ $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, გარდა $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ მნიშვნელობებისა.

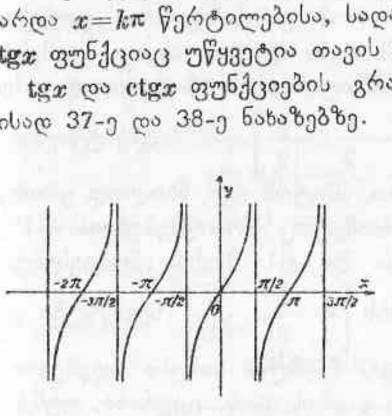
ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg}x = +\infty, \qquad \lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg}x = -\infty.$$

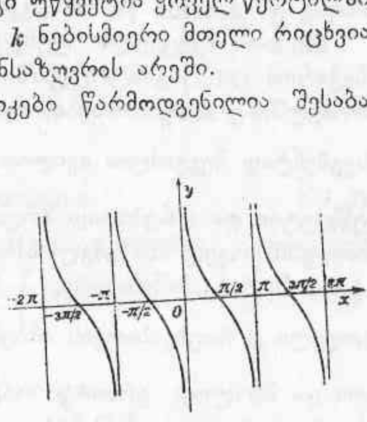
მაშასადამე, $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ წერტილებში როგორი მნიშვნელობაც გინდა მივანიჭოთ $\operatorname{tg}x$ ფუნქციას, იგი წყვეტილია და მასთან წყვეტა უსასრულოა, ხოლო დანარჩენ წერტილებში $\operatorname{tg}x$ უწყვეტია. ამრიგად, $\operatorname{tg}x$ უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

რაც შეეხება $\operatorname{ctg}x$ ფუნქციას, იგი უწყვეტია ყოველ წერტილში, გარდა $x=k\pi$ წერტილებისა, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. $\operatorname{ctg}x$ ფუნქციაც უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

$\operatorname{tg}x$ და $\operatorname{ctg}x$ ფუნქციების გრაფიკები წარმოდგენილია შესაბამისად 37-ე და 38-ე ნახაზებზე.



ნახ. 37.



ნახ. 38.

$\operatorname{tg}x$ და $\operatorname{ctg}x$ ფუნქციების გრაფიკებს უწოდებენ შესაბამისად ტანგენსოიდს და კოტანგენსოიდს.

$\sec x$ ფუნქციას წყვეტის წერტილებად აქვს იგივე წერტილები, რაც $\operatorname{tg}x$ ფუნქციას, ხოლო $\operatorname{cosec}x$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები იგივეა, რაც $\operatorname{ctg}x$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები.

§ 21. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შექცევის საკითხს.

1. განვიხილოთ განტოლება

$$\sin y = x. \tag{21.1}$$

ცხადია, რომ -1-სა და $+1$-ს შორის მოთავსებული x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის უამრავი მნიშვნელობა, რომელიც გამოიხატება ტოლობით

$$y=(-1)^k\alpha+k\pi, \tag{21.2}$$

სადაც α არის (21.1) განტოლების ფესვი, მოთავსებული $-\frac{\pi}{2}$-სა და $\frac{\pi}{2}$-ს შორის, ხოლო k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. მაშასადამე, y შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x-ის მრავალსახა ფუნქცია განსაზღვრული $[-1,1]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში წერენ

$$y=\mathrm{Arcsin}\, x.$$

ამრიგად, $\mathrm{Arcsin} x$ წარმოადგენ $\sin x$-ის შექცეულ ფუნქციას.

$\sin x$-ის შექცეული ფუნქცია რომ განვსაზღვროთ ცალსახად, საჭიროა (21.1) განტოლებაში y-ს თვის ავიღოთ ისეთი სეგმენტი. რომელშიაც $\sin y$ არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ სეგმენტად შეგვიძლია ავიღოთ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ამ სეგმენტში $\sin y$ უწყვეტია და არსებითად ზრდადია, ამიტომ იგი მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია -1 და $+1$-ს შორის. მაშასადამე, -1-სა და $+1$ შორის მოთავსებული ყოველი x რიცხვისათვის არსებობს $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტში ერთი და მხოლოდ ერთი y რიცხვი, რომლის სინუსი აღებული x რიცხვის ტოლია. ამ შემთხვევაში y არის x-ის ცალსახა ფუნქცია და მას ასე აღნიშნავენ

$$y=\arcsin x.$$

$\arcsin x$ ფუნქციას ეწოდება $\mathrm{Arcsin}\, x$ ფუნქციის მ თ ა ვ ა რ ი შ ტ ო. რადგანაც $\sin y$ უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ამიტომ $\arcsin x$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $[-1,1]$ სეგმენტზე.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (21.2) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\mathrm{Arcsin}\, x=(-1)^k \arcsin x+k\pi,$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. თუ $k=0$, მაშინ

$$\mathrm{Arcsin}\, x=\arcsin x.$$

განსაზღვრის თანახმად

$$\sin(\mathrm{Arcsin}\, x) = x.$$

აქ იგულისხმება, რომ $|x| \leqslant 1$. ცხადია, რომ

$$0 < \arcsin x < \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } 0 < x < 1,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < 0, \text{ როდესაც } -1 < x < 0$$

და, ამის გარდა,

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin(-1] = -\frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \tag{21.3}$$

მართლაც, $\arcsin(-x)$ და $-\arcsin x$ კუთხეების რადიანული ზომები მოთავსებულია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტში. ორივე კუთხეს აქვს ერთნაირი სინუსი

$$\sin[\arcsin(-x)] = -x,$$

$$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.3) ტოლობის მართებულობა.

$y = \mathrm{Arcsin}\, x$ ფუნქციის გრაფიკია სინუსოიდი (ნახ. 39), ხოლო $y = \arcsin x$ ფუნქციისა—AB რკალი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\arcsin x = y,$$

გვექნება $x = \sin y$. ცხადია, რომ

$$\lim_{x \to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

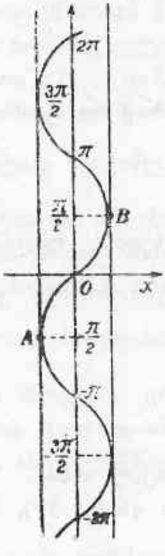
2. განვიხილოთ განტოლება

$$\cos y = x. \tag{21.4}$$

x-ის ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის. შეესაბამება y-ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ,

$$y = \pm \alpha + 2k\pi, \tag{21.5}$$

სადაც α არის 0-სა და π-ს შორის მოთავსებული (21.4) განტოლების ფესვი, ხოლო k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ამრიგად, y შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x-ის მრავალსახა ფუნქცია, განსაზღვრული $[-1, +1]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში წერენ



ნახ. 39.

$$y = \mathrm{Arc}\cos x.$$

$\mathrm{Arc}\cos x$ წარმოადგენს $\cos x$-ის შექცეულ ფუნქციას. ეს შექცეული ფუნქცია ცალსახად რომ იქნეს განსაზღვრული, საჭიროა. ავიღოთ y-სათვის ისეთი შუალედი, რომელშიც $\cos y$ არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ შუალედად. შეგვიძლია ავიღოთ $[0, \pi]$ სეგმენტი. ამ სეგმენტში $\cos y$ არსებითად კლებადია და იგი მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის. ამიტომ x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია -1-სა და $+1$-ს შორის, არსებობს $[0, \pi]$ სეგმენტში y-ის ერთი მნიშვნელობა, რომლის კოსინუსი x-ის ტოლია. ამ შემთხვევაში y არის x-ის ცალსახა ფუნქცია და მას აღნიშნავენ ასე

$$y = \mathrm{arc}\cos x.$$

$\mathrm{arc}\cos x$ ფუნქციას ეწოდება $\mathrm{Arc}\cos x$-ის მ თ ა ვ ა რ ი შ ტ ო.

რადგანაც $\cos y$ უწყვეტია და არსებითად კლებადია $[0,\pi]$ სეგმენტზე, ამიტომ $\mathrm{arc}\cos x$ არის უწყვეტი და არსებითად კლებადი $[-1,1]$ სეგმენტზე.

თუ გავითვალისწინებთ (21.5) ტოლობას, გვექნება

$$\mathrm{Arc}\cos x = \pm \mathrm{arc}\cos x + 2k\pi,$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

განსაზღვრის თანახმად,

$$\cos(\operatorname{Arc}\cos x)=x,$$

ამასთან იგულისხმება, რომ $|x| \leqslant 1$. ცხადია, რომ

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \text{ როდესაც } -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

მაშასადამე,

$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, როდესაც $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

ამის გარდა,

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x. \qquad (21.6)$$

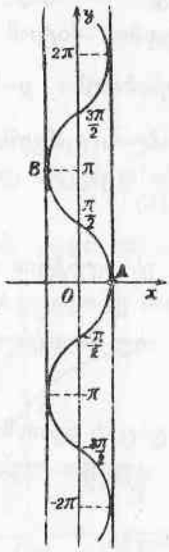
მართლაც, არკკოსინუსის განსაზღვრის თანახმად, $\arccos(-x)$ კუთხის რადიანული ზომა მოთავსებულია $[0, \pi]$ სეგმენტში, ხოლო $\pi-\arccos x$ კუთხის რადიანული ზომაც იმავე სეგმენტშია მოთავსებული. ორივე კუთხეს აქვს ერთნაირი კოსინუსი

$$\cos[\arccos(-x)]=-x,$$

$$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.6) ტოლობის მართებულობა.

$y=\operatorname{Arccos} x$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს კოსინუსოიდს (ნახ. 40), ხოლო $y=\arccos x$ ფუნქციის გრაფიკია AB რკალი.



ნახ. 40.

3. ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$\operatorname{tg} y=x. \qquad (21.7)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ,

$$y=\alpha+k\pi, \qquad (21.8)$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ხოლო α არის (21.7) განტოლების ფესვი $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში. მაშასადამე, y შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x-ის მრავალსახა ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამ შემთხვევაში წირენ

$$y=\operatorname{Arctg} x.$$

$\operatorname{Arctg} x$ ფუნქციას ეწოდება $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ეს ფუნქცია რომ ცალსახად განვსაზღვროთ, საჭიროა (21.7) განტოლებაში y ცვლადი განვიხილოთ ისეთ ინტერვალში, რომელშიაც $\operatorname{tg} y$ არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ ინტერვალად შევვიძლია ავიღოთ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. ამ ინტერვალში $\operatorname{tg} y$ არსებითად ზრდადია და იგი მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ამიტომ x-ის ერთ მნიშვნელობას $]\infty, +\infty[$ შუალედიდან შეესაბამება y-ის ერთი მნიშვნელობა $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში, რომლის ტანგენსი x-ის ტოლია. ამ შემთხვევაში y არის x-ის ცალსახა ფუნქცია და მას აღნიშნავენ ასე:

$$y=\operatorname{arctg} x.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. $\operatorname{arctg} x$ ფუნქციას ეწოდება $\operatorname{Arctg} x$ ფუნქციის მ თ ა ვ ა რ ი შ ტ ო.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (20.8) ტოლობას, გვექნება

$$\operatorname{Arctg} x=\operatorname{arctg} x+k\pi,$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

$\operatorname{Arctg} x$ ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x)=x.$$

ცხადია,

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } -\infty<x<+\infty.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x. \tag{21.9}$$

მართლაც, $\operatorname{arctg}(-x)$ და $-\operatorname{arctg} x$ კუთხეებს აქვს ერთნაირი ტანგენსები:

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arc\,tg}(-x)]=-x, \quad \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x)=-\operatorname{arc\,tg} x=-x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.9) ტოლობის მართებულობა.

$y=\operatorname{Arc\,tg} x$ ფუნქციის გრაფიკია ტანგენსოიდი (ნახ. 41), ხოლო $y=\operatorname{arctg} x$ ფუნქციისა—AB წირი.

ცხადია,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=1$$

რადგანაც $\operatorname{arc\,tg} x$ ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} 0=0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y}=1.$$

4. დასასრულ განვიხილოთ განტოლება

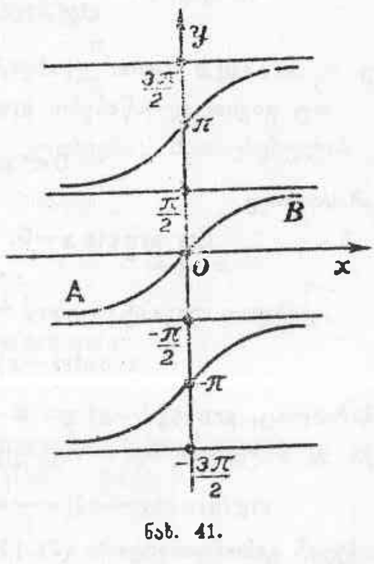
$$\operatorname{ctg} y=x. \tag{21.10}$$

რადგანაც $\operatorname{ctg} y$ ღებულობს ყოველ მნიშვნელობას $-\infty$ და $+\infty$ შორის და, ამის გარდა, იგი პერიოდული ფუნქციაა π პერიოდით, ამიტომ x-ის ნებისმიერ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ

$$y=\alpha+k\pi, \tag{21.11}$$

სადაც α არის (20.10) განტოლების ფესვი $]0, \pi[$ ინტერვალში, ხოლო k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ცხადია, y არის x-ის მრავალსახა ფუნქცია. ამ შემთხვევაში წერენ

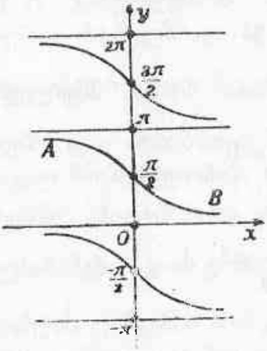
$$y=\operatorname{Arcctg} x.$$



ნახ. 41.

$\operatorname{Arc\,ctg} x$ ფუნქციას ეწოდება $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ეს შექცეული ფუნქცია რომ ცალსახად იყოს განსაზღვრული, საჭიროა (21.10) განტოლებაში y განვიხილოთ ისეთ ინტერვალში, რომელშიაც $\operatorname{ctg} y$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ ინტერვალად შეგვიძლია

ავიღოთ $]0, \pi[$. ამ ინტერვალში $\operatorname{ctg} y$ არსებითად კლებადია და იგი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $-\infty$ და $+\infty$ შორის. ამიტომ x-ის ერთ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $-\infty$ და $+\infty$ შორის, შეესაბამება $]0,\pi[$ ინტერვალში y-ის ერთი მნიშვნელობა, რომლის კოტანგენსი x-ის ტოლია. ამ შემთხვევაში y არის x-ის ცალსახა ფუნქცია და მას აღნიშნავენ



ნახ. 42.

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. $\operatorname{arcctg} x$ ფუნქციას ეწოდება $\operatorname{Arcctg} x$-ის მ თ ა ვ ა რ ი შ ტ ო. თუ გავითვალისწინებთ (21.11) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{Arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,ctg} x + k\pi,$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია. განსაზღვრის თანახმად,

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{Arcctg} x) = x,$$

ე. ი. $\operatorname{Arc\,ctg} x$ ისეთი კუთხეა, რომლის კოტანგენსი x-ის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ $\operatorname{arcctg} x$-ის განსაზღვრას, გვექნება

$$0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi,$$

ამასთანავე

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcc\,tg} x = \pi.$$

ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x. \tag{21.12}$$

მართლაც, $\operatorname{arc\,ctg}(-x)$ და $\pi - \operatorname{arc\,ctg} x$ კუთხეები მოთავსებულია $]0, \pi[$ ინტერვალში. ორივე კუთხეს აქვს ერთნაირი კოტანგენსი:

$$\operatorname{ctg}[\operatorname{arc\,ctg}(-x)] = -x, \quad \operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arc\,ctg} x) = -x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.12) ტოლობის მართებულობა.

$y = \operatorname{Arc\,ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკია კოტანგენსოიდი (ნახ. 42), ხოლო $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ ფუნქციის გრაფიკია AB წირი.

§ 22. შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის დამოკიდებულებანი

ანალიზის მრავალი საკითხისათვის საჭიროა ვიცოდეთ დამოკიდებულებანი შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

1. დავამტკიცოთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა.

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{22.1}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}, \quad -\infty<x<+\infty. \tag{22.2}$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0\leqslant \arccos x\leqslant \pi.$$

თუ მეორე უტოლობების ყველა წევრს გავამრავლებთ (-1)-ზე, მივიღებთ

$$-\pi\leqslant -\arccos x\leqslant 0.$$

ამ უტოლობების ყველა წევრს მივუმატოთ $\frac{\pi}{2}$, გვექნება

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

ამრიგად, $\arcsin x$ და $\frac{\pi}{2}-\arccos x$ კუთხეები მოთავსებულია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე. ამის გარდა,

$$\sin(\arcsin x)=x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

ამიტომ მართებულია (22.1) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (22.2) ტოლობის მართებულობა.

2. გამოვსახოთ არკსინუსი არკტანგენსით. ვთქვათ,

$$y=\arcsin x.$$

მაშინ

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1. \tag{22.3}$$

$\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ კუთხე მოთავსებულია $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში და ამ კუთხის ტანგენსია $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ხოლო (22.3) ტოლობის მიხედვით $\arcsin x$ კუთხის ტანგენსია $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. მაშასადამე,

$$\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1. \tag{22.4}$$

3. გამოვსახოთ არკტანგენსი არკსინუსით. რადგანაც

$$\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ამიტომ

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty<x<+\infty. \tag{22.5}$$

4. გამოვსახოთ არკკოსინუსი არკკოტანგენსით. ტოლობიდან

$$\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

ვღებულობთ

$$\arccos x=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1. \tag{22.6}$$

§ 23. ჰიპერბოლური ფუნქციები

ჰიპერბოლურ ფუნქციებს გამოყენება აქვს მათემატიკური ანალიზისა და ტექნიკის მრავალ საკითხში.

ფუნქციებს

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

ეწოდება **ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი** და მათ აღნიშნავენ შესაბამისად შემდეგი სიმბოლოებით: $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sh} x&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x&=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} & \operatorname{cth} x&=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.\end{aligned}\right\} \tag{23.1}$$

1. $\operatorname{sh} x$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, *ჰიპერბოლური სინუსი* ეწოდება. ჰიპერბოლური სინუსი არსებითად ზრდადია თავის განსაზღვრის არეში, ვინაიდან e^x არსებითად ზრდადია, e^{-x} კი არსებითად კლებადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში ცხადია, რომ

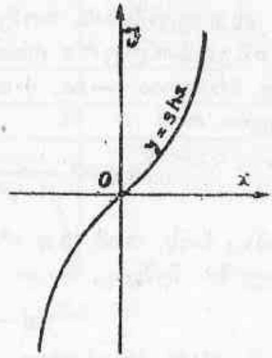
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty.$$

მაშასადამე, $\operatorname{sh} x$ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

მაშასადამე, $\operatorname{sh} x$ კენტი ფუნქციაა. ამ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 43-ე ნახაზზე.



ნახ. 43.

2. $\operatorname{ch} x$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, *ჰიპერბოლური კოსინუსი* ეწოდება. ეს ფუნქცია არსებითად ზრდადია $[0, +\infty[$ შუალედში. მართლაც, ვთქვათ $0 \leqslant x_1 < x_2$. გვაქვს

$$\operatorname{ch} x_2 - \operatorname{ch} x_1 = \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} - \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x_2 - x_1} - 1\right)\left(e^{x_1} - e^{-x_2}\right) > 0.$$

ამრიგად, $\operatorname{ch} x$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია $[0, +\infty[$ შუალედში.

შემდეგ, ცხადია, რომ

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

ე. ი. $\operatorname{ch} x$ წარმოადგენს ლუწ ფუნქციას. ამიტომ იგი არსებითად კლებადია $]-\infty, 0]$ შუალედში.

$y = \operatorname{ch} x$ ფუნქციის გრაფიკს *ჯაჭვწირი* ეწოდება. ამ წირის გრაფიკი მოცემულია 44-ე ნახაზზე.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{23.2}$$

გვაქვს

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1.$$

ადვილად მტკიცდება აგრეთვე შემდეგი ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y,\\ \mathrm{sh}(x-y) &= \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y - \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y,\\ \mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y,\\ \mathrm{ch}(x-y) &= \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y - \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y. \end{aligned}\right\} \qquad (23.3)$$

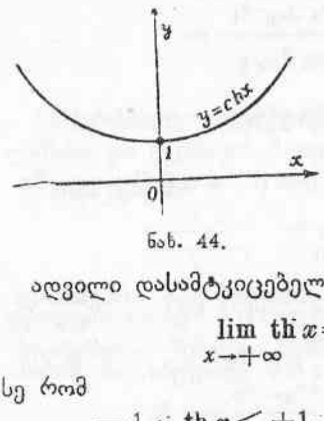
3. $\mathrm{th}\,x$ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი ტ ა ნ გ ე ნ ს ი ეწოდება. ეს ფუნქცია არსებითად ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. მართლაც, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\mathrm{th}\,x = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1},$$

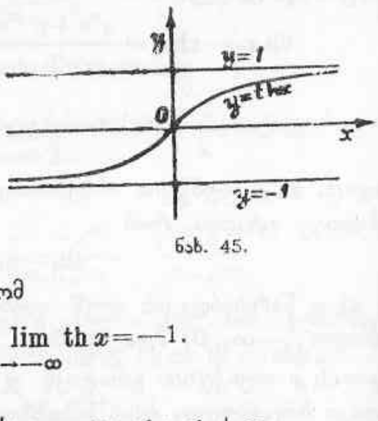
საიდანაც ჩანს, რომ $\mathrm{th}\,x$ არსებითად ზრდადი ფუნქციაა $[0, +\infty]$ შუალედში. შემდეგ, რაკი

$$\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}\,x,$$

ამიტომ $\mathrm{th}\,x$ არსებითად ზრდადია $]-\infty, 0]$ შუალედშიაც ამრიგად, $\mathrm{th}\,x$ არსებითად ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.



ნახ. 44.



ნახ. 45.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}\,x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}\,x = -1.$$

ასე რომ

$$-1 < \mathrm{th}\,x < +1, \text{ როდესაც } -\infty < x < +\infty.$$

$y = \mathrm{th}\,x$ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს 45-ე ნახაზზე მოცემული წირი.

4. შევისწავლოთ ახლა $\mathrm{cth}\,x$ ფუნქცია, რომელსაც ჰ ი პ ე რ ბ ო-

ლური კოტანგენსი ეწოდება. იგი განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა. ეს ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. ცხადია, რომ

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{cth}x=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-}\operatorname{cth}x=-\infty.$$

მაშასადამე, $x=0$ წერტილში $\operatorname{cth}x$ ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას.

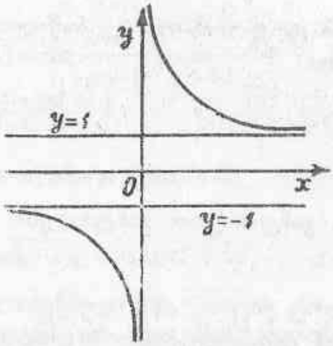
შემდეგ,

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{cth}x=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{cth}x=-1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\operatorname{cth}x$ ფუნქცია კლებადია $]-\infty, 0[$ და $]0, +\infty[$ შუალედებში, მასთან

$$-\infty<\operatorname{cth}x<-1, \text{ როდესაც } -\infty<x<0,$$

$$1<\operatorname{cth}x<+\infty, \text{ როდესაც } 0<x<+\infty.$$



ნახ. 46.

$y=\operatorname{cth}x$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 46-ე ნახაზზე.

დასასრულ, (22.1) ტოლობებიდან ადვილად მიიღება ფორმულები

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\quad \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x},\quad \operatorname{th}x\cdot\operatorname{cth}x=1.$$

ამრიგად, ჰიპერბოლური ფუნქციები ენათესავება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

§ 24. შექცეული ჰიპერბოლური ფუნქციები

1. განტოლება $x=\operatorname{sh}y$ განსაზღვრავს შექცეულ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ეს ფუნქცია აღინიშნება $\operatorname{arsh}x$ სიმბოლოთი, ასე რომ

$$y=\operatorname{arsh}x.$$

ვიპოვოთ $\operatorname{arsh}x$ ფუნქციის გამოსახულება. რადგანაც

$$x=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\frac{e^{2y}-1}{2e^{y}},$$

ამიტომ გვაქვს:

$$e^{2y}-2xe^y-1=0.$$

აქედან

$$e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}\,.$$

რაკი $e^y>0$, ამიტომ რადიკალის წინ ასაღებია $+$ ნიშანი. ასე, რომ

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1}\,.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავალოგარითმებთ e ფუძით, მივიღებთ

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

ანუ

$$\mathbf{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}). \tag{24.1}$$

2. განვიხილოთ განტოლება

$$x=\mathrm{ch}\,y. \tag{24.2}$$

როგორც ვიცით, $\mathbf{ch}\,y$ ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty,+\infty[$ შუალედში, მასთან იგი არსებითად ზრდადია $[0,+\infty[$ შუალედში, ხოლო იგი არსებითად კლებადია $]-\infty,0]$ შუალედში. ამის გარდა, $\mathbf{ch}\,y$ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $[1,+\infty[$ შუალედში. (24.2) განტოლება განსაზღვრავს y-ს როგორც x-ის ფუნქციას და მას ასე აღნიშნავენ

$$y=\mathbf{arch}\,x.$$

ვიპოვოთ $\mathbf{arch}\,x$ ფუნქციის გამოსახულება. გვაქვს:

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{e^{2y}+1}{2e^y}.$$

აქედან

$$e^{2y}-2xe^y+1=0.$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას e^y-ის მიმართ, მივიღებთ

$$e^y=x\pm\sqrt{x^2-1}\,. \tag{24.3}$$

ჯერ განვიხილოთ რადიკალის წინ $+$ ნიშანი:

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1}\,.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავალოგარითმოთ e ფუძით, მივიღებთ

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

ანუ

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{24.4}$$

ახლა (24.3) ტოლობაში რადიკალის წინ ავიღოთ — ნიშანი, გვექნება

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

აქედან

$$y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

ანუ

$$\operatorname{arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{24.5}$$

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ (24.4) და (24.5) ტოლობებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ 1 \leqslant x < +\infty. \tag{24.6}$$

როგორც ვხედავთ (24.6) ტოლობაში ორი ნიშანია. ეს მოსალოდნელიც იყო, ვინაიდან $\operatorname{ch} y$ ფუნქციის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება y არგუმენტის ორი მნიშვნელობა, რომლებიც აბსოლუტური მნიშვნელობით ტოლი არიან.

3. რადგანაც $x = \operatorname{th} y$ ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $]-1, +1[$ ინტერვალში. ეს ფუნქცია აღინიშნება $\operatorname{arth} x$ სიმბოლოთი:

$$y = \operatorname{arth} x.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია $]-1, +1[$ ინტერვალში.

ვიპოვოთ $\operatorname{arth} x$ ფუნქციის გამოსახულება. გვაქვს

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

აქედან

$$e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ -1 < x < +1.$$

ან ტოლობის ორივე ნაწილი გავალოგარითმოთ e ფუძით, გვექნება

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

ანუ

$$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \tag{24.7}$$

4. განვიხილოთ განტოლება

$$x=\operatorname{cth} y.$$

როგორც ვიცით, $\operatorname{cth} y$ ფუნქცია არსებითად კლებადია $]-\infty, 0[$ და $]0, +\infty[$ შუალედებში და ამ შუალედებში უწყვეტია. ამასთანავე $\operatorname{cth} y$ ფუნქციის ცვლილების არეა $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ სიმრავლე. ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ სიმრავლეზე. ეს ფუნქცია აღინიშნება $\operatorname{arcth} x$ სიმბოლოთი:

$$y=\operatorname{arcth} x.$$

ახლა ვიპოვოთ $\operatorname{arcth} x$ ფუნქციის გამოსახულება. გვაქვს

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}}=\frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}.$$

აქედან

$$e^y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\quad |x|>1,$$

საიდანაც

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},$$

ე. ი.

$$\operatorname{arcth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad |x|>1. \tag{24.8}$$

§ 25. ელემენტარულ ფუნქციათა კლასი

ფუნქციათა იმ სიმრავლიდან, რომელსაც მათემატიკურ ანალიზში განიხილავენ, გამოყოფენ ეგრეთ წოდებულ ელემენტარულ ფუნქციებს. ძ ი რ ი თ ა დ ი ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ა შემდეგი:

1. $y=C$, სადაც C არის მუდმივა.
2. $y=x^\alpha$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.
3. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.
4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec} x$.

ა. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\, x$, $y=\mathrm{arcctg}\, x$, $y=\mathrm{arcsec}\, x$, $y=\mathrm{arccosec}\, x$.

განსაზღვრა 15. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი წარმოიდგინება ერთი ფორმულით, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

ელემენტარული ფუნქციებია, მაგალითად,

$$y=\ln\cos x,\ y=\mathrm{ctg}\, x\, .\, \mathrm{arctg}\, x,\ y=2^{x^x},$$

$$y=\frac{\mathrm{tg}^2(\ln x)+\ln\sin(x+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x^3+\arcsin x+\mathrm{ctg}^2 3x}}$$

არაელემენტარულია ფუნქცია $y=E(x)$, სადაც $E(x)$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x-ს.

$y=|x|$ ფუნქცია ელემენტარულია, ვინაიდან იგი წარმოიდგინება ასე

$$y=\sqrt{x^2}\,.$$

თეორემა 38. ნებისმიერი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

დამტკიცება. წინა პარაგრაფებში დავადგინეთ, რომ ყოველი ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. შემდეგ, ნებისმიერი არითმეტიკული ოპერაცია უწყვეტ ფუნქციებზე გვაძლევს ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

დასასრულ, 25-ე თეორემის თანახმად, უწყვეტი ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციიდან კვლავ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშასადამე, რაკი ყოველი ელემენტარული ფუნქცია შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებიდან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით, ამიტომ იგი უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 39. ვთქვათ, $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებზე განსაზღვრულია შესაბამისად ელემენტარული ფუნქციები $\varphi(x)$ და $\psi(x)$. თუ $\varphi(c)=\psi(c)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობებით

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{როდესაც } a\leqslant x\leqslant c,\\ \psi(x), & \text{როდესაც } c< x\leqslant b,\end{cases}$$

წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(c)=\psi(c)=A.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$f(x)=\varphi\left[c+\frac{(x-c)-|x-c|}{2}\right]+$$

$$+\psi\left[c+\frac{(x-c)+|x-c|}{2}\right]-A. \tag{25.1}$$

მართლაც, თუ $a \leqslant x \leqslant c$, მაშინ

$$f(x)=\varphi\left(c+\frac{x-c+x-c}{2}\right)+\psi\left(c+\frac{x-c-x+c}{2}\right)-A=$$

$$=\varphi(x)+\psi(c)-A=\varphi(x),$$

ხოლო თუ $c<x\leqslant b$, მაშინ

$$f(x)=\varphi\left(c+\frac{x-c-x+c}{2}\right)+\varphi\left(c+\frac{x-c+x-c}{2}\right)-A=$$

$$=\varphi(c)+\psi(x)-A=\psi(x).$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია წარმოდგენილია ერთი ფორმულით და ამიტომ იგი ელემენტარული ფუნქციაა.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & \text{როდესაც } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ \operatorname{tg} x, & \text{როდესაც } 0<x\leqslant\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

ამ შემთხვევაში $\varphi(x)=\sin^2 x$, $\psi(x)=\operatorname{tg} x$, $c=0$. რადგანაც $\varphi(0)=\psi(0)=0$. ამიტომ (24.1) ფორმულის მიხედვით

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{x-|x|}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{x+|x|}{2}\right).$$

მაშასადამე, $f(x)$ არის ელემენტარული ფუნქცია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$ სეგმენტზე.

§ 26. უსასრულოდ მცირეთა შედარება. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები

ვთქვათ, რომელიმე საკითხის გამოკვლევისას ერთდროულად განიხილება რამდენიმე უსასრულოდ მცირე $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ მრავალ შემთხვევაში საჭიროა აღნიშნულ უსასრულო მცირეთა ერთმანეთთან შედარება მათი ნულისაკენ მისწრაფების ხასიათის მიხედვით. ორი α და β უსასრულოდ მცირის შედარებას საფუძვლად უდევს მათი ფარდობის ქცევა.

განსაზღვრა 16. თუ α და β უსასრულოდ მცირეთა $\frac{\alpha}{\beta}$ ფარდობა უსასრულოდ მცირეა, მაშინ α-ს ეწოდება *მაღალი რიგი უსასრულოდ მცირე* β-ს მიმართ.

მაგალითად, ვთქვათ, $\alpha=x^3\operatorname{tg}x$, $\beta=3x^2$. ეს ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც $x\to0$. რადგანაც

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\operatorname{tg}x}{3x^2}=0,$$

ამიტომ α მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა β-თან შედარებით.

განსაზღვრა 17. თუ α და β უსასრულოდ მცირეთა $\frac{\alpha}{\beta}$ ფარდობა უსასრულოდ დიდია, მაშინ α-ს ეწოდება *დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე* β-ს მიმართ.

მაგალითად, ვთქვათ $\alpha=1-\cos x$, $\beta=x^4$. ეს ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც $x\to0$. რაკი

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(\sin\frac{x}{2}:\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{2x^2}\right]=+\infty,$$

ამიტომ $1-\cos x$ არის დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე x^4-ის მიმართ.

განსაზღვრა 18. თუ α და β უსასრულოდ მცირეთა $\frac{\alpha}{\beta}$ ფარდობის ზღვარი ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია, მაშინ α და β-ს ეწოდება *ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეები*.

მაგალითად, $\alpha=\sin x$ და $\beta=\sin 2x$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც $x\to 0$. მართლაც,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}:\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

ზოგჯერ საჭიროა ზუსტად დახასიათება ერთი უსასრულოდ მცირის ნულისაკენ მისწრაფებისა მეორესთან შედარებით. ამისათვის შემოვიღოთ

განსაზღვრა 19. β უსასრულოდ მცირეს ეწოდება k რიგის უსასრულოდ მცირე α უსასრულოდ მცირის მიმართ, თუ β და α^k უსასრულოდ მცირეები ერთი და იმავე რიგისაა.

მაგალითად, თუ α უსასრულოდ მცირეა მაშინ α^2, α^3, $\sqrt[4]{\alpha}$ არიან შესაბამისად მეორე, მესამე და $\frac{1}{4}$ რიგის უსასრულოდ მცირეები α-ს მიმართ.

განსაზღვრა 20. α და β უსასრულოდ მცირეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$.

მაგალითად, $\sin x$ და x ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც $x\to 0$, ვინაიდან

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

თუ α და β ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ წერენ $\alpha\sim\beta$ ცხადია, რომ თუ $\alpha\sim\beta$, მაშინ $\beta\sim\alpha$, ხოლო თუ $\alpha\sim\beta$ და $\beta\sim\gamma$, მაშინ $\alpha\sim\gamma$.

თეორემა 40. ორი α და β უსასრულოდ მცირის ეკვივალენტობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\alpha-\beta$ სხვაობა იყოს მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, როგორც α, ისე β-ს მიმართ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\alpha\sim\beta$. გვაქვს

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0.$$

ასევე

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0.$$

ამრიგად, $\alpha-\beta$ არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე რო-

გორც α, ისე β-ს მიმართ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $\alpha-\beta$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა α-ს (β-ს) მიმართ. დასამტკიცებელია, რომ $\alpha\sim\beta$. პირობის თანახმად

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0.$$

შემდეგ, რაკი

$$1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha},$$

ამიტომ

$$\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0,$$

ე. ი. $\alpha\sim\beta$. პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

თეორემა 41. *ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლით მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით.*

დამტკიცება. ვთქვათ, α და β უსასრულოდ მცირეებია და $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$. დასამტკიცებელია, რომ თუ არსებობს $\lim\frac{\alpha}{\beta}$, მაშინ იარსებებს $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

გვაქვს

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

აქედან

$$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას გამოყენება აქვს ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვრის გამოთვლის დროს.

შენიშვნა. ორი უსასრულოდ მცირის შედარება ზოგჯერ არ

შეიძლება, ვინაიდან ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობას შეიძლება არ ჰქონდეს ზღვარი. მაგალითად, ვთქვათ,

$$\alpha = x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad \beta = x^2.$$

ეს ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც $x \to 0$. მაგრამ $\frac{\alpha}{\beta} = \sin\frac{1}{x}$ არ მიისწრაფვის არავითარი ზღვრისაკენ, როცა $x \to 0$.

ახლა მოვიყვანოთ ზოგიერთი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირის მაგალითები.

1. $\sin x \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. $\operatorname{tg} x \sim x$, როდესაც $x \to 0$. მართლაც,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1.$$

3. $(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x$, როდესაც $x \to 0$, სადაც λ ნამდვილი რიცხვია. მართლაც, რადგანაც

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lambda,$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{\lambda x} = 1.$$

4. $a^x - 1 \sim x \ln a$, როდესაც $x \to 0$. მართლაც,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln a = 1.$$

კერძოდ, $e^x - 1 \sim x$, როდესაც $x \to 0$.

5. $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, როდესაც $\alpha \to 0$, ვინაიდან

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

6. $\arcsin x \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

7. $\operatorname{arctg} x \sim x$, როდესაც $x \to 0$. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\operatorname{arctg} x = y$, გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=1,$$

თეორემა 42. თუ $\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ უსასრულოდ მცირეებია, ამასთანავე ω წარმოადგენს დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეს $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ უსასრულოდ მცირეთა მიმართ, მაშინ

$$\omega+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m \sim \omega .$$

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\lim\frac{\omega+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}{\omega}=\lim\left(1+\frac{\alpha_1}{\omega}+\frac{\alpha_2}{\omega}+\cdots+\frac{\alpha_m}{\omega}\right)=$$

$$=1+\lim\frac{\alpha_1}{\omega}+\lim\frac{\alpha_2}{\omega}+\cdots+\lim\frac{\alpha_m}{\omega}=1,$$

ვინაიდან

$$\lim\frac{\alpha_k}{\omega}=0 \quad (k=1, 2, \ldots, m).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

აქედან გამომდინარეობს პრაქტიკული წესი უსასრულოდ მცირეთა ჯამის გამარტივების შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია უსასრულოდ მცირეთა ჯამი

$$\omega+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m,$$

რომლის შესაკრებთა რიცხვი სასრულია. თუ ამ ჯამის რომელიმე შესაკრები დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა დანარჩენ შესაკრებთა მიმართ, მაშინ ზღვრულ თანაფარდობათა განხილვისას შეგვიძლია უკუვაგდოთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები, ვინაიდან აღებული უსასრულოდ მცირეთა ჯამი ეკვივალენტურია აღნიშნული დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირისა. აქვე შევნიშნოთ, რომ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე შესაკრები უნდა იყოს მხოლოდ ერთი, ვინაიდან, თუ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე რამდენიმეა, მაშინ მათ შეიძლება ერთმანეთი გააბათილონ და ამ შემთხვევაში აღნიშნული წესი არ გამოდგება.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\beta=(1-\cos\alpha)+2\operatorname{tg}\alpha+3\alpha^3-5\alpha^4$, სადაც α უსასრულოდ მცირეა. დავამტკიცოთ, რომ $\beta \sim 2\operatorname{tg}\alpha$.

დამტკიცება. რადგანაც $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sim\frac{\alpha^2}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$, ამიტომ მოცემულ ჯამში დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე იქნება $2\operatorname{tg}\alpha$. მაშასადამე, $\beta \sim 2\operatorname{tg}\alpha$.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, სადაც $f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1$.

ამოხსნა. რადგანაც $a^x-1\sim x\ln a$, როდესაც $x\to 0$, ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{x}=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, თუ $f(x)=\dfrac{a^{\sin x}-b^{\operatorname{tg}x}}{x}$.

ამოხსნა. რაკი $a^{\sin x}-1\sim\sin x\ln a$, $b^{\operatorname{tg}x}-1\sim\operatorname{tg}x\ln b$, ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{\sin x}-1}{x}-\frac{b^{\operatorname{tg}x}-1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^{\sin x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^{\operatorname{tg}x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln a}{x}-$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\cdot\ln b}{x}=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, სადაც

$$f(x)=\frac{\ln(1+\sin^2 x+x^3)}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

ამოხსნა. რადგანაც $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, როდესაც $\alpha\to 0$ და $\operatorname{tg}x\sim x$, როდესაც $x\to 0$, ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+x^3}{x^2}=1.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, სადაც

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}.$$

ამოხსნა. რადგანაც $\sqrt{1+\alpha}-1\sim\dfrac{\alpha}{2}$, როდესაც $\alpha\to 0$, ამიტომ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1}{\sin x}-\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-1}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg}x}{2}}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{tg}x}{2}}{\sin x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

კითხვები

1. ჩამოთვალეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები.

2. მოიყვანეთ ელემენტარული ფუნქციის განსაზღვრა.

3. მოიყვანეთ არაელემენტარული ფუნქციის მაგალითი.

4. $[-1, +1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{როდესაც } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^3+1, & \text{როდესაც } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

არის თუ არა ეს ფუნქცია ელემენტარული?

5. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არის A რიცხვი?

6. მოიყვანეთ განსაზღვრა $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრებისა x_0 წერტილში.

7. აქვს თუ არა ნებისმიერ ფუნქციას ზღვარი რაიმე x_0 წერტილში? მოიყვანეთ მაგალითი, როდესაც ფუნქციას ზღვარი არა აქვს.

8. რას ეწოდება უსასრულოდ მცირე სიდიდე x_0 წერტილში?

9. როგორ სიდიდეს ეწოდება დადებითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე? უარყოფითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე?

10. რა დამოკიდებულება არსებობს უსასრულოდ მცირესა და უსასრულოდ დიდ სიდიდეებს შორის?

11. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ $f(x)-A$ სხვაობა როგორი სიდიდეა x_0 წერტილში?

12. ვთქვათ, $f(x)=A+\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში, ხოლო A მუდმივია. რას წარმოადგენს მაშინ $f(x)$ ფუნქციისათვის A რიცხვი?

13. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ თეორემები ზღვართა შესახებ.

14. რას ნიშნავს, რომ α უსასრულოდ მცირე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა β უსასრულოდ მცირის მიმართ?

15. რას ნიშნავს, რომ α და β უსასრულოდ მცირეები ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია?

16. მოიყვანეთ ეკვივალენტური ორი უსასრულოდ მცირის განსაზღვრა.

17. შეიძლება თუ არა ორი უსასრულოდ მცირე ყოველთვის შევადაროთ?

18. როდის ეწოდება α-ს k-ური რიგის უსასრულოდ მცირე β უსასრულოდ მცირის მიმართ?

19. რაში მდგომარეობს ორი უსასრულოდ მცირის ეკვივალენტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა?

20. შეიძლება თუ არა ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვრის გამოთვლისათვის მრიცხველი და მნიშვნელი შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით?

21. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში? უწყვეტია მარჯვნიდან? უწყვეტია მარცხნიდან?

22. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ ინტერვალში? $[a,b]$ სეგმენტზე?

23. რას ნიშნავს რომ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია x_0 წერტილში?

24. შეიძლება თუ არა ფუნქცია განსაზღვრული არ იყოს x_0 წერტილში, მაგრამ იყოს უწყვეტი? იყოს წყვეტილი?

25. როგორ წერტილს ეწოდება ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი? მეორე გვარის წყვეტის წერტილი?

26. ორი უწყვეტი ფუნქციის ჯამი, ნამრავლი და ფარდობა შეიძლება თუ არა წყვეტილი იყოს?

27. რაში მდგომარეობს ბოლცანოს და კოშის თეორემები?

28. რაში მდგომარეობს უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ ვაიერშტრასის თეორემები?

29. რა პირობებშია რთული ფუნქცია უწყვეტი?

30. შეიძლება თუ არა უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან იყოს უწყვეტი ფუნქცია?

31. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია შუალედში?

32. რაში მდგომარეობს კანტორის თეორემა?

სავარჯიშო

1. მოძებნეთ ქვედა და ზედა საზღვრები შემდეგი ფუნქციებისა:

ა) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $]-\infty, +\infty]$ შუალედზე.

ბ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$ $]0, +\infty[$ შუალედზე.

გ) $f(x)=\sin x+\cos x$ $[0,2\pi]$ სეგმენტზე.

დ) $f(x)=x-E(x)$ $[0,1]$ სეგმენტზე, სადაც $E(x)$ არის x-ის მთელი ნაწილი.

პასუხი: ა) 0 და 1; ბ) 2 და $+\infty$; გ) $-\sqrt{2}$ და $\sqrt{2}$; დ) 0 და 1.

2. ვთქვათ, $f(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{4x^2+1}$, $x\neq 0$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2.$$

გამოთვალეთ ზღვრები

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$. პასუხი: -8.

4. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. პასუხი: $\dfrac{2}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. პასუხი: -1.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1-3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$. პასუხი: -6.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)$. პასუხი: 0.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{x+2\sin x}$. პასუხი: $\dfrac{2}{3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{x^2}$. პასუხი: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$. პასუხი: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$. პასუხი: e^2.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}\,x}$ პასუხი: e.

13. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$. პასუხი: 1.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}[n(a^{1/n}-1)]$. პასუხი: $\ln a$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2}(a^{1/n}+b^{-1/n}-2)$. პასუხი: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. პასუხი: $\alpha-\beta$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$. პასუხი: 1.

18. შტოლცის თეორემის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$;

გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}$, სადაც m მთელი დადებითი რიცხვია;

დ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^m+3^m+\ldots+(2n-1)^m}{n^{m+1}}$, m მთელი დადებითი რიცხვია.

პასუხი: ა) $\dfrac{1}{3}$, ბ) $\dfrac{4}{3}$; გ) $\dfrac{1}{m+1}$; დ) $\dfrac{2^m}{m+1}$.

19. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)=|x|$ ფუნქცია უწყვეტია$]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

20. მოცემულია ფუნქცია $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, როდესაც $x\neq 2$ და $f(2)=0$. დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია წყვეტილია $x=2$ წერტილში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

21. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, \text{ როდესაც } x\neq 0, \\ 0, \text{ როდესაც } x=0. \end{cases}$$

დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

22. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა. რა მნიშვნელობა უნდა მივანიჭოთ $f(x)$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში, რომ ეს ფუნქცია იყოს უწყვეტი ამ წერტილში?

23. $D(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$D(x)=\begin{cases} 0, \text{ თუ } x \text{ რაციონალურია}, \\ 1, \text{ თუ } x \text{ ირაციონალურია}. \end{cases}$$

$D(x)$ ფუნქციას ეწოდება დ ი რ ი ხ ლ ე ს (Dirichlet) ფ უ ნ ქ ც ი ა. დაამტკიცეთ რომ დირიხლეს ფუნქცია წყვეტილია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

24. ააგეთ ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, $|f(x)|$ კი უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

25. $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0, +\infty[$ შუალედში და აქვს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია მოცემულ შუალედში.

26. ვთქვათ, $]-\infty, +\infty[$ შუალედში $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია და არიან პერიოდული. დაამტკიცეთ, რომ თუ

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$

მაშინ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $g(x)=f(x)$.

27. ააგეთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია მხოლოდ ერთ წერტილში.

28. დაამტკიცეთ, რომ სეგმენტზე მონოტონურ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

29. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$m(x)=\inf_{a\le t\le x}\{f(t)\} \quad \text{და} \quad M(x)=\sup_{a\le t\le x}\{f(t)\}$$

ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$-ზე.

30. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია X შუალედში, მაშინ

$$\varphi(x)=\min\,[f(x),\ g(x)] \quad \text{და} \quad \psi(x)=\max\,[f(x),\ q(x)]$$

ფუნქციები უწყვეტია X შუალედში.

31. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია $[a, b]$ სეგმენტზე. დაამტკიცეთ, რომ თუ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a) \quad (a\leqslant x_n<b),$$

მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

თ ა ვ ი VI

ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

წინა თავებში გადმოცემული მასალა დიფერენციალური აღრიცხვისა და მათემატიკური ანალიზის სხვა განყოფილებათა ლოგიკური ფუნდამენტია.

დიფერენციალური აღრიცხვის წარმოშობის მთავარი წყარო იყო ორი ამოცანა, რომლებიც წამოყენებული იყო მე-17 საუკუნეში მეცნიერებისა და ტექნიკის მოთხოვნილებით. ამ ამოცანებს ქვემოთ განვიხილავთ.

§ 1. არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი

ვთქვათ, მოცემულია X შუალედში განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქცია. X შუალედში ავიღოთ x არგუმენტის ორი x_0 და x_1 მნიშვნელობა. სხვაობას x_1-x_0 ეწოდება x არგუმენტის ნაზრდი და მას აღნიშნავენ Δx სიმბოლოთი:

$$x_1-x_0=\Delta x.$$

აქედან

$$x_1=x_0+\Delta x.$$

Δx სიდიდეს ეწოდება x_0-ის ნაზრდი. შევნიშნავთ, რომ Δx მთლიანი სიმბოლოა და არა Δ და x-ის ნამრავლი.

ახლა განვსაზღვროთ $y=f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი. ვთქვათ, x წარმოადგენს არგუმენტის მნიშვნელობას X შუალედში და შემდეგ x ღებულობს Δx ნაზრდს. მაშინ არგუმენტის ახალი მნიშვნელობა იქნება $x+\Delta x$. სხვაობას $f(x+\Delta x)-f(x)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი და აღინიშნება Δy ან Δf სიმბოლოთი:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{1.1}$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $f(x)=x^3$ ფუნქციის ნაზრდი, როდესაც $x=1$, $\Delta x=0{,}1$.

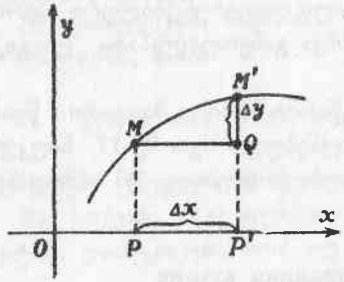
ამოხსნა: გვაქვს:

$$x+\Delta x=1{,}1;\ f(1)=1,\ f(1{,}1)=(1{,}1)^3=1{,}331.$$

მაშასადამე,

$$\Delta y=f(1{,}1)-f(1)=1{,}331-1=0{,}331.$$

ახლა ვაჩვენოთ ფუნქციის ნაზრდის გეომეტრიული მნიშვნელობა. როგორც ვიცით, $y=f(x)$ განტოლება გამოსახავს Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ გარკვეულ წირს (ნახ. 47).



ნახ. 47.

ვთქვათ, არგუმენტის x მნიშვნელობას შეესაბამება Ox ღერძზე P წერტილი, მაშინ PM ორდინატა არის ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში. ახლა x-ს მივცეთ Δx ნაზრდი, მაშინ არგუმენტის ახალი მნიშვნელობა იქნება $x+\Delta x$ და მისი შესაბამისი წერტილი Ox ღერძზე აღვნიშნოთ P' სიმბოლოთი. ორიენტირებული PP' მონაკვეთის სიდიდე იქნება Δx. ცხადია, რომ

$$P'M'=f(x+\Delta x)$$

და

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=P'M'-PM.$$

ახლა M წერტილზე გავავლოთ Ox ღერძის პარალელური წრფე. მივიღებთ $PP'QM$ მართკუთხედს. რადგანაც $P'Q=PM$, ამიტომ

$$\Delta y=QM'.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის Δy ნაზრდი გეომეტრიულად გამოსახავს მიმართული QM' მონაკვეთის სიდიდეს.

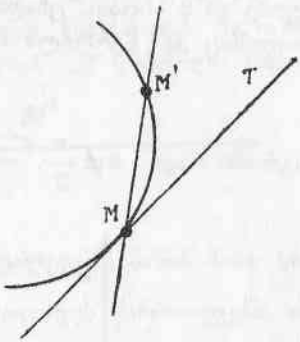
თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.1) ტოლობას, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა შეგვიძლია განვსაზღვროთ ასე:

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x წერტილში, თუ არგუმენტის x მნიშვნელობის უსასრულოდ მცირე Δx ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე Δy ნაზრდი.

§ 2. ამოცანა წირის მხების მოძებნის შესახებ

ელემენტარულ გეომეტრიაში მხები განსაზღვრულია მხოლოდ წრეწირისათვის, როგორც წრფე, რომელსაც წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს. სხვა წირებისათვის ელემენტარულ გეომეტრიაში მხები განსაზღვრული არ არის.

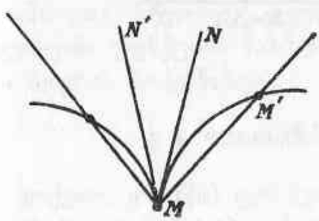
ვთქვათ, M არის მოცემული წირის რაიმე წერტილი (ნახ. 48). ავიღოთ წირზე მეორე M' წერტილი და გავავლოთ MM' მკვეთი. როდესაც M' წერტილი მოძრაობს წირზე და უახლოვდება M წერტილს, მკვეთი იცვლის თავის მდებარეობას.



ნახ. 48.

მოცემული წირის მხები M წერტილში ეწოდება MM' მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას, როდესაც M' წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ წირის გასწვრივ. უფრო ზუსტად:

MT წრფეს ეწოდება წირის მხები M წერტილში, თუ ამ წრფესა და MM' მკვეთს შორის კუთხე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც M და M' წერტილებს შორის მანძილი ნულისაკენ მიისწრაფვის. M წერტილს ეწოდება შეხების წერტილი.



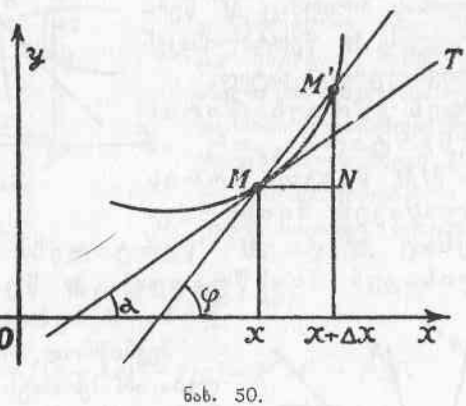
ნახ. 49.

შევნიშნოთ, რომ წირს შეიძლება არ ჰქონდეს მხები ზოგიერთ წერტილში. მაგალითად, 49-ე ნახაზზე წარმოდგენილ წირს არა აქვს მხები. მართლაც, მხების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი MM' მკვეთი უნდა მიისწრაფოდეს გარკვეულ MT წრფისაკენ, როდესაც M' წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ. მაგრამ 49-ე ნახაზზე მოცემული წირის შემთხვევაში, მკვეთი უახლოვდება MN მდებარეობას, როდესაც M' წერტილი უახლოვდება M წერტილს მარჯვნიდან, და უახლოვდება MN' მდებარეობას, როდესაც M' წერტილი უახლოვდება M წერტილს მარცხნიდან. ასე რომ მოცემულ წირს არა აქვს მხები M წერტილში.

ახლა ვთქვათ, უწყვეტი წირის განტოლებაა $y=f(x)$. ავიღოთ ამ წირზე $M(x,y)$ წერტილი და ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს MT მხები, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არაა (ნახ. 50). ვიპოვოთ მხების კუთხური კოეფიციენტი. ამისათვის წირზე ავიღოთ ნებისმიერი $M'(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ წერტილი და M და M' წერტილებზე გავავლოთ MM' მკვეთი. აღვნიშნოთ α-თი კუთხე Ox ღერძსა და MT მხებს შორის, ხოლო Ox ღერძსა და MM' მკვეთს შორის კუთხე კი φ ასოთი. ცხადია, φ კუთხე მიისწრაფვის α კუთხისაკენ, როდესაც M' წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, ე. ი.

$$\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi.$$

მაგრამ რაკი $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, ამიტომ



ნახ. 50.

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

აქედან

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

ამრიგად, მხების კუთხური კოეფიციენტის მოძებნის ამოცანამ მიგვიყვანა ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვრის მოძებნამდე.

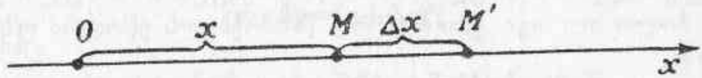
§ 3. ამოცანა ნივთიერი წერტილის სიჩქარის მოძებნის შესახებ

ვთქვათ, ნივთიერი M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე (ნახ. 51). დროის ყოველ t მომენტში M წერტილის x აბსცისას ექნება გარკვეული მნიშვნელობა, ისე, რომ x წარმოადგენს t დროის ფუნქციას

$$x=f(t). \tag{3.1}$$

(3.1) განტოლებას ეწოდება M წერტილის მოძრაობის განტოლება.

დროის ფიქსირებულ t მომენტს მივცეთ ნებისმიერი Δt ნაზრდი, მაშინ x მიიღებს სათანადო Δx ნაზრდს. M წერტილს თანაბ-



ნახ. 51.

რად რომ ემოძრავა დროის $[t, t+\Delta t]$ შუალედში, მაშინ მისი სიჩქარე იქნებოდა $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, რომელიც მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ M წერტილი თანაბრად არ მოძრაობს, მაშინ $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ფარდობას ეწოდება *საშუალო სიჩქარე* დროის $[t, t+\Delta t]$ შუალედში, ხოლო $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ეწოდება *M წერტილის სიჩქარე* t მომენტში.

ამრიგად, ნივთიერი წერტილის სიჩქარის მოძებნის ამოცანამ მიგვიყვანა ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვრის მოძებნამდე.

§ 4. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. x_0-ს მივცეთ ისეთი Δx ნაზრდი, რომ $x_0+\Delta x$ წერტილი ეკუთვნოდეს x_0 წერტილის აღნიშნულ მიდამოს. ფუნქციის ნაზრდი იქნება

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში და აღინიშნება y' ან $f'(x_0)$ სიმბოლოთი. x_0 ასო ფრჩხილებში აღნიშნავს იმ წერტილს, რომელშიაც განხილულია წარმოებული. ზოგჯერ y' სიმბოლოს ნაცვლად წერენ y'_x; ამით ხაზგასმულია, რომ წარმოებული აღებულია x ცვლადით.

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული არის ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარი, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნებისმიერად მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თუ ეს ზღვარი სასრულია, მაშინ წარმოებულს სასრული ეწოდება, ხოლო თუ იგი უსასრულოა, წარმოებულს ეწოდება უსასრულო.

ამრიგად, მოცემულ წერტილში წარმოებული წარმოადგენს რიცხვს. თუ რაიმე შუალედის ყოველ წერტილში არსებობს სასრული წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული წარმოადგენს x-ის ფუნქციას მოცემულ შუალედში.

$f(x)$ ფუნქციას ვუწოდებთ წარმოებადს x_0 წერტილში, თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო $f'(x_0)$ წარმოებული.

ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.

მაგალითი 1. რაიმე X შუალედში მოცემულია ფუნქცია $y=f(x)=C$, სადაც C მუდმივია. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. ავიღოთ X შუალედის შიგა x წერტილი. Δx ნაზრდი იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ $x+\Delta x$ მიეკუთვნოს აგრეთვე X შუალედს. ამიტომ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$$

და, მაშასადამე, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. აქედან $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, ე. ი. X შუალედის ყოველ შიგა x წერტილში

$$f'(x)=0.$$

ამრიგად, მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ x-ის ნაზრდი Δx-ით, y-ის კი Δy-ით. გვაქვს

$$y+\Delta y = x+\Delta x.$$

აქედან $\Delta y = \Delta x$, საიდანაც $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. ამრიგად, x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

მაშასადამე, იმ ფუნქციის წარმოებული, რომელიც დამოუკიდებელი ცვლადის ტოლია, უდრის ერთს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $y = x^3$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. ნებისმიერი ფიქსირებული x-თვის გვაქვს

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3,$$

საიდანაც

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2,$$

ე. ი.

$$(x^3)' = 3x^2.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ფუნქციის წარმოებული $x = 0$ წერტილში.

ამოხსნა. $x = 0$ მნიშვნელობას მივცეთ Δx ნაზრდი, მაშინ y-იც მიიღებს სათანადო Δy ნაზრდს:

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

და, მაშასადამე,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

საძიებელი წარმოებული უსასრულოა.

§ 5. ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები

$f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში განსაზღვრული გვქონდა როგორც $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ფარდობის ზღვარი, როდესაც Δx ნებისმიერად მიისწრაფვის ნულისაკენ. ზღვრებს

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{და} \quad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ეწოდება შესაბამისად მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები x_0 წერტილში. ეს წარმოებულები აღინიშნება შესაბამისად $f'(x_0+)$ და $f'(x_0-)$ სიმბოლოებით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებადობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისია x_0 წერტილში მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულების თანატოლობა.

დასასრულ, ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ იგი წარმოებადია ამ სეგმენტის ყველა შიგა წერტილში, ხოლო a წერტილში ფუნქციას აქვს მარჯვენა წარმოებული, b წერტილში კი—მარცხენა.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{x}$ ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული $x=0$ წერტილში.

ამოხსნა. არგუმენტის 0 მნიშვნელობას მივცეთ დადებითი Δx ნაზრდი, მაშინ y-იც მიიღებს Δy ნაზრდს:

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\sqrt{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$, გვექნება

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty,$$

ე. ი.

$$f'(0+)=+\infty.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=|x|$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები $x=0$ წერტილში.

ამოხსნა. ვთქვათ, $x<0$, მაშინ $f(x)=-x$ და, მაშასადამე,

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f'(0-)=-1$:
ანალოგიურად მივიღებთ $f'(0+)=1$.

§ 6. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა

პირველ პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ უწყვეტი $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილზე გამავალი იმ მხების k კუთხური კოეფიციენტი, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არაა, გამოისახება ტოლობით

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ წარმოებულის განსაზღვრას, გვექნება

$$k=f'(x). \tag{6.1}$$

ამრიგად, თუ $y=f(x)$ წირს აქვს $M(x, y)$ წერტილში მხები, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არაა, მაშინ არსებობს სასრული წარმოებული $f'(x)$.

პირიქით, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული a წერტილში, მაშინ $y=f(x)$ წირს სათანადო M წერტილში აქვს მხები, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არაა და მხების k კუთხური კოეფიციენტი განისაზღვრება (6.1) ტოლობით.

თეორემა 1. თუ უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას $x=x_0$ წერტილში აქვს წარმოებული

$$f'(x_0)=\infty,$$

მაშინ $y=f(x)$ წირს აქვს სათანადო M_0 წერტილში Oy ღერძის პარალელური მხები.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს $\Delta x=M_0P$ შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი $\Delta y=PM$. მაშასადამე, $M_0M\to 0$, როდესაც $\Delta x\to 0$ (ნახ. 52). პირიქით, უსასრულოდ მცირე მანძილს M_0M შეესაბამება უსასრულოდ მცირე ნაზრდი Δx.

გავავლოთ M_0 წერტილზე Oy ღერძის პარალელური N_0T წრფე და β-თი აღვნიშნოთ მახვილი კუთხე M_0M მკვეთსა და N_0T წრფეს შორის. ცხადია, რომ

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

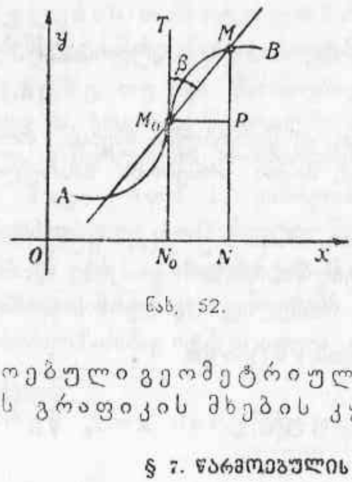
პირობის თანახმად $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, რაც ტოლფასია ტოლობისა

$$\lim_{M_0M\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,\quad \text{ანუ}\quad \lim_{M_0M\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{M_0M\to 0}\operatorname{tg}\beta=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{M_0M\to 0}\beta=0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ N_0T არის $y=f(x)$ წირის მხები. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 52.

მართებულია აგრეთვე შებრუნებული თეორემაც: თუ $y=f(x)$ წირს აქვს Oy ღერძის პარალელური მხები M_0 წერტილში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და $f'(x_0)=\infty$.

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული გეომეტრიულად წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკის მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

§ 7. წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა

მეორე პარაგრაფში წერტილის მოძრაობის $x=f(t)$ განტოლების მიხედვით დროის t მომენტისათვის მოვძებნეთ წერტილის v სიჩქარე, როგორც ზღვარი

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

თუ გავიხსენებთ წარმოებულის განსაზღვრას, გვექნება

$$v=f'(t).$$

ამრიგად, $x=f(t)$ ფუნქციის წარმოებული მექანიკუ-

რად წარმოადგენს იმ წერტილის სიჩქარეს t მომენტში, რომლის მოძრაობის განტოლებაა $x=f(t)$, რასაც მოკლედ ასე გამოვთქვამთ: სიჩქარე წარმოადგენს მანძილის წარმოებულს დროით.

დასასრულ განვიხილოთ კიდევ ერთი ინტერპრეტაცია — სიმკვრივის ფიზიკური ცნება. ვთქვათ, AB წარმოადგენს ნივთიერ მონაკვეთს და მასზე აიღოთ რაიმე M წერტილი (ნახ. 53). AB მონაკვეთის AM ნაწილის სიგრძე აღვნიშნოთ s-ით, მასა კი m-ით. ცხადია, s-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება m-ის გარკვეული მნიშვნელობა, ასე რომ მასა წარმოადგენს s-ის ფუნქციას

$$m=\varphi(s).$$

ნახ. 53.

ამბობენ, რომ მასა თანაბრად განაწილებულია AB მონაკვეთზე, თუ მონაკვეთის ორი ნებისმიერი ნაწილი, რომლებსაც თანატოლი სიგრძე აქვთ, შეიცავენ თანატოლ მასებს. ამ შემთხვევაში AB მონაკვეთის ნებისმიერი ნაწილის მასის ფარდობა ამავე ნაწილის სიგრძესთან მუდმივი სიდიდეა. იგი რიცხობრივად იმ მასის ტოლია, რომელიც აქვს ნივთიერი მონაკვეთის ერთეული სიგრძის ნებისმიერ ნაწილს. ამ ფარდობას ნივთიერი AB მონაკვეთის სიმკვრივე ეწოდება. თუ მასა თანაბრად განაწილებული არაა, მაშინ საჭირო ხდება შემოვიღოთ სიმკვრივის ცნება წერტილში.

განვიხილოთ AB მონაკვეთის MM' ნაწილი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ Δs სიმბოლოთი, მასა კი Δm-ით. ცხადია,

$$\Delta m=\varphi(s+\Delta s)-\varphi(s).$$

$\frac{\Delta m}{\Delta s}$ ფარდობას ეწოდება საშუალო წრფივი სიმკვრივე, ხოლო ამ ფარდობის ზღვარს, როდესაც $\Delta s\to 0$ ეწოდება AB მონაკვეთის სიმკვრივე M წერტილში და იგი აღინიშნება ρ ასოთი. ასე რომ

$$\rho=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s},$$

ე. ი.

$$\rho=\varphi'(s).$$

§ 8. ფუნქციის დიფერენციალი

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x წერტილის მიდამოში და ამ ფუნქციის Δy ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი შესაკრების ჯამი

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{8.1}$$

სადაც A სასრული რიცხვია და დამოუკიდებელია Δx ნაზრდისაგან, ხოლო α უსასრულოდ მცირეა, როდესაც $\Delta x \to 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი x წერტილში.

ფუნქციის ნაზრდის $A\Delta x$ შესაკრებს, რომელიც წრფივია არგუმენტის Δx ნაზრდის მიმართ, ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება.

თეორემა 2. $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისათვის x წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში ჰქონდეს სასრული წარმოებული.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში. მაშინ Δy წარმოგვიდგება (8.1) ტოლობით. გავყოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი Δx-ზე, გვექნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

აქედან

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

ე. ი. $y' = A$ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $f'(x)$ სასრულია. მაშინ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა, როდესაც $\Delta x \to 0$. აქედან

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილი ორი შესაკრების ჯამია. სადაც $f'(x)\Delta x$ წრფივი ნაწილია, ხოლო $f'(x)$ დამოუკიდებელია Δx-ისაგან. ეს იმას ნიშნავს, რომ y ფუნქცია დიფერენცირებადია. თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

$y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალს აღნიშნავენ dy ან $df(x)$ სიმბოლოთი და იკითხება ასე: „დე იგრეკ" ან „დე ეფ იქს" ამრიგად,

$$dy=f'(x)\Delta x, \tag{8.2}$$

ე. ი. **ფუნქციის დიფერენციალი ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის ნაზრდის ნამრავლის ტოლია.**

კერძოდ, თუ $y=f(x)=x$, გვაქვს $f'(x)=1$, რის გამოც ბუნებრივია დავწერთ

$$dx=\Delta x.$$

ამიტომ (8.2) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$dy=f'(x)\,dx, \tag{8.3}$$

ე. ი. **ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს.**

(8.3) ფორმულიდან გვაქვს

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

მაშასადამე, ფუნქციის წარმოებული უდრის ფუნქციის დიფერენციალისა და არგუმენტის დიფერენციალის ფარდობას.

სიმბოლო $\dfrac{dy}{dx}$ იკითხება ასე; „დე იგრეკ დე იქსით".

თეორემა 3. თუ $y=f(x)$ ფუნქციას x წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული სასრული წარმოებული, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის Δy ნაზრდი ეკვივალენტურია $dy=f'(x)\,\Delta x$ დიფერენციალისა, როდესაც $\Delta x\to 0$.

დამტკიცება. ვთქვათ, Δx უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. მაშინ

$$\Delta y-f'(x)\,\Delta x=\Delta y-dy=\alpha\,\Delta x.$$

რაკი $f'(x)\neq 0$, ამიტომ Δy ეკვივალენტურია dy დიფერენციალისა, როდესაც $\Delta x\to 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ $f'(x)=0$, მაშინ $dy=0$, მაგრამ Δy როგორც წესი, ნულისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე, Δy და dy სიდიდეთა ეკვივალენტობა ირღვევა, როდესაც $f'(x)=0$.

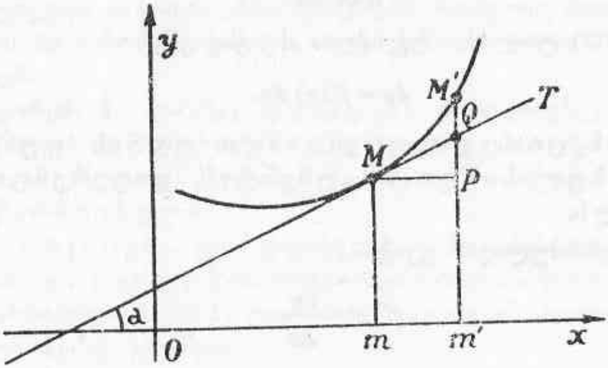
§ 9. ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში. გამოვარკვიოთ რას წარმოადგენს გეომეტრიულად მოცემული ფუნქციის დიფერენციალი. ავაგოთ $y=f(x)$ წირი (ნახ. 54). ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$y=mM, \quad \Delta x=mm'=MP, \quad \Delta y=m'M'-m'P=PM', \quad f'(x)=\operatorname{tg}\alpha.$$

ფუნქციის დიფერენციალი ასე წარმოგვიდგება

$$dy=f'(x)\Delta x=\operatorname{tg}\alpha \cdot MP.$$



ნახ. 54.

მაგრამ MPQ სამკუთხედიდან გვაქვს

$$MP \cdot \operatorname{tg}\alpha=PQ.$$

მაშასადამე,

$$dy=PQ.$$

ამრიგად, $y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი გეომეტრიულად წარმოადგენს მხების წერტილის ორდინატის ნაზრდს.

§ 10. კავშირი დიფერენცირებადობასა და უწყვეტობას შორის

თეორემა 4. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამავე წერტილში.

დამტკიცება. რაკი $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, ამიტომ მართებულია ტოლობა

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha \cdot \Delta x,$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა Δx-თან ერთად, ხოლო $f'(x_0)$ სასრული რიცხვია. აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

რაც ამტკიცებს $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას x_0 წერტილში.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება ფუნქცია იყოს უწყვეტი წერტილში, მაგრამ დიფერენცირებადი არ იყოს. მართლაც, განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{როდესაც } x \neq 0, \\ 0 \quad , & \text{როდესაც } x = 0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. დავამტკიცოთ, რომ მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა $x=0$ წერტილში. ავიღოთ x არგუმენტის 0 მნიშვნელობისათვის Δx ნაზრდი, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციის Δy ნაზრდი ასე გამოისახება:

$$\Delta y = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{x}.$$

მაგრამ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin \dfrac{1}{\Delta x}$ არ არსებობს, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა $x=0$ წერტილში.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც არც ერთ წერტილში დიფერენცირებადი არ არიან. ასეთი ფუნქციის მაგალითს განვიხილავთ მეორე ტომში.

კ ი თ ხ ვ ე ბ ი

1. რას ეწოდება წირის მხები მოცემულ წერტილში?
2. რას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული?
3. რა გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის წარმოებულს?
4. რა მექანიკური მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის წარმოებულს?
5. რას უდრის მუდმივის წარმოებული? არგუმენტის წარმოებული?
6. რას ნიშნავს ფუნქცია წარმოებადია? ფუნქცია დიფერენცირებადია?

7. რას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი?

8. როგორ გამოისახება ფუნქციის დიფერენციალი?

9. რა გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის დიფერენციალს?

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. იპოვეთ $y=\frac{1}{x}$ ფუნქციის წარმოებული.

პასუხი: $y'=-\frac{1}{x^2}$.

2. მოძებნეთ $y=2x^2$ პარაბოლის მხების კუთხური კოეფიციენტი, თუ შეხების წერტილია (1.2).
პასუხი: $k=4$.

3. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $x=2t^2-t+1$. იპოვეთ წერტილის სიჩქარე $t=2$ მომენტისათვის.
პასუხი: 6.

4. მოცემულია ფუნქცია $y=|x|$. დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია $x=0$ წერტილში წარმოებადი არ არის.

§ 11. წარმოებულისა და დიფერენციალის უმარტივესი თვისებები

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში, მაშინ $y=Af(x)$ ფუნქციაც, სადაც A მუდმივია, წარმოებადია და მართებულია ტოლობა

$$[Af(x)]'=Af'(x). \tag{11.1}$$

ე. ი. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ.

დამტკიცება. მივცეთ x-ს ნაზრდი Δx, მაშინ y-იც მიიღებს Δy ნაზრდს. ამიტომ გვექნება

$$\Delta y=Af(x+\Delta x)-Af(x)=A[f(x+\Delta x)-f(x)].$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

თუ ამ ტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\Delta x\to 0$, მივიღებთ (11.1) ტოლობას.

თეორემა 6. თუ $u=f(x)$ და $v=g(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია x წერტილში, მაშინ $u+v$ ფუნქციაც დი-

ფერენცირებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$(u+v)'=u'+v', \tag{11.2}$$

ე. ი. ჯამის წარმოებული წარმოებულთა ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y=u+v$. თუ x მიიღებს Δx ნაზრდს, მაშინ u, v და y მიიღებენ შესაბამისად Δu, Δv და Δy ნაზრდებს, რის გამო გვექნება

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v).$$

აქედან

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{11.3}$$

მოცემულობის თანახმად არსებობს სასრული ზღვრები $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ და $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$. ამიტომ იარსებებს $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ე. ი. y ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში. ახლა თუ (11.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$, მივიღებთ (11.2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

(11.2) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x არგუმენტის dx დიფერენციალზე, გვექნება

$$(u+v)'dx=u'dx+v'dx.$$

აქედან

$$d(u+v)=du+dv, \tag{11.4}$$

ე.ი. ჯამის დიფერენციალი დიფერენციალთა ჯამის ტოლია.

(11.2) და (11.4) ფორმულები მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაშიც.

§ 12. ფუნქციათა ნამრავლის წარმოებული და დიფერენციალი

თეორემა 7. თუ $u=f(x)$ და $v=g(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ uv ნამრავლიც დიფერენცირებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$(uv)' = u'v + v'u, \tag{12.1}$$

ე. ი. ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული უდრის პირველი ფუნქციის წარმოებულს გამრავლებულს მეორე ფუნქციაზე, პლუს მეორე ფუნქციის წარმოებული გამრავლებული პირველ ფუნქციაზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y = uv$. ვთქვათ, Δu, Δv და Δy არიან u, v და y ფუნქციების ნაზრდები, რომლებიც შეესაბამება x არგუმენტის Δx ნაზრდს. გვექნება

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

აქედან

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v,$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

მაგრამ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. მაშასადამე,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'v + v'u.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა (12.1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x არგუმენტის dx დიფერენციალზე, მივიღებთ

$$(uv)'dx = u'dx \cdot v + v'dx \cdot u.$$

აქედან

$$d(uv) = vdu + udv, \tag{12.2}$$

ე. ი. ორი ფუნქციის ნამრავლის დიფერენციალი უდრის პირველი ფუნქციის დიფერენციალის ნამრავლს მეორე ფუნქციაზე პლუს მეორე ფუნქციის დიფერენციალის ნამრავლი პირველ ფუნქციაზე.

სამი დიფერენცირებადი ფუნქციის ნამრავლის შემთხვევაში გვაქვს

$$(uvw)' = [(uv) \cdot w]' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + v'u)w + w'uv.$$

ანუ

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

საზოგადოდ, n დიფერენცირებადი $u_1, u_2, \cdots, u_n$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$(u_1u_2u_3 \cdots u_{n-1}u_n)' = u_1'u_2u_3 \cdots u_{n-1}u_n + u_1u_2'u_3 \cdots u_{n-1}u_n + \cdots + $$
$$+ u_1u_2u_3 \cdots u_{n-1}u_n'. \tag{12.3}$$

კერძოდ, თუ

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_n = x,$$

გვექნება

$$u_1' = u_2' = \cdots = u_n' = 1$$

და (11.3) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$(x^n)' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n\text{-ჯერ}}$$

ანუ

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{12.4}$$

§ 13. წილადის წარმოებული და დიფერენციალი

თეორემა 8. თუ $u = u(x)$ და $v = v(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია x წერტილში და $v(x) \neq 0$, მაშინ $\frac{u}{v}$ წილადიც დიფერენცირებადია x წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \tag{13.1}$$

ე. ი. წილადის წარმოებული უდრის მრიცხველის წარმოებულის ნამრავლს მნიშვნელზე მინუს მნიშვნელის წარმოებულის ნამრავლი მრიცხველზე და ეს სხვაობა გაყოფილი მნიშვნელის კვადრატზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y = \frac{u}{v}$. რადგანაც $v(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა და $v(x) \neq 0$, ამიტომ x არგუმენტს შეგვიძლია მივცეთ იმდენად მცირე Δx ნაზრდი, რომ შესრულდეს პირობა $v + \Delta v \neq 0$. ამრიგად,

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

აქედან

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - \Delta v \cdot u}{(v + \Delta v)v}.$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-\frac{\Delta v}{\Delta x}u}{(v+\Delta v)v}$$

და თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u'v-v'u}{v^2},$$

ე. ი. მართებულია (13.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (13.1) ფორმულის მიხედვით

$$y'=\frac{(x^2+1)'(x-1)-(x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2},\qquad (x\neq 1).$$

ახლა (13.1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ არგუმენტის dx დიფერენციალზე, გვექნება

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},\tag{13.2}$$

ე. ი. წ ი ლ ა დ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი უ დ რ ი ს მ რ ი ც ხ ვ ე ლ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ზ ე მ ი ნ უ ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ი ს დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი ა ლ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი მ რ ი ც ხ ვ ე ლ ზ ე დ ა ე ს ს ხ ვ ა ო ბ ა გ ა ყ ო ფ ი ლ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ი ს კ ვ ა დ რ ა ტ ზ ე.

§ 14. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები

1. ვიპოვოთ $y=\sin x$ ფუნქციის წარმოებული. ყოველი x-თვის გვაქვს

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

რადგანაც

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x,$$

ე. ი. ყოველი x-თვის

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{14.1}$$

ასევე

$$d(\sin x)=\cos x\,dx. \tag{14.2}$$

2. ვიპოვოთ $y=\cos x$ ფუნქციის წარმოებული. ამ ფუნქციის Δy ნაზრდი ასე გამოისახება

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\Delta x\to 0$, გვექნება

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\sin x,$$

ე. ი. ყოველი x-თვის

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{14.3}$$

ასევე

$$d(\cos x)=-\sin x\,dx. \tag{14.4}$$

3. ვიპოვოთ $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$y=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

აქ იგულისხმება, რომ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. წილადის წარმოებულის წესის თანახმად

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

ამრიგად,

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}. \tag{14.5}$$

აქედან

$$d(\operatorname{tg} x)=\frac{dx}{\cos^2 x}. \tag{14.6}$$

4. მოვძებნოთ $y=\operatorname{ctg} x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$y=\frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x\neq k\pi,\ \ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

$$y'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

ე. ი.

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{14.7}$$

აქედან

$$d\,(\operatorname{ctg} x)=-\frac{dx}{\sin^2 x}. \tag{14.8}$$

§ 15. რთული ფუნქციის წარმოებული

თეორემა 9. ვთქვათ, $y=f(u)$, სადაც $u=g(x)$. თუ არგუმენტის რაიმე x მნიშვნელობისათვის $u=g(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის $y=f(u)$ ფუნქციაც დიფერენცირებადია, მაშინ რთული $y=f[g(x)]$ ფუნქციის წარმოებული არსებობს და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \tag{15.1}$$

ე. ი. რთული ფუნქციის წარმოებული უდრის მოცემული ფუნქციის წარმოებულს დამხმარე ცვლადით, გამრავლებულს დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე დამოუკიდებელი ცვლადით.

დამტკიცება. რადგანაც $y=f(u)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta y = f'(u)\,\Delta u + \alpha\,\Delta u, \tag{15.2}$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა, როდესაც $\Delta x \to 0$.

ახლა x-ს მივცეთ Δx ნაზრდი, მაშინ u მიიღებს Δu ნაზრდს და, მაშასადამე, y მიიღებს Δy ნაზრდს. $g(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $\Delta u \to 0$, როდესაც $\Delta x \to 0$, ამასთანავე Δu ნაზრდმა თავისი ცვლილებისას შეიძლება ნულის მნიშვნელობაც მიიღოს. ამ შემთხვევაში (15.2) ტოლობით მოცემული α განსაზღვრული არ არის. ვიგულისხმოთ α ნულის ტოლად, როდესაც $\Delta u=0$. მაშინ (15.2) ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $\Delta u=0$.

თუ გავყოფთ (15.2) ტოლობის ორივე ნაწილს Δx-ზე, გვექნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

მაგრამ, როდესაც $\Delta x \to 0$, მაშინ $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to g'(x)$ და $\alpha \to 0$. ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მტკიცდება, რომ არსებობს მარცხენა ნაწილის ზღვარი. მაშასადამე, მართებულია (15.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ (15.1) ფორმულა შეიძლება გავავრცელოთ იმ შემთხვევაზეც, როდესაც ფუნქცია წარმოდგენილია არა ორი, არამედ რამდენიმე ფუნქციის ერთობლიობის საშუალებით. მაგალითად, თუ

$$y=f(u), \quad u=\varphi(v), \quad v=\psi(x),$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{15.3}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y=\operatorname{tg}^3 x$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. y არის x არგუმენტის რთული ფუნქცია და იგი არაცხადი სახით ასე წარმოგვიდგება:

$$y=u^3, \quad u=\operatorname{tg} x.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

მაგრამ

$$\frac{dy}{du}=3u^3, \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx}=3u^2 \quad \frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $y=\cos^3(1+x^4)$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. არაცხადი სახით ეს ფუნქცია ასე წარმოგვიდგება:

$$y=u^3, \quad u=\cos v, \quad v=1+x^4.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

მაგრამ

$$\frac{dy}{du}=3u^2, \quad \frac{du}{dv}=-\sin v, \quad \frac{dv}{dx}=4x^3.$$

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx}=3u^2\cdot(-\sin v)\cdot 4x^3=-12\cos^2(1+x^4)\sin(1+x^4)x^3.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. წარმოებულების გამოთვლაში ძირითადი როლი მიეკუთვნება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს. რთული ფუნქციის გასაწარმოებლად შემოგვაქვს დამხმარე ცვლადები. მაგალითად,

$$y=\sqrt{\operatorname{tg} 5x} \tag{15.4}$$

რთული ფუნქცია u და v დამხმარე ცვლადების საშუალებით ასე წარმოვადგინოთ:

$$y=u^{\frac{1}{2}}, \quad u=\operatorname{tg} v, \quad v=5x,$$

რაც საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების (15.3) ფორმულა.

სტუდენტმა უნდა მიაღწიოს ამ წესის გამოყენების სრულ გაგებას. ამის შემდეგ დამხმარე ცვლადების შემოღება საჭირო არ არის და ამ ცვლადების შემოუღებლად უნდა შევძლოთ ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა.

ახლა (15.4) ფუნქცია ასე გავაწარმოოთ:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\left[\operatorname{tg}5x\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}5x\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(\operatorname{tg}5x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}5x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}(5x)'=\frac{5}{2\sqrt{\operatorname{tg}5x}\,\cos^2 5x}$$

§ 16. რთული ფუნქციის დიფერენციალი. დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა

თუ $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{16.1}$$

ამ ფორმულის გამოყვანისას ნაგულისხმევი იყო, რომ x დამოუკიდებელი ცვლადია.

ახლა, ვთქვათ, x თვითონ t ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა

$$x=\varphi(t),$$

მაშინ y წარმოადგენს t ცვლადის რთულ ფუნქციას. ისმის კითხვა: გამოისახება თუ არა რთული ფუნქციის dy დიფერენციალი იმავე (16.1) ფორმულით? რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ dt-ზე, მივიღებთ

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{16.2}$$

ეს კი გარეგნულად იგივე (16.1) ფორმულაა, რომელიც უკვე გვქონდა.

ამრიგად, *ფუნქციის დიფერენციალის ფორმა უცვლელი რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც x წარმოადგენს რაიმე t ცვლადის ფუნქციას.*

ამ თვისებას ეწოდება *ფუნქციის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა.*

შევნიშნოთ, რომ (16.1) და (16.2) ფორმულებში dx სხვადასხვაა. პირველში dx იგივეა, რაც Δx, მეორეში კი $dx=\varphi'(t)dt$.

§ 17. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული

განვიხილოთ $y=\ln x$ ფუნქცია. იგი განსაზღვრულია $]0,+\infty[$ შუალედში. x არგუმენტს მივცეთ Δx ნაზრდი; მაშინ y ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

მაგრამ

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x}.$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემას ეკვივალენტურ უსასრულოდ მცირეთა შესახებ, გვექნება

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x}{x} : \Delta x\right) = \frac{1}{x}.$$

ე. ი.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (17.1)$$

ესაა ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული.

ახლა ადვილია $\lg_a x$ ფუნქციის გაწარმოება ($a>0,\ a\neq 1$). მართლაც, რადგანაც

$$\lg_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

ამიტომ

$$(\lg_a x)' = \frac{1}{x\ln a}. \qquad (17.2)$$

თუ (17.1) და (17.2) ტოლობების ორივე ნაწილს გავამრავლებთ dx-ზე, გვექნება

$$d\ln x = \frac{dx}{x}, \quad d\lg_a x = \frac{dx}{x\ln a}.$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y=\ln(ax^2+bx+c)$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ ფუნქციის დიფერენციალი, სადაც $|x|<1$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$dy = d\ln(1-x) - d\ln(1+x) = -\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{1+x} = \frac{2x\,dx}{x^2-1}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\ln|x|$ ფუნქციის დიფერენციალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ $x>0$, მაშინ $|x|=x$ და, მაშასადამე, $\ln|x|=\ln x$, ამიტომ, როცა $x>0$, გვაქვს

$$d\ln|x| = \frac{dx}{x}.$$

თუ $x<0$, მაშინ $|x|=-x$ და, მაშასადამე,

$$d\ln|x| = d\ln(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

ამრიგად, x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან, გვექნება

$$d\ln|x| = \frac{dx}{x}. \tag{17.3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $y=\ln \operatorname{ctg} x$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{ctg} x)'}{\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}$$

§ 18. ლოგარითმული წარმოებული

თეორემა 10. თ უ $u=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი რ ე ბ ა დ ი ა რ ა ი მ ე x წ ე რ ტ ი ლ შ ი დ ა ა მ ა ვ ე წ ე რ ტ ი ლ შ ი $f(x)>0$, მ ა შ ი ნ $y=\ln f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ც დ ი ფ ე რ ე ნ ც ი რ ე ბ ა დ ი ა x წ ე რ ტ ი ლ შ ი დ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{18.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $y=\ln u$, ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

ე. ი. მართებულია (18.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ ფარდობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებული.

მაგალითი 1. მოცემულია ფუნქცია

$$y=\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2(x+3)^{10}} \quad (x>2). \tag{18.2}$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. როდესაც $x>2$, მაშინ y ფუნქციის მრიცხველი და მნიშვნელი დადებითია, ამიტომ შეიძლება (18.2) ტოლობის გალოგარითმება. გვაქვს

$$\ln y=3\ln(x-2)-2\ln(x+1)-10\ln(x+3). \tag{18.3}$$

(18.3) ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}-\frac{10}{x+3}.$$

აქედან

$$y'=y\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}-\frac{10}{x+3}\right).$$

თუ y-ის ნაცვლად ჩავსვამთ მის გამოსახულებას, მივიღებთ

$$y'=\frac{(x-2)^2(-9x^2+20x+41)}{(x+1)^3(x+3)^{11}}. \tag{18.4}$$

თუ $x\leqslant 2$, მაშინ (18.3) ფორმულა აზრს კარგავს, ვინაიდან y-ის მნიშვნელობანი არადადებითია, მაგრამ (18.4) ფორმულა ძალაში რჩება, როდესაც $x\neq-1$ და $x\neq-3$. ამისათვის საკმარისია (18.2) ფორმულა შევცვალოთ ფორმულით

$$|y|=\left|\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2(x+3)^{10}}\right|.$$

აქედან

$$\ln|y|=3\ln|x-2|-2\ln|x+1|-10\ln|x+3|.$$

(18.3) ფორმულის თანახმად ამ ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}-\frac{10}{x+3}.$$

აქედან მიიღება (18.4) ფორმულა.

§ 19. მაჩვენებლიანი და ხარისხოვანი ფუნქციების წარმოებული

განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქცია

$$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული რაიმე x წერტილში. ამისათვის x მნიშვნელობას მივცეთ Δx ნაზრდი, მაშინ y-იც მიიღებს Δy ნაზრდს:

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1).$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}. \tag{19.1}$$

როგორც ვიცით

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a.$$

ახლა (19.1) ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx}=a^x\ln a,$$

ე. ი.

$$(a^x)'=a^x\ln a. \tag{19.2}$$

კერძოდ, თუ $a=e$, მაშინ (19.2) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$(e^x)'=e^x, \tag{19.3}$$

ე. ი. e^x ფუნქციის წარმოებული უდრის თვით ამ ფუნქციას.

ახლა განვიხილოთ $y=x^\alpha$ ფუნქცია, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ამ ფუნქციას ეწოდება ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქცია. როგორც ვიცით, როდესაც α მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{19.4}$$

ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ (18.4) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნამდვილი α-თვის.

ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $x>0$; მაშინ $y=x^\alpha$ ფუნქცია შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ

$$y=e^{\alpha\ln x}.$$

(19.3) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

$$\frac{dy}{dx}=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}\cdot y=\frac{\alpha}{x}x^{\alpha}.$$

აქედან მიიღება (19.4) ფორმულა.

ახლა, ვთქვათ, $x<0$, მაშინ x^{α} საზოგადოდ განსაზღვრული არაა ყველა α-სათვის, მაგრამ ყველა იმ α-სათვის, რომელთათვის x^{α} განსაზღვრულია x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, მართებულია იგივეობა

$$x^{\alpha}=(-x)^{\alpha}(-1)^{\alpha}$$

და, მაშასადამე, შეგვიძლია გამოვიყენოთ (19.4) ფორმულა, რის საფუძველზე გვექნება

$$(x^{\alpha})'=(-1)^{\alpha}\alpha(-x)^{\alpha-1}(-1)=(-1)^{2}\alpha(-1)^{\alpha-1}(-x)^{\alpha-1}=\alpha x^{\alpha-1},$$

ე. ი. (19.4) ფორმულა მართებულია ამ შემთხვევაშიც.

დასასრულ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $x=0$. თუ $\alpha=1$, მაშინ $x'=1$ ნებისმიერი x-სათვის და, მაშასადამე, (19.4) ფორმულა ძალაში რჩება, თუ ჩავთვლით 0^0 ერთის ტოლად. თუკი $\alpha>1$ და $x=0$, მაშინ

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\alpha}}{\Delta x}=0$$

და, მაშასადამე, (19.4) ფორმულა მართებულია ამ უკანასკნელ შემთხვევაშიაც. თუ $\alpha<1$, მაშინ (19.4) ფორმულა აზრს კარგავს, როდესაც $x=0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y=2^{\operatorname{tg}^2 x}$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (19.2) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=2^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x)=2^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot 2\operatorname{tg}x\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}x)=$$

$$=2^{\operatorname{tg}^2 x}\cdot 2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=2^{1+\operatorname{tg}^2 x}\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=2^{\sec^2 x}\operatorname{tg}x\sec^2 x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y=(\operatorname{ctg}x)^{1/3}.$$

(19.4) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(\operatorname{ctg} x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx}=\frac{1}{3}(\operatorname{ctg} x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{3\sin^2 x}.$$

§ 20. ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული

ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება $y=u^v$ სახის ფუნქციას, სადაც u და v არის x არგუმენტის ფუნქციები.

თეორემა 11. თუ $u(x)$ და $v(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია რაიმე შუალედში და ამასთანავე ამ შუალედში $u(x)>0$, მაშინ აღნიშნულ შუალედში $y=[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქცია დიფერენცირებადია და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx}=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln u\cdot\frac{dv}{dx}. \qquad (20.1)$$

დამტკიცება. მოცემული y ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y=e^{v\ln u}.$$

(19.3) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u)=e^{v\ln u}\left(\frac{dv}{dx}\ln u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right)=$$

$$=u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\ln u\cdot\frac{dv}{dx}\right)=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln u\frac{dv}{dx}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მას შემდეგ, რაც დამტკიცებულია $y=u^v$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა, საკმარისია ვიპოვოთ y ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებული და სათანადო გამარტივების შემდეგ მივიღებთ (20.1) ფორმულას.

მაგალითი. ვიპოვოთ $y=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$ ფუნქციის წარმოებული იმ x წერტილებში, სადაც $\operatorname{tg} x>0$.

ამოხსნა. მოცემული ტოლობის გალოგარითმების შედეგად მივიღებთ

$$\ln y=\sin x\ln\operatorname{tg} x.$$

გავაწარმოოთ ტოლობის ორივე ნაწილი, გვექნება

$$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x+\sin x\cdot\frac{(\operatorname{tg}x)'}{\operatorname{tg}x}=\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}\cdot$$

აქედან

$$y'=(\operatorname{tg}x)^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x+\sec x)\cdot$$

§ 21. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები

თეორემა 12. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე არსებითად ზრდადი და უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია სეგმენტის შიგა x_0 წერტილში. თუ $x=\varphi(y)$ არის $f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, მაშინ იგი წარმოებადია შესაბამის y_0 წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{21.1}$$

დამტკიცება. თუ $f'(x_0)=0$, მაშინ (21.1) ფორმულაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi'(y_0)=\infty$, ხოლო თუ $f'(x_0)=\infty$, მაშინ

$$\varphi'(y_0)=0.$$

პირობის თანახმად, $x=\varphi(y)$ ფუნქცია ღებულობს x_0 მნიშვნელობას y_0 წერტილში. ახლა y არგუმენტს მივცეთ Δy ნაზრდი. მაშინ x ცვლადი მიიღებს სათანადო Δx ნაზრდს:

$$\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\Delta x\neq 0$, თუ $\Delta y\neq 0$. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=1:\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{21.2}$$

რაკი $x=\varphi(y)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ $\Delta x\to 0$, როდესაც $\Delta y\to 0$. მაშასადამე,

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\Delta y\to 0}\left(1:\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{21.3}$$

(21.2) და (21.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ $\varphi(y)$ ფუნქციას აქვს y_0 წერტილში $\varphi'(y_0)$ წარმოებული, ამასთანავე მართებულია (21.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

1. ვიპოვოთ $y=\arcsin x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1,\ 1]$ შუალედში. ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა

$$x=\sin y,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{21.4}$$

ვთქვათ,

$$x\in\,]-1,\ 1[,\ \text{მაშინ}\ y\in\,]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[,$$

რის გამო, $\cos y>0$. მაშასადამე,

$$\frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

(21.1) ფორმულის თანახმად

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{21.5}$$

თუ $-1<x<1$.

ახლა ვთქვათ, x არის ერთ-ერთი საზღვრითი წერტილი. მაგალითად $x=-1$. მაშინ ჩვენ უნდა განვიხილოთ $y=\arcsin x$ ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული $x=-1$ წერტილში. მაშინ $\frac{dy}{dx}=+\infty$, როდესაც $x=-1$.

2. ვიპოვოთ $y=\arccos x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1,\ 1]$ შუალედში. როგორც ვიცით

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე,

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{21.6}$$

3. ვიპოვოთ $y=\operatorname{arctg} x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი x-სათვის. გვაქვს:

$$x = \operatorname{tg} y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

აქედან

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

ამრიგად

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{21.7}$$

4. ვიპოვოთ $y = \operatorname{arcctg} x$ ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიცით

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{21.8}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $y = \arccos\frac{x}{a}$ ფუნქციის წარმოებული ($a > 0$).

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$y' = -\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x-3}{5}$ ფუნქციის დიფერენციალი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$dy = \frac{d\left(\frac{2x-3}{5}\right)}{1 + \left(\frac{2x-3}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}\,dx}{1 + \left(\frac{2x-3}{5}\right)^2} = \frac{10}{4x^2 - 12x + 34}\,dx.$$

§ 22 პირდაპირი და შექცეული ჰიპერბოლური ფუნქციების წარმოებული

1. ვიპოვოთ $\operatorname{sh} x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$(\operatorname{sh} x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\operatorname{ch} x.$$

2. ვიპოვოთ $\operatorname{ch} x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$(\operatorname{ch} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\operatorname{sh} x.$$

3. ვიპოვოთ $\operatorname{th} x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს

$$(\operatorname{th} x)'=\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)'=\frac{(\operatorname{sh} x)'\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

4. ვიპოვოთ $\operatorname{cth} x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$(\operatorname{cth} x)'=\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)'=\frac{(\operatorname{ch} x)'\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

5. ვიპოვოთ $\operatorname{arsh} x$ ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიცით,

$$\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

ამიტომ

$$(\operatorname{arsh} x)'=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. ვიპოვოთ $\operatorname{ar\,ch} x$ ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიცით.

$$\operatorname{ar\,ch} x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

მაშასადამე.

$$(\operatorname{arch} x)'=[\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\pm\frac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

7. ვიპოვოთ $\operatorname{ar\,th} x$ ფუნქციის წარმოებული. რადგანაც

$$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1),$$

ამიტომ

$$(\operatorname{arcth} x)'=\frac{1}{2}\,[\ln(1+x)-\ln(1-x)]'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}.$$

8. ვიპოვოთ $\operatorname{arcth} x$ ფუნქციის წარმოებული. რადგანაც

$$\operatorname{arc\,th} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1),$$

ამიტომ

$$(\operatorname{arc\,th} x)'=\frac{1}{2}\,[\ln|x+1|-\ln|x-1|]'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}.$$

§ 28. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებულებისა და დიფერენციალების ცხრილი

1. $(C)'=0,\ dC=0.$

2. $(a^x)'=a^x\ln a,\ d(a^x)=a^x\ln a\cdot dx.$

3. $(e^x)'=e^x,\ d(e^x)=e^x dx.$

4. $(\lg_a x)'=\dfrac{1}{x}\lg_a e,\quad d(\lg_a x)=\dfrac{1}{x}\lg_a e\,dx.$

5. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}.$

6. $(\sin x)'=\cos x,\ d(\sin x)=\cos x\,dx.$

7. $(\cos x)'=-\sin x,\ d(\cos x)=-\sin x\,dx.$

8. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},\quad d(\operatorname{tg} x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}.$

9. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad d(\operatorname{ctg} x)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}.$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $d(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\, dx$.

15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\, dx$.

16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $d(\operatorname{th} x) = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

17. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $d(\operatorname{cth} x) = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.

18. $(\operatorname{ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $d(\operatorname{ar\,sh} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

19. $(\operatorname{ar\,ch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $d(\operatorname{ar\,ch} x) = \pm\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

20. $(\operatorname{ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $d(\operatorname{ar\,th} x) = \frac{dx}{1-x^2}$.

21. $(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $d(\operatorname{arcth} x) = \frac{dx}{1-x^2}$.

სავარჯიშო

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1. $f(x) = 5x^2 + 6x^2 - 1$.

2. $g(x) = 7x^3 - 8x^2 + x + 5$.

3. $\varphi(x) = 6x(5x+5)$.

4. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2$.

5. $g(x) = (2x-1)^3$.

6. $f(t) = (3t^2 - 4)^4$.

7. $f(t)=t^2(t^{10}+1)^3$. 8. $f(t)=5\sin 3t$.

9. იპოვეთ $f(x)=(2x+9)^4$ ფუნქციის წარმოებული $x=1$ წერტილში.

10. იპოვეთ $f(t)=4\sin^2 t$ ფუნქციის წარმოებული $t=-\pi$ წერტილში.

11. მოცემულია $g(t)=at^2-3a^2t+5a^3$. იპოვეთ $g'(2a)$.

12. მოცემულია $f(x)=\frac{1}{3}x^3-bx^2$. იპოვეთ $f'(2b)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

13. $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}+x-2x^2$. 14. $g(x)=x-\frac{3}{x^3}$.

15. $\varphi(x)=5x^3+\frac{4}{x^3}-10$. 16. $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

17. $f(u)=\frac{3}{u^2}+\frac{4}{u}+1$. 18. $g(x)=(\sqrt{3}-\sqrt{x})^4$.

19. $\varphi(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^3$. 20. $g(x)=\frac{1}{(ax^2+bx+c)^2}$.

21. მოცემულია ფუნქცია $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. გამოთვალეთ $f'(8)$.

22. მოცემულია ფუნქცია $g(x)=x^2-\frac{1}{2x^2}$. გამოთვალეთ $g'(-2)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები და დიფერენციალები:

23. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+5x}}$. 24. $g(t)=\cos^3\frac{t}{a}-\sin^3\frac{t}{a}$.

25. $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2at-t^2}}$. 26. $g(x)=\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)^3$.

27. $f(x)=\sin^4 2x+\cos^4 2x$. 28. $g(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$.

29. $r=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. 30. $y=\sqrt{\frac{3\sin x-2\cos x}{5}}$.

31. მოცემულია ფუნქცია $f(t)=\sqrt{1+\sin^2 3t}$. იპოვეთ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

32. მოცემულია $g(t)=\sqrt{1+\sin^2 t^2}$ ფუნქცია. იპოვეთ $g'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

33. $y=\frac{2x+1}{x^2-1}$.

34. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

35. $y=(x^2+4x-3)(x^2-5x+1)$.

36. $s=(3t+1)^3(t-1)^2$.

37. $s=t\sqrt{t^2+1}$.

38. $s=(t-1)\sqrt[3]{t^4+1}$.

39. $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

40. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

41. $s=\frac{\sin^4 3t}{t}$.

42. $y=x\sin 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}$.

43. $y=\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$.

44. $y=\frac{x+a}{x-a}$.

45. $y=\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

46. $s=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}$.

47. $y=\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$.

48. $y=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^3-1}$.

49. მოცემულია ფუნქცია $f(t)=\frac{at}{(b+t)^2}$. იპოვეთ $f'(b)$.

50. მოცემულია ფუნქცია $f(t)=\frac{(a-x)^3}{a-2x}$. იპოვეთ $f'\left(\frac{a}{3}\right)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

51. $y=\mathrm{tg}^2 5x$.

52. $y=\mathrm{tg}^3\frac{5x+1}{2}$.

53. $s=\frac{\mathrm{tg}\,10t}{t^2}$.

54. $s=\sqrt{\mathrm{ctg}\,(1+t)^2}$.

55. $y=2\mathrm{ctg}^2 x-\frac{\cos x}{3\sin^2 x}$.

56. $y=\frac{2\,\mathrm{ctg}\,3x}{1-\mathrm{ctg}^2\,3x}$.

57. $y=\ln(ax+b)$.

58. $y=\lg_3(4x-2)$.

59. $y=\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

60. $y=\ln(3x^2-5x+6)$.

61. $y=\ln \sin x$.

62. $y=\ln \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$.

63. $y=\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})$.

64. $y=\ln(\ln x)$.

65. $y=x^2\lg_3 x$.

66. $y=\dfrac{2x+1}{\lg_2 x}$.

67. $y=x^3\ln x-\cos^2 x$.

68. $y=x^{\cos x}$.

69. $y=\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

70. $y=x(1+x)\sqrt{1-x}$.

71. $y=x^{\operatorname{ctg} x}$.

72. $y=\left(1+\dfrac{1}{x^x}\right)^x$.

73. $y=e^{\sin x}$.

74. $y=xe^{-x^2}$.

75. $x=2^{x^5}$.

76. $y=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

77. $y=e^{\frac{x}{a}}\cos\dfrac{x}{a}$.

78. $y=e^{-x^2}(\cos x+\sin x)$.

79. $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

80. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

81. $y=e^{5x^2+3}$.

82. $y=(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x})^2$.

83. იპოვეთ $y=\ln(1+e^{-2x})$ ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წერტილში.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალები:

84. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.

85. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

86. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{5x+1}{3}$.

87. $y=\arccos\dfrac{3}{4x-1}$.

88. $y=\arcsin(3x-1)$.

89. $y=\arccos\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$.

90. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

91. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}\right)$.

92. $y=2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

93. $y=\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{a^2-x^2}$.

94. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}$.

95. $y=\operatorname{arctg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}$.

96. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

97. $y=\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{ctg} x\right)$.

98. $y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-x^2}$.

99. $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}+\lg^3\cos 3x$.

100. $y=(\arcsin x)^x$.

101. $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

102. $y=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $(a>0)$

103. მოცემულია $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\ln\sqrt[4]{x^4-a^4}$. იპოვეთ $f'(2a)$.

104. $\varphi(x)=e^{-\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$. დაამტკიცეთ, რომ $\varphi(0)+a\varphi'(0)=0$.

105. $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. დაამტკიცეთ, რომ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3.$$

§ 24. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა დიფერენციალის საშუალებით

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x წერტილის მიდამოში და დიფერენცირებადია x წერტილში. მაშინ, როგორც ვიცით,

$$\Delta y=dy+\alpha,$$

სადაც α უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეა Δx უსასრულოდ მცირესთან შედარებით. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა

$$\Delta y \simeq dy,$$

ანუ

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x)+f'(x)\Delta x. \qquad (24.1)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მოცემულია ფუნქცია $f(x)=(1+x)^\alpha$, სადაც α ნულისა და ერთისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია. ვიპოვოთ $(1+x+\Delta x)^\alpha$ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, ამიტომ (24.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$(1+x+\Delta x)^\alpha \simeq (1+x)^\alpha+\alpha(1+x)^{\alpha-1}\Delta x.$$

კერძოდ, თუ $x=0$, მაშინ

$$(1+\Delta x)^\alpha \simeq 1+\alpha\Delta x.$$

თუ $\alpha=\frac{1}{k}$, გვექნება

$$\sqrt[k]{1+\Delta x} \simeq 1+\frac{\Delta x}{k}. \qquad (24.2)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ მიახლოებით $\sqrt{1,004}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ (24.2) ფორმულაში ვიგულისხმებთ $k=2$ და $\Delta x=0,004$, გვექნება

$$\sqrt{1,004}=\sqrt{1+0,004} \simeq 1+\frac{0,004}{2}=1,002.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $\sin(x+\Delta x)$ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (24.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\sin(x+\Delta x) \simeq \sin x+\cos x\cdot\Delta x. \qquad (24.3)$$

კერძოდ, თუ $x=0$, მაშინ (24.3) ფორმულა გვაძლევს

$$\sin\Delta x \simeq \Delta x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ მიახლოებით $\sin 31°$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ (24.3) ფორმულაში ვიგულისხმებთ $x=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{180}$, გვექნება

$$\sin 31°=\sin(30°+1°)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \simeq \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}=$$

$$=0,5+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,01745 \simeq 0,5151.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ მიახლოებით $\operatorname{arctg} 1,1$.

ამოხსნა. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ ფუნქციისათვის გამოვიყენოთ (24.1) ფორმულა, სადაც ვიგულისხმოთ $x=1$, $\Delta x=0,1$. გვექნება

$$\operatorname{arctg} 1,1 \simeq \operatorname{arctg} 1+(\operatorname{arctg} x)'_{x=1} \cdot 0,1=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{x=1} \cdot 0,1 \simeq 0,785+0,05=0,835.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ მიახლოებით $\ln 1,2$.

ამოხსნა. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\ln x$. რადგანაც $\ln 1,2=\ln(1+0,2)$, ამიტომ $x=1$, $\Delta x=0,2$ და (24.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\ln 1,2 \simeq \ln 1+(\ln x)'_{x=1} \cdot 0,2=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} \cdot 0,2=0,2.$$

§ 25. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გაწარმოება

ავიღოთ t ცვლადის ორი ფუნქცია

$$x=g(t), \quad y=f(t), \tag{25.1}$$

რომლებიც უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ვიგულისხმოთ, რომ $x=g(t)$ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია $t=\varphi(x)$, მაშინ y შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც x-ის რთული ფუნქცია:

$$y=f[\varphi(x)].$$

ცხადია, ეს რთული ფუნქცია უწყვეტია x ცვლადის მიმართ. ამრიგად, (25.1) დამოკიდებულებათა მიხედვით, y წარმოგვიდგება როგორც x-ის ფუნქცია t პარამეტრის საშუალებით. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ გვაქვს ფუნქციის პარამეტრული წარმოდგენა.

ახლა ისმის კითხვა: როგორ მოვძებნოთ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული, ისე რომ (25.1) ტოლობებიდან არ გამოვრიცხოთ t პარამეტრი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 13. *თუ არსებობს $x=g(t)$ და $y=f(t)$ ფუნქციების სასრული წარმოებულები რაიმე შუალედში, რომელშიაც $g'(t)$ ნიშანს არ იცვლის, მაშინ არსე-*

ზობს სასრული $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)}{g'(t)}. \tag{25.2}$$

დამტკიცება. რაკი $g'(t)$ ნიშანს არ იცვლის მოცემულ შუალედში, ამიტომ $x=g(t)$ ფუნქცია არსებითად მონოტონურია. მაშასადამე, არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია $t=\varphi(x)$ და ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია. ამრიგად, გვაქვს რთული ფუნქცია $y=f[\varphi(x)]$. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'}{x'}=\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით შემდეგი განტოლებებით:

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t).$$

მოვძებნოთ ამ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. (25.2) ფორმულის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

სავარჯიშო

1. დიფერენციალის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ შემდეგი სიდიდეები:

ა) $\sqrt[3]{1,012}$. პასუხი: 1,004.

ბ) $\ln 7$, თუ $\ln 2=0,6931$ და $\ln 3=1,0986$. პასუხი: 1,9584.

მოძებნეთ პარამეტრულად მოცემული შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

2. $x=r\cos t,\ \ y=r\sin t$. პასუხი: $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg} t$.

3. $x=\frac{2t}{1+t},\ y=\frac{1-t}{1+t}$. პასუხი: $\frac{dy}{dx}=-1$.

4. $x=\cos t+t\sin t,\ \ y=\sin t-t\cos t$. პასუხი: $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} t$.

5. $x=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$. პასუხი: $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg} 3t$.

6. $x=\frac{c\cos t}{1+b\cos t},\ y=\frac{a\sin t}{1+b\cos t}$.

პასუხი: $\frac{dy}{dx}=-\frac{a(b+\cos t)}{c\sin t}$.

7. $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. პასუხი: $\frac{dy}{dx}=1$.

8. $x=(a+b)\cos t-a\cos\frac{a+b}{a}t,\ y=(a+b)\sin t-a\sin\frac{a+b}{a}t$.

პასუხი: $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{2a+b}{2a}t$.

9. $x=\frac{3a-2t}{at},\ y=\frac{4(a-t)^3}{a^2t^2}$.

პასუხი: $\frac{dy}{dx}=\frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}$.

10. $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t$,

პასუხი: $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{3}{2}t$.

§ 26. უმაღლესი რიგის წარმოებულები

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $]a,b[$ ინტერვალში, მაშინ $y'=f'(x)$ წარმოებული წარმოადგენს x ცვლადის ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა $]a,b[$ ინტერვალი. თუ $f'(x)$ წარმოებულს აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ან მეორე წარმოებული. $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე წარმოებული აღინიშნება y'' ან $f''(x)$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად, $f''(x)$ წარმოებულის წარმოებულს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული ანუ მესამე წარმოებული და აღინიშნება y''' ან $f'''(x)$ სიმბოლოთი.

საზოგადოდ, $y=f(x)$ ფუნქციის n-რი რიგის წარმოებული ეწოდება ამ ფუნქციის $n-1$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს და აღინიშნება $y^{(n)}$ ან $f^{(n)}$ სიმბოლოთი.

ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები გამოიყენება ბუნებისმეტყველების, ტექნიკისა და მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, ღერძზე მოძრაობს რაიმე ნივთიერი M წერტილი და მისი მოძრაობის განტოლებაა $s=f(t)$. როგორც ვიცით, $\frac{ds}{dt}=f'(t)$ წარმოადგენს M წერტილის $v(t)$ სიჩქარეს t მომენტში. მეორე წარმოებული $\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$, ე. ი. სიჩქარის წარმოებული არის სიჩქარის ცვლილების სიჩქარე. ამ სიდიდეს ეწოდება M წერტილის აჩქარება t მომენტში. ამრიგად, ნივთიერი M წერტილის w აჩქარება არის s მანძილის მეორე რიგის წარმოებული t დროით:

$$w=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

უმაღლესი რიგის წარმოებულის მოსაძებნად საჭიროა გამოვიყენოთ გაწარმოების ჩვეულებრივი ოპერაციები. განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ავიღოთ n ხარისხის მრავალწევრი

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

ვიპოვოთ ამ მრავალწევრის უმაღლესი რიგის წარმოებულები. გაწარმოების ძირითადი წესების თანახმად

$$y'=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$
$$y''=a_0n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\ldots+2a_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=a_0n(n-1)(n-2)\ldots2.1=a_0n!$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\ldots=0$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=x^\alpha$ ხარისხოვანი ფუნქციის n რიგის წარმოებული, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

თანდათანობით გაწარმოება მოგვცემს

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\quad y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

და ა. შ.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი n-რი რიგის წარმოებული გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \tag{26.1}$$

ვთქვათ ეს ფორმულა მართებულია რაიმე n რიცხვისათვის. (26.1) ტოლობის გაწარმოება მოგვცემს

$$y^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-(n+1)}.$$

მაშასადამე, თუ მართებულია (26.1) ტოლობა, მაშინ იგი მართებულია აგრეთვე $n+1$ რიგის წარმოებულისათვისაც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (26.1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

შევნიშნავთ, რომ როცა $\alpha=-1$, მაშინ განხილულ ფუნქციას აქვს $y=\frac{1}{x}$ სახე და (26.1) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

თუკი $\alpha=-\frac{1}{2}$, მაშინ (26.1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{(2n-1)!}{2^n x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $y=\ln x$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული. მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$y^{(n)}=(\ln)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

მაგალითი 4. მოვძებნოთ $y=a^x$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული.

გვაქვს:

$$y'=a^x\ln a,\; y''=a^x(\ln a)^2,\ldots,\; y^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$$

კერძოდ, თუ $y=e^x$, მაშინ $y^{(n)}=e^x$.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $y=\frac{1}{x^2-a^2}$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული. ეს ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

აქედან

$$y' = -\frac{1!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right].$$

მეორე რიგის წარმოებული იქნება

$$y'' = \frac{2!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)_3} - \frac{1}{(x+a)^3}\right].$$

შემდეგ

$$y''' = -\frac{3!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^4} - \frac{1}{(x+a)^4}\right]$$

და ა. შ. თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ გამოთვლებს დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right].$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $y = \sin x$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული.

გვაქვს

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right), \quad y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4.\frac{\pi}{2}\right).$$

ამის შემდეგ კი ადვილი მისახვედრია, რომ

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

სრულიად ასევე მივიღებთ, რომ თუ $y = \cos x$, მაშინ

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\ \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 27. ლაიბნიცის ფორმულა

ცხადია, ალგებრული ჯამის გაწარმოების წესი უცვლელად გადაიტანება ნებისმიერი რიგის წარმოებულებზე, მაგრამ საყურადღებოა ორი ფუნქციის ნამრავლის მიმდევრობითი გაწარმოება. მართებულია შემდეგი

თეორემა 14. თუ რაიმე X შუალედში $u = u(x)$ და $v = v(x)$ ფუნქციებს აქვს ყველა რიგის წარმოებული n რი-

გამდე ჩათვლით, მაშინ $y=uv$ ნამრავლსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით და მართებულია ტოლობა

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\dots+uv^{(n)} \qquad (27.1)$$

დამტკიცება. გავაწარმოოთ მოცემული $y=uv$ ფუნქცია ორი ფუნქციის ნამრავლის გაწარმოების წესის მიხედვით, გვექნება

$$y'=u'v+v'u.$$

ამ გამოსახულების ხელახლა გაწარმოებით მივიღებთ

$$y''=u''v+2u'v'+v''u\cdot$$

სრულიად ასევე გვექნება

$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

აქედან ჩანს, რომ ნებისმიერი n-სათვის გვექნება

$$y^{(n)}=A_0uv^{(n)}+A_1u'v^{(n-1)}+A_2u''v^{(n-2)}+\dots+$$

$$+A_{n-1}u^{(n-1)}v'+A_nu^{(n)}v, \qquad (27.2)$$

სადაც $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ მუდმივები დამოკიდებული არ არის u და v ფუნქციების სახეზე. მოვძებნოთ ეს მუდმივები. ამისათვის u და v ფუნქციები ასეთი სახით ავიღოთ $u=e^x$ და $v=e^{\alpha x}$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მაშინ

$$u^{(n)}=e^x, \quad v^{(n)}=\alpha^n e^{\alpha x},$$

$$y=e^{(1+\alpha)x}, \quad y^{(n)}=(1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x}$$

და (27.2) ფორმულა გვაძლევს

$$(1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x}=A_0e^{(1+\alpha)x}+A_1\alpha e^{(1+\alpha)x}+A_2\alpha^2e^{(1+\alpha)x}+\dots+A_n\alpha^n e^{(1+\alpha)x},$$

საიდანაც

$$(1+\alpha)^n=A_0+A_1\alpha+A_2\alpha^2+\dots+A_n\alpha^n.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ არის $(1+\alpha)^n$ ბინომის გაშლის კოეფიციენტები და, მაშასადამე, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$A_0=C_n^0=1,\quad A_1=C_n^1=n,\quad A_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},\ldots,\ A_n=C_n^n=1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(27.1) ფორმულას ეწოდება **ლაიბნიცის ფორმულა**.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $y=x\sin ax$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. ლაიბნიცის ფორმულაში ავიღოთ $u=\sin ax$ და $v=x$. მაშინ $u^{(n)}=a^n\sin\left(ax+\frac{\pi n}{2}\right)$, $v'=1$, $v''=v'''=\ldots=v^{(n)}=0$. ამიტომ (27.1) ფორმულის თანახმად

$$y^{(n)}=a^{n-1}\left[ax\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+n\sin\left(ax+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right].$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $y=e^{ax}\sin bx$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. ლაიბნიცის ფორმულაში ვიგულისხმოთ $u=e^{ax}$ და

$$v=\sin bx,\ \text{მაშინ}\ u^{(n)}=u^ne^{ax}, v^{(n)}=b^n\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right),$$

ამიტომ (27.1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$y^{(n)}=e^{ax}\left[\left(a^n-\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\ldots\right)\sin bx+\left(na^{n-1}b-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots\right)\cos bx\right].$$

მაგალითი 3. მოვძებნოთ $y=\frac{1}{1-x^2}$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x},$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u=\frac{1}{1+x},\qquad v=\frac{1}{1-x}.$$

მაშინ მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$u^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\qquad v^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

ამის შემდეგ (27.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)}=\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $y=\frac{\ln x}{x}$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u=\frac{1}{x},\qquad v=\ln x,$$

გვექნება

$$u^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\qquad v^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln x\right).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. დავამტკიცოთ, რომ $y=\operatorname{arctg}x$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვინაიდან $y'=\frac{1}{1+x^2}$, ამიტომ $(1+x^2)y'=1$.

ახლა უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი მიმდევრობით გავაწარმოვოთ n-ჯერ, ამასთან მარცხენა ნაწილის გაწარმოებისათვის გამოვიყენოთ ლაიბნიცის ფორმულა, რომელშიც $u=y'$ და $v=1+x^2$. მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

§ 28. უმაღლესი რიგის დიფერენციალები და მათი კავშირი წარმოებულებთან

განვიხილოთ $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე X შუალედში და ამ შუალედში აქვს ყველა რიგის სასრული წარმოებულები n რიგამდე ჩათვლით. როგორც ვიცით,

$$dy=f'(x)dx,$$

რომელსაც შემდეგში ვუწოდოთ $y=f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალი. პირველი რიგის დიფერენციალი დამოკიდებულია x-ზე და dx-ზე. მაგრამ dx არ არის დამოკიდებული x-ზე. ამიტომ აზრი აქვს $y=f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს. მას ეწოდება ამ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი და აღინიშნება d^2y სიმბოლოთი. განსაზღვრის თანახმად

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=[f'(x)dx]'dx=f''(x)dx^2, \tag{28.1}$$

სადაც dx^2-ით აღნიშნულია $(dx)^2$.

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ როცა არსებობს მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული, მაშინ არსებობს აგრეთვე ამ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი. ასევე განისაზღვრება და გამოითვლება მოცემული ფუნქციის მესამე რიგის დიფერენციალი. სახელდობრ, მეორე რიგის დიფერენციალის პირველი რიგის დიფერენციალს ეწოდება მესამე რიგის დიფერენციალი და აღინიშნება d^3y სიმბოლოთი. თუ გამოვიყენებთ (28.1) ფორმულას, გვექნება

$$d^3y=d(d^2y)=d[f''(x)dx^2]=f'''(x)dx^3.$$

საზოგადოდ, n-ური რიგის დიფერენციალი არის $n-1$ რიგის დიფერენციალის დიფერენციალი და აღინიშნება d^ny სიმბოლოთი. ამასთან ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)dx^n,$$

რომელიც მარტივად გამოიყვანება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

მაშასადამე, ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული უდრის ამავე ფუნქციის n-ური რიგის დიფერენციალს, გაყოფილს არგუმენტის დიფერენციალის n-ურ ხარისხზე.

§ 29. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის დიფერენციალი

როგორც ვიცით, ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალს აქვს ინვარიანტული სახე, მაგრამ ეს თვისება ძალაში არ რჩება უმაღლესი რიგის დიფერენციალებისათვის. მართლაც, ავიღოთ $y=f(u)$ ფუნქცია, სადაც u დამოუკიდებელი ცვლადია. მაშინ

$$d^2y=f''(u)du^2, \tag{29.1}$$

ახლა ვთქვათ, რომ u არის x-ის ფუნქცია: $u=\varphi(x)$, მაშინ $du=u'(x)dx$. მოვძებნოთ მოცემული რთული ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი x ცვლადით. გვაქვს:

$$d^2y=d[f'(u)du]=[f''(u)du]du+f'(u)d^2u. \qquad (29.2)$$

აქედან ჩანს, რომ განსახილველ ორ შემთხვევას შორის განსხვავება არის. როცა u დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ გვაქვს (29.1) ტოლობა, თუკი u დამოკიდებულია x-ზე, გვექნება (29.2) ტოლობა.

§ 30 პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები

ვთქვათ, x ცვლადის y ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით:

$$x=x(t), \qquad y=y(t).$$

როგორც ვიცით, გარკვეულ პირობებში

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},$$

სადაც x' და y' სიმბოლოებით აღნიშნულია x და y ფუნქციების წარმოებულები t ცვლადით.

თუ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს აქვთ საჭირო რიგამდე უმაღლესი რიგის წარმოებულები t ცვლადით, მაშინ y ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები x ცვლადით შესაძლოა გამოვსახოთ t პარამეტრის საშუალებით. მართლაც,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{x'y''-y'x''}{x'^2}\cdot\frac{1}{x'},$$

ე. ი.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}.$$

ახლა ეს ტოლობა გავაწარმოოთ ისევ x ცვლადით, გვექნება

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

საიდანაც

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - x'''y') - 3x''(x'y'' - x''y')}{x'^5}$$

ასეთივე წესით გამოითვლება მეოთხე რიგის წარმოებული და ა. შ.

§ 31. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები

ვთქვათ, მოცემულია რთული ფუნქცია $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, სადაც $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant u \leqslant d$. ვიგულისხმოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს $u=\varphi(x)$ ფუნქციის სასრული წარმოებულები საჭირო რიგამდე x ცვლადით, ხოლო $[c, d]$ სეგმენტზე არსებობს $y=f(u)$ ფუნქციის წარმოებულები საჭირო რიგამდე u ცვლადით. როგორც ვიცით, ამ პირობებში ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x ცვლადით და ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ $\frac{dy}{du}$ თანამამრავლი თვითონ წარმოადგენს x ცვლადის რთულ ფუნქციას, გვექნება

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}. \tag{31.1}$$

ახლა გავაწარმოოთ (31.1) ტოლობის ისევ ორივე ნაწილი x ცვლადით, გვექნება

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\,\frac{d^2y}{du^2}\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dy}{du}\,\frac{d^3u}{dx^3}.$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის მართებულობაში

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4y}{du^4}\left(\frac{du}{dx}\right)^4 + 6\,\frac{d^3y}{du^3}\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left[\,3\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 4\,\frac{du}{dx} \cdot \frac{d^3u}{dx^3}\right] + \frac{dy}{du}\,\frac{d^4u}{dx^4}.$$

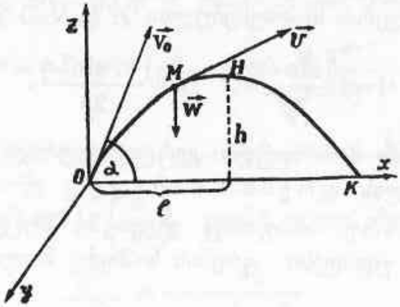
ასევე მივიღებთ რთული ფუნქციის მომდევნო რიგის წარმოებულებს.

§ 32. მეორე რიგის წარმოებულის ერთი ფიზიკური გამოყენება

ცნობილია, რომ დედამიწის გრავიტაციის ველში ნივთიერი M წერტილი, რომელზეც მხოლოდ სიმძიმის ძალა მოქმედებს (მხედველობაში არ არის მიღებული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა), ისე მოძრაობს, რომ მისი g აჩქარება მუდმივი სიდიდეა და მოგეზულია ვერტიკალურად ქვევით. შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებები. ამისათვის მოძრაობის დასაწყისში მივიღოთ, რომ დრო $t=0$, ხოლო საწყისი $\vec{v}_0$ სიჩქარის მოდული $\vec{v}_0$-ით აღვნიშნოთ. M წერტილის საწყის მდებარეობაში ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის O სათავე, Ox ღერძი გავავლოთ დედამიწის ჰორიზონტის გასწვრივ, Oz ღერძი მივმართოთ ქვევიდან ზევით ისე, რომ xOz სიბრტყემ გაიაროს $\vec{v}_0$ ვექტორზე. კუთხე $\vec{v}_0$ ვექტორსა და Ox ღერძს შორის იყოს α. ამ პირობებში საწყისი სიჩქარის კოორდინატები იქნება:

$$v_{0x}=v_0\cos\alpha, \qquad v_{0y}=0, \qquad v_{0z}=v_0\sin\alpha.$$

მოძრავი $M(x, y, z)$ წერტილის ვექტორული w აჩქარების კომპონენტებია:



ნახ. 55.

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad w_y=\frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad w_z=\frac{d^2z}{dt^2}=-g.$$

აქედან ვექტორული $\vec{v}$ სიჩქარის კომპონენტებისათვის მივიღებთ:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=C_1, \;\; v_y=\frac{dy}{dt}=C_2, \;\; v_z=\frac{dz}{dt}=-gt+C_3, \qquad (32.1)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x=C_1t+D_1,\ y=C_2t+D_2,\ z=-\frac{gt^2}{2}+C_3t+D_3. \qquad (32.2)$$

C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 და D_3 მუდმივების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ საწყისი პირობები: როცა $t=0$, მაშინ $x=y=z=0$, $v_{0x}=v_0\cos\alpha$, $v_{0y}=0$, $v_{0z}=v_0\sin\alpha$. ამ მონაცემებით (32.1) და (32.2) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$C_1=v_0\cos\alpha,\ C_2=0,\ C_3=v_0\sin\alpha,\ D_1=D_2=D_3=0$$

და წერტილის მოძრაობის განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x=tv_0\cos\alpha,\ y=0,\ z=-\frac{1}{2}gt^2+tv_0\sin\alpha \qquad (32.3)$$

როგორც ვხედავთ წერტილის მოძრაობა ხდება xOz სიბრტყეში. თუ (32.3) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში:

$$z=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\operatorname{tg}\alpha,$$

რომელიც წარმოადგენს xOz სიბრტყეში მოთავსებულ პარაბოლას. ამ პარაბოლის წვერო მოთავსებულია $H(l, 0, h)$ წერტილში, სადაც

$$l=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}, \quad h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \qquad (32.4)$$

პარაბოლის ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით. h რიცხვს მოძრავი წერტილის ფ რ ე ნ ი ს ს ი მ ა ღ ლ ე ეწოდება, ხოლო $2l$ — ფ რ ე ნ ი ს ს ი შ ო რ ე. როგორც ვხედავთ, მოცემული საწყისი $\vec{v}_0$ სიჩქარისათვის, უდიდესი ფრენის სიშორე მიიღწევა მაშინ, როცა $\alpha=45°$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. მოცემულია ფუნქცია

$y=\left(\frac{1}{5}x^3-x^2-3\right)\left(x-1\right)^3\left(3x^2+1\right)$. დაამტკიცეთ რომ $y^{(8)}=24192$.

2. მოცემულია ფუნქცია $y=(x+7)(2x^2+3)(3x+1)^2$. დაამტკიცეთ, რომ $y^{(6)}=0$.

3. $y=x^5\ln x$. დაამტკიცეთ, რომ $y'''=x^2(60\ln x+47)$.

4. $y=\dfrac{a}{x^m}$. დაამტკიცეთ, რომ $y^{(4)}=\dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)a}{x^{m+4}}$.

5. $y=x^2e^{2x}$. დაამტკიცეთ, რომ $y^{(4)}=16e^{2x}(x^2+4x+3)$.

6. $y=x^2\sin x$. დაამტკიცეთ, რომ $y^{(50)}=2450\sin x+$ $+100x\cos x-x^2\sin x$.

7. დაამტკიცეთ, რომ $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ ფუნქცია, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, დააკმაყოფილებს $y''+3y'+2y=0$ განტოლებას.

8. დაამტკიცეთ, რომ $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$ ფუნქცია, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, დააკმაყოფილებს $y''+4y=0$ განტოლებას.

9. დაამტკიცეთ, რომ თუ $y=e^x\sin x$, $z=e^x\cos x$, მაშინ $y''=2z$ და $z''=-2y$.

10. დაამტკიცეთ, რომ $y=\sin(m\arcsin x)$ დააკმაყოფილებს $(1-x^2)y''=xy'-m^2y$ განტოლებას.

11. $y=ax^m$. დაამტკიცეთ, რომ $y^{(n)}=am(m-1)(m-2)\ldots(m-$ $-n+1)x^{m-n}$.

12. $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. დაამტკიცეთ, რომ

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(\alpha\delta-\beta\gamma)\,\frac{n!\,\gamma^{n-1}}{(\gamma x+\delta)^{n+1}}.$$

13. $y=\ln(a\pm bx)$. დაამტკიცეთ, რომ $y^{(n)}=-\dfrac{(\mp b)^n(n-1)!}{(a\pm bx)^n}$.

14. $y=(a^2+x^2)\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{a}\right)$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{y^{(4)}}{y'''}=-\frac{4x}{a^2+x^2}.$$

15. დაამტკიცეთ, რომ $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0$ განტოლებას.

16. $y=\dfrac{1}{u}$, $u=9x^2+12x+1$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{648(2+3x)(7+12x+9x^2)}{u^4}.$$

17. $y=e^u$, $u=x^2$. დაამტკიცეთ, რომ

$$y^{(4)}=4y(4x^4+12x^2+3).$$

18. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

19. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}.$$

20. $x=a\cos 2t$, $y=b\sin^2 t$. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

თავი VII

ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით

§ 1. ფერმას თეორემა

თეორემა 1. თუ რაიმე შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია შუალედის შიგა ξ წერტილში და, ამასთანავე, ამ წერტილში მას აქვს თავის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა, მაშინ $f'(\xi)=0$.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ξ წერტილში უდიდესი მნიშვნელობა. მაშინ საკმაოდ მცირე დადებითი h რიცხვისათვის გვექნება

$$f(\xi+h)-f(\xi)\leqslant 0,\quad f(\xi-h)-f(\xi)\leqslant 0.$$

აქედან

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant 0,\quad \frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}\geqslant 0.$$

რაკი ξ წერტილში არსებობს $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობებიდან მივიღებთ

$$f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant 0,$$

$$f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}\geqslant 0.$$

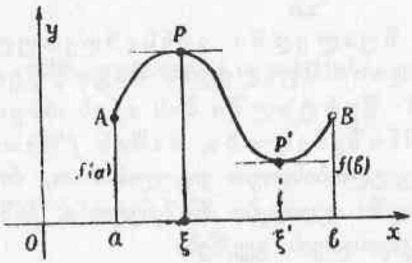
ამ ორი დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ $f'(\xi)=0$ და ამით ფერმას (P. Fermat) თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. როლის თეორემა

თეორემა 2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და, ამასთანავე, $f(a)=f(b)$, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f'(\xi)=0$.

დამტკიცება. თუ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში $f'(x)=0$. ამრიგად, არსებობს ξ წერტილი. ეს არის $]a, b[$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

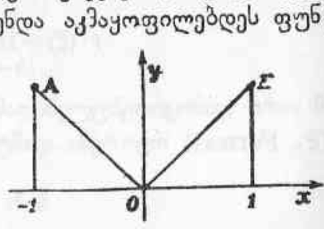
ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მუდმივი არაა $[a, b]$ სეგმენტზე. ვინაიდან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ მას აქვს ამ სეგმენტზე უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები. ვთქვათ, ესენია m და M. რადგანაც $m<M$ და $f(a)=f(b)$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ერთ-ერთს m ან M მნიშვნელობას $]a, b[$ ინტერვალის რაიმე ξ წერტილში. ფერმას თეორემის თანახმად $f'(\xi)=0$ და, მაშასადამე, როლის (Rolle) თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 56.

როლის თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგია: თუ $y=f(x)$ წირს ყოველ წერტილში აქვს მხები, ხოლო A და B წერტილებს, რომლებიც $[a, b]$ სეგმენტის კიდურა წერტილებს შეესაბამებიან, თანატოლი ორდინატები აქვთ, მაშინ მოცემულ წირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები აბსცისათა ღერძის პარალელურია (ნახ. 56).

შენიშვნა. როლის თეორემას ვერ გამოვიყენებთ, თუ დარღვეულია ერთ-ერთი პირობა, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=|x|$, განსაზღვრული $[-1.1]$ სეგმენტზე. ეს ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე, $f(-1)=f(1)=1$ და წარმოებადია $]-1, 1[$ ინტერვალში, გარდა კოორდინატთა სათავისა. მაშასადამე, დარღვეულია $]-1, 1[$ ინტერვალში ფუნქციის წარმოებადობის პირობა. როლის თეორემას აღებული ფუნქციისათვის ვერ გამოვიყენებთ. მართლაც, $f'(x)=1$, როდესაც $x>0$ და $f'(x)=-1$, როდესაც $x<0$, ხოლო $x=0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული. ამრიგად $]-1, 1[$ ინტერვალში აღებული ფუნქციის წარმოებული არსად ნული არ არის (ნახ. 57).



ნახ. 57.

§ 3. ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ

როლის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 3. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(\xi). \tag{3.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე $\varphi(x)$ ფუნქცია

$$\varphi(x)=[f(x)-f(a)]\,(b-a)-[f(b)-f(a)]\,(x-a).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\varphi(a)=0,\ \ \varphi(b)=0.$$

ამის გარდა, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში. ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და, მაშასადამე, $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $\varphi'(\xi)=0$. მაგრამ

$$\varphi'(x)=f'(x)\,(b-a)-[f(b)-f(a)].$$

მაშასადამე,

$$f'(\xi)\,(b-a)-[f(b)-f(a)]=0.$$

აქედან მიიღება (3.1) ტოლობა. ლაგრანჟის (G. Lagrange) თეორემა დამტკიცებულია.

რადგანაც (3.1) ფორმულაში შედის $f(b)-f(a)$ და $b-a$ ნაზრდები, ამიტომ ამ ფორმულას სასრული ნაზრდების ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულა ასე გადავწეროთ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{3.2}$$

ამ ფორმულის მიხედვით ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობა უდრის ფუნქციის წარმოებულს რაღაც „საშუალო" ξ წერტილში. ამის გამო (3.1) ფორმულას უწოდებენ აგრეთვე საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას.

შემდეგ, ვინაიდან (3.1) ფორმულაში $a<\xi<b$, ამიტომ თუ შემოვიღებთ აღნიშნას

$$\frac{\xi-a}{b-a}=\theta, \tag{3.3}$$

გვექნება $0 < \theta < 1$ და, მაშასადამე, (3.3) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\xi = a + \theta\,(b - a).$$

ახლა (3.1) ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე

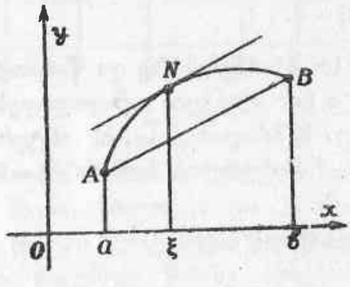
$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'[a + \theta(b - a)].$$

კერძოდ, თუ $b = a + h$, გვექნება

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

სასრული ნაზრდის თეორემის ასეთი სახით ჩაწერას სასარგებლო გამოყენება აქვს.

ლაგრანჟის ფორმულას აქვს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. მართლაც, გადავწეროთ (3.1) ფორმულა (3.2) სახით. უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს იმ AB ქორდის კუთხურ კოეფიციენტს, რომელიც აერთებს $y = f(x)$ წირის ბოლო A და B წერტილებს (ნახ. 58). რაც შეეხება (3.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს, იგი წირის $N\,[\xi,\ f(\xi)]$ წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტია. ამრიგად, როცა შესრულებულია ლაგრანჟის თეორემის პირობები, მაშინ $y = f(x)$ წირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი N წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები AB ქორდის პარალელურია.



ნახ. 58.

თეორემა 4. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული ნულის ტოლია $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ $]a, b[$ ინტერვალში ნებისმიერი x წერტილი და დავწეროთ ლაგრანჟის ფორმულა $[a, x]$ სეგმენტისათვის, გვექნება

$$f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(\xi), \quad a < \xi < x.$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად, $f'(\xi) = 0$, ამიტომ აქედან მივიღებთ $f(x) = f(a)$. უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს თეორემას.

შედეგი. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში

თ ა ნ ა ტ ო ლ ი წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ე ბ ი ა ქ ვ თ, მ ა შ ი ნ ე ს ფ უ ნ ქ ც ი ე-ბ ი მ ხ ო ლ ო დ მ უ დ მ ი ვ ი თ გ ა ნ ს ხ ვ ა ვ დ ე ბ ი ა ნ.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $F(x)=f(x)-\varphi(x)$ ფუნქცია. პირობის თანახმად, $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში

$$F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)=0.$$

მაშასადამე, მე-4 თეორემის თანახმად $F(x)$ ფუნქცია მუდმივია $[a, b]$ სეგმენტზე:

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)=C.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განვიხილოთ ფუნქციები $f(x)=\operatorname{arctg} x$ და $\varphi(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. ორივე ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში. გვაქვს

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad \varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

მე-4 თეორემის შედეგის თანახმად

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C. \tag{3.4}$$

ვიპოვოთ C მუდმივი. ამისათვის (3.4) ტოლობაში ვიგულისხმოთ $x=0$. მაშინ გვექნება $0=C$. მაშასადამე, $[-\infty, +\infty]$ შუალედში მართებულია შემდეგი იგივეობა:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $]-1, +1[$ ინტერვალში მართებულია იგივეობა

$$\operatorname{arc\,sin} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 4. კოშის თეორემა

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემა ფუნქციის სასრული ნაზრდის შესახებ შეიძლება განვაზოგადოთ ორი ფუნქციის სასრული ნაზრდებისათვის.

თეორემა 5. ვ თ ქ ვ ა თ, $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე უ წ ყ ვ ე ტ ი $f(x)$ დ ა $\varphi(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი წ ა რ მ ო ე ბ ა დ ი ა $]a, b[$ ი ნ ტ ე რ ვ ა ლ შ ი.

თუ $f'(x)$ და $\varphi'(x)$ წარმოებულები ერთდროულად ნული არ ხდება $]a, b[$ ინტერვალის არცერთ წერტილში და, ამასთანავე, $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ მართებულია ტოლობა

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{4.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე $F(x)$ ფუნქცია:

$$F(x)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\, f(x)-[f(b)-f(a)]\, \varphi(x).$$

ცხადია, $F(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და $F(a)=F(b)$. მაშასადამე, $F(x)$ აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $F'(\xi)=0$. მაგრამ

$$F'(\xi)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\, f'(\xi)-[f(b)-f(a)]\, \varphi'(\xi).$$

მაშასადამე,

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]\, f'(\xi)-[f(b)-f(a)]\, \varphi'(\xi)=0. \tag{4.2}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\varphi'(\xi) \neq 0$. მართლაც, თუ $\varphi'(\xi)=0$, მაშინ (4.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f'(\xi)=0$, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. (4.2) ტოლობიდან მიიღება (4.1) ტოლობა. კოშის თეორემა დამტკიცებულია.

კოშის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის თეორემის განზოგადებაა ორი ფუნქციის შემთხვევაში. ამ თეორემას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს მათემატიკურ ანალიზში.

§ 5. დარბუს თეორემა

როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $f(a)$ და $f(b)$-ს შორის. დარბუს (G. Darboux) მიერ აღმოჩენილი იყო, რომ ანალოგიური თვისება აქვს ფუნქციის წარმოებულსაც. სახელდობრ, მან დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 6. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f'(x)$ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია $f'(a)$ და $f'(b)$ რიცხვებს შორის.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f'(a)<f'(b)$. ავიღოთ $f'(a)$ და $f'(b)$ რიცხვებს შორის რაიმე λ რიცხვი:

$$f'(a)<\lambda<f'(b).$$

წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად მოიძებნება ისეთი $h>0$, რომ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<\lambda<\frac{f(b-h)-f(b)}{-h}. \tag{5.1}$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

ცხადია, $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b-h]$ სეგმენტზე და ამიტომ (5.1) უტოლობათა ძალით $]a, b-h[$ ინტერვალში არსებობს ისეთი x_0 წერტილი, რომ $F(x_0)=\lambda$, ე. ი.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lambda$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად $]x_0, x_0+h[$ ინტერვალში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(\xi).$$

მაშასადამე,

$$f'(\xi)=\lambda,$$

სადაც $a<\xi<b$. დარბუს თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ნიშნები

თეორემა 7. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადი და ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტის ყოველ x წერტილში

$$f'(x)\geqslant 0. \tag{6.1}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, x მოცემული სეგმენტის წერტილია და განსხვავებულია b-საგან. ავიღოთ დადებითი რიცხვი δ იმდენად მცირე, რომ $x+\delta$ ეკუთვნოდეს $[a, b]$ სეგმენტს. $f(x)$ ფუნქციის ზრდადობის გამო ყოველი დადებითი Δx რიცხვისათვის, რომელიც არ აღემატება δ-ს, გვექნება

$$f(x+\Delta x)-f(x)\geqslant 0.$$

მაშასადამე,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\Delta x\to 0$, მივიღებთ (6.1) უტოლობას.

თუკი $x=b$, მაშინ ავიღოთ უარყოფითი Δx. ამ შემთხვევაში

$$f(x+\Delta x)-f(x)\leqslant 0$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $\Delta x\to 0$, მივიღებთ (6.1) უტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 8. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე კლებადი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია ამავე სეგმენტზე, მაშინ აღნიშნულ სეგმენტზე $f'(x)\leqslant 0$.

ამრიგად, ფუნქციის მონოტონურობის შუალედში წარმოებული ნიშანს არ იცვლის.

თეორემა 9. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x)\geqslant 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია აღნიშნულ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ორი წერტილი x_1 და x_2, ამასთანავე $x_1<x_2$. ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(\xi),\quad x_1<\xi<x_2.$$

პირობის ძალით $f'(\xi)\geqslant 0$, ხოლო $x_2-x_1>0$, ამიტომ $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$ ანუ $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ორი თეორემა:

თეორემა 10. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x)\leqslant 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია კლებადია ამავე სეგმენტზე.

თეორემა 11. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში დადებითი (უარყოფითი) წარმოებული, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია არსებითად ზრდადია (კლებადია).

თეორემა 12. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია და წარმოებადი. თუ ამ სეგმენტზე $f'(x)\neq 0$,

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია იქნება არსებითად მონოტონური ამავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ადვილი საჩვენებელია, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x)$ დადებითია ან უარყოფითია. მართლაც, ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე x_1 და x_2 წერტილებში $f'(x_1)<0$ და $f'(x_2)>0$, მაშინ დარბუს თეორემის თანახმად $f'(x)$ წარმოებული მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, მოთავსებულს $f'(x_1)$ და $f'(x_2)$ შორის. კერძოდ, არსებობს x_1 და x_2 წერტილებს შორის ისეთი ξ წერტილი, რომ $f'(\xi)=0$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, $f'(x)$ წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს $[a, b]$ სეგმენტზე და ამიტომ $f(x)$ არსებითად მონოტონური ფუნქციაა. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y=3x^2-6x+1$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები.

ამოხსნა. რადგანაც $y'=6x-6$, ამიტომ $]1, +\infty[$ შუალედში $y'>0$, ხოლო $]-\infty, 1[$ შუალედში $y'<0$, ამიტომ $]1, +\infty[$ შუალედში მოცემული ფუნქცია არსებითად ზრდადია, ხოლო $]-\infty, 1[$ შუალედში არსებითად კლებადია.

§ 7. განუსაზღვრელობათა გახსნა

ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არაა $x=a$ წერტილში, მაგრამ ზღვარი აქვს, როდესაც $x\to a$. ასეთი ზღვრის მოძებნას განუსაზღვრელობათა გახსნა ეწოდება.

1°. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობები. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 13. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია a წერტილის რაიმე გახვრეტილ მიდამოში, ამასთანავე ამ მიდამოში $g'(x)\neq 0$ და $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, მაშინ არსებობს აგრეთვე ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (7.1)$$

დამტკიცება. რადგანაც $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)=0$, $g(a)=0$. ამ პირობებში

$f(x)$ და $g(x)$ უწყვეტია a წერტილში. a წერტილის აღნიშნულ მიდამოში ავიღოთ რაიმე x წერტილი. კოშის ფორმულის თანახმად

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

სადაც ξ მოთავსებულია a და x წერტილებს შორის. რაკი $f(a)=0$, $g(a)=0$, ამიტომ გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{7.2}$$

ცხადია, თუ $x\to a$, მაშინ $\xi\to a$. პირობის თანახმად არსებობს

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ამიტომ

$$\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

და (7.2) ტოლობის თანახმად მართებულია (7.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა ცნობილია ლოპიტალის (G. L'Hospital) თეორემის სახელწოდებით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. შეიძლება (7.1) ტოლობის მარცხენა ნაწილის ზღვარი არსებობდეს და არ არსებობდეს მარჯვენა ნაწილის ზღვარი. მართლაც,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0,$$

მაგრამ წარმოებულთა ფარდობა არის

$$\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

რომლის ზღვარი არ არსებობს, როდესაც $x\to 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

ამოხსნა. როდესაც $x \to 0$, მაშინ მრიცხველიც და მნიშვნელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. მაშასადამე, გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის თეორემის თანახმად

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x}=1.$$

თეორემა 14. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია $[a,+\infty[$ შუალედში, ამასთანავე $g'(x)\neq 0$ და $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, მაშინ არსებობს აგრეთვე ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.3}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=\frac{1}{t}$. როდესაც $x\to+\infty$, მაშინ $t\to 0$ და

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0+} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to 0+} g\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

ლოპიტალის თეორემის თანახმად გვექნება

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)}$$

მაგრამ

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ამრიგად, მართებულია (7.3) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურ ფორმულას მივიღებთ იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც $x \to -\infty$.

მე-13 თეორემის რამდენჯერმე გამოყენების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ზოგადი წესი: თუ

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f'(x)=\ldots=\lim_{x\to a} f^{(n)}(x)=0,$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} g'(x)=\ldots=\lim_{x\to a} g^{(n)}(x)=0$$

და არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}$.

ამოხსნა. აქ ჩვენ გვაქვს $\dfrac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. გამოვიყენოთ ლოპიტალის თეორემა. გვაქვს

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{e^x-1}=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}.$$

როგორც ვხედავთ, ლოპიტალის თეორემის ერთხელ გამოყენებამ ვერ მიგვიყვანა ამოცანის ამოხსნამდე. ლოპიტალის თეორემა კიდევ გამოვიყენოთ, გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}=3.$$

2°. $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობები. მართებულია შემდეგი

თეორემა 15. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია a წერტილის რაიმე გაჩხვლეტილ მიდამოში და $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$, თუ არსე-

ბობს $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (სასრული ან უსასრულო), მაშინ იარსებებს აგრეთვე $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ და ადგილი ექნება ტოლობას

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.4}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $K = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ არის სასრული რიცხვი. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $a-\delta < x < a+\delta$, $x \neq a$ პირობას, გვექნება

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = K + \alpha_1, \quad \text{სადაც } |\alpha_1| < \varepsilon. \tag{7.5}$$

ავიღოთ რაიმე $[x, c]$ სეგმენტი, რომელიც ძევს $]a, a+\delta[$ ინტერვალში. ამ სეგმენტზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ კოშის თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < c,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \dfrac{g(c)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(c)}{f(x)}}. \tag{7.6}$$

რადგანაც

$$\lim_{x\to a} \frac{1 - \dfrac{g(c)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(c)}{f(x)}} = 1,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta < \delta$, რომ x ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $a < x < a+\eta$ პირობას, ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\frac{1-\dfrac{g(c)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(c)}{f(x)}}=1+\alpha_2, \quad \text{სადაც } |\alpha_2|<\varepsilon. \tag{7.7}$$

ამის შემდეგ, (7.5) და (7.7) ფორმულების დახმარებით (7.6) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)}-K=K\alpha_2+\alpha_1(1+\alpha_2),$$

საიდანაც

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<(|K|+\varepsilon+1)\,\varepsilon, \quad a<x<a+\eta.$$

აქედან კი ჩანს, რომ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to a}\frac{f(r)}{g(x)}=K.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია, როდესაც K სასრულია.

ახლა გადავიდეთ იმ შემთხვევის განხილვაზე, როცა

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty.$$

დავამტკიცოთ, რომ (7.4) ტოლობა კვლავ მართებულია. მართლაც, უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

ამრიგად, უკანასკნელი შემთხვევა მიიყვანება უკვე განხილულ შემთხვევაზე, რომლის თანახმად გვექნება

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია მთლიანად.

თუ $\lim\limits_{x\to a}|f'(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}|g'(x)|=+\infty$, მაშინ უნდა განვიხილოთ $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ ფარდობა იმ დაშვებით, რომ $f'(x)$ და $g'(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ზემოდამტკიცებული თეორემის პირობებს. მაშინ თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$, იარსებებს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ მესამე რიგის წარმოებულების ფარდობა და ა. შ.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ თუ $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=+\infty$ და არსებობს $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ გვაქვს $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა. წარმოებულთა ფარდობის ზღვარია

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}:\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin 2x}{2\cos 2x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\sin x}=1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ გვაქვს $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის წესის გამოყენება გვაძლევს

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

3°. 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ისეთია, რომ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ და $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$. მაშინ $f(x)\,g(x)$ ნამრავლი $x = a$ წერტილზე მოგვცემს $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობას. ასეთი სახის განუსაზღვრელობის გახსნა ხერხდება ისევ ლოპიტალის წესით. მართლაც, გვაქვს

$$\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$

აქედან ჩანს, რომ $0.\infty$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა დაიყვანება $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე. შესაძლოა $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა დავიყვანოთ $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობაზეც. ამისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ შემდეგნაირი გარდაქმნა:

$$\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

უკანასკნელ განუსაზღვრელობას კი გავხსნით ისევ ლოპიტალის წესით.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to a} \left[(e^a - e^x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right].$$

ამოხსნა. აქ გვაქვს $0.\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, გვექნება

$$\lim_{x\to a} \left[(e^a - e^x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right] = \lim_{x\to a} \frac{e^a - e^x}{\operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{2a}} =$$

$$= \frac{2a}{\pi} \lim_{x\to a} \frac{e^x}{\operatorname{cosec}^2 \dfrac{\pi x}{2a}} = \frac{2ae^a}{\pi}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ლოპიტალის წესის გამოყენება გვაძლევს

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)\ln\sqrt{\frac{2x-3}{3}}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{3}{2}}\left[(2x-3)\ln\left(\frac{2}{3}x-1\right)\right]=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\ln\left(\frac{2}{3}x-1\right)}{\frac{1}{2x-3}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(2x-3)^2}{(2x-3)}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{3}{2}}(2x-3)=0.$$

4°. $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$. თუ აქ უშუალოდ გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობას. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაშიც ზღვარის გამოთვლა შესაძლოა დავიყვანოთ $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე. მართლაც,

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ლოპიტალის წესის გამოყენება გვაძლევს

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{5}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, გვექნება

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 9. ლოპიტალის წესის თანახმად გვექნება

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x-1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\sin^2(x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\sin^2(x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\sin^2(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)+\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2-\sin^2(x-1)}{(x-1)^2\sin^2(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)-\sin 2(x-1)}{2(x-1)\sin^2(x-1)+(x-1)^2\sin 2(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos 2(x-1)}{\sin^2(x-1)+2(x-1)\sin 2(x-1)+(x-1)^2\cos 2(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 1}\frac{2}{\left(\dfrac{x-1}{\sin(x-1)}\right)^2\cos 2(x-1)+1+4(x-1)\operatorname{ctg}(x-1)}=\frac{5}{6}.$$

5°. 1^∞ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ისეთია, რომ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. მაშინ $y=[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია, როცა $x=a$, მოგვცემს 1^∞ სახის განუსაზღვრელობას. მისი გახსნისათვის წინასწარ y გავალოგარითმოთ:

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

და შევნიშნოთ, რომ $\ln y$, როცა $x=a$ გვაძლევს $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობას. ასეთი განუსაზღვრელობის გახსნა ზემოთ შევისწავლეთ.

მაგალითი 10. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\ln y = x \ln \cos \sqrt{2ax^{-1}}.$$

საიდანაც

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} (x \ln \cos \sqrt{2ax^{-1}}) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \cos \sqrt{2ax^{-1}}}{x^{-1}} = -\sqrt{\frac{a}{2}} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{ctg}\sqrt{2ax^{-1}}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{2ax^{-1}}}{x^{-1}} = -a \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sin \sqrt{2ax^{-1}}}{\sqrt{2ax^{-1}}} \right)^2 = -a.$$

ამრიგად,

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \ln \lim_{x\to\infty} y = -a.$$

აქედან

$$\lim_{x\to\infty} y = e^{-a},$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos \sqrt{\frac{2a}{x}} \right)^x = e^{-a}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 11. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} \ln\left(2 - \frac{x}{a} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(2 - \frac{x}{a} \right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \lim_{x\to a} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2a}}{2a - x} = \frac{2}{\pi}.$$

ამრიგად,

$$\lim_{x\to a} y = \exp\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1}.$$

6°. ∞^0 და 0^0 სახის განუსაზღვრელობები. ვთქვათ, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, მაშინ $[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია $x = a$ წერტილში გვაძლევს ∞^0 სახის განუსაზღვრელობას, რომლის გახსნა დაიყვანება $\frac{\infty}{\infty}$ სახის (ან

[1] $\exp f(x) = e^{f(x)}$.

$\frac{0}{0}$ სახის$\Big)$ განუსაზღვრელობის გახსნამდე შემდეგი გარდაქმნის დახმარებით:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\exp\left(\lim_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{1:g(x)}\right)=\exp\left(\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1:\ln f(x)}\right).$$

თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, მაშინ $[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია $x=a$ წერტილში გვაძლევს 0^0 სახის განუსაზღვრელობას, რომლის გახსნა ხდება იმავე ფორმულით.

როგორც ვხედავთ 1^∞, ∞^0, 0^0 სახის განუსაზღვრელობათა გახსნა ხდება ერთი და იმავე წესით. საჭიროა ამ შემთხვევაში $[f(x)]^{g(x)}$ ფუნქცია წინასწარ გავალოგარითმოთ და შემდეგ ვაწარმოოთ განუსაზღვრელობის გახსნა ზემოთ მოყვანილი ფორმულის მიხედვით.

მაგალითი 12. ლოპიტალის წესის თანახმად

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\exp\left(-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1:\sin x}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\right)=e^0=1.$$

მაგალითი 13. ლოპიტალის წესი გვაძლევს

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=\exp\left(-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\right)=e^0=1.$$

მაგალითი 14. ლოპიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$\lim_{x\to 0}[\ln(1-x)]^{\ln(1-x)}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln(1-x)}{1:\ln(1-x)}\right)=$$

$$=\exp\left(-\lim_{x\to 0}\ln(1-x)\right)=e^0=1.$$

მაგალითი 15. თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, გვექნება

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x}\right)=$$

$$=\exp\left(-\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\right)=e^0=1.$$

სავარჯიშო

1. შეამოწმეთ როლის თეორემა $f(x)=2x^2-9x+10$ და $g(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$ ფუნქციებისათვის.

2. $f'(x)$ წარმოებულის რომელი ფესვია მოთავსებული $f(x)=4x^3+x^2-4x-1$ ფუნქციის $x=1$ და $x=-1$ ფესვებს შორის?

3. რატომ არ აქვს ფესვი $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-4$ ფუნქციის წარმოებულს $x=8$ და $x=-8$ ფესვებს შორის?

4. შეამოწმეთ კოშის თეორემა [1; 4] შუალედში $f(x)=x^2-2x+3$ და $\varphi(x)=x^3-7x^2+20x-5$ ფუნქციებისათვის. გააკეთეთ გამომდინარე დასკვნა.

5. გამოიყენეთ ლაგრანჟის თეორემა $f(x)=x^3+5x-2$ ფუნქციისათვის (1; 4) შუალედში.

6. დაამტკიცეთ, რომ

$$2\arcsin\frac{x}{a}+\pi=4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},$$

სადაც $|x|<a$.

7. მოძებნეთ e^x ფუნქციისაგან განსხვავებული ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომლის წარმოებულია ისევ $f(x)$.

ლოპიტალის თეორემის გამოყენებით გამოთვალეთ ზღვრები:

8. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x-a}$; პასუხი: ma^{m-1}.

9. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-c)^m-(a-c)^m}{x-a}$; პასუხი: $m(a-c)^{m-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^4-4x^2+3}$; პასუხი: $\frac{3}{4}$.

11. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-10x^2+8}{x^3-6x+4}$; პასუხი: $\frac{20}{3}$.

12. $\lim\limits_{x\to c}\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$; პასუხი: $\frac{a}{b}$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{x^n-a^n}$; პასუხი: $\frac{2}{n(n-1)a^{n-3}}$

14. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^2x-ax^2+a^3}{x^2-a^2}$; პასუხი: $2a$.

15. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^n - x^n}{\operatorname{tg} a^n - \operatorname{tg} x^n}$; პასუხი: $\cos^2 a^n$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; პასუხი: $\dfrac{1}{2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x^2+2ax}}$; პასუხი: $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{a-\sqrt{a^2-x^2}}$; პასუხი: $2a$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$; პასუხი: $\dfrac{1}{na^{n-1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{(x^n-a^n)^m}}{\sqrt[3]{(x-a)^m}}$; პასუხი: 0, როცა $m>0$; ∞, როცა $m<0$.

21. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$; პასუხი: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$; პასუხი: $\dfrac{16}{9}a$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{arc\,tg} x}$; პასუხი: 1.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{xa^x}$; პასუხი: $\ln a$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x+b^x-2c^x}{\lg(1-x)}$; პასუხი: $\lg\dfrac{c^2}{ab}$.

26. $\lim\limits_{x\to \frac{4}{5}} \dfrac{5x-4}{\sin(5x-4)}$; პასუხი: 1.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x+e^{-x}-2)\sec x}{x^2}$; პასუხი: 1.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\pi-x)}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x}{1-x^2}}$; პასუხი: $-\dfrac{1}{2}$.

29. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a-x}{\sqrt{1-\cos(a^2-x^2)}}$; პასუხი: $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,a}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+1-e^{2x}-x}{e^{2x}-1}$; პასუხი: -1.

31. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$; პასუხი: 1.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\sin ax-b^x\sin bx}{e^x\sin cx-d^x\sin dx}$; პასუხი: $\dfrac{a-b}{c-d}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\cos^3 x-3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}$; პასუხი: $\dfrac{9}{4}$.

34. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; პასუხი: ∞.

35. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; პასუხი: 1.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{4x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$; პასუხი: $\dfrac{\pi^2}{8}$.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{a+b\ln\sin x}$; პასუხი: $\dfrac{1}{b}$;

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{a+cx}$; პასუხი: $\dfrac{1}{c}$.

39. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}(2m-1)x}{\operatorname{tg}x}$; პასუხი: $\dfrac{1}{2m-1}$ (m—მთელია).

40. $\lim\limits_{x\to a^2}\dfrac{\ln(a-\sqrt{x})}{m-\dfrac{1}{x-a^2}}$; პასუხი: 0.

41. $\lim\limits_{x\to a}\left(\arccos\dfrac{x}{a}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right)$; პასუხი: ∞.

42. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}-\lg\frac{a}{x}}{\left(\frac{a+m}{a}\right)^{\frac{1}{x}}}-\frac{\ln\operatorname{arc\,tg} x}{\ln\operatorname{arc\,tg} nx}+\frac{\ln x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right];$$

პასუხი: ∞.

43. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\operatorname{ctg} x)$; პასუხი: 1.

44. $\lim\limits_{x\to 1}[(1-x)\ln(1-x)]$; პასუხი: 0.

45. $\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{cosec} x\ln(1-x)]$: პასუხი: -1.

46. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sec\frac{\pi x}{2}\ln\frac{1}{x}\right)$; პასუხი: $\frac{2}{\pi}$.

47. $\lim\limits_{x\to a}\left[\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right]$; პასუხი: $\frac{2}{\pi}$.

48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg} 2x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$; პასუხი: $\frac{1}{2}$.

49 $\lim\limits_{x\to a}\left[(e^a-e^x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right]$; პასუხი: $\frac{2ae^a}{\pi}$.

50. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)$; პასუხი: $\frac{1}{5}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; პასუხი: $\frac{2}{3}$.

52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{a}{x^a-1}\right)$; პასუხი: $\frac{a}{2}$.

53. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{2}{x}+\frac{3}{e^x-1}\right]$; პასუხი: -1.

54. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2-x-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\sin^2(x-1)}\right]$; პასუხი: $\frac{5}{6}$

55. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{2x}\right]$; პასუხი: -1.

56. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right]$; პასუხი: $\dfrac{\pi^2}{6}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right]$; პასუხი: $\dfrac{\pi^2}{8}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}\right]$; პასუხი: 1.

59. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$; პასუხი: 1.

60. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; პასუხი: 1.

61. $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1-x)]^{\ln(1-x)}$; პასუხი: 1.

62. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$; პასუხი: 1.

63. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}\right]$; პასუხი: 1.

64. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac{2a}{x}}\right)^{x}$; პასუხი: e^{-a}.

65. $\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{a}}$; პასუხი: 1.

66. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; პასუხი: $e^{2/\pi}$

67 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^3 x}$; პასუხი: 0.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; პასუხი: 1.

69. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$: პასუხი: 1.

70. $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; პასუხი: 1.

§ 8. ტეილორის და მაკლორენის ფორმულები

ვთქვათ, $[c, d]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია $n+1$-ჯერ დიფერენცირებადია მოცემულ სეგმენტზე. ავიღოთ ამ სეგმენტზე ნებისმიერი ორი a და x წერტილი, $a<x$, და განვიხილოთ M რიცხვი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ტოლობიდან

$$f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-$$

$$-\ldots-\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)=M(x-a)^p, \tag{8.1}$$

სადაც p რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია.

ავაგოთ შემდეგი სახის დამხმარე ფუნქცია:

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-$$

$$-\ldots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-M(x-t)^p, \tag{8.2}$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$\varphi'(t)=Mp(x-t)^{p-1}-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t). \tag{8.3}$$

$\varphi(t)$ ფუნქცია (a, x) შუალედზე დიფერენცირებადია და როგორც (8.1) და (8.2) ტოლობებიდან ჩანს, $\varphi(x)=\varphi(a)=0$. ამრიგად, $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ როლის თეორემის თანახმად არსებობს a და x წერტილებს შორის ისეთი ξ წერტილი, რომ $\varphi'(\xi)=0$. მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ (8.3) ტოლობას, გვექნება

$$Mp(x-\xi)^{p-1}-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)=0.$$

აქედან

$$M=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

ახლა (8.1) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x), \tag{8.4}$$

სადაც

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^p\,(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}\,f^{(n+1)}(\xi),\quad a<\xi<x.$$

(8.4) ფორმულას ეწოდება ტ ე ი ლ ო რ ი ს ფორმულა, $R_n(x)$-ს კი—ტეილორის ფორმულის დ ა მ ა ტ ე ბ ი თ ი წ ე ვ რ ი.

ვინაიდან $a<\xi<x$, ამიტომ ξ რიცხვი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $\xi=a+\theta\,(x-a)$, სადაც $0<\theta<1$. მაშასადამე, $R_n(x)$ დამატებითი წევრი მიიღებს სახეს

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}\,(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}\,f^{(n+1)}\,[a+\theta(x-a)].\qquad(8.5)$$

$R_n(x)$-ს, რომელიც განსაზღვრულია (8.5) ფორმულით, ეწოდება ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრი შ ლ ე მ ი ლ ხ ი ს **(Schlömilch)** სახით.

თუ $p=1$, მივიღებთ დამატებით წევრს კ ო შ ი ს სახით

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}\,(1-\theta)^n}{n!}\,f^{(n+1)}\,[a+\theta(x-a)].$$

თუ $p=n+1$, (8.5) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}\,[a+\theta(x-a)].$$

ეს არის დამატებითი წევრი ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს სახით.

ფუნქციას $f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$ ეწოდება ტ ე ი ლ ო რ ი ს n-ური ხ ა რ ი ს ხ ი ს მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ი (აქ იგულისხმება, რომ $f^{(n)}(a)\neq 0$).

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x-a=h$, ტეილორის ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

სადაც დამატებითი წევრი შლემილხის სახით იქნება

$$R_n=\frac{h^{n+1}\,(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}\,f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

კოშის სახით იქნება

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\,f^{(n+1)}\,(a+\theta h),$$

ლაგრანჟის სახით კი

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $[c, d]$ სეგმენტი შეიცავს ნულს და ვიგულისხმოთ, რომ $a=0$. მაშინ ტეილორის (8.4) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n, \quad (8.6)$$

რომელსაც მ ა კ ლ ო რ ე ნ ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ეწოდება. ამ ფორმულაში დამატებითი წევრი კოშის და ლაგრანჟის სახით შესაბამისად ასე ჩაიწერება

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x),$$

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x)=P(x)$ არის n ხარისხის მრავალწევრი

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

მაშინ ელემენტარული გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ მისი დაშლა $x-a$ სხვაობის ხარისხების მიხედვით იქნება

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (8.7)$$

კერძოდ, თუ $a=0$, მაშინ

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (8.8)$$

უკანასკნელ (8.7) და (8.8) ფორმულებს, შესაბამისად, უწოდებენ ტეილორის და მაკლორენის ფორმულებს მრავალწევრებისათვის.

§ 9. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა მაკლორენის ფორმულით

მოვიყვანოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით.

1. $f(x)=e^x$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს დ ა შ ლ ა. ვინაიდან $f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$, ამიტომ $f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$ და, თანახმად (8.6) ფორმულისა, გვექნება

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}. \qquad (9.1)$$

აქ დამატებითი R_n წევრი აღებულია ლაგრანჟის სახით. θ დამოკიდებულია აგრეთვე n-ზე.

2. $f(x) = \sin x$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს დ ა შ ლ ა. აქ $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0, \ldots, f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

მაშასადამე, (8.6) ფორმულა გვაძლევს

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin n\frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right].$$

თუ n კენტია, ე. ი. $n = 2k+1$, მაშინ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x), \qquad (9.2)$$

სადაც

$$R_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sin\theta x.$$

თუკი n ლუწია, ე. ი. $n = 2k$, მაშინ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x), \qquad (9.3)$$

სადაც

$$R_{2k}(x) = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

3. $f(x) = \cos x$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს დ ა შ ლ ა. ამ ფუნქციისათვის გვაქვს:

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1, \ldots, f^{(n)}(0)=\cos n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + x\right],\ f^{(n+1)}(\theta x) = \cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right].$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (8.6) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} \cos n \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left[(n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right].$$

თუ $n=2k$, მაშინ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta x. \tag{9.4}$$

თუკი $n=2k+1$, მაშინ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x.$$

4. $f(x) = \ln (1+x)$ ფუნქციის დაშლა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებულები:

$$f(x) = \ln (1+x), \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}, \qquad f'''(0) = 2!,$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \qquad f^{(4)}(0) = -3!,$$

. . . .

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

თუ გამოთვლილ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (8.6) ფორმულაში, გვექნება

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \tag{9.5}$$

აქ დამატებითი წევრი R_n აღებულია ლაგრანჟის სახით.

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$ *ფუნქციის დაშლა, როდესაც* α *ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.* ელემენტარული გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$f(x)=(1+x)^\alpha, \qquad f(0)=1,$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0)=\alpha,$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \qquad f''(0)=\alpha(\alpha-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)],$$

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n+1},$$

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n+1}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (8.6) ფორმულაში, გვექნება

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+$$

$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n+1}. \tag{9.6}$$

6. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ *ფუნქციის დაშლა.* მისი გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad \text{ანუ} \quad (1+x^2)f'(x)=1.$$

მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი n-ჯერ გავაწარმოოთ მიმდევრობით, ამასთან მარცხენა ნაწილის გამოსახულების გაწარმოებისათვის გამოვიყენოთ ლეიბნიცის ფორმულა, გვექნება

$$(1+x^2)\, f^{(n+1)}(x)+2nx\, f^{(n)}(x)+n(n-1)\, f^{(n-1)}(x)=0.$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $x=0$ მნიშვნელობას, მივიღებთ შემდეგი სახის რეკურენტულ ფორმულას

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\, f^{(n-1)}(0). \tag{9.7}$$

ვინაიდან $f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, ამიტომ $f''(0)=0$ და (9.7) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ ფუნქციის ყველა ლუწი რიგის წარმოებულები $x=0$ წერტილზე ნულის ტოლია: $f^{(2m)}(0)=0$. გარდა ამისა, ვინაიდან $f'(0)=1$, ამიტომ მოცემული ფუნქციის კენტი რიგის წარმოებულებისათვის მივიღებთ

$f^{(2m+1)}(0)=-2m(2m-1)\, f^{(2m-1)}(0)$, საიდანაც $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!$

ამის შემდეგ მოცემული ფუნქციის დაშლა ასე დაიწერება

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1}+R_{2m-1}(x), \tag{9.8}$$

სადაც $R_{2m-1}(x)$, თუ $x\to 0$, უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე x^{2m}.

თუ (8.6) ფორმულაში უკუვაგდებთ დამატებით წევრს, მივიღებთ $f(x)$ ფუნქციისათვის მიახლოებით ფორმულას

$$f(x)\simeq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \tag{9.9}$$

რომლის ღირსება იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული ფუნქცია (მიახლოებით) შეცვლილია მარტივი ფუნქციით — n-ური ხარისხის მრავალწევრით, ამასთან ცდომილება ტოლია უკუგდებული დამატებითი წევრისა. მაგალითად, თუ $f(x)$ ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებული შემოსაზღვრულია რაიმე M რიცხვით, მაშინ

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

და $R_n(x)$ ნულისაკენ მიისწრაფის, როცა $n\to\infty$.

ზემონათქვამის გამო $f(x)=\sin x$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\sin x\simeq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!},$$

ხოლო

$$|R_{2n}(x)|=\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right]\right|\leqslant\frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!}.$$

$f(x)=\cos x$ ფუნქციის მიახლოებითი მრავალწევრი იქნება

$$\cos x\simeq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

სადაც დამატებითი წევრის შეფასებას აქვს შემდეგი სახე:

$$|R_{2n+1}(x)|=\left|(-1)^{m+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x\right|\leqslant\frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!}.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

დაშალეთ მაკლორენის ფორმულით შემდეგი ფუნქციები:

1. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.
2. $f(x)=\sqrt{1+x}$.
3. $f(x)=3^x$.
4. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
5. $f(x)=\arccos x$.
6. $f(x)=e^{\operatorname{arc\,tg} x}$.
7. $f(x)=e^{x\sin x}$.
8. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}\ln(1+x)$.
9. $f(x)=\sin^3 x$.
10. $f(x)=e^{\sin x}$.
11. $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.
12. $f(x)=(1+x)^m$.
13. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}}$.

14. $f(x)=\operatorname{tg} x.$

15. $f(x)=\arcsin x.$

16. $f(x)=\operatorname{arctg} 2x.$

17. $f(x)=a^{\arcsin x}.$

18. $f(x)=\ln(1+\sin x).$

19. $f(x)=\cos^3 x.$

20. $f(x)=\operatorname{tg}^4 x.$

21. $f(x)=e^{\cos x}.$

22. $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}.$

23. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x}).$

§ 10. ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და მინიმუმი

მათემატიკის, ფიზიკის, ტექნიკისა და სხვა მეცნიერებათა მრავალი ამოცანა დაკავშირებულია ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნასთან. ასეთი ამოცანების ერთი ნაწილი შეისწავლება დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით.

ვთქვათ, მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტის შიგა $x=x_0$ წერტილში აღწევს *მაქსიმუმს*, თუ ნებისმიერი Δx ნაზრდისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე საკმარისად მცირეა, ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0.$$

x_0 წერტილს ფუნქციის *მაქსიმუმის წერტილი* ეწოდება.

ასევე ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტის შიგა $x=x_1$ წერტილში აღწევს *მინიმუმს*, თუ ნებისმიერი Δx ნაზრდისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე საკმარისად მცირეა, ადგილი აქვს უტოლობას

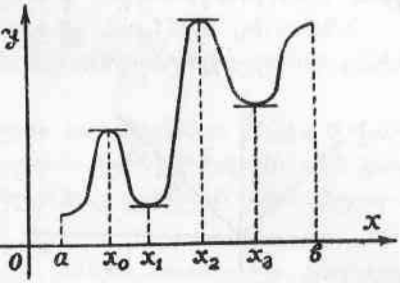
$$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\geqslant 0.$$

x_1 წერტილს ფუნქციის *მინიმუმის წერტილი* ეწოდება.

მოყვანილი განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა მაქსიმუმის x_0 წერტილში უდიდესია იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელიც მას აქვს x_0 წერტილის *გარკვეულ* მიდამოში.

ასევე ფუნქციის მნიშვნელობა მინიმუმის x_1 წერტილში უმცირესია იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელსაც იგი მიიღებს x_1 წერტილის გარკვეულ მიდამოში.

როგორც ვხედავთ, ზემომოყვანილი ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების განსაზღვრა შედარებითია და, რათქმა უნდა, იმას არ ნიშნავს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობანი მაქსიმუმის x_0 წერტილში და მინიმუმის x_1 წერტილში, შესაბამისად, ამ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობებია მთელ $[a, b]$ სეგმენტზე.



ნახ. 59.

იმ წერტილებს, რომელზედაც $f(x)$ ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი აქვს, ეწოდება ამ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ეწოდება ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

59-ე ნახაზზე გამოსახულ ფუნქციას $x=x_0$ და $x=x_2$ წერტილებში აქვს მაქსიმუმი, $x=x_1$ და $x=x_3$ წერტილებში კი მინიმუმი.

ცხადია, ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ექსტრემუმის წერტილების განლაგება $[a, b]$ სეგმენტზე ერთგვარ დახასიათებას გვაძლევს ფუნქციის ქცევის შესახებ ამ სეგმენტზე.

ახლა შევისწავლოთ წესი იმ წერტილების მოძებნისა, რომელზედაც ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი.

თეორემა 16. თუ x წერტილში წარმოებად $f(x)$ ფუნქციას ამავე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x)=0$.

ეს თეორემა ფერმას თეორემის შედეგია.

ამრიგად, წარმოებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი რიგის წარმოებულის ნულთან ტოლობა.

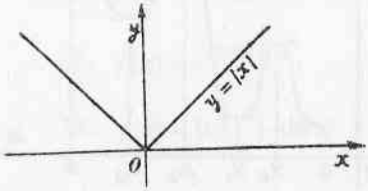
გეომეტრიული თვალსაზრისით წარმოებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკის მხები ექსტრემუმის შესაბამის წერტილში Ox ღერძის პარალელურია.

ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემალური მნიშვნელობა აგრეთვე იმ წერტილში, რომელზედაც წარმოებული არა აქვს. მაგალითად,

$y=|x|$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში წარმოებული არა აქვს, მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი (ნახ. 60).

განსაზღვრა 1. x წერტილს, რომელზედაც $f'(x)=0$, ფუნქციის სტაციონარული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ სტაციონარულ წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის, რომლებზედაც ფუნქციას წარმოებული არა აქვს.



ნახ. 60.

განსაზღვრა 2. წერტილს, რომელზედაც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, ფუნქციის კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილის განსაზღვრას შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი უნდა ვეძებოთ კრიტიკულ წერტილებს შორის.

ისმის კითხვა: აღებული კრიტიკული წერტილი არის თუ არა ექსტრემუმის წერტილი და თუ არის, რომელ ექსტრემუმთან გვაქვს საქმე, მინიმუმთან თუ მაქსიმუმთან? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს ექსტრემუმის ორი კრიტერიუმი, რომლებსაც ქვემოთ დავამტკიცებთ.

თეორემა 17. თუ კრიტიკული x_0 წერტილის რაიმე გაჩხვლეტილ მიდამოში

$$f'(x)>0, \text{ როდესაც } x<x_0, \qquad f'(x)<0, \text{ როდესაც } x>x_0, \tag{10.1}$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ

$$f'(x)<0, \text{ როდესაც } x<x_0, \qquad f'(x)>0, \text{ როდესაც } x>x_0, \tag{10.2}$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

დამტკიცება. ვთქვათ, x_0 წერტილის რაიმე გაჩხვლეტილ მიდამოში შესრულებულია (10.1) პირობა. მაშინ ამ მიდამოში x_0 წერტილის მარცხნივ ფუნქცია ზრდადია, მარჯვნივ კი კლებადი. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში შესრულებულია (10.2) პირობა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ x-ის x_0 წერტილზე გავლისას $f'(x)$ წარმოებული ნიშანს არ იცვლის, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი, ვინაიდან ამ წერტილის რომელიღაც მიდამოში $f(x)$ იქნება ზრდადი ან კლებადი.

დამტკიცებულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის მოძებნის შემდეგი წესი:

1) ვიპოვოთ $f'(x)$ წარმოებული და ამოვხსნათ $f'(x)=0$ განტოლება. ამონახსნები გვაძლევს სტაციონარულ წერტილებს. ამის გარდა, მოვძებნოთ ის წერტილები, რომლებშიაც ფუნქციას წარმოებული არა აქვს;

2) შევამოწმოთ წარმოებულის ნიშანი თითოეული კრიტიკული წერტილისათვის ამ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ;

3) წარმოებულის ნიშნების მიხედვით მე-17 თეორემის საფუძველზე ირკვევა ექსტრემუმის საკითხი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯერ მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$f'(x)=x^2-5x+6.$$

ეს წარმოებული გავუტოლოთ ნულს

$$x^2-5x+6=0.$$

აქედან $x_1=2$, $x_2=3$.

ამრიგად, მოცემულ ფუნქციას აქვს მხოლოდ ორი კრიტიკული წერტილი. გამოვიკვლიოთ ახლა $f'(x)=(x-2)(x-3)$ წარმოებულის ქცევა კრიტიკული წერტილების მცირე მიდამოში.

ავიღოთ კრიტიკული წერტილი $x_1=2$. თუ x ნაკლებია ორზე, მაშინ წარმოებული დადებითია, ხოლო თუ x მეტია ორზე და ნაკლებია სამზე, მაშინ წარმოებული უარყოფითია. მაშასადამე, როცა x ცვლადი მარცხნიდან მარჯვნივ გაივლის $x=2$ წერტილს, მაშინ ფუნქციის წარმოებული დადებით ნიშანს იცვლის უარყოფითი ნიშნით. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x=2$ არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და

$$\max f(x)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{5}{2}2^2+6\cdot 2-1=3\frac{2}{3}.$$

ახლა ავიღოთ კრიტიკული წერტილი $x_2=3$. თუ x მეტია ორზე და ნაკლებია სამზე, მაშინ წარმოებული უარყოფითია, ხოლო თუ x მეტია სამზე, მაშინ წარმოებული დადებითია. მაშასადამე, როცა x მარცხნიდან მარჯვნივ გაივლის $x=3$ წერტილს, მაშინ ფუნქციის წარმოებული უარყოფით ნიშანს იცვლის დადებითი ნიშნით. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x=3$ წერტილი არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და

$$\min f(x)=\frac{1}{3}\,3^3-\frac{5}{2}\,3^2+6\cdot 3-1=3\,\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=x^6-6x^4+4x^3+9x^2-12x+4$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$f'(x)=6(x^5-4x^3+2x^2+3x-2)=6(x^2-1)(x-1)^2(x+2).$$

ეს წარმოებული გავუტოლოთ ნულს

$$6(x^2-1)(r-1)^2(x+2)=0.$$

ამ განტოლების ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვებია: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-2$. ამრიგად, ფუნქციას აქვს სამი კრიტიკული წერტილი.

ახლა შევისწავლოთ წარმოებულის ქცევა კრიტიკული წერტილების მცირე მიდამოში.

ავიღოთ კრიტიკული წერტილი $x_1=1$. თუ x მეტია ნულზე და ნაკლებია ერთზე, მაშინ $f'(x)<0$, ხოლო თუ x მეტია ერთზე, მაშინ $f'(x)>0$. მაშასადამე, $x_1=1$ არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და $\min f(x)=1^6-6\cdot 1^4+4\ \ 1^3+9\cdot 1^2-12\cdot 1+4=0$.

ასევე დავრწმუნდებით, რომ $x_2=-1$ არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და $\max f(x)=16$.

დაბოლოს $x_3=-2$ არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და $\min f(x)=0$.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

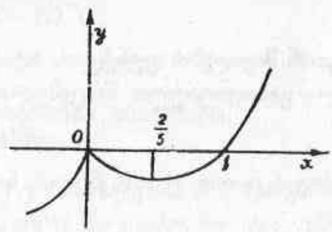
ამოხსნა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს

$$f'(x)=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0.$$

აქედან გვაქვს, რომ $x_1=\frac{2}{5}$ და, გარდა ამისა, $x_2=0$ წერტილში არ არსებობს სასრული წარმოებული. მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას აქვს ორი კრიტიკული წერტილი: $x_1=\frac{2}{5}$ და $x_2=0$. შევნიშნოთ, რომ როცა x ნაკლებია $\frac{2}{5}$-ზე, მაშინ $f'(x)<0$, ხოლო როცა x მეტია $\frac{2}{5}$-ზე, მაშინ $f'(x)>0$. ამრიგად, $x_1=\frac{2}{5}$ არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და

$$\min f(x)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

$x_2=0$ კრიტიკული წერტილის მარცხნივ $f'(x)>0$ (ნახ. 61), ხოლო, თუ x მეტია ნულზე და ნაკლებია $\frac{2}{5}$-ზე, მაშინ $f'(x)<0$. როგორც ვხედავთ $x_2=0$ არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და $\max f(x)=0$.



ნახ. 61.

თეორემა 18. *თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი და $f''(x_0)<0$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ $f''(x_0)>0$, მაშინ აქვს მინიმუმი.*

დამტკიცება. მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

მაგრამ პირობის თანახმად $f'(x_0)=0$. ამიტომ

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}.$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $f''(x_0)>0$. მაშინ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი გაჩხვლეტილი მიდამო, რომელშიაც

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f'(x)>0$, როდესაც $x>x_0$ და $f'(x)<0$, როდესაც $x<x_0$. მე-17 თეორემის თანახმად $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ვღებულობთ ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის მეორე წესს ორჯერ წარმოებადი ფუნქციებისათვის.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $f''(x_0)=0$ და x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები, მაშინ ექსტრემუმის საკითხის გამოკვლევა უნდა ჩავატაროთ პირველი წესით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x-1$ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს:

$$f'(x)=x^2-6x+5=0.$$

აქედან მივიღებთ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილებს: $x_1=1$, $x_2=5$. ახლა გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x)=2x-6.$$

გამოვარკვიოთ უკანასკნელის ნიშანი $x_1=1$ წერტილში:

$$f''(1)=2\cdot 1-6<0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_1=1$ არის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\max f(x)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-3\ 1^2+5\cdot 1-1=\frac{4}{3}.$$

ახლა შევამოწმოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი $x_2=5$ წერტილში. გვაქვს:

$$f''(5)=2\cdot 5-6>0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_2=5$ არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\min f(x)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\ 5-1=-9\frac{1}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ $f(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x$, $x>0$, $a>0$, ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქცია წინასწარ გავალოგარითმოთ:

$$\varphi(x)=\ln f(x)=x(\ln a-\ln x)$$

და შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ექსტრემალურ მნიშვნელობებს მიიღებენ x ცვლადის ერთი და იმავე მნიშვნელობისათვის. მოვძებნოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმი. ამისათვის გავაწარმოოთ იგი და წარმოებული გავუტოლოთ ნულს:

$$\varphi'(x)=\ln a-\ln x-1=0.$$

აქედან მივიღებთ, რომ $x=\frac{a}{e}$. ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქციას და, მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციასაც აქვს ერთადერთი სტაციონარული წერტილი. ახლა მოვძებნოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული: $\varphi''(x)=-\frac{1}{x}$. ვინაიდან $\varphi''\left(\frac{a}{e}\right)=-\frac{e}{a}<0$, ამიტომ $x=\frac{a}{e}$ არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და

$$\max f(x)=e^{\frac{a}{e}}.$$

§ 11. ფუნქციის ექსტრემუმის გამოკვლევა ტეილორის ფორმულის გამოყენებით

თეორემა 19. ვ თ ქ ვ ა თ, $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ა ქ ვ ს $n+1$ რ ი გ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ ი ს რ ა ი მ ე მ ი დ ა მ ო შ ი დ ა ე ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი უ წ ყ ვ ე ტ ი ა x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი, ა მ ი ს გ ა რ დ ა, ვ ი გ უ ლ ი ს ხ მ ო თ, რ ო მ

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0,\quad f^{(n+1)}(x_0)\neq 0. \tag{11.1}$$

თ უ $n+1$ ლ უ წ ი ა დ ა $f^{(n+1)}(x_0)<0$, მ ა შ ი ნ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა ქ ვ ს ლ ო კ ა ლ უ რ ი მ ა ქ ს ი მ უ მ ი, დ ა მ ა ს ა ქ ვ ს ლ ო კ ა ლ უ რ ი მ ი ნ ი მ უ მ ი, რ ო დ ე ს ა ც $f^{n+1}(x_0)>0$. თ უ $n+1$ კ ე ნ ტ ი რ ი ც ხ ვ ი ა, მ ა შ ი ნ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს ა რ ა ა ქ ვ ს ე ქ ს ტ რ ე მ უ მ ი x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $n+1$ ლუწი რიცხვია. $x=x_0$ წერტილის მიდამოში დავშალოთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულის მიხედვით და გავითვალისწინოთ (11.1) ტოლობები, გვექნება

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

სადაც ξ მოთავსებულია x_0 და x შორის. აქ დამატებითი წევრი დაწერილია ლაგრანჟის სახით. მიღებული ტოლობა ასე გადავწეროთ

$$f(x)-f(x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \tag{11.2}$$

რაკი $f^{(n+1)}(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში და $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, ამიტომ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიაც $f^{(n+1)}(x)$ წარმოებულს ექნება $f^{(n+1)}(x_0)$ რიცხვის ნიშანი. ამიტომ, თუ $f^{(n+1)}(x_0)>0$, მაშინ $f^{(n+1)}(\xi)>0$, როდესაც x საკმაოდ ახლოსაა x_0-თან. მაშასადამე, (11.2) ტოლობის მიხედვით $f(x)-f(x_0)>0$, როდესაც x საკმაოდ ახლოსაა x_0-თან. ეს კი ამტკიცებს, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ თუ $f^{(n+1)}(x_0)<0$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი.

ახლა ვთქვათ, რომ $n+1$ კენტი რიცხვია, მაშინ არ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიაც (11.2) ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნიშანს ინარჩუნებდეს. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x.$$

ამ წარმოებულის ერთადერთი ფესვია $x=0$. შემდეგ,

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\quad f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\quad f'''(0)=0,$$
$$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\quad f^{(4)}(0)=4>0.$$

მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთადერთი ექსტრემუმის წერტილი $x=0$: ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი და

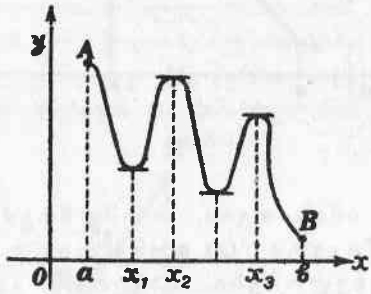
$$\min f(x)=f(0)=4.$$

§ 12. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები

უკანასკნელ ორ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლეთ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის ამოცანა. ახლა გავეცნოთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების საკითხს.

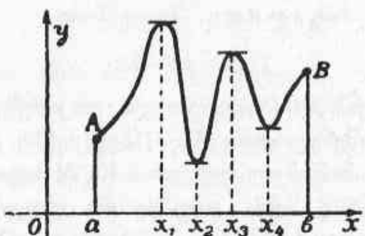
ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია. როგორც ვიცით, ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე ეწოდება მის ყველა მნიშვნელობას შორის უდიდეს რიცხვს. ასევე $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე ეწოდება მის ყველა მნიშვნელობას შორის უმცირეს რიცხვს.

ცხადია, $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მაქსიმუმს ამ სეგმენტზე. ასევე, $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მინიმუმს ამ სეგმენტზე (ნახ. 62). ამ ნახაზზე გამოსახულ ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს a წერტილში, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა b წერტილში. ისიც ცხადია, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილიც იქნება.



ნახ. 62.

ასევე, თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს უმცირესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მინიმუმის წერტილიც იქნება (ნახ. 63). ამ ნახაზზე გამოსახული ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს ლოკალური მაქსიმუმის x_1 წერტილში, ხოლო უმცირეს მნიშვნელობას ლოკალური მინიმუმის x_2 წერტილში.

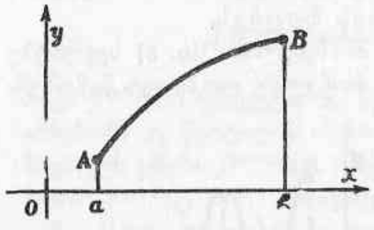


ნახ. 63.

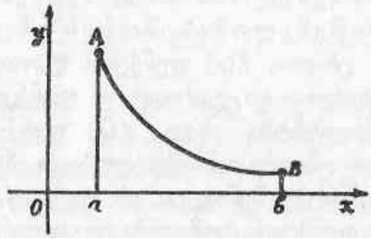
დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და ზრდადი ფუნქცია, მაშინ $f(a)$ და $f(b)$ იქნება შესაბამისად მისი უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე (ნახ. 64). პირიქით, თუ $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი დი კლებადი ფუნქცია, მაშინ $f(a)$ და $f(b)$ იქ-

ნება შესაბამისად მისი უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე (ნახ. 65).

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს მოცემული ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:

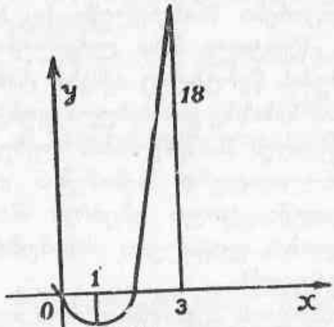


ნახ. 64.



ნახ. 65.

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ [a, b] სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, საჭიროა გამოვთვალოთ მისი ყველა ლოკალური მაქსიმუმები, ყველა ლოკალური მინიმუმები და ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლო წერტილებზე. მოცემულ ყველა რიცხვს შორის უდიდესი იქნება $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი — უმცირესი მნიშვნელობა.



ნახ. 66.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ

$$f(x)=x^3-3x$$

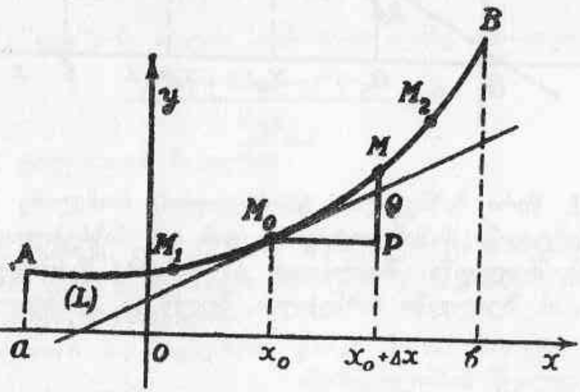
ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობანი [0; 3] სეგმენტზე.

მოცემულ ფუნქციას [0; 3] სეგმენტზე აქვს ერთადერთი ლოკალური მინიმუმის წერტილი $x=1$ და $\min f(x)=-2$. ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის მნიშვნელობანი $x=0$ და $x=3$ წერტილებზე: $f(0)=0$, $f(3)=18$. ამის შემდეგ -2, 0, 18 რიცხვების შედარებით ვრწმუნდებით, რომ მოცემული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 18, უმცირესი კი -2 (ნახ. 66).

§ 13. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა

ფუნქციის თვისობრივი გამოკვლევისათვის, შესაბამისი გრაფიკის აგებისათვის, დიდი მნიშვნელობა აქვს მისი ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნების გამოყოფას, გადაღუნვის წერტილებისა და ასიმპტოტების მოძებნას.

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია $y=f(x)$. ავიღოთ ამ ფუნქციის L გრაფიკის რაიმე x_0 წერტილი, რომლისთვისაც $f'(x_0)$ სასრულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ x_0 აბსცისის შესაბამის M_0 წერტილზე გამავალი L წირის მხები Oy ღერძის პარალელური არ არის. ვიტყვით, რომ L წირი M_0 წერტილში *ჩაზნექილია*, თუ არსებობს L წირის ისეთი M_1M_2 რკალი, რომელიც შეიცავს M_0 წერტილს და მდებარეობს M_0 წერტილზე გამავალი მხებიდან Oy მიმართულების



ნახ. 67.

მხარეს (ნახ. 67). ასევე ვიტყვით, რომ L წირი M_0 წერტილში *ამოზნექილია*, თუ არსებობს L წირის ისეთი M_1M_2 რკალი, რომელიც შეიცავს M_0 წერტილს და მდებარეობს M_0 წერტილზე გამავალი მხებიდან Oy მიმართულების საწინააღმდეგო მხარეს (ნახ. 68).

ადვილი შესამჩნევია, რომ წირის ჩაზნექილობისათვის M_0 წერტილში (ნახ. 67) აუცილებელია და საკმარისი x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში შესრულებული იყოს უტოლობა

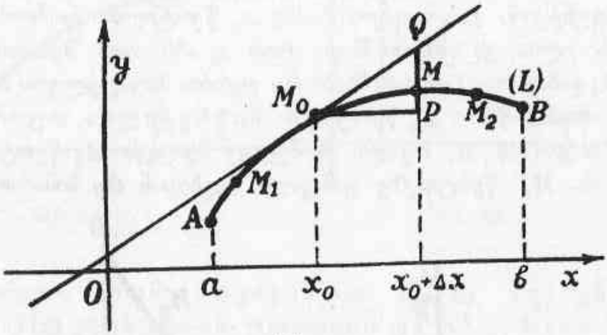
$$\Delta y - dy > 0,$$

სადაც x_0 არის M_0 წერტილის აბსცისი, Δy და dy არის მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი x_0 წერტილში. მართლაც, გვაქვს

$$\Delta y = PM, \ dy = PQ, \ \Delta y - dy > 0.$$

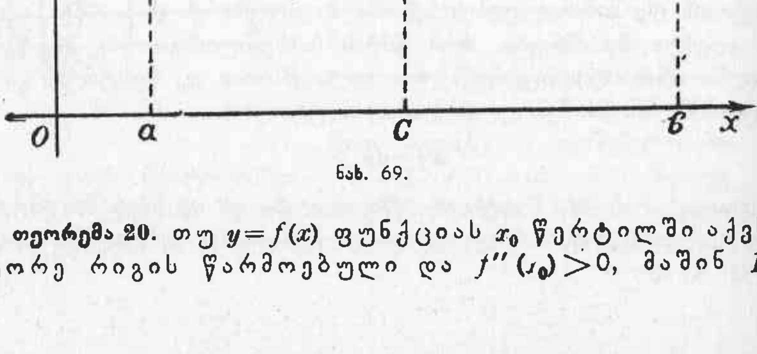
სრულიად ასევე, წირის ამოზნექილობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა M_0 წერტილში (ნახ. 68) იმაში მდგომარეობს, რომ x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში შესრულებული იყოს უტოლობა

$$\Delta y - dy < 0.$$



ნახ. 68.

თუ L წირი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) რომელიმე შუალედის ყოველ წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ იგი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) ამ შუალედში. მაგალითად, 69 ნახაზზე წარმოდგენილი L წირი $[a, c]$ შუალედში ჩაზნექილია, ხოლო $[c, b]$ შუალედში ამოზნექილია.



ნახ. 69.

თეორემა 20. თ უ $y = f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს x_0 წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა ქ ვ ს მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი დ ა $f''(x_0) > 0$, მ ა შ ი ნ L

წირი x_0 წერტილში ჩაზნექილია, ხოლო თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ წირი M_0 წერტილში ამოზნექილია.

დამტკიცება. ვინაიდან $f''(x_0)$ არსებობს, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილის გარკვეულ $]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ მიდამოში დიფერენცირებადი იქნება. ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x f'(x_0+\theta\Delta x),\quad 0<\theta<1.$$

ამავე დროს

$$dy=f'(x_0)\,\Delta x.$$

მაშასადამე,

$$\Delta y-dy=\Delta x[f'(x_0+\theta\Delta x)-f'(x_0)]=$$
$$=\theta(\Delta x)^2\frac{f'(x_0+\theta\Delta x)-f'(x_0)}{\theta\Delta x}. \qquad (13.1)$$

ვინაიდან $f''(x_0)>0$, ამიტომ საკმარისად მცირე Δx-სათვის გვექნება

$$\frac{f'(x_0+\theta\Delta x)-f'(x_0)}{\theta\Delta x}>0$$

და (13.1) ტოლობიდან მივიღებთ

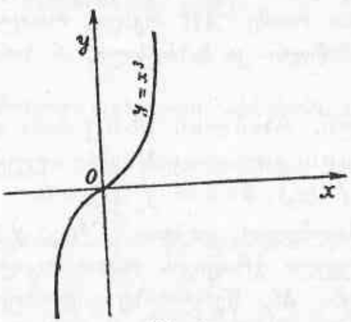
$$\Delta y-dy>0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ L წირი M_0 წერტილში ჩაზნექილია.

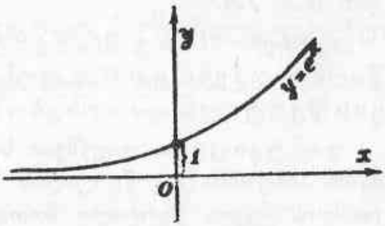
სავსებით ასევე დამტკიცდება, რომ თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ L წირი M_0 წერტილში ამოზნექილია.

მაგალითი 1. მოვძებნოთ $y=x^3$ წირის ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ამოხსნა. ვინაიდან $y''=6x$, ამიტომ როდესაც $x>0$, მაშინ



ნახ. 70.



ნახ. 71.

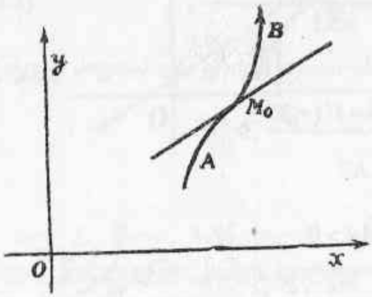
$y''>0$ და, მაშასადამე მოცემული წირი ჩაზნექილია $]0,\infty[$ შუალედში. თუკი $x<0$, მაშინ $y''<0$ და მოცემული წირი ამოზნექილია $]-\infty,0[$ შუალედში (ნახ. 70).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვიკვლიოთ $y=e^x$ წირის ჩაზნექილობასა და ამოზნექილობაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რაკი $y''=e^x$, ამიტომ $y''>0$ მთელ $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. მაშასადამე, მოცემული წირი ჩაზნექილია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში (ნახ. 71).

§ 14. ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. ვიგულისხმოთ, რომ ამ სეგმენტის შიგა x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, ე. ი. არსებობს მოცემული ფუნქციის გრაფიკის მხები M_0 წერტილში, სადაც M_0 წერტილის კოორდინატებია x_0 და $f(x_0)$.



ნახ. 72.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა. M_0 წერტილს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გ ა დ ა ღ უ ნ ვ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ი, თუ რაიმე რკალი, რომელიც M_0 წერტილს შეიცავს, ამ წერტილზე გავლებული მხებიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს.

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ M_0 წარმოადგენს გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს, მაშინ მოიძებნება რაიმე AB რკალი, რომლის AM_0 ნაწილი ამოზნექილია, M_0B ნაწილი კი ჩაზნექილი, ან პირიქით (ნახ. 72).

თეორემა 21. თ უ M_0 წ ე რ ტ ი ლ ი, რ ო მ ლ ი ს ა ბ ს ც ი ს ა ა x_0, წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ს $y=f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს გ რ ა ფ ი კ ი ს გ ა დ ა ღ უ ნ ვ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ს დ ა ა რ ს ე ბ ო ბ ს $f''(x_0)$, მ ა შ ი ნ $f''(x_0)=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f''(x_0)\neq 0$; მაშინ არსებობს M_0 წერტილის შემცველი გრაფიკის ისეთი რკალი, რომლის ყველა წერტილი მოთავსდება M_0 წერტილზე გავლებული მხების ერთ მხარეს და ამიტომ x_0 არ წარმოადგენს გადაღუნვის წერტილს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა x-ის ის მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც მეორე წარმოებული არ არსებობს, ან ნულის ტოლია.

თეორემა 22. თუ $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, ხოლო ამ წერტილის რაიმე მიდამოში $f''(x)$ წარმოებულს აქვს სხვადასხვა ნიშანი $x>x_0$ და $x<x_0$ მნიშვნელობებისათვის, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის M_0 წერტილი გადაღუნვის წერტილია.

დამტკიცება. პირობის თანახმად, არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, რომ $f''(x)$ წარმოებულს აქვს სხვადასხვა ნიშანი, როდესაც $x_0-\delta<x<x_0$ და $x_0<x<x_0+\delta$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\Delta y-dy=[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]-f'(x_0)\,\Delta x$$

გამოსახულება ნიშანს იცვლის Δx ნაზრდთან ერთად, ამასთანავე $|\Delta x|<\delta$. მართლაც, ლაგრანჟის თეორემის ორჯერ გამოყენების შედეგად გვაქვს

$$\Delta y-dy=\Delta x f'(x_0+\theta\Delta x)-f'(x_0)\,\Delta x=$$
$$=\Delta x[f'(x_0+\theta\Delta x)-f'(x_0)]=(\Delta x)^2\,\theta f''(x_0+\theta_1\Delta x),$$

სადაც $0<\theta<1$. აქედან ჩანს, რომ $\Delta y-dy$ სხვაობის ნიშანი იცვლება Δx ნაზრდის ნიშანთან ერთად. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. მოვძებნოთ $y=e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები, ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ამოხსნა. გვაქვს

$$y'=-2xe^{-x^2},\ y''=2(2x^2-1)\,e^{-x^2}.$$

როგორც ვხედავთ, არსებობს მეორე რიგის წარმოებული არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის და იგი ნულის ტოლია $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ და $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ წერტილებში, რაკი

$$y''=2(2x^2-1)\,e^{-x^2}<0,\quad \text{როდესაც}\quad 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ხოლო

$$y''>0,\quad \text{როდესაც}\quad x>\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ამიტომ, 22-ე თეორემის თანახმად $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-0,5}\right)$ წერტილი $y=e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია.

შემდეგ, რადგანაც $y''>0$, როდესაც $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$, ამიტომ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right]$ შუალედში მოცემული გრაფიკი ჩაზნექილია.

ახლა დავადგინოთ y'' წარმოებულის ნიშანი x_2 წერტილის მიდამოში. ცხადია, რომ $y''>0$, როდესაც $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ხოლო $y''<0$, როდესაც $0>x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. მაშასადამე, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ წერტილი არის აგრეთვე $y=e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი. გარდა ამისა, რაკი $y''>0$, როდესაც $-\infty<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ამიტომ $\left[-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ შუალედში მოცემული გრაფიკი ამოზნექილია.

დაბოლოს ცხადია, რომ $y'>0$, როდესაც $x<0$ და, მაშასადამე, $]-\infty, 0[$ შუალედში მოცემული ფუნქცია ზრდადია. გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ $]0, \infty[$ შუალედში მოცემული ფუნქცია კლებადია.

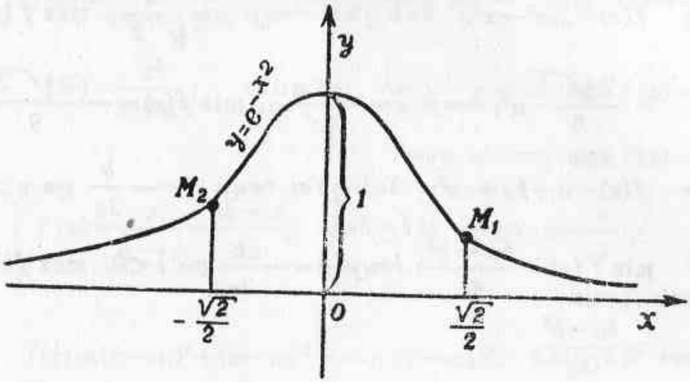
შემდეგ, რადგანაც $f'(0)=0$ და $f''(0)<0$, ამიტომ $x=0$ არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და $\max f(x)=1$. თუ გავითვალისწინებთ $y=e^{-x^2}$ ფუნქციის ზემოთ შესწავლილ თვისებებს, დავრწმუნდებით, რომ მის გრაფიკს აქვს 73-ე ნახაზზე მოყვანილი სახე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვძებნოთ $y=\sqrt[3]{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები, ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქცია უწყვეტია $[-\infty, +\infty]$ შუალედში. ცხადია, რომ $y'_{x=1}=+\infty$, ხოლო თუ $x\neq 1$, გვექნება

$$y'=\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},\quad y''=-\frac{2}{9}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

რადგანაც $y''>0$, როდესაც $x<1$, ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია $]-\infty, 1[$ შუალედში. შემდეგ $y''<0$, როდესაც



ნახ. 73.

$x>1$. მაშასადამე, გრაფიკი ამოზნექილია $]1, +\infty[$ შუალედში. ამრიგად, $M_0(1, 0)$ წერტილი არის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი. გარდა ამისა, ვინაიდან $y'(1)=+\infty$, ამიტომ გრაფიკის $M_0(1, 0)$ წერტილზე გავლებული მხები Oy ღერძის პარალელურია.

სავარჯიშო

მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმი:

1. $f(x)=x^2-2x+3$; პასუხი: როცა $x=1$, $\min f(x)=2$.

2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$;

პასუხი: როცა $x=1$,

$\max f(x)=\frac{7}{2}$; როცა $x=3$, $\min f(x)=1$.

3. $f(x)=x^4-8x^2+2$; პასუხი; როცა $x=0$, $\max f(x)=2$; როცა $x=\pm 2$, $\min f(x)=-14$.

4. $f(x)=x(a-x)$; პასუხი: როცა $x=\frac{a}{2}$, $\max f(x)=\frac{a^2}{4}$.

5. $f(x)=x(a^2-x^2)$; პასუხი: როცა $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\max f(x)=$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$; როცა $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\min f(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

6. $f(x)=a+bx+cx^2$; პასუხი: როცა $x=-\frac{b}{2c}$ და $c>0$,

$\min f(x)=\frac{4a-b^2}{4c}$; როცა $x=-\frac{b}{2c}$ და $c<0$, $\max f(x)=$

$=\frac{4a-b^2}{4c}$.

7. $f(x)=(r+x)(r^2-x^2)$; როცა $x=\frac{r}{3}$, $\max f(x)=\frac{32}{27}r^3$; როცა $x=-r$, $\min f(x)=0$.

8. $f(x)=x^6-6x^4+4x^3+9x^2-12x+4$; პასუხი: როცა $x=1$, $\min f(x)=0$; როცა $x=-2$, $\min f(x)=0$; როცა $x=-1$, $\max f(x)=16$.

9. $f(x)=x(a+x)^2(a-x)^3$; პასუხი: როცა $x=\frac{a}{3}$,

$\max f(x)=\frac{128}{729}a^6$; როცა $x=-a$, $\max f(x)=0$, როცა

$x=-\frac{a}{2}$, $\min f(x)=-\frac{27}{64}a^6$.

10. $f(x)=\sqrt{ax^3-x^4}$; პასუხი: როცა $x=\frac{3}{4}a$

$\max f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$; როცა $x=0$, ფუნქციას არ აქვს არც მაქსიმუმი, არც მინიმუმი.

11. $f(x)=\sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$; პასუხი: როცა

$$x=p-\frac{a}{2},\ \max f(x)=\frac{a}{2}\sqrt{p(p-a)}.$$

12. $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; პასუხი: როცა $x=\frac{1}{2}$, $\min f(x)=\frac{3}{5}$,

13. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$; პასუხი: როცა $x=0$, $\min f(x)=0$,

როცა $x=\infty$, $\max f(x)=1$.

14. $f(x)=\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}$; პასუხი: როცა $x=\frac{a}{2}$,

$\min f(x)=2$.

15. $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$; პასუხი: როცა

$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

16. $f(x)=\sqrt{a^2+2bx+mx^2}-nx$. პასუხი: ფუნქციას აქვს

მაქსიმუმი $x=-\frac{b}{m}+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{ma^2-b^2}{m-n^2}}$ წერტილში, თუ

$m>n^2$; ფუნქციას აქვს მინიმუმი $x=-\frac{b}{m}-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{ma^2-b^2}{m-n^2}}$

წერტილში, თუ $m>n^2$; როცა $m<n^2$, მაშინ ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

17. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$; პასუხი: როცა $x=e$, $\max f(x)=e^{\frac{1}{e}}$.

18. $f(x)=x^{1-\ln x}$; პასუხი: როცა $x=\sqrt{e}$, $\max f(x)=$

$$=\sqrt[4]{e}.$$

19. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; პასუხი: როცა $x=e$, $\min f(x)=e$.

20. $f(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x$; პასუხი: როცა $x=\frac{a}{e}$, $\max f(x)=e^{\frac{a}{e}}$.

21. $f(x)=\frac{\ln x}{x^n}$; პასუხი: როცა $x=\sqrt[n]{e}$, $\min f(x)=\frac{1}{ne}$.

22. $f(x)=\frac{e^x}{x}+\frac{x}{e^x}$; პასუხი: როცა $x=1$, $\min f(x)=e+e^{-1}$.

23. $f(x)=\sin x\cos x$; პასუხი: როცა $x=\frac{\pi}{4}$, $\max f(x)=\frac{1}{2}$;

როცა $x=-\frac{\pi}{4}$, $\min f(x)=-\frac{1}{2}$.

24. $f(x)=\cos x\cos(a-x)$; პასუხი: როცა $x=\frac{2k\pi+a}{2}$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

25. $f(x)=\sin^3 x\cos x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$; პასუხი: როცა $x=\frac{\pi}{3}$, $\max f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

26. $f(x)=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$; პასუხი: როცა $x=\frac{\pi}{6}$, $\max f(x)=1$.

27. $f(x)=\sin x(1+\cos x)$; პასუხი: როცა $x=\frac{\pi}{3}$, $\max f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

28. $f(x)=\sin x\cos 2x$; პასუხი: როცა $x=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი; როცა $x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი. აგრეთვე, $x=\pm\arcsin\sqrt{\frac{1}{6}}$ არის ექსტრემუმის წერტილი.

29. $f(x)=a\sin x+\frac{b}{\sin x}$; პასუხი: თუ $a>0$ და $b<a$, მაშინ: ა) როცა $x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

ბ) როცა $x=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

გ) როცა $\sin x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი. დ) როცა $\sin x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

30. $f(x)=a\operatorname{tg} x+b\operatorname{ctg} x,\quad a>0,\quad b>a$. პასუხი: როცა $\operatorname{tg} x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი; როცა $\operatorname{tg} x=-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

31. $f(x)=(a-\sin x)(b+\sin x)$. პასუხი: თუ $\frac{a-b}{2}<1$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი, როცა $\cos x=0$, ხოლო როცა $\sin x=\frac{a-b}{2}$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

32. $f(x)=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$. პასუხი: როცა $x=\frac{\pi}{8}$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

33. $f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$. პასუხი: როცა $x=\left(2k+\frac{5}{4}\right)\pi$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი; როცა $x=\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi$, ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

34. $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$. პასუხი: როცა $x=0$, $\min f(x)=4$.

35. $f(x)=\sin^m x\sin^n(a-x)$. პასუხი: როცა $x=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{m-n}{m+n}\sin a\right)$, ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

36. $f(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$. პასუხი: როცა $x=0$, ფუნქ-

ციის აქვს მინიმუმი; როცა $x=2k\pi+\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{6}$,

ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

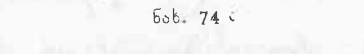
37. $f(x)=\frac{x-e^x}{1+x^2}$. პ ა ს უ ხ ი: როცა $x=1$, $\max f(x)=\frac{1-e}{2}$; როცა $x=0$, $\min f(x)=-1$.

38. $f(x)=x \operatorname{arc\,tg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$. პ ა ს უ ხ ი: როცა $x=0$. $\min f(x)=0$.

39. $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. პ ა ს უ ხ ი: როცა $x=0$, $\min f(x)=1$.

40. მოცემულ წრფეზე მოვძებნოთ ისეთი M წერტილი, რომლის მანძილების ჯამი ორ მოცემულ A და B წერტილამდე უმცირესია.

პ ა ს უ ხ ი: AM და BM მონაკვეთები მოცემულ წრფესთან უნდა შეადგენდეს თანატოლ კუთხეებს, ე. ი. $<AMC=<BMD$ (ნახ. 74).



ნახ. 74

41. იმ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა კათეტების ჯამი უდრის $2s$, მოვძებნოთ უდიდესი ფართობის სამკუთხედი.

პ ა ს უ ხ ი: საძიებელი სამკუთხედის კათეტებია: $a=s$ და $b=s$.

42. იმ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა პერიმეტრია $2p$, მოვძებნოთ:

ა) სამკუთხედი უმცირესი ჰიპოტენუზით.

ბ) სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზისა და მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლის ჯამი უდიდესია.

გ) სამკუთხედი, რომლის კათეტებისა და მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლის ჯამი უდიდესია.

პ ა ს უ ხ ი: ა) საძიებელი სამკუთხედი ტოლფერდაა.

ბ) თუ სამკუთხედის ერთ-ერთ მახვილ კუთხეს x-ით აღვნიშნავთ, საჭიროა მოიძებნოს $f(x)=\frac{1+\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ ფუნქციის მაქსიმუმი.

გ) საძიებელი სამკუთხედი ტოლფერდაა.

43. დაამტკიცეთ, რომ იმ პარალელოგრამებს შორის, რომლებსაც ტოლი კუთხეები და პერიმეტრები აქვთ, რომბის ფართობი უდიდესია.

44. იმ სამკუთხედებს შორის, რომლებსაც მოცემული h სიმაღლე და $2p$ პერიმეტრი აქვთ, მოძებნეთ უდიდესი ფართობის სამკუთხედი.

პ ა ს უ ხ ი: სამკუთხედი ტოლფერდაა.

45. r რადიუსიან წრეში ჩახაზეთ მოცემული კუთხე ისე, რომ მისი გვერდებითა და რკალით, რომელსაც იგი ეყრდნობა, შემოსაზღვრული ფართობი იყოს უდიდესი.

პ ა ს უ ხ ი: ქორდები, რომელთა შორის მოთავსებულია მოცემული კუთხე, თანატოლია.

46. მოცემული წრის შიგა M წერტილზე გაავლეთ უდიდესი სიგრძის ქორდა.

პ ა ს უ ხ ი: M წერტილზე გამავალი დიამეტრი.

47. მოცემული კვადრატის შიგნით მოძებნეთ ისეთი წერტილი, რომ კვადრატის გვერდებამდე მისი მანძილების კვადრატების ჯამი იყოს უდიდესი.

პ ა ს უ ხ ი: დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.

48. მოცემულ კონუსში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის იპოვეთ ის, რომლის: ა) მოცულობა უდიდესია, ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდიდესია, გ) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

პ ა ს უ ხ ი: ა) ცილინდრის მოცულობა მოცემული კონუსის მოცულობის $^4/_9$-ის ტოლია, ბ) ჩახაზული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ისეთი ცილინდრის გვერდითი ფართობის $^1/_4$-ის ტოლია, რომელსაც მოცემული კონუსის განზომილებანი აქვს. გ) საძიებელი ცილინდრის რადიუსი

$$r=\frac{Rh}{2(h-R)},$$

სადაც R კონუსის ფუძის რადიუსია, h—მისი სიმაღლე და $h>R$.

49. მოცემულ სფეროში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის იპოვეთ ის, რომლის:

ა) მოცულობა უდიდესია.

ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

გ) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

პ ა ს უ ხ ი: ა) სფეროს რადიუსი და ცილინდრის სიმაღლე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $\sqrt{3}:2$.

ბ) ცილინდრის სიმაღლისა და სფეროს რადიუსის ფარდობა უდრის $\sqrt{2}$.

გ) ცილინდრის სიმაღლისა და სფეროს რადიუსის ფარდობა უდრის $\sqrt{2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$.

50. მოცემულ სფეროში ჩახაზულ კონუსებს შორის იპოვეთ **ის,** რომლის:

ა) მოცულობა უდიდესია.

ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

გ) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

პ ა ს უ ხ ი: ა) კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება სფეროს რადიუსს, როგორც $4:3$;

ბ) კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება სფეროს რადიუსს, როგორც $4:3$;

გ) კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება სფეროს რადიუსს, როგორც $(23-\sqrt{17}):16$.

51. სფეროს გარშემო შემოხაზეთ უმცირესი მოცულობის კონუსი.

პ ა ს უ ხ ი: კონუსის წვეროსთან მდებარე კუთხის კოსინუსი უდრის $\frac{7}{9}$.

52. მოძებნეთ უმცირესი მანძილი მოცემული (x_0, y_0) წერტილიდან $Ax+By+C=0$ წრფემდე.

პ ა ს უ ხ ი: $\pm\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

53. მოძებნეთ უმცირესი მანძილი მოცემული (x_0, y_0) წერტილიდან $x=r(\varphi-\sin\varphi)$, $y=r(1-\cos\varphi)$ ციკლოიდამდე.

54. მოცემულ $P(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული წრფე Ox და Oy ღერძებს კვეთს A და B წერტილებში. იპოვეთ ამ წრფის მდებარეობა, როცა:

ა) AB მინიმალურია; ბ) $AO+OB$ მინიმალურია; გ) $AO \cdot OB$ მინიმალურია; დ) $AO+OB+AB$ მინიმალურია; ე) $AO\ \ OB\ \ AB$ მინიმალურია; ვ) AO^n+OB^n მინიმალურია, სადაც n ნატურალური რიცხვია.

55. იმ ელიფსებს შორის, რომელთა ღერძების ჯამი თანატოლია, იპოვეთ ის, რომლის ფართობი უდიდესია.

პასუხი: წრე.

56. მოცემულ პარალელოგრამზე შემოხაზეთ უმცირესი ფართობის ელიფსი.

პასუხი: ელიფსისა და პარალელოგრამის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $\pi : 2$.

57. $y^2=2px$ პარაბოლის $A(x, y)$ წერტილზე გავლებულია მხები, რომელიც დირექტრისას კვეთს B წერტილში. განსაზღვრეთ A წერტილის მდებარეობა ისე, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე იყოს უმცირესი.

პასუხი: $A\left(\frac{p}{4};\ \pm\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$.

58. ელიფსში ჩახაზულია უდიდესი (ფართობის) მართკუთხედი, ამ მართკუთხედში ჩახაზულია უდიდესი (ფართობის) ელიფსი, უკანასკნელ ელიფსში ჩახაზულია უდიდესი მართკუთხედი და ა. შ. უსასრულოდ. განსაზღვრეთ ყველა მართკუთხედის ფართობთა ჯამი.

პასუხი: ყველა მართკუთხედის ფართობთა ჯამი უდრის მოცემულ ელიფსზე შემოხაზული მართკუთხედის ფართობს.

59. ცილინდრული ძელისაგან საჭიროა გამოიჭრას მაქსიმალური გამძლეობის კოჭი. განსაზღვრეთ მართკუთხა კვეთის სიგანე და სიმაღლე.

პასუხი: კვეთის სიგანეა $\frac{2r}{\sqrt{3}}$,

$$\text{კვეთის სიმაღლე კი } \frac{2\sqrt{2}\,r}{3},$$

სადაც r ძელის ფუძის რადიუსია.

60. ვერტიკალურ სიბრტყეში მოძრაობს ორი სხეული, ერთი მათგანი ჰორიზონტალური მიმართულებით და მუდმივი სიჩქარით, ხოლო მეორე თავისუფლადვარდება. სხეულებმა ერთდროულად დაიწყეს მოძრაობა. საწყის მომენტში ტრაექტორიების გადაკვეთის წერტილიდან პირველი სხეული a მანძილით იყო დაშორებული, ხოლო მეორე სხეული b მანძილით. მათი მოძრაობის დაწყებიდან რამდენი წუთის შემდეგ იქნებიან სხეულები ერთმანეთისაგან დაშორებული უმცირესი მანძილით?

პ ა ს უ ხ ი: საჭიროა მოიძებნოს t-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც მიანიჭებს მინიმუმს შემდეგ ფუნქციას:

$$d=\sqrt{(a-vt)^2+\left(b-\frac{1}{2}gt^2\right)^2},$$

სადაც g—სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო d არის მანძილი მოძრავ სხეულებს შორის.

61. რა სიმაღლიდან უნდა ჩამოვარდეს დრეკადი ბურთი, რომ დაცემის შემდეგ მოცემულ h სიმაღლეზე ასხლტეს უმცირეს დროში.

პ ა ს უ ხ ი: საძიებელი სიმაღლე $H=\frac{4}{3}h$.

62. A და B წერტილებში მოთავსებულია სინათლის ორი წყარო, რომელთა სინათლის ძალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $m:n$. იპოვეთ AB წრფეზე წერტილი, რომელიც ყველაზე ნაკლებად იქნება განათებული.

პ ა ს უ ხ ი: საძიებელი წერტილი AB მონაკვეთს გაყოფს $\sqrt[3]{m}:\sqrt[3]{n}$ ფარდობით.

63. პარაბოლის რომელ წერტილში უნდა მოვათავსოთ სინათლის წყარო, რომ წერტილი, რომელიც ღერძზე მდებარეობს და წვეროდან დაშორებულია c მანძილით, ყველაზე მეტად იყოს განათებული.

პ ა ს უ ხ ი: თუ პარაბოლის განტოლებას ავიღებთ კანონიკური სახით $y^2=2px$, მაშინ სინათლის წყარო უნდა ავიღოთ პარაბოლის იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა

$$x=\frac{1}{5}\left[2(c-p)+\sqrt{4(c-p)^2+5c^2}\right].$$

64. წრეწირის რომელ წერტილში უნდა მოვათავსოთ სინათლის წყარო, რომ წრის წერტილი, რომელიც წრეწირიდან დაშორებულია მოცემული c მანძილით, ყველაზე მეტად იყოს განათებული.

65. $y=f(x)$ წირის რომელ წერტილში უნდა მრვათავსოთ სინათლის წყარო, რომ Ox ღერძზე მდებარე და კოორდინატთა სათავიდან c მანძილით დაშორებული მოცემული წერტილი ყველაზე მეტად იყოს განათებული.

პასუხი: საძიებელი წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული წირის $y=f(x)$ განტოლებას და, ამის გარდა, განტოლებას $3(x-c)y-[(x-c)^2-2y^2]y'=0$.

მოვძებნოთ შემდეგი წირების გადაღუნვის წერტილები და ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის ინტერვალები:

66. $y=x^3$. პასუხი: როცა $x<0$, წირი ამოზნექილია; როცა $x>0$, წირი ჩაზნექილია; $x=0$ არის წირის გადაღუნვის წერტილი.

67. $y=x^4$. პასუხი: წირი ყველგან ჩაზნექილია.

68. $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$. პასუხი: წირს არ აქვს გადაღუნვის წერტილები.

69. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$. პასუხი: $x=b$ არის წირის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა.

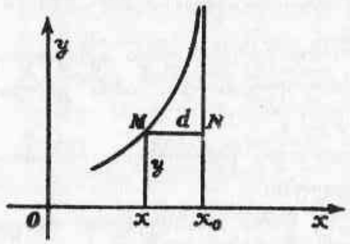
§ 15. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ვთქვათ, M არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. თუ ამ წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ ვიტყვით, რომ M წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის. ამ შემთხვევაში ძნელი წარმოსადგენია გრაფიკის სახე, მაგრამ მაინც ხერხდება ამ სიძნელის დაძლევა გრაფიკის შედარებით რომელიმე ცნობილ გრაფიკიდან. უმარტივესი შესადარებელი გრაფიკია წრფე. გრაფიკის იმ შტოს ფორმის შესწავლა, რომლის წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც უსასრულოდ იზრდება, ხდება ასიმპტოტის საშუალებით.

განსაზღვრა. გრაფიკის ასიმპტოტი ეწოდება წრფეს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მანძილი გრაფიკის $M(x, y)$ წერტილიდან ამ წრფემდე ნულისაკენ მიისწრაფვის, რიცდესაც M წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის.

გრაფიკის ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, ვერტიკალური ასიმპტოტი ეწოდება, ხოლო გრაფიკის ასიმპტოტს,

რომელიც Oy ღერძის პარალელური არაა, დახრილი ასიმპტოტი ეწოდება. ჯერ განვიხილოთ ვერტიკალური ასიმპტოტები. ამ შემთხვევაში $|y|\to\infty$, როდესაც $x\to x_0$. ცხადია $x=x_0$ წრფე მოცემული გრაფიკის ასიმპტოტია.



ნახ. 75.

მართლაც, მანძილი გრაფიკის M წერტილიდან $x=x_0$ წრფემდე არის $d=|x-x_0|$ (ნახ. 75). ცხადია, როდესაც $x\to x_0$, მაშინ $d\to 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x=x_0$ წრფე ასიმპტოტია.

ამრიგად, $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის იმ ასიმპტოტის მოსაძებნად, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, უნდა მოიძებნოს აბსცისის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც y უსასრულოა. თუ ასეთია x_0, მაშინ ასიმპტოტი იქნება $x=x_0$ წრფე.

მაგალითი 1. მოვძებნოთ $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. უშუალოდ ჩანს, რომ $|y|\to\infty$, როდესაც $x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$. ამრიგად, $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტებია $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ წრფეები.

ახლა განვიხილოთ დახრილი ასიმპტოტები. ასეთი ასიმპტოტის კუთხური კოეფიციენტი სასრული რიცხვია და ამიტომ ასიმპტოტის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$y=ax+b. \tag{15.1}$$

მოვძებნოთ a და b. ვთქვათ, $M(X, Y)$ მოცემული გრაფიკის რაიმე წერტილია. მანძილი M წერტილიდან (15.1) წრფემდე გამოისახება ფორმულით

$$d=\pm\frac{aX-Y+b}{\sqrt{a^2+1}}.$$

ასიმპტოტის განსაზღვრის თანახმად

$$\lim_{|X|\to\infty}(aX-Y+b)=0, \tag{15.2}$$

ანუ

$$\lim_{|X|\to\infty}\left(a-\frac{Y}{X}+\frac{b}{X}\right)=0.$$

აქედან

$$a=\lim_{|X|\to\infty}\frac{Y}{X}. \tag{15.3}$$

ამგვარად, a მოძებნილია.

აქ ცალ-ცალკე უნდა განვიხილოთ შემთხვევა $X\to+\infty$, $X\to-\infty$. ახლა (15.2) ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ b:

$$b=\lim_{|X|\to\infty}(Y-aX). \tag{15.4}$$

ამრიგად, მოძებნილია a და b და, მაშასადამე, მოძებნილია $y=ax+b$ ასიმპტოტიც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მოვძებნოთ $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც

$$\lim_{x\to 0-} y=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+2x-1}{x}=+\infty$$

და

$$\lim_{x\to 0+} y=\lim_{x\to +0}\frac{x^2+2x-1}{x}=-\infty,$$

ამიტომ $x=0$ წრფე, ე. ი. Oy ღერძი, არის მოცემული გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

მოვძებნოთ ახლა გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები. თანახმად (15.3) ტოლობისა

$$a=\lim_{|x|\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1,$$

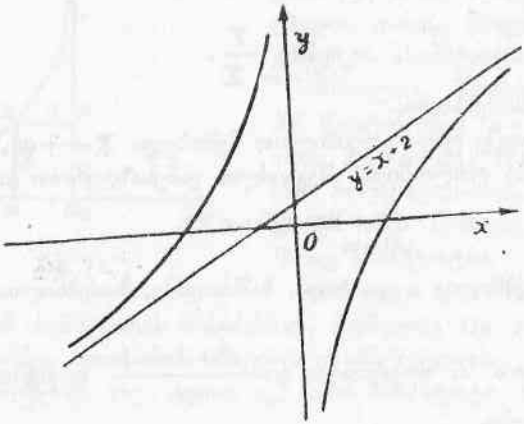
ხოლო (15.4) ტოლობის ძალით

$$b=\lim_{|x|\to\infty}(y-x)=\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=2.$$

მაშასადამე, $y=x+2$ წრფე არის მოცემული წირის დახრილი ასიმპტოტი. ამასთან, ვინაიდან

$$\frac{x^2+2x-1}{x}-(x+2)=-\frac{1}{x},$$

ამიტომ, როდესაც $x>0$, მოცემული გრაფიკი $y=x+2$ ასიმპტოტის ქვემოთ მდებარეობს, ხოლო როდესაც $x<0$, მოცემული გრაფიკი ამ ასიმპტოტის ზემოთ მდებარეობს (ნახ. 76).



ნახ. 76.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

მოძებნეთ შემდეგი წირების ასიმპტოტები:

1. $y=\frac{1}{x-1}$. პასუხი: $x=1$; $y=0$.

2. $y=\frac{1}{(x+2)^3}$. პასუხი: $x=-2$; $y=0$.

3. $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$. პასუხი: $x=b$; $y=c$.

4. $y=\frac{x^2+1}{x+1}$. პასუხი: $x=-1$; $y=x-1$.

5. $y^3=a^3-x^3$. პასუხი: $x+y=0$.

6. $y=x+e^{-x}$. პასუხი: $y=x$.

§ 16. ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემა

ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას დიდი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის გრაფიკის აგებას. გრაფიკის აგების ის ელემენტარული ხერხი, რომელიც ემყარება წერტილე-

ბის აგებას და შემდეგ მათ შეერთებას უწყვეტი წირით, სრულიად მიუღებელია ნებისმიერი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად.

დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდების გამოყენებით შეგვიძლია საკმაოდ ადვილად ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

გრაფიკის აგება დაკავშირებულია ფუნქციის გამოკვლევასთან. ფუნქციის გამოკვლევისათვის მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ შემდეგი სქემით:

1. ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და წყვეტის წერტილები.

2. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

3. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები და ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ ისინი არსებობენ.

4. ვიპოვოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნები.

5. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები, გადაღუნვის წერტილები.

6. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფუნქცია ლუწია, საკმარისია ფუნქციის გრაფიკი ავაგოთ არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის. გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც არგუმენტის უარყოფით მნიშვნელობებს შეესაბამება, აიგება ისე, რომ მთელი გრაფიკი განლაგებული იყოს სიმეტრიულად Oy ღერძის მიმართ.

სრულიად ასევე, კენტი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ მისი ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის დადებით მნიშვნელობებს. არგუმენტის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის გრაფიკი ისე უნდა დაიხაზოს, რომ მთელი გრაფიკი სიმეტრიულად იყოს განლაგებული კოორდინატთა სათავის მიმართ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვიკვლიოთ $y=\frac{x}{1+x^2}$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty, \infty[$ ინტერვალი. შევნიშნავთ, რომ როცა $x>0$, მაშინ $y>0$ და გრაფიკის სათანადო ნაწილი მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ. როცა $x<0$, მაშინ $y<0$ და, მაშასადამე, გრაფიკის სათანადო ნაწილი მოთავსებულია Ox ღერძის ქვემოთ. როცა $x=0$, მაშინ $y=0$. ამრიგად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე. ეს ფუნქცია განსაზღვრის მთელ ინტერვალზე უწყვეტია.

ახლა შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმი. ამისათვის მისი წარმოებული გავუტოლოთ ნულს:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

აქედან მივიღებთ, რომ $x_1 = -1$ და $x_2 = 1$ არის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები.

ვინაიდან $x_1 = -1$ წერტილის მარცხნიდან მარჯვნივ გავლისას y' წარმოებული უარყოფითი მნიშვნელობებიდან გადადის დადებით მნიშვნელობებზე, ამიტომ $x_1 = -1$ არის აღებული ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი და

$$\min y = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

შემდეგ, რაკი $x_2 = 1$ წერტილის მარცხნიდან მარჯვნივ გავლისას y' წარმოებული დადებითი მნიშვნელობებიდან გადადის უარყოფით მნიშვნელობებზე, ამიტომ $x_2 = 1$ მოცემული ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია და $\max y = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.

ახლა შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნები. ვინაიდან $y' < 0$, როცა $-\infty < x < -1$, ამიტომ $]-\infty, -1[$ ინტერვალზე ფუნქცია კლებადია, ხოლო რადგანაც $y' > 0$, როცა $-1 < x < +1$, ამიტომ $]-1, 1[$ ინტერვალზე ფუნქცია ზრდადია. დაბოლოს, ვინაიდან $y' < 0$, როცა $1 < x < +\infty$, ამიტომ $]1, +\infty[$ ინტერვალზე მოცემული ფუნქცია კლებადია.

გამოვიკვლიოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები და მოვძებნოთ გადაღუნვის წერტილები. ამისათვის მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ფესვები. გვაქვს:

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0,$$

საიდანაც $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$. ვინაიდან $y'' < 0$, როცა $-\infty < x < -\sqrt{3}$, ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $]-\infty, -\sqrt{3}[$ ინტერვალში ამოზნექილია. შემდეგ რაკი $y'' > 0$, როცა $-\sqrt{3} < x < 0$, ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $]-\sqrt{3}, 0[$

ინტერვალში ჩაზნექილია. დასასრულ, $y''<0$, როცა $0<x<\sqrt{3}$, ამიტომ $]0, \sqrt{3}[$ ინტერვალში გრაფიკი ამოზნექილია, ხოლო $y''>0$, როცა $\sqrt{3}<x<+\infty$ და ამიტომ $]\sqrt{3}, +\infty[$ ინტერვალში ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია.

ცხადია, მოცემული ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები იქნება $M_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_2(0, 0)$ და $M_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

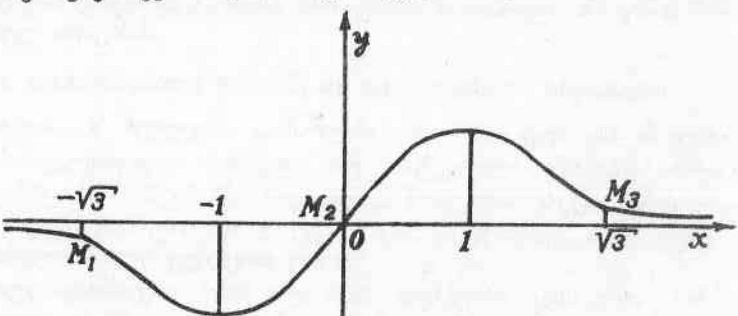
მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტების მოსაძებნად შევნიშნოთ, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2}=0$$

და

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2}=0.$$

ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკს აქვს ერთადერთი დახრილი ასიმპტოტი $y=0$, ე. ი. Ox ღერძი. ვინაიდან $y=\frac{x}{1+x^2}$ ფუნქცია, როცა x მიისწრაფვის რაიმე სასრული მნიშვნელობისაკენ, არ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, ამიტომ გრაფიკს არ აქვს ვერტიკალური ასიმპტოტები. გავითვალისწინებთ რა ზემოთ ნათქვამს, დავრწმუნდებით, რომ გრაფიკს აქვს 77-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 77.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.
2. $y=\frac{6x}{1+x^2}$.
3. $y=\frac{4+x}{x^2}$.
4. $y=xe^{-x}$.
5. $y=x^2e^{-x^2}$.
6. $y=x-\ln(x+1)$.
7. $y=x+\sin x$.
8. $y=\ln(1+x^2)$.
9. $y=x\sin x$.
10. $y=e^{-x}\sin x$.
11. $y=\ln\sin x$.
12. $y=\frac{\ln x}{x}$.
13. $x=t^2, \quad y=\frac{1}{2}t$.

თავი VIII

განუსაზღვრელი ინტეგრალი. ინტეგრების ძირითადი მეთოდები

როგორც ვიცით, დიფერენციალურ აღრიცხვაში შეისწავლება შემდეგი ძირითადი ამოცანა: რაიმე X შუალედში მოცემულია $F(x)$ ფუნქცია და უნდა ვიპოვოთ მისი წარმოებული. განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიაში შეისწავლება შებრუნებული ამოცანა: რაიმე X შუალედში მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია და უნდა ვიპოვოთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია, რომლის წარმოებულია $f(x)$.

ასეთ ამოცანამდე დაიყვანება ტექნიკასა და ბუნებისმეტყველების მრავალი საკითხი. მაგალითად, მექანიკაში გვხვდება შემდეგი ამოცანა: მოცემულია წრფეზე მოძრავი ნივთიერი წერტილის სიჩქარე დროის ყოველ t მომენტში: $v=f(t)$; საჭიროა ვიპოვოთ M წერტილის მოძრაობის კანონი, ე. ი. დამოკიდებულება გავლილ s მანძილსა და გავლილ t დროს შორის. ჩვენ ვიცით, რომ $v=f(t)$ სიჩქარე იმ $s=F(t)$ ფუნქციის წარმოებულია, რომელიც გამოსახავს M წერტილის მოძრაობის კანონს. ამრიგად, მოცემულია უცნობი $F(t)$ ფუნქციის წარმოებული $F'(t)=f(t)$; საჭიროა $F(t)$ ფუნქციის მოძებნა. ეს კი წარმოადგენს დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ამოცანის შებრუნებულ ამოცანას.

§ 1. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ვთქვათ, X შუალედში განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია ანუ ინტეგრალი ეწოდება ისეთ $F(x)$ ფუნქციას, რომლის წარმოებული X შუალედის ყოველ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ტოლია: $F'(x)=f(x)$. მაგალითად, $\sin x$ ფუნქციის პირელყოფილი ფუნქციაა $\cos x$.

ადვილი შესამჩნევია რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ერთი პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ მას ექნება უამრავი პირველყოფილი ფუნქცია. მაგალითად, თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას.

თეორემა 1. *თუ $F(x)$ არის მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ $F(x)+C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ზოგადი სახის პირველყოფილი ფუნქციაა.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Phi(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის რაიმე სხვა პირველყოფილი ფუნქცია. მაშინ იგივურად

$$F'(x)=\Phi'(x).$$

მაგრამ როგორც ვიცით, თუ ორი ფუნქციის წარმოებული იგივურად თანატოლია, მაშინ ეს ფუნქციები ერთმანეთისაგან მუდმივი სიდიდით განსხვავდებიან, ე. ი. $\Phi(x)=F(x)+C$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის მიხედვით საკმარისია მოიძებნოს მოცემული ფუნქციის ერთი პირველყოფილი ფუნქცია და მაშინ ყოველი სხვა პირველყოფილი ფუნქცია წარმოგვიდგება მოძებნილი პირველყოფილი ფუნქციისა და გარკვეული მუდმივის ჯამის სახით.

მოცემული ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციის ანუ ინტეგრალის მოძებნას ფუნქციის *ინტეგრება* ეწოდება. თუ ინტეგრებას განვიხილავთ როგორც ფუნქციის წარმოებულიდან თვით ამ ფუნქციაზე გადასვლის ოპერაციას, მაშინ ინტეგრება წარმოადგენს გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას. ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა. მოცემული $f(x)$ ფუნქციის რაიმე პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი C მუდმივის $F(x)+C$ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *განუსაზღვრელი ინტეგრალი* და აღინიშნება

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \tag{1.1}$$

ეს ტოლობა ასე იკითხება: განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)dx$ დიფერენციალისა ტოლია $F(x)$ პლუს ნებისმიერი მუდმივი C.

(1.1) ტოლობაში $f(x)$ ფუნქცია *ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა*, $f(x)\,dx$ დიფერენციალი კი *ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაა*. სიმბოლოს $\int$ ეწოდება ინტეგრალის ნიშანი.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 2. *სეგმენტზე ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია.*

ამ თეორემას დავამტკიცებთ განსაზღვრულ ინტეგრალთა თეორიაში.

თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული არის ელემენტარული ფუნქცია, მაგრამ ელემენტარული ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია შეიძლება არ იყოს ელემენტარული ფუნქცია. მაგალითად,

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx$$

არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს. ისინი წარმოადგენენ ეგრეთ წოდებულ უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციებს.

§ 2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფუნქციას ჯერ გავაწარმოებთ და შემდეგ მოვახდენთ ამ წარმოებულის ინტეგრებას, მივიღებთ $f(x)+C$ ფუნქციას, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ე. ი.

$$\int f'(x)\,dx = f(x)+C. \tag{2.1}$$

დამტკიცება. რაკი $f(x)+C$ ფუნქციის წარმოებულია $f'(x)$, ამიტომ მართებულია (2.1) ტოლობა.

ეს ტოლობა შეგვიძლია აგრეთვე ასე ჩავწეროთ:

$$\int df(x) = f(x)+C.$$

თეორემა 4. განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალი ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ტოლია.

დამტკიცება. ინტეგრალის განსაზღვრის მიხედვით, $\int f(x)\,dx$ ისეთი ფუნქციაა, რომლის წარმოებულია $f(x)$, ე. ი.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

აქედან

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. ორი ინტეგრებადი ფუნქციის ჯამი ინტეგრებადია და ამ ფუნქციათა ჯამის განუსაზღვრელი ინტეგრალი უდრის აღნიშნული ფუნქციების განუსაზღვრელი ინტეგრალების ჯამს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია. დავამტკიცოთ, რომ

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx. \tag{2.2}$$

აღვნიშნოთ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების რაიმე პირველყოფილი ფუნქციები $F(x)$ და $G(x)$-ით. მაშინ

$$\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx=[F(x)+C_1]+[G(x)+C_2]=$$
$$=F(x)+G(x)+(C_1+C_2),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. მაგრამ $F(x)+G(x)$ არის $f(x)+g(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია. მაშასადამე, მართებულია (2.2) ტოლობა.

თეორემა 6. თ უ $f(x)$ ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა, მ ა შ ი ნ $Af(x)$, ს ა დ ა ც A მ უ დ მ ი ვ ი ს ი დ ი დ ე ა, ა გ რ ე თ ვ ე ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა და მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\int A f(x)\,dx=A\int f(x)\,dx.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ

$$\frac{d}{dx}[AF(x)]=Af(x).$$

მაშასადამე,

$$\int Af(x)\,dx=AF(x)+AC=A[F(x)+C]=A\int f(x)\,dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ორი უკანასკნელი თეორემისა და მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 7. თ უ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ა, ხ ო ლ ო $A_1, A_2, \ldots, A_n$ მ უ დ მ ი ვ ე ბ ი ა, მ ა შ ი ნ მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\int \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)\,dx.$$

§ 3. უშუალო ინტეგრება

თუ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ცნობილი ფუნქციის დიფერენციალია, მაშინ ამ ფუნქციისათვის ნებისმიერი მუდმივის დამატე-

ბით მივიღებთ საძიებელ განუსაზღვრელ ინტეგრალს. მაშასადამე, უმარტივესი ფუნქციების დიფერენციალთა ცხრილის მიხედვით შედგება განუსაზღვრელი ინტეგრალების შემდეგი ცხრილი:

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, 3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0,\ a\neq 1)$,

4. $\int e^x dx = e^x + C$. 5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, 7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$,

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,ctg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C'$,

11. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$, 12. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$,

13. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, 14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

§ 4. დაშლის ხერხი

ეს ხერხი გამოიყენება, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. მაშინ მე-7 თეორემის თანახმად ამგვარი ინტეგრალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ინტეგრალთა ჯამის სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int (3x^2 - 4\sin x + 5\sqrt[3]{x})\, dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მე-7 თეორემის თანახმად

$$I = \int 3x^2 dx - \int 4\sin x\, dx + \int 5\sqrt[3]{x}\, dx = 3\int x^2 dx - 4\int \sin x\, dx +$$

$$+ 5\int \sqrt[3]{x}\, dx = x^3 + 4\cos x + \frac{15}{4} x \sqrt[3]{x} + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{3\sqrt[4]{x}}-x^2\sqrt{x}\right)dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მე-7 თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$I=5\int x^{-\frac{2}{3}}dx+\frac{1}{3}\int x^{-\frac{1}{4}}dx-\int x^{\frac{5}{2}}dx=15\sqrt[3]{x}+$$

$$+\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C.$$

ხშირად დაშლის ხერხი მაშინაც გამოიყენება, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ წარმოადგენს ალგებრულ ჯამს. ამ შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წინასწარ უნდა მივიყვანოთ ალგებრულ ჯამზე და შემდეგ გამოვიყენოთ მე-7 თეორემა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{x^2dx}{1+x^2}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$I=\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\operatorname{ctg}^2x\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$I=\int(\operatorname{cosec}^2x-1)dx=\int\operatorname{cosec}^2x\,dx-\int dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

§ 5. ნაწილობითი ინტეგრება

ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ არის ორი დიფერენცირებადი ფუნქცია. როგორც დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია, არსებობს uv ნამრავლის დიფერენციალი და მართებულია ტოლობა

$$d(uv)=vdu+udv.$$

ვაინტეგროთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი და შედეგი ასე ჩავწეროთ

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{5.1}$$

უკანასკნელ ტოლობას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\int u dv$ ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ ახალ ინტეგრალამდე $\int v du$, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს ვიდრე პირველი.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int x^{\alpha} \ln x \, dx$, სადაც $\alpha \neq -1$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u = \ln x \text{ და } dv = x^{\alpha} dx. \text{ მაშინ } du = \frac{dx}{x}$$

და $v = \int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. ამის შემდეგ (5.1) ფორმულის გამოყენება მოგვცემს

$$\int x^{\alpha} \ln x \, dx = \frac{x^{\alpha+1} \ln x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1} \ln x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C.$$

როგორც ვნახეთ, $v = v(x)$ ფუნქცია უნდა მოვძებნოთ dv დიფერენციალის ინტეგრებით. მაგრამ, ინტეგრება ამ დიფერენციალისა წარმოქმნის ნებისმიერ C მუდმივსაც. ეს მუდმივი v ფუნქციის გამოთვლისას ჩათვლილია ნულის ტოლად, ვინაიდან იგი საბოლოო შედეგში არ მიიღებს მონაწილეობას.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\int x \sin x \, dx$. შემოვიღოთ აღნიშვნები $u = x$ და $dv = \sin x \cdot dx$; მაშინ $du = dx$ და $v = -\cos x$. ახლა გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა, გვექნება

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

როგორც ვხედავთ, განხილულ მაგალითში, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებას მივყავართ ახალი მარტივი $\int \cos x \, dx$ ინტეგრალის გამოთვლამდე.

თუ ავიღებთ $u = \sin x$ და $dv = x \, dx$, მაშინ $du = \cos x \, dx$ და $v = \dfrac{1}{2} x^2$ და იმავე (5.1) ფორმულის გამოყენება მოგვცემს

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2 \sin x}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

ნათლად ჩანს, რომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულამ, ამ შემთხვევაში, არა თუ გაამარტივა საძიებელი ინტეგრალის გამოთვლა, არამედ იგი მიიყვანა უფრო რთული $\int x^2 \cos x\,dx$ ინტეგრალის მოძებნამდე. ეს გამოწვეულია იმით, რომ u და dv მოხერხებულად არ იყო შერჩეული.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. ამისათვის მივიღოთ, რომ $u=\operatorname{arc\,tg} x$, $dv=dx$. მაშინ $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$, $v=x$ და (5.1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=x\operatorname{arc\,tg} x-$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

მაგალითი 4. მოვძებნოთ $\int (ax^2+bx+c)\cos k\,x\,dx$, სადაც a, b, c, $k\neq 0$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ამისათვის ვიგულისხმოთ $u=ax^2+bx+c$, $dv=\cos kx\,dx$ და გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა. მაშინ $du=(2ax+b)\,dx$, $v=\dfrac{1}{k}\sin kx$ და

$$\int (ax^2+bx+c)\cos kx\,dx=\frac{1}{k}(ax^2+bx+c)\sin kx-$$

$$-\frac{1}{k}\int(2ax+b)\sin kx\,dx.$$

ახლა, ხელახლა გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა უკანასკნელი ინტეგრალის გამოსათვლელად, რომელშიც აღვნიშნოთ $u=2ax+b$, $dv=$ $=\sin kx\,dx$, მაშინ $du=2a\,dx$, $v=-\dfrac{1}{k}\cos kx$. გვექნება

$$\int(2ax+b)\sin kx\,dx=-\frac{1}{k}(2ax+b)\cos kx+\frac{2a}{k}\int\cos kx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{k}(2ax+b)\cos kx+\frac{2a}{k^2}\sin kx.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int(ax^2+bx+c)\cos kx\,dx=\frac{1}{k}(ax^2+bx+c)\sin kx+$$

$$+\frac{1}{k^2}(2ax+b)\cos kx-\frac{2a}{k^3}\sin kx+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ $\int x^2 e^x\,dx$. აღვნიშნოთ $u=x^2$, $dv=e^x dx$. მაშინ $du=2x\,dx$, $v=e^x$. თანახმად ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა, გვექნება

$$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx.$$

გამოვთვალოთ უკანასკნელი ინტეგრალი ისევ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით. ამასთან აღვნიშნოთ $u=x$, $dv=e^x\,dx$. მაშინ $du=dx$, $v=e^x$, ამის გამო გვექნება

$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)\,e^x$. შევიტანოთ მიღებული გამოსახულება ტოლობაში. საბოლოოდ გვექნება

$$\int x^2e^x dx=(x^2-2x+2)\,e^x+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. გამოვთვალოთ $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, სადაც $a\neq 0$ და $b\neq 0$ ნამდვილი რიცხვებია.

აღვნიშნოთ $u=e^{ax}$, $dv=\cos bx\,dx$. მაშინ $du=ae^{ax}\,dx$, $v=\frac{1}{b}\sin bx$. გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა, მივიღებთ

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ ისევ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. ამისათვის, ვთქვათ $u=e^{ax}$, $dv=\sin bx\,dx$. მაშინ $du=ae^{ax}\,dx$, $v=-\frac{1}{b}\cos bx$. მაშასადამე,

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ წინა ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{(b\sin bx+a\cos bx)\,e^{ax}}{a^2+b^2}+C. \tag{5.2}$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{(a\sin bx-b\cos bx)\;e^{ax}}{a^2+b^2}+C. \tag{5.3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7 გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\left(\frac{x}{x\sin x+\cos x}\right)^2 dx.$$

წინასწარ იგი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$I=\int\frac{x}{\cos x}\,\frac{x\cos x\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}.$$

ახლა გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. ამისათვის აღვნიშნოთ

$$u=\frac{x}{\cos x},\quad dv=\frac{x\cos x\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}.$$

მაშინ

$$du=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\,dx,\qquad v=\int\frac{x\cos x\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\int\frac{d\,(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}=-\frac{1}{x\sin x+\cos x}.$$

ამის შემდეგ საძიებელი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$I=-\frac{x}{\cos x\,(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}+C.$$

§ 6. ინტეგრება ცვლადთა გარდაქმნის ხერხით

ხშირად, განუსაზღვრელი ინტეგრალი, რომელიც საკმარისად რთული ინტეგრალქვეშა გამოსახულებიდან არის გამოსათვლელი, შესაძ-

ლოა გავამარტივოთ ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{6.1}$$

განვიხილოთ $x = \varphi(t)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$, როდესაც $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ როგორც ვიცით, ასეთ პირობებში რთული ფუნქცია $F[\varphi(t)]$ განსაზღვრულია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და

$$dF[\varphi(t)] = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

რადგანაც $F'(x) = f(x)$, ამიტომ

$$dF[\varphi(t)] = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

მოვახდინოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრება, მივიღებთ

$$F[\varphi(t)] + C = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{6.2}$$

მაგრამ $F[\varphi(t)] = F(x)$, ამიტომ (6.1) და (6.2) ტოლობების ძალით გვექნება

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{6.3}$$

ეს არის ინტეგრალქვეშა ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა. ინტეგრების ამ ხერხს ჩასმის ხერხს უწოდებენ.

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალის გამოთვლა მთლიანად დამოკიდებულია $\varphi(t)$ ფუნქციის შერჩევისაგან. ჩასმის ხერხის ნაყოფიერება იმდენად უფრო ეფექტურია, რამდენადაც მოხერხებულად არის შერჩეული $\varphi(t)$ ფუნქცია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგჯერ, ნაცვლად $x = \varphi(t)$ ჩასმისა, უფრო მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ $t = \psi(x)$ ჩასმა. მაგალითად, თუ გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)},$$

უკეთესია გამოვიყენოთ $t = \psi(x)$ ჩასმა, საიდანაც გვექნება $dt = \psi'(x)\,dx$ და

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

მოვიყვანოთ მაგალითები ჩასმის ხერხის გამოყენებაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$. გამოვიყე-

ნოთ $t=\sin x$ ჩასმა. მაშინ $dt=\cos x\,dx$ და ინტეგრალი ასე გარდაიქმნება

$$\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $\int\frac{\ln^2 x\,dx}{x}$.

ავიღოთ $\ln x=t$ ჩასმა მაშინ $\frac{dx}{x}=dt$. და გამოსათვლელი ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int\frac{\ln^2 x\,dx}{x}=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$, სადაც $a\neq 0$, $b\neq 0$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ავიღოთ $x=\frac{a}{b}t$ ჩასმა. გვექნება $dx=\frac{a}{b}dt$. ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ გამარტივებულ სახეს:

$$\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg} t+C=$$

$$=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}x\right)+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$, სადაც $a>0$, $b>0$.

თუ ავიღებთ ჩასმას $x=\frac{at}{b}$, გვექნება $dx=\frac{a}{b}dt$. მაშასადამე,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{b}\arcsin t+C=$$

$$=\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C.$$

კერძოდ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $I=\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}$, სადაც $a\neq 0$, $b\neq 0$.

გამოვიყენოთ $x=\frac{a}{b}t$ ჩასმა. გვექნება $dx=\frac{a}{b}dt$. ამის შემდეგ ინტეგრალი შემდეგნაირად გამარტივდება და გამოითვლება:

$$I=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2ab}\int\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}dt=\frac{1}{2ab}\int\frac{dt}{1+t}+$$

$$+\frac{1}{2ab}\int\frac{dt}{1-t}=\frac{1}{2ab}\ln|1+t|-\frac{1}{2ab}\ln|1-t|+C=$$

$$=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6 გამოვთვალოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{\sin^7 x}{\cos^3 x}dx$.

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება წინასწარ გარდავქმნათ ასე:

$$I=\int\frac{\sin^6 x}{\cos^3 x}\sin x\,dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)^3\sin x\,dx}{\cos^3 x}$$

ახლა ავიღოთ $\cos x=t$ ჩასმა. მაშინ $\sin x\,dx=-dt$ და საძიებელი ინტეგრალი მიიღებს მარტივ სახეს და ამოიხსნება უკვე დაშლის ხერხით შემდეგნაირად:

$$I=-\int\frac{(1-t^2)^3\,dt}{t^3}=-\int t^{-3}\,dt+3\int\frac{dt}{t}-3\int t\,dt+$$

$$+\int t^3dt=\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2}+3\ln|t|-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{4}t^4+C.$$

თუ დავუბრუნდებით x ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I=\frac{1}{2\cos^2 x}+3\ln|\cos x|-\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{1}{4}\cos^4 x+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7 გამოვთვალოთ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. ეს ინტეგრალი წინასწარ გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-$$

$$-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

ახლა უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით. ამისათვის აღვნიშნოთ $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

მაშინ

$$du=dx,\quad v=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება წინა ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx,$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

§ 7. ინტეგრება ფუნქციისა, რომელიც კვადრატულ სამწევრს შეიცავს

1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\,, \tag{7.1}$$

სადაც $a\neq 0$, b, c ნამდვილი რიცხვებია.

ამისათვის, გამოვიყენოთ შემდეგი იგივეობიდან:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\,[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)].$$

მაშინ (7.1) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება

$$I=4a\int\frac{dx}{(2ax+b)^2-(b^2-4ac)}.$$

გამოვიყენოთ $z=2ax+b$ ჩასმა, მაშინ $dx=\frac{dz}{2a}$ და უკანასკნელი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$I=2\int\frac{dz}{z^2-(b^2-4ac)}.$$

ახლა პირდაპირ ჩანს, რომ ინტეგრალი მთლიანად დამოკიდებულია ax^2+bx+c სამწევრის b^2-4ac დისკრიმინანტზე. თუ $b^2-4ac=0$, მაშინ გვექნება

$$I=-\frac{2}{z}+C.$$

ვთქვათ ახლა, $b^2-4ac>0$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $b^2-4ac=k^2$, გვექნება

$$I=2\int\frac{dz}{z^2-k^2}=\frac{1}{k}\ln\left|\frac{z-k}{z+k}\right|+C.$$

დაბოლოს თუ $b^2-4ac<0$, მაშინ $b^2-4ac=-k^2$ და

$$I=2\int\frac{dz}{z^2+k^2}=\frac{2}{k}\operatorname{arctg}\frac{z}{k}+C.$$

დავუბრუნდეთ ისევ x ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}-\dfrac{2}{2ax+b}+C, & \text{თუ } b^2-4ac=0,\\[2mm] \dfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C, & \\ \qquad \text{თუ } b^2-4ac>0, & \\[2mm] \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, & \\ \qquad \text{თუ } b^2-4ac<0. &\end{cases}$$

ამრიგად, როცა ax^2+bx+c სამწევრის დისკრიმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ ინტეგრალი წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას. როცა იგი დადებითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი არის ლოგარითმული ფუნქცია; ხოლო როცა დისკრიმინანტი უარყოფითი რიცხვია, ინტეგრალი გამოისახება არკტანგენსით.

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}},$$

სადაც k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=\sqrt{x^2+k}$. გვაქვს:

$$dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+k}}=\frac{x\,dx}{y}.$$

აქედან

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}.$$

თუ ვისარგებლებთ პროპორციის ერთ-ერთი თვისებით, გვექნება

$$\frac{dx}{y}=\frac{dx+dy}{y+x}=\frac{d(x+y)}{x+y}.$$

მაშასადამე,

$$I=\int\frac{dx}{y}=\int\frac{d(x+y)}{x+y}=\ln|x+y|+C.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln(x+\sqrt{x^2+k})+C. \tag{7.2}$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ a\neq 0.$$

ამ ინტეგრალის მოსაძებნად განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

ა) $a>0$. ამ შემთხვევაში კვადრატული სამწევრი ax^2+bx+c ასე წარმოვადგინოთ

$$ax^2+bx+c=\frac{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}{4a}.$$

მაშასადამე,

$$I=\int\frac{2\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}}.$$

ავიღოთ ჩასმა

$$2ax+b=t.$$

აქედან $dx=dt:2a$. მაშასადამე,

$$I=\frac{\sqrt{a}}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(4ac-b^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(4ac-b^2)}}$$

მაგრამ (7.2) ფორმულის თანახმად

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(4ac-b^2)}}=\ln(t+\sqrt{t^2+(4ac-b^2)})+C.$$

თუ დავუბრუნდებით ძველ x ცვლადს, გვექნება

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2ax+b+\sqrt{4a(ax^2+bx+c)}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left[2\sqrt{a}\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C$$

სადაც

$$C'=C+\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}).$$

ბ) $a<0$ და $b^2-4ac>0$. ამ შემთხვევაში ax^2+bx+c სამწევრი ასე წარმოვადგინოთ:

$$ax^2+bx+c=\frac{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}{-4a}.$$

მაშასადამე,

$$I=2\sqrt{-a}\int\frac{dx}{\sqrt{(b^2-4ac)-(2ax+b)^2}}.$$

ავიღოთ ჩასმა $2ax+b=t$. აქედან $dx=dt:2a$. მაშასადამე,

$$I=\frac{\sqrt{-a}}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{(b^2-4ac)-t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{b^2-4ac}}+$$

$$+C=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

ამრიგად,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+\\ \qquad +C,\ \text{როდესაც}\ a>0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}}+\\ \qquad +C,\ \text{როდესაც}\ a<0.\end{cases}\tag{7.3}$$

სავარჯიშო

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1. $\int (ax+b)\,dx$; პას. $\frac{a}{2}x^2+bx+C$.

2. $\int (ax+b)^n\,dx$; პას. $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$.

3. $\int \frac{dx}{2x+1}$; პას. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

4. $\int \frac{x\,dx}{4x^2-3}$; პას. $\frac{1}{8}\ln|4x^2-3|+C$.

5. $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$; პას. $\frac{n}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}+C$.

6. $\int \operatorname{ctg} 4x\,dx$; პას. $\frac{1}{4}\ln\sin 4x+C$.

7. $\int \operatorname{tg}(5x-2)\,dx$; პას. $-\frac{1}{5}\ln|\cos(5x-2)|+C$.

8. $\int \frac{x^3\,dx}{4x^2+1}$; პას. $\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{32}\ln(4x^2+1)+C$.

9. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$; პას. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

10. $\int \frac{x^{k-1}\,dx}{ax^k+b}$; პას. $\frac{1}{ak}\ln|ax^k+b|+C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$; პას. $\frac{3}{2a}\sqrt[3]{(ax+b)^2}+C$.

12. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{x^3+1}}$; პას. $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(x^3+1)^4}+C.$

13. $\int x^4 \sqrt[5]{x^5+1}\,dx$; პას. $\frac{1}{6}\sqrt[5]{(x^5+1)^6}+C.$

14. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$; პას. $\sqrt{x^2-a^2}-a\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C.$

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; პას. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln(1+\sqrt[3]{x})+C.$

16. $\int \frac{4x^3-7x+2}{2x+1}\,dx$; პას. $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+$

$+\frac{5}{2}\ln|2x+1|+C.$

17. $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x}\,dx$; პას. $\frac{2}{3}x^3+3x+\ln|x-1|+$

$+2\ln|x|+C.$

18. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$; პას. $-x-4\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}-1|+C.$

19. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$; პას. $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$

20. $\int x^2\sqrt{a+x}\,dx$; პას. $\frac{2}{105}\sqrt{a+x}\,(8a^3-4a^2x+$

$+3ax^2+15x^3)+C.$

21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$; პას. $\displaystyle\frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x+$

$\displaystyle+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$

$+9\ln|\sqrt[6]{x}-1|+3\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$

22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx$; პას. $2\sqrt{a+bx}+$

$\displaystyle+\sqrt{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+C.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}$; პას. $\displaystyle\frac{1}{3a}\Big[(x+a)^{\frac{3}{2}}+$

$+(x-a)^{\frac{3}{2}}\Big]+C.$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$; პას. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

25 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$; პას. $\displaystyle\frac{1}{2}\ln|x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x^2+x^4}|+C.$

26. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{(1-3\cos x)^3}$; პას. $\displaystyle-\frac{1}{6\,(1-3\cos x)^2}+C.$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+\sin x)^2}$; პას. $\displaystyle\frac{\cos x}{8\,(3+\sin x)}+$

$\displaystyle+\frac{3}{8\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{3\,\mathrm{tg}\,x/2}{2\sqrt{2}}\right)+C.$

28. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{(2+\cos x)^2}$; პას. $\frac{\sin x}{2+\cos x}+$

$+\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)+C.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; პას. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left|\frac{1+\operatorname{tg} x+\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1+\operatorname{tg} x-\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}\right|+C.$

30. $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx$; პას. $x+\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x+C.$

31 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}$: პას. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1-\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}\right)+$

$+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+\sqrt{3}\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}-\sqrt{3}\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}+C.$

32. $\int \frac{\cos x\, dx}{(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}}$; პას. $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}+G.$

33. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$: პას. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2}+$

$+\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} 2x\right)+C.$

34. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^4 x}\, dx$: პას. $\left(\operatorname{tg} x+\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x\right) \ln \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x-$

$-\frac{1}{9} \operatorname{tg}^3 x+C.$

35. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; პას. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-$
$-\sqrt{1+x^2}+C.$

36. $\int \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)\frac{dx}{(x+1)^2}$;

პას. $\ln\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)}{x+1}-$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}+C.$

37. $\int x^3 \arcsin x\,dx$; პას. $\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{32}\right)\arcsin x+$
$+\left(\frac{x^3}{16}+\frac{3}{32}x\right)\sqrt{1-x^2}+C.$

38. $\int \arcsin^3 x\,dx$; პას. $x(\arcsin^3 x-6\arcsin x)+$
$+(3\arcsin^2 x-6)\sqrt{1-x^2}+C.$

39. $\int \frac{\arcsin x}{(1-x)^2}dx$; პას. $\frac{\arcsin x}{1-x}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

40. $\int \frac{\arcsin x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$; პას. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\arcsin x^2+C.$

41. $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$; პას. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$

42. $\int \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$; პას. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$

43. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; პას. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C.$

44. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; პას. $4\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}\arcsin x+C$.

45. $\int x\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$; პას. $\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^3-$

$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arcsin x+C$.

46. $\int \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; პას. $(1-x)\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$

$+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$.

47. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$; პას. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+$

$+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$.

48. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; პას. $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

49. $\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx$; პას. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+$

$+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$.

50. $\int \frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x)^2}\,dx$; პას. $\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x)-$

$-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

51. $\int \frac{x\lg x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; პას. $\sqrt{1-x^2}+(1-\sqrt{1-x^2})\ln x-$

$-\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C$.

52. $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x}}$: პას. $4\sqrt{1-x}+2(1-\sqrt{1-x}\ln x-$

$-4\ln(1+\sqrt{1-x})+C$.

53. $\displaystyle\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$; პას. $\displaystyle\frac{\sin x}{x}+C$.

54. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(2+3\sin x)^2}$; პას. $\displaystyle\frac{2}{9\sqrt{5}}\ln\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}$

$$-\frac{\cos x}{3(2+3\sin x)}-\frac{1}{9}x+C.$$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3+\sin x)^2}$;

პას. $\displaystyle\frac{\cos x}{8(3+\sin x)}+\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)+C.$

თავი IX

რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

§ 1. უმარტივესი რაციონალური ფუნქციები და მათი ინტეგრება

როგორც ვიცით, x ცვლადის რაციონალური ფუნქცია ეწოდება $\frac{f(x)}{g(x)}$ სახის ფუნქციას, სადაც $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებია. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ x არის ნამდვილი ცვლადი, ხოლო $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია. ამის გარდა, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, ე. ი. მათ არა აქვთ საერთო ფესვები, ვინაიდან თუ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებს აქვთ საერთო მამრავლები, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ წილადი შეგვიძლია შევკვეცოთ ხსენებულ საერთო მამრავლებზე.

ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx.$$

თუ $\frac{f(x)}{g(x)}$ არაწესიერი წილადია, ე. ი. $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე ნაკლები არ არის, მაშინ მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის შედეგად გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F(x) + \frac{\varphi(x)}{g(x)},$$

სადაც $F(x)$ მრავალწევრია, $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ კი წესიერი წილადია, ე. ი. $\varphi(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $g(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \int F(x)\, dx + \int \frac{\varphi(x)}{g(x)}\, dx.$$

მაგრამ ინტეგრალი $\int F(x)\,dx$ უშუალოდ გამოითვლება. ამრიგად, რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება დაიყვანება წესიერი წილადის ინტეგრებამდე.

შემდეგ პარაგრაფში დავამტკიცებთ, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით.

უმარტივესი წილადები ეწოდება შემდეგი სახის წილადებს:

1. $\dfrac{A}{x-a}$, სადაც A მუდმივი სიდიდეა.

2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, სადაც k ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია.

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, სადაც A და B მუდმივებია, მნიშვნელს კი კომპლექსური ფესვები აქვს.

4. $\dfrac{Px+Q}{(x^2+px+q)^k}$, სადაც k ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მნიშვნელის ფესვები კი კომპლექსურია.

გამოვთვალოთ უმარტივესი წილადების განუსაზღვრელი ინტეგრალები. გვაქვს:

1. $$\int \frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

2. $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k}=A\int (x-a)^{-k}dx=A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=$$
$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

3. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\int \frac{\frac{A}{2}\left(2x+p\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx=$$
$$=\frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}=$$
$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$= \frac{A}{2} \ln | x^2 + px + q | + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

გადავიდეთ **4** სახის ფუნქციის ინტეგრებაზე. ამისათვის საჭიროა შევადგინოთ რეკურენტული ანუ დაყვანის ფორმულა. გამოვიყენოთ შემდეგი გარდაქმნები

$$I_k = \int \frac{\frac{P}{2}\left(2x + p\right) + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{P}{2} \int \frac{(2x + p)\, dx}{(x^2 + px + q)^k} +$$

$$+ \left(Q - \frac{Pp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P}{2} J + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right) J_k,$$

სადაც

$$J = \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx, \quad J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}.$$

ამ ინტეგრალთაგან პირველი მარტივად გამოითვლება. მართლაც, ვთქვათ, $x^2 + px + q = z$, მაშინ

$$J = \int \frac{(2x + p)\, dx}{(x^2 + px + q)^k} =$$

$$= \int z^{-k} dz = \frac{1}{(1 - k)\, z^{k-1}} + C = \frac{1}{(1 - k)\, (x^2 + px + q)^{k-1}} + C.$$

ახლა გამოვთვალოთ J_k ინტეგრალი. გვაქვს

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k}.$$

გამოვიყენოთ $t = x + \frac{p}{2}$ ჩასმა მაშინ $dx = dt$. ამასთან გავიხსენოთ, რომ $q - \frac{p^2}{4} > 0$ და ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ აღნიშვნა $q - \frac{p^2}{4} = r^2$. ამის შემდეგ J_k ინტეგრალი ასე გარდავქმნათ:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + r^2)^k} = \frac{1}{r^2} \int \frac{(t^2 + r^2) - t^2}{(t^2 + r^2)^k} dt =$$

$$= \frac{1}{r^2} \int \frac{dt}{(t^2 + r^2)^{k-1}} - \frac{1}{r^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + r^2)^k}. \tag{1.2}$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით, გვექნება

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+r^2)^k} = \int t \frac{t\,dt}{(t^2+r^2)^k} = \frac{1}{2}\int t \frac{d(t^2+r^2)}{(t^2+r^2)^k} =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)}\int t d\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right) = -\frac{t}{2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} +$$

$$+\frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right].$$

ჩავსვამთ რა უკანასკნელ გამოსახულებას (1.2) ტოლობაში, მივიღებთ

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k} = \frac{1}{r^2}\int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{1}{2r^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - \right.$$

$$\left. - \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right] = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} +$$

$$+\frac{2k-3}{2r^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}}$$

ანუ

$$J_k = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)} J_{k-1}. \tag{1.3}$$

როგორც ეს ტოლობა გვიჩვენებს, J_k ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება იმავე სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომელშიაც k ხარისხის მაჩვენებელი ერთი ერთეულით არის დაწეული.

(1.3) ფორმულას ეწოდება რეკურენტული ანუ დაყვანის ფორმულა.

დაყვანის ფორმულის მიმდევრობით გამოყენება მიგვიყვანს ინტეგრალამდე

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+r^2} = \frac{1}{r}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{r} + C.$$

ამის შემდეგ საჭიროა t ცვლადისა და r მუდმივის მნიშვნელობანი შევცვალოთ x ცვლადით და P, Q, p, q მუდმივებით და J_k ინტეგრალიც ბოლომდე გამოთვლილი იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J=\int\frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+4)^2}.$$

გვაქვს:

$$J=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{(x^2+2x+4)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^2}\,dx+$$

$$+\int\frac{dx}{(x^2+2x+4)^2}=-\frac{1}{2(x^2+2x+4)}+\int\frac{dx}{(x^2+2x+4)^2}.$$

თუ უკანასკნელ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $t=x+1$, გვექნება,

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+4)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+3]^2}=\int\frac{dt}{(t^2+3)^2}.$$

ახლა რედუქციის (1.3) ფორმულა გვაძლევს

$$\int\frac{dt}{(t^2+3)^2}=\frac{t}{6(t^2+3)}+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{t}{6(t^2+3)}+$$

$$+\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{x+1}{6(x^2+2x+4)}+\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს:

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+2x+4)^2}=\frac{x-2}{6(x^2+2x+4)}+\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

§ 2. წესიერი რაციონალური წილადის დაშლა უმარტივეს წილადებად

განვიხილოთ წესიერი რაციონალური წილადი $\frac{f(x)}{F(x)}$. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ და $F(x)$ ურთიერთმარტივი ნამდვილი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია, ამასთანავე $F(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთის ტოლია. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით. ამისათვის დაგვჭირდება ქვემოთ მოყვანილი ორი ლემა.

ლემა 1. ვთქვათ, $\frac{f(x)}{F(x)}$ *წესიერი წილადია და* $F(x)=(x-a)^k F_1(x)$, $F_1(a)\neq 0$. *მაშინ* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:*

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)}, \tag{2.1}$$

სადაც პირველ შესაკრებში A ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია, ხოლო მეორე შესაკრები წესიერი წილადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ იგივეობა

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{f(x)-AF_1(x)}{(x-a)^k F_1(x)}. \tag{2.2}$$

ეს ტოლობა მართებულია A სიდიდის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. შევარჩიოთ A ისე, რომ $f(x)-AF_1(x)$ გამოსახულება გაიყოს $x-a$ სხვაობაზე. ამისათვის, ბეზუს თეორემის თანახმად, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს პირობა

$$f(a)-AF_1(a)=0.$$

რაკი $f(a)\neq 0$ და $F_1(a)\neq 0$, ამიტომ ამ ტოლობიდან გვაქვს:

$$A=\frac{f(a)}{F_1(a)}\neq 0.$$

ასეთი A რიცხვი აღვნიშნოთ A_0-ით. მაშინ

$$f(x)-A_0F_1(x)=(x-a)f_1(x), \tag{2.3}$$

სადაც $f_1(x)$ არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ნაკლებია $(x-a)^{k-1}F_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე.

თუ (2.3) გამოსახულებას ჩავსვამთ (2.2) გამოსახულებაში, მივიღებთ (2.1) ტოლობას.

ახლა წესიერ $\dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)}$ წილადზე გამოვიყენოთ (2.1) ფორმულა, გვექნება

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}F_1(x)}.$$

თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\dots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{f_k(x)}{F_1(x)}, \quad (2.4)$$

სადაც $\dfrac{f_k(x)}{F_1(x)}$ წესიერი წილადია.

როდესაც $F_1(x)$ მრავალწევრს აქვს სხვა ნამდვილი ჯერადი ფესვები, მაშინ $\dfrac{f_1(x)}{F_1(x)}$ წესიერი წილადის დასაშლელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (2.4) ფორმულის ანალოგიური ფორმულა.

ლემა 2. ვთქვათ, $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ წესიერი რაციონალური წილადია და

$$F(x)=(x^2+px+q)^k F_1(x),$$

სადაც x^2+px+q სამწევრის ფესვები კომპლექსურია და $F_1(x)$ არ იყოფა ამ სამწევრზე. მაშინ $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}F_1(x)}, \quad (2.5)$$

სადაც პირველ შესაკრებში M და N გარკვეული მუდმივებია. ხოლო მეორე შესაკრები წესიერი წილადია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი M და N რიცხვებისათვის ადგილი აქვს იგივეობას

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{f(x)-(Mx+N)F_1(x)}{(x^2+px+q)^k F_1(x)}. \quad (2.6)$$

განვსაზღვროთ ახლა M და N რიცხვები ისე, რომ $f(x)-(Mx+N)F_1(x)$ მრავალწევრი გაიყოს x^2+px+q მრავალწევრზე. ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ x^2+px+q მრავალწევრის ფესვები იყოს $f(x)-(Mx+N)F_1(x)$ მრავალწევრის ფესვებიც.

ვთქვათ, x^2+px+q მრავალწევრის ფესვებია $\alpha \pm i\beta$. მაშინ ადგილი ექნება ტოლობას

$$f(\alpha+i\beta)-[M(\alpha+i\beta)+N]\,F_1(\alpha+i\beta)=0,$$

საიდანაც

$$\frac{f(\alpha+i\beta)}{F_1(\alpha+i\beta)}=(M\alpha+N)+i\beta M.$$

აქ მარცხენა ნაწილში $\dfrac{f(\alpha+i\beta)}{F_1(\alpha+i\beta)}$ ფარდობა კომპლექსური რიცხვია, რომელიც ასე აღვნიშნოთ:

$$\frac{f(\alpha+i\beta)}{F_1(\alpha+i\beta)}=\alpha'+i\beta'.$$

მაშინ წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$M\alpha+N=\alpha', \quad \beta M=\beta',$$

საიდანაც

$$M=\frac{\beta'}{\beta}, \quad N=\frac{\beta\alpha'-\beta'\alpha}{\beta}. \tag{2.7}$$

ამრიგად, თუ M და N რიცხვებს (2.7) ტოლობებით შევარჩევთ, მაშინ $f(x)-(Mx+N)F_1(x)$ მრავალწევრისათვის $\alpha+i\beta$ იქნება ერთ-ერთი კომპლექსური ფესვი. მაშინ $\alpha-i\beta$ რიცხვიც იქნება იმავე მრავალწევრის ფესვი. მაშასადამე, $f(x)-(Mx+N)F_1(x)$ მრავალწევრი გაიყოფა $[x-(\alpha+i\beta)]\,[x-(\alpha-i\beta)]=x^2+px+q$ მრავალწევრზე. ვთქვათ,

$$\frac{f(x)-(Mx+N)\,F_1(x)}{x^2+px+q}=f_1(x),$$

ე. ი.

$$F(x)-(Mx+N)\,F_1(x)=(x^2+px+q)\,f_1(x),$$

მაშინ (2.6) ტოლობიდან მივიღებთ (2.5) ტოლობას, ამასთან $f_1(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე, ლემა დამტკიცებულია.

ვინაიდან (2.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მეორე შესაკრები არის წესიერი რაციონალური ფუნქცია, ამიტომ მასზე შეგვიძლია გავიმეოროთ ანალოგიური მსჯელობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ მრავალწევრის k ჯერადი $x=\alpha \pm i\beta$ კომპლექსური ფესვებისათვის მართებულია შემდეგი სახის დაშლა:

$$\frac{f(x)}{F(x)}+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\dots+$$

$$+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{x^2+px+q}+\frac{f_k(x)}{F_1(x)}. \tag{2.8}$$

ცხადია, როცა $F(x)$ მრავალწევრს, გარდა $x=\alpha\pm\beta i$ კომპლექსური ფესვებისა, აქვს სხვა კომპლექსური ფესვებიც, მაშინ ამ ფესვების მიმართაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ დამტკიცებული დაშლის ხერხი.

ზემოთ დამტკიცებული 1-ლი და მე-2 ლემების საფუძველზე გვექნება შემდეგი დასკვნა:

თუ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წესიერი წილადის მნიშვნელს აქვს სახე

$$F(x)=(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\dots(x^2+px+q)^{\mu}\dots(x^2+rx+s)^{\lambda},$$

მაშინ $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი ასე წარმოგვიდგება:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{k_1-1}}+\dots+\frac{A_{k_1}}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)^{k_2}}+$$

$$+\frac{B_2}{(x-b)^{k_2-1}}+\dots+\frac{B_{k_2}}{x-b}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+$$

$$+\dots+\frac{M_\mu x+N_\mu}{x^2+px+q}+\dots+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{\lambda}}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\lambda-1}}+$$

$$+\dots+\frac{R_\lambda x+S_\lambda}{x^2+rx+s}. \tag{2.9}$$

$A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, B_1, B_2, \dots, B_{k_1}, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_\mu, N_\mu, R_1, S_1, R_2, S_2, \dots, R_\lambda, S_\lambda$ კოეფიციენტები შეგვიძლია სხვადასხვა ხერხით გამოვთვალოთ. ერთ-ერთ ასეთ ხერხს წარმოადგენს კოეფიციენტთა გატოლების ხერხი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: (2.9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი უნდა დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელამდე, მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილის მრიცხველები დავალაგოთ x-ის ხარისხების მიხედვით და x-ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ უცნობი კოეფიციენტების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნა მოგვცემს საძიებელ კოეფიციენტებს.

დაშლის კოეფიციენტები შეიძლება გამოვთვალოთ აგრეთვე შემდეგი მარტივი მოსაზრების გამოყენებითაც. როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, (2.9) ტოლობის საერთო მნიშვნელზე მიყვანისა და მიღებულტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში მრიცხველების გატოლების შემდეგ, მივიღებთ x ცვლადის მიმართ ორი მრავალწევრის იგივურ ტოლობას. თუ უკანასკნელ იგივეობაში x ცვლადს მივანიჭებთ სხვადასხვა კერძო რიცხვით მნიშვნელობებს, საძიებელი დაშლის კოეფიციენტების გამოსათვლელად, მივიღებთ სათანადო წრფივ განტოლებათა სისტემას.

3. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

ვთქვათ, გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$\int \frac{\varphi(x)}{F(x)}\, dx,$$

სადაც $\varphi(x)$ და $F(x)$ არის სათანადოდ m და n ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრები. როცა $m \geqslant n$, მაშინ გვექნება

$$\int \frac{\varphi(x)}{F(x)}\, dx = \int P(x)\, dx + \int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = \int P(x)\, dx +$$

$$+ A_1 \int \frac{dx}{(x-a)^{k_1}} + A_2 \int \frac{dx}{(x-a)^{k_1-1}} + \ldots + A_{k_1} \int \frac{dx}{x-a} +$$

$$+ B_1 \int \frac{dx}{(x-b)^{k_2}} + B_2 \int \frac{dx}{(x-b)^{k_2-1}} + \ldots + B_{k_2} \int \frac{dx}{x-b} + \cdots +$$

$$+ \int \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}\, dx + \int \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}\, dx + \cdots +$$

$$+ \int \frac{M_{\mu} x + N_{\mu}}{x^2+px+q}\, dx + \cdots + \int \frac{R_1 x + S_1}{(x^2+rx+s)^{\lambda}}\, dx +$$

$$+ \int \frac{R_2 x + S_2}{(x^2+rx+s)^{\lambda-1}}\, dx + \ldots + \int \frac{R_{\lambda} x + S_{\lambda}}{x^2+rx+s}\, dx, \tag{3.1}$$

სადაც $P(x)$ არის მრავალწევრი.

ამრიგად, რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება მიიყვანება მრავალწევრისა და უმარტივესი რაციონალური ფუნქციების ინტეგრებამდე. მრავალწევრის ინტეგრება შესრულდება უბრალოდ დაშლის ხერხის გამოყენებით. უმარტივესი რაციონალური ფუნქციების ინტეგრალები

კი გამოთვლილი გვქონდა § 1-ში. როცა $m < n$, მაშინ (3.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში არ გვექნება პირველი შესაკრები.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}\,dx.$$

ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{x-1},$$

საიდანაც, მარჯვენა ნაწილის გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ, მივიღებთ

$$x^2+x-1=(A_3+B_2)\,x^4+(A_2-2A_3+B_1-B_2)\,x^3+$$
$$+(A_1-2A_2+A_3)\,x^2+(A_2-2A_1)\,x+A_1.$$

ამ იგივეობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების x ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$A_3+B_2=0,\ A_2-2A_3+B_1-B_2=0,\ A_1-2A_2+A_3=1,$$
$$A_2-2A_1=1,\ A_1=-1.$$

აქედან

$$A_1=-1,\ A_2=-1,\ A_3=0,\ B_1=1,\ B_2=0.$$

ამრიგად, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}=-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

გავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი dx დიფერენციალზე და შედეგი ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\int\frac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^3}\,dx=-\int\frac{dx}{x^3}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{1}{2x^2}+$$
$$+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{x^4dx}{(x^4-1)^2}.$$

ჯერ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი, გვექნება:

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{1}{4}\int x d\left(\frac{1}{x^4-1}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{x}{x^4-1} +$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{4}\,\frac{x}{x^4-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}.$$

ახლა კი შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელ ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს, როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური ფესვები და, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$1 = (A+B+M)x^3 + (B-A+N)x^2 + (A+B-M)x + B-A-N.$$

დაშლის კოეფიციენტების გამოსათვლელად გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$A+B+M=0,\; B-A+N=0,\; A+B-M=0,\; B-A-N=1.$$

აქედან მივიღებთ

$$A=-\frac{1}{4},\quad B=\frac{1}{4},\; M=0,\; N=-\frac{1}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{1}{16}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}\,dx.$$

ვინაიდან აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს ორჯერადი

კომპლექსური ფესვები და მარტივი ნამდვილი ფესვი, ამიტომ იგი დაიშლება ასე:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+2x+3}.$$

დაშლის კოეფიციენტების გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ

$$A=1,\ M_1=1,\ N_1=-1,\ M_2=0,\ N_2=0.$$

ამის შემდეგ გამოსათვლელი ინტეგრალი წარმოგვიდგება შემდეგი ორი ინტეგრალის ჯამის სახით:

$$J=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$$

მარტივი გამოთვლების შემდეგ, მივიღებთ

$$J=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

§ 4. ერმიტისა და ოსტროგრადსკის ხერხი

დავუბრუნდეთ, კიდევ ერთხელ, წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრების საკითხს. როგორც ზევით ვნახეთ, ინტეგრალქვეშა $\frac{f(x)}{F(x)}$ ფუნქციის დაშლა უმარტივესი წილადების ჯამად, როცა $F(x)$ მრავალწევრს აქვს ნამდვილი და კომპლექსური ჯერადი ფესვები, საკმარისად რთულია. არსებობს მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს არ ვაწარმოოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დაშლა უმარტივესი წილადების ჯამად და უშუალოდ გამოვყოთ ინტეგრალის რაციონალური ნაწილი, შემდეგ კი ვაინტეგრებთ რაციონალურ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელს აქვს მხოლოდ მარტივი ფესვები. ეს მეთოდი პირველად დამუშავებული იყო ერმიტისა და ოსტროგრადსკის მიერ.

ამრიგად, ვთქვათ გამოსათვლელია ინტეგრალი $\int\frac{f(x)}{F(x)}\,dx$, სადაც $\frac{f(x)}{F(x)}$ წესიერი წილადია და

$$F(x)=(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\ldots(x^2+rx+s)^{\lambda},$$

ამასთანავე $k_1\geqslant 1,\ k_2\geqslant 1,\ \ldots,\ \lambda\geqslant 1.$

ამ ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება უმარტივესი რაციონალური ფუნქციების ინტეგრებამდე. როგორც ვიცით, როცა $k_1>1$, მაშინ $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^{k_1}}=\frac{\overline{A}}{(x-a)^{k_1-1}}$, სადაც A და $\overline{A}$ მუდმივებია. როცა $\lambda>1$, მაშინ $\int \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^{\lambda}}\,dx$ ინტეგრალი წარმოადგენს $\frac{\overline{R}x+\overline{S}}{(x^2+rx+s)^{\overline{\lambda}}}$ სახის რაციონალურ ფუნქციებს და

$$\int \frac{S^*\,dx}{x^2+rx+s}$$

სახის ინტეგრალის ჯამს, სადაც R, S, $\overline{R}$, $\overline{S}$, S^* მუდმივებია, ხოლო ნატურალური რიცხვი $\overline{\lambda}\leqslant\lambda-1$.

თუ შევკრებთ ზემოაღნიშნულ ყველა რაციონალურ ფუნქციას, მივიღებთ $\frac{Y}{Q}$ სახის წესიერ რაციონალურ ფუნქციას, სადაც

$$Q=(x-a)^{k_1-1}(x-b)^{k_2-1}\dots(x^2+rx+s)^{\lambda-1}, \tag{4.1}$$

ხოლო Y ისეთი მრავალწევრია, რომლის ხარისხი ერთით ნაკლებია Q მრავალწევრის ხარისხზე. შემდეგ, თუ შევკრებთ ყველა დანარჩენ ინტეგრალს, მივიღებთ ინტეგრალს წესიერი რაციონალური $\frac{X}{P}$ ფუნქციიდან, სადაც

$$P=(x-a)(x-b)\dots(x^2+rx+s),$$

ხოლო X მრავალწევრის ხარისხი ერთით ნაკლებია P მრავალწევრის ხარისხზე.

ამრიგად, მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx=\frac{Y}{Q}+\int \frac{X}{P}\,dx. \tag{4.2}$$

უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{QY'-Q'Y}{Q^2}+\frac{X}{P},$$

საიდანაც გვექნება

$$f(x)=\frac{F(x)\,Y'}{Q}-\frac{F(x)\,Q'Y}{Q^2}+\frac{F(x)\,X}{P}.$$

ვინაიდან $F(x)=PQ$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$f(x)=PY'-\frac{PQ'Y}{Q}+QX. \tag{4.3}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ PQ' ნამრავლი იყოფა Q მრავალწევრზე, ამისათვის (4.1) ტოლობა გავალოგარითმოთ და შემდეგ x ცვლადის მიმართ გავაწარმოოთ, მივიღებთ

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{k_1-1}{x-a}+\frac{k_2-1}{x-b}+\cdots+\frac{(\lambda-1)(2x+r)}{x^2+rx+s}.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში წილადებს საერთო მნიშვნელზე მივიყვანთ, მივიღებთ $\frac{T}{P}$ სახის ფარდობას, რომელშიც T მრავალწევრია, რომლის ხარისხი ნაკლებია P მრავალწევრის ხარისხზე. მაშასადამე, (4.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მეორე შესაკრები შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$P\frac{Q'}{Q}Y=P\frac{T}{P}\cdot Y=TY$$

და თვით (4.3) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x)=PY'-TY+QX.$$

გავუტოლებთ რა უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში x ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტებს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, საიდანაც განისაზღვრება X და Y მრავალწევრების კოეფიციენტები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ერმიტ-ოსტროგრადსკის მეთოდით ინტეგრალი

$$\int\frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx.$$

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$F(x)=x^3(x^2+1)^2,\quad P(x)=x(x^2+1),\quad Q(x)=x^2(x^2+1).$$

მაშასადამე, X და Y წარმოადგენენ შესაბამისად მეორე და მესამე ხარისხის მრავალწევრებს. ამის გამო (4.2) ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\int \frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)}+$$
$$+\int \frac{Mx^2+Kx+H}{x(x^2+1)}\,dx. \qquad (4\cdot4)$$

გავაწარმოოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი, მივიღებთ

$$\frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{-Ax^5-2Bx^4+(5A-3C)x^3+(4B-4D)x^2+3Cx+2D}{x^3(x^2+1)^2}+$$
$$+\frac{Mx^2+Kx+H}{x(x^2+1)}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მივიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და შემდეგ ტოლობის ორივე ნაწილის მრიცხველები ერთმანეთს გავუტოლოთ, გვექნება

$$x^2-1=Mx^6+(K-A)x^5+(M+H-2B)x^4+(5A-3C+K)x^3+$$
$$+(4B-4D+H)x^2+3Cx+2D.$$

ეს ტოლობა უნდა იყოს იგივეობა. ეს კი მაშინ შეიძლება, როცა ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში კოეფიციენტები x ცვლადის თანატოლი ხარისხების წინ თანატოლია. ამრიგად, კოეფიციენტების მოსაძებნად გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$M=0,\ K-A=0,\ M+H-2B=0,\ 5A-3C+K=0,$$
$$4B-4D+H=1,\ 3C=0,\ 2D=-1,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$A=0,\ B=-\frac{1}{6},\ C=0,\ D=\frac{1}{2},\ M=0,\ K=0,\quad H=-\frac{1}{3}.$$

მაშასადამე, (4.4) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int \frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}}{x^2(x^2+1)}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

დაგვრჩა მოსაძებნი მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი. ვინაიდან

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1},$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$\int \frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{x^2+3}{6x^2(x^2+1)}-\frac{1}{3}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

სავარჯიში

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1. $\int \frac{(31x-96)\,dx}{x^2-3x-18}$. პას. $10\ln(x-6)+21\ln(x+3)+C$.

2. $\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2-2x+5}$. პას. $\frac{1}{2}\ln[(x-1)^2+4]-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

3. $\int \frac{x^2-4x+7}{(x^2-1)(x-3)}\,dx$. პას. $\frac{3}{2}\ln(x+1)+$

$+\frac{1}{2}\ln(x-3)-\ln(x-1)+C$.

4. $\int \frac{x^3-8ax^2-4a^2x+8a^2}{(x^2-a^2)(x^2-4a^2)}\,dx$. პას. $\frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)-$

$-2\ln\frac{x-2a}{x+2a}+C$.

5. $\int \frac{5x^2+3ax+9a^2}{x^3-3ax^2+2a^2x}\,dx$. პას. $\frac{9}{2}\ln x-17\ln(x-a)+$

$+\frac{35}{2}\ln(x-2a)+C$.

6. $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$. პას. $\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

7. $\int \frac{13+6x-2x^2}{(x-1)(x^2+5x+11)}dx$. პას. $\ln(x-1)-$

$$-\frac{3}{2}\ln(x^2+5x+11)+\frac{11}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{19}}+C.$$

8. $\int \frac{2x^2-2x+3}{x^3+1}dx$. პას. $\frac{7}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

9. $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x}dx$. პას. $\frac{2}{3}x^3+3x+\ln(x-1)+$

$$+2\ln x+C.$$

10. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$. პას. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}+C.$

11. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$. პას. $\frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)+$

$$+\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C$$

12. $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}dx$. პას. $-\frac{3}{2(x+2)^2}+\frac{4}{x+2}+\ln(x+2)+C.$

13. $\int \frac{x^2dx}{(x-a)^4}$. პას. $-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{(x-a)^3}+\frac{x}{(x-a)^2}+\frac{1}{x-a}\right]+C.$

14. $\int \frac{(x+1)^3dx}{(x-1)^4}$. პას. $-\frac{6x^2-6x+\frac{8}{3}}{(x-1)^3}+\ln(x-1)+C.$

15. $\int \frac{x^4-5x^3-30x^2-36x}{(x+1)^3(x^2-4)}dx$. პას. $\frac{1-x}{(1+x)^2}+$

$$+2\ln\frac{x+2}{x-2}+\ln(x+1)+C.$$

16. $\int \frac{dx}{x(x-2)^2(x-1)^3}$. პას. $-\frac{2x-1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-2)}+$

$+2\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln x-\frac{7}{4}\ln(x-2)+C.$

17. $\int \frac{(x^3+3x^2+3x+2)}{x^3(x+1)}dx$. პას. $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+2\ln x-$

$-\ln(x+1)+C.$

18. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2}$. პას. $\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+$

$+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.$

19. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^2(x^4-1)}$. პას. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{x}+C.$

20. $\int \frac{dx}{x^4+6x^3+11x^2+6x}$. პას. $\ln\sqrt[6]{\frac{x}{x+3}}+$

$+\ln\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+C.$

21. $\int \frac{(2x^3-1)\,dx}{x(x^3+1)}$. პას. $\ln\frac{1+x^3}{x}+C.$

22. $\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}$. პას. $\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{1-x^3}+\ln\frac{x^3}{1-x^3}\right).$

23. $\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$. პას. $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\right)-\ln\frac{x^2}{x^2+1}+C.$

24. $\int \frac{(1+2x^2)\,x\,dx}{1+x^4}$. პას. $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x^2+\ln(1+x^4)\right]+C.$

25. $\int \frac{x^5dx}{x^8-1}$. პას. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2+\frac{1}{8}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}+C.$

26. $\int \frac{x\,dx}{x^6-1}$.

პას. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$

27. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)}$. პას. $\frac{1}{5} \ln \frac{x^5}{x^5+1}+C$.

28. $\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$. პას. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C$.

29. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-3x^2+9}$. პას. $\frac{1}{4} \ln (x^4-3x^2+9)+$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x^2-3}{3\sqrt{3}}\right)+C.$$

30. $\int \frac{dx}{x^3(x^4+1)}$. პას. $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\operatorname{arc\,tg} x^2\right)+C$.

31. $\int \frac{dx}{x^4(x^6+1)}$. პას. $-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} x^3+C$.

32. $\int \frac{dx}{x^5(x^8+1)}$. პას. $-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} x^4+C$.

33. $\int \frac{x^{11}\,dx}{(x^6+1)^3}$. პას. $\frac{2x^6+1}{12(x^6+1)^2}+C$.

34. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)^2}$. პას. $\frac{1}{4(x^4+1)}+\frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{x^4+1}+C$.

35. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+3x^2+1}$. პას. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{5}}{1-x^2}+C$.

36. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6-5x^4-5x^2+1}$. პას. $\frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}+$

$$+\frac{3}{16} \ln \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}+C.$$

37. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6-1}$. პას. $\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C$.

38. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6+1}$. პას. $\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1-x^2}+\frac{2}{3} \operatorname{arctg} x+C$.

39. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+1}$. პას. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C.$

40. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+1}$. პას. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

41. $\int \frac{x(x-1)\,dx}{x^5+1}$. პას. $\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{10}\ln(x^5+1)+$

$$+\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{x^2-(\sqrt{5}+1)\frac{x}{2}+1}{x^2+(\sqrt{5}-1)\frac{x}{2}+1}+C.$$

42. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+5x^2+1}$. პას. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2+1}{x\sqrt{3}}+C.$

43. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3-1}$. პას. $\frac{1}{3}\ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C.$

44. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+2)^3}$. პას. $-\frac{x^3}{4(x^2+2)^2} - \frac{3x}{8(x^2+2)}+$

$$+\frac{3\sqrt{2}}{16} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} - C.$$

45. $\int \frac{dx}{x^4+1}$. პას. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}+$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$$

46. $\int \frac{dx}{x^3(x^4+1)^2}$. პას. $-\frac{1}{2x^3} - \frac{x^2}{4(x^4+1)} -$

$$-\frac{3}{4} \operatorname{arctg} x^2+C.$$

47. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$. პას. $\frac{2}{3}\ln \frac{x^3+1}{x^3} - \frac{1}{3x^3} -$

$$-\frac{1}{3(x^3+1)}+C.$$

48. $\int \frac{x\,(x^2+1)^3\,dy}{(x^4+2x^2+2)^2}$. პას. $-\frac{(x^2+1)^2}{4\,(x^4+2x^2+2)}+$

$$+\frac{1}{4}\ln(x^4+2x^2+2)+C.$$

49. $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$. პას. $-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8\,(x^2+2x+2)^2}+$

$$+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

თ ა ვ ი X

ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

§ 1. ზოგადი შენიშვნები

ვთქვათ, $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ წარმოადგენს მრავალწევრებს x და y ცვლადების მიმართ. განვიხილოთ რაციონალური ფუნქცია

$$R(x, y)=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{1.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ (1.1) ტოლობაში y ცვლადის მაგივრად ჩასმულია

$$P_0(x)\, y^n+P_1(x)\, y^{n-1}+\ \dots\ +P_{n-1}(x)\, y+P_n(x)=0 \tag{1.2}$$

განტოლების ამონახსნი, სადაც $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x), P_n(x)$ არიან x ცვლადის მრავალწევრები. ამ პირობებში ინტეგრალს

$$\int R(x, y)\, dx \tag{1.3}$$

ა ბ ე ლ ი ს ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ეწოდება. საზოგადოდ, აბელის ინტეგრალი არ ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში. იგი უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციას წარმოადგენს, თუმცა არსებობს (1.3) ინტეგრალების ზოგიერთი კერძო შემთხვევა, როცა იგი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. ჩვენ შევისწავლით (1.3) სახის ინტეგრალებს მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როცა იგი ელემენტარული ფუნქციებით გამოისახება.

ცხადია, რომ (1.2) განტოლება განსაზღვრავს ბრტყელ ალგებრულ წირს, რომლის წერტილის მიმდინარე კოორდინატებია x და y, სადაც $y=f(x)$ არის (1.2) განტოლების ამონახსნი. ჩავწეროთ იმავე წირის განტოლება პარამეტრული სახითაც:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t). \tag{1.4}$$

როგორც ცნობილია, ერთი და იგივე ალგებრული წირის პარამეტრული განტოლება შესაძლოა მრავალი სხვადასხვა სახით ჩაიწეროს.

თუ t პარამეტრი ისეთია, რომ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ რაციონალური ფუნქციებია, მაშინ (1.4) განტოლებებით განსაზღვრულ წირს უ ნ ი კ უ რ ს ა ლ უ რ ი წ ი რ ი ეწოდება. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში (1.3) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს. მართლაც,

$$\int R(x, y)\,dx = \int R[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{1.5}$$

სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $R[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)$ არის t ცვლადის რაციონალური ფუნქცია. როგორც წინა თავში ვნახეთ (1.5) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

ქვევით ჩვენ შევისწავლით (1.5) ინტეგრალის რამდენიმე მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას.

§ 2. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(x, y)\,dx = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx. \tag{2.1}$$

სადაც R არის x და $y = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ვინაიდან (2.1) ინტეგრალში ფესვი შედის წილადწრფივი $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ფუნქციიდან, ამიტომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას წ რ ფ ი ვ ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს უწოდებენ. ვიგულისხმოთ, რომ ნებისმიერი ნამდვილი α, β, γ, δ რიცხვები აკმაყოფილებენ $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ პირობას. თუკი $\alpha\delta = \beta\gamma$, მაშინ $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ფარდობა მუდმივი სიდიდეა და (2.1) ინტეგრალი წარმოადგენს ინტეგრალს რაციონალური ფუნქციიდან.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$t = y = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}. \tag{2.2}$$

მაშინ

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}. \tag{2.3}$$

როგორც ვხედავთ, x და y ცვლადები გამოსახულია რაციონალურად

t პარამეტრის საშუალებით. ამრიგად, (2.2) და (2.3) განტოლებებით წარმოდგენილი წირი უნიკურსალურია და (2.1) ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია. მართლაც, გვაქვს

$$dx = \frac{n(\alpha\delta - \beta\gamma)\, t^{n-1} dt}{(\alpha - \gamma t^n)^2}$$

და

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx = n(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, t\right) \frac{t^{n-1}}{(\alpha - \gamma t^n)^2}\, dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის t პარამეტრის რაციონალური ფუნქცია და მისი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი.. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, \frac{dx}{x}.$$

თანახმად (2.2) ტოლობისა, აქ უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

აქედან მივიღებთ

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{4t\, dt}{(t^2-1)^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, \frac{dx}{x} = -4 \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| -$$

$$- 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C.$$

§ 3. ზოგადი სახის ირაციონალობის ინტეგრება

ახლა ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right] dx, \tag{3.1}$$

სადაც R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ რაციონალური რიცხვებია, ხოლო α, β, γ, δ ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ პირობას. როცა უკანასკნელი პირობა შესრულებული არ არის, ე. ი. როცა $\alpha\delta = \beta\gamma$, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის x ცვლადის რაციონალური ფუნქცია და (3.1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

დავამტკიცოთ, რომ (3.1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს მაშინაც, როცა $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. მართლაც, ვთქვათ, λ არის $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ რაციონალური რიცხვების საერთო მნიშვნელი, მაშინ $\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_k$ მთელი რიცხვებია. გამოვიყენოთ შემდეგი ჩასმა

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^{\lambda}.$$

აქედან

$$x = \frac{\delta t^{\lambda} - \beta}{\alpha - \gamma t^{\lambda}}, \quad dx = \frac{\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)\, t^{\lambda-1} dt}{(\alpha - \gamma t^{\lambda})^2}$$

და (3.1) ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_1}, \ldots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\lambda_k}\right] dx =$$

$$= \lambda(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R\left(\frac{\delta t^{\lambda} - \beta}{\alpha - \gamma t^{\lambda}}, t^{\lambda\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda\lambda_k}\right) \frac{t^{\lambda-1}}{(\alpha - \gamma t^{\lambda})^2}\, dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს t ცვლადის რაციონალურ ფუნქციას და, მაშასადამე, მისი ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{(x-2)\, dx}{\sqrt{3x-1} + \sqrt[3]{3x-1}}.$$

შევნიშნავთ, რომ აქ $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ და ამიტომ $\lambda = 6$. მაშასადამე, საჭიროა ვისარგებლოთ შემდეგი ჩასმით: $3x - 1 = t^6$. აქედან გვექნება

$$x = \frac{1}{3}(t^6 + 1), \quad dx = 2t^5 dt.$$

ამის შემდეგ მოცემული ინტეგრალი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$I=\frac{2}{3}\int\frac{(t^6-5)\,t^3}{t+1}\,dt=$$

$$=\int\left(t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3-4t^2+4t-4+\frac{4}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{27}\sqrt{(3x-1)^3}-\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4}+\frac{2}{21}\sqrt[6]{(3x-1)^7}+$$

$$+\frac{2}{15}\sqrt[6]{(3x-1)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(3x-1)^2}-\frac{8}{9}\sqrt{3x-1}+$$

$$+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3x-1}-\frac{8}{9}\sqrt[6]{3x-1}+\frac{2}{3}\ln\left(\sqrt[6]{3x-1}+1\right)-$$

$$-\frac{x}{3}+C.$$

ინტეგრალებს წრფივი ირაციონალური ფუნქციებიდან მიეკუთვნება აგრეთვე ინტეგრალი

$$\int R(x,\,y)\,dx=\int R\left(x,\,\sqrt[m]{A+\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}}\right)dx. \tag{3.2}$$

სადაც R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, m და n ნებისმიერი ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვებია, A ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. რაც შეეხება α, β, γ, δ ნამდვილ რიცხვებს, ისინი იმავე პირობას აკმაყოფილებენ, როგორსაც (2.1) ინტეგრალის შემთხვევაში. (3.2) სახის ინტეგრალი ამოიხსნება აგრეთვე ელემენტარულ ფუნქციებში. მართლაც, ავიღოთ ჩასმა

$$t=\sqrt[m]{A+\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}}\,. \tag{3.3}$$

აქედან

$$x=\frac{\beta-\delta\,(t^m-A)^n}{\gamma\,(t^m-A)^n-\alpha},\quad dx=\frac{mn\,(\alpha\delta-\beta\gamma)\,(t^m-A)^{n-1}t^{m-1}\,dt}{[\gamma\,(t^m-A)^n-\alpha]^2}.$$

მაშასადამე, (3.2) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{A+\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}}\right) dx=$$

$$=mn(\alpha\delta-\beta\gamma)\int R\left[\frac{\beta-\delta\,(t^m-A)^n}{\gamma\,(t^m-A)^n-\alpha},\ t\right]\frac{t^{m-1}dt}{[\gamma\,(t^m-A)^n-\alpha]^2}.$$

მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აიღება რაციონალური ფუნქციიდან ცვლადის მიმართ და, ამიტომ, იგი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}\ dx.$$

თანახმად (3.3) ჩასმისა, გვექნება

$$t=\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}},$$

საიდანაც

$$x=\frac{1}{(t^2-1)^2-1},\quad dx=-\frac{4\,(t^2-1)\,t\,dt}{[(t^2-1)^2-1]^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}\ dx=-4\int\frac{(t^2-1)\,dt}{t^2\,(t^2-2)^2}$$

და ვინაიდან

$$\frac{t^2-1}{t^2\,(t^2-2)^2}=\frac{1}{16}\,\frac{1}{(t+\sqrt{2}\,)^2}+\frac{\sqrt{2}}{16}\,\frac{1}{t+\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{16}\,\frac{1}{(t-\sqrt{2}\,)^2}-\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{t^2},$$

ამიტომ

$$-4\int\frac{(t^2-1)\,dt}{t^2\,(t^2-2)^2}=-\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{t+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(t+\sqrt{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{t-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(t-\sqrt{2}\right)+C.$$

თუ დავუბრუნდებით ძველ ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)-$$

$$-\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}+\sqrt{2}}+C.$$

§ 4. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. ეილერის ჩასმები

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \tag{4.1}$$

რომელსაც ხშირად უწოდებენ ინტეგრალს კვადრატული ირაციონალობიდან. აქ R აღნიშნავს x და $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ცვლადების რაციონალურ ფუნქციას. გარდა ამისა, იგულისხმება, რომ a, b, c ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

$$b^2-4ac\neq 0 \text{ და } a\neq 0.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა ამ პირობათაგან არ არის შესრულებული პირველი, ე. ი. როცა $b^2-4ac=0$, მაშინ (4.1) ინტეგრალში R ფუნქცია გადაიქცევა რაციონალური არგუმენტების რაციონალურ ფუნქციად რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი კი შესწავლილი იყო წინა თავში. იმ შემთხვევაში, როცა $a=0$, R ფუნქცია შეიცავს წრფივ ირაციონალობას, რომლის ინტეგრალი წინა პარაგრაფში იყო განხილული.

ცხადია, რომ (4.1) ინტეგრალი აბელის ინტეგრალების ერთ-ერთი კერძო სახეა. მისი ამოხსნა, ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით, ყოველთვის მიიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე. ამისათვის გამოიყენება ე. წ. ეილერის ჩასმები. აქ საჭიროა განვიხილოთ სამი შემთხვევა.

I. ვთქვათ, $a>0$. ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ ეილერის **პირველი ჩასმა:**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = z \pm \sqrt{a}\, x. \tag{4.2}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფესვის წინ ავიღოთ, მაგალითად, ნიშანი $+$ და ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში. მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ

$$x = \frac{z^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\, z},$$

საიდანაც

$$dx = -2\, \frac{\sqrt{a}\, z^2 - bz + \sqrt{a}\, c}{(b - 2\sqrt{a})^2}\, dz.$$

თუ x ცვლადის მნიშვნელობას შევიტანთ (4.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\frac{\sqrt{a}\, z^2 - bz + \sqrt{a}\, c}{b - 2\sqrt{a}\, z}.$$

როგორც ვხედავთ, უკანასკნელი სამი ფორმულით, ინტეგრების ძველი x ცვლადი, მისი დიფერენციალი და კვადრატული ირაციონალობა გამოსახულია ინტეგრების ახალი z ცვლადის რაციონალური ფუნქციებით. ამის შემდეგ (4.2) ინტეგრალი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx = -2 \int R\left(\frac{z^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\, z}, -\right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{a}\, z^2 - bz + \sqrt{a}\, c}{b - 2\sqrt{a}\, z} \right) \frac{\sqrt{a}\, z^2 - bz + \sqrt{a}\, c}{(b - 2\sqrt{a z})^2}\, dz.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრალს z ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან და, მაშასადამე, იგი ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

თანახმად (4.2) ჩასმისა, გვექნება

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = z + x,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 - 2z}, \quad dx = -2\, \frac{z^2 - z + 1}{(1 - 2z)^2}\, dz,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=-\frac{z^2-z+1}{(1-2z)^2}.$$

ამრიგად, მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$I=2\int\frac{dz}{1-2z}=-\ln(1-2z)+C.$$

ვინაიდან $z=\sqrt{x^2+x+1}-x$, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left(1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

II. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a<0$ და $c>0$. ამ შემთხვევაში (4.1) ინტეგრალის გამოსათვლელად მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ეილერის მეორე ჩასმა

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფესვის წინ ავიღოთ, მაგალითად, $+$ ნიშანი. ტოლობის ორივე ნაწილი კვადრატში ავახარისხოთ და გამოვსახოთ x, dx, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ინტეგრების ახალი z ცვლადით, გვექნება

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,z-b}{a-z^2},\qquad dx=2\,\frac{\sqrt{c}z^2-bz+a\sqrt{c}}{(a-z^2)^2}dz;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,z^2-bz+a\sqrt{c}}{a-z^2}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ფორმულებს, (4.1) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=2\int R\left(\frac{2\sqrt{c}\,z-b}{a-z^2},\ \frac{\sqrt{c}\,z^2-bz+a\sqrt{c}}{a-z^2}\right)\frac{\sqrt{c}\,z^2-bz+a\sqrt{c}}{(a-z^2)^2}dz.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის z ცვლადის რაციონალური ფუნქცია და ამიტომ თვით ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

გამოვიყენოთ ეილერის მეორე ჩასმა

$$\sqrt{-x^2+x+2}=xz+\sqrt{2}$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში და მიღებული შედეგიდან გამოვთვალოთ x ახალი z ცვლადის საშუალებით, გვექნება

$$x=\frac{1-2\sqrt{2}\,z}{1+z^2}.$$

აქედან

$$dx=2\,\frac{\sqrt{2}\,z^2-z-\sqrt{2}}{(1+z^2)^2}\,dz.$$

შევიტანოთ x ცვლადის მნიშვნელობა ჩასმის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$\sqrt{-x^2+x+2}=-\frac{\sqrt{2}\,z^2-z-\sqrt{2}}{1+z^2}.$$

მაშასადამე,

$$I=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=2\operatorname{arctg} z+c.$$

თუ დავუბრუნდებით ინტეგრების ძველ ცვლადს, გვექნება

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}}=2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{-x^2+x+2}-\sqrt{2}}{x}\right)+C.$$

III. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $a<0$ და $c<0$, ხოლო ax^2+bx+c სამწევრს აქვს ნამდვილი α და β ფესვები. ამ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ ერთ-ერთი, მაგალითად, α ფესვი და გამოვიყენოთ ეილერის მესამე ჩასმა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,z.$$

აქედან

$$\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=(x-\alpha)\,z.$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში, მივიღებთ

$$a\,(x-\beta)=(x-\alpha)\,z^2,$$

საიდანაც

$$x=\frac{\alpha\beta-\alpha z^2}{\alpha-z^2},\quad dx=\frac{2\alpha\,(\beta-\alpha)\,z}{(\alpha-z^2)^2}\,dz$$

შევიტანოთ x ცვლადის გამოთვლილი მნიშვნელობა ჩასმის მარჯვენა ნაწილში; გამარტივების შემდეგ გვექნება

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\alpha(\beta-\alpha)z}{\alpha-z^2}.$$

მაშასადამე, (4.1) ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=$$

$$2\alpha(\beta-\alpha)\int R\left(\frac{\alpha\beta-\alpha z^2}{\alpha-z^2},\ \frac{\alpha(\beta-\alpha)z}{\alpha-z^2}\right)\frac{z\,dz}{(\alpha-z^2)^2}.$$

ცხადია, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის z ცვლადის მიმართ რაციონალური ფუნქცია და ამიტომ მისი ინტეგრალი არის ელემენტარული ფუნქცია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ეილერის მესამე ჩასმა გამოსადეგია არა მარტო მაშინ, როცა $a<0$ და $c<0$, არამედ მაშინაც, როცა $a>0$, $c<0$. არსებითი მნიშვნელობა იმას აქვს, რომ ax^2+bx+c სამწევრის ფესვები უნდა იყოს ნამდვილი რიცხვები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}.$$

აქ $b^2-4ac=1>0$, ფესვქვეშა $-x^2+5x-6$ სამწევრის ფესვებია $\alpha=2$, $\beta=3$. ამიტომ ეილერის მესამე ჩასმა შეიძლება ავიღოთ ასეთი სახით:

$$\sqrt{-x^2+5x-6}=\sqrt{-(x-2)(x-3)}=(x-2)z.$$

ავახარისხებთ რა ამ ტოლობას კვადრატში და გამოვსახავთ ინტეგრების x ცვლადს ახალი z ცვლადით, გვექნება

$$x=\frac{2z^2+3}{z^2+1},$$

საიდანაც

$$dx=-\frac{2z\,dz}{(1+z^2)^2},\quad \sqrt{-x^2+5x-6}=\frac{z}{z^2+1}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ

$$I=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=2\operatorname{arctg} z+C.$$

ახლა ისევ x ცვლადს დავუბრუნდეთ, მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = 2\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{-x^2+5x-6}}{x-2}\right)+C.$$

IV. განვიხილოთ (4.1) ინტეგრალის ერთი მნიშვნელოვანი კერძო სახე

$$\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4.3}$$

სადაც $P(x)$ მრავალწევრია. ცხადია, რომ იგი შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \int \frac{x^k dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \sum_{k=0}^{m} a_k X_k,$$

სადაც m არის $P(x)$ მრავალწევრის ხარისხი, a_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ ამ მრავალწევრის კოეფიციენტებია, ხოლო

$$X_k = \int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{4.4}$$

რა თქმა უნდა უკანასკნელი ინტეგრალი შეგვიძლია ეილერის ერთ-ერთი ჩასმით ამოვხსნათ, მაგრამ ამ მეთოდის გამოყენება, ხშირად, დაკავშირებულია მომქანცავ გამოთვლებთან. ამის გამო, სასურველია მისი გამოთვლა ვცადოთ კიდევ სხვა, უფრო მარტივი, ხერხითაც. ამ მიზნით ქვევით ჩვენ გამოვიყვანთ X_k ინტეგრალის რეკურენტულ ანუ დაყვანის ფორმულას.

გვაქვს:

$$\left(x^{k-1}\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' =$$

$$= \frac{(k-1)\,x^{k-2}(ax^2+bx+c)+\dfrac{1}{2}\,x^{k-1}(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს ვაინტეგრებთ, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$X_k = \frac{x^{k-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{ak} - \frac{(2k-1)\,b}{a^2 k}\,X_{k-1} -$$

$$-\frac{k-1}{k}\,\frac{c}{a}\,X_{k-2}. \tag{4.5}$$

უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს X_k ინტეგრალის დაყვანის ფორმულას.

როგორც ვხედავთ X_k ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება ამავე ტიპის ორი ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომლებშიც k რიცხვი შემცირებულია სათანადოდ ერთით და ორით. (4.5) ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება მიგვიყვანს

$$X_0=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ინტეგრალამდე, რომლის ამოხსნა ჩვენთვის ცნობილია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

გამოვიყენებთ რა დაყვანის (4.5) ფორმულას, მივიღებთ

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

იმავე (4.5) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\sqrt{x^2+x+1}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\sqrt{x^2+x+1}+$$

$$+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{x^2+x+1}-$$

$$-\ln(1+2x-2\sqrt{x^2+x+1})+C.$$

V. X_k ინტეგრალის სახემდე დაიყვანება

$$Y_m=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

სახის ინტეგრალი, რომელიც აგრეთვე (4.1) ინტეგრალის კერძო სახეს წარმოადგენს. ამ ინტეგრალში m არის ნულზე მეტი მთელი რიცხვი, ხოლო α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. გამოვიყენოთ შემდეგი ჩასმა

$$x-\alpha=\frac{1}{t}.$$

აქედან

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{t}\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1},$$

სადაც a_1, b_1, c_1 გამოისახება a, b, c, α მუდმივების საშუალებით. ამის შემდეგ Y_m ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$Y_m = -\int \frac{t^{m-1}\,dt}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}.$$

როგორც ვხედავთ უკანასკნელი ინტეგრალი არის X_{m-1} ინტეგრალი.

VI. ახლა შევჩერდეთ ისეთ დიფერენციალის ინტეგრებაზე, რომელიც შეიცავს ორ წრფივ ირაციონალობას. ასეთი ინტეგრალების ზოგადი სახეა

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})\,dx, \tag{4.6}$$

სადაც R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, α, β, γ, δ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია და აკმაყოფილებენ პირობას

$$\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

დავამტკიცოთ, რომ (4.6) სახის ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ისევ (4.1) სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე. მართლაც, გამოვიდეთ შემდეგი სახის ჩასმიდან

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = t\sqrt{\gamma x+\delta}. \tag{4.7}$$

(4.7) ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში და მიღებული შედეგიდან გამოვთვალოთ x ცვლადი, გვექნება

$$x = \frac{\delta t^2 - \beta}{\alpha - \gamma t^2}, \tag{4.8}$$

საიდანაც

$$dx = \frac{2(\alpha\delta - \beta\gamma)\,t}{(\alpha - \gamma t^2)^2}\,dt \tag{4.9}$$

და

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = \frac{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}\,t}{\sqrt{\alpha - \gamma t^2}}, \quad \sqrt{\gamma x+\delta} = \frac{\sqrt{\alpha\delta - \beta\delta}}{\sqrt{\alpha - \gamma t^2}}.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ (4.7) ჩასმის დახმარებით $\sqrt{\alpha x+\beta}$ და $\sqrt{\gamma x+\delta}$ ირაციონალობანი ერთი $\sqrt{\alpha - \gamma t^2}$ ირა-

ციონილობით გამოისახებიან. რაც შეეხება x ცვლადსა და dx დიფერენციალს, როგორც (4.8) და (4.9) ფორმულები გვიჩვენებს, ისინი ახალი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციებია. ამრიგად, (4.6) ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})\, dx=$$

$$=\alpha(\alpha\delta-\beta\gamma)\int R\left[\frac{\delta t^2-\beta}{\alpha-\gamma t^2}, \frac{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}\, t}{\sqrt{\alpha-\gamma t^2}}, \frac{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma t^2}}\right]\frac{t\, dt}{(\alpha-\gamma t^2)^2}=$$

$$=\alpha(\alpha\delta-\beta\gamma)\int R_1(t, \sqrt{\alpha-\gamma t^2})\, dt,$$

სადაც R_1 არის t ცვლადის $\sqrt{\alpha-\gamma t^2}$ ირაციონალობის რაციონალური ფუნქცია. ცხადია, უკანასკნელი ინტეგრალი არის (4.1) სახის ინტეგრალი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}\sqrt{2x+1}}.$$

თანახმად (4.7) ფორმულისა, აქ უნდა ავიღოთ ჩასმა

$$\sqrt{x-1}=t\sqrt{2x+1}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში და გამოვთვალოთ x, გვექნება

$$x=\frac{1+t^2}{1-2t^2},$$

საიდანაც

$$dx=\frac{6t\, dt}{(1-2t^2)^2}.$$

გარდა ამისა, ადვილად გამოვსახავთ t ცვლადით ინტეგრალქვეში ირაციონალობებს ერთი ირაციონალობის საშუალებით:

$$\sqrt{x-1}=\frac{\sqrt{3}\, t}{\sqrt{1-2t^2}}, \quad \sqrt{2x+1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

მაშასადამე,

$$I=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\,\mathbf{arctg}\, t+C.$$

დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადს, გვექნება

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}\sqrt{2x+1}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} + C.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ თუ (4.1) ინტეგრალის ნაცვლად განვიხილავთ ინტეგრალს

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx,$$

სადაც $P(x)$ ორზე მაღალი ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ ინტეგრალი, საზოგადოდ, არ ამოიხსნება ელემენტარული ფუნქციების კლასში.

§ 5. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება

ამ პარაგრაფში შევისწავლით

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx \qquad (5.1)$$

სახის ინტეგრალს, სადაც m, n, p არის რაციონალური რიცხვები, ხოლო a და b ნამდვილი რიცხვებია. ინტეგრალქვეშა $x^m(a+bx^n)^p dx$ დიფერენციალს ეწოდება **ბინომური დიფერენციალი**. a და b კოეფიციენტები გავლენას არ ახდენს ბინომური დიფერენციალის ინტეგრების სირთულეზე, არსებითი მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ m, n, p პარამეტრების რიცხვით მნიშვნელობებს. იმ შემთხვევაში, როცა m, n, p რიცხვები (ან მათი ნაწილი) ირაციონალურია, (5.1) ინტეგრალი, საზოგადოდ, წარმოადგენს უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციას. თუ m, n, p პარამეტრები რაციონალური რიცხვებია, მაშინ არსებობს სამი შემთხვევა, როცა (5.1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

რუსმა მათემატიკოსმა პ. ჩებიშევმა დაამტკიცა, რომ მხოლოდ ხსენებული სამი შემთხვევით ამოიწურება ბინომური დიფერენციალის ელემენტარულ ფუნქციებში ინტეგრების საკითხი.

თეორემა. თუ m, n, p *რაციონალური რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთ-ერთს შემდეგი სამი პირობიდან:* 1) p *მთელია,* 2) $\frac{m+1}{n}$ *მთელია,* 3) $\frac{m+1}{n}+p$ *მთელია, მაშინ ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შესრულდება.*

წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. *თუ (5.1) ინტეგრალში m და n რიცხვებიდან ერთ-ერთი, ან ორივე წილადია, მაშინ გარკვეული ჩასმით შესაძლოა ინტეგრალქვეშა დიფერენციალი მივიყვანოთ ისეთ ახალ ბინომურ დიფერენციალამდე, რომელშიც m და n რიცხვების როლში მთელი რიცხვები იქნება.*

მართლაც, ვთქვათ m და n რიცხვების საერთო მნიშვნელია λ. მაშინ, $m\lambda$ და $n\lambda$ მთელი რიცხვებია. გამოვიყენოთ შემდეგი ჩასმა

$$x=t^{\lambda},$$

მაშინ

$$dx=\lambda t^{\lambda-1}\,dt$$

და (5.1) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\lambda\int t^{m\lambda+\lambda-1}(a+bt^{n\lambda})^p\,dx.$$

როგორც ვხედავთ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ინტეგრალი ისევ ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც $m\lambda+\lambda-1$ და $n\lambda$ მთელი რიცხვებია და ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თვითონ თეორემა. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. ვთქვათ, p მთელი რიცხვია. ამ შემთხვევაში, ზევით დამტკიცებული ლემის ძალით, m და n რიცხვების როლში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ მთელი რიცხვები და, ვინაიდან p მთელია, ამიტომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია იქნება რაციონალური ფუნქცია. მისი ინტეგრალი, როგორც ვიცით, ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება. კერძოდ, თუ p მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ (5.1) ინტეგრალის გამოთვლა უფრო გამარტივდება. მართლაც, დავშლით რა $(a+bx^n)^p$ ფუნქციას ბინომის წესით (5.1) ინტეგრალის გამოთვლა ხარისხოვანი ფუნქციების ინტეგრებაზე მიიყვანება.

განვიხილოთ ახლა მეორე შემთხვევა. ვთქვათ, $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$a+bx^n=t.$$

აქედან

$$x=\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}(t-a)^{\frac{1}{n}},\quad x^m=\frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(t-a)^{\frac{m}{n}},$$

$$dx=\frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(t-a)^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ ინტეგრალში, გვექნება

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int t^p(t-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აღებულია ისევ ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც p რიცხვის როლს ასრულებს უკვე $\frac{m+1}{n}-1$. გავითვალისწინებთ რა ზევით განხილულ პირველ შემთხვევას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (5.1) ინტეგრალი არის ელემენტარული ფუნქცია, თუ $\frac{m+1}{n}-1$ მთელი რიცხვია, მაგრამ $\frac{m+1}{n}-1$ მთელი რიცხვია, როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელია. ამრიგად, (5.1) ინტეგრალი ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციებში, როდესაც $\frac{m+1}{n}$ მთელია.

განვიხილოთ მესამე შემთხვევა. ვთქვათ, $\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია. გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx.$$

შევნიშნავთ, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აღებულია ისევ ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც m შეცვლილია $m+np$ რიცხვით, ხოლო n შეცვლილია $-n$-ით. თანახმად მეორე შემთხვევისა, აქედან გამომდინარეობს, რომ (5.1) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა, თუ $\frac{m+np+1}{n}=\frac{m+1}{n}+p$ მთელი რიცხვია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[10]{x^7}\,(1+\sqrt[5]{x^3})}.$$

ეს ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$I=\int x^{-\frac{7}{10}}\left(1+x^{\frac{3}{5}}\right)^{-1}dx.$$

როგორც ვხედავთ, აქ $p=-1$ მთელი რიცხვია. ავიღოთ ჩასმა

$$x=t^{10}.$$

აქედან

$$dx=10t^9\,dt,\quad x^{-\frac{7}{10}}=t^{-7},\quad x^{\frac{3}{5}}=t^6.$$

მაშასადამე,

$$I=10\int\frac{t^2dt}{1+t^6}=\frac{10}{3}\int\frac{d\,(t^3)}{1+(t^3)^2}=\frac{10}{3}\operatorname{arctg}t^3+C=$$

$$=\frac{10}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[10]{x^3}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ჯერ იგი წარმოვადგინოთ ასე:

$$I=\int x^3\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

აქ $m=3,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}$. ამ შემთხვევაში $\frac{m+1}{n}=2$ მთელი რიცხვია. ავიღოთ ჩასმა

$$1-x^2=t,$$

აქედან

$$x=(1-t)^{\frac{1}{2}},\quad dx=-\frac{1}{2}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,(1-t)\,dt.$$

ახლა კი ვისარგებლოთ ჩასმით: $t=z^2$; მაშინ

$$dt=2z\,dz,\quad t^{-\frac{1}{2}}=z^{-1}$$

და მოცემული ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$I=\int(z^2-1)\,dz+C=\frac{1}{3}z^3-z+C=\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\sqrt{1-x^2}+C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

გვაქვს

$$I=\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$$

აქ $m=0$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$. ამ შემთხვევაში $\frac{m+1}{n}+p=-1$ მთელი რიცხვია. მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$I=\int x^{-3}(x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$$

ახლა კი გამოვიყენოთ ჩასმა

$$x^{-2}+1=t.$$

აქედან

$$x=(t-1)^{-\frac{1}{2}},\quad dx=-\frac{1}{2}(t-1)^{-\frac{3}{2}}dt,\quad x^{-3}=(t-1)^{\frac{3}{2}}.$$

მაშასადამე,

$$I=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt=t^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$, პ ა ს. $-x-4\sqrt{x}-4\ln(\sqrt{x}-1)+C$.

2. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$, პ ა ს. $2\sqrt{x+1}+\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+C$.

3. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$, პ ა ს. $-\frac{2}{15}(2a+3x)\sqrt{(a-x)^3}+C$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$, პ ა ს. $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C$.

5. $\int \sqrt{(a+bx)^m}\,dx$, პ ა ს. $\frac{2}{(m+2)\,b}\sqrt{(a+bx)^{m+2}}+C$.

6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a-x}}$. პას. $-\frac{2}{3}\sqrt{a-x}\,(x+2a)+C.$

7. $\int x^2\sqrt{a+x}\,dx$. პას. $\frac{2}{105}\sqrt{a+x}\,(8a^3-4a^2x+$

$+3ax^2+15x^3)+C.$

8. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx$, პას. $2\sqrt{a+bx}+$

$+\sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C.$

9. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a-x}}$, პას. $-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(a-x)^2}\,(2x+3a)+C.$

10. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}}$, პას. $\frac{5}{36}b^2\sqrt[5]{(a+bx)^4}\,(4bx-5a)+C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}$, პას. $\frac{1}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}+(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$

12. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$, პას. $\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$, პას. $-\frac{3}{4}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}+C.$

14. $\int \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$, პას. $-\sqrt[3]{(1+x)(1-x)^2}+$

$+\ln\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)+$

$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{1-x}}+C.$

15 $\int \sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}\,dx$, პას. $-\sqrt[4]{(2-x)(1-x)^3}+$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{2-x}-\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[4]{2+x}+\sqrt[4]{1-x}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}+C.$$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-1)^5}}$, პას. $-4\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}+C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^7}}$, პას. $\frac{3}{16}\,\frac{3x+5}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+C.$

18. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x(x-1)}}$, პას. $\frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C.$

19. $\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}\,dx$, პას. $-(5+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$

$$+6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

20. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}\,dx$, პას. $x+1+4\sqrt{x+1}+$

$$+2\ln(x-\sqrt{x+1})+$$

$$+\frac{6}{\sqrt{5}}\ln\frac{2\sqrt{x+1}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{x+1}-1+\sqrt{5}}+C.$$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$, პას. $2\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x+2}+$

$$+\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}+\sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}+C.$$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, პას. $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-x^2}}$, პას. $a\arcsin x+$

$$+\sqrt{1-a^2}\ln(x\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-x^2})+C.$$

24. $\int x\,(3x^2+2a^2\sqrt{a^2+x^2})dx$, პას. $x^2\sqrt{a^2+x^2}+C$.

25. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$, პას. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x+$

$+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$

$+9\ln(\sqrt[6]{x}-1)+3\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$.

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6x+7}}$, პას. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2x+$

$+\sqrt{2}\sqrt{2x^2+6x+7})+C$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-4x^2}}$, პას. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1+4x}{\sqrt{5}}+C$.

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x-5x^2}}$, პას. $-\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{4-5x}{\sqrt{51}}+C$.

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$, პას. $\ln(1+x+\sqrt{x^2+2x-3})+C$.

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$, პას. $\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(6x\pm\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2})+C$.

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}$, პას. $\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C$.

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2bx-cx^2}}$, პას. $-\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{b-cx}{b}+C$. $c>0$.

33. $\int \sqrt{a+bx^2}\,dx$, პას. $\frac{x}{2}\sqrt{a+bx^2}+$

$+\frac{a}{2\sqrt{b}}\ln(bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2})+C$.

34. $\int \sqrt{a-bx^2}\,dx$, პას. $\frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2}-$

$-\frac{a}{2\sqrt{q}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C$.

35. $\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx$, პას. $\frac{x+a}{2}\sqrt{2ax+x^2}-$

$-\frac{a^2}{2}\ln(x+a+\sqrt{2ax+a^2})+C.$

36. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx.$ პას. $\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}-$

$-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a-x}{a}+C.$

37. $\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx$, პას. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{ax}{6}-\frac{a^2}{2}\right)\sqrt{2ax-x^2}+$

$+\frac{a^3}{2}\arcsin\frac{a-x}{a}+C.$

38. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$, პას. $\frac{a^2}{3b}-\frac{2a}{3b^2}\sqrt{a+bx^2}+C.$

39. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}$, პას. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x-2}+C.$

40. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}$,

პას. $-\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+4}{\sqrt{6}\,(x-1)}+C.$

41. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, პას. $-\arcsin\frac{1}{x}+C.$

42. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$, პას. $-\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{5}}+C.$

43. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$, პას. $-\ln\frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$

44. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$,

პას. $\pm\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}+C.$

45. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{6-6x+x^2}}$, პას. $\frac{1}{x-1}\sqrt{6-6x+x^2}+$

$$+2\ln\frac{3-2x-\sqrt{6-6x+x^2}}{x-1}+C.$$

46. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-4x-2x^2}}$, პას. $-\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}\right)\sqrt{1-4x-2x^2}+$

$$+7\ln\frac{1-2x-\sqrt{1-4x-2x^2}}{x}+C.$$

47. $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-2x-2}}$, პას. $\frac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x+1}+$

$$+2\ln\frac{-1-2x-\sqrt{x^2-2x-2}}{x+1}+C.$$

48. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$, პას. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

49. $\int x^3\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx$, პას. $\frac{x^2-2a^2}{4}\sqrt{a^4-x^4}-$

$$+\frac{a^4}{4}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C.$$

50. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$,

პას. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{3x+3+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}-$

$$-\frac{2}{\sqrt{7}}\ln\frac{5x+4+2\sqrt{7}\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}+C.$$

51. $\int \frac{dx}{(x^2+x-3)\sqrt{x^2+x+2}}$,

პას. $\frac{1}{\sqrt{65}}\ln\frac{\sqrt{5}(2x+1)-\sqrt{13}\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{5}(2x+1)+\sqrt{13}\sqrt{x^2+x+2}}+C.$

52. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-x+2)\sqrt{2x^2-2x+1}}$,

პას. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{3}}+C.$

53. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(4x^2+5x+4)\sqrt{3x^2-4x+3}}$,

პას. $\frac{5}{2\sqrt{403}} \ln \frac{\sqrt{13}\sqrt{3x^2-4x+3}-\sqrt{31}\,(1-x)}{\sqrt{13}\sqrt{3x^2-4x+3}+\sqrt{31}\,(1-x)}+$

$+\frac{1}{\sqrt{93}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+3}}{\sqrt{31}\,(1+x)}+C.$

54. $\int \frac{(x-3)dx}{(2x^2+6x+1)\sqrt{3x^2+8x+2}}$,

პას. $\frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \frac{\sqrt{7}\sqrt{3x^2+8x+2}+2-x}{\sqrt{7}\sqrt{3x^2+8x+2}-2+x}+$

$+\frac{2}{3} \ln \frac{\sqrt{3x^2+8x+2}+x+1}{\sqrt{3x^2+8x+2}-x-1}+C.$

55. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$,

პას. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4(1+x^2)}-\frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}\,x}+C.$

თავი XI

ზოგიერთი ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრება

ტრანსცენდენტური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, საზოგადოდ, ელემენტარულ ფუნქციას არ წარმოადგენს. ხშირად იტყვიან, რომ ტრანსცენდენტური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ აიღება სასრული სახით. მიუხედავად ამისა, არსებობს მეტად მნიშვნელოვანი გამონაკლისები, როცა ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. ქვევით ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ მნიშვნელოვან ტრანსცენდენტურ ფუნქციებს, რომელთა განუსაზღვრელი ინტეგრალი სასრული სახით აიღება.

§ 1. ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული დიფერენციალის ინტეგრება

1°. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx, \tag{1.1}$$

სადაც R არის $\sin x$ არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია. ადვილ შესამჩნევია, რომ (1.1) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა. მართლაც, გამოვიყენოთ ჩასმა: $\sin x=t$, მაშინ $\cos x\,dx=dt$ და ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx=\int R(t)\,dt.$$

როგორც ვხედავთ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი, რომელიც ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

სრულიად ანალოგიურად ამოიხსნება აგრეთვე შემდეგი ინტეგრალი

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx,$$

სადაც R არის $\cos x$ არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}.$$

თუ ავიღებთ ჩასმას $\sin x=t$, გვექნება

$$I=\int \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

2°. ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}, \tag{1.2}$$

სადაც R არის $\operatorname{tg} x$ არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია. მისი გამოთვლა ადვილად მიიყვანება ახალი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე და, მაშასადამე, ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ $\operatorname{tg} x=t$ ჩასმა. მაშინ $\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$ და (1.2) ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int R(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}=\int R(t)\, dt.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრალს რაციონალური ფუნქციიდან.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\, dx.$$

გვაქვს

$$I=\int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

ავიღოთ $\operatorname{tg} x=t$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I=\int t^3 dt=\frac{1}{4} t^4+C=\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x+C.$$

3°. ზევით განხილული (1.1) და (1.2) ინტეგრალების გამოთვლა გვარწმუნებს, რომ ყოველი ინტეგრალი

$$\int R[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx, \tag{1.3}$$

სადაც R არის უწყვეტად წარმოებადი $\varphi(x)$ არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია, მარტივად ამოიხსნება $\varphi(x)=t$ ჩასმის გამოყენებით. მართლაც, პირდაპირ ჩანს, რომ ეს ჩასმა (1.3) ინტეგრალის გამოთვლას მიიყვანს t ცვლადის მიმართ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{2+\ln x}{x\ln^2 x}\,dx.$$

აქ

$$\varphi(x)=\ln x,\ R[\varphi(x)]=\frac{2+\ln x}{\ln^2 x}.\quad \varphi'(x)=\frac{1}{x}.$$

ავიღოთ $\ln x=t$ ჩასმა. აქედან $\frac{dx}{x}=dt$. მაშასადამე,

$$I=\int \frac{2+t}{t^2}\,dt=2\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t}=\ln t-$$

$$-\frac{2}{t}+C=\ln\ln x-\frac{2}{\ln x}+C.$$

4°. ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{1.4}$$

სადაც R არის $\sin x$ და $\cos x$ არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ეს ინტეგრალი

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \tag{1.5}$$

ჩასმის საშუალებით მიიყვანება t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლამდე ან, როგორც ხშირად ამბობენ; (1.5) ჩასმა მუდამ ახდენს (1.4) ინტეგრალის რაციონალიზაციას. მართლაც, გამოვსახოთ $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები t ცვლადით. გვაქვს:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

გარდა ამისა. (1.5) ჩასმიდან მივიღებთ $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$ და, ამიტომ

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

ამრიგად, თუ გამოვალთ (1.5) ჩასმიდან, მაშინ $\sin x$, $\cos x$ და dx გამოისახება ინტეგრების ახალი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციებით და (1.4) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

ცხადია, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ინტეგრალი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან და, მაშასადამე, ამოიხსნება სასრული სახით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

გამოვიყენოთ (1.5) ჩასმა, გვექნება

$$I = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{a + b\cos x},$$

სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია. ავიღოთ (1.5) ჩასმა, მივიღებთ

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{a + b\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{(a+b) + (a-b)\,t^2}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $a + b > 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $a + b = \alpha^2$ და

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) $a-b>0$, 2) $a-b<0$. პირველ შემთხვევაში გამოვიყენოთ $a-b=\beta^2$ აღნიშვნა. მაშინ გვექნება

$$I=2\int\frac{dt}{\alpha^2+\beta^2t^2}=\frac{2}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,t\right)+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

მეორე შემთხვევაში შემოვიღოთ $a-b=-\beta^2$ აღნიშვნა, მივიღებთ

$$I=2\int\frac{dt}{\alpha^2-\beta^2t^2}=\frac{1}{\alpha\beta}\ln\left|\frac{\alpha+\beta t}{\alpha-\beta t}\right|+C.$$

ჩავსვათ α და β რიცხვების მნიშვნელობანი და თანაც დავუბრუნდეთ ინტეგრების ძველ ცვლადს, გვექნება

$$I=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

(1.5) ჩასმა ყოველთვის ახდენს (1.4) ინტეგრალის რაციონალიზაციას, მაგრამ არის ამ ინტეგრალის ისეთი კერძო შემთხვევები, როცა მის რაციონალიზაციას შესაძლოა მივაღწიოთ და ბოლომდე გამოვთვალოთ უფრო მოხერხებული გარდაქმნებით.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ორი ცვლადის ყოველი რაციონალური $R(u, v)$ ფუნქცია, რომელიც კენტია v არგუმენტის მიმართ, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$R(u,\ v)=vR_1(u,\ v^2), \tag{1.6}$$

სადაც R_1 არის u და v^2 არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია.

სრულიად ასევე, თუ $R(u, v)$ კენტია u არგუმენტის მიმართ, მაშინ იგი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$R(u,\ v)=uR_2(u^2,\ v), \tag{1.7}$$

სადაც R_2' არის u^2 და v არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია.

თუკი რაციონალური $R(u, v)$ ფუნქცია ლუწია u არგუმენტის მიმართ, მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$R(u,\ v)=R_3(u^2,\ v), \tag{1.8}$$

სადაც R_3 არის u^2 და v არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია.

ანალოგიურ ტოლობას აქვს ადგილი როცა $R(u, v)$ არის ლუწი ფუნქცია v არგუმენტის მიმართ.

ახლა გადავიდეთ (1.4) ინტეგრალის კერძო შემთხვევების განხილვაზე.

შემთხვევა 1. ვთქვათ, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია $\cos x$ არგუმენტის მიმართ:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

თანახმად (1.6) ტოლობისა, ამ შემთხვევაში, გვექნება

$$R(\sin x, \cos x) = \cos x\, R_1(\sin x, \cos^2 x)$$

და

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_1(\sin x, 1-\sin^2 x)\, d(\sin x).$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ თუ ავიღებთ $\sin x = t$ ჩასმას, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიიყვანება t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე.

შემთხვევა 2. ვთქვათ, ახლა (1.4) ინტეგრალში რაციონალური R ფუნქცია კენტია $\sin x$ არგუმენტის მიმართ:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

ამ შემთხვევაში, თანახმად (1.7) ტოლობისა, დავწერთ

$$R(\sin x, \cos x) = \sin x\, R_2(\sin^2 x, \cos x).$$

მაშასადამე, (1.4) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = -\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)\, d(\cos x).$$

თუ გამოვიყენებთ $\cos x = t$ ჩასმას, მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი გამოსათვლელი იქნება t ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან.

შემთხვევა 3. ვთქვათ, $R(\sin x, \cos x)$ ფუნქცია ლუწია ან კენტია ორივე არგუმენტის მიმართ ერთდროულად, ე. ი.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x). \tag{1.9}$$

წარმოვადგინოთ R ფუნქცია ასე:

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cos x, \cos x\right)$$

უკანასკნელი გამოსახულება შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\frac{\sin x}{\cos x}$ და $\cos x$ არგუმენტების რაციონალური R_3 ფუნქცია, ე. ი.

$$R\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cos x,\ \cos x\right)=R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cos x\right).$$

გამოვიყენოთ (1.9) პირობა, მივიღებთ

$$R(\sin x,\ \cos x)=R(-\sin x,\ -\cos x)=R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x},-\cos x\right)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ R_3 ფუნქცია ლუწია მეორე არგუმენტის მიმართ და, მაშასადამე, თანახმად (1.8) ტოლობისა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x},\ \cos x\right)=R_4\left(\frac{\sin x}{\cos x},\ \cos^2 x\right),$$

სადაც R_4 არის $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ და $\cos^2 x$ არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ამრიგად,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R_4\left(\frac{\sin x}{\cos x},\ \cos^2 x\right)dx=$$

$$=\int R_4\left(\operatorname{tg} x,\ \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)\frac{d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

ახლა პირდაპირ ჩანს, რომ თუ გამოვიყენებთ $\operatorname{tg} x=t$ ჩასმას, მივიღებთ

$$\int R(\sin x,\quad \cos x)\,dx=\int R_4\left(t,\ \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

აქ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის t ცვლადის რაციონალური ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი **6**. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{\sin^4 x\cos^3 x\,dx}{2-\cos^2 x}.$$

შევნიშნავთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს კენტ ფუნქციას $\cos x$ არგუმენტის მიმართ. ამიტომ, საჭიროა გამოვიყენოთ $\sin x=t$ ჩასმა. გვექნება

$$I=\int\frac{\sin^4 x\,(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)}{1+\sin^2 x}=\int\frac{t^4(1-t^2)\,dt}{1+t^2}=$$

$$=-\int\left(t^4-2t^2+2-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-2t+$$
$$+2\operatorname{arctg} t+C.$$

დავუბრუნდეთ x ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I=-\frac{1}{5}\sin^5 x+\frac{2}{3}\sin^3 x-2\sin x+2\operatorname{arctg}(\sin x)+C.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{\sin^3 x\cos^4 x}{2-\sin^2 x}\,dx.$$

როგორც წინა მაგალითში, ინტეგრალქვეშ გვაქვს $\sin x$ და $\cos x$ არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, რომელიც კენტია $\sin x$ არგუმენტის მიმართ. თუ გამოვიყენებთ $\cos x=t$ ჩასმას, მივიღებთ

$$I=\int\frac{(\cos^2 x-1)\cos^4 x\,d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=\int\frac{t^6-t^4}{t^2+1}\,dt=$$
$$=\int\left(t^4-2t^2+2-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+2t+$$
$$+2\operatorname{arcctg} t+C.$$

დავუბრუნდეთ x ცვლადს, გვექნება

$$I=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{2}{3}\cos^3 x+2\cos x+2\operatorname{arctg}(\cos x)+C.$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}.$$

აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის რაციონალური $\sin x$ და $\cos x$ არგუმენტების მიმართ და ამასთან ლუწია ამ არგუმენტების მიმართ ერთდროულად. მაშასადამე, საჭიროა გამოვიყენოთ $\operatorname{tg} x=t$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x}=\int\frac{(t^2+1)^2\,dt}{t^3}=$$
$$=\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{2}t^2+2\ln t-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+2\ln\operatorname{tg} x-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+C.$$

§ 2. ზოგიერთი კერძო სახის ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრება

1°. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I = \int \sin^m x \cos^n x \, dx, \tag{2.1}$$

სადაც m და n რაციონალური რიცხვებია. ცხადია, როცა m და n მთელი რიცხვებია, მაშინ (2.1) ინტეგრალი წარმოადგენს წინა პარაგრაფში შესწავლილი (1.4) ინტეგრალის კერძო სახეს და, მაშასადამე, ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება. როცა m და n წილადებია, მაშინ, საზოგადოდ, (2.1) ინტეგრალი უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციას წარმოადგენს, გარდა სამი კერძო შემთხვევისა, როცა იგი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

წარმოვადგინოთ (2.1) ინტეგრალი შემდეგნაირად

$$I = \frac{1}{2} \int (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d(\sin^2 x) =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d(\sin^2 x)$$

და გამოვიყენოთ $t = \sin^2 x$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I = \frac{1}{2} \int t^{\frac{m-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} dt. \tag{2.2}$$

ამრიგად, (2.1) ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება ბინომური დიფერენციალის ინტეგრებამდე. როგორც ვიცით, უკანასკნელი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება, როცა შესრულებულია ერთ-ერთი მაინც შემდეგი სამი პირობიდან:

1) $\frac{m+1}{2}$ მთელი რიცხვია, 2) $\frac{n-1}{2}$ მთელი რიცხვია, 3) $\frac{m+n-2}{2}$ მთელი რიცხვია.

ცხადია, ამ შემთხვევებს მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა 1') m კენტი რიცხვია, 2') n კენტი რიცხვია, 3') $m+n$ ლუწი რიცხვია.

განვიხილოთ 1') შემთხვევა: $m = 2k+1$. გვაქვს

$$I = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \, d(\cos x)$$

ავიღოთ $t = \cos x$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I = -\int (1 - t^2)^k t^n \, dt.$$

თუ $(1-t^2)^k$ გამოსახულებას დავშლით ბინომის ფორმულის მიხედვით, I ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება რაციონალური ფუნქციების ინტეგრებამდე.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}.$$

აქ შესრულებულია 1′) პირობა და, მაშასადამე, საჭიროა გამოვიყენოთ $t=\cos x$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I=-\int \frac{(1-t^2)^2\,dt}{\sqrt[3]{t}}=-\int \left(t^{-\frac{1}{3}}-2t^{\frac{5}{3}}+t^{\frac{11}{3}}\right)dt=$$

$$=-\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}t^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{14}t^{\frac{14}{3}}+C=$$

$$=-3\sqrt[3]{\cos^2 x}\left(\frac{1}{14}\cos^4 x-\frac{1}{4}\cos^2 x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

განვიხილოთ ახლა 2′) შემთხვევა. ვთქვათ, $n=2k+1$. ავიღოთ $t=\sin x$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I=\int \sin^m x\cos^{2k+1} x\,dx=\int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k\,d(\sin x)=$$

$$=\int t^m(1-t^2)^k\,dt.$$

როგორც ვხედავთ ინტეგრალის ამოხსნა ისევე ჩატარდება, როგორც წინა შემთხვევაში.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

ცხადია, საქმე გვაქვს 2′) შემთხვევასთან, გამოვიყენოთ $t=\sin x$ ჩასმა, მივიღებთ

$$I=\int \frac{(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}}=\int \frac{(1-t^2)^2}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-$$

$$-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{9}{2}}+C=\sqrt{\sin x}\left(\frac{2}{3}\sin x-\frac{4}{5}\sin^2 x+\frac{2}{9}\sin^4 x\right)+C.$$

ავიღოთ ახლა 3′) შემთხვევა. ვთქვათ, $m+n=2k$. გვაქვს:

$$I=\int \sin^m x \cos^{m+n-m} x\,dx=\int \sin^m x \cos^{2k-m} x\,dx=$$

$$=\int \operatorname{tg}^m x \frac{dx}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^k}=\int \frac{\operatorname{tg}^m x d(\operatorname{tg} x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{k+1}}.$$

ვთქვათ, $m=\frac{p}{q}$, სადაც p და q მთელი რიცხვებია. გამოვიყენოთ $\operatorname{tg}^{\frac{1}{q}} x=t$ ჩასმა, მაშინ $d(\operatorname{tg} x)=qt^{q-1}\,dt$ და

$$I=\int \sin^m x \cos^n x\,dx=q\int \frac{t^{p+q-1}\,dt}{(1+t^{2q})^{k+1}}.$$

როგორც ვხედავთ I ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

აქ $m=-\frac{3}{2}$, $n=-\frac{5}{2}$, $m+n=-4$. წარმოვადგინოთ ინტეგრალი ასე:

$$I=\int \operatorname{tg}^{-\frac{3}{2}} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,d(\operatorname{tg} x).$$

ავიღოთ $\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x=t$ ჩასმა, მაშინ $d(\operatorname{tg} x)=2\,t\,dt$ და

$$I=2\int t^{-2}(1+t^4)\,dt=\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}+C.$$

2°. განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int P(x,\ e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ e^{\lambda_k x},\ \sin\alpha_1 x,\ \ldots,\ \sin\alpha_m x,$$

$$\cos\beta_1 x,\ \ldots,\ \cos\beta_n x)\,dx, \tag{2.3}$$

სადაც P არის თავისი არგუმენტების მრავალწევრი; $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო m, n და k ნატურალური რიცხვები.

(2.3) სახის ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას,

მართლაც, ვინაიდან P თავისი არგუმენტების მრავალწევრია, ამიტომ მის ყოველ წევრს აქვს შემდეგი სახე:

$$Ax^{\mu}(e^{\lambda_1 x})^{\gamma_1}\dots(e^{\lambda_k x})^{\gamma_k}\sin^{p_1}\alpha_1 x\dots\sin^{p_m}\alpha_m x\cos^{q_1}\beta_1 x\dots\cos^{q_n}\beta_n x=$$

$$=Ax^{\mu}e^{(\lambda_1\gamma_1+\dots+\lambda_k\gamma_k)x}\sin^{p_1}\alpha_1 x\dots\sin^{p_m}\alpha_m x\cos^{q_1}\beta_1 x\dots\cos^{q_n}\beta_n x,$$

სადაც $\mu, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ რიცხვებია, $A, p_1, \dots, p_m, q_1, \dots q_n$, კი ნატურალური რიცხვები.

ამრიგად, (2.3) ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება

$$\int x^{\mu}e^{\lambda x}\sin^{p_1}\alpha_1 x\dots\sin^{p_m}\alpha_m x\cos^{q_1}\beta_1 x\dots\cos^{q_n}\beta_n x\,dx \tag{2.4}$$

სახის ინტეგრალების გამოთვლამდე, სადაც $\lambda=\lambda_1\gamma_1+\dots+\lambda_k\gamma_k$.

მაგრამ, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ის ნაწილი, რომელიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამრავლია, მუდამ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sin^{p_1}\alpha_1 x\dots\sin^{p_m}\alpha_m x\cos^{q_1}\beta_1 x\dots\cos^{q_n}\beta_n x=$$

$$=\sum A_i\sin\xi_i x+\sum B_i\cos\eta_i x;$$

ამიტომ (2.4) ინტეგრალი დაიშლება

$$C\int x^{\mu}e^{\lambda x}\sin\xi x\,dx \quad \text{და} \quad D\int x^{\mu}e^{\lambda x}\cos\eta x\,dx$$

სახის ინტეგრალების ჯამად, სადაც C, D, A_i, B_i მუდმივებია.

უკანასკნელი ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ აღნიშვნები

$$I_{\mu}=\int x^{\mu}e^{\lambda x}\sin\xi x\,dx,$$

$$I_{\mu}^{*}=\int x^{\mu}e^{\lambda x}\cos\eta x\,dx.$$

გარდავქმნათ I_{μ} ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით, ამასთანავე აღვნიშნოთ $u=x^{\mu}$, $dv=e^{\lambda x}\sin\xi x\,dx$, აქედან

$$du=\mu x^{\mu-1}dx,\ v=\frac{e^{\lambda x}(\lambda\sin\xi x-\xi\cos\xi x)}{\lambda^2+\xi^2}.$$

მაშასადამე,

$$I_{\mu}=\frac{x^{\mu}e^{\lambda x}(\lambda\sin\xi x-\xi\cos\xi x)}{\lambda^2+\xi^2}-\frac{\mu\lambda}{\lambda^2+\xi^2}I_{\mu-1}+$$

$$+\frac{\mu\xi}{\lambda^2+\xi^2}\int x^{\mu-1}e^{\lambda x}\cos\xi x\,dx. \tag{2.5}$$

ასევე მივიღებთ

$$I^*_\mu=\frac{x^\mu e^{\lambda x}(\lambda\cos\eta x+\eta\sin\eta x)}{\lambda^2+\eta^2}-\frac{\mu\lambda}{\lambda^2+\eta^2}I^*_{\mu-1}-$$

$$-\frac{\mu\eta}{\lambda^2+\eta^2}\int x^{\mu-1}e^{\lambda x}\sin\eta x\,dx. \tag{2.6}$$

უკანასკნელი ორი ფორმულა წარმოადგენს I_μ და I^*_μ ინტეგრალების დაყვანის ფორმულებს. ვინაიდან I_0 და I^*_0 ინტეგრალები ჩვენთვის უკვე ცნობილია, ამიტომ მათი დახმარებით I_μ და I^*_μ ინტეგრალები ბოლომდე გამოითვლება ნებისმიერი ნატურალური μ რიცხვისათვის.

სავარჯიშო

1. $\int\sin^2x\cos^3x\,dx,$ პას. $\frac{1}{4}\sin^4x-\frac{1}{6}\sin^6x+C.$

2. $\int\sin^4x\cos^5x\,dx,$ პას. $\frac{1}{5}\sin^5x-\frac{2}{7}\sin^7x+C.$

3. $\int\frac{\sin^3x}{\cos x}\,dx,$ პას. $-\frac{1}{2}\sin^2x-\ln\cos x+C.$

4. $\int\frac{\sin^5x}{\cos x}\,dx,$ პას. $\cos^2x-\frac{1}{4}\cos^4x-\ln\cos x+C.$

5. $\int\frac{\sin^3x}{\cos^2x}\,dx,$ პას. $\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$

6. $\int\sin^3x\,dx.$ პას. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x+C.$

7. $\int\cos^7x\,dx.$ პას. $-\cos x+\cos^3x-\frac{3}{5}\cos^5x+\frac{1}{7}\cos^7x+C.$

8. $\int\operatorname{tg}^3x\,dx.$ პას. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln\cos x+C.$

9. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$. პას. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$.

10. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\, dx$. პას. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C$.

11. $\int \frac{\sin^k x}{\cos^{k+2} x}\, dx$. პას. $\frac{1}{k+1}\operatorname{tg}^{k+1} x + C$ (k ნატურალური რიცხვია).

12. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$. პას. $\ln \operatorname{tg} x + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x}$. პას. $\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

14. $\int \frac{dx}{\cos x}$. პას. $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$ პას. $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$.

16. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos x}$. პას. $-\sin x - \frac{1}{2}\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$.

17. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx$. პას. $-\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x -$

$$-\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

18. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, dx$. პას. $\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{3}{2}\sin x - \sin^3 x\right) -$

$$-\frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

19. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$, პას. $\frac{\sin \alpha}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}$,

სადაც $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

20. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$, $c = a^2 + b^2$,

პას. $\frac{1}{c}\, \frac{a\sin x - b\cos x}{a\cos x + b\sin x + c} + C$.

21. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^5 x}$, პას. $-\frac{1}{3\,\mathrm{tg}^3 x} - \frac{4}{\mathrm{tg}\, x} + 6\,\mathrm{tg}\, x +$

$+ \frac{4}{3}\,\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\,\mathrm{tg}^5 x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$, პას. $\frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4 x + \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}^2 x + 3\ln \mathrm{tg}\, x -$

$- \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x} + C$.

23. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$, პას. $-\mathrm{ctg}\, x - \frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\,\mathrm{ctg}^5 x + C$.

24. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$, პას. $-\frac{1}{64\,\mathrm{tg}^4 \frac{x}{2}} - \frac{1}{8\,\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} +$

$+ \frac{3}{8} \ln \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\,\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{64}\,\mathrm{tg}^4 \frac{x}{2} + C$.

25. $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$, პას. $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}^3 x + \frac{3}{5}\,\mathrm{tg}^5 x + \frac{1}{7}\,\mathrm{tg}^7 x + C$.

26. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$, პას. $-\frac{1}{8y^2} + \frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{8} y^2 + C$,

სადაც $y = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

27. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$, პას. $\frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} +$

$+ \frac{5}{2} \ln \mathrm{tg}\, \frac{x}{2} + C$.

28. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$, პას. $\frac{1}{2\mathrm{tg}^2 x} + 2\ln \mathrm{tg}\, x + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + C.$

29. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx$, პას. $\mathrm{tg}\, x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C.$

30. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^3 x}\, dx$, პას. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{5}{2}\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + 2\sin x +$

$+ \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

31. $\int \sin^8 x \cos^5 x\, dx$, პას. $\frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x +$

$+ \frac{1}{13}\sin^{13} x + C.$

32. $\int \sin^3 x \cos^7 x\, dx$, პას. $-\frac{1}{8}\cos^8 x + \frac{1}{10}\cos^{10} x + C.$

33. $\int \sin^8 x \cos^4 x\, dx$, პას. $-\frac{\cos^5 x}{12}\left(\sin^7 x + \frac{7}{10}\sin^5 x +\right.$

$\left. + \frac{7}{16}\sin^3 x + \frac{7}{32}\sin x\right) + \frac{7}{512}\left(\frac{1}{3}\sin x \cos^3 x +\right.$

$\left. + \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x\right) + C.$

34. $\int \sqrt{\sin^2 x \cos x}\, dx$, პას. $-\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x + C.$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x \cos^4 x}}$, პას. $3\sqrt[3]{\mathrm{tg}\, x} + C.$

36. $\int \sqrt{\sin^3 x \cos x}\, dx$, პას. $-\frac{1}{2}\sqrt{\sin x \cos^3 x} +$

$+ \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln \frac{1 + \sqrt{2\mathrm{tg}\, x} + \mathrm{tg}\, x}{1 - \sqrt{2\mathrm{tg}\, x} + \mathrm{tg}\, x} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\, \frac{\sqrt{2\mathrm{tg}\, x}}{1 - \mathrm{tg}\, x} + C.$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin x \cos^7 x}}$, პას. $\frac{4}{3}\mathrm{tg}^{\frac{3}{4}} x + C.$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$, პას. $-\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x+C$.

39. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$. პას. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x+C$.

40. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$, პას. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C$.

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$, პას. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}+$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}+C$.

42. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}$, პას. $\operatorname{arctg} y+\frac{\sqrt{3}}{4}\ln\frac{y^2+y\sqrt{3}+1}{y^2-y\sqrt{3}+1}+$

$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{1-y^2}+C$, $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$.

43. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$, პას. $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\operatorname{tg} x\right)+C$.

44. $\int \frac{dx}{(3+\sin^2 x)^2}$, პას. $\frac{\sin x\cos x}{24(3+\sin^2 x)}+$

$+\frac{7}{48\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right)+C$.

45. $\int \frac{dx}{2-\operatorname{tg} x}$, პას. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln(2\cos x-\sin x)+C$.

46. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$, პას. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}+C$.

47. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-3\cos x)^3}$, პას. $-\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}+C$.

48. $\int \frac{dx}{(1-3\sin x+\cos x)^2}$, პას. $\frac{1}{18}y+\frac{1}{27}\ln(1-3y)+$

$+\frac{5}{27(1-3y)}+C,$ სადაც $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

49. $\int \frac{2\cos x-\sin x+1}{(2+\cos x)^3}dx$, პას. $\frac{\sin x-1}{2(2+\cos x)^2}+$

$+\frac{1}{3}\frac{\sin x}{2+\cos x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

50. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, პას. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+$

$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}2x\right)+C.$

51. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$, პას. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+\sin 2x}{2-\sin 2x}+$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+C.$

52. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\operatorname{tg}x\,dx$, პას. $x-\ln(1+\operatorname{tg}x)+C.$

53. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x-\cos x}$, პას. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln\cos 2x-$

$-\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+C.$

54. $\int \frac{dx}{\cos x-2\operatorname{tg}x}$, პას. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sin x-\sqrt{2}}{1+\sin x+\sqrt{2}}+C.$

55. $\int x^2\cos x\,e^x\,dx$, პას. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+$

$+(x-1)^2\sin x]+C.$

56. $\int x^2\sin x\,e^x\,dx$, პას. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\sin x-$

$-(x-1)^2\cos x]+C.$

თავი XII

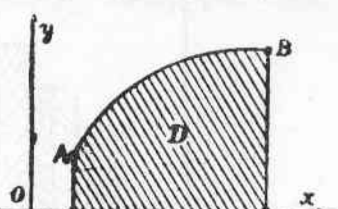
განსაზღვრული ინტეგრალი

განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებათაგანია, რომლის წარმოშობა ისტორიულად დაკავშირებულია რკალის სიგრძის, ფიგურის ფართობისა და სხეულის მოცულობის გამოთვლის ამოცანებთან. ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია მხოლოდ ისეთი ბრტყელი ფიგურების ფართობთა გამოთვლა, რომლებიც შემოსაზღვრულია წრფეთა მონაკვეთებით და წრეწირების რკალებით. ნებისმიერი წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა შეიძლება ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით.

ინტეგრალური აღრიცხვის შემქმნელებია ისააკ ნიუტონი და გოტფრიდ ლაიბნიცი. პირველის ნაშრომებში განხილულია განუსაზღვრელი ინტეგრალი, მეორისაში კი განსაზღვრული.

§ 1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი

განვიხილოთ xOy სიბრტყეზე რაიმე D ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია Ox ღერძით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით ($a<b$) და $y=f(x)$ წირით, სადაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და დადებითია $[a, b]$ სეგმენტზე (ნახ. 78). ასეთ ფიგურას **მრუდწირული ტრაპეცია** ეწოდება.



ნახ. 78.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რას ვუწოდოთ D ფიგურის ფართობი და როგორ ვიპოვოთ ეს ფართობი? ამ მიზნით დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

მივიღებთ სეგმენტებს

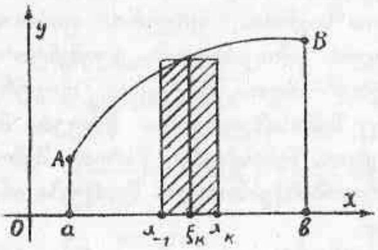
$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]. \tag{1.1}$$

აღვნიშნოთ λ-თი $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი. სადაც

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k=1,\ 2, \ldots,\ n).$$

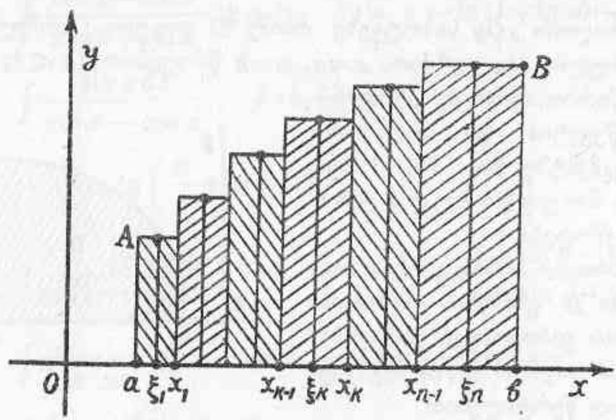
სეგმენტთა (1.1) სისტემას ვუწოდებთ $[a,\ b]$ სეგმენტის λ-დანაწილებას. ცხადია, რომ ყოველ λ რიცხვს შეესაბამება უამრავი λ დანაწილება.

განვიხილოთ (1.1) სისტემის ნებისმიერი $[x_{k-1},\ x_k]$ სეგმენტი და მასზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი. $x=\xi_k$ წრფე გადაკვეთს $y=f(x)$ წირს M_k წერტილში, რომლის ორდინატია $f(\xi_k)$ (ნახ. 2). მაშინ 79-ე ნახაზზე დაშტრიხული მართკუთხედის ფუძეა Δx_k, სიმაღლე კი $f(\xi_k)$. მაშასადამე, აღნიშნული მართკუთხედის ფართობია $f(\xi_k)\,\Delta x_k$.



ნახ. 79.

თუ ასეთ კონსტრუქციას ჩავატარებთ ყოველ $[x_{k-1},\ x_k]$ სეგმენტისათვის, მაშინ დაშტრიხული მართკუთხედების ჯამი კიბურ ფიგურას წარმოადგენს (ნახ. 80). ცხადია, ამ ფიგურის ფორმა და-



ნახ. 80.

მოკიდებულია $[a,\ b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე და ξ_k წერტილების შერჩევაზე. დაშტრიხული კიბური ფიგურის ფართობი აღვნიშნოთ S^* სიმბოლოთი. იგი გამოისახება ფორმულით:

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

ახლა თუ განვიხილავთ $[a, b]$ სეგმენტის უფრო და უფრო მცირე დანაწილებებს და ყოველი ასეთი დანაწილებისათვის გამოვთვლით დაშტრიხული კბური ფიგურის S^* ფართობს, მაშინ ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ ამ პროცესში S^* ფართობი მიისწრაფვის გარკვეულ S ზღვრისაკენ და ამ ზღვარს ვუწოდოთ D ფიგურის S ფართობი:

$$S = \lim S^* = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

მაგრამ რას ნიშნავს, რომ S^* ფართობის ზღვარია S რიცხვი? მოვიყვანოთ

განსაზღვრა. S რიცხვს ვუწოდებთ S^* ფართობის ზღვარს, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი δ რიცხვი. რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი ξ_k წერტილისათვის $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, მართებულია უტოლობა

$$|S - S^*| < \varepsilon.$$

მაშასადამე, S რიცხვი D ფიგურის ფართობია, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი ξ_k წერტილისათვის $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, მართებულია უტოლობა

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - S \right| < \varepsilon.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1.2}$$

ამით პირველი ამოცანა ამოხსნილია, ე. ი. დავადგინეთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ცნება. რაც შეეხება მეორე ამოცანას — ფართობის გამოსათვლელი აპარატის შექმნას, იგი პრინციპულად ამოხსნილია, ვინაიდან (1.2) ფორმულა გვიჩვენებს ამ მიზნისათვის

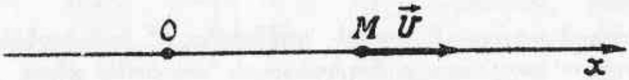
ყველა აუცილებელ ოპერაციას. მაგრამ აღნიშნული მეთოდი პრაქტიკულად დამაკმაყოფილებელი არ არის, ვინაიდან S^* გამოსახულების ზღვრის მოძებნა ფაქტიურად ხერხდება მხოლოდ უმარტივეს შემთხვევაში, ამიტომ ზემოაღნიშნული აპარატი ბევრ კონკრეტულ ამოცანაში ვერ პოულობს უშუალო გამოყენებას.

§ 2. ნივთიერი წერტილის მიერ გავლილი მანძილი

ვთქვათ, ნივთიერი M წერტილი არათანაბრად მოძრაობს Ox ღერძზე v სიჩქარით (ნახ. 81). ეს სიჩქარე წარმოადგენს t დროის ფუნქციას,

$$v = x(t).$$

ვიგულისხმოთ, რომ $v(t)$ უწყვეტია. ვიპოვოთ M წერტილის მიერ გავლილი s მანძილი $t=a$ მომენტიდან $t=b$ მომენტამდე.



ნახ. 81.

ამისათვის დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

და ვთქვათ, λ უდიდესია $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ რიცხვებს შორის, სადაც

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

ყოველ $[t_{k-1}, t_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი τ_k წერტილი. $v(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო მისი მნიშვნელობანი $[t_{k-1}, t_k]$ სეგმენტზე, როდესაც λ საკმარისად მცირეა, მცირედ განსხვავდება $v(\tau_k)$ მნიშვნელობისაგან, რის გამოც $v(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობად $[t_{k-1}, t_k]$ სეგმენტზე შეგვიძლია ავიღოთ $v(\tau_k)$. მექანიკის თვალსაზრისით ეს იმას ნიშნავს, რომ დროის $[t_{k-1}, t_k]$ შუალედში M წერტილის მოძრაობა მიჩნეულია თანაბარ მოძრაობად. მაშინ დროის ამ შუალედში M წერტილის მიერ გავლილი მანძილი იქნება $v(\tau_k)\Delta t_k$, ხოლო მთელი გავლილი მანძილი დროის $[a, b]$ შუალედში იქნება

$$\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k. \tag{2.1}$$

ცხადია, მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს M წერტილის მიერ დროის $[a, b]$ შუალედში გავლილი s მანძილის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$s \simeq \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k.$$

ამიტომ M წერტილის მიერ გავლილი მანძილი გამოისახება ფორმულით:

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ (2.1) ჯამს ისეთივე აგებულება აქვს, რაც მრუდწირული ტრაპეციის განსაზღვრისათვის შედგენილ ჯამს.

§ 3. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ორი ამოცანა — ერთი გეომეტრიიდან, მეორე ფიზიკიდან. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ამ ამოცანების კონკრეტულ შინაარსს და ყურადღებას მივაქცევთ მათ ანალიზურ სტრუქტურას, მაშინ ისინი ზუსტად ერთმანეთს ემთხვევა. ორივე შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნა მოითხოვს გარკვეული სახის ჯამის ზღვრის გამოთვლას.

გეომეტრიის, ფიზიკის, ქიმიის, ტექნიკისა და მეცნიერების სხვა დარგში და კაცობრიობის საქმიანობაში წარმოიშობა უამრავი ამოცანა, რომელთა ანალიზური სტრუქტურა ემთხვევა ზემოთ განხილულს. ამიტომ ზემოთ აღწერილი ტიპის ზღვარზე გადასვლა იმსახურებს ყოველმხრივ შესწავლას და მათემატიკური ანალიზის მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს.

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია. დავყოთ ეს სეგმენტი ნაწილებად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტის ქვესეგმენტებს

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]. \tag{3.1}$$

აღვნიშნოთ λ ასოთი უდიდესი $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ რიცხვებს შორის, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. სეგმენტთა (3.1) სისტემას ვუწოდოთ $[a, b]$ სეგმენტების λ-დანაწილება.

ახლა ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{3.2}$$

ამ ჯამს ეწოდება ინტეგრალური ჯამი. იგი დამოკიდებულია როგორც ξ_k წერტილების შერჩევაზე, ისე $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე.

როდესაც $\lambda \to 0$, მაშინ σ ჯამს შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული ზღვარი, რომელიც დამოუკიდებელია როგორც $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე, ისე ξ_k წერტილების შერჩევაზე. თუ არსებობს

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma=I, \tag{3.3}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{3.4}$$

რაც ასე იკითხება: ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)dx$.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, (3.3) ტოლობის ზუსტი განსაზღვრა ასეთია: I რიცხვს ეწოდება ინტეგრალური σ ჯამის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\delta$, და ნებისმიერი ξ_k წერტილისათვის $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma-I|<\varepsilon.$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი წარმოადგენს (3.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx.$$

a და b რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად ინტეგრების ქვედა და ზედა ზღვრები, $[a, b]$ სეგმენტს კი ინტეგრების შუალედი. x ცვლადს ჰქვია ინტეგრების ცვლადი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (3.4) ინტეგრალი, იტყვიან, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე. შემდეგში, თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე, სიმოკლისათვის ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)dx$ დამოუკიდებელია ინტეგრების x ცვლადზე. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(t)\, dt = \int\limits_a^b f(u) du.$$

§ 4. დარბუს ჯამები. ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b] \tag{4.1}$$

და აღვნიშნოთ M_k და m_k სიმბოლოებით $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები $[a, b]$ სეგმენტზე. ჯამებს

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

ეწოდება შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები, ანუ დარბუს ჯამები.

ლემა 1. ვთქვათ, (4.1) დანაწილებისათვის $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამებია $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$. თუ $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის ძველ წერტილებს დავუმატებთ დაყოფის ახალ წერტილებს და ხელახლა შევადგენთ ზედა და ქვედა ჯამებს $\overline{\sigma}'$ და $\underline{\sigma}'$, გვექნება

$$\underline{\sigma} \leqslant \underline{\sigma}' \leqslant \overline{\sigma}' \leqslant \overline{\sigma},$$

ე. ი. დაყოფის ახალი წერტილების დამატებით ქვედა ჯამი არ შემცირდება, ზედა ჯამი კი არ გადიდდება.

დამტკიცება. საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც შემოგვაქვს დაყოფის მხოლოდ ერთი ახალი ξ წერტილი.

ვთქვათ, $x_{k-1} < \xi < x_k$. მაშინ ახალი ზედა ჯამი $\overline{\sigma}'$ მიიღება ძველი ზედა $\overline{\sigma}$ ჯამისაგან, თუ $M_k(x_k - x_{k-1})$. შესაკრებს შევცვლით ორი შესაკრების ჯამით

$$M'_k(\xi - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \xi),$$

სადაც M'_k და M''_k წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზედა საზღვრებს $[x_{k-1}, \xi]$ და $[\xi, x_k]$ სეგმენტებზე შესაბამისად. ყველა დანარჩენი შესაკრები ორივე $\overline{\sigma}$ და $\overline{\sigma}'$ ჯამში ერთნაირია. ცხადია, რომ

$$M'_k \leqslant M_k, \quad M''_k \leqslant M_k.$$

მაშასადამე,

$$M'_k(\xi - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \xi) \leqslant M_k[(\xi - x_{k-1}) + (x_k - \xi)] = M_k \Delta x_k.$$

ამიტომ $\overline{\sigma}' \leqslant \overline{\sigma}$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ქვედა ჯამი არ მცირდება, როდესაც $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის ძველ წერტილებს დავუმატებთ დაყოფის ახალ წერტილებს.

ლემა 2. არცერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება არცერთ ზედა ჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ, გვაქვს $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის რაიმე ორი წესი (D_1) და (D_2). აღვნიშნოთ $\underline{\sigma}_1$ და $\overline{\sigma}_2$-ით შესაბამისად დაყოფის (D_1) და (D_2) წესთა შესაბამისი ქვედა და ზედა ჯამები. შევადგინოთ $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის (D_3) წესი ისე, რომ მისი დაყოფის წერტილები იყოს ორივე (D_1) და (D_2) დაყოფის წესის წერტილები. აღვნიშნოთ $\underline{\sigma}_3$ და $\overline{\sigma}_3$-ით (D_3) დაყოფის შესაბამისი ქვედა და ზედა ჯამები. მაშინ 1-ლი ლემის თანახმად

$$\underline{\sigma}_1 \leqslant \underline{\sigma}_3, \quad \overline{\sigma}_3 \leqslant \overline{\sigma}_2.$$

მეორე მხრივ, $\underline{\sigma}_3 \leqslant \overline{\sigma}_3$. მაშასადამე, $\underline{\sigma}_1 \leqslant \overline{\sigma}_2$ და ამით ლემა დამტკიცებულია.

ახლა თუ განვიხილავთ ინტეგრალურ ჯამს

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

სადაც $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\underline{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\sigma}.$$

შევნიშნოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება გარკვეული ქვედა და ზედა ჯამები. რაც შეეხება σ ჯამს, იგი განსაზღვრული არაა, ვინაიდან ξ_k წერტილები ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ სათანადო სეგმენტებზე. თუ $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილებას უცვლელად დავტოვებთ, ხოლო ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის შიგნით ვცვლით ξ_k წერტილს ისე, რომ $\lim f(\xi_k) = M_k$, მაშინ $\lim \sigma = \overline{\sigma}$. ანალოგიურად, ξ_k წერტილების შერჩევით σ ჯამი შეგვიძლია რაგინდ მივუახლოვოთ σ ჯამს. ამრიგად, $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილებას, წარმოადგენენ ინტეგრალურ იმ ჯამთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრებს, რომლებიც შეესაბამებიან $[a, b]$ სეგმენტის იმავე დანაწილებას.

ამ შენიშვნიდან ადვილად დავასკვნით, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოუსაზღვრელი ფუნქცია ინტეგრებადი არ არის. მაშასადამე, $f(x)$ *ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის* $[a, b]$ *სეგმენტზე აუცილებელია მისი შემოსაზღვრულობა.*

თეორემა 1. $[a, b]$ *სეგმენტზე* $f(x)$ *ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი* ε *რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი* λ_0 *რიცხვი, რომ* $[a, b]$ *სეგმენტის ნებისმიერი* λ*-დანაწილებისათვის,* $\lambda < \lambda_0$*, ადგილი ჰქონდეს უტოლობას*

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon. \tag{4.2}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს ინტეგრალი

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

მაშინ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a, b]$ *სეგმენტის ნებისმიერი* λ-დანაწილებისათვის, $\lambda < \lambda_0$, ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{3},$$

სადაც σ-თი აღნიშნულია აღებული დანაწილების სათანადო ინტეგრალური ჯამი. მაშასადამე,

$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\underline{\sigma}\leqslant\overline{\sigma}\leqslant I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

აქედან გამომდინარეობს (4.2) უტოლობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი λ_0 რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილების, $\lambda<\lambda_0$, სათანადო ზედა და ქვედა ჯამებისათვის მართებულია (4.2) უტოლობა. ამ შემთხვევაში, ცხადია,

$$\inf\{\overline{\sigma}\}=\sup\{\underline{\sigma}\}.$$

ეს საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ I ასოთი. რაკი

$$\underline{\sigma}\leqslant I\leqslant\overline{\sigma},\quad \underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma},$$

ამიტომ $|\sigma-I|<\varepsilon$, ე. ი.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I.$$

თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, იგი ინტეგრებადია მის ნებისმიერ ქვესეგმენტზე.

მართლაც, ვთქვათ $[c, d]\subset[a, b]$. მოვახდინოთ $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფა წერტილთა ისეთი სისტემით, რომელთა შორის შედის c და d წერტილები. აღვნიშნოთ $\overline{\sigma}_1$ და $\underline{\sigma}_1$-ით $f(x)$ ფუნქციის დარბუს ჯამები $[c, d]$ სეგმენტისათვის, ხოლო $\overline{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$-თი ასეთივე ჯამები $[a, b]$ სეგმენტისათვის. ცხადია, რომ

$$\overline{\sigma}_1-\underline{\sigma}_1\leqslant\overline{\sigma}-\underline{\sigma}.$$

ამიტომ, თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ 1-ლი თეორემის ძალით უკანასკნელი უტოლობა მოგვცემს

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}_1-\underline{\sigma}_1)=0.$$

ეს კი ამტკიცებს შედეგს.

§ 5. ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა

თეორემა 2. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. კანტორის თეორემის თანახმად იგი თანაბრად უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე. მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x''-x'|<\eta$ გვექნება

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

ახლა განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...,$[x_{n-1}, b]$, სადაც $\lambda<\eta$. მაშინ

$$M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a} \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

სადაც M_k და m_k წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის უდიდესსა და უმცირეს მნიშვნელობებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. მაშასადამე,

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k=\varepsilon.$$

აქედან, 1-ლი თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა $[a, b]$ სეგმენტზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად, მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობი, რომელიც მოცემულია (1.2) ტოლობით, შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

ამრიგად, განსაზღვრული ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციისა, გავრცელებული $[a, b]$ სეგმენტზე, გეომეტრიულად გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია Ox ღერძით, $x=a$, $x=b$ წრფეებით და $y=f(x)$ წირით.

თეორემა 3. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრულ

***f(x)* ფუნქციას აქვს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა, მაშინ იგი ინტეგრებადია.**

დამტკიცება. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას $[a\ b]$ სეგმენტზე აქვს წყვეტის მხოლოდ ერთი c წერტილი. ვთქვათ, $a<c<b$ და ავიღოთ c წერტილის ისეთი $[c-\delta,\ c+\delta]$ მიდამო, რომელიც $[a,\ b]$ სეგმენტშია მოთავსებული. განვიხილოთ $[a,\ b]$ სეგმენტის λ-დანაწილება $[a,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,[x_{n-1},\ b]$, სადაც $\lambda<\delta$ და შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის დარბუს ჯამების სხვაობა

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k. \tag{5.1}$$

$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}$ სხვაობის იმ შესაკრებთა ჯამი, რომელთა შესაბამისი $[x_{k-1},\ x_k]$ სეგმენტები მოთავსებულია $[a,\ c-\delta]$ სეგმენტზე, აღვნიშნოთ P-თი, ხოლო Q იყოს იმ შესაკრებთა ჯამი, რომელთა შესაბამისი $[x_{k-1},\ x_k]$ სეგმენტები მოთავსებულია $[c+\delta,\ b]$ სეგმენტზე. (5.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში კიდევ გვექნება ისეთი შესაკრებები, რომელთა შესაბამისი ქვესეგმენტები $[c-\delta\ \ c+\delta]$ სეგმენტშია მოთავსებული. მათი ჯამი R-ით აღვნიშნოთ. შესაძლებელია გვქონდეს კიდევ ორი შესაკრები, რომელთა შესაბამისი ქვესეგმენტები შეიცავენ თავის შიგნით $c-\delta$ და $c+\delta$ წერტილებს.

თუ აღვნიშნავთ M და m ასოებით $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს $[a,\ b]$ სეგმენტზე, გვექნება

$$R<2\delta(M-m).$$

აგრეთვე, თუ უკანასკნელად აღნიშნული ტიპის ორი შესაკრები გვაქვს, მათი ჯამი არ აღემატება $2\lambda(M-m)$ გამოსახულებას. ამიტომ

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<P+Q+2\delta(M-m)+2\lambda(M-m)<P+Q+4\delta(M-m)$$

ახლა δ რიცხვი ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\delta<\frac{\varepsilon}{6(M-m)}.$$

მაშინ გვექნება

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<P+Q+\frac{2\varepsilon}{3}. \tag{5.2}$$

შემდეგ, რაკი $[a,\ c-\delta]$ და $[c+\delta,\ b]$ სეგმენტებზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ ამავე სეგმენტებზე იგი თანაბრად უწყვეტია. მაშა-

სადამე, $\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი $\eta^*(\varepsilon)$, რომ

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

როდესაც $|x'-x''|<\eta^*$, სადაც $x', x''\in[a, c-\delta]$ ან $x', x''\in[c+\delta, b]$.

ახლა აღვნიშნოთ η-თი უმცირესი η^* და $\dfrac{\varepsilon}{6(b-a)}$ რიცხვებს შორის. თუ $\lambda<\eta$, მაშინ გვექნება

$$P+Q\leqslant\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(c-\delta-a)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-c-\delta)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a-2\sigma),$$

ე. ი.

$$P+Q<\frac{\varepsilon}{3}.$$

მაშასადამე, (5.2) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

აქედან, 1-ლი თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ყველგან ნულია, გარდა წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=0. \tag{5.3}$$

მართლაც, პირობის მიხედვით $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა და ამიტომ მე-3 თეორემის თანახმად $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. შემდეგ, თუ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი დანაწილებისათვის ξ_k წერტილებს ისე ავირჩევთ, რომ ისინი განსხვავებული იყვნენ $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებისაგან, მაშინ ინტეგრალური ჯამი $\sigma=0$ და, მაშასადამე, მართებულია (5.3) ტოლობა.

განსაზღვრა. $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრულ ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი, თუ ამ სეგმენტზე მას აქვს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილებისა.

ახლა მე-3 თეორემა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: სეგმენტზე უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

თეორემა 4. სეგმენტზე მონოტონური ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულია ზრდადი ფუნქცია. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$. ცხადია, რომ

$$f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k),$$

როდესაც $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k \quad (k=1, 2, \ldots, n)$. ამიტომ

$$\overline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k, \quad \underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k.$$

მაშასადამე,

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=\lambda[f(b)-f(a)].$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\lambda_0=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ რიცხვი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ყოველი λ-დანაწილებისათვის, $\lambda<\lambda_0$, გვექნება

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\varepsilon.$$

მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[0,1]$ სეგმენტზე ასე: $f(x)=0$, როდესაც x ირაციონალურია და $f(x)=\dfrac{1}{q}$, როდესაც x წარმოიდგინება უკვეცი $\dfrac{p}{q}$

წილადით. დავამტკიცოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია [0, 1] სეგმენტზე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს ფუნქცია წყვეტილია ყოველ რაციონალურ წერტილში და უწყვეტია ყოველ ირაციონალურ წერტილში. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია [0,1] სეგმენტზე.

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და შევარჩიოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი ν, რომ $\frac{1}{\nu}<\frac{\varepsilon}{2}$. ცხადია, რომ [0,1] სეგმენტზე იქნება მხოლოდ სასრული სიმრავლე ისეთი რაციონალური რიცხვებისა, რომელთა უკვეც წილადად წარმოდგენისათვის მნიშვნელი ნაკლებია ν-ზე. ასეთი რიცხვების რაოდენობა აღვნიშნოთ n-ით. ცხადია, [0, 1] სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილების შემთხვევაში, სულ დიდი, n ქვესეგმენტი შეიძლება შეიცავდეს უკანასკნელი სახის რაციონალურ წერტილებს და ამიტომ ასეთი ქვესეგმენტების შესაბამისი შესაკრებების ჯამი ზედა $\overline{\sigma}$ ჯამში არ აღემატება $n\lambda$ ნამრავლს. ყველა სხვა ქვესეგმენტი შეიცავს მხოლოდ ისეთ რაციონალურ წერტილებს, რომელთა მნიშვნელობები მეტია ან ტოლი ν-სი. მაშასადამე, ასეთ ქვესეგმენტებზე $f(x)$ ფუნქცია არ აღემატება $\frac{1}{\nu}$ რიცხვს. ამიტომ აღნიშნული ქვესეგმენტები შესაბამის შესაკრებთა ჯამი $\overline{\sigma}$-ში ნაკლებია, ვიდრე $\frac{\varepsilon}{2}$. ამრიგად,

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\frac{\varepsilon}{2}+n\lambda.$$

მეორე მხრივ, ყოველი λ-დანაწილებისათვის $\underline{\sigma}=0$, ვინაიდან ნებისმიერი ქვესეგმენტი შეიცავს ირაციონალურ წერტილებს, რომლებშიც $f(x)=0$. მაშასადამე,

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\frac{\varepsilon}{2}+n\lambda,$$

სადაც n დამოკიდებულია მხოლოდ ε-ზე. თუ $\lambda<\frac{\varepsilon}{2n}$, გვექნება

$$\overline{\sigma}-\underline{\sigma}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა [0,1] სეგმენტზე. ამგვარად, ჩვენ ავაგეთ ისეთი ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელსაც აქვს წყვეტის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ახლა მოვიყვანოთ არაინტეგრებადი ფუნქციის მაგალითი. განვიხილოთ დირიხლეს ფუნქცია:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{როდესაც } x \text{ ირაციონალურია,}\\ 0, & \text{როდესაც } x \text{ რაციონალურია.}\end{cases}$$

თუ განვიხილავთ რაიმე $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ λ-დანაწილებას, ყოველ ქვესეგმენტზე $D(x)$ ფუნქციის ზედა საზღვარი იქნება 1, ქვედა საზღვარი კი 0, ამიტომ

$$\overline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}1.\,\Delta x_k=b-a.\quad \underline{\sigma}=\sum_{k=1}^{n}0.\,\Delta x_k=0.$$

მაშასადამე, $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{\sigma}-\underline{\sigma})=b-a$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $D(x)$ ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 6. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

თვისება 1. თ უ $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე $f(x)=c$, ს ა დ ა ც c მ უ დ მ ი ვ ი ა, მ ა შ ი ნ

$$\int_a^b f(x)dx=c\,(b-a). \tag{6.1}$$

მართლაც, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისათვის და ნებისმიერი ξ_k წერტილისათვის გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,\Delta x_k=c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=c\,(b-a),$$

რის გამოც მართებულია (6.1) ტოლობა.

თვისება 2. თ უ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე და A მ უ დ მ ი ვ ი ა, მ ა შ ი ნ $Af(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ა გ რ ე თ ვ ე ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა და მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა ტ ო ლ ო ბ ა

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx.$$

მართლაც, გვაქვს

$$\int_a^b Af(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Af(\xi_k)\,\Delta x_k=A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k=A\int_a^b f(x)dx.$$

ამრიგად, მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

თვისება 3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)+g(x)$ ჯამიც ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)dx.$$

მართლაც, გვაქვს:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_k)+g(\xi_k)]\,\Delta x=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)dx.$$

ეს თვისება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეიძლება გავავრცელოთ შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვზე, ე. ი. თუ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ $\cdots+f_n(x)$ ჯამიც ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]dx=$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b f_n(x)dx.$$

შედეგი. $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $f_1(x), f(x_2), \cdots$ $\cdots, f_n(x)$ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია $C_1f_1(x)+$ $+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x)$, სადაც $C_1, C_2, \cdots, C_n$ მუდმივებია, ინტეგრებადია და

$$\int_a^b [C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x)]dx=$$

$$= C_1 \int_a^b f(x)\,dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots + C_n \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

ეს ტოლობა გამოსახავს ინტეგრალის წრფივობის თვისებას ინტეგ-რალქვეშა ფუნქციის მიმართ.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x) \leqslant g(x)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{6.2}$$

დამტკიცება. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა $\lambda \to 0$, მივიღებთ (6.2) უტოლობას.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველ წერტილში $m \leqslant f(x) \leqslant M$, სადაც m და M მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a). \tag{6.3}$$

დამტკიცება. მე-5 თეორემის თანახმად

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \tag{6.4}$$

მაგრამ 1-ლი თვისების თანახმად

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (6.4) უტოლობებში, მივიღებთ (6.3) უტოლობებს, რომლის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებით მოცემულია ინტეგრალის შეფასება ქვემოდან და ზემოდან.

თეორემა 7. ორი ინტეგრებადი ფუნქციის ნამრავლი აგრეთვე ინტეგრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და $|f_1(x)| \leqslant A$, $|f_2(x)| \leqslant B$. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$$

და აღვნიშნოთ M'_k და m'_k, M''_k და m''_k, M_k და m_k სიმბოლოებით, შესაბამისად ზედა და ქვედა საზღვრები $f_1(x)$, $f_2(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებისა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, სადაც

$$f(x) = f_1(x) f_2(x).$$

$[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის ორი ნებისმიერი x' და x'' წერტილისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= |f_1(x'') f_2(x'') - f_1(x') f_2(x')| = \\ &= |[f_1(x'') - f_1(x')] f_2(x'') + [f_2(x'') - f_2(x')] f_1(x')| \leqslant \\ &\leqslant B\,|f_1(x'') - f_1(x')| + A\,|f_2(x'') - f_2(x')| \leqslant \\ &\leqslant B(M'_k - m'_k) + A(M''_k - m''_k). \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$M_k - m_k \leqslant B(M'_k - m'_k) + A(M''_k - m''_k).$$

აქედან

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leqslant B \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)\Delta x_k +$$

$$+ A \sum_{k=1}^{n} (M''_k - m''_k)\Delta x_k.$$

ორი უკანასკნელი ჯამი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $\lambda \to 0$, ამიტომ პირველი ჯამიც მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $\lambda \to 0$ და, მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველი x წერტილისათვის $|f(x)| > \alpha$, სადაც α დადებითი რიცხვია. მაშინ $\dfrac{1}{f(x)}$ ფუნქციაც ინტეგრებადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე λ-დანაწილება $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$. ავღნიშნოთ M_k^* და m_k^* სიმბოლოებით $\frac{1}{f(x)}$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. ცხადია, რომ

$$M_k^* - m_k^* = \sup\left|\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right|,$$

სადაც x' და x'' წარმოადგენენ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილებს. მაშასადამე,

$$M_k^* - m_k^* = \sup\frac{|f(x'') - f(x')|}{|f(x')f(x'')|} \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\sup|f(x'') - f(x')| =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}(M_k - m_k),$$

სადაც M_k და m_k აღნიშნავენ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. ამრიგად,

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k.$$

$f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $\lambda \to 0$ და ამიტომ მარცხენა ნაწილიც მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე, $\frac{1}{f(x)}$ ფუნქცია ინტეგრებადია.

თეორემა 9. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და, ამის გარდა, ამ სეგმენტის ყოველი x-სათვის $|g(x)| \geqslant \alpha$, სადაც α დადებითი რიცხვია, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციაც ინტეგრებადია.

დამტკიცება. ეს თეორემა წარმოადგენს მე-7 და მე-8 თეორემების შედეგს. მართლაც, $\frac{1}{g(x)}$ ფუნქცია ინტეგრებადია მე-8 თეორემის ძალით, ხოლო მე-7 თეორემის ძალით ნამრავლი

$$f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

აგრეთვე ინტეგრებადია.

თეორემა 10. თუ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $|f(x)|$ ფუნქციაც ინტეგრებადია და

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.5}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$. თუ აღვნიშნავთ M_k^* და m_k^* სიმბოლოებით $|f(x)|$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე, გვექნება

$$M_k^* - m_k^* = \sup\,\big|\,|f(x'')| - |f(x')|\,\big|,$$

სადაც x' და x'' წარმოადგენენ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილებს. მაგრამ

$$\big|\,|f(x'')| - |f(x')|\,\big| \leqslant |f(x'') - f(x')|\,.$$

ამიტომ

$$M_k^* - m_k^* \leqslant M_k - m_k,$$

სადაც M_k და m_k სიმბოლოებით აღნიშნულია $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\Delta x_k.$$

$f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო, ამ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $\lambda \to 0$. ამიტომ მარცხენა ნაწილიც მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე, $|f(x)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია.

ვაჩვენოთ ახლა (6.5) უტოლობის მართებულობა. გვაქვს:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \lim_{\lambda \to 0} \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,\Delta x_k = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. შეიძლება $|f(x)|$ ფუნქცია იყოს ინტეგრებადი, $f(x)$ კი არა. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = D(x) - \frac{1}{2},$$

სადაც $D(x)$ წარმოადგენს დირიხლეს ფუნქციას. ცხადია, $f(x)$ არაინტეგრებადი ფუნქციაა ნებისმიერ $[a, b]$ სეგმენტზე. მაგრამ $|f(x)|=\frac{1}{2}$ ყოველ x წერტილში და ამიტომ $|f(x)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია.

თეორემა 11. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობიდან გამომდინარეობს $g(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა და

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)dx. \tag{6.6}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=f(x)-g(x). \tag{6.7}$$

ცხადია, $\varphi(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე ნულისაგან განსხვავდება წერტილთა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეზე, ამიტომ იგი ინტეგრებადია და მე-3 თეორემის შედეგის მიხედვით

$$\int_a^b \varphi(x)dx=0. \tag{6.8}$$

შემდეგ, (6.7) ტოლობიდან გვაქვს $g(x)=f(x)-\varphi(x)$. მაშასადამე, $g(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია. ახლა (6.8) ტოლობიდან გვაქვს

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=0.$$

აქედან მიიღება (6.6) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. განსაზღვრული ინტეგრალის ადიტიურობა

ზემოთ ჩვენ შევისწავლეთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალის ცნება. ცხადია, აქ იგულისხმება, რომ $a<b$. ახლა განვსაზღვროთ ინტეგრალი, როდესაც $a\geqslant b$.

განსაზღვრა 1. თუ $a=b$, მაშინ

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

განსაზღვრა 2. თუ $a > b$ და $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[b, a]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მე-6 პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემები იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრალის ქვედა ზღვარი ნაკლებია ზედა ზღვარზე, მართებულია მაშინაც, როდესაც $a \geqslant b$. მაგალითად, დავამტკიცოთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{7.1}$$

ეს ტოლობა ცხადია, როდესაც $a=b$. თუ $a>b$, გვექნება

$$\int_b^a [f(x)+g(x)]\,dx = \int_b^a f(x)dx + \int_b^a g(x)dx.$$

აქედან

$$-\int_b^a [f(x)+g(x)]\,dx = -\int_b^a f(x)dx - \int_b^a g(x)dx.$$

ეს კი წარმოადგენს (7.1) ტოლობას.

თეორემა 12. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და a, b, c ნებისმიერი რიცხვებია ამ სეგმენტიდან, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{7.2}$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ $a<c<b$. შევადგინოთ $f(x)$ ფუნქციისათვის ინტეგრალური ჯამი, რომელიც შეესაბამება $[a, b]$ სეგმენტს. რადგანაც ინტეგრებადი ფუნქციის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არ არის დამოკიდებული $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წესზე, ამიტომ დაყოფის ერთ-ერთ წერტილად შეგვიძლია ავიღოთ c წერტილი. ინტეგრალური ჯამი, რომელიც შეესაბამება $[a, b]$ სეგმენტს, ასე წარმოვადგინოთ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{7.3}$$

სადაც σ_1 და σ_2 ინტეგრალური ჯამები შეესაბამება $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებს. თუ (7.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda \to 0$, მივიღებთ (7.2) ტოლობას.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც $a < b < c$. ზემოდამტკიცებულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ინტეგრალის (7.2) თვისებას ეწოდება **ინტეგრალის ადიტიურობა** ინტეგრების შუალედის მიმართ.

§ 8. ინტეგრალის თვისებები, რომლებიც უტოლობებით გამოისახებიან

თეორემა 13. *თუ $f(x)$ არის არაუარყოფითი ინტეგრებადი ფუნქცია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ხოლო a და b ნებისმიერი რიცხვებია ამ სეგმენტიდან, მაშინ*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0, \text{ როდესაც } a < b,$$

ხოლო

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant 0, \text{ როდესაც } a > b.$$

დამტკიცება. თუ $a < b$, მაშინ უტოლობა $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ უშუალოდ გამომდინარეობს მე-5 თეორემიდან. თუკი $a > b$, მაშინ

$$-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx \geqslant 0.$$

საიდანაც

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქცია იგივურად ნული არ არის, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{8.1}$$

დამტკიცება. რაკი $f(x)$ იგივურად ნული არ არის, ამიტომ $[a, b]$ სეგმენტში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(\xi) > 0$. მოცემული ფუნქციის უწყვეტობის გამო, არსებობს $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს ξ წერტილს და $f(x) > 0$, როდესაც $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. აღვნიშნოთ m-ით $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ცხადია, რომ $m > 0$. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

ვინაიდან მე-13 თეორემის თანახმად

$$\int_a^\alpha f(x)dx \geqslant 0, \quad \int_\beta^b f(x)dx \geqslant 0.$$

შემდეგ, მე-6 თეორემის ძალით

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant m(\beta - \alpha).$$

მაშასადამე, მართებულია (8.1) უტოლობა.

შედეგი. თუ არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის $\int_a^b f(x)dx = 0$, მაშინ $f(x)$ იგივურად ნულის ტოლია $[a, b]$ სეგმენტზე.

§ 9. განსაზღვრული ინტეგრალი როგორც ზედა ზღვრის ფუნქცია. პირველყოფილი ფუნქციის არსებობა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. 1-ლი თეორემის შედეგის ძალით, ეს ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ $[a, x]$ სეგმენტზე, სადაც $a < x \leqslant b$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{9.1}$$

ცხადია, $F(x)$ წარმოადგენს x-ის ფუნქციას. მართებულია შემდეგი

თეორემა 15. (9.1) ტოლობით განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე. ვთქვათ,

$$|f(t)| \leqslant M, \text{ როდესაც } a \leqslant t \leqslant b.$$

ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ორი ნებისმიერი წერტილი x' და x''. ვიგულისხმოთ, რომ $x' < x''$, მაშინ

$$|F(x'')-F(x')| = \left|\int_a^{x''} f(t)dt-\int_a^{x'} f(t)dt\right|=$$

$$=\left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt \leqslant M(x''-x').$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის

$$|F(x'')-F(x')| < \varepsilon,$$

როდესაც $|x''-x'| < \frac{\varepsilon}{M}$. ამით დამტკიცებულია $F(x)$ ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა 16. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და უწყვეტია ამ სეგმენტის x_0 წერტილში, მაშინ (9.1) ტოლობით განსაზღვრული $F(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში და

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

დამტკიცება. მივცეთ x_0-ს ნაზრდი Δx ისე, რომ $x_0+\Delta x \in [a,b]$. (9.1) ტოლობის თანახმად

$$F(x_0+\Delta x)=\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt. \tag{9.2}$$

$$f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt. \tag{9.3}$$

თუ (9.2) ტოლობას გამოვაკლებთ წევრ-წევრად (9.3) ტოლობა, გვექნება

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t)-f(x_0)]dt. \tag{9.4}$$

შემდეგ რაკი $f(t)$ უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი $\eta>0$, რომ

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

როდესაც $x_0-\eta\leqslant t\leqslant x_0+\eta$ და $a\leqslant t\leqslant b$. მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ (9.4) ტოლობას, ნებისმიერი Δx-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|\Delta x|<\eta$, გვექნება

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|<\varepsilon,$$

ე. ი.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=f(x_0).$$

მაშასადამე, $F'(x_0)=f(x_0)$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 17. სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ მე-16 თეორემის თანახმად, ფუნქცია

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$$

დიფერენცირებადია $[a, b]$ სეგმენტის ყოველ x წერტილში და

$$F'(x)=f(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა

თეორემა 18. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და არსებობს ამ ფუნქციის პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{10.1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$. ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=(x_k-x_{k-1})F'(\xi_k)=(x_k-x_{k-1})f(\xi_k),$$

სადაც $x_{k-1}<\xi_k<x_k$. მაშინ

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

აქედან

$$F(b)-F(a)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\int_a^b f(x)dx$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

(10.1) ფორმულას ეწოდება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა. ამ ფორმულას ხშირად ასე წერენ:

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b.$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება იმავე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნამდე.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 (x^2+3x-1)dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჯერ მოვძებნოთ x^2+3x-1 ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი ფუნქცია. გვაქვს:

$$\int (x^2+3x-1)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x.$$

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის მიხედვით

$$\int_0^1 (x^2+3x-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-1=\frac{5}{6}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_0^\pi \cos x\, dx$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს:

$$\int_0^\pi \cos x\, dx=[\sin x]_0^\pi=\sin\pi-\sin 0=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+2x^3}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად,

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+2x^3}=\left[\frac{1}{6}\ln(1+2x^3)\right]_0^1=\frac{1}{6}\ln(1+2.1^3)=\frac{1}{6}\ln 3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\, dx$,

სადაც m და n მთელი რიცხვებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ვიცით,

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x].$$

ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\, dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)xdx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)xdx=0.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$,

სადაც m და n მთელი რიცხვებია.

ამოხსნა. თუ $m=n\neq 0$, გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

თუ $m\neq n$, $m\neq -n$, გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

დასასრულ, თუ $m=-n\neq 0$, მაშინ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = -\pi.$$

ამრიგად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } m\neq n \text{ და } m\neq -n. \\ \pi, & \text{როდესაც } m=n\neq 0, \\ -\pi, & \text{როდესაც } m=-n\neq 0. \end{cases}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } m\neq n \text{ და } m\neq -n, \\ \pi, & \text{როდესაც } m=n\neq 0 \text{ ან } m=-n\neq 0. \\ 2\pi, & \text{როდესაც } m=n=0. \end{cases}$$

§ 11. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში

ვთქვათ, მოცემულია ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$. ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად ზოგჯერ ხელსაყრელია x ცვლადი შევცვალოთ ახალი t ცვლადით, რომელიც x-თან გარკვეულ დამოკიდებულებაშია. მართებულია შემდეგი

თეორემა 19. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $x=\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$, როცა $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ და $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{11,1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ t ცვლადის ორი ფუნქცია

$$F(t)=\int_a^{\varphi(t)} f(x)dx, \quad \Phi(t)=\int_\alpha^t f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)du.$$

მე-16 თეორემის თანახმად

$$\Phi'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$
$$F'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$F'(t)=\Phi'(t).$$

მაშასადამე,

$$F(t)=\Phi(t)+C, \tag{11.2}$$

სადაც C მუდმივია. თუ $t=\alpha$, მაშინ $F(\alpha)=0$, $\Phi(\alpha)=0$ და ამიტომ (11.2) ფორმულა გვაძლევს $0=0+C$, ე. ი. $C=0$. მაშასადამე,

$$F(t)=\Phi(t), \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

კერძოდ, თუ $t=\beta$, მივიღებთ (11.1) ტოლობას.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$.

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x=a\sin t$, გვექნება

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t, \ dx=a\cos t\,dt.$$

როდესაც $x=0$, მაშინ $t=0$, ხოლო, როდესაც $x=a$, მაშინ $t=\frac{\pi}{2}$.

მაშასადამე, (11.1) ფორმულის თანახმად

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\cos t\,dt=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4},$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$I=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{1+x^2}=t$. აქედან

$$x=\sqrt{t^2-1},\quad dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

როდესაც $x=0$, მაშინ $t=1$, ხოლო, როდესაც $x=1$, მაშინ $t=\sqrt{2}$. მაშასადამე,

$$I=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შემოვიღებთ ჩასმას $x=\operatorname{tg}t$, გვექნება

$$dx=\frac{dt}{\cos^2 t}.$$

ინტეგრალის ახალი საზღვრები იქნება 0 და $\frac{\pi}{4}$. მაშასადამე,

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}t)}{1+\operatorname{tg}^2t}\cdot\frac{dt}{\cos^2t}=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}t)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}dt=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln\sqrt{2}\,dt+\int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ორი უკანასკნელი ინტეგრალი თანატოლია. ამისათვის პირველ მათგანში მოვახდინოთ ჩასმა $\frac{\pi}{4}-t=z$. აქედან $dt=-dz$, ხოლო ინტეგრალის ახალი ზღვრები იქნება $\frac{\pi}{4}$ და 0. მაშასადამე,

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = -\int_{\pi/4}^{0} \ln\cos z\, dz = \int_0^{\pi/4} \ln\cos z\, dz.$$

ამიტომ

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\, dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

§ 12. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

თუ $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ მართებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int_a^b uv'dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b vu'dx. \qquad (12.1)$$

მართლაც, როგორც ვიცით

$$(uv)' = vu' + uv'.$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებას a-დან b-მდე, გვექნება

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx. \qquad (12.2)$$

მაგრამ

$$\int_a^b (uv)'\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) = [u(x)v(x)]_a^b.$$

ამიტომ (12.2) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\int_a^b uv'\,dx + \int_a^b vu'dx = [u(x)\,v(x)]_a^b.$$

აქედან მიიღება (12.1) ფორმულა.

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა ზოგჯერ საშუალებას გვაძლევს რთული სახის ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ უფრო მარტივი სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე. (12.1) ფორმულა მოკლედ ასე ჩავწეროთ:

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (12.1)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^\pi x\sin x\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$u=x,\quad dv=\sin x\,dx.$$

აქედან $du=dx,\ v=-\cos x$. მაშასადამე, (12.1) ფორმულის მიხედვით

$$I=[-x\cos x]_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\,dx=\pi.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^\pi x^2\cos x\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u=x^2,\quad dv=\cos x dx,$$

გვექნება

$$du=2xdx,\quad v=\sin x.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ძალით

$$I=[x^2\sin x]_0^\pi-2\int_0^\pi x\sin x\,dx=-2\int_0^\pi x\sin x dx=-2\pi.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^1\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$u=\operatorname{arctg}x,\qquad dv=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

აქედან

$$du=\frac{dx}{1+x^2},\quad v=\sqrt{1+x^2}.$$

მაშასადამე, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება გვაძლევს

$$I=\left[\sqrt{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^1-\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}-$$

$$-\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}-\ln(1+\sqrt{2}\,).$$

ახლა განვაზოგადოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. ვთქვათ, $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს აქვთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი წარმოებულები $n+1$ რიგამდე ჩათვლით. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის მიხედვით

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx=[uv^{(n)}]_a^b-\int_a^b u'\,v^{(n)}\,dx,$$

$$-\int_a^b u'v^{(n)}\,dx=-[u'v^{(n-1)}]_a^b+\int_a^b u''\,v^{(n-1)}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^n\int_a^b u^{(n)}v'\,dx=(-1)^n\,[u^{(n)}v]_a^b-(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.$$

თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx=[uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\ldots+(-1)^n u^{(n)}v]_a^b+$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b vu^{(n+1)}\,dx. \tag{12.2}$$

ეს არის ნაწილობითი ინტეგრების განზოგადებული ფორმულა.

§ 13. საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა

თეორემა, რომელსაც ქვემოთ დავამტკიცებთ, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თეორემათაგანია მათემატიკაში.

თეორემა 20. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და $g(x)$ ამ სეგმენტზე ნიშანს არ იცვლის, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,$$

სადაც $m \leqslant \mu \leqslant M$, ხოლო m და M წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის, ვიგულისხმოთ რომ $g(x) \geqslant 0$. თუ გავამრავლებთ

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

უტოლობებს $g(x)$ ფუნქციაზე, მივიღებთ

$$mg(x) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant M g(x).$$

მე-5 თეორემის თანახმად გვექნება

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant M \int_a^b g(x) dx. \tag{13.1}$$

რაკი $g(x) \geqslant 0$, ამიტომ

$$\int_a^b g(x) dx \geqslant 0.$$

თუ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\, g(x) dx = 0$$

და თეორემის მართებულობა ცხადია. ახლა ვთქვათ, $\int_a^b g(x) dx > 0$.

მაშინ (13.1) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$m \leqslant \int_a^b f(x) g(x) dx : \int_a^b g(x) dx \leqslant M.$$

ამრიგად, ამ უტოლობათა შუა წევრი მოთავსებულია m და M რიცხვებს შორის. თუ ამ წევრს აღვნიშნავთ μ-თი, გვექნება

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \tag{13.2}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ამ სეგმენტში ისეთი ξ წერტილი, რომ $f(\xi) = \mu$ და (13.2) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{13.3}$$

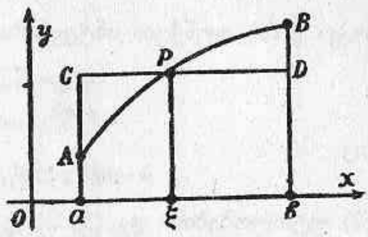
(13.2) და (13.3) ფორმულებს ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის პირველი ინტეგრალური ფორმულა.

შედეგი. თუ $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi). \tag{13.4}$$

ეს ტოლობა მიიღება (13.3) ტოლობიდან, თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $g(x)=1$.

(13.4) ფორმულის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: $y=f(x)$ წირზე მოიძებნება ისეთი წერტილი, რომ მრუდწირული $abBA$ ტრაპეციის ფართობი ტოლია $abDC$ მართკუთხედის ფართობისა (ნახ. 82). მაგრამ ასეთი ξ წერტილის მოძებნა პრაქტიკულად საზოგადოდ არ ხერხდება.



ნახ. 82.

§ 14. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა

თეორემა 21. თუ $f(x)$ და $g'(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $g(x)$ კლებადია და $g(b)\geqslant 0$, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx = g(a)\int_0^{\xi} f(x)dx.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2], \ldots, [x_{n-1},\ x_n]\ (x_0=a,\ x_n=b).$$

შევადგინოთ ჯამები

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k,$$

$$\overline{s}=\sum_{k=1}^{n} M_k\, g(x_{k-1})\Delta x_k, \quad \underline{s}=\sum_{k=1}^{n} m_k\, g(x_{k-1})\Delta x_k,$$

სადაც M_k და m_k წარმოადგენენ შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

რადგანაც $[a, b]$ სეგმენტზე $g(x) \geqslant 0$, ამიტომ

$$\underline{s} \leqslant \sigma \leqslant \overline{s}. \tag{14.2}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\overline{s}-\underline{s}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)g(x_{k-1})\Delta x_k \leqslant g(a)\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$$

და რაკი $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{s}-\underline{s})=0, \tag{14.3}$$

სადაც

$$\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

(14.2) უტოლობებისა და (14.3) ტოლობის თანახმად

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{s}=\lim_{\lambda\to 0}\overline{s}=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{14.4}$$

საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის თანახმად

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\mu_k\Delta x_k, \; m_k \leqslant \mu_k \leqslant M_k.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\underline{s} \leqslant \sigma^* \leqslant \overline{s},$$

სადაც

$$\sigma^*=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\, g(x_{k-1})\,\Delta x_k.$$

თუ გავითვალისწინებთ (14.4) ტოლობებს, გვექნება

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma^*=\int_a^b f(x)\,g(x)dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u_k=\mu_k\Delta x_k,\ v_k=g(x_{k-1}),\quad s_k=u_1+u_2+\cdots+u_k,$$

$$A=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x f(t)dt,\ B=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x f(t)dt.$$

მაშინ

$$\sigma_k^*=\sum_{k=1}^n u_k v_k.$$

რადგანაც

$$s_k=\int_a^{x_k} f(t)dt\ (k=1,\ 2,\ldots,n),$$

ამიტომ

$$A\leqslant s_k\leqslant B.$$

მაშასადამე, აბელის უტოლობის თანახმად

$$Av_1\leqslant\sigma^*\leqslant Bv_1,$$

ე. ი.

$$Ag(a)\leqslant\sigma^*\leqslant Bg(a).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$Ag(a)\leqslant\int_a^b f(x)\,g(x)dx\leqslant Bg(a),$$

ანუ

$$A\leqslant\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\leqslant B.$$

შემდეგ რაკი

$$A\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant B$$

და $\int_a^x f(t)dt$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a,\ b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას A და B-ს შორის. მაშასადამე, $[a,\ b]$ სეგმენტში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\int_a^\xi f(x)dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx. \tag{14.5}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(14.5) ფორმულას ეწოდება ბონეს (**Bonnet**) ფორმულა.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 22. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $g(x)$ ზრდადია და $g(a)\geqslant 0$, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{14.6}$$

თეორემა 23. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $g(x)$ მონოტონურია, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{14.7}$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)$ კლებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x)=g(x)-g(b).$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია კლებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და $\varphi(x)\geqslant 0$. ბონეს თეორემის თანახმად $[a, b]$ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,$$

ანუ

$$\int_a^b f(x)[g(x)-g(b)]dx=[g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x)g(x)dx - g(b)\int_a^{\xi} f(x)\,dx - g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

$$- g(b)\int_a^{\xi} f(x)\,dx;$$

საიდანაც მიიღება (14.7) ტოლობა.

თითოეულს (14.5), (14.6) და (14.7) ფორმულებიდან ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა.

§ 15. ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრის გამოსახულება განსაზღვრული ინტეგრალით

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და აქვს უწყვეტი წარმოებულები $n+1$ რიგამდე ჩათვლით. (12.2) ფორმულაში ვიგულისხმოთ

$$u = f(x), \; v = (b-x)^n.$$

გვაქვს:

$$v' = -n(b-x)^{n-1}, \; v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}, \ldots,$$

$$v^{(n-1)} = (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 3.2\,(b-x), \; v^{(n)} = (-1)^n n!, \; v^{(n+1)} = 0.$$

ამიტომ (12.2) ფორმულა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$0 = [(-1)^n n!\, f(x) - (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 3.2\,(b-x) f'(x) +$$

$$+ (-1)^{n-2} n(n-1)\ldots 3(b-x)^2 f''(x) - \ldots + (-1)^n (b-x)^n f^{(n)}(x)]_a^b +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

აქედან, ჩასმის შესრულების შემდეგ მივიღებთ

$$0 = (-1)^n [\,n!\, f(b) - n!\, f(a) - n(n-1)\ldots 3.2\,(b-a) f'(a) -$$

$$- n(n-1)\ldots 3\,(b-a)^2 f''(a) - \ldots - (b-a)^n f^{(n)}(a)] +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx,$$

საიდანაც გვექნება

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n,$$

სადაც

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx.$$

ეს არის ტეილორის ფორმულა დამატებითი წევრით განსაზღვრული ინტეგრალის სახით.

თუ b-ს აღვნიშნავთ x-ით, a-ს კი x_0-ით, გვექნება

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n,$$

სადაც

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

რადგანაც $(b-x)^n$ ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ R_n-თვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემა, რაც მოგვცემს

$$R_n=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^b (b-x)^n\,dx, \quad a<\xi<b.$$

აქედან

$$R_n=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

ეს გამოსახულება წარმოადგენს დამატებით წევრს ლაგრანჟის სახით.

§ 16. ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^k x dx,$$

სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია.

ამოხსნა. ვიგულისხმოთ, რომ

$$\sin^{k-1}x=u, \ \sin x dx=dv.$$

მაშინ

$$du=(k-1)\sin^{k-2}x\cos x dx, \quad v=-\cos x.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა გვაძლევს

$$I_k=[-\sin^{k-1}x\cos x]_0^{\pi/2}+(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x\cos^2 x dx=$$

$$=(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x(1-\sin^2 x)dx=(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x dx-$$

$$-(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^k x dx.$$

მაშასადამე,

$$I_k=(k-1)I_{k-2}-(k-1)I_k.$$

აქედან

$$I_k=\frac{k-1}{k}I_{k-2}. \qquad (16.1)$$

ამ ფორმულის საშუალებით I_k ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება I_{k-2} ინტეგრალის გამოთვლამდე. ესაა I_k ინტეგრალის რედუქციის ფორმულა.

(16.1) ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით მივიღებთ I_0 ან I_1 ინტეგრალს, იმისდა მიხედვით, k ლუწია თუ კენტი.

თუ k ლუწია, $k=2n$, მაშინ (16.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2},$$

$$I_{2n-2}=\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4},$$

$$\cdots\cdots$$

$$I_2=\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

მიღებული ტოლობების წევრ-წევრად გამრავლება მოგვცემს

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (16.2)$$

თუ k კენტია, $k=2n+1$, მაშინ (16.1) ფორმულის მიმდევრობით გამოყენება, ანალოგიურად წინა შემთხვევისა, მოგვცემს

$$I_{2n+1}=\frac{2n\,(2n-2)\ldots4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots3.1}. \tag{16.3}$$

ვალე-პუსენის მიხედვით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$2n!!=2n\,(2n-2)\ldots4.2,$$
$$(2n+1)!!=(2n+1)\,(2n-1)\ldots3.1.$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{როდესაც } m \text{ კენტია,}\\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{როდესაც } m \text{ ლუწია.}\end{cases}$$

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx$. თუ შემოვიღებთ ჩასმას $x=\frac{\pi}{2}-t$, მაშინ $dx=-dt$. ინტეგრალის ახალი ზღვრები იქნება $\frac{\pi}{2}$ და 0. მაშასადამე,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m x dx=-\int_{\pi/2}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\pi/2}\sin^m x dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლა ვიცით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I_{m,n}=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^m x dx,$$

სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ძალით

$$I_{m,n}=\int_0^{\pi/2}\sin^{m-1}x\,(\cos^n x\sin x)dx=-\left[\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}\right]_0^{\pi/2}+$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx=\frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\cos^n x\,dx-$$

$$-\frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx.$$

ამრიგად,

$$I_{m,n}=\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n}-\frac{m-1}{n+1}I_{m,n}.$$

აქედან გვაქვს:

$$I_{m,n}=\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}. \tag{16.4}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}. \tag{16.5}$$

(16.4) და (16.5) წარმოადგენენ დაყვანის ფორმულებს.

თუ ჩავატარებთ ისეთივე მსჯელობებს, როგორც პირველ მაგალითში, გვექნება

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{როდესაც } m \text{ და } n \text{ ლუწია,}\\[2ex] \dfrac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{როდესაც } m \text{ ან } n \text{ ორივე კენტია.}\end{cases}$$

თუ m და n ორივე კენტია: $m=2p+1$, $n=2q+1$, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა მარტივდება:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}x\cos^{2q+1}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი $\int\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ არ მოიძებნება ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში. მიუხედავად ამისა, მოცემული I ინტეგრალი მარტივად გამოითვლება ხელოვნური გზით. მართლაც,

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

უკანასკნელ შესაკრებში მოვახდინოთ ჩასმა $x=\pi-t$, მაშინ $dx=-dt$ და t იცვლება $\frac{\pi}{2}$-დან 0-მდე. ამიტომ

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx-\int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx+$$

$$+\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\frac{\pi^2}{4}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx,$$

სადაც p და q მთელი დადებითი რიცხვებია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ შემოვიღებთ ჩასმას $x=\sin^2 z$, გვექნება

$$I=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}z\cos^{2q+1}z\,dz=\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$

§ 17. ვალისის ფორმულა

ვთქვათ, n მთელი დადებითი რიცხვია და $0<x<\frac{\pi}{2}$. მაშინ

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x.$$

მაშასადამე,

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx<\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx<\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx.$$

თუ ინტეგრალებს შევცვლით მათი რიცხვითი მნიშვნელობებით, გვექნება

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

ამ უტოლობებიდან გვაქვს:

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+\alpha_n},$$

სადაც $0 < \alpha_n < 1$. აქედან ვღებულობთ

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{n}\right\}.$$

ეს არის ვალისის (Wallis) ფორმულა.

§ 18. ლუწი და კენტი ფუნქციების ინტეგრება

ვთქვათ, a ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და $[-a, a]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია. მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია აგრეთვე $[-a, 0]$ და $[0, a]$ სეგმენტებზე. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

თუ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $x=-t$, გვექნება

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა, გვაქვს

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \tag{18.1}$$

ხოლო. თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \tag{18.2}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

$$ა)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x dx; \quad ბ)\ \int_{a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx; \quad გ)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^6 x dx.$$

ამოხსნა. ა) $\sin^7 x$ ფუნქცია კენტია, ამიტომ (18.1) ფორმულის თანახმად

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\, dx = 0.$$

ბ) $\sqrt{a^2-x^2}$ ფუნქცია ლუწია და ამიტომ (18.2) ფორმულის ძალით

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = 2\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}.$$

გ) $\sin^6 x$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^6 x dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^6 x\, dx = 2\cdot\frac{5.3.1}{6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^4 x + 3e^{x^2}\sin 5x)\, dx.$$

ამოხსნა. I ინტეგრალი ასე გადავწეროთ

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x dx + 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{x^2}\sin 5x dx.$$

რადგანაც $\cos^4 x$ ლუწი ფუნქციაა, $e^{x^2}\sin 5x$ კი კენტი, ამიტომ (18.1) და (18.2) ფორმულების თანახმად

$$I = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 x\, dx = 2\cdot\frac{3.1}{4.2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

კითხვები

1. რა ამოცანებს მივყავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებამდე?

2. რას ეწოდება მოცემული ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე?

3. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე?

4. ჩამოაყალიბეთ ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

5. რა თვისებები აქვს განსაზღვრულ ინტეგრალს?

6. როგორ გამოითქმის საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემა? მეორე თეორემა?

სავარჯიშო

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1. $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$. პასუხი: $\frac{7}{3}$.

2. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right) dx$. პასუხი: $33\frac{1}{3}$.

3. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$. პასუხი: $\frac{16}{3}$.

4. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. პასუხი: $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$.

5. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$. პასუხი: $\ln\frac{4}{3}$.

6. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. პასუხი: $\frac{\pi}{2}$.

7. $\int_0^1 \frac{t^2dt}{\sqrt{t^6+1}}$. პასუხი: $\frac{1}{3}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

ცვლადთა გარდაქმნის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები:

8. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. პასუხი: $4-2\ln 3$.

9. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{3+(x-2)^{2/3}}\,dx$. პასუხი: $8+\frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$.

10. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. პასუხი: $2-\frac{\pi}{2}$.

11. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$. პასუხი: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

12. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a^2\sin^2 t}$. პასუხი: $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$.

13. $\int_0^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. პასუხი: $\frac{1}{5}\ln 114$.

14. $\int_1^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$. პასუხი: $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

15. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. პასუხი: $\frac{2+\pi}{4}$.

16. $\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. პასუხი: $\frac{\pi}{16}$.

17. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. პასუხი: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

18. დაამტკიცეთ, რომ $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობები

ა) $\int_6^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$;

ბ) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

19. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ლუწი და ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_0^x f(t)dt$ წარმოადგენს კენტ ფუნქციას, ხოლო თუ $f(x)$ კენტია, მაშინ აღნიშნული ინტეგრალი ლუწი ფუნქციაა.

20. ინტეგრალში $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ მოახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა $t=\sin x$.

პასუხი: $\int\limits_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\,dt +$

$$+\int\limits_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]dt.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

21. $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$. პასუხი: $1-\dfrac{2}{e}$.

22. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$. პასუხი: $\dfrac{\pi}{2}-1$.

23. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$. პასუხი: $\dfrac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

24. $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x dx$. პასუხი: $\pi^3-6\pi$.

25. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx$. პასუხი: $\dfrac{e^{\pi}-2}{5}$.

26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. პასუხი: $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

27. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x dx.$ პასუხი: $\frac{35\pi}{125}$.

28. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^7 x dx.$ პასუხი: $\frac{16}{35}$.

სხვადასხვა მაგალითები

29. მოძებნეთ:

ა) $\frac{d}{da}\int\limits_{a}^{b} \cos x^2\, dx$; ბ) $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

პასუხი: ა) $-\cos a^2$; ბ) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

30. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} \sin t^2 dt = 0.$$

31. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x\to 0} \left\{ \int\limits_{0}^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt; \int\limits_{0}^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\, dt \right\} = 1.$$

32. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \int\limits_{0}^{x} t f(t)\, dt : \int\limits_{0}^{x} f(t)\, dt$$

ზრდადია, როდესაც $x > 0$.

33. ვთქვათ, $f(x)$ უწყვეტია $[0, +\infty[$ შუალედში და $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x} f(t)dt = A.$$

34. ვთქვათ,

$$f(x) = \int\limits_{x}^{x+1} \sin t^2 dt.$$

დაამტკიცეთ, რომ $|f(x)| < \frac{2}{x}$, როდესაც $x > 0$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა $t^2=u$ და გამოიყენეთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემა.

§ 19. ინტეგრალები უსასრულო ზღვრებით

მათემატიკური ანალიზის მრავალი საკითხის შესწავლისას საჭიროა ინტეგრალის ცნების განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ინტეგრების ზღვრებიდან ერთი მაინც უსასრულოა,

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, სადაც t ნებისმიერი a-ზე მეტი რიცხვია. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx, \tag{19.1}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ა რ ა ს ა კ უ თ რ ი ვ ი ი ნ ტ ე გ- რ ა ლ ი a-დან $+\infty$-მდე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{19.2}$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ (19.2) ინტეგრალი კრებადია, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდებთ ინტეგრებადს $[a, +\infty[$ შუალედში.

თუ (19.1) ზღვარი არ არსებობს ანდა უსასრულოა, მაშინ ვიტყვით, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ განშლადია.

თ უ $[a, +\infty[$ შ უ ა ლ ე დ შ ი გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა ყ ო ვ ე ლ $[a, t]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე დ ა ა რ ს ე ბ ო ბ ს ა მ ფ უ ნ ქ ც ი ი ს პ ი რ ვ ე ლ ყ ო ფ ი ლ ი $F(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა $[a, +\infty[$ შ უ ა ლ ე დ შ ი, მ ა შ ი ნ ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი ს $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ა რ ს ე ბ ო ბ ი ს ა- თ ვ ი ს ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა დ ა ს ა კ მ ა რ ი ს ი, რ ო მ ა რ ს ე ბ ო ბ დ ე ს $F(+\infty)$, ე. ი. ა რ ს ე ბ ო ბ დ ე ს $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=[F(x)]_a^{+\infty} \tag{19.3}$$

ახლა ვთქვათ, რომ $]-\infty, a]$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ $[l, a]$ სეგმენტზე, სადაც l ნებისმიერი a-ზე ნაკლები რიცხვია. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{l\to-\infty}\int_l^a f(x)dx, \tag{19.4}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $-\infty$-დან a-მდე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx. \tag{19.5}$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ (19.5) ინტეგრალი კრებადია, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდებთ ინტეგრებადს $]-\infty, a]$ შუალედში. თუკი (19.4) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ ვიტყვით, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$ განშლადია.

დასასრულ, ჩვენ ვიტყვით, რომ $]-\infty, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ამ შუალედში, თუ კრებადია ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

მათ ჯამს ეწოდება ინტეგრალი $-\infty$-დან $+\infty$-მდე $f(x)dx$-დან:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$, სადაც $a>0$, $b>0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ვიცით, $\frac{1}{a^2+b^2x^2}$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია $[0, +\infty[$ შუალედში არის

$$F(x)=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$F(0)=0, \ F(+\infty)=\frac{\pi}{2ab}.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{\pi}{2ab}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ რომ ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx$ განშლადია, თუ $a>0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს:

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{ax}dx=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{a}e^{at}-\frac{1}{a}\right)=+\infty.$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a>0$, კრებადია, როდესაც $\alpha>1$ და განშლადია, როდესაც $\alpha\leqslant 1$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $\alpha\neq 1$, მაშინ

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{როდესაც } \alpha<1,\\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{როდესაც } \alpha>1.\end{cases}$$

თუ $\alpha=1$, მაშინ

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln a)=+\infty.$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როდესაც $\alpha>1$ და განშლადია, როდესაც $\alpha\leqslant 1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ პუასონის (Poisson) ინტეგრალი

$$I=\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

ამოხსნა. ჯერ დავამტკიცოთ ამ ინტეგრალის კრებადობა. ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t)=(1+t)e^{-t}.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა $t=0$ წერტილში. ცხადია, $f(0)=1$. მაშასადამე, თუ $x\neq 0$, გვექნება

$$f(x^2)=(1+x^2)e^{-x^2}<1,\quad f(-x^2)=(1-x^2)e^{x^2}<1.$$

აქედან ვღებულობთ

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}. \tag{19.6}$$

ცხადია, ნებისმიერი დადებითი t რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx<\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

აქედან გამომდინარეობს I ინტეგრალის არსებობა.

ახლა გამოვთვალოთ I ინტეგრალი. ამისათვის (19.6) უტოლობების ყველა წევრი ავამაღლოთ n ხარისხში (n—მთელი დადებითი რიცხვია), გვექნება

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}. \tag{19.7}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx>\sqrt{n}\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx.$$

მაშასადამე, (19.7) უტოლობათა ძალით

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx>\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n\,dx. \tag{19.8}$$

ინტეგრალში $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$ მოვახდინოთ ჩასმა $x=\sin t$, გვექნება

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

ამრიგად (19.8) უტოლობის თანახმად

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx>\sqrt{n}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \tag{19.9}$$

ახლა ინტეგრალში $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ მოვახდინოთ ჩასმა $x=\operatorname{tg} t$, გვექნება

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2} t\,dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{19.10}$$

(19.9) და (19.10) თანაფარდობათა ძალით, (19.7) უტოლობებიდან გვაქვს

$$\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx<\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

აქედან

$$\frac{n}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]<\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx<$$

$$<\frac{2n}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n}\right]\frac{\pi}{2}. \tag{19.11}$$

ვალისის ფორმულის თანახმად

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\sqrt{\pi},\\ &\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

თუ (19.11) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $n\to\infty$ და გავითვალისწინებთ (19.12) ტოლობებს, გვექნება

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{19.13}$$

ამ ინტეგრალს გამოყენება აქვს ალბათობათა თეორიაში.

§ 20. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი

როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ პირველყოფილი ფუნქცია ცნობილია, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ან განშლადობის საკითხის შესწავლა ადვილია. მაგრამ, როდესაც პირველყოფილი უმაღლესი ტრანსცენდენტური ფუნქციაა, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობისა და განშლადობის საკითხის შესწავლისათვის უნდა მივმართოთ სხვა გზებს. ამ პარაგრაფში შევისწავლით რამდენიმე კრიტერიუმს, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს გამოვარკვიოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა ან განშლადობა.

თეორემა 24. ვთქვათ, $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, $t > a$. ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთ რიცხვი $T > a$, რომ

$$\left|\int\limits_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > T,\ t'' > T.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)dx.$$

პირობის თანახმად $F(t)$ ფუნქცია სასრულია t ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის $[a, +\infty[$ შუალედში. როგორც ვიცით, $F(t)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, როდესაც $t \to +\infty$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი რიცხვი $T > a$, რომ

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > T,\ t'' > T.$$

მაგრამ

$$F(t'') - F(t') = \int\limits_a^{t''} f(x)\,dx - \int\limits_a^{t'} f(x)\,dx = \int\limits_{t'}^{t''} f(x)dx.$$

მაშასადამე,

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > T,\ t'' > T.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25. ვთქვათ, $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $f(x)$ კლებადია $[a, +\infty[$ შუალედში და $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^t g(x)dx$ შემოსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში, მაშინ კრებადია ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$K = \sup_{a\leqslant t<+\infty} \left|\int_a^t g(x)dx\right|.$$

რადგანაც $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, ამიტომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი $N>a$, რომ

$$f(x) < \frac{\varepsilon}{2K}, \text{ როდესაც } x > N.$$

განვიხილოთ ახლა ორი ნებისმიერი რიცხვი $t' > N$ და $t'' > N$, სადაც $t' < t''$. ბონეს თეორემის თანახმად

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)dx\right| = \left| f(t')\int_{t'}^{\xi} g(x)dx\right| =$$

$$= f(t') \left| \int_a^{\xi} g(x)\,dx - \int_a^{t'} g(x)\,dx \right| \leqslant 2Kf(t') < \varepsilon.$$

მაშასადამე, 24-ე თეორემის თანახმად ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ კრებადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$, სადაც $a > 0$, კრებადია, თუ $\alpha > 0$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha},\quad g(x)=\sin x.$$

რადგანაც

$$\left|\int\limits_a^t g(x)dx\right| = |-\cos t+\cos a| \leqslant 2,$$

ამიტომ

$$\sup_{a\leqslant t<\infty}\left|\int\limits_a^t g(x)\,dx\right|\leqslant 2.$$

ამის გარდა, $f(x)$ ფუნქცია კლებადია $[a, +\infty[$ შუალედში და $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. მაშასადამე, 25-ე თეორემის თანახმად ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ კრებადია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ კრებადია, როდესაც $\alpha > 0$.

თეორემა 26. *ვთქვათ, $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, ამასთანავე $g(x)$ მონოტონურია და შემოსაზღვრული $[a, +\infty[$ შუალედში. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.*

დამტკიცება. მე-18 თეორემის თანახმად

$$\int_{t'}^{t''} f(x)\,g(x)\,dx = g(t')\int_{t'}^{\xi} f(x)dx + g(t'')\int_{\xi}^{t''} f(x)dx. \qquad (20.1)$$

სადაც $a \leqslant t' < \xi < t''$. ვთქვათ,

$$K = \sup_{a \leqslant x < +\infty} |\, g(x)\,|\,.$$

რადგანაც ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადია, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი, $N > a$, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2K}, \text{ როდესაც } t' > N,\ t'' > N$$

ასეთი t' და t'' რიცხვებისათვის, (20.1) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)dx\right| \leqslant |\, g(t')\,| \cdot \left|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\,\right| +$$

$$+\,|\,g(t'')| \cdot \left|\int_{\xi}^{t''} f(x)\,dx\,\right| \leqslant K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

მაშასადამე, 24-ე თეორემის თანახმად, ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 27. ვთქვათ, $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული არაუარყოფითი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე და $f(x) \leqslant g(x)$, $a \leqslant x < +\infty$. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია ინტეგრალიც $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქციები

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx, \quad G(t)=\int_a^t g(x)dx, \ a\leqslant t<+\infty.$$

ცხადია, რომ

$$F(t)\leqslant G(t), \ a\leqslant t<+\infty.$$

ამის გარდა, $F(t)$ და $G(t)$ ფუნქციები ზრდადია $[a, +\infty[$ შუალედში. პირობის ძალით არსებობს $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$, ამიტომ იარსებებს $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, ე. ი. კრებადია ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ განშლადია, მაშინ განშლადია ინტეგრალიც $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+2^x)}$$

კრებადია α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის.

დამტკიცება. ცხადია, თუ $x\geqslant 1$ და $\alpha\geqslant 0$, მაშინ

$$\frac{1}{x^\alpha(1+2^x)}<\frac{1}{2^x}.$$

რადგანაც ინტეგრალი $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2^x}$ კრებადია, ამიტომ 27-ე თეორემის თანახმად კრებადია I ინტეგრალიც.

ახლა ვთქვათ, $\alpha<0$. ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$2^x=e^{x\ln 2}=1+x\ln 2+\frac{(x\ln 2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln 2)^k}{k!}+R_k,$$

სადაც

$$R_k=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{\theta x\ln 2}\quad 0<\theta<1.$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{x^{\alpha}(1+2^{x})}<\frac{k!}{x^{\alpha}(x\ln 2)^{k}}, \quad x\geqslant 1.$$

ავიღოთ ისეთი k, რომ $k+\alpha>1$. მაშინ ინტეგრალი

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}(x\ln 2)^{k}}$$

კრებადია და, მაშასადამე, კრებადი იქნება I ინტეგრალიც. ამრიგად, კრებადია I ინტეგრალი α-ს ყველა მნიშვნელობისათვის

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{2}+a^{2}}{x^{2}\sqrt{x}}\,dx$$

განშლადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{x^{2}+a^{2}}{x^{2}\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

მაგრამ მე-18 პარაგრაფის მე-3 მაგალითის მიხედვით ინტეგრალი $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ განშლადია, ამიტომ I ინტეგრალიც განშლადია.

§ 21. აბსოლუტურად კრებადი ინტეგრალები

თეორემა 28. თ უ $[a, +\infty[$ შ უ ა ლ ე დ შ ი გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ი ნ ტ ე გ რ ე ბ ა დ ი ა რ ი მ ა ნ ი ს ა ზ რ ი თ ყ ო ვ ე ლ $[a, t]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე დ ა ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ კ რ ე ბ ა-დ ი ა, მ ა შ ი ნ კ რ ე ბ ა დ ი ა ა გ რ ე თ ვ ე ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ დ ა მ ა რ თ ე ბ უ ლ ი ა უ ტ ო ლ ო ბ ა

$$\left|\int_{a}^{+\infty} f(x)dx\right|\leqslant\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\,dx. \tag{21.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რაკი $|f(x)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, +\infty[$ შუალედში, ამიტომ 24-ე თეორემის თანახმად ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი $N > a$, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\, dx\right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > N, \ \ t'' > N.$$

მაგრამ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\, dx\right| \leqslant \left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\, dx\right|.$$

მაშასადამე, როდესაც $t' > N$, $t'' > N$, გვექნება

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

აქედან, 24-ე თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა $[a, +\infty[$ შუალედში. შემდეგ, თუ უტოლობაში

$$\left|\int_a^t f(x)dx\right| \leqslant \int_a^t |f(x)|\, dx$$

გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $t \to +\infty$, მივიღებთ (21.1) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, სადაც $a > 0$, კრებადია, ხოლო

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მოცემული ინტეგრალის კრებადობა ზემოთ დავამტკიცეთ. ახლა დავუშვათ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ კრებადია, მაშინ 27-ე თეორემის ძალით კრებადი იქნება ინტეგრალიც $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$, ვინაიდან $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$. ხოლო

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\, dx.$$

ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ კრებადი ინტეგრალი $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$, გვექნება

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა ნაწილი სასრული სიდიდეა, მარჯვენა ნაწილი კი უსასრულოა. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ განშლადია.

განსაზღვრა. თუ $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ და $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ ინტეგრალები კრებადია, მაშინ იტყვიან, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად ინტეგრებადი $[a, +\infty[$ შუალედში. თუ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ კრებადია, მაგრამ იგი არაა აბსოლუტურად კრებადი, მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი პირობით კრებადია.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. რადგანაც $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ და $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ 27-ე თეორემის თანახმად I ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

თეორემა 29. თუ $[a, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე და მართებულია უტოლობა

$$|x^\alpha f(x)| < A, \quad \text{როდესაც } a \leqslant x < +\infty, \tag{21.2}$$

სადაც $a>0$, $\alpha>1$, ხოლო A დადებითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. (21.2) უტოლობიდან გვაქვს

$$|f(x)|<\frac{A}{x^\alpha}.$$

მაგრამ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როდესაც $\alpha>1$. მაშასადამე, კრებადია ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 30. ვთქვათ, $[a,+\infty[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a,t]$ სეგმენტზე და $[a,+\infty[$ შუალედის ყოველ x წერტილში $|f(x)|\leqslant|g(x)|$. თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ აგრეთვე აბსოლუტურად კრებადია.

ეს თეორემა წარმოადგენს 27-ე თეორემის უშუალო შედეგს.

§ 22. არასაკუთრივი ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან

ვთქვათ, $P(x)$ და $Q(x)$ არიან შესაბამისად m და n ხარისხის მრავალწევრები. ვიგულისხმოთ, რომ $Q(x)$ მრავალწევრს არა აქვს ნამდვილი ფესვები და, ამის გარდა, $m\leqslant n-2$. ამ შემთხვევაში არსებობს ინტეგრალი

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი ორი ინტეგრალის არსებობა:

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,\quad I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x)=\frac{x^{\alpha}P(x)}{Q(x)}, \quad g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}},$$

სადაც $1<\alpha<2$. ცხადია, რომ

$$\sup_{1\leqslant x<+\infty}|f(x)|=M<+\infty.$$

მაშასადამე,

$$\left|\frac{P(r)}{Q(x)}\right|=|f(x)\,g(x)|\leqslant\frac{M}{x^{\alpha}}.$$

30-ე თეორემის თანახმად I_2 ინტეგრალი კრებადია. ანალოგიურად მტკიცდება I_1 ინტეგრალის კრებადობა. ამრიგად, I ინტეგრალი კრებადია.

ახლა გამოვთვალოთ I ინტეგრალი. ვთქვათ,

$$x_k=a_k+ib_k \quad (k=1, 2, \ldots, l)$$

წარმოადგენენ $Q(x)$ მრავალწევრის სხვადასხვა ფესვებს. x_k ფესვის ჯერადობა იყოს α_k. მაშინ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{l}\left[\frac{A_k^{(1)}}{x-x_k}+\frac{A_k^{(2)}}{(x-x_k)^2}+\ldots+\frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}\right], \quad (22.1)$$

სადაც $A^{(\alpha)}$ საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია. თუ $p>1$, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-x_k)^p}=0.$$

მაშასადამე,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\sum_{k=1}^{l}\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{A_k^{(1)}}{x-x_k}dx.$$

მაგრამ

$$\frac{1}{x-x_k}=\frac{1}{(x-a_k)-ib_k}=\frac{(x-a_k)+ib_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}=$$

$$=\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}+i\,\frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}.$$

მაშასადამე,

$$\int_{-t}^{t}\frac{dx}{x-x_k}=\int_{-t}^{t}\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}\,dx+i\int_{-t}^{t}\frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\{(x-a_k)^2+b_k^2\}\right]_{-t}^{t}+i\left[\operatorname{arctg}\frac{x-a_k}{b_k}\right]_{-t}^{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(t-a_k)^2+b_k^2}{(t+a_k)^2+b_k^2}+i\left(\operatorname{arctg}\frac{t-a_k}{b_k}+\operatorname{arctg}\frac{t+a_k}{b_k}\right).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $t\to+\infty$, მივიღებთ

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{dx}{x-x_k}=\begin{cases} i\pi, & \text{თუ } b_k>0,\\ -i\pi, & \text{თუ } b_k<0,\end{cases}$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=i\pi\sum_{k=1}^{l}\pm A_k^{(1)}, \tag{22.2}$$

ამასთანავე $A_k^{(1)}$ რიცხვის წინ აალებია ნიშანი $+$, თუ $b_k>0$, ხოლო ნიშანი $-$, როდესაც $b_k<0$.

ახლა (22.1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ x-ზე და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $x\to\infty$, მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{l}A_k^{(1)}=0.$$

მაშასადამე,

$$\sum_k^{(+)}A_k^{(1)}+\sum_k^{(-)}A_k^{(1)}=0, \tag{22.3}$$

სადაც $\sum_k^{(+)}A_k^{(1)}$ და $\sum_k^{(-)}A_k^{(1)}$ სიმბოლოებით აღნიშნულია იმ $A_k^{(1)}$ რიცხვების ჯამები, რომლებიც შეესაბამება შესაბამისად $b_k>0$ და $b_k<0$ რიცხვებს.

(22.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_k^{(+)}A_k^{(1)}=-\sum_k^{(-)}A_k^{(1)}.$$

მაშასადამე, (22.2) ფორმულა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2i\pi \sum_k{}^{(+)} A_k^{(1)}. \tag{22.4}$$

თუ ყველა x_k ფესვი მარტივია, მაშინ $A_k^{(1)}$ კოეფიციენტებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$A_k^{(1)} = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{22.5}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\frac{P(r)}{Q(x)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{A_p^{(1)}}{x-x_p}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $(x-x_k)$-ზე, მივიღებთ

$$\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x)-Q(x_k)}{x-x_k}} = A_k^{(1)} + (x-x_k)\left[\sum_{p=1}^{k-1} \frac{A_p^{(1)}}{x-x_p} + \sum_{p=k+1}^{n} \frac{A_p^{(1)}}{x-x_p}\right].$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $x \to x_k$, მივიღებთ (22.5) ტოლობას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}\, dx$, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთანავე $m \leqslant 2n-1$. როგორც ცნობილია, $1+x^{2n}$ მრავალწევრის ფესვებია

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\,\pi}{2n} \quad (k=0, 1, \ldots, 2n-1).$$

(22.5) ფორმულის მიხედვით, გვაქვს

$$A_k^{(1)} = \frac{x_k^{m-1}}{2nx_k^{2n-1}} = \frac{x_k^m}{2n\,x_k^{2n}} = -\frac{x_k^m}{2n} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left(\cos\frac{m\pi}{2n} + i\sin\frac{m\pi}{2n}\right)^{2k+1} = -\frac{1}{2n}\, x_0^{(2k+1)m},$$

სადაც

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$b_k = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

ცხადია, რომ $b_k > 0$, როდესაც $k=0, 1, 2,\ldots, n-1$. მაშასადამე,

$$\sum_k^{(+)} A_k^{(1)} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(2k+1)m} = -\frac{x_0^m - x_0^{(2n+1)m}}{2n(1-x_0^{2m})} =$$

$$= -\frac{x_0^m(1-x_0^{2mn})}{2n(1-x_0^{2m})} = -\frac{x_0^m[1-(x_0^{2n})^m]}{2n(1-x_0^{2m})} =$$

$$= -\frac{x_0^m[1-(-1)^m]}{2n(1-x_0^{2m})} = -\frac{1-(-1)^m}{2n(x_0^{-m}-x_0^m)}.$$

მაგრამ

$$x_0^m = \cos\frac{m\pi}{2n} + i\sin\frac{m\pi}{2n},\quad x_0^{-m} = \cos\frac{m\pi}{2n} - i\sin\frac{m\pi}{2n}.$$

აქედან

$$x_0^m - x_0^{-m} = -2i\sin\frac{m\pi}{n}.$$

მაშასადამე,

$$\sum_k^{(+)} A_k^{(1)} = \frac{1-(-1)^m}{4ni\sin\frac{m\pi}{2n}}.$$

ამრიგად, (22.4) ფორმულის ძალით

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}dx = \begin{cases} 0, & \text{თუ } m \text{ ლუწია},\\[4pt] \dfrac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{2n}}, & \text{თუ } m \text{ კენტია}.\end{cases}$$

კერძოდ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}\quad (m<n).$$

აგრეთვე ცხადია, რომ

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}\quad (m<n).\qquad (22.6)$$

23. ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია სასრულია $[a, b[$ შუალედში, ამასთანავე იგი განიცდის უსასრულო წყვეტას b წერტილში. ამის გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ შუალედში, სადაც $a<t<b$.

თუ არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)dx$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციისა a-დან b-მდე და აღინიშნება $\int\limits_a^b f(x)\,dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)\,dx.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ არსებობს ანუ კრებადია, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ არ არსებობს $\lim\limits_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)\,dx$, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ განშლადია.

როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას $[a, b]$ სეგმენტის მარცხენა ბოლოში, მაშინ განსაზღვრის თანახმად

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a+}\int\limits_t^b f(x)\,dx.$$

დასასრულ, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას $[a, b]$ სეგმენტის შიგა c წერტილში. თუ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ და $\int\limits_c^b f(x)\,dx$, მაშინ ჯამს

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

ე. ი.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx\right].$$

თუ $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ და $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ ინტეგრალებიდან ერთი მაინც განშლადია, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ განშლადია.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ კრებადია თუ არა ინტეგრალი

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha},\quad \text{სადაც } \alpha>0,\ a>0.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $f(x)=\dfrac{1}{(a-x)^\alpha}$ განიცდის უსასრულო წყვეტას $x=a$ წერტილში, ამიტომ განსაზღვრის თანახმად, გვექნება

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha}=\lim_{t\to a-}\int\limits_0^t \frac{dx}{(a-x)^\alpha}=\lim_{t\to a-}\left[-\frac{(a-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{t\to a-}\left[(a-t)^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right]=\begin{cases}\dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{როდესაც } \alpha<1,\\ +\infty, & \text{როდესაც } \alpha>1.\end{cases}$$

თუ $\alpha=1$, ინტეგრალი განშლადია. მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როდესაც $\alpha<1$, ხოლო განშლადია, როდესაც $\alpha\geqslant 1$.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ განშლადია.

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{\varepsilon'}^{1}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}-2.$$

აქედან

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \varepsilon'\to 0+}}\left[\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{\varepsilon'}^{1}\frac{dx}{x^2}\right]=+\infty.$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

თეორემა 31. ვთქვათ, $[a, b[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, სადაც $a<t<b$. ამის გარდა, ვიგულისხმოთ, რომ b არის $f(x)$ ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წერტილი. თუ $F(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას $[a, b[$ შუალედში და არსებობს $\lim\limits_{t\to b-}F(t)=F(b-)$, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ კრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b-)-F(a). \tag{23.1}$$

დამტკიცება. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, $a<t<b$ და $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია $[a, b[$ შუალედში, ამიტომ

$$\int_a^t f(x)\,dx=F(t)-F(a).$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $t\to b-$, მივიღებთ (23.1) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 32. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს უსასრულო წყვეტის c წერტილი, სადაც $a<c<b$, და ყოველ $[a, t]$ და $[\tau, b]$ სეგმენტზე ($a<t<c$, $c<\tau<b$) $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით. თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი $F(x)$

ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ კრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^1 \ln x\,dx$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\ln x$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $x \ln x - x$. ცხადია, რომ

$$\lim_{x \to 0+} (x \ln x - x) = 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^1 \ln x\,dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1.$$

თეორემა 33. ვთქვათ, $[a, b[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, სადაც $a < t < b$, ამასთანავე b არის $f(x)$ ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წერტილი. ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } b - \eta < t' < b, \ b - \eta < t'' < b.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \quad a \leqslant t < b.$$

როგორც ვიცით, $F(t)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, როდესაც $t \to b-$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε

რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|F(t'')-F(t')|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } b-\eta<t'<b, \ b-\eta<t''<b.$$

მაგრამ

$$F(t'')-F(t')=\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx.$$

მაშასადამე,

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } b-\eta<t'<b, \ b-\eta<t''<b.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 34. ვთქვათ, $[a, b[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ სეგმენტზე, $a<t<b$, ამასთანავე b არის $f(x)$ ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წერტილი. თუ არსებობს ინტეგრალი $\int_a^b |f(x)|\,dx$, მაშინ არსებობს აგრეთვე ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{23.2}$$

დამტკიცება. 33-ე თეორემის ძალით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\,dx\right|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } b-\eta<t'<b, \ b-\eta<t''<b.$$

მაგრამ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|\,dx\right|.$$

მაშასადამე,

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც } b-\eta<t'<b, \ b-\eta<t''<b.$$

აქედან, 33-ე თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს კრებადობა ინტეგრალისა $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

შემდეგ, რაკი

$$\left|\int\limits_a^t f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^t |f(x)|\,dx,$$

ამიტომ, თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც $t \to b$— მივიღებთ (23.2) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 1. თუ ინტეგრალები $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ და $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ კრებადია, მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად ინტეგრებადი $[a, b]$ სეგმენტზე.

ინტეგრებადი ფუნქცია შეიძლება არ იყოს აბსოლუტურად ინტეგრებადი. მოვიყვანოთ

მაგალითი 4. ვთქვათ, $]0, 1]$ შუალედში განსაზღვრულია ფუნქცია

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx = \int\limits_\varepsilon^1 x\left(\cos\frac{1}{x}\right)dx = \left[x\cos\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 -$$

$$-\int\limits_\varepsilon^1 \cos\frac{1}{x}\,dx = \cos 1 - \varepsilon\cos\frac{1}{\varepsilon} - \int\limits_\varepsilon^1 \cos\frac{1}{x}\,dx.$$

რადგანაც ინტეგრალი $\int\limits_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx$ არსებობს, ამიტომ იარსებებს

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \cos\frac{1}{x}\,dx.$$

შემდეგ ცხადია, რომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx = \cos 1 - \int_0^1 \cos \frac{1}{x}\, dx.$$

ამრიგად $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ფუნქცია ინტეგრებადია]0, 1] შუალედში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია არ არის აბსოლუტურად ინტეგრებადი]0, 1] შუალედში.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის, უტოლობებიდან

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

გამომდინარეობს

$$\sin \frac{1}{x} \geqslant \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

მაშასადამე, ყოველი მთელი დადებითი n რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_{a_n}^{b_n} \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{b_n}{a_n},$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{8n+1}.$$

ამრიგად,

$$\int_{a_n}^{b_n} \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{8n+1}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{9n}\right) > \frac{M}{n},$$

სადაც M არის n-ზე დამოუკიდებელი დადებითი რიცხვი.

რადგანაც ჰარმონიული მწკრივი განშლადია, ამიტომ ყოველი დადებითი N რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geqslant N$$

და მით უმეტეს

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geqslant N.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალი $\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx$ განშლადია.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრებადობიდან $[a, b]$ სეგმენტზე საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი აბსოლუტური ინტეგრებადობა იმავე სეგმენტზე.

განსაზღვრა 2. თუ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\, dx$ კრებადია, ხოლო ინტეგრალი $\int_a^b |f(x)|\, dx$ განშლადია, მაშინ ინტეგრალს $\int_a^b f(x)\, dx$ ეწოდება პირობით კრებადი ინტეგრალი.

თეორემა 35. ვთქვათ, $]a, b]$ შუალედში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს სახე:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{\alpha}},$$

სადაც α დადებითი რიცხვია, ხოლო $g(x)$ რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a, b]$ შუალედში. თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $|g(x)| \geqslant p$, სადაც p არის x-ზე დამოუკიდებელი დადებითი რიცხვი, მაშინ ინტეგრალის $\int_a^b f(x)\, dx$ კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ α იყოს ერთზე ნაკლები.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ a წერტილის რაიმე მიდამოში $]a, a+\varepsilon[$, $|g(x)| \geqslant p$. საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის ძალით, ყოველ t' და t''-თვის, რომ-

ლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს $a<t'<a+\varepsilon$, $a<t''<a+\varepsilon$, გვაქვს:

$$\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx=\mu\int_{t'}^{t''}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}},$$

სადაც $|\mu|\geqslant p$. მაგრამ ინტეგრალი $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha<1$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ვთქვათ, $]a, b]$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[t, b]$ სეგმენტზე, $a<t<b$. თუ არსებობს ისეთი დადებითი α რიცხვი, რომ

$$\lim_{x\to a+}(x-a)^{\alpha} f(x)=K\neq 0,$$

მაშინ ინტეგრალის $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ α იყოს ერთზე ნაკლები.

ადვილად მტკიცდება აგრეთვე შემდეგი

თეორემა 36. თუ $]a, b]$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[t, b]$ სეგმენტზე, $a<t<b$, და

$$\lim_{x\to a+}(x-a)^{\alpha} f(x)=0,$$

სადაც $0<\alpha<1$, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ კრებადია.

ანალოგიური თეორემები შეგვიძლია დავადგინოთ იმ შემთხვევაში, როდესაც $(x-a)^{\alpha}$ გამოსახულების ნაცვლად გვექნება $(b-x)^{\alpha}$ გამოსახულება.

მაგალითი 5. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას $x=0$ წერტილში. რაკი

$$\lim_{x\to 0+}\left(x^{3/4}\cdot\frac{|\ln\sin x|}{\sqrt{x}}\right)=0,$$

ამიტომ 36-ე თეორემის თანახმად მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ განშლადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აქ $f(x)=\frac{1}{\ln x}$, $a=1$, $b=2$. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\lim_{x\to 1+}(x-1)\,f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{\ln x}=1.$$

35-ე თეორემის შედეგის თანახმად აღებული ინტეგრალი განშლადია.

§ 24. არასაკუთრივი ინტეგრალის თვისებები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია $]a, b[$ შუალედში, სადაც a და b არიან არა მარტო სასრული სიდიდეები, არამედ ისინი შეიძლება იყოს აგრეთვე $\pm\infty$.

ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს ინტეგრალის შემდეგი თვისებები:

1. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, c]$ და $[c, b]$ შუალედებზე, $a<c<b$, მაშინ $f(x)$ ინტეგრებადია $[a, b]$ შუალედზედაც და მართებულია ტოლობა

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

2. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ ყოველი A რიცხვისათვის $B\,f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია იმავე შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int\limits_a^b A\,f(x)\,dx=A\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ $A\,f(x)+B\,g(x)$ ფუნქციაც, სადაც A და B მუდმივებია, ინტეგრებადია იმავე შუალედში და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b [A f(x)+B g(x)]\, dx = A\int_a^b f(x)\, dx+B\int_a^b g(x)\, dx.$$

ამ თვისებების დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

თეორემა 37. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ შუალედში. თუ $f(x)$ შემოსაზღვრულია, ხოლო $g(x)$ ნიშანს არ იცვლის $[a, b]$ შუალედში, მაშინ $f(x)\, g(x)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია ამ შუალედში.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $g(x)\geqslant 0$. ცხადია, რომ

$$| f(x)\, g(x) | \leqslant M\, g(x),$$

სადაც

$$M=\sup | f(x) |, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

რადგანაც $g(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, ამიტომ $f(x)\, g(x)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია.

შენიშვნა. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია, მაგრამ შემოსაზღვრული არაა, მაშინ $f(x)\, g(x)$ ფუნქცია შეიძლება არ იყოს ინტეგრებადი აღებულ შუალედში. მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad a=0, \quad b=1.$$

ინტეგრალები $\int_0^1 f(x)\, dx$ და $\int_0^1 g(x)\, dx$ კრებადია, მაგრამ ინტეგრალი $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ განშლადია, ვინაიდან

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx=\int_0^1 \frac{dx}{x}=+\infty.$$

თეორემა 38. თუ $f(x)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $g(x)$ შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ $f(x)\, g(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

§ 25. არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[a, t]$ და $[\tau, b]$ სეგმენტზე, სადაც $a<t<c<\tau<b$, ამასთანავე c წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას. როგორც ვიცით, არასაკუთრივი ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)\, dx$-დან განისაზღვრება ტოლობით

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx\right].$$

აქ იგულისხმება, რომ ეს ზღვარი არსებობს, როდესაც ε და ε' ერთმანეთზე დამოუკიდებლად ნულისაკენ მიისწრაფვიან. შეიძლება ეს ზღვარი არ არსებობდეს, მაგრამ არსებობდეს ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right].$$

ამ ზღვარს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება მთავარი მნიშვნელობა არასაკუთრივი ინტეგრალისა $\int_a^b f(x)\,dx$ და აღინიშნება $V.\,p.\int_a^b f(x)\,dx$ სიმბოლოთი. ამრიგად, განსაზღვრის მიხედვით

$$V.\,p.\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right].$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)\,dx$ არსებობს კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

მაგალითად, არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ განშლადია, მაგრამ მისი მთავარი მნიშვნელობა ნულია. მართლაც,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x}=(\ln\varepsilon-\ln 1)+(\ln 1-\ln\varepsilon)=0.$$

მაშასადამე,

$$V.\,p.\int_{-1}^1\frac{dx}{x}=0.$$

ამავე წესით მივიღებთ, რომ

$$V.\,p.\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a},\quad a<c<b.$$

განვიხილოთ ინტეგრალი $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$, სადაც $a<c<b$, ხოლო n ერთზე მეტი მთელი რიცხვია. როგორც ვიცით ეს ინტეგრალი განშლადია. გამოვარკვიოთ, არსებობს თუ არა ეს ინტეგრალი კოშის მთავარი მნიშვნელობით. გვაქვს:

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^n}+\int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^n}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{\varepsilon^{n-1}}\right].$$

თუ n კენტი რიცხვია, მაშინ

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^n}+\int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^n}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right]$$

და, მაშასადამე,

$$V\cdot p.\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right].$$

თუკი n ლუწი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ არ არსებობს კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

დავსვათ ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში და იგი ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ $[-l, l]$ სეგმენტზე. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{l\to+\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ არსებობს კოშის მთავარი მნიშვნელობით, ხოლო აღნიშნულ ზღვარს ეწოდება ინტეგრალის $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ მთავარი მნიშვნელობა და აღინიშნება

$$V\cdot p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

§ 26. ფრულანის ინტეგრალი

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0, +\infty[$ შუალედში და არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty).$$

ინტეგრალს

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx,$$

სადაც a და b დადებითი რიცხვებია, ეწოდება ფ რ უ ლ ა ნ ი ს (Frullani) ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი.

ქვემოთ დავამტკიცებთ ამ ინტეგრალის კრებადობას და, ამის გარდა, გამოვთვლით მის მნიშვნელობასაც.

ავიღოთ ორი ნებისმიერი დადებითი რიცხვი α და β, სადაც $\alpha<\beta$. ადვილი მისახვედრია შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_\alpha^\beta \frac{f(bx)}{x}\,dx=\int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(t)}{t}\,dt-$$

$$-\int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(t)}{t}\,dt=\int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $a<b$. საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის ძალით,

$$\int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t}\,dt=f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{dt}{t}=f(\xi)\ln\frac{b}{a},\quad a\alpha<\xi<b\alpha.$$

$$\int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t}\,dt=f(\xi')\ln\frac{b}{a},\quad a\beta<\xi'<b\beta.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\alpha\to0}\xi=0,\qquad \lim_{\beta\to+\infty}\xi'=+\infty.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\alpha\to0}\int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t}\,dt=f(0)\ln\frac{b}{a},\tag{26.1}$$

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t}\,dt=f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.\tag{26.2}$$

მაგრამ

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to+\infty}}\left[\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\right].$$

თუ გავითვალისწინებთ (26.1) და (26.2) ტოლობებს, გვექნება

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}. \qquad (26.3)$$

ასეთია ფრულანის ინტეგრალის მნიშვნელობა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0, +\infty[$ შუალედში და $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ არ არსებობს, მაშინ $\int\limits_v^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ ინტეგრალის არსებობიდან, სადაც v რაიმე დადებითი რიცხვია, გამომდინარეობს ინტეგრალის

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

არსებობა და მართებულია ტოლობა

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}. \qquad (26.4)$$

ამ ფორმულას მივიღებთ იმავე გზით, რა გზითაც მივიღეთ (26.3) ფორმულა, მხოლოდ β-ს ნაცვლად უნდა ავიღოთ $+\infty$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

აქ $f(x)=e^{-x}$, $f(0)=1$, $f(+\infty)=0$. მაშასადამე, (26.3) ფორმულის ძალით

$$I=\ln 2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}dx, \quad a>0,\ b>0.$$

აქ $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $f(0)=0$, $f(+\infty)=\frac{\pi}{2}$. მაშასადამე, (26.3) ფორმულის ძალით

$$I=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\,dx,\quad a>0,\ b>0.$$

ამ შემთხვევაში $f(x)=\sin x$, $f(0)=0$. ცხადია, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ არ არსებობს, მაგრამ ინტეგრალი $\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ კრებადია, როდესაც $\varepsilon\geqslant 0$. ამიტომ (26.4) ფორმულის თანახმად $I=0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int_0^1\frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\ln x}\,dx,\quad a>0,\ b>0.$$

თუ მოვახდენთ ჩასმას $x=e^{-t}$, გვექნება

$$I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\ln\frac{b}{a}.$$

§ 27. მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი

მწკრივის კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნები დამყარებულია მოცემული მწკრივის გეომეტრიულ პროგრესიასთან შედარებაზე. ამიტომ ეს ნიშნები წარმატებით შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მხოლოდ ისეთ მწკრივებზე, რომელთა წევრები უფრო სწრაფად კლებულობენ, ვიდრე რაიმე გეომეტრიული პროგრესიის წევრები. ასეთ მწკრივებზე ამბობენ, რომ ისინი სწრაფად კრებადია. რაც უფრო სწრაფად კრებადია მწკრივი, მით უფრო მოხერხებულია იგი პრაქტიკული გაანგარიშებისათვის, რადგანაც წევრთა უფრო ნაკლები რიცხვის შეკრება დაგვჭირდება მოცემული სიზუსტით მწკრივის ჯამის გამოსათვლელად.

მწკრივებისათვის, რომლებიც უფრო ნელა კრებადია, ვიდრე ნებისმიერი გეომეტრიული პროგრესია, კოშისა და დალამბერის ნიშ-

ნები უკვე ვერ გამოიყენება. ამიტომ საჭიროა ვეძებოთ უფრო ფაქიზი ნიშნები. ნელა კრებად მწკრივთა რიცხვს ეკუთვნის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობის უამრავი მწკრივი.

ახლა მოვიყვანოთ დადებითი მწკრივის კრებადობის უფრო ძლიერი ნიშანი.

თეორემა 39. (კოში). თ უ $f(x)$ დ ა დ ე ბ ი თ ი დ ა კ ლ ე ბ ა დ ი ფ უ ნ ქ ც ი ა ა $[a, +\infty[$ შ უ ა ლ ე დ შ ი, მ ა შ ი ნ

$$f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n)+\ldots \tag{27.1}$$

მ წ კ რ ი ვ ი ს კ რ ე ბ ა დ ო ბ ი ს ა თ ვ ი ს ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი ა დ ა ს ა კ მ ა რ ი ს ი, რ ო მ ი ნ ტ ე გ რ ა ლ ი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ი ყ ო ს კ რ ე ბ ა დ ი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია კლებადია, ამიტომ

$$f(a+n)\leqslant f(x)\leqslant f(a+n-1),$$

როდესაც $a+n-1\leqslant x\leqslant a+n$. თუ მოვახდენთ ამ უტოლობების წევრ-წევრად ინტეგრებას $(a+n-1)$-დან $(a+n)$-მდე, გვექნება

$$f(a+n)\leqslant \int\limits_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx\leqslant f(a+n-1).$$

ახლა n-ს მივანიჭოთ მნიშვნელობები $1, 2, \ldots, m$, გვექნება

$$f(a+1)\leqslant \int\limits_{a}^{a+1} f(x)\,dx\leqslant f(a),$$

$$f(a+2)\leqslant \int\limits_{a+1}^{a+2} f(x)\,dx\leqslant f(a+1),$$

. . . .

$$f(a+m)\leqslant \int\limits_{a+m-1}^{a+m} f(x)\,dx\leqslant f(a+m-1).$$

ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{m} f(a+k)\leqslant \int\limits_{a}^{a+m} f(x)\,dx\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} f(a+k).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია დადებითია, ამიტომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{a+m} f(x)\,dx$ იზრდება m-თან ერთად. მაშასადამე, თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია, მაშინ მწკრივი (27.1) კრებადია, ვინაიდან ყოველი m-თვის

$$\sum_{k=0}^{m} f(a+k) \leqslant f(a)+\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

პირიქით, თუ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ განშლადია, მაშინ უტოლობიდან

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(a+k) \geqslant \int\limits_a^{a+m} f(x)\,dx$$

გამომდინარეობს (27.1) მწკრივის განშლადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემაში მოყვანილ ნიშანს ეწოდება დადებითი მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი.

მაგალითი. განვიხილოთ მწკრივი

$$\frac{1}{2(\ln 2)^\alpha}+\frac{1}{3(\ln 3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}+\ldots$$

გამოვარკვიოთ, α პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არის მწკრივი კრებადი? $[2;\ +\infty[$ შუალედში. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^\alpha}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ინტეგრალი $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ კრებადია, როდესაც $\alpha>1$ და განშლადია, როდესაც $\alpha \leqslant 1$.

კითხვები

1. რას ნიშნავს, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია? განშლადია?

2. რა ნიშნები იცით ინტეგრალის $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადობისა?

3. როგორ არის განსაზღვრული არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან?

4. როგორ არის განსაზღვრული არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა?

სავარჯიშო

გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$. პასუხი: $\frac{1}{2}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2}$. პასუხი: $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

3. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$. პასუხი: $\frac{2}{3}\ln 2$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$. პასუხი: $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. პასუხი: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$. პასუხი: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$. პასუხი: $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$. პასუხი: $\frac{\pi}{2}-1$.

9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$. პასუხი: 0.

10. $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx$ $(\alpha > 0)$. პასუხი: $\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.

დაყვანის ფორმულების საშუალებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები (n—მთელი დადებითი რიცხვია):

11. $I_n = \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx$. პასუხი: $I_n = n!$

12. $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$ $(ac-b^2>0)$.

პასუხი: $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.

13. $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

პასუხი: $I_n = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$,

სადაც

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}.$$

14. $I_n = \int_{0}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$. პასუხი: $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$,

თუ n ლუწია, და $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, თუ n კენტია.

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

15. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. პასუხი: $\frac{\pi}{2}$.

16. $\int_{0}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$. პასუხი: $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.

17. $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\, dx$. პასუხი: $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

18. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$. პასუხი: $\frac{\pi-2}{2}$.

19. $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^2 dx$. პასუხი: 2.

20. $\int_0^1 x\ln x\, dx$. პასუხი: $-\frac{1}{4}$.

დაამტკიცეთ შემდეგი ინტეგრალების კრებადობა:

21. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4-x^2+1}$. 22. $\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

23. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. 24. $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx \quad (p>0)$.

25. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\, dx \quad (n\geqslant 0,\ m>-1,\ n-m>1)$.

26. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^\alpha}\, dx \quad (a\neq 0,\ 1<\alpha<2)$.

27. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\, dx \quad (1<\alpha<2)$.

28. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\, dx$. 29. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\, dx$.

30. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p>1,\ q<1)$.

31. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{k_1}|x-a_2|^{k_2}\ldots|x-a_n|^{k_n}}$$

$$(k_1<1,\ k_2<1,\ldots,\ k_n<1,\ k_1+k_2+\ldots+k_n>1).$$

დაამტკიცეთ შემდეგი ინტეგრალების აბსოლუტური კრებადობა:

32. $$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,dx \quad \left(-1<\frac{p+1}{q}<0\right).$$

33. $$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,dx \quad (p\gtrless -2,\ q>p+1).$$

34. ვთქვათ, ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ კრებადია და $f(x)$ მონოტონურია. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ $|x\,f(x)|\leqslant M$, როდესაც $a\leqslant x<+\infty$.

35. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ მონოტონურია $(0,\ a)$ ინტერვალში და არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^a x^p f(x)\,dx,$$

მაშინ

$$\lim_{x\to 0+} x^{p+1} f(x)=0.$$

36. დაამტკიცეთ, რომ $V.\ p.\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}=0.$

37. დაამტკიცეთ, რომ $V.\ p.\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\pi.$

თავი XIII

განტოლებათა ფესვებისა და განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდები

§ 1. განტოლებათა ფესვების მოძებნის მიახლოებითი მეთოდები

რუფინისა და აბელის მიერ დამტკიცებული იყო, რომ მეოთხეზე მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლებები, საზოგადოდ, რადიკალებში ამოხსნადი არ არის, მაგრამ არსებობს სპეციალური კლასი მეოთხეზე მაღალი ხარისხის განტოლებებისა, რომლებიც რადიკალებში ამოხსნადია. ეს საკითხი ზოგად შემთხვევაში გალუამ შეისწავლა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ალგებრული განტოლებების რადიკალებში ამოხსნა, როდესაც ეს შესაძლებელია, ხშირად რთულ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული. კიდევ უფრო რთულ გამოთვლებს მოითხოვს ტრანსცენდენტური განტოლებების ამოხსნა. ამიტომ ჩვეულებრივ მიმართავენ განტოლების ამოხსნის მიახლოებით მეთოდებს, რომლებიც განსაკუთრებით გამოიყენება რიცხვითი კოეფიციენტებიანი განტოლების შემთხვევაში.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით განტოლებათა ნამდვილი ფესვების მოძებნის მიახლოებით მეთოდებს, როგორიცაა სინჯვის, ქორდების, მხებთა, კომბინირებული და იტერაციის მეთოდები. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამ მეთოდების გამოყენება ისეთი განტოლებების შემთხვევაში, რომელთა ზუსტი ამოხსნა ვერ ხერხდება, ანდა რთულ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული. მოძებნილი ამონახსნის პრაქტიკაში გამოსაყენებლად უნდა ვიცოდეთ, თუ რამდენად ახლოსაა ეს ამონახსნი ფესვის ზუსტ მნიშვნელობასთან.

1°. **სინჯვის მეთოდი.** ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ, $[a_0, b_0]$ სეგმენტში მოთავსებულია $f(x)=0$ განტოლების მხოლოდ ერთი x_0 ფესვი. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ x_0 ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნებისმიერი სიზუსტით. ამისათვის გავყოთ $[a_0, b_0]$ სეგ-

მენტი შუაზე c წერტილით და გამოვთვალოთ ფუნქციის $f(c)$ მნიშვნელობა. მიღებული $[a_0, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებიდან ავირჩიოთ ის, რომლის ბოლოებში $f(x)$ ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშანი. ცხადია, x_0 ფესვი მოთავსდება ამ სეგმენტში. ამორჩეული სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_1, b_1]$ და ეს სეგმენტი გავყოთ შუაზე. თუ ამგვარად გავაგრძელებთ სეგმენტების გაყოფის პროცესს, მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

ამ მიმდევრობის ყოველი სეგმენტი შეიცავს მოცემული განტოლების x_0 ფესვს.

თუ სეგმენტის გაყოფისას შუა წერტილი აღმოჩნდა $f(x)$ ფუნქციის ფესვი, მაშინ სეგმენტების გაყოფის პროცესი შეწყდება და ამით მოძებნილი იქნება $f(x)=0$ განტოლების ფესვის ზუსტი მნიშვნელობა. ამ შემთხვევას შემდეგში გამოვრიცხავთ.

ცხადია, $[a_n, b_n]$ სეგმენტის სიგრძე

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

ამ ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ x_0 ფესვი ნებისმიერი სიზუსტით.

სინჯვის მეთოდით განტოლების x_0 ფესვის დიდი სიზუსტით მოძებნა მოითხოვს უამრავ გამოთვლას. ამიტომ ეს მეთოდი პრაქტიკულად ნაკლებად გამოსადეგია.

სინჯვის მეთოდი გულისხმობს $f(x)$ ფუნქციის მხოლოდ უწყვეტობას $[a_0, b_0]$ სეგმენტზე.

2°. **ქორდების მეთოდი.** ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0,$$

სადაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე შუალედში. ვიგულისხმოთ რომ ამ შუალედში მოძებნილია ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი, რომელშიც $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურია, ხოლო $f(a)$ და $f(b)$ სხვადასხვა ნიშნისაა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)>0$, $f(b)<0$ (ნახ. 83). რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ $y=f(x)$ წირი გადაკვეთს Ox ღერძს $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე x_0 წერტილში, რომელიც წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს.

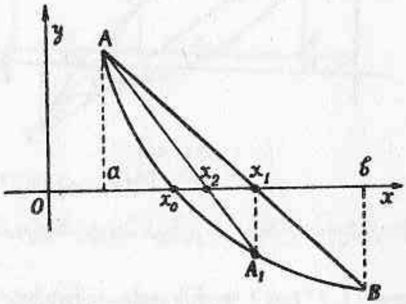
ახლა $y=f(x)$ წირის $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$ წერტილებზე გავავლოთ AB ქორდა. ამ ქორდისა და Ox ღერძის გადაკვეთის x_1

წერტილი იქნება x_0 ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. x_0 ფესვის მიახლოებითი x_1 მნიშვნელობის მოსაძებნად დავწეროთ AB ქორდის განტოლება:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

როდესაც $x=x_1$, მაშინ $y=0$ და ამიტომ ამ უკანასკნელი განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}. \quad (1.1)$$



ნახ. 83.

აქედან

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \quad (1.2)$$

x_0 ფესვის x_1 მიახლოებითი მნიშვნელობა შეგვიძლია სხვა სახითაც წარმოვადგინოთ. (1.1) განტოლებიდან გვაქვს

$$\frac{-f(b)+[f(b)-f(a)]}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}.$$

საიდანაც

$$x_1=b-\frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)}. \quad (1.3)$$

x_0 ფესვის უფრო ზუსტი მნიშვნელობის მოსაძებნად გამოვთვალოთ $f(x_1)$. თუ $f(x_1)<0$, მაშინ გამოვიყენებთ იმავე (1.2) ფორმულას $[a, x_1]$ სეგმენტისათვის. გვექნება

$$x_2=a-\frac{(x_1-a)f(a)}{f(x_1)-f(a)}. \quad (1.4)$$

თუკი $f(x_1)>0$, მაშინ გავიმეორებთ იმავე ხერხს და გამოვიყენებთ (1.3) ფორმულას $[x_1, b]$ სეგმენტისათვის (ნახ. 84). გვექნება

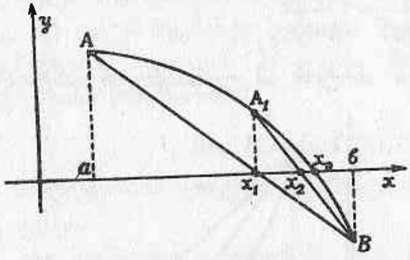
$$x_2=b-\frac{(b-x_1)f(b)}{f(b)-f(x_1)}. \quad (1.5)$$

თუ ამ ხერხს რამდენჯერმე გამოვიყენებთ, მივიღებთ x_0 ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობებს

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

რომლებიც თანდათანობით უახლოვდებიან x_0 ფესვს.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი $f'(x)$ წარმოებული $[a, b]$ სეგმენტზე და ეს წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვიპოვოთ $|x_n-x_0|$ ცდომილება. მართლაც, ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით



ნახ. 84.

$$f(x_n)-f(x_0)=(x_n-x_0)f'(\xi),$$

სადაც ξ მოთავსებულია x_0 და x_n წერტილებს შორის. რადგანაც $f(x_0)=0$, ამიტომ

$$f(x_n)=(x_n-x_0)f'(\xi),$$

საიდანაც

$$x_n-x_0=\frac{f(x_n)}{f'(\xi)}.$$

თუ $|f'(x)|$ ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობას $[a, b]$ სეგმენტზე აღვნიშნავთ m-ით, $|x_n-x_0|$ ცდომილებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$|x_n-x_0|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}. \tag{1.6}$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ $|x_n-x_0|$ ცდომილება $f(x_n)$ მნიშვნელობის საშუალებით.

3°. **მხებთა მეთოდი.** ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0,$$

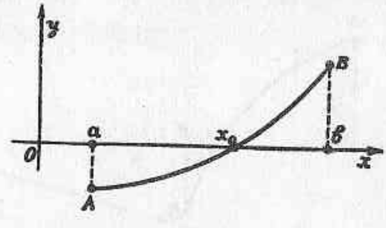
სადაც $f(x)$ უწყვეტია რაიმე შუალედში. დავუშვათ, რომ ამ შუალედში მოძებნილია ისეთი $[a, b]$ სეგმენტი, რომელშიაც მოთავსებულია მოცემული განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვი. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $[a, b]$ სეგმენტში მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული, ამასთანავე $f'(x)$ და $f''(x)$ წარმოებულები ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშანს. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე მონოტონურია და, ამის გარდა, $y=f(x)$ წირი ამავე სეგმენტში ამოზნექილია ან ჩაზნექილი.

აქ წარმოგვიდგება შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

$$1)\ f'(x)>0,\ f''(x)>0;\ 2)\ f'(x)>0,\ f''(x)<0;$$
$$3)\ f'(x)<0,\ f''(x)<0;\ 4)\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$$

(ნახ. 85, 86, 87, 88).

მოცემული განტოლების x_0 ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად გავავლოთ მხები AB რკალის იმ ბოლოზე, რომელზედაც $f(x)$ და $f''(x)$ ერთნაირი ნიშნისაა. ამ მხებისა და Ox ღერძის გადაკვეთის x_1' წერტილი იქნება x_0 ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ახლა აღვნიშნოთ α-თი a და b რიცხვებიდან ის, რომელზედაც $f(x)$ და $f''(x)$ ერთნაირი ნიშნისაა. $[\alpha, f(\alpha)]$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებაა:



ნახ. 85.

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha),$$

როდესაც $x=x_1'$, მაშინ $y=0$; ამიტომ უკანასკნელი განტოლებიდან გვექნება

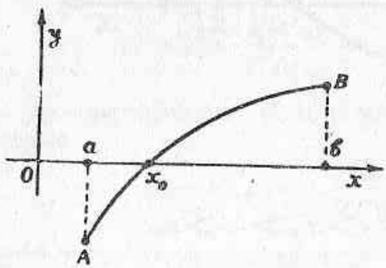
$$-f(\alpha)=f'(\alpha)(x'_1-\alpha).$$

საიდანაც

$$x'_1=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \tag{1.7}$$

თუ $\alpha=a$ (ნახ. 86 და 88), მაშინ (1.7) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$x'_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}, \tag{1.8}$$



ნახ. 86.

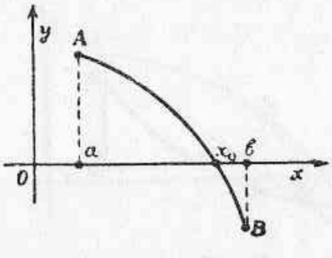
ხოლო თუ $\alpha=b$ (ნახ. 85 და 87), მაშინ (1.7) ფორმულა ასე დაიწერება

$$x'_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{1.9}$$

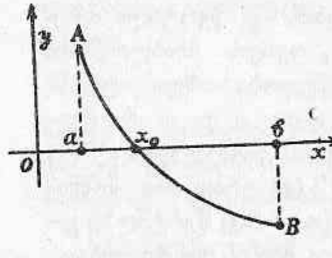
შევჩერდეთ პირველ შემთხვევაზე. 89-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ x_1' მოთავსებულია x_0 და b წერტილებს შორის, x_0 კი $[a, x'_1]$ სეგმენტზე. x'_1 წერტილიდან გავავლოთ Ox ღერძის მართობი AB რკალის გადაკვეთამდე, მივიღებთ B_1 წერტილს და ამ წერტილიდან გავავლოთ მხები. მხებისა და Ox ღერძის გადაკვეთის x'_2 წერტილი იქნება x_0 ფესვის ახალი მიახლოებითი მნიშვნელობა. (1.9) ფორმულის თანახმად

$$x'_2=x'_1-\frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$

x'_2 მოთავსებულია x_0 და x'_1 წერტილებს შორის. ახლა თუ განვიხილავთ $[a, x'_2]$ სეგმენტს, ვიპოვით ახალ x'_3 მიახლოებას და ა. შ.

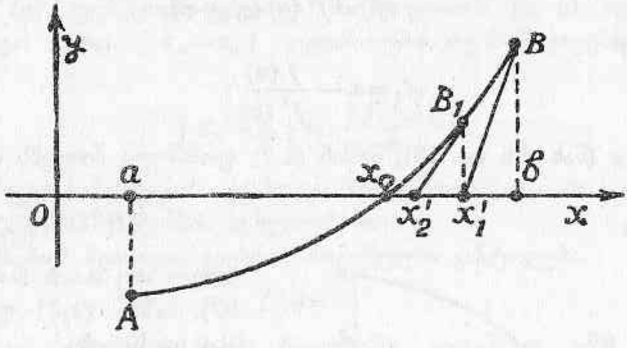


ნახ. 87.



ნახ. 88.

ამგვარად, მივიღებთ x_0 ფესვის უფრო და უფრო უკეთეს მიახლოებებს,



ნახ. 89.

$$b > x'_1 > x'_2 > \dots > x'_n > \dots > x_0,$$

ამასთანავე

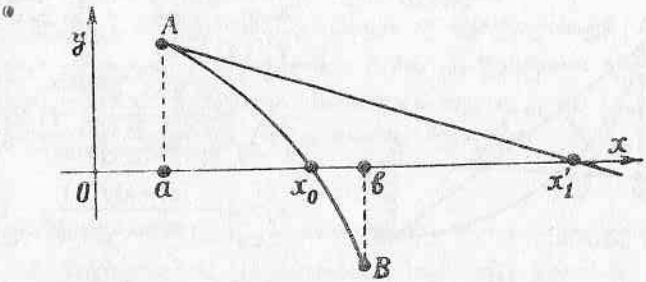
$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}. \tag{1.10}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ მხებს გავავლებთ რკალის იმ ბოლოზე, სადაც $f(x)$ და $f''(x)$ სხვადასხვა ნიშნიანია, მაშინ x'_1 წერტილი შეიძლება გავიდეს $[a, b]$ სეგმენტიდან და ამით მიახლოება გაუარესდება (ნახ. 90).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ $f''(x)$ ნიშანს არ ინარჩუნებს $[a, b]$ სეგმენტში, ე. ი. თუ $y = f(x)$ წირს აქვს გადაღუნვის წერტილი, მაშინ

რკალის ორივე ბოლოში გავლებულმა მხებებმა შეიძლება გადაკვეთოს Ox ღერძი $[a, b]$ სეგმენტის გარეთ.

ახლა გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შევაფასოთ მიახლოების ცდომილება, თუ ფესვის მნიშვნელობად აღებულია x'_n. ტეილორის ფორმულის მიხედვით



ნახ. 90.

$$f(x_0)=f(x'_n)+f'(x'_n)(x_0-x'_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-x'_n)^2,$$

სადაც ξ მოთავსებულია x_0 და x'_n წერტილებს შორის.

რადგანაც $f(x_0)=0$, ამიტომ

$$x_0-x'_n+\frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}=-\frac{f''(\xi)}{2f'(x'_n)}(x_0-x'_n)^2. \qquad (1.11)$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.10) ფორმულას, (1.11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$x_0-x'_{n+1}=-\frac{f''(\xi)}{2f'(x'_n)}(x_0-x'_n)^2,$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ $(n+1)$-ე მიახლოების ცდომილება, თუ ცნობილია n-ური მიახლოების ცდომილება:

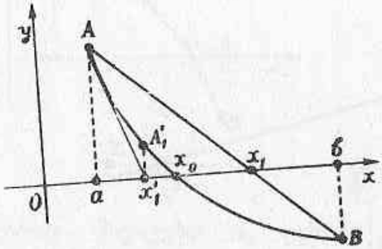
$$|x_0-x'_{n+1}|\leqslant\frac{M}{2|f'(x'_n)|}(x_0-x'_n)^2, \qquad (1.12)$$

სადაც M არის $|f''(x)|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე.

ამრიგად, ახალი მიახლოების ცდომილება კლებულობს წინა მიახლოების ცდომილების კვადრატის პროპორციულად, რაც უზრუნველყოფს ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა სწრაფ დაახლოებას მოცემული განტოლების ფესვთან.

4°. ქორდებისა და მხებთა კომბინირებული მეთოდი. თუ $[a,b]$ სეგმენტზე ერთდროულად გამოვიყენებთ ქორდებისა და მხებთა მეთოდებს, მივიღებთ x_1 და x'_1 წერტილებს, რომლებიც მდებარეობს საძიებელ ფესვის სხვადასხვა მხარეს (ნახ. 91).

ვთქვათ, $f(a)$ და $f''(a)$ ერთი და იმავე ნიშნისაა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)>0$ და $f''(a)>0$.



ნახ. 91.

როგორც ვიცით, x_1 და x'_1 გამოითვლება (1.2) და (1.8) ფორმულებით:

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad (1.2)$$

$$x'_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (1.8)$$

ცხადია, $f(x'_1)$ და $f''(x'_1)$ ერთი და იმავე ნიშნისაა. ჩვენ შემთხვევაში ორივე დადებითია (ნახ. 91). მაშასადამე, $[x'_1, x_1]$ სეგმენტზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ (1.2) და (1.8) ფორმულები, რომლებშიაც a უნდა შეიცვალოს x'_1-ით, b კი x_1-ით. მივიღებთ მეორე მიახლოებას

$$x_2=x'_1-\frac{(x_1-x'_1)\,f(x'_1)}{f(x_1)-f(x'_1)},$$

$$x'_2=x'_1-\frac{f(x'_1)}{f'(x'_1)}.$$

თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, მივიღებთ x_0 ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობას ნებისმიერი სიზუსტით.

5°. იტერაციის მეთოდი. იტერაციის მეთოდს ვიყენებთ $f(x)=0$ განტოლების ნამდვილი და კომპლექსური ფესვების მოსაძებნად. ეს განტოლება შევცვალოთ შემდეგი სახის ეკვივალენტური განტოლებით

$$x=U(x), \qquad (1.13)$$

სადაც $U(x)=x+f(x)$.

ვთქვათ, $U(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია X შუალედში. ავიღოთ X შუალედში რაიმე x_0 წერტილი და ავაგოთ წერტილები

$$x_1=U(x_0),\ x_2=U(x_1),\ldots,x_{n+1}=U(x_n),\ldots \qquad (1.14)$$

ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $(x_n)_{n>0}$ მიმდევრობის ყველა წერტილი ეკუთვნის X შუალედს. კერძოდ, თუ $U(x_0)=x_0$, მაშინ $(x_n)_{n>0}$ მიმდევრობის ყველა წევრი ემთხვევა x_0 წერტილს.

ξ რიცხვს, რომლისთვისაც $U(\xi)=\xi$ ეწოდება $U(x)$ ფუნქციის უძრავი წერტილი, ანუ (1.14) იტერაციის ცენტრი, ხოლო $U(x)$ ფუნქციას ჰქვია მაიტერირებელი ფუნქცია.

თუ $(x_n)_{n>0}$ მიმდევრობა კრებადია ξ წერტილისაკენ და $U(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ξ წერტილში, მაშინ ეს წერტილი იქნება $U(x)$ ფუნქციის უძრავი წერტილი. მართლაც, თუ $x_{n+1}=U(x_n)$ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ

$$U(\xi)=\xi.$$

შევნიშნოთ, რომ $(x_n)_{n>0}$ მიმდევრობა როდია ყოველთვის კრებადი. ამ მიმდევრობის კრებადობის საკმარის პირობას გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 1. ვთქვათ, $U(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $X=[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ სეგმენტზე და ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) X სეგმენტის ყოველი x' და x'' წერტილისათვის

$$|U(x'')-U(x')|\leqslant\alpha\,|x''-x'|, \tag{1.15}$$

სადაც α ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია;

2) შესრულებულია ტოლობა

$$\frac{\rho}{1-\alpha}\leqslant\varepsilon, \tag{1.16}$$

სადაც $\rho=|x_0-U(x_0)|$. მაშინ X სეგმენტში არსებობს $U(x)$ ფუნქციის ერთადერთი უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. ადვილი მისახვედრია, რომ X სეგმენტის ნებისმიერი $\bar{x}$ წერტილისათვის $U(\bar{x})$ იქნება იმავე სეგმენტის წერტილი. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ (1.15) და (1.16) უტოლობებს, გვექნება

$$|x_0-U(\bar{x})|\leqslant|x_0-U(x_0)|+|U(x_0)-U(\bar{x})|\leqslant\rho+$$

$$+\alpha\,|x_0-\bar{x}|\leqslant\rho+\alpha\varepsilon\leqslant\varepsilon(1-\alpha)+\alpha\varepsilon=\varepsilon.$$

ამრიგად, X სეგმენტის ნებისმიერი $\bar{x}$ წერტილის შესაბამისი $U(\bar{x})$ წერტილი ეკუთვნის იმავე სეგმენტს.

ახლა ავიღოთ წერტილთა მიმდევრობა

$$x_1=U(x_0),\ x_2=U(x_1), \ldots, x_n=U(x_{n-1}), \ldots$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. თუ $n \geqslant 1$, გვექნება

$$|x_{n+1}-x_n| = |U(x_n)-U(x_{n-1})| \leqslant \alpha\, |x_n-x_{n-1}|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant \alpha^n\, |x_1-x_0| \leqslant \alpha^n \varepsilon. \tag{1.17}$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური m და n რიცხვები და აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $m>n$. მაშინ

$$|x_n-x_m| \leqslant |x_n-x_{n+1}| + |x_{n+1}-x_{n+2}| + \ldots + |x_{m-1}-x_m|.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.17) უტოლობას, გვექნება

$$|x_n-x_m| \leqslant \alpha^n\varepsilon+\alpha^{n+1}\varepsilon+\ldots+\alpha^{m-1}\varepsilon=$$

$$=\alpha^n\varepsilon\,(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m-n-1})< \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\varepsilon \tag{1.18}$$

და რაკი $\alpha<1$, ამიტომ

$$\lim_{m,n\to\infty} |x_n-x_m| = 0.$$

მაშასადამე, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და იგი კრებადია გარკვეული ξ წერტილისაკენ, რომელიც ეკუთვნის X სეგმენტს.

დავამტკიცოთ, რომ

$$U(\xi)=\xi. \tag{1.19}$$

გვაქვს:

$$|U(\xi)-x_n| = |U(\xi)-U(x_{n-1})| \leqslant \alpha\, |\xi-x_{n-1}|.$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty} x_n=U(\xi).$$

მაშასადამე, მართებულია (1.19) ტოლობა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $U(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი უძრავი წერტილი. ვთქვათ, ξ' არის $U(x)$ ფუნქციის მეორე უძრავი წერტილი და დავამტკიცოთ, რომ $\xi'=\xi$. თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.15) პირობას, გვექნება

$$|\xi'-\xi| = |U(\xi')-U(\xi)| \leqslant \alpha\, |\xi'-\xi|$$

და რადგანაც $\alpha<1$, ამიტომ $|\xi'-\xi|=0$, ე. ი. $\xi'=\xi$.

ამრიგად, $U(x)$ ფუნქციას აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ვთქვათ, $X=[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ სეგმენტზე მოცემულია წარმოებადი $U(x)$ ფუნქცია და შესრულებულია პირობები:

1) $|U'(x)| \leqslant \alpha$, სადაც α ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია;

2) შესრულებულია უტოლობა

$$\frac{\rho}{1-\alpha} \leqslant \varepsilon, \qquad (1.16)$$

სადაც $\rho=|x_0-U(x_0)|$. მაშინ X სეგმენტში არსებობს $U(x)$ ფუნქციის ერთადერთი უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. მოცემულ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი x' და x'' წერტილი. ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით

$$|U(x'')-U(x')| = |U'(\xi)| \cdot |x''-x'|,$$

სადაც ξ მოთავსებულია x' და x'' შორის. თუ მხედველობაში მივიღებთ 1) პირობას, გვექნება

$$|U(x'')-U(x')| \leqslant \alpha |x''-x'|.$$

მაშასადამე, $U(x)$ აკმაყოფილებს 1-ლი თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ X სეგმენტზე არსებობს $U(x)$ ფუნქციის ერთადერთი უძრავი წერტილი.

ახლა (1.18) უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $m\to\infty$, მივიღებთ

$$|x_n-\xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\alpha^n \ (n=1,\ 2,\ldots).$$

ამ ფორმულით შეგვიძლია შევაფასოთ x_n-ის გადახრა ξ წერტილისაგან.

§ 2. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

1°. ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ამოცანა. როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,\ b]$ სეგმენტზე და ცნობილია მისი პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვ-

რული ინტეგრალი a-დან b-მდე გამოითვლება ნიუტონისა და ლაიბნიცის ფორმულით

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

მაგრამ ხშირად პირველყოფილი $F(x)$ ფუნქცია ვერ მოიძებნება ელემენტარულ ფუნქციებში ანდა $F(x)$ ფუნქციას ძალიან რთული ანალიზური გამოსახულება აქვს. ამიტომ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნიუტონისა და ლაიბნიცის ფორმულით ძნელია ან პრაქტიკულად განუხორციელებელი. ამის გარდა, პრაქტიკაში ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქცია ხშირად ცხრილითაა მოცემული და მაშინ თვით პირველყოფილი ფუნქცია აზრს კარგავს. ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს განსაზღვრული ინტეგრალების გამოთვლის მიახლოებით და პირველ რიგში რიცხვით მეთოდებს.

ფუნქციის რიცხვითი ინტეგრების ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა მიხედვით გამოვთვალოთ ინტეგრალის მნიშვნელობა. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლას ფუნქციის მნიშვნელობათა მიხედვით ზოგჯერ მ ე ქ ა ნ ი კ უ რ ი კ ვ ა დ რ ა ტ უ რ ა ეწოდება. მექანიკური კვადრატურის ჩვეულებრივი ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას განსახილავ $[a, b]$ სეგმენტზე ცვლიან მარტივი სახის მააპროქსიმირებელი $P(x)$ ფუნქციით (მაგალითად, მრავალწევრით) და შემდეგ მიახლოებით ღებულობენ

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P(x)dx.$$

თვით $P(x)$ ფუნქცია ისეთი უნდა იყოს, რომ უშუალოდ შეიძლებოდეს გამოთვლა ინტეგრალისა

$$\int_a^b P(x)\,dx.$$

$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის მ ა ა პ რ ო ქ ს ი მ ი რ ე ბ ე ლ ი $P(x)$ ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას, რომელიც მოცემული დადებითი ε რიცხვისათვის აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $[a, b]$ სეგმენტიდან. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $P(x)$ იძლევა $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებას ε სიზუსტით.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ზოგიერთ ხერხს.

2°. მართკუთხედების ფორმულა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ და გამოვთვალოთ იგი მიახლოებით. ამისათვის $[a, b]$ სეგმენტი დავყოთ n ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

ცხადია, რომ

$$x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x_k)=y_k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}),$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n).$$

მაშასადამე,

$$\int\limits_a^b f(x)dx\simeq\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}), \tag{2.1}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx\simeq\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n). \tag{2.2}$$

(2.1) და (2.2) ფორმულებს ეწოდება *მართკუთხედების ფორმულა*. ცხადია, თუ $f(x)$ არის დადებითი ზრდადი ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ (2.1) და (2.2) ფორმულები გამოსახავენ კიბური

ფიგურების ფართობებს, ერთი წარმოადგენს განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით, მეორე კი მეტობით.

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი $f'(x)$ წარმოებული, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}, \quad (2.3)$$

სადაც

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

დამტკიცება. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) f'(x)dx = f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx,$$

ანუ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) f'(x)dx = \frac{b-a}{n} y_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

აქედან

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} y_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(x)(x - x_k)|\,dx \leqslant \frac{M(x_k - x_{k-1})^2}{2},$$

ე. ი.

$$-\frac{M(b-a)^2}{2n^2} \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} y_k \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, გვექნება

$$-\frac{M(b-a)^2}{2n} \leqslant \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

ეს უტოლობები (2.3) უტოლობის ტოლფასია. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მიიღება შეფასება

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}. \qquad (2.4)$$

3°. ტრაპეციის ფორმულა. თუ მიახლოებით (2.1) და (2.2) ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ და მიღებულ მიახლოებით ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ ორზე, გვექნება

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k+y_{k+1}}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{2n}[y_0+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+y_n],$$

ანუ

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \qquad (2.5)$$

ამ ფორმულას ტ რ ა პ ე ც ი ი ს ფ ო რ მ უ ლ ა ეწოდება.

ეს სახელწოდება წარმოიშვა იმის გამო, რომ

$$\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_k+y_{k+1}}{2}$$

შესაკრები იმ ტრაპეციის ფართობს წარმოადგენს, რომლის ფუძეებია y_k და y_{k+1}, სიმაღლე კი $\frac{b-a}{n}$.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ ფ უ ნ ქ ც ი ა ს $[a, b]$ ს ე გ მ ე ნ ტ ზ ე ა ქ ვ ს მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს უ წ ყ ვ ე ტ ი $f''(x)$ წ ა რ მ ო ე ბ უ ლ ი, მ ა შ ი ნ ა დ გ ი ლ ი ა ქ ვ ს შ ე ფ ა ს ე ბ ა ს

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}, \qquad (2.6)$$

ს ა დ ა ც

$$M = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის მიხედვით

$$\int_a^x f''(t)(t-a)\,dt = f'(x)(x-a) - \int_a^x f'(x)dx =$$

$$= f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)].$$

აქედან

$$|f'(x)(x-a) - [f(x)-f(a)]| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x |f''(t)(t-a)|\,dt \leqslant \frac{M(x-a)^2}{2}.$$

ახლა მოვახდინოთ ამ უტოლობის ინტეგრება a-დან x-მდე, გვექნება

$$\left|\int_a^x f'(t)(t-a)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt + f(a)(x-a)\right| \leqslant \frac{M(x-a)^3}{6}.$$

თუ ამ უტოლობაში ავიღებთ $a=x_{k-1}$, $x=x_k$, მაშინ

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)(t-x_k)dt -\right.$$

$$\left. - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt + y_{k-1}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{6n^3}. \qquad (2.7)$$

მაგრამ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)(t-x_{k-1})dt = f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt =$$

$$= \frac{b-a}{n} y_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt.$$

ახლა (2.7) უტოლობა ასე გადაიწერება

$$\left|\frac{b-a}{n} y_k - 2\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt + \frac{b-a}{n} y_{k-1}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{6n^3}.$$

აქედან

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^3}.$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ (2.6) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია.

(2.6) უტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრალის ცდომილებას.

4°. პარაბოლების ფორმულა. დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ $f(x)=Ax^2+Bx+C$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \quad (2.8)$$

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$f(a)=Aa^2+Ba+C, \quad f(b)=Ab^2+Bb+C$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{A}{4}(a+b)^2+\frac{B}{2}(a+b)+C. \quad (2.9)$$

შემდეგ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b (Ax^2+Bx+C)dx=\left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_a^b=$$

$$=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)=$$

$$=\frac{b-a}{6}\left\{(Aa^2+Ba+C)+(Ab^2+Bb+C)+4\left[A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B\cdot\frac{a+b}{2}+C\right]\right\}.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.9) ტოლობებს, მივიღებთ (2.8) ფორმულას.

ამრიგად, ჩვენ გამოვთვალეთ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=Ax^2+Bx+C$ პარაბოლით, $[a, b]$ სეგმენტით, $x=a$ და $x=b$ წრფეებით.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a, b]$ სეგმენტზე. დავყოთ მოცემული სეგმენტი $2n$ ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{2n}=b.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x_k)=y_k \quad (k=0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

განვიხილოთ სეგმენტები

$$[x_0, x_2], \quad [x_2, x_4], \ldots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$$

და ამ სეგმენტების შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციების შემომსაზღვრელი $y=f(x)$ რკალები შევცვალოთ $y=Ax^2+Bx+C$ სახის პარაბოლების რკალებით. მაშინ ლემის თანახმად გვექნება

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

თუ ამ მიახლოებით ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+$$

$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})]. \qquad (2.10)$$

ეს არის პარაბოლების ფორმულა. ამ ფორმულას ეწოდება აგრეთვე სიმპსონის ფორმულა.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ სეგმენტზე აქვს მეოთხე რიგის შემოსაზღვრული $f^{(IV)}(x)$ წარმოებული, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\Bigg|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})]\Bigg| \leqslant \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}, \qquad (2.11)$$

სადაც $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(IV)}(x)|$.

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\Phi(t)=F(t)-\left(\frac{t}{h}\right)^5 F(h),$$

სადაც

$$F(t)=\int\limits_{x_{2k-1}-t}^{x_{2k-1}+t} f(x)\,dx-\frac{t}{3}\{f(x_{2k-1}-t)+$$
$$+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k-1}+t)\},$$

ხოლო

$$h=\frac{b-a}{2n},\quad 0\leqslant t\leqslant h.$$

$\Phi(t)$ ფუნქციის სამჯერ გაწარმოება გვაძლევს

$$\Phi'(t)=\frac{2}{3}[f(x_{2k-1}+t)-2f(x_{2k-1})+f(x_{2k-1}-t)]-$$
$$-\frac{t}{3}[f'(x_{2k-1}+t)-f'(x_{2k-1}-t)]-\frac{5t^4}{h^5}F(h),$$
$$\Phi''(t)=\frac{1}{3}[f'(x_{2k-1}+t)-f'(x_{2k-1}-t)]-$$
$$-\frac{t}{3}[f''(x_{2k-1}+t)+f''(x_{2k-1}-t)]-\frac{20t^3}{h^5}F(h),$$
$$\Phi'''(t)=-\frac{1}{3}t[f'''(x_{2k-1}+t)-f'''(x_{2k-1}-t)]-\frac{60t^2}{h^5}F(h).$$

ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\Phi'''(t)=-\frac{2}{3}t^2\left[f^{(\mathrm{IV})}(\xi)+\frac{90}{h^5}F(h)\right], \tag{2.12}$$

სადაც $x_{2k-1}-t<\xi<x_{2k-1}+t$.

რადგან $\Phi[0]=0$, $\Phi(h)=0$, ამიტომ როლის თეორემის ძალით არსებობს $(0, h)$ ინტერვალში ისეთი რიცხვი t_1, რომ

$$\Phi'(t_1)=0.$$

შემდეგ, რაკი $\Phi'(0)=0$, ამიტომ როლის თეორემის თანახმად $[0, t_1]$ ინტერვალში არსებობს ისეთი წერტილი t_2, რომ

$$\Phi''(t_2)=0.$$

დასასრულ, რადგანაც $\Phi''(0)=0$, ამიტომ $[0, t_2]$ ინტერვალში არსებობს ისეთი წერტილი t_3, რომ

$$\Phi'''(t_3)=0.$$

ახლა (2.12) ფორმულაში ჩავსვათ $t=t_3$, მივიღებთ

$$F(h)=-\frac{h^5}{90}f^{(\mathrm{IV})}(\xi).$$

მაშასადამე,

$$\int\limits_{x_{2k-1}-h}^{x_{2k-1}+h} f(x)\,dx-\frac{h}{3}[f(x_{2k-1}-h)+4f(x_{2k-1})+$$

$$+f(x_{2k-1}+h)]=-\frac{h^5}{90}f^{(\mathrm{IV})}(\xi).$$

მაგრამ, რადგანაც

$$x_{2k-1}-h=x_{2k-2},\quad x_{2k-1}+h=x_{2k},$$

ამიტომ

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})=-\frac{(b-a)^5}{2880n^5}f^{(\mathrm{IV})}(\xi).$$

აქედან ვღებულობთ

$$\left|\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx-\frac{b-a}{6n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})\right|\leqslant\frac{M(b-a)^5}{2880\,n^5}. \quad (2.13)$$

(2.13) უტოლობებში k-ს მივანიჭოთ მნიშვნელობები $1, 2, \ldots, n$, მივიღებთ უტოლობებს და მათი წევრ-წევრად შეკრება მოგვცემს (2.11) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნავთ, რომ თუ $f(x)$ არის მრავალწევრი არა უმეტესი მესამე ხარისხისა, მაშინ $f^{(\mathrm{IV})}(x)=0$ და სიმპსონის ფორმულა წარმოადგენს არა მიახლოებით, არამედ ზუსტ ფორმულას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვთქვათ, $2n=4$ და სიმპსონის ფორმულით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}.$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალქვეშა $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x_0=0$; $x_1=0{,}25$; $x_2=0{,}5$; $x_3=0{,}75$ და $x_4=1$ წერტილებში. თუ შევიზღუდებით ხუთი ნიშნით მძიმის შემდეგ, გვექნება

$$y_0=1{,}00000;\ 4y_1=3{,}76471;\ 2y_2=1{,}60000;\ 4y_3=2{,}56000;$$
$$y_4=0{,}50000.$$

ეს ტოლობები წევრ-წევრად შევკრიბოთ და შემდეგ გავყოთ 12-ზე, ვვექნება

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \simeq 0{,}78539.$$

მეორე მხრივ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

მაშასადამე, $\pi \simeq 3{,}14156$.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ $x^3-3x^2+6x-1=0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი მარტივი ნამდვილი ფესვი, რომელიც მოთავსებულია [0,1] სეგმენტში და გამოთვალეთ ეს ფესვი სინჯვის მეთოდით 0,1 სიზუსტით.

პასუხი: $x_0=0{,}1875$ ნაკლებობით, სიზუსტით 0,1-მდე; $x_0=0{,}25$ მეტობით, სიზუსტით 0,1-მდე.

2. ქორდების მეთოდებით მოძებნეთ $x^3-2x^2+3x-5=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით 0,1-მდე.

პასუხი: $x_0=1{,}75$ ნაკლებობით, სიზუსტით 0,1-მდე; $x_0=2$ მეტობით, სიზუსტით 0,1-მდე.

3. ქორდების მეთოდით მოძებნეთ $x^3-6x+2=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობები.

4. მოძებნეთ $x^3-2x^2-4x-7=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა მხებთა მეთოდით.

პასუხი: $x'_1 \simeq 3{,}68$; $x'_2 \simeq 3{,}633$.

5. მოძებნეთ $x^4+2x^2-6x+2=0$ განტოლების ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობები კომბინირებული მეთოდით.

პასუხი: $x_1=\frac{2}{3}$; $x_1'=\frac{1}{3}$; $x_2 \simeq 0{,}401$; $x_2' \simeq 0{,}385$.

6. იტერაციის მეთოდით იპოვეთ $x^3-4x^2+10x-10=0$ განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია [1,2] სეგმენტზე.

7. მართკუთხედების ფორმულის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int^{2\pi} x \sin x dx \quad (n=10)$$

და შედეგი შეადარეთ ზუსტ პასუხთან.

პასუხი: 6,2832.

ტრაპეციის ფორმულის საშუალებით გამოთვალეთ ინტეგრალები და შეაფასეთ მათი ცდომილებანი:

8. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n=8)$. პასუხი: 0,69315.

9. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+x^2}$ $(n=12)$. პასუხი: 0,83566.

10. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx$ $(n=6)$. პასუხი: 1,4675.

სიმპსონის ფორმულის საშუალებით გამოთვალეთ ინტეგრალები:

11. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\, dx$ $(n=6)$. პასუხი: 5,4024.

12. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$ $(n=10)$. პასუხი: 1,37039.

13. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\ln(1+x)}$ $(n=6)$. პასუხი: 0,2288.

14. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx$ $(n=10)$. პასუხი: 0,915966.

თავი XIV

განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გეომეტრიული და ფიზიკური გამოყენება

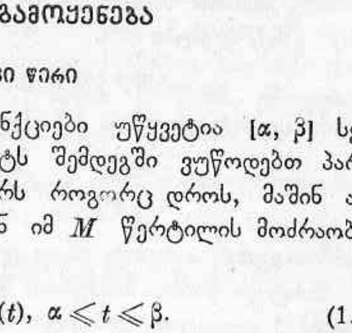
§ 1. მარტივი წირი

ვთქვათ, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ და $\chi(t)$ ფუნქციები უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ამ ფუნქციების t არგუმენტს შემდეგში ვუწოდებთ პარამეტრს. თუ განვიხილავთ t პარამეტრს როგორც დროს, მაშინ აღნიშნული ფუნქციები განსაზღვრავენ იმ M წერტილის მოძრაობის კანონს, რომლის კოორდინატებია

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{1.1}$$

იმ M წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც შეესაბამება t პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობას $[\alpha, \beta]$ სეგმენტიდან შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (1.1) კანონით მოძრავი M წერტილის კვალი (ნახ. 92).

შევნიშნოთ, რომ M წერტილთა სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს მოძრავი წერტილის კვალს, შეიძლება არ გვაძლევდეს თვალსაჩინო წარმოდგენას წირზე. ამიტომ ბუნებრივია გამოვყოთ M წერტილთა ისეთი სიმრავლე, რომელიც გვაძლევს თვალსაჩინო წარმოდგენას წირზე.



ნახ. 92.

განსაზღვრა 1. ყველა იმ M წერტილის სიმრავლეს, რომელთა x, y და z კოორდინატები განსაზღვრულია (1.1) განტოლებებით, ეწოდება მარტივი სივრცითი Γ წირი, თუ t პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობას $[\alpha, \beta]$ სეგმენტიდან შეესაბამება ამ სიმრავლის სხვადასხვა წერტილი.

(1.1) განტოლებებს ეწოდება Γ წირის პარამეტრული განტოლებანი. α და β რიცხვების შესაბამის წერტილებს Γ წირის ბოლო წერტილები ეწოდება.

თუ გვაქვს განტოლებები

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

მაშინ Γ წირს ბრტყელი წირი ეწოდება.

შევნიშნავთ, რომ ერთი და იგივე მარტივი Γ წირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სხვადასხვა პარამეტრული განტოლებებით. მაგალითად, განტოლებები

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

წარმოადგენენ ელიფსის პარამეტრულ განტოლებებს. განტოლებები

$$x=\frac{2a\tau}{1+\tau^2},\ y=\frac{b(1-\tau^2)}{1+\tau^2},\ -\infty<\tau<+\infty$$

წარმოადგენენ აგრეთვე იმავე ელიფსის პარამეტრულ განტოლებებს.

მარტივი წირის მაგალითს წარმოადგენს $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. მართლაც, ეს გრაფიკი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც

$$x=t,\ y=f(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

კანონით მოძრავი M წერტილის კვალი, ამასთანავე t პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობას შეესაბამება გრაფიკის სხვადასხვა წერტილი.

განსაზღვრა 2. ვთქვათ, Γ_1 და Γ_2 ისეთი მარტივი ბრტყელი წირებია, რომ Γ_1 წირის ბოლოები ემთხვევა Γ_2 წირის ბოლოებს, ხოლო Γ_1 და Γ_2 წირების დანარჩენი წერტილები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. მაშინ $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ წირს ეწოდება მარტივი შეკრული ბრტყელი წირი.

ფრანგი თემატიკოსის ჟორდანის (Jordan, 1338—1922) მიერ დამტკიცებული იყო, რომ ყოველი მარტივი შეკრული ბრტყელი წირი ყოფს სიბრტყეს ორ ნაწილად—შიგა და გარე ნაწილებად.

§ 2. წრფევადი წირი. წირის სიგრძე

ვთქვათ, მოცემულია სივრცითი Γ წირი, რომლის განტოლებებია

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t), \tag{2.1}$$

სადაც $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე. ვიგუ-

ლისხმოთ, რომ როდესაც t იცვლება α-დან β-მდე, მაშინ $M[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$ წერტილი აღწერს Γ წირს გარკვეული მიმართულებით α და β-ს შესაბამისი წერტილები Γ წირზე აღვნიშნოთ A და B ასოებით. დავყოთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი წერტილებით

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

და Γ წირში ჩავხაზოთ ტეხილი, რომლის წვეროები შეესაბამებიან t პარამეტრის $t_0, t_1, \cdots, t_n$ მნიშვნელობებს. ამ ტეხილი წირის სიგრძე აღვნიშნოთ P ასოთი. ამრიგად, $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება სათანადო დადებითი რიცხვი P. ასეთი P რიცხვთა სიმრავლის ზედა საზღვარს ვუწოდებთ Γ წირის სიგრძეს და აღვნიშნავთ L ასოთი. თუ $L < +\infty$, მაშინ Γ წირს ეწოდება **წრფევადი წირი**.

ლემა. *ნებისმიერი $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ნამდვილი რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა*

$$\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}-\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\right| \leqslant |a_2-a_2| + \\ +|b_1-b_2|+|c_1-c_2|. \tag{2.2}$$

დამტკიცება. თუ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ რიცხვები ყველა ნულია, მაშინ ლემა ცხადია. ახლა ვთქვათ, რომ ეს ასე არ არის. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$r_1 = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}.$$

გვაქვს

$$|r_1-r_2| = \frac{|r_1^2-r_2^2|}{r_1+r_2} = \frac{|(a_1^2-a_2^2)+(b_1^2-b_2^2)+(c_1^2-c_2^2)|}{r_1+r_2} \leqslant$$

$$\leqslant |a_1-a_2|\cdot\frac{|a_1+a_2|}{r_1+r_2}+|b_1-b_2|\cdot\frac{|b_1+b_2|}{r_1+r_2}+$$

$$+|c_1-c_2|\cdot\frac{|c_1+c_2|}{r_1+r_2} \leqslant |a_1-a_2|\cdot\frac{|a_1|+|a_2|}{r_1+r_2}+$$

$$+|b_1-b_2|\cdot\frac{|b_1|+|b_2|}{r_1+r_2}+|c_1-c_2|\cdot\frac{|c_1|+|c_2|}{r_1+r_2} \leqslant$$

$$\leqslant |a_1-a_2|+|b_1-b_2|+|c_1-c_2|.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1. თუ $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, მაშინ Γ წირი წრფევადია და

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{2.3}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ნებისმიერი λ-დანაწილება $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, სადაც $t_0=\alpha$, $t_n=\beta$. ყოველ t_k წერტილს შეესაბამება Γ წირის M_k წერტილი ($k=0, 1, \ldots, n$). ჩავხაზოთ Γ-ში $M_0M_1\cdots M_n$ ტეხილი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ P-თი. ცხადია,

$$P=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})|^2+|\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})|^2+|\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})|^2}.$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=(t_k-t_{k-1})\,\varphi'(\xi_k),$$
$$\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})=(t_k-t_{k-1})\,\psi'(\eta_k),$$
$$\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})=(t_k-t_{k-1})\,\chi'(\zeta_k),$$

სადაც ξ_k, η_k, ζ_k გარკვეული წერტილებია $[t_{k-1}, t_k]$ სეგმენტში ($k=1, 2, \ldots, n$). მაშასადამე,

$$P=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\eta_k)]^2+[\chi'(\zeta_k)]^2}\,\Delta t_k,$$

სადაც $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. შევნიშნოთ, რომ ξ_k, η_k და ζ_k რიცხვები საზოგადოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. განვიხილოთ ჯამი

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\xi_k)]^2}\,\Delta t_k.$$

დავამტკიცოთ

$$\lim_{\lambda\to 0}(P-\sigma)=0. \tag{2.4}$$

ლემის თანახმად გვაქვს

$$|P-\sigma|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\{|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|+|\chi'(\zeta_k)-\chi'(\xi_k)|\}\,\Delta t_k.$$

რადგანაც $\psi'(t)$ და $\chi'(t)$ ფუნქციები თანაბრად უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი $\delta(\varepsilon)$, რომ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ნებისმიერი t' და t'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $|t''-t'|<\delta$, გვექნება

$$|\psi'(t'')-\psi'(t')|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}, \quad |\chi'(t'')-\chi'(t')|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda<\delta$, მაშინ $|t_k-t_{k-1}|<\delta$ და, მაშასადამე,

$$|P-\sigma|<\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\right]\Delta t_k=\varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (2.4) ტოლობა.

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $P=\sigma+(P-\sigma)$ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{\lambda\to 0} P=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ Γ წირში ჩახაზული ნებისმიერი ტეხილის სიგრძე არ აღემატება ინტეგრალს

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

მაშასადამე, Γ წირი წრფევადია და მისი L სიგრძე გამოისახება ფორმულით

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია ასე დავწეროთ:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (2.5)$$

კერძოდ, თუ Γ ბრტყელი წირია, რომელიც მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე, მაშინ $\chi(t)\equiv 0$ და (2.5) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{2.6}$$

ახლა ვთქვათ, ბრტყელი Γ წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. ეს განტოლება შეგვიძლია შევცვალოთ განტოლებებით

$$x=t,\quad y=f(t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

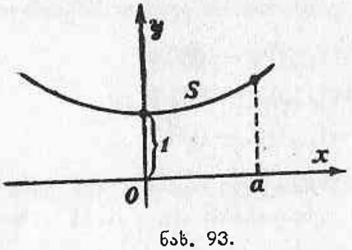
მაშინ (2.6) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{2.7}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

ჯაჭვწირის რკალის L სიგრძე $x=0$ და $x=a$ შორის (ნახ. 93).



ნახ. 93.

რადგანაც $\dfrac{dy}{dx}=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,

ამიტომ

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}=\operatorname{ch}x.$$

მაშასადამე, (2.7) ფორმულის თანახმად

$$L=\int_{0}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{0}^{a}\operatorname{ch}x\,dx=\Big[\operatorname{sh}x\Big]_0^a=\operatorname{sh}a=\frac{e^a-e^{-a}}{2}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის[1] ერთი თაღის L სიგრძე (ნახ. 94).

გვაქვს:

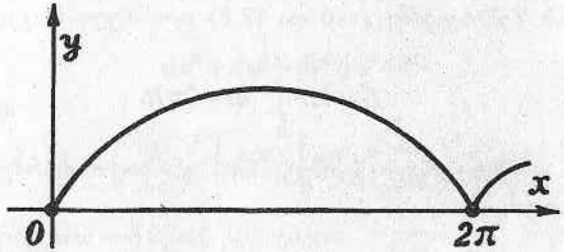
$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=a\sin t.$$

[1] ციკლოიდა ეწოდება ბრტყელ წირს, რომელსაც შემოხაზავს a რადიუსიანი იმ წრეწირის წერტილი, რომელიც უსრიალოდ გორავს წრფეზე.

აქედან

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2a\sin\frac{t}{2}.$$



ნახ. 94.

მაშასადამე, (2.6) ფორმულის თანახმად,

$$L=\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ელიფსის რკალის სიგრძე.

ელიფსის მეოთხედი რკალის სიგრძისათვის გვექნება

$$\frac{L}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt.$$

ცნობილია, რომ

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2,$$

სადაც e ელიფსის ექსცენტრისიტეტია. მაშასადამე,

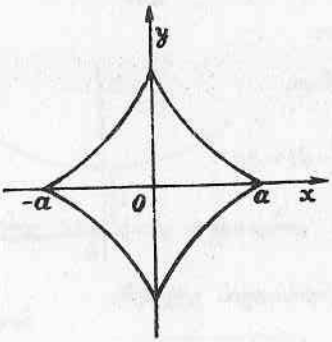
$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt. \tag{2.8}$$

ამ ინტეგრალს **ელიფსური ინტეგრალი** ეწოდება. იგი ვერ გამოითვლება ნიუტონისა და ლაიბნიცის ფორმულის უშუალო გამოყენებით, ვინაიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\, dt$ ელემენტარული ფუნქციებით ვერ გამოისახება. ელიფსის სიგრძის გამოთვლა ხდება მიახლოებითი მეთოდების გამოყენებით.

კერძოდ, თუ $b=a=R$, ელიფსი გადაიქცევა R რადიუსიან წრეწირად, ამ შემთხვევაში $e=0$ და (2.8) ფორმულა მოგვცემს

$$L=4R\int_0^{\pi/2} dt=2\pi R.$$

მივიღეთ ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილი ფორმულა წრეწირის სიგრძისათვის.



ნახ. 95.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ასტროიდის L სიგრძე (ნახ. 95).

ასტროიდის პირველი მეოთხედის მისაღებად t უნდა ვცვალოთ 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე. გვაქვს:

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t.$$

თუ გამოვიყენებთ (2.6) ფორმულას, გვექნება:

$$\frac{L}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\, dt}=3a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\, dt=\frac{3a}{2}.$$

მაშასადამე, $L=6a$.

§ 8. წირის რკალის სიგრძე პოლარულ კოორდინატებში

ვთქვათ, ბრტყელი წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $\rho=f(\vartheta)$, სადაც $f(\vartheta)$ უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha, \beta]$

სეგმენტზე. ვიპოვოთ ამ წირის რკალის სიგრძე. როგორც ვიცით, პოლარულ და დეკარტის კოორდინატებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება

$$x=\rho\cos\vartheta, \quad y=\rho\sin\vartheta.$$

აქედან

$$dx=\cos\vartheta\, d\rho-\rho\sin\vartheta\, d\vartheta, \ dy=\sin\vartheta\, d\rho+\rho\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

საიდანაც

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2 d\vartheta^2.$$

მაშასადამე,

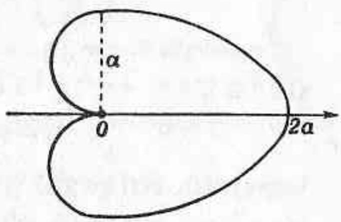
$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx^2=\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2\right]d\vartheta^2.$$

(2.6) ფორმულის თანახმად საძიებელი რკალის L სიგრძე გამოისახება ფორმულით

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta, \tag{3.1}$$

სადაც α და β პოლარული კუთხის ის მნიშვნელობებია, რომლებიც შეესაბამება რკალის ბოლო წერტილებს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ $\rho=a(1+\cos\vartheta)$ კარდიოდის რკალის სიგრძე (ნახ. 96).



ნახ. 96.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კარდიოდის მოხაზულობა მოცემულია 96-ე ნახაზზე. თუ ϑ კუთხეს ვცვლით 0-დან π-მდე, მივიღებთ საძიებელი რკალის სიგრძის ნახევარს. (3.1) ფორმულის თანახმად,

$$\frac{L}{2}=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\vartheta)^2+a^2\sin^2\vartheta}\, d\vartheta=$$

$$=a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\vartheta}\, d\vartheta=2a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta=4a.$$

აქედან $L=8a$.

§ 4. რკალის დიფერენციალი

ვთქვათ, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში, ცვლადი $s(t)$ რკალი წარმოიდგინება ფორმულით

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{[\varphi'(\tau)]^2+[\psi'(\tau)]^2+[\chi'(\tau)]^2}\,d\tau. \tag{4.1}$$

რაკი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ $s(t)$ ფუნქცია წარმოებადია და

$$s'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}. \tag{4.2}$$

აქედან

$$[s'(t)]^2=[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ dt^2-ზე, მივიღებთ რკალის დიფერენციალისათვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{4.3}$$

თუ პარამეტრად ავიღებთ ცვლად s რკალს, მაშინ (4.3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1. \tag{4.4}$$

თეორემა 2. ვთქვათ Γ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),$$

სადაც $\varphi(t)$, $\psi(t)$ და $\chi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. თუ $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ და $\chi'(t)$ წარმოებულები ერთდროულად ნული არ ხდება, მაშინ Γ წირის რკალის სიგრძისა და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძის ფარდობის ზღვარი, როდესაც რკალის ერთი ბოლო მიისწრაფვის მეორე ბოლოსაკენ, ერთის ტოლია.

დამტკიცება. ავიღოთ Γ წირზე რაიმე $M(x, y, z)$ წერტილი. აღვნიშნოთ Γ წირის ერთი ბოლო წერტილი A-თი, AM რკალის სიგრძე კი s-ით. ახლა Γ წირზე ავიღოთ მეორე წერტილი $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. მაშინ AM' რკალის სიგრძე იქნება $s+\Delta s$, სადაც Δs წარმოადგენს MM' რკალის სიგრძეს. ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად

$$|MM'| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

M და M' წერტილების შესაბამისი პარამეტრის მნიშვნელობები ავღნიშნოთ t და $t+\Delta t$. განვიხილოთ MM' რკალის Δs სიგრძისა და MM' ქორდის $|MM'|$ სიგრძის ფარდობა, $\dfrac{\Delta s}{|MM'|}$. გვაქვს:

$$\frac{\Delta s}{|MM'|} = \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

თუ $\Delta t \to 0$, მაშინ $M' \to M$ და ამ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\Delta t \to 0$, მივიღებთ

$$\lim_{M' \to M} \frac{\Delta s}{|MM'|} = \frac{\dfrac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}} = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშო

1. მოძებნეთ $y^2 = x^3$ წირის რკალის სიგრძე კოორდინატთა სათავიდან წირის იმ წერტილამდე, რომლის აბსცისაა $\dfrac{4}{3}$.

პასუხი: $\dfrac{112}{27}$.

2. გამოთვალეთ $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ პარაბოლის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლოები ძევს Ox ღერძზე.

პასუხი: $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

3. მოძებნეთ $y = \ln(\sin x)$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლო წერტილების აბსცისებია $\dfrac{\pi}{3}$ და $\dfrac{2\pi}{3}$.

პასუხი: $\ln 3$.

4. გამოთვალეთ $5y^3=x^2$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=6$ წრეწირის შიგნით.

პასუხი: $4\frac{26}{27}$.

5. მოძებნეთ $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლოებს შეესაბამება t პარამეტრის შემდეგი მნიშვნელობები: $t=0$, $t=2\pi$.

პასუხი: $2\pi^2$.

6. გამოთვალეთ $x=\frac{t^6}{6}$, $y=2-\frac{t^4}{4}$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლოები ძევს კოორდინატთა ღერძებზე.

პასუხი: 4, (3).

7. გამოთვალეთ $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$ წირის სიგრძე.

პასუხი: $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

§ 5. ბრტყელი ფიგურის ფართობი

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ მარტივი შეკრული Γ წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი R ფიგურის ფართობის ცნებას. Γ წირს ეწოდება R ფიგურის საზღვარი.

ჩვენ ვიტყვით, რომ მრავალკუთხედი ჩახაზულია R ფიგურაში, თუ ამ მრავალკუთხედის ყოველი წერტილი ეკუთვნის R ფიგურას ან მის საზღვარს. თუ ბრტყელი ფიგურისა და მისი საზღვრის ყველა წერტილი ეკუთვნის მრავალკუთხედს, მაშინ ვიტყვით, რომ აღნიშნული მრავალკუთხედი შემოხაზულია R ფიგურის გარშემო.

R ფიგურაში ჩახაზული ნებისმიერი მრავალკუთხედის S_i ფართობი არ აღემატება R ფიგურის გარშემო შემოხაზული ნებისმიერი მრავალკუთხედის S_e ფართობს.

აღვნიშნოთ H_*-ით ყველა S_i რიცხვის სიმრავლე, H^*-ით კი ყველა S_e რიცხვის სიმრავლე. ცხადია H_* სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, H^* კი ქვემოდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$S_*=\sup H_*,\quad S^*=\inf H^*.$$

S_* და S^* რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად R ფიგურის შიგა და გარე ფართობები. შევნიშნოთ, რომ შიგა S_* ფართობი არ აღემატება გარე S^* ფართობს, ე. ი. $S_*\leqslant S^*$.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა. ბრტყელ R ფიგურას ეწოდება ფართობადი, თუ ამ ფიგურის შიგა S_* ფართობი ტოლია გარე S^* ფართობისა. ამ შემთხვევაში $S=S_*=S^*$ რიცხვს ეწოდება R ფიგურის ფართობი.

თეორემა 3. ბრტყელი R ფიგურის ფართობადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს R-ის გარშემო შემოხაზული და ჩახაზული მრავალკუთხედები, რომელთა ფართობების სხვაობა S_e-S_i იყოს ε-ზე ნაკლები:

$$S_e-S_i<\varepsilon.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, R ფიგურა ფართობადია, ე. ი.

$$S_*=S^*=S.$$

რადგანაც S_* და S^* წარმოადგენენ შესაბამისად H_* და H^* სიმრავლეების ზედა და ქვედა საზღვრებს, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $S_i\in H_*$ და $S_e\in H^*$, რომ

$$S-S_i<\frac{\varepsilon}{2},\quad S_e-S<\frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ ამ უტოლობებს შევკრებთ წევრ-წევრად, მივიღებთ

$$S_e-S_i<\varepsilon.$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $S_i\in H_*$ და $S_e\in H^*$, რომ $S_e-S_i<\varepsilon$. რადგანაც

$$S_i\leqslant S_*\leqslant S^*\leqslant S_e,$$

ამიტომ $S^*-S_*<\varepsilon$. აქედან, ε-ის ნებისმიერობის გამო, ვღებულობთ $S_*=S^*$. ამრიგად, R ფიგურა ფართობადია. თეორემა დამტკიცებულია.

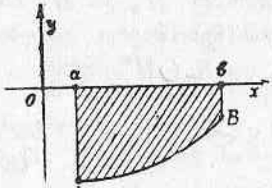
შენიშვნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ პირველ პარაგრაფში მოყვანილი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის განსაზღვრა ტოლფასია ფართობის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრისა.

§ 6. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში

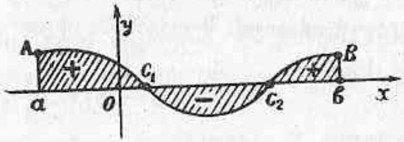
როგორც ვიცით, თუ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x)\geqslant 0$, მაშინ ინტეგრალი $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით $y=0$, $x=a$, $x=b$ და $y=f(x)$ (ნახ. 78), ე. ი.

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{6.1}$$

თუკი $[a, b]$ სეგმენტში $f(x)<0$, მაშინ $\int\limits_a^b f(x)\,dx<0$ და ეს ინტეგრალი აბსოლუტური სიდიდით შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობის ტოლია (ნახ. 97).



ნახ. 97.



ნახ. 98.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია ნიშანს იცვლის $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტს ვყოფთ ქვესეგმენტებად ისე, რომ ყოველ ასეთ ქვესეგმენტზე $f(x)$ იყოს არაუარყოფითი ან არადადებითი (ნახ. 98). ცხადია,

$$\int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx>0, \quad \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx<0, \quad \int\limits_{c_2}^{b} f(x)\,dx>0.$$

მაშასადამე, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციების ფართობთა ალგებრულ ჯამს, რომლებიც მდებარეობენ Ox ღერძის ზემოთ და ქვემოთ.

Ox ღერძის ზემოთ მოთავსებული ფიგურის ფართობს იღებენ დადებითად, Ox ღერძის ქვემოთ მოთავსებული ფიგურის ფართობს

კი უარყოფითად. მაშასადამე, რომ მივიღოთ ფართობთა ჯამი ჩვეულებრივი აზრით, საჭიროა ვისარგებლოთ ფორმულით

$$S=\int_{a}^{c_1} f(x)\,dx-\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\int_{c_2}^{b} f(x)\,dx, \tag{6.2}$$

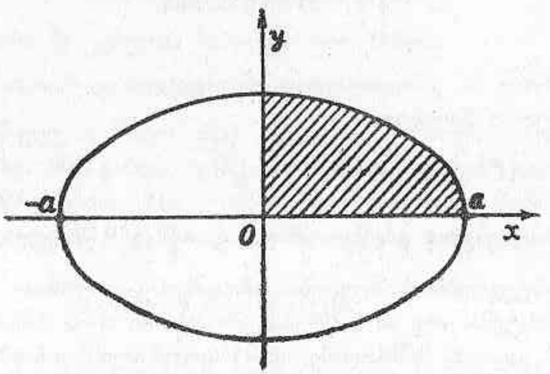
ანუ, რაც იგივეა,

$$S=\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx. \tag{6.3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრული ელიფსით $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელ ფართობს ვუწოდოთ ელიფსის ფართობი და იგი აღვნიშნოთ S ასოთი. ელიფსის განტოლებიდან გვაქვს

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$



ნახ. 99.

რადგანაც ელიფსი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ (ნახ. 99), ამიტომ S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

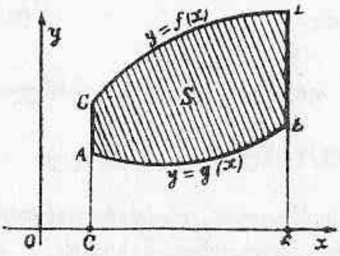
$$S=4\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

მაგრამ, როგორც ცნობილია

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}.$$

მაშასადამე, $S=\pi ab$.

კერძოდ, თუ $a=b=R$, მაშინ ელიფსი გადაიქცევა R რადიუსიან წრეწირად და ამიტომ წრის S ფართობი გამოისახება ფორმულით $S=\pi R^2$.



ნახ. 100.

ახლა ვთქვათ, ფიგურა შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=g(x)$ წირებით, სადაც $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(x)>g(x)$ (ნახ. 100). მაშინ S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx. \tag{6.4}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით

$$y=2-x^2,\ y=\sqrt[3]{x^2}. \tag{6.5}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავაგოთ $y=2-x^2$ და $y=\sqrt[3]{x^2}$ წირები (ნახ. 101). მოვძებნოთ ინტეგრების საზღვრები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა (6.5) სისტემა. თუ ამ სისტემას ამოვხსნით x-ის მიმართ, გვექნება $x_1=-1$, $x_2=1$. მაშასადამე, (6.4) ფორმულის თანახმად

$$S=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-\sqrt[3]{x^2}\right)\,dx=\frac{32}{15}.$$

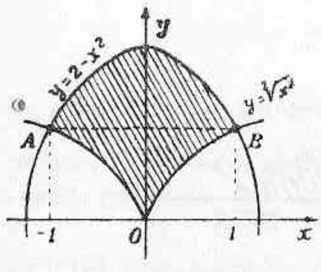
მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვთვალოთ $y^2=2px$ და $x^2=2py$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის S ფართობი (ნახ. 102).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ ამ პარაბოლების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

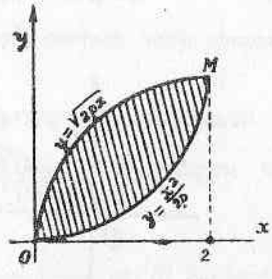
$$y^2=2px,\ x^2=2py.$$

გვაქვს:

$$x_1=0,\ x_2=2p.$$



ნახ. 101.



ნახ. 102.

მაშასადამე,

$$S=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\frac{4}{3}p^2.$$

§ 7. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

ვთქვათ, წირი მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{7.1}$$

სადაც $\psi(t)$ უწყვეტია, ხოლო $\varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ამის გარდა, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. დავამტკიცოთ, რომ $x=a$, $x=b$ წრფეებით, Ox ღერძითა და მოცემული წირით შემოსაზღვრული ფიგურის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{7.2}$$

თუ (7.1) სისტემიდან გამოვრიცხავთ t ცვლადს, მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ $y=f(x)$ ფუნქციას და, მაშასადამე, მრუდწირული ტრაპეციის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

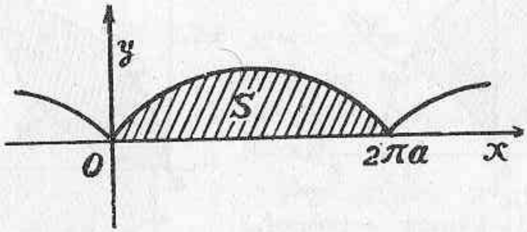
$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx.$$

მიღებულ ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა $x=\varphi(t)$, რაც მოგვცემს (7.2) ფორმულას.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის S ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია Ox ღერძითა და

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

ციკლოიდის ერთი თაღით (ნახ. 103).



ნახ. 103.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (7.2) ფორმულის თანახმად

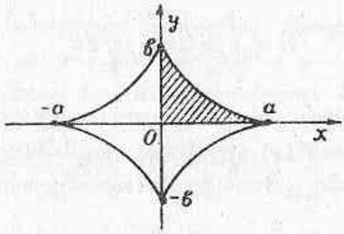
$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=3\pi a^2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის S ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია

$$x=a\cos^3 t,\quad y=b\sin^3 t$$

ასტროიდით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც ასტროიდი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ (ნახ. 104), ამიტომ (7.2) ფორმულის თანახმად S ფართობი გამოითვლება ფორმულით



ნახ. 104.

$$S=4\int_{\pi/2}^{0} b\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\,dt=12ab\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=12ab\int_0^{\pi/2}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,dt=12ab\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\pi ab.$$

§ 8. ფართობის გამოსახულება პოლარულ კოორდინატებში

ვთქვათ, L წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში განტოლებით

$$\rho=f(\vartheta),$$

სადაც $f(\vartheta)$ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრა. ბრტყელ R ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია L წირით და $\vartheta=\alpha$, $\vartheta=\beta$ სხივებით, ეწოდება მრუდწირული სექტორი.

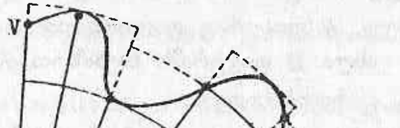
თეორემა 4. მრუდწირული R სექტორი წარმოადგენს ფართობად ფიგურას და მისი S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{8.1}$$

დამტკიცება. დავყოთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტი n ქვესეგმენტად შემდეგი წერტილებით

$$\alpha=\vartheta_0<\vartheta_1<\ldots<\vartheta_n=\beta.$$

ყოველი $[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ სეგმენტისათვის ავაგოთ წრიული სექტორები, რომელთა რადიუსები $\underline{\rho}_k$ და $\overline{\rho}_k$ წარმოადგენენ $\rho(\vartheta)$ ფუნქციის უმცირესსა და უდიდეს მნიშვნელობებს $[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ სეგმენტზე (ნახ. 105). მივიღებთ ორ $\underline{R}$ $\overline{R}$ ფიგურას.



ნახ. 105.

ცხადია, რომ

$$\underline{R}\subset R\subset\overline{R}.$$

$\underline{R}$ და $\overline{R}$ ფიგურების ფართობები აღვნიშნოთ შესაბამისად S_i და S_e სიმბოლოებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} \underline{\rho}_k^2 (\vartheta_k - \vartheta_{k-1}),$$

$$S_e = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} \overline{\rho}_k^2 (\vartheta_k - \vartheta_{k-1}).$$

შევნიშნოთ, რომ S_i წარმოადგენს $\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)$ ფუნქციის ქვედა $\underline{\sigma}$ ჯამს $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის აღებული დანაწილებისათვის, S_e კი იმავე ფუნქციის ზედა $\overline{\sigma}$ ჯამს. რადგანაც $\frac{1}{2}\rho^2(\vartheta)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის შეგვიძლია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ისეთი დანაწილება ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

მაგრამ $\overline{\sigma} = S_e$, $\underline{\sigma} = S_i$. მაშასადამე,

$$S_e - S_i < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\underline{R}$ ფიგურა წრიული სექტორების ჯამია და რაკი ყოველი წრიული სექტორი ფართობადია, ამიტომ ფართობადი იქნება $\underline{R}$ ფიგურაც. ასევე, $\overline{R}$ ფიგურაც ფართობადია.

ახლა $\underline{R}$ ფიგურაში ჩავხაზოთ ისეთი $\underline{Q}$ მრავალკუთხედი, რომლის S_i' ფართობისათვის

$$S_i - S_i' < \frac{\varepsilon}{3},$$

ხოლო $\overline{R}$-ის გარშემო შემოვხაზოთ ისეთი $\overline{Q}$ მრავალკუთხედი, რომლის S_e' ფართობისათვის

$$S_e' - S_e < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ცხადია, რომ $\underline{Q} \subset R \subset \overline{Q}$. რადგანაც

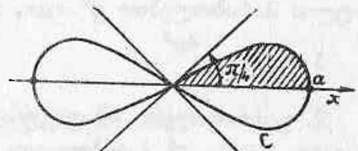
$$S_e' - S_i' = (S_e' - S_e) + (S_e - S_i) + (S_i - S_i') <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ამიტომ, მე-3 თეორემის თანახმად, R ფიგურა ფართობადია. შემდეგ ცხადია, რომ

$$S_i' < \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\vartheta)\, d\vartheta < S_e'.$$

აქედან მიიღება (8.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $\rho^2=a^2\cos 2\vartheta$ ბერნულის ლემნისკატით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.



ნახ. 106.

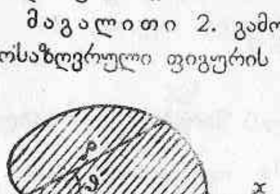
ა მ ო ხ ს ნ ა. ლემნისკატის მოხაზულობა მოცემულია 106-ე ნახაზზე. რადგანაც მოცემული ფიგურა ოთხი სიმეტრიული ნაწილისაგან შედგება, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ საძიებელი S ფართობის ერთი მეოთხედი.

როდესაც $\vartheta=0$, მაშინ $\rho=0$, ხოლო როდესაც, $\vartheta=\frac{\pi}{4}$, მაშინ $\rho=0$. მაშასადამე, (8.1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/_4} a^2\cos 2\vartheta\, d\vartheta=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/_4}=\frac{a^2}{4}.$$

საიდანაც $S=a^2$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.



ნახ. 107.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კარდიოიდის მოხაზულობა მოცემულია 107-ე ნახაზზე. რადგანაც მოცემული ფიგურა სიმეტრიული ნაწილისაგან შედგება, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ საძიებელი ფართობის ნახევარი.

როდესაც $\vartheta=0$, მაშინ $\rho=2a$, ხოლო, როდესაც $\vartheta=\pi$, მაშინ $\rho=0$. მაშასადამე, (8.1) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\vartheta)^2\, d\vartheta.$$

აქედან

$$S=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\vartheta+\cos^2\vartheta)\,d\vartheta=1{,}5\pi a^2.$$

სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია პარაბოლებით $y^2=ax$, $x^2=ay$, სადაც $a>0$.

პასუხი: $\frac{4a^2}{3}$.

2. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=4-x^2$ პარაბოლითა და Ox ღერძით.

პასუხი: $10\frac{2}{3}$.

3. იპოვეთ $y^2=2x$ პარაბოლითა და $x^2+y^2=4x$ წრეწირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი: $2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)$.

4. იპოვეთ $y=2x-x^2$ და $x+y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი 4,5.

5. იპოვეთ $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ ცისოიდითა და $x=2a$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, სადაც $a>0$.

პასუხი: $3\pi a^2$.

6. იპოვეთ $y=(x+1)^2$, $x=\sin\pi y$ და $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი $(0\leqslant y<1)$.

პასუხი: $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}$.

7. იპოვეთ $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი: $\frac{8}{15}$.

8. გამოთვალეთ $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ წირითა და $x=a$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, თუ $0<t\leqslant 2\pi$, $y\leqslant 0$.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$.

9. გამოთვალეთ $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: $6\pi a^2$.

10. იპოვეთ $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{3\pi c^4}{8ab}$.

11. იპოვეთ $\rho=a\sin 3\vartheta$ სამფურცელას ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\pi a^2}{4}$.

12. მოძებნეთ $\rho=\frac{p}{1-\cos\vartheta}$ პარაბოლითა და $\vartheta=\frac{\pi}{4}$, $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ სხივებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{p}{6}(3+4\sqrt{2})$.

13. მოძებნეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\rho=a(1+\sin^2 2\vartheta)$ და $\rho=a$ წირებით.

პ ა ს უ ხ ი: $1{,}37\pi a^2$.

14. იპოვეთ დეკარტის $x^3+y^3-3axy=0$ ფოთლის მარყუჟის ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{3a^2}{2}$.

15. გამოთვალეთ $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: $\pi a^2\sqrt{2}$.

16. გამოთვალეთ $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პ ა ს უ ხ ი: a^2.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 14—16 მაგალითებში წირების განტოლებები დაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში.

17. გამოთვალეთ $x^4+y^4=ax^2y$ წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

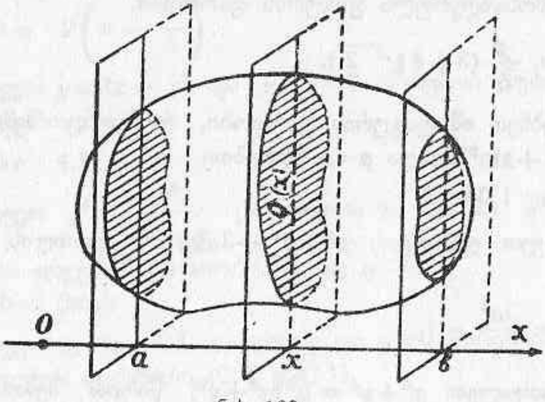
მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა $y=tx$.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$.

§ 9. სხეულის მოცულობის გამოთვლა, როდესაც ცნობილია განივი კვეთების ფართობები

ნებისმიერი სხეულის მოცულობის გამოთვლა შეიძლება მხოლოდ ჯერადი ინტეგრალების საშუალებით, მაგრამ მრავალ კერძო შემთხვევაში სხეულის მოცულობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ ერთმაგი ინტეგრალით.

განვიხილოთ რაიმე სხეული და Ox ღერძი[1]. ამ ღერძზე ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტი და ვიგულისხმოთ, რომ $x=a$ და $x=b$ სიბრტყეები კვეთენ მოცემულ სხეულს. აღვნიშნოთ T-თი მოცემული სხეულის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია $x=a$ და $x=b$ სიბრტყეებს შორის (ნახ. 108).



ნახ. 108.

ცხადია, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ x წერტილზე გავლებული Ox ღერძის მართობი სიბრტყე გადაკვეთს T სხეულს. თუ კვეთის ფართობს აღვნიშნავთ Q-თი, იგი დამოკიდებული იქნება x-ზე, ე. ი. კვეთის ფართობი x-ის გარკვეული $Q(x)$ ფუნქციაა.

---

[1] სხეული ეწოდება სივრცის ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია არაგადამკვეთი შეკრული ზედაპირით.

დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

ამ წერტილებზე გავავლოთ Ox ღერძის მართობული სიბრტყეები, მაშინ T სხეული დაიყოფა n ნაწილად. განვიხილოთ ერთ-ერთი ქვე-სეგმენტი $[x_{k-1}, x_k]$. ამ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და ავაგოთ ცილინდრული სხეული, რომლის მიმმართველი წირია $x = \xi_k$ სიბრტყისა და T სხეულის გადაკვეთით მიღებული წირი, ხოლო მსახველი Ox ღერძის პარალელურია. ცხადია, ასეთი ელემენტარული ცილინდრის ფუძის ფართობია $Q(\xi_k)$, ხოლო მოცულობაა $Q(\xi_k)\Delta x_k$, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. ყველა ელემენტარული ცილინდრის მოცულობათა ჯამია

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k) \Delta x_k.$$

თუ არსებობს V_n მოცულობის ზღვარი, როდესაც ყოველი Δx_k ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ ამ ზღვარს ვუწოდებთ T სხეულის V მოცულობას. ცხადია, თუ $Q(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$V = \int_a^b Q(x)\, dx. \tag{9.1}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ სამღერძა $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდის მოცულობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. Ox ღერძის მართობული $X = x$ სიბრტყე $(-a < x < a)$ ელიფსოიდთან გადაკვეთაში მოგვცემს ელიფსს, რომლის განტოლებებია

$$\frac{Y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{Z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \; X = x.$$

ამ ელიფსის ფართობია

$$Q(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

თუ ვისარგებლებთ (9.1) ფორმულით, გვექნება

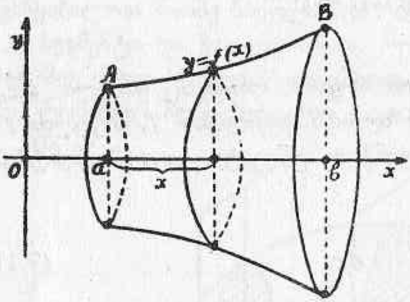
$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

კერძოდ, როდესაც $a=b=c=R$, მივიღებთ სფეროს მოცულობას

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 10. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა

განვიხილოთ $y=f(x)$ წირი, სადაც $f(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. მრუდწირული ტრაპეცია $aABb$ (ნახ. 109), რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით და $y=0$, $x=a$, $x=b$ წრფეებით, ვაბრუნოთ Ox ღერძის გარშემო, მივიღებთ ბრუნვით სხეულს. ვეძიოთ ამ სხეულის მოცულობა.



ნახ. 109.

$[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერ x წერტილში Ox ღერძისადმი მართობულად გავლებული სიბრტყე, ბრუნვით მიღებულ სხეულთან კვეთაში მოგვცემს წრეს, რომლის ფართობია

$$Q(x)=\pi[f(x)]^2.$$

რაკი $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ, (9.1) ფორმულის მიხედვით, ბრუნვითი სხეულის V მოცულობა გამოისახება ფორმულით

$$V=\pi\int_a^b y^2dx. \tag{10.1}$$

სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ელიფსური პარაბოლოიდით $x=\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}$ და $x=a$ სიბრტყით.

პასუხი: $\pi a^2\sqrt{pq}$.

2. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ცალკალთა ჰიპერბოლოიდით $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ და $z=0$ და $z=h$ სიბრტყეებით.

პასუხი: $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$.

3. მოძებნეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+z^2=a^2$ და $y^2+z^2=a^2$ ზედაპირებით.

პასუხი: $\frac{16}{3}a^3$.

4. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ასტროიდით, ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო. მოძებნეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $\frac{32}{105}\pi a^3$.

5. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2-y^2=4$ ჰიპერბოლით და $y=\pm 2$ წრფეებით, ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო. მოძებნეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $\frac{64\pi}{3}$.

6. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ სინუსოიდის ნახევარი ტალღითა და Ox ღერძით, ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $\frac{\pi^2}{3}$.

7. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\frac{1}{1+x^2}$ წირითა და $x=\pm 1$, $y=0$ წრფეებით, ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $0{,}25\pi(\pi+2)$.

8. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და $x=y^2$ პარაბოლებით, ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $0{,}3\pi$.

9. იპოვეთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თაღის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $5\pi^2a^3$.

10. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია $(y^2-b^2)=a^3x$ წირით ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო $(-b\leqslant y\leqslant b)$. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $\dfrac{256\pi b^9}{315a^6}$.

§ 11. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი

მრუდე ზედაპირის ფართობის ცნების ზოგად განსაზღვრას მოვიყვანთ მე-2 ტომში. ახლა ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ ბრუნვითი ზედაპირის შემთხვევაზე.

ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოთავსებულია წრფევადი Γ წირი, რომლის განტოლებებია

$$x=x(s),\quad y=y(s),$$

სადაც s ამ წირის ცვლადი რკალის სიგრძეა. ცხადია, $x(s)$ და $y(s)$ წარმოადგენენ s-ის უწყვეტ ფუნქციებს $[0, L]$ სეგმენტზე, სადაც L არის Γ წირის სიგრძე. ვიგულისხმოთ, რომ $[0, L]$ სეგმენტზე $y(s)>0$.

განსაზღვრა. Γ წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ვუწოდოთ ზღვარს, რომლისაკენაც მიისწრაფვის წირში ჩახაზული ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, როდესაც ტეხილის ყოველი გვერდის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის.

აღვნიშნოთ Γ წირის ბოლო წერტილები A და B ასოებით (ნახ. 110). დავუშვათ, რომ პარამეტრის $s=0$ მნიშვნელობას შეესაბამება A წერტილი, $s=L$ მნიშვნელობას კი B წერტილი.

დავყოთ Γ წირი n ნაწილად წერტილებით

$$A=A_0,\ A_1,\ A_2,\dots,\ A_{n-1},\ A_n=B,$$

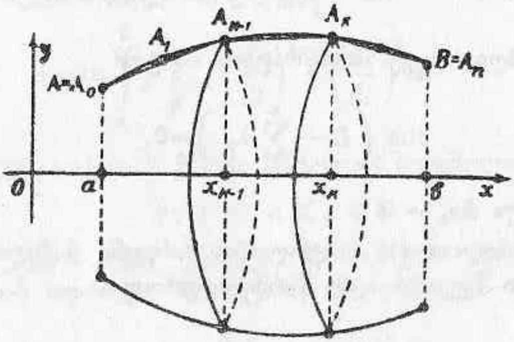
რომლებიც დალაგებულია Γ წირზე A-დან B-საკენ, ე. ი. მათი შესაბამისი პარამეტრის მნიშვნელობებია

$$s_0=0<s_1<s_2<\dots<s_{n-1}<s_n=L.$$

განვიხილოთ ტეხილი, რომლის გვერდებია $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $\ldots$, $A_{n-1} A_n$ მონაკვეთები. ყოველი $A_{k-1} A_k$ მონაკვეთი Ox ღერძის გარშემო ბრუნვისას მოხაზავს წაკვეთილ კონუსს, რომლის გვერდითი ზედაპირის ფართობია

$$2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \lambda_k,$$

სადაც λ_k წარმოადგენს $A_{k-1} A_k$ მონაკვეთის სიგრძეს, ხოლო y_k არის A_k წერტილის ორდინატი.



ნახ. 110.

მთელი ტეხილის მიერ შემოხაზული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი იქნება

$$S_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \lambda_k.$$

ეს ჯამი შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$S_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta s_k - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} (\Delta s_k - \lambda_k), \quad (11.1)$$

სადაც $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$.

განვიხილოთ ჯერ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე შესაკრები. რადგანაც $y(s)$ ფუნქცია უწყვეტია $[0, L]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი M, რომ

$$y(s) \leqslant M, \ 0 \leqslant s \leqslant L.$$

ამის გარდა, $\lambda_k \leqslant \Delta s_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. მაშასადამე,

$$\left|2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2}(\Delta s_k-\lambda_k)\right|\leqslant 2\pi M\sum_{k=1}^{n}(\Delta s_k-\lambda_k)=$$

$$=2\pi M\left(L-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right).$$

მაგრამ $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ წარმოადგენს L წირში ჩახაზული ტეხილის სიგრძეს, რომელიც L ზღვარისაკენ მიისწრაფვის. ამიტომ

$$\lim\left(L-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)=0,$$

როდესაც ყველა $\Delta s_k\to 0$.

ახლა განვიხილოთ (11.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები. იგი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\pi\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}\Delta s_k+\pi\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta s_k.$$

თითოეული ჯამი წარმოადგენს $\pi y(s)$ ფუნქციის რიმანის ჯამს და ამიტომ მათი ზღვრები არსებობს და ტოლია $\pi\int\limits_0^L y(s)\,ds$ ინტეგრალისა.

მაშასადამე, ბრუნვითი ზედაპირის S ფართობი გამოისახება ფორმულით

$$S=2\pi\int_0^L y(s)\,ds. \tag{11.2}$$

ამ ფორმულაში მოითხოვება მხოლოდ L წირის წრფევადობა.

ახლა ვთქვათ, რომ L წირი სხვა t პარამეტრითაა მოცემული

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

სადაც $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, ამასთანავე A წერტილს შეესაბამება პარამეტრის $t=\alpha$ მნიშვნელობა, B წერტილს კი $t=\beta$. თუ (11.2) ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას

$$s=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{[\varphi'(\tau)]^2+[\psi'(\tau)]^2}\,d\tau,$$

მივიღებთ

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

ეს ფორმულა მოკლედ ასე გადავწეროთ

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (11.3)$$

დასასრულ, ვთქვათ T წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით

$$y=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b$$

და $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებული $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ თუ x-ს მივიჩნევთ პარამეტრად, მივიღებთ

$$S=2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (11.4)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თაღის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის S ფართობი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ციკლოიდის ერთი თაღისათვის $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. ამიტომ (11.3) ფორმულის თანახმად

$$S=2\pi\int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=4\pi a^2\int_{0}^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=8\pi a^2\int_{0}^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int_{0}^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ Ox ღერძის გარშემო $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის S ფართობი, $a>b$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ შემთხვევაში

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,\quad f'(x)=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

მაშასადამე,

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx=$$

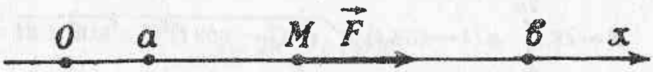
$$=\frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-c^2x^2}\,dx=\frac{4\pi b}{a^2}\int_{0}^{a}\sqrt{a^4-c^2x^2}\,dx,$$

სადაც $c^2=a^2-b^2$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x=\frac{a^2}{c}\sin t$, გვექნება

$$S=\frac{4a^2b}{c}\int_{0}^{\arcsin\frac{c}{a}}\cos^2 t\,dt=2\pi b\left(\frac{a^2}{c}\arcsin\frac{c}{a}+b\right)$$

§ 12. ცვლადი ძალის მუშაობა

ვთქვათ, მატერიალური M წერტილი მოძრაობს Ox ღერძზე იმ $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ. გამოვთვალოთ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, თუ M წერტილი გადაადგილდა $x=a$ წერტილიდან $x=b$ წერტილამდე (ნახ. 111).



ნახ. 111.

ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{F}$ ძალის F სიდიდე x-ის უწყვეტი ფუნქციაა

$$F=F(x).$$

დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n=b.$$

ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი. რადგანაც $F(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე $F(x)$

ფუნქცია მცირედ განსხვავდება $F(\xi_k)$ მნიშვნელობისაგან, რის გამოც $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე $\vec{F}$ ძალის F სიდიდე შეგვიძლია მივიჩნიოთ მუდმივად და $F(\xi_k)$ სიდიდის ტოლად. მაშინ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე იქნება

$$F(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

განვიხილოთ ასეთი ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი:

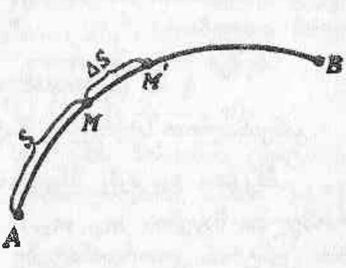
$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (12.1)$$

(12.1) გამოსახულება წარმოადგენს $F(x)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს $[a, b]$ სეგმენტზე. ამ ჯამის ზღვარი, როდესაც უდიდესი დანაყოფის სიგრძე $\lambda \to 0$, წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალს a-დან b-მდე $F(x)$ ფუნქციისას. ამ ინტეგრალს ეწოდება $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული A მუშაობა $[a, b]$ სეგმენტზე:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (12.2)$$

§ 13. მატერიალური წირის მასა

განვიხილოთ მატერიალური AB წირი (ნახ. 112) და ვიგულისხმოთ, რომ ეს წირი წრფევადია. ამ წირზე ავიღოთ რაიმე M წერტილი. AM რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ s-ით, მასა კი m-ით. ცხადია, s-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება m-ის გარკვეული მნიშვნელობა, ასე, რომ m მასა წარმოადგენს s-ის ფუნქციას: $m = m(s)$.



ნახ. 112.

ამბობენ, რომ AB წირი ერთგვაროვანია, თუ წირის ორი ნებისმიერი რკალი, რომლებსაც თანატოლი სიგრძე აქვთ, შეიცავენ თანატოლ მასებს. ამ შემთხვევაში წირის ნებისმიერი რკალის მასის ფარდობა ამავე რკალის სიგრძესთან ერთი და იგივე მუდმივი სიდიდეა. იგი რიცხობრივ იმ მასის ტოლია, რომელიც აქვს წირის ერთეული სიგრძის ნებისმიერ რკალს. ამ ფარდობას წ ი რ ი ს ს ი მ კ ვ რ ი ვ ე ეწო-

დება. თუ AB წირი ერთგვაროვანი არაა, მაშინ საჭიროა შემოვიღოთ წირის სიმკვრივის ცნება წერტილში.

განვიხილოთ MM' რკალი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ Δs-ით, მასა კი Δm-ით. ცხადია,

$$\Delta m = m(s+\Delta s) - m(s).$$

$\frac{\Delta m}{\Delta s}$ ფარდობას ეწოდება საშუალო სიმკვრივე, ხოლო ამ ფარდობის ზღვარს, როდესაც $\Delta s \to 0$, ეწოდება AB წირის სიმკვრივე M წერტილში და იგი აღინიშნება ρ ასოთი:

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

ამრიგად, თუ $m = m(s)$ იმ წირის მასაა, რომლის სიგრძეა s, მაშინ $\frac{dm}{ds}$ წირის სიმკვრივეა აღებულ წერტილში.

ახლა ვთქვათ, ცნობილია AB წირის $\rho(s)$ სიმკვრივე. ვიგულისხმოთ, რომ ეს სიმკვრივე უწყვეტია. მაშინ AM რკალის $m(s)$ მასა გამოითვლება ფორმულით

$$m(s) = \int_0^s \rho(u)\,du.$$

თუ AB წირის M_1M_2 რკალის მასას აღვნიშნავთ $m(s_1, s_2)$ სიმბოლოთი, მაშინ

$$m(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \rho(u)\,du. \tag{13.1}$$

§ 14. მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ სივრცეში მატერიალური წერტილები

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n),$$

რომელთა მასებია $m_1, m_2, \ldots, m_n$. ამ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები ξ, η, ζ გამოითვლება ფორმულებით

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad \eta = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad \zeta = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{14.1}$$

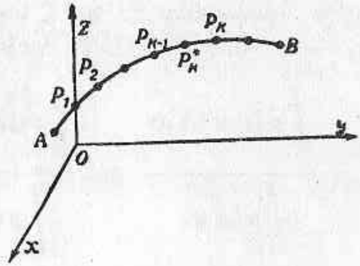
ახლა ვთქვათ, გვაქვს მატერიალური AB წირი (ნახ. 113), რომლის განტოლებებია

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad z=z(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l,$$

სადაც l არის AB წირის სიგრძე.

ვიგულისხმოთ, რომ AB წირის სიმკვრივე ყოველ $M(s)$ წერტილში არის $\rho(s)$. ვიპოვოთ ამ წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები. AB წირი გავყოთ ნებისმიერად შემდეგი წერტილებით

$$A=P_0,\ P_1, \dots, P_{n-1},\ P_n=B.$$



ნახ 113.

აღვნიშნოთ AP_k რკალის სიგრძე s_k-თი, მაშინ $P_{k-1}P_k$ რკალის სიგრძე იქნება $s_k-s_{k-1}=\Delta s_k$. თუ $P_{k-1}P_k$ რკალის მასას აღვნიშნავთ m_k-თი, მაშინ (13.1) ფორმულის თანახმად

$$m_k=\int\limits_{s_{k-1}}^{s_k}\rho(u)\,du.$$

საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის თანახმად

$$m_k=\rho(s_k^*)\,\Delta s_k,$$

სადაც $s_{k-1}<s_k^*<s_k$. თუ Δs_k მცირეა, მაშინ $P_{k-1}P_k$ მატერიალური წირი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მატერიალური წერტილი მასით m_k, რომელიც მოთავსებულია P_k^* წერტილში. მაშასადამე, გვექნება მატერიალური წერტილები $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$, რომელთა მასებია $m_1, m_2, \dots, m_n$. P_k^* წერტილის კოორდინატები იქნება

$$x_k=x(s_k^*),\ y_k=y(s_k^*),\ z_k=z(s_k^*)\quad (k=1,\ 2, \dots,\ n).$$

თუ მიღებულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს აღვნიშნავთ $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ და $\overline{\zeta}$ სიმბოლოებით, მაშინ (14.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\overline{\xi}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(s_k^*)\,x(s_k^*)\,\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(s_k^*)\,\Delta s_k},\qquad \overline{\eta}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(s_k^*)\,y(s_k^*)\,\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(s_k^*)\,\Delta s_k},$$

$$\overline{\zeta} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho(s_k^*)\, z(s_k^*)\, \Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(s_k^*)\, \Delta s_k}.$$

განსაზღვრა. $C(\xi, \eta, \zeta)$ წერტილს, სადაც ξ, η, ζ წარმოადგენენ შესაბამისად $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$ სიდიდეების ზღვარს, როდესაც ყოველი $\Delta s_k \to 0$, ეწოდება AB წირის სიმძიმის ცენტრი. მაშასადამე,

$$\xi = \frac{\int_0^l \rho(s)\, x(s)\, ds}{\int_0^l \rho(s)\, ds}, \quad \eta = \frac{\int_0^l \rho(s)\, y(s)\, ds}{\int_0^l \rho(s)\, ds}, \quad \zeta = \frac{\int_0^l \rho(s)\, z(s)\, ds}{\int_0^l \rho(s)\, ds} \tag{14.2}$$

თუ მატერიალური AB წირი ერთგვაროვანია, მაშინ $\rho(s)$ სიმკვრივე მუდმივია და (14.2) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\xi = \frac{1}{l}\int_0^l x(s) ds, \quad \eta = \frac{1}{l}\int_0^l y(s)\, ds, \quad \zeta = \frac{1}{l}\int_0^l z(s)\, ds. \tag{14.3}$$

თუ მატერიალური AB წირი ძევს xOy სიბრტყეზე, მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულები

$$\xi = \frac{\int_0^l \rho(s)\, x(s) ds}{\int_0^l \rho(s)\, ds}, \qquad \eta = \frac{\int_0^l \rho(s)\, y(s)\, ds}{\int_0^l \rho(s)\, ds}, \tag{14.4}$$

როდესაც წირი არაერთგვაროვანია, ხოლო თუ წირი ერთგვაროვანია, მაშინ

$$\xi = \frac{1}{l}\int_0^l x(s)\, ds, \qquad \eta = \frac{1}{l}\int_0^l y(s)\, ds. \tag{14.5}$$

დაბოლოს, თუ ერთგვაროვანი AB წირის განტოლებაა $y = f(x)$, სადაც $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ (14.5) ფორმულები ასე გადაიწერება:

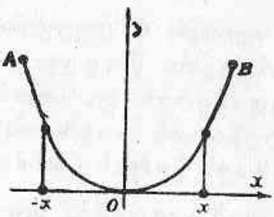
$$\xi=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx},\quad \eta=\frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}. \tag{14.6}$$

თეორემა 5. თუ ერთგვაროვანი AB წირი სიმეტრიულია რაიმე წრფის მიმართ, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ წრფეზე.

დამტკიცება. სიმეტრიის ღერძად მივიჩნიოთ Oy ღერძი, O წერტილად კი Oy ღერძის AB წირთან გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 114).

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\sigma=s-\frac{l}{2}$, მაშინ (14.5) ინტეგრალებიდან პირველი ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\xi=\frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2} x\,ds.$$

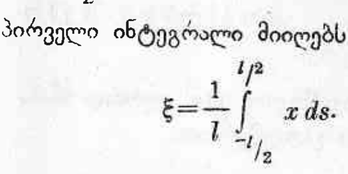


ნახ. 114.

მაგრამ x წარმოადგენს σ-ს კენტ ფუნქციას, ამიტომ $\xi=0$. მაშასადამე, სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს Oy ღერძზე, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ერთგვაროვანი $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის პირველი თაღის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. რაკი მოცემული ციკლოიდის პირველი თაღი სიმეტრიულია $x=\pi a$ წრფის მიმართ (ნახ. 115), ამიტომ $\xi=\pi a$.



ნახ. 115.

ახლა ვიპოვოთ η. ამისათვის მეორე ინტეგრალში (14.5)-დან მოვახდინოთ ჩასმა

$$s=\int\limits_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

ეს გვაძლევს, თუ ვისარგებლებთ $l=8a$ ტოლობით,

$$\eta = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt =$$

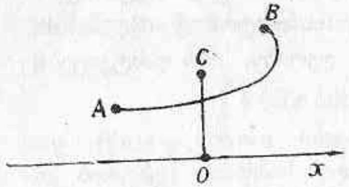
$$= \frac{a}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\;dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{4}{3}\,a.$$

ამრიგად, საძიებელი სიმძიმის ცენტრია $\left(\pi a, \frac{4a}{3}\right)$ წერტილი.

თეორემა 6. (გულდენის პირველი თეორემა). ღერძის არაგადამკვეთი წრფევადი AB წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ტოლია წირის სიგრძისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლისა, რომელსაც შემოხაზავს წირის სიმძიმის C ცენტრი.

დამტკიცება. ბრუნვის ღერძი მივიჩნიოთ Ox ღერძად (ნახ. 116) და მეორე ფორმულა (14,5)-დან ასე გადავწეროთ:



ნახ. 116.

$$\eta\, l = \int_0^l y\,ds.$$

აქედან

$$2\pi\eta\, l = 2\pi\int_0^l y(s)\,ds.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს იმ ზედაპირის ფართობს, რომელიც მიიღება AB წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. მაშასადამე,

$$S = l\cdot 2\pi\eta, \tag{14·6}$$

სადაც S-ით აღნიშნულია ზედაპირის ფართობი. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ერთგვაროვანი $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ნახევარი წრეწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. რაკი მოცემული წირი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ $\xi=0$. შემდეგ (14.6) ფორმულის მიხედვით გვაქვს

$$\eta=\frac{S}{2\pi l},$$

სადაც S წარმოადგენს r რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობს, ხოლო l არის ნახევარი წრეწირის სიგრძე, მაშასადამე,

$$\eta=\frac{4\pi r^2}{2\pi\cdot\pi r}=\frac{2r}{\pi}.$$

ამრიგად, მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია $\xi=0,\ \eta=\frac{2r}{\pi}$.

შინაარსი

თავი II

ფუნქცია

თავი III

რიცხვთა მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი

თავი IV

რიცხვთა მწკრივი

თავი V

ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

თავი VI

ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

თავი VII

ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით

თავი VIII

განუსაზღვრელი ინტეგრალი. ინტეგრების ძირითადი მეთოდები

თავი IX

რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

თავი X

ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

თავი XI

ზოგიერთი ტრანსცენდენტური ფუნქციების ინტეგრება

თავი XII

განსაზღვრული ინტეგრალი

თავი XIII

განტოლებათა ფესვებისა და განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდები

თავი XIV

განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გეომეტრიული და ფიზიკური გამოყენება

რედაქტორი ა. სულაქველიძე
გამომცემლობის რედაქტორი რ. ტუკვაძე
ტექრედაქტორი ი. ხუციშვილი
კორექტორი ნ. ქანთარია

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 21.XI.76
ქაღალდის ფორმატი 60×90 1/16
ნაბეჭდი თაბახი 40.0
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 33.1
სბ 58
შეკვეთა 3120 ტირაჟი 3000

ფასი 1 მან. 55 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14
Издательство Тбилисского университета
Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 14

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა,
თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ. 19
Типография АН Груз. ССР,
Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19

Владимир Георгиевич Челидзе
Элизбар Семенович Цитланадзе

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1976