ა. ჩახტაური

ანალიზური გეომეტრია

გამომცემლობა „ცოდნა"
თბილისი — [illegible]

ა. ჩახტაური

ანალიზური გეომეტრია

სასწავლო-პედაგოგიური ლიტერატურის
სახელმწიფო გამომცემლობა
„ცოდნა"
თბილისი—1960

ავტორისაგან

ანალიზური გეომეტრიის მთავარ ამოცანას წარმოადგენს დაუკავშიროს ძირითადი გეომეტრიული ნაკვთები და მათთან დაკავშირებული საკითხები ალგებრულ გამოსახულებებს და, პირუკუ, ალგებრულ გამოსახულებებს მისცეს გეომეტრიული ახსნა. ამ მრავალფეროვანი მასალის დალაგება და სტუდენტთათვის გასაგებად გადაცემა საკმაო სიძნელეს წარმოადგენს. ამით აიხსნება იმ დიდძალი ლიტერატურის არსებობა, რომელიც მიძღვნილია ამ საგნისადმი რუსულ ენაზე. ეს წიგნი შედგენილია ავტორის მიერ თბილისის უნივერსიტეტსა და საქართველოს პედაგოგიურ ინსტიტუტებში მრავალჯერ წაკითხული ლექციების საფუძველზე. მასალა დალაგებულია საფეხურებად ამაღლობით როგორც თავების, ისე მათში შემავალი პარაგრაფების მიხედვით. ეს საშუალებას იძლევა მთლიანობის დაურღვევლად შეკუმშულ იქნას კურსი სხვადასხვა ტიპის უმაღლეს სასწავლებლებში გამოყენების მიზნით. მაგალითად, პოლიტექნიკური ინსტიტუტისათვის საჭირო მასალას შეიცავს წიგნის I–VII თავები, პედაგოგიურ ინსტიტუტში შეისწავლება I–IX თავები, უნივერსიტეტში — მთლიანად. III, VIII, IX, X, XI თავების ბოლო პარაგრაფები შემავსებელი პარაგრაფებია ანალიზური გეომეტრიის პროგრამების მოსალოდნელ მცირე ცვლილებებთან შესაგუებლად. ისინი შესაძლებელია გამოტოვებულ იქნას კურსის შესწავლის დროს.

ამ წიგნის ხელნაწერის სასტამბოდ გამზადების დროს დახმარება მიწევდა ა. ს. პუშკინის სახელობის თბილისის პედაგოგიური ინსტიტუტის უფროსი ლაბორანტი ჯ. მარდალეიშვილი, რისთვისაც მას მადლობას ვუცხადებ.

თავი I

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები სიბრტყეზე

§ 1. წერტილის კოორდინაცია

1. წრფის წერტილთა კოორდინაცია. განვიხილოთ რაიმე წრფე (სწორი ხაზი) და მასზე გამოვყოთ ერთი გარკვეული წერტილი. ეს წერტილი აღვნიშნოთ O ასოთი. იგი გაყოფს წრფეს ორ ნაწილად. ერთ მათგანს ვუწოდოთ I ნაწილი, ხოლო დანარჩენს II ნაწილი. მაგალითად, თუ წრფე ჩვენს წინ ჰორიზონტალურად არის გავლებული, ე. ი. თუ წრფის ნაწილები მოჩანან წერტილიდან მარჯვნივ და მარცხნივ, მაშინ I ნაწილი იყოს მარჯვნივ მოთავსებული ნაწილი, ხოლო II ნაწილი—მარცხნივ მოთავსებული ნაწილი ან, პირუკუ, მარცხნივ მოთავსებულ ნაწილს შეიძლება ეწოდოს I ნაწილი, მარჯვნივ მოთავსებულ ნაწილს კი II ნაწილი. ეს ჩვენს შეთანხმებაზეა დამოკიდებული. ლიტერატურაში გავრცელებულია ზემოაღნიშნული ორნაირი შეთანხმების პირველი ვარიანტი.

ახლა განვიხილოთ წრფის რაიმე მონაკვეთი, მივიღოთ ის მასშტაბად და მისი საშუალებით განვსაზღვროთ წრფის ნებისმიერი მონაკვეთის სიგრძე.

ზემოაღნიშნულ წრფეზე განვიხილოთ ნებისმიერი M წერტილი. OM მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ $|OM|$-ით. თუ M წერტილი მოთავსებულია წრფის I ნაწილში მას შევუსაბამოთ $|OM|$ რიცხვი, ხოლო, თუ M მოთავსებულია წრფის II ნაწილში, მას შევუსაბამოთ $-|OM|$ რიცხვი. ამრიგად, წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთი გარკვეული ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც x-ით აღვნიშნავთ. თანახმად ზემოაღნიშნული შეთანხმებისა:

$$x=|OM| \text{ წრფის I ნაწილში,}$$
$$x=-|OM| \text{ წრფის II ნაწილში.}$$

თვით O წერტილისათვის (ე. ი. როცა M წერტილი ემთხვევა O წერტილს) შესაბამი რიცხვი იქნება $|OO|=0$. ამრიგად, O წერტი-

ლის შესაბამი რიცხვი იქნება ნული. აქ ჩატარებული მსჯელობის შებრუნებით შეგვიძლია ყოველ ნამდვილ რიცხვს შევუსაბამოთ წრფის ერთი გარკვეული წერტილი. მართლაც, თუ განსახილავი x რიცხვი დადებითია, მაშინ წრფის პირველ ნაწილში უნდა ავიღოთ ისეთი M წერტილი, რომელიც მოგვცემს $|OM|=x$. ასეთი წერტილი იქნება x რიცხვისათვის შესაბამი. თუ x უარყოფითია, მაშინ შესაბამი წერტილი წრფის II ნაწილში განიხილება იმავე წესით. თუ $x=0$, მაშინ შესაბამი წერტილი იქნება წრფეზე გამოყოფილი გარკვეული წერტილი, რომელიც O ასოთი გვაქვს აღნიშნული. ამრიგად, გარკვეული წესით წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთი გარკვეული ნამდვილი რიცხვი და, პირუკუ, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთი გარკვეული წერტილი წრფეზე. ამრიგად წრფის წერტილთა და ნამდვილ რიცხვთა შორის მყარდება ურთიერთ ცალსახა თანადობა. წრფის I ნაწილს, რომლის წერტილებსაც დადებითი რიცხვები შევუსაბამეთ, ეწოდება დადებითი ნაწი-

ნახ. 1.

ლი, ანუ *დადებითი მხარე*, წრფის მეორე ნაწილს კი უარყოფითი ნაწილი, ანუ *უარყოფითი მხარე*. დადებითი მხარე წრფეზე ნაჩვენებია ისრით (ნახ. 1)[1]. წრფეზე I ნაწილის რაიმე წერტილის მოძრაობის მიმართულებას ეწოდება დადებითი მიმართულება, თუ ამ მოძრაობის დროს მოძრავი წერტილი შორდება O წერტილს. საწინააღმდეგო მიმართულებას კი ეწოდება უარყოფითი. წრფეზე მოძრაობის დადებითი მიმართულება შეიძლება განისაზღვროს წერტილისაგან დამოუკიდებლადაც, რაიმე პირობითი შეთანხმებით; მაგალითად, ჩვენს წინ მოთავსებულ ჰორიზონტალურ წრფეზე მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობის მიმართულება შეიძლება ჩავთვალოთ დადებით მიმართულებად.

როცა წრფეზე არჩეულია დადებითი მიმართულება იტყვიან, რომ წრფე მოგეზულია (ორიენტირებულია). ამრიგად ზემოაღნიშ-

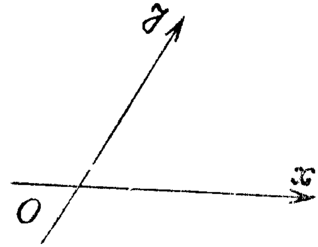
[1] M წერტილის შესაბამი x რიცხვი მიწერილი აქვს ამ წერტილს ქვემოთ, როგორც ნომერი. ზოგჯერ ამ რიცხვს წერენ O და M წერტილებს შორის, როგორც, მაგალითად, მე-3 ნახაზზეა ნაჩვენები.

სული წრფე, ნაწილებად დაყოფილი, მოგეზულიც არის. მაშასადამე, მოგეზულ წრფეზე თუ გამოვყოფთ ერთ გარკვეულ წერტილს, მაშინ შეგვიძლია ამ წრფის წერტილთა და ნამდვილ რიცხვთა შორის დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა. ამიტომ ასეთ წრფეს (მოგეზულ წრფეს მასზე არჩეული ერთი გარკვეული O წერტილით) ეწოდება რიცხვთა ღერძი. O წერტილს ეწოდება რიცხვთა ღერძის სათავე. M წერტილის შესაბამ x რიცხვს ეწოდება M წერტილის კოორდინატა. ეს დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება

$$M=(x) \text{ ან } M(x).$$

ორივე ეს აღნიშვნა შემდეგნაირად უნდა წავიკითხოთ: „M წერტილის კოორდინატა არის x“. წერტილთა და რიცხვთა შორის ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას ეწოდება წრფის წერტილთა კოორდინაცია. ამასთან დაკავშირებით, თვით რიცხვთა ღერძს კოორდინატთა ღერძი ეწოდება. O წერტილს ეწოდება კოორდინატთა ღერძის სათავე.

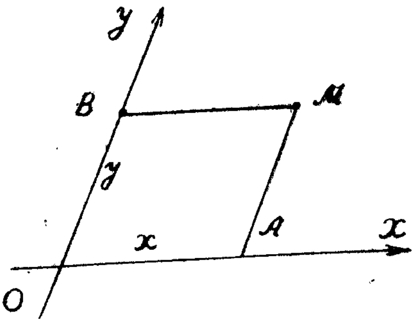
2. სიბრტყის წერტილთა კოორდინაცია. განვიხილოთ რაიმე სიბრტყე და მასზე ავიღოთ ორი არაპარალელური კოორდინატთა ღერძი საერთო სათავით. პირველი ღერძის წერტილის კოორდინატი აღვნიშნოთ x-ით, მეორისა y-ით. ამის ნიშნად, თვით ღერძებს მივუწეროთ x და y ასოები შესაბამად, როგორც მათი აღმნიშვნელი. კოორდინატთა ღერძებს მოვიხსენიებთ ასე: Ox და Oy კოორდინატთა ღერძები ან მოკლედ x და y კოორდინატთა ღერძები. ორივე ღერძის ერთობლიობას, საერთო სათავით, ეწოდება Oxy კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე. O წერტილს ეწოდება კოორდინატთა სისტემის სათავე (ნახ. 2).



ნახ. 2.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი M წერტილი სიბრტყეზე. გავატაროთ ამ წერტილიდან x და y ღერძების პარალელური წრფეები აღებული ღერძების თანაკვეთამდე. M წერტილზე გამავალი y ღერძის პარალელური წრფე არის ერთადერთი და იგი უსათუოდ თანაიკვეთება x ღერძთან. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. y ღერძის პარალელური წრფე x ღერძთან რომ არ თანაკვეთილიყო, მაშინ იგი x ღერძის პარალელურიც იქნებოდა, რაც იმას გამოიწვევდა, რომ თვით x და y ღერძები იქნებოდა პარალელური. ეს კი გამორიცხულია

თავიდანვე. ამრიგად, y ღერძის პარალელური წრფე უსათუოდ თანაიკვეთება x ღერძთან, ერთ გარკვეულ A წერტილში. სავსებით ანალოგიურად M წერტილზე გამავალი x ღერძის პარალელური წრფე თანაიკვეთება y ღერძთან, ერთ გარკვეულ B წერტილში. A წერტილს, როგორც კოორდინატთა ღერძის წერტილს, ექნება თავისი x კოორდინატა. ასევე B წერტილს ექნება თავისი y კოორდინატა (ნახ. 3). ამრიგად M წერტილს უკავშირდება ნამდვილ რიცხვთა წყვილი x, y. პირუკუ, ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ წყვილს შეგვიძლია ანალოგიური წესით (რაც ჩატარებული მსჯელობის შექცევაში მდგომარეობს) მოვუძებნოთ შესაბამი წერტილი. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა წყვილი x, y. მოვძებნოთ ამ რიცხვების შესაბამი წერტილები x და y ღერძებზე. აღვნიშნოთ ეს წერტილები A-თი და B-თი. გავატაროთ A წერტილზე წრფე y ღერძის პარალელურად, ხოლო B წერტილზე x ღერძის პარალელურად. ამ ორი წრფის თანაკვეთის M წერტილი იქნება აღებულ რიცხვთა წყვილის შესაბამი წერტილი. ცხადია, რომ ასე მიღებული M წერტილისათვის თვით მოცემულ რიცხვთა წყვილი იქნება (ზემოაღნიშნული წესით) შესაბამი წყვილი. მაშასადამე, ზემოაღწერილი წესით მყარდება სიბრტყის წერტილთა და ნამდვილ რიცხვთა შორის ურთიერთცალსახა თანადობა. ასე მოპოვებულ რიცხვთა წყვილს x და y-ს, უწოდებენ M წერტილის კოორდინატებს. ამას ასე აღნიშნავენ



ნახ. 3.

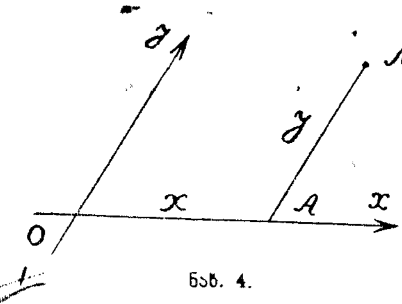
$$M=(x,\ y) \text{ ან } M(x,\ y).$$

ორივე ამ აღნიშვნას აქვს ერთი და იგივე შინაარსი: „M წერტილის კოორდინატები არის x და y“.

x-ს ეწოდება ა ბ ს ც ი ს ა, ხოლო y-ს ო რ დ ი ნ ა ტ ა.

მე-3 ნახაზიდან ჩანს, რომ $|OB|=|AM|$. ამრიგად $y=\pm|AM|$. ზედა ან ქვედა ნიშანი აიღება იმის მიხედვით, თუ M წერტილი x ღერძის რომელ მხარესაა მოთავსებული—ზემოთ თუ ქვემოთ (y ღერძის დადებით ან უარყოფით მხარეს). ეს ფაქტი საშუალებას გვაძლევს A წერტილიდან y ღერძის პარალელურ l წრფეზე მოძრაო-

ბით მივიღოთ M წერტილი. ორდინატის, ე. ი. y-ის, აბსოლუტური მნიშვნელობა მოგვცემს იმ მონაკვეთის სიგრძეს, რომელიც უნდა გადაიზომოს A წერტილიდან y ღერძის პარალელურ წრფეზე. ორდინატის, ე. ი. y-ის, ნიშანი კი გვიჩვენებს იმას, თუ რა მიმართულებით უნდა გადაიზომოს ეს მონაკვეთი (ზემოთ თუ ქვემოთ). ასეთი წესით წერტილის აგება უფრო მარტივად სრულდება (ნახ. 4).



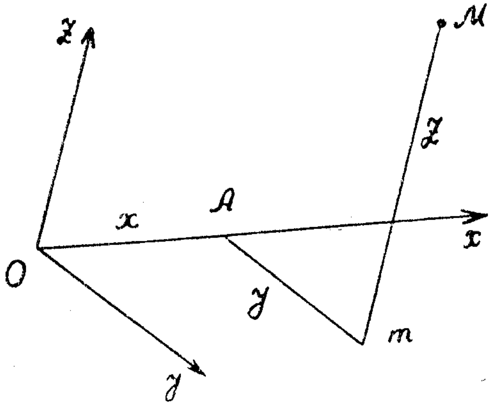
ნახ. 4.

3. წერტილის კოორდინაცია სივრცეში. განვიხილოთ სივრცეში სამი კოორდინატთა ღერძი საერთო სათავით, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ. ეს ღერძები აღვნიშნოთ შესაბამად x-ით, y-ით და z-ით. ამ სამი ღერძის ერთობლიობას საერთო სათავით ეწოდება $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. Oxy, Oxz, Oyz სიბრტყეებს ეწოდებათ კოორდინატთა სიბრტყეები. ახლა ავიღოთ სივრცის რაიმე M წერტილი. გავატაროთ ამ წერტილიდან z ღერძის პარალელური წრფე Oxy სიბრტყის თანაკვეთამდე. რადგან z ღერძი თანაიკვეთება Oxy სიბრტყესთან (წერტილში), ამიტომ z ღერძის პარალელური წრფეც თანაიკვეთება Oxy სიბრტყესთან. ეს თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ m-ით. ცხადია, იგი განისაზღვრება ცალსახად. M წერტილიდან გავატაროთ y ღერძის პარალელური წრფე x ღერძის თანაკვეთამდე. ეს თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ A-თი. ამ წერტილს, როგორც x ღერძზე მდებარეს, ეთანადება გარკვეული x რიცხვი. m წერტილს Am წრფეზე, როგორც y ღერძის პარალელურზე, ეთანადება ერთი გარკვეული y რიცხვი. M წერტილს mM წრფეზე, როგორც z ღერძის პარალელურზე, ეთანადება ერთი გარკვეული z რიცხვი. ამრიგად, სივრცის ნებისმიერ M წერტილს ცალსახად უკავშირდება რიცხვთა x, y, z სამეული. ჩატარებული მსჯელობიდან აშკარად ჩანს, რომ ეს კავშირი არის ურთიერთცალსახა. ამრიგად, სივრცის წერტილთა და ნამდვილ რიცხვთა სამეულებს შორის მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა. x, y, z რიცხვებს ეწოდებათ M წერტილის კოორდინატები სივრცეში. ამ დამოკიდებულებას ასე აღნიშნავენ

$$M=(x,\ y,\ z) \text{ ან } M(x,\ y,\ z).$$

ეს ორივე აღნიშვნა ერთნაირად წაიკითხება: „M წერტილის კო-

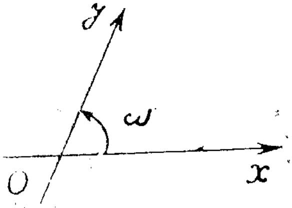
ორდინატები არის x, y, z". წერტილის აგება კოორდინატების საშუალებით ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს. x კოორდინატის საშუალებით განვსაზღვრავთ A წერტილს, y კო-



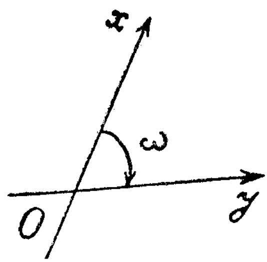
ნახ. 5.

ორდინატის საშუალებით A-დან მივალთ m წერტილში, ხოლო z კოორდინატის საშუალებით m წერტილიდან მივალთ M წერტილში (ნახ. 5).

4. კოორდინატთა სისტემის მოგეზულობის შესახებ. სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემის ღერძების დადებით ნაწილებს შორის



სურ. 6.

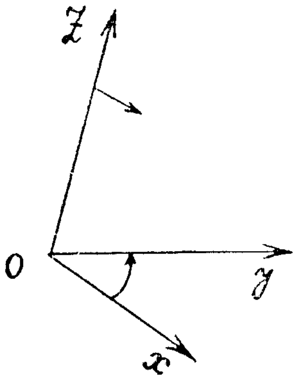


ნახ. 7.

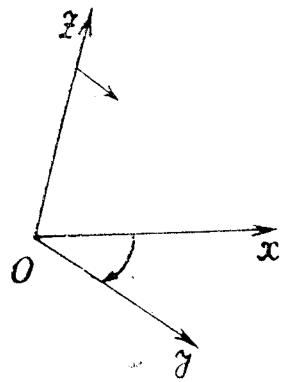
მოთავსებულ კუთხეთაგან უმცირესს ეწოდება კოორდინატთა ღერძებს შორის კუთხე. მას აღვნიშნავთ ω-თი (ნახ. 6).

ω კუთხე შემოიწერება x ღერძის მობრუნებით y ღერძთან შეთავსებამდე. შესაძლებელია ეს ბრუნვა სრულდებოდეს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ (როგორც, მაგალითად, ნახ. 6-ზე) ან თანხვდენილად (ნახ. 7).

პირველ შემთხვევაში კოორდინატთა სისტემას ეწოდება მ ა რ ჯ ვ ე ნ ა მ ო გ ე ზ უ ლ ო ბ ი ს ს ი ს ტ ე მ ა, მეორე შემთხვევაში კი—მ ა რ ც ხ ე ნ ა მ ო გ ე ზ უ ლ ო ბ ი ს ს ი ს ტ ე მ ა. ცხადია, რომ სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებულ კოორდინატთა სისტემას ექნება მარჯვენა ან მარცხენა მოგეზულობა (ორიენტაცია).



ნახ. 8.



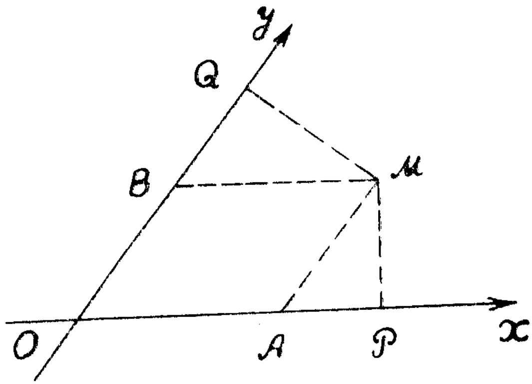
ნახ. 9.

ახლა განვიხილოთ კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. ვთქვათ დამკვირვებელი უცქერის Oxy კოორდინატთა სიბრტყეს z ღერძის დადებით მხარეზე მდებარე წერტილიდან. თუ Oxy სისტემა დამკვირვებლისათვის მარჯვენა მოგეზულობისაა, მაშინ თვით აღებულ სამი განზომილების კოორდინატთა სისტემას ეწოდება მარჯვენა მოგეზულობის (ნახ. 8), წინააღმდეგ შემთხვევაში კი აღებულ კოორდინატთა სისტემას ეწოდება მარცხენა მოგეზულობისა (ნახ. 9).

ანალიზური გეომეტრიის ლიტერატურაში სიბრტყეზე გავრცელებულია მარჯვენა მოგეზულობის სისტემა, ხოლო სივრცეში—მარცხენა მოგეზულობის სისტემა.

5. მართკუთხა კოორდინატები და მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. წერტილის კოორდინაცია სიბრტყეზე წარმოებდა M წერტილიდან ღერძებისადმი პარალელური წრფეების გავლების საშუალებით. შესაძლებელია კოორდინაცია მოხდეს სხვა წესითაც; მაგალითად, M წერტილიდან ღერძებისადმი მართობების დაშვებით. ამ წესითაც ცალსახად განისაზღვრება რიცხვთა წყვილი. ამ წყვილს განსაზღვრავს OP და OQ მონაკვეთები (ნახ. 10). ცხადია, რომ ასე მიღებული კოორდინატები განსხვავდება ზემოაღნიშნული ღერძებისადმი პარალელურ წრფეთა გავლებით მიღებული კოორდინატებისაგან. ცხადია, რომ, როცა კოორდინატთა ღერძე-

ბი თანამართობია, ე. ი. როცა კოორდინატთა სისტემა მართკუთხაა, მაშინ $OA=OP$, $OB=OQ$, ე. ი. პარალელური და მართკუთხა კოორდინატები ერთი და იგივე იქნება. ანალოგიურად განიხილება მართკუთხა კოორდინატები სივრცეში. აქაც პარალელური და მართკუთხა კოორდინატები დაემთხვევა ერთიმეორეს, მხო-



ნახ. 10.

ლოდ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში.

ანალიზურ გეომეტრიას საფუძვლად უდევს წერტილის პარალელური კოორდინაცია. ასეთი კოორდინაცია შემუშავებულ იქნა დეკარტის[1] მიერ და მათ ჩვეულებრივად დეკარტის კოორდინატებს უწოდებენ.

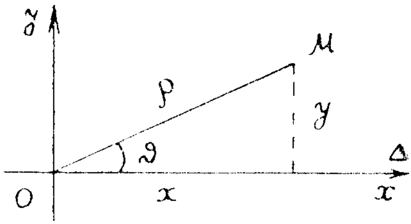
6. პოლარული კოორდინატები. აქ ჩვენ გავეცნობით სიბრტყის წერტილის კიდევ ერთ სპეციალურ კოორდინაციას, რომელსაც საკმაო გამოყენება აქვს ზოგიერთ შემთხვევაში. ავიღოთ სიბრტყეზე ერთი კოორდინატთა ღერძი Δ. M წერტილი შევაერთოთ სათავესთან, მივიღებთ OM წრფეს. კუთხე, რომელზედაც მობრუნდება Δ ღერძი OM წრფესთან შესათავსებლად, აღვნიშნოთ ϑ-თი. ამ კუთხეს განვიხილავთ დადებითად, თუ Δ ღერძის მობრუნება OM-თან შესათავსებლად ხდება საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ. ამავე კუთხეს განვიხილავთ უარყოფითად, თუ Δ ღერძის მობრუნება OM-თან შესათავსებლად ხდება საათის ისრის ბრუნვის თანხვდენილად. წრფის იმ ნაწილს, რომელსაც შეუთავსდება ღერძის დადებითი ნაწილი ϑ კუთხეზე მობრუნების დროს, ვუწოდოთ

[1] დეკარტი ცნობილი ფრანგი ფილოსოფოსი (1596—1650).

დადებითი ნაწილი, მეორეს კი—უარყოფითი ნაწილი, M წერტილს დავუკავშიროთ შემდეგი რიცხვთა წყვილი:

$$\begin{aligned} \vartheta &= (\Delta,\ OM), \\ \rho &= \pm |OM|, \end{aligned} \tag{1}$$

სადაც $+$ ნიშანი აიღება მაშინ, როცა M წერტილი მოთავსებულია OM წრფის დადებით ნაწილზე, ხოლო $-$ ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა M წერტილი მოთავსებულია OM წრფის უარყოფით ნაწილზე. ასეთნაირად მიღებული რიცხვთა წყვილი ცალსახად განსაზღვრავს სიბრტყის წერტილს. ზემოაღნიშნულ წყვილს ეწოდება M წერტილის პოლარული კოორდინატები. პოლარული კოორდინატები მარტივად უკავშირდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებს; ამისათვის Δ ღერძი დავამთხვიოთ x ღერძს და y ღერძი ავიღოთ Δ ღერძის მართობულად (ნახ. 11). ნახაზიდან ადვილად მიიღება შემდეგი დამოკიდებულებანი:



ნახ. 11.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta, \\ y &= \rho \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{2}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ x ღერძის შეთავსება OM წრფესთან რჩება ძალაში, თუ x-ს მოვაბრუნებთ $\vartheta+2k\pi$ კუთხეზე (როცა $\vartheta>0$) ან $\vartheta-2k\pi$ კუთხეზე (როცა $\vartheta<0$).

ამრიგად ϑ და r სიდიდეები იცვლებიან $(-\infty, \infty)$ შუალედში.

§ 2. კოორდინატების უშუალო გამოყენება

1. მონაკვეთის სიგრძე და ალგებრული მნიშვნელობა. განვიხილოთ A და B წერტილებით განსაზღვრული მონაკვეთი კოორდინატთა x ღერძზე. A და B წერტილების კოორდინატები აღვნიშნოთ x_1-ით და x_2-ით შესაბამად, ე. ი. $A=(x_1)$, $B=(x_2)$. მე-12 ნახაზიდან აშკარაა, რომ, თუ A წერტილი B წერტილის მარცხნივაა, მაშინ $|AB|=x_2-x_1$, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში (ნახ. 12 ა)

$$|AB| = -(x_2-x_1).$$

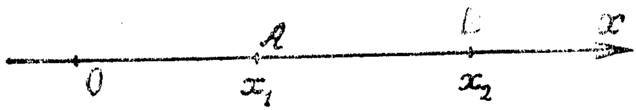
მეორე მხრივ ცნობილია, რომ

$$|x_2-x_1|=\pm(x_2-x_1).$$

ამრიგად გვექნება

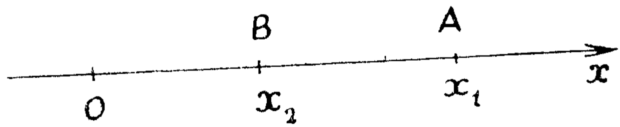
$$|AB|=|x_2-x_1|. \tag{3}$$

ამ ფორმულით განისაზღვრება ღერძზე მდებარე მონაკვეთის სიგრძე ბოლოების წერტილების კოორდინატების საშუალებით. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, x_2-x_1 დამახასიათებელია ღერძზე მდებარე



ნახ. 12.

მონაკვეთისათვის. ამ რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა თვით მონაკვეთის სიგრძის ტოლია (ფორმ. 3), მისი ნიშანი კი გვიჩვენებს



ნახ. 12 ა.

A და B წერტილებიდან რომელი უფრო მარცხნივაა. ამ რიცხვს ეწოდება მ ო ნ ა კ ვ ე თ ი ს ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა და აღინიშნება AB-თი. ამრიგად

$$AB=x_2-x_1. \tag{4}$$

ამ ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს მონაკვეთის ალგებრული მნიშვნელობის შემდეგი თვისება

$$AB=-BA. \tag{5}$$

განვიხილოთ ღერძზე მდებარე ორი მონაკვეთი AB და BC. აქ მეორე მონაკვეთის საწყისი წერტილი არის პირველი მონაკვეთის ბოლო წერტილი. ასეთი ორი მონაკვეთის ერთობლიობას ეწოდება მონაკვეთთა მიმდევრობა. A, B, C წერტილთა კოორდინატები შესაბამად აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3-ით. (4) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$AB=x_2-x_1,$$
$$BC=x_3-x_2.$$

ამ ორი ტოლობის შეკრება მოგვცემს

$$AB+BC=x_3-x_1.$$

მეორე მხრივ, იმავე (4) ფორმულის თანახმად,

$$AC=x_3-x_1.$$

ამ ორი ტოლობის შედარებით კი მივიღებთ

$$AB+BC=AC. \tag{6}$$

ამ ფორმულით გამოისახება მიმდევრობით აღებული ორი მონაკვეთის ალგებრულ მნიშვნელობათა შეკრების კანონი.

ეს კანონი ინდუქციის წესით ვრცელდება მიმდევრობით აღებულ ღერძზე მდებარე მონაკვეთთა ნებისმიერი რიცხვისათვის. ეს კანონი ყალიბდება შემდეგნაირად: ღ ე რ ძ ზ ე მ ი მ დ ე ვ რ ო ბ ი თ ა ღ ე ბ უ ლ ი მ ო ნ ა კ ვ ე თ ე ბ ი ს ა ლ გ ე ბ რ უ ლ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა თ ა ჯ ა მ ი უ დ რ ი ს ი ს ე თ ი მ ო ნ ა კ ვ ე თ ი ს ა ლ გ ე ბ რ უ ლ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა ს, რ ო მ ლ ი ს ს ა წ ყ ი ს ი წ ე რ ტ ი ლ ი პ ი რ ვ ე ლ ი მ ო ნ ა კ ვ ე თ ი ს ს ა წ ყ ი ს ი წ ე რ ტ ი ლ ი ა, ხ ო ლ ო ბ ო ლ ო წ ე რ ტ ი ლ ი უ კ ა ნ ა ს კ ნ ე ლ ი მ ო ნ ა კ ვ ე თ ი ს ბ ო ლ ო წ ე რ ტ ი ლ ი. მონაკვეთების მიმდევრობის ეს თვისება აღმოჩენილ იქნა შალის[1] მიერ, ამიტომ ზემოაღნიშნული შეკრების კანონი ცნობილია შალის დებულების სახელწოდებით.

2. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. განვიხილოთ A და B წერტილებისაგან განსაზღვრული მონაკვეთი სიბრტყეზე და მოვძებნოთ ამ მონაკვეთზე ისეთი M წერტილი, რომელიც გაყოფს მას λ ფარდობით, ე. ი. M უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას (ნახ. 13)

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\lambda.$$

გავატაროთ A, M, B წერტილებიდან y ღერძის პარალელური წრფეები x ღერძის გადაკვეთამდე. ეს თანაკვეთის წერტილები შესაბამად აღვნიშნოთ a, m, b-თი.

რადგან პარალელური წრფეები პროპორციულ მონაკვეთებს მოკვეთენ AB და ab წრფეებზე, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი დამოკიდებულება

---

[1] შალი — ფრანგი მათემატიკოსი (1793—1880).

$$\lambda = \frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|am|}{|mb|}.$$

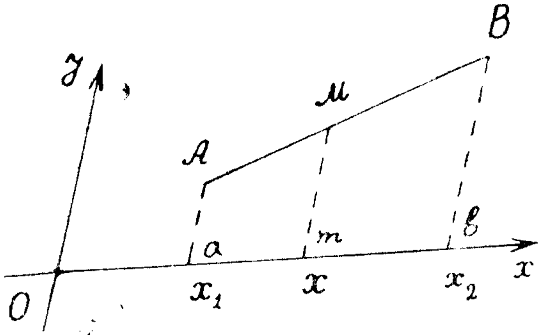
ადვილი შესამჩნევია, რომ am და mb მონაკვეთების ალგებრულ მნიშვნელობებს ერთნაირი ნიშანი ექნებათ (ჩვენს ნახაზზე ისინი დადებითია), ამიტომ

$$\frac{|am|}{|mb|} = \frac{am}{mb}.$$

ამრიგად,

$$\frac{am}{mb} = \lambda.$$

მეორე მხრივ, თანახმად (4) ფორმულისა, შეგვიძლია დავწეროთ:



ნახ. 13.

$$am = x - x_1,$$
$$mb = x_2 - x.$$

შევიტანოთ am და mb-ს ეს მნიშვნელობანი წინა ტოლობაში, მივიღებთ.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

აქედან x-ის ამოხსნა მოგვცემს

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

ანალოგიურად გამოვთვლით y კოორდინატს და საბო-
ლოოდ გვექნება:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad (7)$$
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

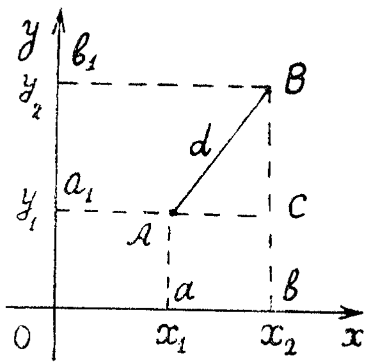
ამ ფორმულებით განისაზღვრება AB მონაკვეთის ისეთი წერტილის კოორდინატები, რომელიც AB მონაკვეთს გაყოფს λ ფარდობით. იმ შემთხვევაში, როცა M წერტილი მონაკვეთის შუაწერტილია, ე. ი. როცა $AM=MB$, მაშინ $\lambda=1$ და (7) ფორმულებიდან (მასში λ-ს ნაცვლად 1-ის ჩასმით) მივიღებთ მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებს:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad (8)$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3. მანძილი ორ წერტილს შორის მართკუთხა კოორდინატებში (სიბრტყეზე). ვთქვათ, მოცემულია ორი წერტილი:

$A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$.

გავატაროთ A და B წერტილებიდან x და y ღერძების პარალელური წრფეები შესაბამად y და x ღერძების თანაკვეთამდე. აღვნიშნოთ ეს თანაკვეთის წერტილები a-თი და b-თი x ღერძზე და a_1-ით და b_1-ით y ღერძზე (ნახ. 14). ნახაზიდან აშკარაა (რადგან ABC სამკუთხედი მართკუთხაა), რომ ორ მოცემულ წერტილს შორის მანძილის კვადრატი გამოისახება შემდეგი ტოლობით



ნახ. 14.

$$d^2=|AB|^2=|AC|^2+|CB|^2.$$

მეორე მხრივ, (3) ფორმულის თანახმად,

$$|AC|=|ab|=|x_2-x_1|,$$
$$|CB|=|a_1b_1|=|y_2-y_1|.$$

ამრიგად,

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2.$$

რადგან

$$|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2,$$
$$|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2,$$

ამიტომ მანძილის კვადრატისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2. \tag{9}$$

ხოლო თვით მანძილი უკანასკნელი ტოლობიდან განისაზღვრება (კვადრატული ფესვის ამოღებით) და გვექნება

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{10}$$

4. სამკუთხედის ფართობი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. ვთქვათ, მოცემულია სამკუთხედის წვეროები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში:

$$A=(x_1,\ y_1),\ B=(x_2,\ y_2),\ C=(x_3,\ y_3).$$

პირველად განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა A წერტილი ორ დანარჩენ წერტილზე უფრო ახლოსაა x ღერძთან, ხოლო B წერტილი უფრო შორსაა y ღერძიდან, ვიდრე დანარჩენი წერტილები. გამოვთვალოთ ამ სამი წერტილით განსაზღვრული სამკუთხედის ფართობი; ამისათვის გავატაროთ სამკუთხედის წვეროებზე x და y კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები შესაბამად y და x ღერძების თანაკვეთამდე. ეს თანაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ a, b, c-თი x ღერძზე და a_1, b_1, c_1-ით y ღერძზე. გარდა ამისა, გატარებული პარალელურების (ზოგიერთი) ურთიერთთანაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ D-თი და E-თი (ნახ. 15).

სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ სამკუთხედის ფართობის ტრიგონომეტრიული ფორმულა

$$S=\frac{1}{2}\,|AB|\cdot|AC|\sin\varphi.$$

თუ აღვნიშნავთ (ნახ. 15)

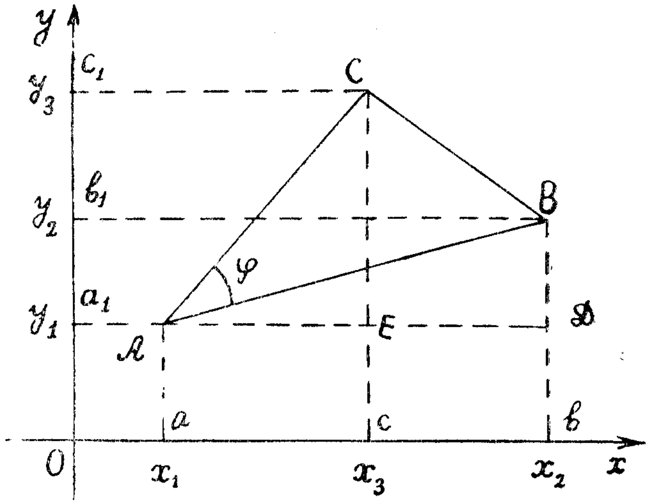
$$\alpha_1=\angle BAD,\ \alpha_2=\angle CAD,$$

მაშინ გვექნება

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$$

(ვგულისხმობთ, რომ B წერტილი უფრო ახლოსაა x ღერძთან, ვიდრე C წერტილი, როგორც ეს ჩვენს ნახაზზეა). აქედან

$$\sin\varphi=\sin(\alpha_2-\alpha_1)=\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\sin\alpha_1.$$



ნახ. 15.

ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$\sin\alpha_1=\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{a_1b_1}{|AB|},\quad \cos\alpha_1=\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{ab}{|AB|},$$

$$\sin\alpha_2=\frac{EC}{|AC|}=\frac{a_1c_1}{|AC|},\quad \cos\alpha_2=\frac{AE}{|AC|}=\frac{ac}{|AC|}.$$

ამრიგად, $\sin\varphi$ ასე წარმოგვიდგება

$$\sin\varphi=\frac{ab\cdot a_1c_1-ac\cdot a_1b_1}{|AB|\cdot|AC|}.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმა ფართობის ფორმულაში მოგვცემს

$$S=\frac{1}{2}(ab\cdot a_1c_1-ac\cdot a_1b_1). \tag{11}$$

შევიტანოთ ამ ტოლობაში ab, ac, a_1b_1, a_1c_1-ის შემდეგი მნიშვნელობები (რაც ნახაზიდან აშკარაა):

$$ab=x_2-x_1,\ \ ac=x_3-x_1,$$
$$a_1b_1=y_2-y_1,\ \ a_1c_1=y_3-y_1.$$

მივიღებთ სამკუთხედის ფართობის გამოსახულებას წვეროების კოორდინატებში

$$S=\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]. \tag{12}$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ფორმულის გამოყვანის დროს A, B, C წერტილები სპეციალური მიმდევრობით ავიღეთ. იმისათვის, რომ მივიღოთ ფორმულები ამ წერტილების სხვანაირი განლაგებისათვის, საჭირო იქნება მხოლოდ (12) ფორმულაში კოორდინატების ინდექსების ურთიერთშენაცვლება; მაგალითად, თუ B და C წერტილებს ურთიერთშევანაცვლებთ, მაშინ ფართობის შესაბამი ფორმულა მიიღება (12) ფორმულიდან მასში 2 და 3 ინდექსების ურთიერთშენაცვლებით. გვექნება

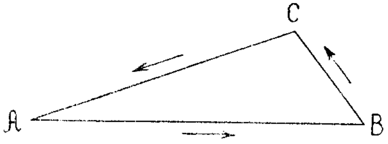
$$S=\frac{1}{2}\left[(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_1)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right].$$

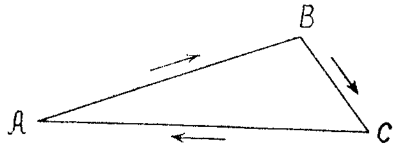
როგორც ჩანს, ამ შემთხვევაში, სამკუთხედის ფართობის ფორმულა განსხვავდება (12) ფორმულისაგან მხოლოდ ნიშნით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა დანარჩენი ვარიანტი სამკუთხედის ფართობისათვის მოგვცემს იმავე (12) ფორმულას ან მისგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავებულს. ამრიგად, ნებისმიერი სამკუთხედის ფართობი განისაზღვრება (12) ფორმულით. თუ ამ ფორმულით მიღებული S რიცხვი დადებითია, მაშინ იგი თვითონ იქნება სამკუთხედის ფართობი, ხოლო თუ უარყოფითია, მაშინ მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა იქნება სამკუთხედის ფართობი. როგორც ზემოაღწერილიდან ჩანს. (12) ფორმულით განსაზღვრული რიცხვი დადებითია, თუ სამკუთხედის წვეროები ზემოაღნიშნული მიმდევრობით არის აღებული. იგი განსხვავდება მეორე ვარიანტისაგან (ე. ი. როცა B და C წერტილი ურთიერთშენაცვლებულ იქნა) იმით, რომ იქ სამკუთხედის აღწერა, ABC მიმდევრობით, ხდება საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 16), ხოლო მეორე შემთხვევაში კი საათის ისრის ბრუნვის თანხვდენილად (ნახ. 16 ა).

ამასთან დაკავშირებით შემოდის სამკუთხედის მოგეზულობის (ორიენტაციის) ცნება. პირველ შემთხვევაში ABC სამკუთხედს ეწოდება მარჯვენა მოგეზულობის სამკუთხედი, მეორე

შემთხვევაში კი—მარცხენა მოგეზულობის სამკუთხედი. ამ შეთანხმებიდან ჩანს, რომ პირველ შემთხვევაში სამკუთხედი მოგეზულია ისევე, როგორც კოორდინატთა სისტემა, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი კოორდინატთა სისტემის მოგეზულობის საწინააღმდეგოდ. ამრიგად, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: (12) ფორ-



ნახ. 16.



ნახ. 16 ა.

მულით განსაზღვრული S რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა გამოსახავს ნებისმიერად აღებული სამკუთხედის ფართობს. მისი ნიშანი კი გვიჩვენებს სამკუთხედის მოგეზულობას. თუ S დადებითია, სამკუთხედი მოგეზულია ისევე, როგორც კოორდინატთა სისტემა, თუ S უარყოფითია, სამკუთხედი მოგეზულია კოორდინატთა სისტემის მოგეზულობის საწინააღმდეგოდ.

ანალიზურ გეომეტრიაში (12) ფორმულით განსაზღვრულ S რიცხვს უწოდებენ მოგეზული სამკუთხედის ფართობს ან, უბრალოდ, სამკუთხედის ფართობს ანალიზური გეომეტრიის თვალსაზრისით.

შენიშვნა. ვინც დეტერმინანტის თვისებები იცის (თუნდაც მხოლოდ II და III რიგის დეტერმინანტებისათვის). მისთვის ადვილი შესამჩნევია, რომ (12) ფორმულა შეიძლება ასე გადავწეროთ

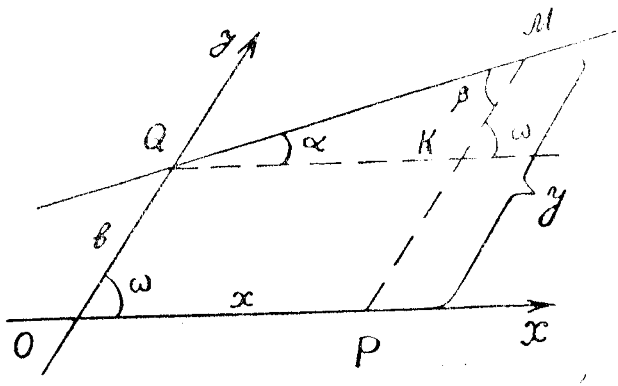
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი ადვილად მიიღება შემდეგი ტოლობიდან

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

ამისათვის საკმარისია ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მოთავსებული III რიგის დეტერმინანტის პირველი სტრიქონი გამოვაკლოთ მიმდევრობით მეორე და მესამე სტრიქონს და ამის შემდეგ დავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სვეტის მიხედვით.

1. წრფის კანონიკური განტოლება. განვიხილოთ სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებული წრფე. მას ექნება გარკვეული მდებარეობა კოორდინატთა სისტემის მიმართ. პირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წრფე არ არის y ღერძის პარალელური, ე. ი. ვიხილავთ ისეთ შემთხვევას, როცა წრფე თანაიკვეთება y ღერძთან.



ნახ. 17.

b-თი აღვნიშნოთ ალგებრული მნიშვნელობა იმ მონაკვეთისა, რომელსაც წრფე მოკვეთს y ღერძზე სათავიდან. გარდა ამისა, α-თი აღვნიშნოთ წრფის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხე (ნახ. 17). ნახაზიდან აშკარაა, რომ წრფის ნებისმიერი წერტილისათვის, და მხოლოდ მისთვის, ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას

$$\frac{|KM|}{|OP|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

მეორე მხრივ, იმავე ნახაზიდან ჩანს, რომ:

$$\omega-\alpha=\beta,$$
$$|KM|=y-b,$$
$$|OP|=x.$$

ამრიგად მივიღებთ

$$\frac{y-b}{x}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}.$$

აქედან

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}\cdot x+b.$$

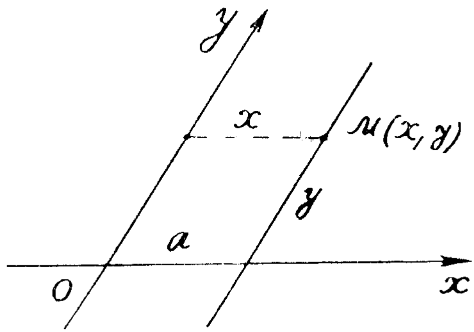
შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$k=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}. \qquad (15)$$

მივიღებთ

$$y=kx+b. \qquad (16)$$

ამრიგად, აღებული წრფის ყველა წერტილის კოორდინატები, და მხოლოდ ისინი, აკმაყოფილებენ (16) განტოლებას, ე. ი. ეს განტოლება დამახასიათებელია მხოლოდ წრფის წერტილთათვის. ამიტომ ამ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება. k-ს, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ იმ კუთხეზე, რომელსაც წრფე ადგენს



ნახ. 18.

x ღერძთან, ეწოდება კუთხური კოეფიციენტი. იგი განისაზღვრება (15) ფორმულით და α-ს ცვლით შეიძლება მიიღოს ნამდვილი რიცხვის ნებისმიერი მნიშვნელობა. b-ს, რომელიც y ღერძზე შედგენილი მონაკვეთის ალგებრული მნიშვნელობაა, ეწოდება მონაკვეთი y ღერძზე. თუმცა ეს (16) განტოლება შედგენილ იქნა α მახვილი კუთხის შემთხვევაში, მაგრამ ანალოგიური გზით იმავე შედეგთან მივალთ, როცა α ბლაგვია. იმ შემთხვევაში, როცა კოორდინატთა სისტემა მართკუთხაა, ე. ი. როცა $\omega=\frac{\pi}{2}$, მაშინ

$$\sin(\omega-\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

ამიტომ, ამ შემთხვევაში, (15) ფორმულა მოგვცემს

$$k=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (17)$$

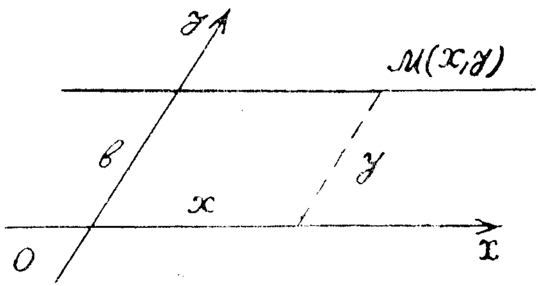
ამრიგად, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში კუთხური კოეფიციენტი უდრის იმ კუთხის ტანგენსს, რომელსაც წრფე ადგენს x ღერძთან.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა წრფე პარალელურია y ღერძისა და x ღერძზე ჩამოჭრის a მონაკვეთს (ნახ. 18). აღებული წრფის ნებისმიერი M წერტილისათვის, და მხოლოდ მისთვის, ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას

$$x=a. \tag{18}$$

ასეთია y ღერძის პარალელური წრფის განტოლება.

აქ განხილული ორივე განტოლებისათვის დამახასიათებელია ის ფაქტი, რომ ორივე განტოლება წრფივია (პირველი ხარისხის). რადგან (16) განტოლება ამოხსნილია y-ის მიმართ, ამიტომ მას



ნახ. 19.

უწოდებენ წრფის ამოხსნილ ან დაყვანილ განტოლებას. ხშირად მას კანონიკურ განტოლებასაც უწოდებენ.

ჩვენ ცალკე განვიხილეთ y ღერძის პარალელური წრფე. მის ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ კიდევ x ღერძის პარალელური წრფე. თუ ეს წრფე y ღერძზე მოკვეთს b მონაკვეთს, მაშინ მისი განტოლება იქნება (ნახ. 19)

$$y=b. \tag{19}$$

ეს განტოლება შეიძლება აგრეთვე მიღებული იქნეს (16) განტოლებიდან მასში $k=0$ ჩასმით, რაც შეესაბამება $\alpha=0$ (ე. ი. x ღერძის პარალელურ წრფეს).

2. წრფის ზოგადი განტოლება. ზემოთ აღნიშნული გვქონდა, რომ ნებისმიერად აღებული წრფის განტოლება წრფივია. ახლა

დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი წრფივი განტოლება არის წრფის განტოლება. განვიხილოთ ნებისმიერი წრფივი განტოლება

$$Ax+By+C=0, \tag{20}$$

სადაც A, B, C ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, ოღონდ A და B ერთდროულად არ უდრის ნულს. A და B ერთდროულად ნული რომ იყოს, მაშინ (20) განტოლებიდან მივიღებთ $C=0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ არავითარი განტოლება არ გვექნებოდა, ე. ი. ზემოაღნიშნული შეზღუდვა A და B კოეფიციენტებისა უბრალოდ იმის მოთხოვნაა, რომ (20) განტოლება იყოს განსაზღვრული. ჯერ შევნიშნოთ, რომ განტოლება არსებითად არ შეიცვლება, თუ მას გადავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ რაიმე λ მუდმივ რიცხვზე. მართლაც,

$$\lambda(Ax+By+C)=0$$

განტოლებას აკმაყოფილებს x და y-ის ის მნიშვნელობანი, და მხოლოდ ის მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ (20) განტოლებას. ახლა განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $B\neq 0$. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია (20) განტოლება ამოვხსნათ y-ის მიმართ (რაც მოხდება ამ განტოლების $\frac{1}{B}$-ზე გამრავლებით). გვექნება

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

თუ აღვნიშნავთ:

$$k=-\frac{A}{B}, \tag{21}$$

$$b=-\frac{C}{B}, \tag{22}$$

მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$y=kx+b.$$

რაც წარმოადგენს წრფის განტოლებას კანონიკური სახით (მე-16 განტ.).

2) $B=0$. ამ შემთხვევაში (20) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$Ax+C=0.$$

აქედან x-ის ამოხსნა მოგვცემს

$$x=-\frac{C}{A}.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$a=-\frac{C}{A}, \tag{23}$$

მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$x=a,$$

რაც წარმოადგენს y ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას (განტ. 18). ამრიგად მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან დასკვნას.

დასკვნა. ნებისმიერი წრფის განტოლება არის წრფივი და ნებისმიერი წრფივი განტოლება არის წრფის განტოლება.

რადგან (20) განტოლებას აქვს წრფივი განტოლების ზოგადი სახე, ამიტომ მას ეწოდება წრფის ზოგადი განტოლება. აქვე შევნიშნოთ, რომ, თუ ორი წრფივი განტოლება ერთიმეორისაგან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით განსხვავდება, ე. ი. თუ შესაბამად პროპორციული კოეფიციენტები აქვთ, მაშინ ერთი განტოლება მიიღება მეორისაგან მუდმივზე გადამრავლებით და, მაშასადამე, ერთი და იგივე წრფეს განსაზღვრავს. პირუკუ, თუ ორი წრფივი განტოლება ერთი და იგივე წრფეს განსაზღვრავს, მაშინ ისინი მუდმივი მამრავლით იქნებიან განსხვავებული ერთიმეორისაგან, ე. ი. ამ განტოლებათა კოეფიციენტები შესაბამად პროპორციული იქნება. ამრიგად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა.

დასკვნა. იმისათვის, რომ ორი წრფივი განტოლება განსაზღვრავდეს ერთი და იგივე წრფეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი კოეფიციენტები შესაბამად იყოს პროპორციული.

3. წრფის აგება კოორდინატთა სისტემაში ზოგადი განტოლების მიხედვით. ვთქვათ, მოცემულია წრფე ზოგადი განტოლებით

$$Ax+By+C=0.$$

საჭიროა მისი ნახაზის შედგენა კოორდინატთა სისტემაში. ამ განტოლების მიხედვით განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები: 1) $A\neq0$; $B\neq0$; $C\neq0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ წრფე არ არის პარალელური კოორდინატთა ღერძების მიმართ (რადგან x ღერძის პარალელური წრფისათვის $A=0$ და y ღერძის პარალელური წრფისათვის $B=0$). ამიტომ იგი თანაიკვეთება x და y ღერძებთან. ვთქვათ x

და y ღერძებზე მონაკვეთები შესაბამად არის a და b. თანაკვეთის P და Q წერტილები განსაზღვრული იქნება შემდეგნაირად:

$$P=(a,\ 0),$$
$$Q=(0,\ b).$$

ახლა მთავარია მხოლოდ a და b რიცხვების განსაზღვრა მოცემული განტოლების მიხედვით. რადგან P და Q წერტილები წრფეს ეკუთვნის, ამიტომ მათი კოორდინატები დააკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. გვექნება:

$$A\cdot a+B\cdot 0+C=0,$$
$$A\cdot 0+B\cdot b+C=0.$$

აქედან მივიღებთ ღერძებზე მონაკვეთებისათვის, ე. ი. a და b-სათვის შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$a=-\frac{C}{A},\qquad b=-\frac{C}{B}. \tag{24}$$

ამრიგად, წრფის ღერძებთან თანაკვეთის P და Q წერტილები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$P=\left(-\frac{C}{A},\ 0\right),$$

$$Q=\left(0,\ -\frac{C}{B}\right).$$

ამ წერტილებს განვსაზღვრავთ ღერძებზე და მათზე გავატარებთ წრფეს. მივიღებთ მოცემული წრფის ნახაზს (ნახ. 20).

2) $A=0$. ამ შემთხვევაში განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$By+C=0.$$

აქედან

$$y=-\frac{C}{B}=b.$$

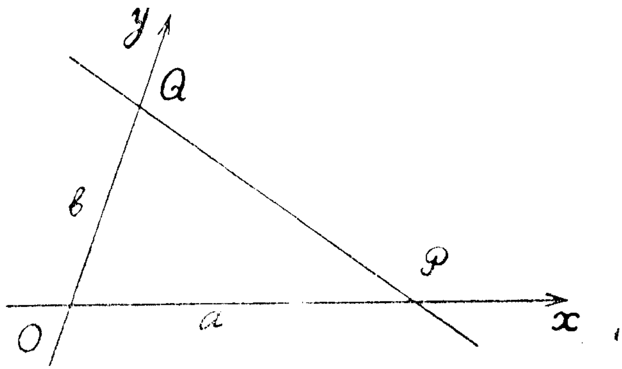
ეს კი x ღერძის პარალელური წრფეა, რომელიც y ღერძზე მოკვეთს b-ს ტოლ მონაკვეთს (ალგებრული მნიშვნელობით). ნახაზის ასაგებად უნდა განვსაზღვროთ y ღერძზე $Q(0,\ b)$ წერტილი და ამ

წერტილიდან გავატაროთ x ღერძის პარალელური წრფე (ნახ. 19). სრულიად ანალოგიურად აიგება y ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც შეესაბამება $B=0$ შემთხვევას (ნახ. 18).

3) $C=0$. ამ შემთხვევაში წრფის განტოლებას ექნება სახე

$$Ax+By=0. \tag{25}$$

პირდაპირ ჩანს, რომ განტოლებას აკმაყოფილებს კოორდინატთა



ნახ. 20.

სისტემის სათავის 0, 0 კოორდინატები, ე. ი. წრფე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე. ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი ყოველი წრფის განტოლებისათვის $C=0$. მართლაც, თუ აღებული ზოგადი განტოლებით განსაზღვრული წრფე გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე, მაშინ ეს განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს 0, 0 კოორდინატებით. გვექნება

$$A\cdot 0+B\cdot 0+C=0.$$

აქედან კი $C=0$. ამრიგად, კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი ყოველი წრფე განისაზღვრება (25) სახის განტოლებით. ეს განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$y=-\frac{A}{B}x.$$

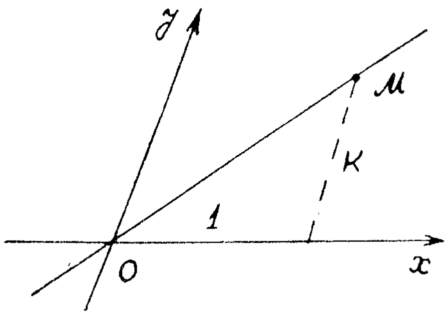
რადგან (იხ. ფორმ. 21)

$$-\frac{A}{B}=k,$$

ამიტომ

$$y=kx. \tag{26}$$

ასეთია კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი წრფის კანონიკური განტოლება, რომელიც შეიძლება მიგვეღო აგრეთვე (16) განტოლებიდან, თუ იქ ჩავსვამდით $b=0$. წრფის ასაგებად, ამ შემთხვევაში, საჭიროა განვსაზღვროთ წრფეზე მდებარე ერთი რომელიმე წერტილი, მაგალითად, $x=1$-ის შესაბამი. ამისათვის (26) განტოლებაში უნდა ჩავსვათ $x=1$. მივიღებთ $y=k$. ამრიგად განისაზღვრება წრფეზე მდებარე M წერტილი და გვექნება



ნახ. 21.

$$M=(1, k).$$

ამ წერტილს ავაგებთ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, შევაერთებთ მას კოორდინატთა სისტემის სათავესთან (რადგან წრფე გადის სათავეზე) და მივიღებთ მოცემული წრფის საძიებელ ნახაზს (ნახ. 21).

4) $A=0$, $C=0$. ამ შემთხვევაში განტოლება მიიღებს სახეს

$$By=0.$$

აქედან (რადგან $B \neq 0$)

$$y=0. \tag{27}$$

ეს ტოლობა ახასიათებს x ღერძის წერტილებს, და მხოლოდ მათ, ე. ი. (27) განტოლება არის x ღერძის განტოლება. ანალოგიურად

$$x=0 \tag{28}$$

იქნება y ღერძის განტოლება.

4. წრფის განტოლება კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთებში. განვიხილოთ წრფე, რომელიც არ გადის კოორდინატთა სისტემის

სათავეზე. ასეთი წრფის ზოგად განტოლებაში შემავალი C კოეფიციენტი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან (ე. ი. $C \neq 0$). გავყოთ წრფის ზოგადი განტოლება (განტ. 20) C-ზე, გვექნება

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-1=0.$$

გამოვიყენოთ კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთების (24) ფორმულები, მივიღებთ:

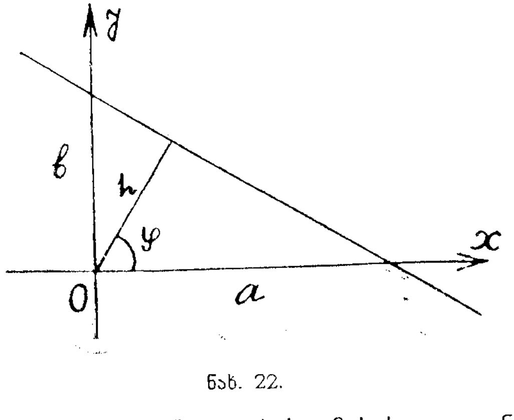
$$-\frac{A}{C}=\frac{1}{a}, \quad -\frac{B}{C}=\frac{1}{b}.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა წინა განტოლებაში მოგვცემს

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{29}$$

ამ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთებში.

ნ. წრფის ნორმალური განტოლება. ამ საკითხს განვიხილავთ მხოლოდ მართკუთხა სისტემისათვის. განვიხილოთ წრფე, რომელიც კოორდინატთა სისტემის სათავეზე არ გადის. დავუშვათ



ნახ. 22.

წრფეზე მართობი კოორდინატთა სისტემის სათავიდან. ამ მართობის სიგრძე აღვნიშნოთ h-ით. კუთხე, რომელსაც ეს მართობი შეადგენს x ღერძთან, აღვნიშნოთ φ-თი. წრფის მიერ ღერძებიდან ჩამოჭრილი a, b მონაკვეთები გამოვსახოთ h და φ სიდიდეებით (ნახ. 22). ნახაზიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$a=\frac{h}{\cos\varphi}, \ b=\frac{h}{\sin\varphi}.$$

a და b-ს ამ მნიშვნელობების ჩასმა (29) განტოლებაში, გამარტივების შემდეგ, მოგვცემს

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h = 0. \tag{30}$$

ეს განტოლება გამოყვანილია წრფის ისეთი მდებარეობისათვის, რომელიც ჩვენს ნახაზზეა წარმოდგენილი. ანალოგიური გამოთვლებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ წრფის სხვა მდებარეობისათვის (მაგალითად, როცა a-სა და b-ს სხვადასხვა ნიშნები აქვს) აგრეთვე (30) განტოლება მიიღება. ამ განტოლებას ეწოდება **წ რ ფ ი ს ნ ო რ მ ა ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა.**

6. ზოგადი განტოლების დაყვანა ნორმალურ სახეზე. დავუშვათ, რომ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წრფის ზოგადი განტოლება

$$Ax + By + C = 0. \tag{31}$$

მოითხოვება, რომ ეს განტოლება დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე, ე. ი. შემდეგ სახეზე

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h = 0.$$

რადგან ეს ორი უკანასკნელი განტოლება ერთი და იგივე წრფის განტოლებებია, ამიტომ ერთიმეორისაგან მხოლოდ მუდმივი (ნულისაგან განსხვავებული) მამრავლით უნდა განსხვავდებოდნენ, ე. ი. მეორე უნდა მივიღოთ პირველიდან რაიმე λ მუდმივ რიცხვზე გადამრავლებით. გვექნება

$$\lambda (Ax + By + C) = 0.$$

ეს განტოლება რომ (30) განტოლების სახისა იყოს, ამისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი ტოლობანი:

$$\lambda A = \cos \varphi, \tag{I}$$
$$\lambda B = \sin \varphi, \tag{II}$$
$$\lambda C = -h. \tag{III}$$

პირველი ორი ტოლობის კვადრატში ამაღლება და შეკრება მოგვცემს

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

აქედან

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{32}$$

λ-ს ნიშნის განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ მესამე ტოლობა. რადგან $h > 0$, ამიტომ მესამე ტოლობიდან გვექნება $\lambda C < 0$, ე. ი. λ-ს აქვს C ნიშნის საწინააღმდეგო ნიშანი. ამრიგად, λ მამრავლი სავსებით განსაზღვრულია. ზოგადი განტოლების λ-ზე გადამრავ-

ლება მოგვცემს ნორმალურ განტოლებას. ამრიგად, ზოგადი განტოლებიდან მიღებულ ნორმალურ განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0, \tag{33}$$

სადაც მნიშვნელის ნიშანი აიღება C ნიშნის საწინააღმდეგოდ. λ მამრავლს ეწოდება მ ა ნ ო რ მ ა ლ ე ბ ე ლ ი მ ა მ რ ა ვ ლ ი. შევნიშნავთ, რომ (33) განტოლებას ეწოდება ნორმალური იმ შემთხვევაშიაც, როცა $C=0$. ოღონდ ამ შემთხვევაში მნიშვნელის ნიშანი ნებისმიერია.

7. წრფის განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში. დავუშვათ, რომ წრფე მოცემულია ზოგადი განტოლებით

$$Ax+By+C=0.$$

ავიღოთ ამ წრფეზე რაიმე $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი. x_0, y_0 კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს წრფის განტოლებას. გვექნება

$$Ax_0+By_0+C=0.$$

გამოვაკლოთ ეს უკანასკნელი ტოლობა წინა ტოლობას. მივიღებთ

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{34}$$

ეს განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{x-x_0}{B}=\frac{y-y_0}{-A}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} L&=B,\\ M&=-A. \end{aligned} \tag{35}$$

ამ აღნიშვნების თანახმად, წრფის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}. \tag{36}$$

ამ განტოლებაში შემავალი L და M განსაზღვრავს კუთხურ კოეფიციენტს და, მაშასადამე, წრფის მიმართულებასაც. მართლაც, (35) ფორმულიდან გვექნება

$$-\frac{A}{B}=\frac{M}{L}.$$

მეორე მხრივ, თანახმად (21) ფორმულისა,

$$-\frac{A}{B}=k.$$

ამრიგად,

$$\frac{M}{L}=k. \tag{37}$$

(36) განტოლებაში შემავალ L და M სიდიდეებს ეწოდება წ რ ფ ი ს მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ ი. თვით წრფის განტოლებას ამ სახით ეწოდება წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი ს კ ო ე ფ ი ც ი ე ნ ტ ე ბ შ ი. ამ განტოლებაში შემავალი x_0, y_0—წრფის ერთი განსაზღვრული წერტილის კოორდინატებია. x, y—წრფის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია. მათი ცვლით მიიღება წრფის ყოველი წერტილის კოორდინატები. სხვანაირად რომ ვთქვათ, x, y-ის ცვლა განსაზღვრავს შესაბამი წერტილის მოძრაობას წრფეზე. ამიტომ x, y-ს ეწოდება მ ი მ დ ი ნ ა რ ე კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი, მათ შესაბამ წერტილს კი მ ი მ დ ი ნ ა რ ე წ ე რ ტ ი ლ ი.

8. წრფის განტოლება პარამეტრული სახით. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\frac{x-x_0}{L}=t.$$

თანახმად (36) განტოლებისა, გვექნება

$$\frac{y-y_0}{M}=t.$$

ორი უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x&=x_0+tL,\\ y&=y_0+tM. \end{aligned} \tag{38}$$

აქ შემავალი t, რომელიც განსაზღვრულია ზემოთ მოყვანილი აღნიშვნით, დამოკიდებულია x-ზე. როცა x ღებულობს მნიშვნელობებს $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, მაშინ t სიდიდეც მიიღებს მნიშვნელობებს $-\infty$-დან $+\infty$-მდე და, პირუკუ. (38) ტოლობანი გვიჩვენებს, რომ t-ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება x, y-ის მნიშვნელობათა ერთი გარკვეული წყვილი. ამ უკანასკნელს კი შეესაბამება ერთი გარკვეული წერტილი წრფეზე, ე. ი. t-ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთი გარკვეული წერტილი წრფეზე. t-ს სრული ცვლით ($-\infty$-დან $+\infty$-მდე) განისაზღვრება წრფის ყველა წერტილი ან, სხვანაირად, t-ს ცვლას შეესაბამება წერტილის მოძრაობა წრფეზე; ამგვარად აღიწერება წრფე. ამიტომ t-ს ეწოდება წრფის მ ი მ დ ი ნ ა რ ე პ ა რ ა მ ე ტ რ ი. (38) განტოლებათა სისტემას ეწოდება წრფის გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი ს ა ხ ი თ. ამ განტოლებათა სისტემაში შემა-

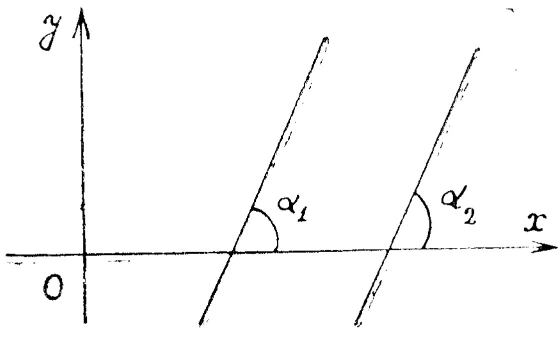
ვალი სხვა სიდიდეები კი ინარჩუნებენ იმავე მნიშვნელობებს, რაც მათ ჰქონდათ (36) განტოლებაში. იმისათვის, რომ (38) განტოლებათა სისტემიდან გადავიდეთ (36) განტოლებაზე, საკმარისია t ამოვხსნათ (38) განტოლებათა სისტემის ორივე განტოლებიდან ცალ-ცალკე და მიღებული მნიშვნელობანი გავუტოლოთ ერთიმეორეს. მივიღებთ (36) განტოლებას.

შენიშვნა. გეომეტრიაში გვხვდება ორნაირი სახის პარამეტრები: ჩ ვ ე უ ლ ე ბ რ ი ვ ი და მ ი მ დ ი ნ ა რ ე. ჩვეულებრივი პარამეტრი ეწოდება ისეთ პარამეტრს, რომლის ცვლა იწვევს თვით გეომეტრიული ნაკვთის მდებარეობის ან ფორმის შეცვლას. მიმდინარე პარამეტრი კი ეწოდება ისეთ პარამეტრს, რომლის ცვლა იწვევს წერტილის მოძრაობას ნაკვთზე. მაგალითად, წრფის კანონიკურ განტოლებაში შემავალი k და b სიდიდეები ჩვეულებრივი პარამეტრებია. მათი ცვლა იწვევს წრფის მდებარეობის შეცვლას კოორდინატთა სისტემის მიმართ. წრფის პარამეტრულ განტოლებაში კი t არის მიმდინარე პარამეტრი. x, y ყველგან, ზემოაღნიშნული წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებაში, მიმდინარე კოორდინატებია.

§ 4. ორი წრფის ურთიერთდამოკიდებულება

ამ საკითხს განვიხილავთ მხოლოდ მართკუთხა სისტემისათვის.

1. ორი წრფის პარალელურობის პირობა. თუ ორი წრფე პარალელურია, მაშინ ისინი ერთი და იგივე კუთხეს შეადგენენ x ღერძ-



ნახ. 23 ა.

თან და, პირუკუ, თუ წრფეები ადგენენ x ღერძთან ერთიმეორის ტოლ კუთხეებს, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურნი იქნებიან. თუ მოცემული წრფეების მიერ x ღერძთან შედგენილ კუთხეებს აღვნიშნავთ α_1-ით და α_2-ით, მაშინ წრფეების პარალელურობისათვის აუცილებელი და საკმარისი იქნება ამ კუთხეების ტოლობა, ე. ი. $\alpha_1 = \alpha_2$ (ნახ. 23 ა). ამ წრფეთა განტოლებები ავიღოთ კანონიკური სახით. გვექნება:

$$y = k_1 x + b_1, \qquad \text{I}$$
$$y = k_2 x + b_2, \qquad \text{II}$$

სადაც k_1 და k_2 კუთხური კოეფიციენტები (17) ფორმულის მიხედვით გამოითვლება:

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $\alpha_1 = \alpha_2$, მაშინ $k_1 = k_2$ და, პირუკუ. ამრიგად, წრფეთა პარალელურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ასე წარმოგვიდგება

$$k_1 = k_2,$$

ე. ი. იმისათვის, რომ მოცემული განტოლებებით განსაზღვრული ორი წრფე პარალელური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი კუთხური კოეფიციენტები იყოს ტოლი.

თუ ორი წრფე ზოგადი განტოლებებით არის მოცემული, ე. ი. თუ წრფეების განტოლებანი შემდეგი სახისაა:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad \text{I}$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad \text{II}$$

მაშინ ჯერ უნდა გამოვთვალოთ წრფეების კუთხური კოეფიციენტები. თანახმად (21) ფორმულისა, გვექნება:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},$$

$$k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

k_1 და k_2-ის ამ მნიშვნელობათა ჩასმა (38) ტოლობაში მოგვცემს წრფეთა პარალელურობის პირობას ზოგადი განტოლებების შესაბამად

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}.$$

აქედან

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (40)$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ ზოგადი განტოლებებით მოცემული ორი წრფე პარალელური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წრფეების განტოლებათა კოეფიციენტების პირველი წყვილი შესაბამად იყოს პროპორციული.

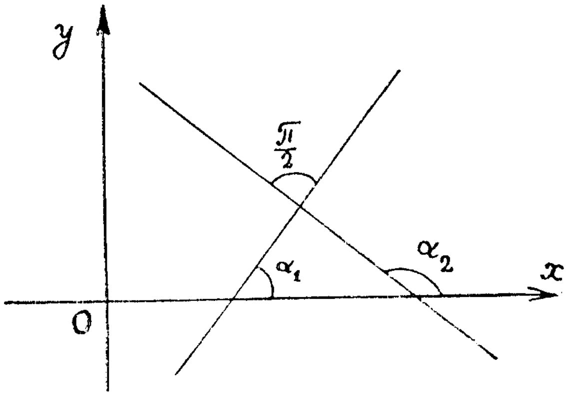
2. ორი წრფის თანამართობულობის პირობა. ამ შემთხვევაშიაც კუთხური კოეფიციენტები გამოითვლება (17) ფორმულის თანახმად. ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ ორი წრფე თანამართობია, მაშინ α_1-სა და α_2-ს შორის განსხვავება უნდა იყოს $\frac{\pi}{2}$ (ნახ. 23 ბ), ე. ი.

$$\alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{2}.$$

აქედან

$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}.$$



ნახ. 23 ბ.

რადგან $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$ და $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$,
ამიტომ

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \tag{43}$$

ან, რაც იგივეა,

$$k_1k_2=-1. \tag{44}$$

ამრიგად, ორი წრფის თანამართობულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი კუთხური კოეფიციენტების ნამრავლი იყოს -1. შევნიშნოთ, რომ (44) ტოლობაში k_1 და k_2 შედიან სიმეტრიულად. მათი გადანაცვლებით არაფერი არ იცვლება. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ პირობის გამოყვანის დროს მნიშვნელობა არა აქვს რომელ წრფეს მივიღებთ პირველ წრფედ.

3. ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა. ორ მოცემულ წრფეს შორის კუთხე აღვნიშნოთ φ-თი. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს კუთხე წარმოდგება α_2-ისა და α_1-ის სხვაობის სახით (ნახ. 24). გვექნება

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \varphi.$$

აქედან

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

რადგან

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = k_2,$$

ამიტომ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (45)$$

ასეთია ორ წრფეს შორის კუთხის ტანგენსის ფორმულა. შევნიშნოთ, რომ, თუ ამ ფორმულაში k_1-სა და k_2-ს გადავანაცვლებთ, ამით გამოსახულება მხოლოდ ნიშანს შეიცვლის. გვექნება

$$-\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

რადგან

$$-\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \varphi),$$

ამიტომ

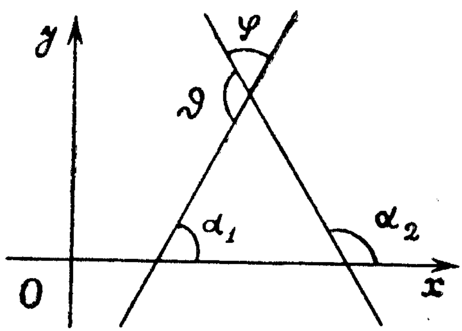
$$\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

აღვნიშნოთ (ნახ. 24)

$$\pi - \varphi = \vartheta.$$

მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \quad (46)$$



ნახ. 24.

სადაც ϑ არის φ კუთხის მოსაზღვრე კუთხე და მაშასადამე განიხილება, როგორც იმავე წრფეთა შორის კუთხე. ეს იმას ნიშნავს, რომ მნიშვნელობა არა აქვს ორი წრფიდან რომელს მივიღებთ პირველ წრფედ. (45) ფორმულა ყოველთვის მოგვცემს ორ მოცემულ წრფეს შორის შედგენილი კუთხეებიდან ერთ რომელიმეს.

1. მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. წრფეთა კონა. ვიცით, რომ მოცემულ წერტილზე შეგვიძლია გავატაროთ უამრავი წრფე. ვთქვათ, საჭიროა შედგენილ იქნას ერთი მათგანის განტოლება; ამისათვის ავიღოთ წრფის ზოგადი განტოლება

$$Ax+By+C=0.$$

ვიცით, რომ ასეთი განტოლებით წარმოდგება სიბრტყის ყოველი წრფე. ისინი მიიღებიან A, B, C კოეფიციენტების ცვლით. შევარჩიოთ A, B, C კოეფიციენტები ისე, რომ მათგან განსაზღვრულმა წრფემ გაიაროს მოცემულ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე; ამისათვის A, B, C ისე უნდა შეირჩეს, რომ M_0 წერტილის x_0, y_0 კოორდინატებმა დააკმაყოფილოს წრფის განტოლება. გვექნება

$$Ax_0+By_0+C=0.$$

გამოვაკლოთ ეს განტოლება წინა განტოლებას. მივიღებთ

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (47)$$

ასეთია მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ამ განტოლებაში A და B ნებისმიერი რიცხვებია. ეს განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს

$$y-y_0=-\frac{A}{B}(x-x_0).$$

რადგან

$$-\frac{A}{B}=k,$$

ამიტომ

$$y-y_0=k(x-x_0), \qquad (48)$$

სადაც k არის წრფის კუთხური კოეფიციენტი. იგი ნებისმიერია. k-ს ცვლით მივიღებთ M_0 წერტილზე გამავალ ყოველ წრფეს. *ერთ მოცემულ წერტილზე გამავალ წრფეთა სიმრავლეს სიბრტყეზე ეწოდება წრფეთა კონა. თვით მოცემულ წერტილს კი—კონის ცენტრი.*

ამრიგად, (48) განტოლებიდან განისაზღვრება წრფეთა კონის ყოველი წრფე k-ს სხვადასხვა მნიშვნელობის შესაბამად. k-ს სრული ცვლით $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, ვღებულობთ კონის ყველა წრფეს. ამიტომ (48) განტოლებას უწოდებენ *წრფეთა კონის განტოლებას*. k-ს ეწოდება *კონის პარამეტრი*.

2. ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. დავუშვათ, მოცემულია ორი წერტილი

$$M_1=(x_1,\ y_1), \quad M_2=(x_2,\ y_2).$$

საძიებელია ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. პირველად დავწეროთ M_1 წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება. ეს განტოლება შედგება (48) განტოლების თანახმად, სადაც x_0, y_0 უნდა შევცვალოთ x_1, y_1-ით (რადგან ამ შემთხვევაში კონის ცენტრის კოორდინატებია x_1, y_1). გვექნება

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

ახლა ისე შევარჩიოთ k პარამეტრი, რომ მისმა შესაბამმა კონის წრფემ გაიაროს მეორე წერტილზედაც; ამისათვის უკანასკნელი განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს M_2 წერტილის x_2, y_2 კოორდინატებით. x, y კოორდინატები რომ შევცვალოთ x_2, y_2-ით, განტოლება დაკმაყოფილდება. გვექნება

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

ამ უკანასკნელი განტოლებიდან ამოიხსნება k;

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

k-ს ამ მნიშვნელობის შეტანა წინა განტოლებაში და მცირე გამარტივება მოგვცემს მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{49}$$

3. ორი წრფის თანაკვეთის წერტილის განსაზღვრა. დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი წრფე ზოგადი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad \mathrm{I}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad \mathrm{II}$$

საძიებელია ამ ორი წრფის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები. თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები, როგორც საერთო წერტილის კოორდინატები, დააკმაყოფილებს ორივე წრფის განტოლებას ერთდროულად, ე. ი. თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს მოცემული წრფეების განტოლებათაგან შედგენილ შემდეგ სისტემას:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{50}$$

ამრიგად, (50) სისტემის ამონახსნი მოგვცემს საძიებელი წერტილის კოორდინატებს.

4. მოცემულ წერტილზე გამავალი, მოცემული წრფისადმი პარალელური და მართობი წრფეების განტოლებანი. ვთქვათ, მოცემულია $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი და წრფე კანონიკური განტოლებით

$$y=kx+b.$$

საძიებელია M_0 წერტილზე გამავალი მოცემული წრფის პარალელური წრფის განტოლება. ჯერ შევადგინოთ M_0 წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება. თანახმად (48) განტოლებისა, გვექნება

$$y-y_0=m(x-x_0),$$

სადაც m არის კონის პარამეტრი. ამავე დროს, როგორც ვიცით, m არის კონის შესაბამი წრფის კუთხური კოეფიციენტი. ისე უნდა შევარჩიოთ m, რომ კონის შესაბამი წრფე იყოს მოცემული წრფის პარალელური; ამისათვის პარალელურობის პირობის თანახმად, საჭიროა $m=k$. ჩავსვათ კონის განტოლებაში m-ის ნაცვლად k. მივიღებთ

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{51}$$

ახლა გამოვიყვანოთ მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული მართობის განტოლება; ამისათვის კონის განტოლებაში m კუთხური კოეფიციენტი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ კონის შესაბამი წრფე იყოს მოცემული წრფის მართობი. ამ შემთხვევაში გამოვიყენებთ მართობულობის პირობას

$$mk=-1,$$

ანუ

$$m=-\frac{1}{k}.$$

m-ის ნაცვლად ამ მნიშვნელობის ჩასმა კონის განტოლებაში მოგვცემს მართობის საძიებელ განტოლებას

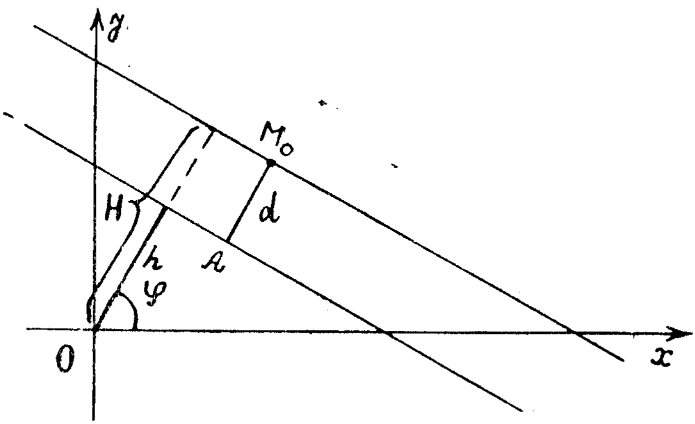
$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0). \tag{52}$$

5. მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი. წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს ეწოდება

წერტილიდან წრფემდე მანძილი. მოცემულია წერტილი $M_0(x_0, y_0)$ და წრფე ნორმალური განტოლებით

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h = 0.$$

საძიებელია M_0 წერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი. M_0 წერტილზე გავატაროთ მოცემული წრფის პარალელური წრფე. შევადგინოთ მისი განტოლება ნორმალური სახით. ცხადია, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული მართობი აგრეთვე მართობული იქნება M_0 წერტილზე გამავალი მოცემული წრფის პარალელური წრფისა. ამიტომ ამ უკანასკნელ



ნახ. 25.

წრფეზე დაშვებული მართობი კოორდინატთა სისტემის სათავიდან ან გაყვება მოცემულ წრფეზე დაშვებულ მართობს, ან მის მოპირდაპირე მდებარეობას მიიღებს. ადვილი შესამჩნევია, რომ, როცა კოორდინატთა სისტემის სათავე მოცემულ წრფესა და მის პარალელურ წრფეს შორის არ მდებარეობს, მაშინ წრფეთა მართობები ერთიმეორეს გაყვება და მათგან შედგენილი კუთხეები x ღერძთან ერთი და იგივე იქნება (ნახ. 25). ეს არის φ. ხოლო, თუ კოორდინატთა სისტემის სათავე წრფეთა შორის არის მოთავსებული, მაშინ მართობები ერთიმეორის საწინააღმდეგო მდებარეობას მიიღებენ. მართობის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხე მეორე შემთხვევაში იქნება $\pi+\varphi$.

M_0 წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძის გამოსათვლელად შეგვიძლია დავწეროთ

$$|AM_0|=\pm(H-h), \quad \mathrm{I}$$

სადაც ზედა ნიშანს აიღებენ მაშინ, როცა $H>h$ ე. ი. წერტილი და კოორდინატთა სისტემის სათავე მოცემული წრფიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ, ხოლო ქვედა ნიშანს აიღებენ საწინააღმდეგო შემთხვევაში, ე. ი. როცა M_0 და კოორდინატთა სისტემის სათავე წრფიდან ერთ მხარეს არიან მოთავსებული.

რადგან პარალელურ წრფეზე დაშვებული მართობი x ღერძთან ადგენს φ კუთხეს და მართობის სიგრძე კი H-ია, პარალელური წრფის ნორმალური განტოლება ასე დაიწერება

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-H=0.$$

შევიტანოთ აქ M_0 წერტილის კოორდინატები. განტოლება დაკმაყოფილდება (რადგან პარალელური წრფე ამ წერტილზე გადის). გვექნება

$$x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-H=0.$$

აქედან

$$H=x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi.$$

შევიტანოთ H-ის ეს მნიშვნელობა I ტოლობაში. მივიღებთ d-სათვის შემდეგ ფორმულას

$$d=\pm(x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-h). \quad (53)$$

მეორე შემთხვევაში ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ იმავე შედეგს. (53) ფორმულა არის წერტილიდან წრფემდე მანძილის ფორმულა ზოგად შემთხვევაში. ამ ფორმულის ნაცვლად, ანალიზურ გეომეტრიაში განიხილება შემდეგი ფორმულა

$$d=x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-h. \quad (54)$$

(53) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$|AM_0|=\pm d.$$

ასე განსაზღვრული d, როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული, დადებითია, როცა კოორდინატთა სისტემის სათავე და M_0 წერტილი წრფიდან სხვადასხვა მხარესაა მოთავსებული, ხოლო უარყოფითია, როცა კოორდინატთა სისტემის სათავე და M_0 წერტილი წრფიდან ერთ მხარესაა მოთავსებული.

პირველ შემთხვევაში d ტოლია M_0 წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძისა, მეორე შემთხვევაში კი d მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება მართობის სიგრძისაგან. ამგვარად განსაზღვ-

რულ d რიცხვს უწოდებენ მანძილს წერტილიდან წრფემდე, ანალიზური გეომეტრიის თვალსაზრისით. ასე განსაზღვრული d იმით არის საინტერესო, რომ მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა იძლევა წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს, ხოლო ნიშანი კი გვიჩვენებს კოორდინატთა სისტემის სათავისა და M_0 წერტილის განლაგებას წრფის მიმართ. (54) ფორმულას აქვს მეტად მარტივი აღნაგობა. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს დგას წრფის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულება, სადაც მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად, ე. ი. x, y-ის ნაცვლად ჩასმულია მოცემული წერტილის კოორდინატები, ე. ი. x_0, y_0.

თუ წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით

$$Ax+By+C=0,$$

მაშინ ჯერ განტოლება უნდა დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

შემდეგ კი განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომ გამოსახულებაში მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად ჩავსვათ მოცემული წერტილის კოორდინატები. d-სათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{55}$$

სადაც მნიშვნელის ნიშანი აიღება C-ს ნიშნის საწინააღმდეგოდ (ისევე, როგორც ნორმალურ განტოლებაში). შევნიშნავთ, რომ ეს ფორმულა მაშინაც გამოსახავს წერტილიდან წრფემდე მანძილს, როცა $C=0$, ოღონდ ამ შემთხვევაში მნიშვნელის ნიშანი იქნება ნებისმიერი.

6. $Ax+By+C$ სამწევრის ნიშნის გეომეტრიული მნიშვნელობა. როგორც აღნიშნული გვქონდა, d-ს ნიშანი განისაზღვრება იმის მიხედვით, თუ M_0 წერტილი სიბრტყის რომელ ნაწილშია მოთავსებული, წრფიდან კოორდინატთა სისტემის სათავის მხარეს, თუ საწინააღმდეგო მხარეს. როცა M_0 წერტილი მოთავსებულია წრფეზე, მაშინ $d=0$. ამრიგად d იცვლის ნიშანს მხოლოდ მაშინ, როცა M_0 წერტილი სიბრტყის ერთი ნაწილიდან გადადის სიბრტყის მეორე ნაწილში. (55) ფორმულიდან ჩანს, რომ $Ax+By+C$ სამწევრს, ისევე როგორც d-ს, სიბრტყის სხვადასხვა მხარეს ექნება

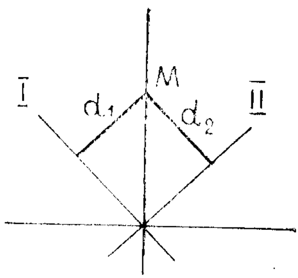
სხვადასხვა ნიშანი. თვით წრფეზე კი ეს სამწევრი გაუტოლდება ნულს.

7. ორი წრფის მიერ ერთიმეორესთან შედგენილი კუთხეების ბისექტრისების განტოლებანი. მოცემულია ორი წრფე შემდეგი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad \text{I}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad \text{II}$$

ეს ორი წრფე ერთიმეორესთან შეადგენს 4 კუთხეს, სადაც ორი წყვილი ერთიმეორის ტოლია (ვერტიკალური კუთხეები). მათი საერთო ბისექტრისები (კუთხის შუაგამყოფი წრფე) ექნებათ. ამრიგად, სულ ორი ბისექტრისა იარსებებს (ნახ. 26). ბისექტრისის ნებისმიერი წერტილი თანასწორად იქნება დაშორებული მოცემული წრფეებიდან, ამიტომ



ნახ. 26.

$$|d_1|=|d_2|.$$

აქედან

$$d_1=\pm d_2$$

ან, რაც იგივეა,

$$d_1\pm d_2=0.$$

აქ სხვადასხვა ნიშანი შეესაბამება სხვადასხვა ბისექტრისას. ახლა გამოვთვალოთ d_1 და d_2. რადგან ამ შემთხვევაში მანძილები წრფეებამდე განიხილება M წერტილიდან, ამიტომ d_1-ისა და d_2-ის მისაღებად, (55) ფორმულის გამოყენების დროს, M_0 წერტილი უნდა შეიცვალოს M წერტილით, ე. ი. x_0, y_0-ის ნაცვლად ჩაისმება x, y. გვექნება:

$$d_1=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$d_2=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

ჩავსვათ d_1 და d_2-ის ეს მნიშვნელობანი წინა ტოლობაში, მივიღებთ ბისექტრისების საძიებელ განტოლებებს:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0. \qquad (56)$$

აქ x, y მიმდინარე კოორდინატებია.

8. წრფეთა კონის განსაზღვრა მისი ორი წრფის საშუალებით. მოცემულია კონის ორი წრფე შემდეგი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad \text{I}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad \text{II}$$

საძიებელია იმ კონის განტოლება, რომლის ცენტრია მოცემული წრფეების თანაკვეთის წერტილი. ამ საკითხის გადაჭრა შეიძლება შემდეგნაირად. შევადგინოთ ასეთი განტოლება

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (57)$$

სადაც λ რაიმე მუდმივია. ეს განტოლება წრფივია x, y-ის მიმართ, ამიტომ განსაზღვრავს წრფეს λ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. თუ ამ განტოლებაში შევიტანთ მოცემული წრფეების თანაკვეთის წერტილის კოორდინატებს, მაშინ პირველი სამწევრი გაუტოლდება ნულს I განტოლების ძალით და ბრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება გაუტოლდება ნულს II განტოლების ძალით, ე. ი. გვექნება

$$0+\lambda\cdot 0=0.$$

ამრიგად, (57) განტოლებით განსაზღვრული წრფე გადის მოცემული წრფეების თანაკვეთის წერტილზე, როგორიც არ უნდა იყოს λ პარამეტრი. ამ პარამეტრის ცვლით $(-\infty, +\infty)$ შუალედში მივიღებთ მოცემული წრფეების თანაკვეთის წერტილზე გამავალ ყოველ წრფეს (კერძოდ, თვით მოცემულ წრფეებს შეესაბამება $\lambda=0$ და $\lambda=\infty$ მნიშვნელობანი), ე. ი. (57) განტოლება იქნება საძიებელი წრფეთა კონის განტოლება. λ-ს ეწოდება კონის პარამეტრი.

9. სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა. ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებს ეწოდება კ ო ლ ი ნ ე ა რ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი. აღებული სამი წერტილი:

$$M_1=(x_1,\ y_1),$$
$$M_2=(x_2,\ y_2),$$
$$M_3=(x_3,\ y_3),$$

საზოგადოდ, არ არის კოლინეარული, მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება კოლინეარული აღმოჩნდეს. აქ გამოვიყვანთ იმ პირობას, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული წერტილების კოორდინატები, რომ ეს სამი წერტილი იყოს კოლინეარული. ჯერ პირველ ორ წერტილზე გავატაროთ წრფე, მისი განტოლება იქნება

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

თუ მოცემული სამი წერტილი კოლინეარულია, მაშინ M_3 წერტილი უნდა მოთავსდეს პირველი ორი წრფის შემაერთებელ წრფეზე, ამიტომ M_3 წერტილის კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილოს უკანასკნელი განტოლება. ამრიგად, x,y-ის ნაცვლად x_3,y_3-ის ჩასმით მივიღებთ სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობას

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}. \tag{58}$$

შენიშვნა. ვინც დეტერმინანტებს იცნობს მათ საყურადღებოდ შევნიშნავთ, რომ სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა უფრო მარტივი სახით სამკუთხედის ფართობის ფორმულიდან შეიძლება მივიღოთ. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ სამი წერტილი კოლინეარულია, მაშინ მათგან შედგენილი სამკუთხედის ფართობი ნულია და, პირუკუ, თუ სამკუთხედის ფართობი ნულია, მაშინ მისი წვეროები კოლინეარულია, ე. ი. კოლინეარულობის პირობა სამკუთხედის ფართობის ნულთან გატოლებით მიიღება.

სამკუთხედის ფართობის (14) ფორმულის თანახმად, სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა ასე დაიწერება

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{59}$$

სავარჯიშო

1. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები:

$$A=(1,\ 0),\quad B=(2,\ 3),\quad C=(2,\ -2).$$

საძიებელია: სამკუთხედის ფართობი, C წვეროდან AB გვერდზე დაშვებული სამკუთხედის სიმაღლის განტოლება, C კუთხის ბისექტრისის განტოლება.

2. მოცემულია $M(1,\ 2)$ წერტილი და წრფე შემდეგი განტოლებით

$$x-y-2=0.$$

საძიებელია იმ წრფის განტოლება, რომელიც გაივლის მოცემულ წერტილზე და მოცემულ წრფესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს.

3. მოცემულია $M_1(2,\ 8)$ და $M_2(1,\ 2)$ წერტილები. საძიებელია იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე და დაშორებულია M_2 წერტილიდან 5 ერთეულით.

თ ა ვ ი II

ვექტორთა ალგებრის ელემენტები

§ 1. ვექტორის ბეგმილები

1. ვექტორის განმარტება. ელემენტარულ გეომეტრიაში AB და BA მონაკვეთები ერთი და იგივეა. მნიშვნელობა არა აქვს A და B წერტილების მიმდევრობას მათგან შედგენილი მონაკვეთის განხილვის დროს. ანალიზურ გეომეტრიაში კი მონაკვეთებთან დაკავშირებული ფორმულები ხშირად დამოკიდებულია მონაკვეთის ბოლო წერტილების მიმდევრობაზე (ასეთია, მაგალითად, I თავში მოცემული მონაკვეთის ალგებრული მნიშვნელობა, სამკუთხედის ფართობი და სხვ.), ამიტომ ანალიზურ გეომეტრიაში AB და BA მონაკვეთები ერთი და იგივე როლს არ ასრულებენ. AB მონაკვეთი აღიწერება AB წრფეზე წერტილის მოძრაობით A წერტილიდან B წერტილამდე. თუ მოძრაობის ამ მიმართულებას ჩავთვლით დადებით მიმართულებად, ხოლო მის საწინააღმდეგო მიმართულებას — უარყოფითად, მაშინ BA მონაკვეთის აღწერა B წერტილიდან A წერტილამდე მოხდება უარყოფითი მიმართულებით. იმ შემთხვევაში, როცა A და B წერტილებით განსაზღვრულ მონაკვეთზე არჩეულია მოძრაობის დადებითი მიმართულება A წერტილიდან B წერტილისაკენ, მონაკვეთს ეწოდება *მ ო გ ე ზ უ ლ ი A წ ე რ ტ ი ლ ი დ ა ნ B წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა კ ე ნ*. მონაკვეთზე არჩეულ მოძრაობის დადებით მიმართულებას ხშირად მონაკვეთის *მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა ს უ წ ო დ ე ბ ე ნ*. ჩვენ მივიღებთ, რომ ორი მონაკვეთის მიმართულება მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ერთნაირი, როცა ისინი პარალელურია და მათზე არჩეულია მოძრაობის ერთნაირი დადებითი ან უარყოფითი მიმართულება. აქედან ჩანს, რომ მონაკვეთის მიმართულება ვერ განსაზღვრავს მონაკვეთის სიგრძეს და, პირუკუ. ამრიგად, ანალიზურ გეომეტრიაში მონაკვეთისათვის დამახასიათებელია *ს ი გ რ ძ ე დ ა მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა*.

ცხადია, რომ ელემენტარულ გეომეტრიაში მონაკვეთებისათვის მიღებული შედეგები ძალაში დარჩება ანალიზურ გეომეტრიაშიც,

რადგან ისინი დამოუკიდებელნი არიან მონაკვეთის მოგეზულობაზე. აქ წარმოიშვება კიდევ ახალი თვისებანი, რომელნიც გამომდინარეობენ მონაკვეთის მოგეზულობიდან. I თავში საკითხების განხილვის დროს უმთავრესად ვემყარებოდით მონაკვეთთა ისეთ ურთიერთობას, სადაც ყურადღება ექცეოდა, როგორც უკვე აღნიშნული გვქონდა, მონაკვეთის ბოლო წერტილების მიმდევრობას, ე. ი. მონაკვეთის მოგეზულობას. ეს გვაიძულებდა განგვეხილა სხვადასხვა ვარიანტები ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნის დროს (მაგალითად, სამკუთხედის ფართობის წრფის ნორმალური განტოლება და სხვ.), რაც ერთგვარად ამცირებდა მსჯელობის ზოგად ხასიათს. ადვილი მისახვედრია, რომ სივრცეში წრფეებისა და სიბრტყეების განხილვის დროს აგრეთვე დიდ როლს შეასრულებს მოგეზული მონაკვეთი. საჭირო იქნება მრავალი ვარიანტის განხილვა. ეს კი მეტად გაართულებს საქმეს, თუ წინასწარ არ იქნა აღრიცხული მოგეზული მონაკვეთები. ამრიგად, ბუნებრივია ანალიზური გეომეტრიის დამუშავების შემდეგი მეთოდი: ჯერ შესწავლილ იქნას მოგეზული მონაკვეთები ცალკე და მერე გამოყენებულ იქნას მიღებული შედეგები ანალიზურ გეომეტრიაში. საკითხისადმი ასეთმა მიდგომამ წარმოშვა ვექტორთა აღრიცხვა.

განმარტება. A და B წერტილებით განსაზღვრულ მოგეზულ მონაკვეთს ეწოდება ვექტორი. აღინიშნება ასე: $\overline{AB}$. აქ A წერტილს ეწოდება ვექტორის საწყისი წერტილი, B წერტილს კი ვექტორის ბოლო წერტილი. AB მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება ვექტორის სიგრძე. AB მონაკვეთის მიმართულებას ეწოდება ვექტორის მიმართულება.

ვექტორი აღინიშნება აგრეთვე ერთი ასოთიც $\overline{P}=\overline{AB}$. ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათ საერთო აქვთ ვექტორის განმსაზღვრელი ორივე ელემენტი, ე. ი. თუ მათ საერთო აქვთ სიგრძე და მიმართულება. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ვექტორის მდებარეობა სივრცეში ცალსახად ვერ განისაზღვრება მისი დამახასიათებელი ელემენტებით. მართლაც, თუ თავისი თავის პარალელურად გადავიტანთ იმ წრფეს (ვექტორის ფუძეს), რომელზედაც ვექტორია მოთავსებული, ამით ვექტორის ორი დამახასიათებელი ელემენტი (სიგრძე და მიმართულება) არ შეიცვლება. ამიტომ ასეთი მოძრაობით მივიღებთ აღებული ვექტორის ტოლ ვექტორებს. ამ პროცესს ეწოდება ვექტორის პარალელური გადატანა. ამრიგად, ვექტორი თავისი თავის პარალელურად გა-

დატანის დროს არ იცვლება. პირუკუ, ტოლი ვექტორები შეგვიძლია შევუთავსოთ ერთიმეორეს პარალელური გადატანით. მართლაც, ტოლი ვექტორები მოთავსებულია პარალელურ წრფეებზე. ამ წრფეების შეთავსება შეიძლება პარალელური გადატანით. ამის შემდგომ ერთ წრფეს გავასრიალებთ მეორე წრფეზე ისე, რომ განსახილავი ვექტორების საწყისი წერტილები შეთავსდეს. ამ ვექტორების სიგრძეთა თანატოლობისა და ერთნაირი მიმართულების გამო ვექტორები შეუთავსდება ერთიმეორეს. ზემოაღნიშნული საშუალებას გვაძლევს (ორი დამახასიათებელი ელემენტით განსაზღვრული) ვექტორის აგების დროს კოორდინატთა სისტემის მიმართ საწყის წერტილად ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი (ამას ასე გამოთქვამენ: „ვექტორი მოვდოთ ნებისმიერ წერტილს"). ხშირად ასეთ წერტილად ღებულობენ კოორდინატთა სისტემის სათავეს, ე. ი. პარალელური გადატანით ვექტორს მოდებენ ხოლმე კოორდინატთა სისტემის სათავეზე. ვექტორის პარალელური გადატანის დროს მისი საწყისი და ბოლო წერტილები, ცხადია, იცვლის მდებარეობას. ამრიგად, მოცემული ვექტორით ვერ განისაზღვრება მისი საწყისი და ბოლო წერტილები. ოღონდ, თუ საწყის წერტილს ავარჩევთ, მაშინ ბოლო წერტილი ცალსახად განისაზღვრება, ე. ი. მოცემულ ვექტორს ყოველთვის შეგვიძლია მოვუძებნოთ რაიმე საწყისი და ბოლო წერტილები, მაშასადამე, სადაც საჭირო იქნება ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წერტილთა წყვილით.

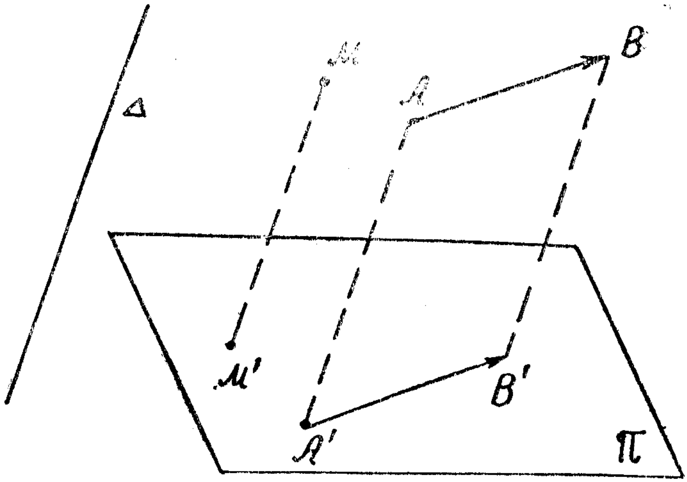
ფიზიკაში ვექტორების გამოყენების დროს საჭირო ხდება მხედველობაში მივიღოთ ვექტორის ფუძე და საწყისი წერტილი. პირველ შემთხვევაში შეიძლება ვექტორის გასრიალება ფუძის გასწვრივ, ამიტომ მას ეწოდება *სრიალა ვექტორი* (ასეთია მყარ სხეულზე მოდებული ძალა). მეორე შემთხვევაში საწყისი წერტილი დამაგრებულია და ვექტორს ეწოდება *დაბმული ვექტორი* (ასეთია დრეკად სხეულზე მოდებული ძალა). ანალიზურ გეომეტრიაში განხილული ვექტორები კი დამოკიდებულნი არ არიან ფუძეზე და საწყის წერტილზე, ამიტომ მათ ეწოდებათ *თავისუფალი ვექტორები*. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ თავისუფალ ვექტორებს.

2. წერტილისა და ვექტორის პარალელური გეგმილები სიბრტყეზე. განვიხილოთ რაიმე π სიბრტყე და მისი არაპარალელური Δ წრფე. სივრცეში აღებულ M წერტილიდან გავატაროთ Δ წრფის პარალელური წრფე π სიბრტყის თანაკვეთამდე. თანაკვეთის ეს წერტილი აღვნიშნოთ M'-ით (ნახ. 27). ამ წერტილს ეწოდება M

წერტილის გეგმილი (პროექცია) π სიბრტყეზე Δ წრფის პარალელურად. ეს დამოკიდებულება ასე აღინიშნება

$$M' = \text{გეგ}_\pi M. \tag{1}$$

ამ აღნიშვნის შინაარსი, როგორც ზემოთაც იყო აღნიშნული, ასეთია: „M' წერტილი არის M წერტილის გეგმილი π სიბრტყეზე". გეგმილის მოსაპოვებლად M წერტილზე შესრულებულ მოქმედებას ეწოდება M წერტილის დაგეგმილება π სიბრტყეზე.



ნახ. 27.

ახლა განვიხილოთ $\overline{AB}$ ვექტორი. A და B წერტილების გეგმილები π სიბრტყეზე აღვნიშნოთ A'-ით და B'-ით. ამ უკანასკნელი წერტილებით განისაზღვრება $\overline{A'B'}$ ვექტორი (ნახ. 27). ამ ვექტორს ეწოდება $\overline{AB}$ ვექტორის ვექტორული გეგმილი და ასე ჩაიწერება

$$\overline{A'B'} = \text{გეგ}_\pi \overline{AB}. \tag{2}$$

ამ ჩანაწერის შინაარსი ასეთია: $\overline{A'B'}$ ვექტორი არის $\overline{AB}$ ვექტორის ვექტორული გეგმილი π სიბრტყეზე. თუ $\overline{AB}$ და $\overline{A'B'}$ ვექტორებს შესაბამად აღვნიშნავთ $\overline{P}$ და $\overline{P'}$-ით, მაშინ (2) ტოლობა, ცხადია, ასეთ სახეს მიიღებს

$$\overline{P'} = \overline{\text{გეგ}}_\pi \overline{P}. \tag{3}$$

ამ ჩანაწერის წაკითხვა ხდება წინა ჩანაწერის ანალოგიურად, ე. ი. „$\overline{P'}$ ვექტორი არის $\overline{P}$ ვექტორის ვექტორული გეგმილი π სიბრტყეზე".

3. წერტილისა და ვექტორის გეგმილები ღერძზე. განვიხილოთ კოორდინატთა რაიმე Δ ღერძი და ამ ღერძის არაპარალელური π სიბრტყე. სივრცეში აღებულ M წერტილზე გავატაროთ π სიბრტყის პარალელური სიბრტყე Δ ღერძის თანაკვეთამდე. თანაკვეთის ეს წერტილი აღვნიშნოთ M'-ით. ამ წერტილს ეწოდება M წერტილის პარალელური გეგმილი Δ ღერძზე π სიბრტყის პარალელურად. ეს დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება

$$M' = \text{გეგ}_\Delta M. \tag{4}$$

უკანასკნელი ტოლობა ასე გამოითქმება: M' წერტილი არის M წერტილის გეგმილი Δ ღერძზე". გეგმილის მოსაპოვებლად M წერტილზე შესრულებულ ზემოაღნიშნულ მოქმედებას ეწოდება წერტილის დაგეგმილება ღერძზე.

ახლა განვიხილოთ $\overline{AB}$ ვექტორი. A და B წერტილების გეგმილები Δ ღერძზე აღვნიშნოთ A'-ით და B'-ით. ამ წერტილებით განისაზღვრება $\overline{A'B'}$ ვექტორი. ამ ვექტორს ეწოდება $\overline{AB}$ ვექტორის ვექტორული გეგმილი Δ ღერძზე π სიბრტყის პარალელურად და ასე აღინიშნება

$$\overline{A'B'} = \overline{\text{გეგ}}_\Delta \overline{AB}. \tag{5}$$

ეს ჩანაწერი ასე გამოითქმება: „$\overline{A'B'}$ ვექტორი არის $\overline{AB}$ ვექტორის ვექტორული გეგმილი Δ ღერძზე". თუ $\overline{AB}$ და $\overline{A'B'}$ ვექტორებს შესაბამისად აღვნიშნავთ $\overline{P}$ და $\overline{P'}$-ით, მაშინ (5) ტოლობა, ცხადია, ასეთ სახეს მიიღებს

$$\overline{P'} = \overline{\text{გეგ}}_\Delta \overline{P}. \tag{6}$$

ეს ჩანაწერი წაიკითხება (5) ჩანაწერის ანალოგიურად, ე. ი. „$\overline{P'}$ ვექტორი არის $\overline{P}$ ვექტორის ვექტორული გეგმილი Δ ღერძზე".

ვექტორთან დაკავშირებით განიხილება კიდევ ვექტორის გეგმილი (ჩვეულებრივი, არავექტორული) ღერძზე. $A'B'$ მონაკვეთს, როგორც ღერძზე მდებარე მონაკვეთს, აქვს თავისი ალგებრული მნიშვნელობა, რომელიც აღინიშნება $A'B'$-ით. ამ ალგებრულ მნიშ-

ეწოდება $\overline{AB}$ ვექტორის ალგებრული გეგმილი (ან, უბრალოდ, გეგმილი) Δ ღერძზე და ასე აღინიშნება

$$A'B' = \text{გეგ}_{\Delta}\overline{AB}. \tag{7}$$

ეს ჩანაწერი წაიკითხება შემდეგნაირად: „$A'B'$ **არის** $\overline{AB}$ **ვექტორის გეგმილი** Δ **ღერძზე**“. გეგმილის მოპოვებისათვის შესრულებულ მოქმედებას ეწოდება **ვექტორის დაგეგმილება ღერძზე.**

4. წერტილისა და ვექტორის პარალელური გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. განვიხილოთ სივრცეში რაიმე კოორდინატთა სისტემა და M წერტილი. დავაგეგმილოთ ეს წერტილი კოორდინატთა ღერძებზე კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურად; მაგალითად, x ღერძზე დაგეგმილება მოხდება Oyz სიბრტყის პარალელურად, y ღერძზე Oxz სიბრტყის პარალელურად, z ღერძზე კი Oxy სიბრტყის პარალელურად. M წერტილის გეგმილებს ღერძებზე ექნებათ თავიანთი x, y, z კოორდინატები ამ ღერძების მიმართ. ეს რიცხვები კი, როგორც I თავიდან არის ცნობილი, წარმოადგენს წერტილის დეკარტის კოორდინატებს. ამრიგად, წერტილის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე განისაზღვრება წერტილის დეკარტის კოორდინატებით და, პირუკუ. ამიტომ, ხშირად, თვით **დეკარტის კოორდინატებს** უწოდებენ **წერტილის პარალელურ გეგმილებს.** კოორდინატთა ღერძებზე კოორდინატების მოპოვებისათვის შესრულებულ მოქმედებას კი უწოდებენ **წერტილის დაგეგმილებას კოორდინატთა ღერძებზე.** ახლა განვიხილოთ $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. ჯერ დავაგეგმილოთ x ღერძზე. დავუშვათ, რომ მოცემულია A და B წერტილების კოორდინატები:

$$A = (x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$B = (x_2,\ y_2,\ z_2).$$

x_1 იქნება A წერტილის x ღერძზე გეგმილის, ე. ი. A' წერტილის, კოორდინატი. x_2 იქნება B წერტილის x ღერძზე გეგმილის, ე. ი. B' წერტილის, კოორდინატი. $A'B'$ მონაკვეთის ალგებრული მნიშვნელობა, ე. ი. $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი, როგორც ცნობილია I თავიდან, შემდეგნაირად გამოისახება (ნახ. 28)

$$A'B' = x_2 - x_1,$$

ე. ი.

$$\text{გეგ}_x \overline{AB} = x_2 - x_1.$$

ასევე მიიღება $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილები დანარჩენ ღერძებზე.

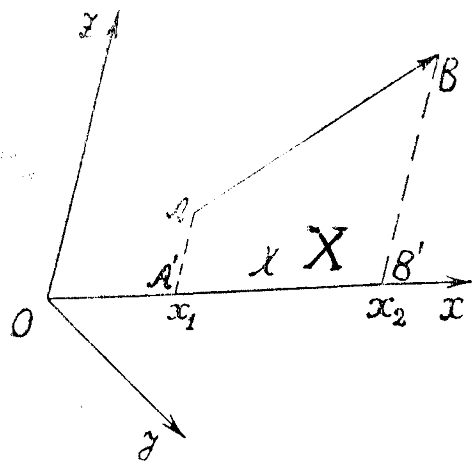
გვექნება:

$$\begin{aligned} \text{გეგ}_x\,\overline{AB} &= x_2 - x_1, \\ \text{გეგ}_y\,\overline{AB} &= y_2 - y_1, \\ \text{გეგ}_z\,\overline{AB} &= z_2 - z_1. \end{aligned} \tag{8}$$

თუ აღვნიშნავთ $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილებს X, Y, Z-ით, მაშინ (8) ფორმულები ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} X &= x_2 - x_1, \\ Y &= y_2 - y_1, \\ Z &= z_2 - z_1. \end{aligned} \tag{9}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორის პარალელური გადატანის დროს მისი გეგმილი x ღერძზე არ შეიცვლება ($A'B'$ მონაკვეთი



ნახ. 28.

გასრიალდება ღერძის გასწვრივ). ასევე არ შეიცვლება გეგმილები სხვა ღერძებზეც. ამრიგად, ტოლ ვექტორებს ექნებათ ტოლი გეგმილები. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ, პირუკუ, თუ ორი ვექტორის გეგმილები შესაბამად ტოლია, მაშინ თვით ვექტორებიც ტოლი იქნება. ამისათვის მივმართოთ (9) ფორმულებს. აქედან ჩანს, რომ, თუ მოცემულია ვექტორის გეგმილები და საწყისი წერტილის კოორდინატები, ე. ი. თუ მოცემულია X, Y, Z და x_1, y_1, z_1, მაშინ ცალსახად განისაზღვრება ვექტორის ბოლო წერტილის x_2, y_2,

z_2 კოორდინატები. ახლა დავუშვათ, რომ ორ ვექტორს ერთი და იგივე გეგმილები აქვთ. პარალელური გადატანით შეგვიძლია ეს ორი ვექტორი ერთი და იგივე წერტილს მოვდოთ. რადგან ვექტორის პარალელური გადატანის დროს მისი გეგმილები არ იცვლება, ამიტომ ამ ორ ვექტორს პარალელური გადატანის შემდეგ ექნება ერთი და იგივე გეგმილები და საწყისი წერტილები. მეორე მხრივ, როგორც აღნიშნული იყო, გეგმილებითა და საწყისი წერტილის კოორდინატებით ცალსახად განისაზღვრება ვექტორი. ამრიგად, განსახილავი ვექტორების ბოლო წერტილებიც შეთავსდება ერთიმეორესთან; მაშასადამე, ვექტორები შეუთავსდება ერთიმეორეს, ე. ი. ეს ვექტორები ყოფილა ტოლი ვექტორები. შევნიშნოთ, რომ ვექტორის გეგმილები ერთდროულად ნულებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. $z_1=z_2$, ე. ი. როცა საწყისი და ბოლო წერტილები შეთავსებულია. ასეთ ვექტორს ეწოდება *ნული ვექტორი*. ცხადია, რომ ასეთი ვექტორის სიგრძე ნულია, მიმართულება კი განუსაზღვრელი. ამიტომ ყველა ასეთი ვექტორი შეგვიძლია ჩავთვალოთ როგორც ერთიმეორის ტოლი. ნული ვექტორისათვის დამახასიათებელია შემდეგი პირობები:

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0.$$

საბოლოოდ შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა: *მოცემული P ვექტორით ცალსახად განისაზღვრება X, Y, Z გეგმილთა სამეული და, პირუკუ, X, Y, Z გეგმილთა სამეულით ცალსახად განისაზღვრება P ვექტორი.* აქვე შევნიშნავთ, რომ ვექტორის მდებარეობა სივრცეში ვერ განისაზღვრება გეგმილთა სამეულით. ოღონდ, თუ ვექტორის საწყის A წერტილსაც დავასახელებთ, მაშინ მოცემული გეგმილთა სამეულით და საწყისი A წერტილის კოორდინატებით განისაზღვრება ვექტორის ბოლო B წერტილის კოორდინატები. კოორდინატთა სისტემის მიმართ ავაგებთ A და B წერტილებს, შემდეგ შევაერთებთ მათ. ამრიგად აიგება $\overline{AB}$ ვექტორი. *P ვექტორის პარალელურ გეგმილთა X, Y, Z სამეულს ეწოდება ვექტორის დეკარტის კოორდინატები.*

P ვექტორისა და მისი კოორდინატების ურთიერთკავშირი ასე აღინიშნება

$$P=(X,\ Y,\ Z)\ \text{ან}\ P(X,\ Y,\ Z). \tag{10}$$

ამ ორივე აღნიშვნას აქვს ერთნაირი შინაარსი: „$\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები არის X, Y, Z“.

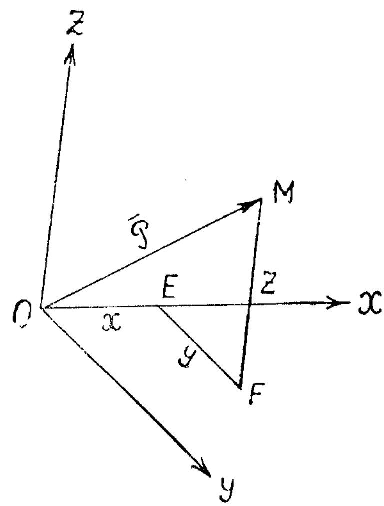
ვთქვათ, ვექტორის საწყისი წერტილი მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის სათავეში, ბოლო წერტილი კი აღვნიშნოთ M-ით. გვექნება:

$$A=O=(0,\ 0,\ 0),$$
$$B=M=(x,\ y,\ z).$$

ამ შემთხვევაში $x_1=y_1=z_1=0$ და $x_2=x$, $y_2=y$, $z_2=z$. ამიტომ (9) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$X=x-0=x,$$
$$Y=y-0=y,$$
$$Z=z-0=z.$$

ამრიგად $\overline{P}=\overline{OM}$ ვექტორის კოორდინატები შესაბამად ტოლია M წერტილის კოორდინატებისა. ამ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუს-ვექტორი. მის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ მხოლოდ M წერტილი $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატების მიხედვით (რადგან ამ ვექტორის და M წერტილის კოორდინატები ერთი და იგივეა) და შემდეგ ეს წერტილი შევაერთოთ კოორდინატთა სისტემის სათავესთან; ასე აიგება $\overline{OM}$ ვექტორი (ნახ. 29). თუ $\overline{P}$ ვექტორის საწყის წერტილად ავიღებთ $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ წერტილს, მაშინ ვექტორის ასაგებად საკმარისია $OEFMO$ ჩაკეტილი ტეხილი გადავიტანოთ თავისი თავის პარალელურად ისე, რომ O წერტილი შეუთავსდეს A



ნახ. 29.

წერტილს. მივიღებთ ვექტორის საძიებელ (ნახ. 30) მდებარეობას კოორდინატთა სისტემაში. თუ $\overline{P}$ ვექტორი მოთავსებულია Oxy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეზე, მაშინ მის საწყის და ბოლო წერტილებზე გამავალი Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები

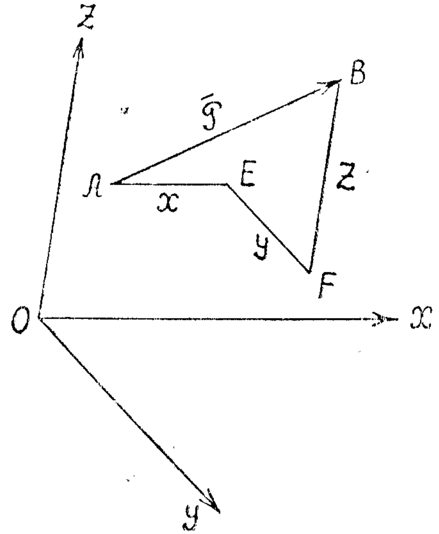
შეუთავსდება თვით იმ სიბრტყეს, რომელზედაც ვექტორია მოთავსებული.

ამრიგად, საწყისი და ბოლო წერტილები დაგეგმილდება z ღერძზე ერთი და იგივე წერტილებში. ამიტომ P ვექტორის გეგმილი z ღერძზე იქნება ნული, ე. ი. $Z=0$ $(z_1=z_2)$. ცხადია, ასეთი შედეგი მიიღება Oxy სიბრტყეზე მდებარე ვექტორისათვისაც. იგი წარმოგვიდგება X, Y, O კოორდინატებით, ე. ი.

$$P=(X,\ Y,\ 0).$$

ეს უკანასკნელი შემოკლებით ასე იწერება

$$\overline{P}=(X, Y).$$



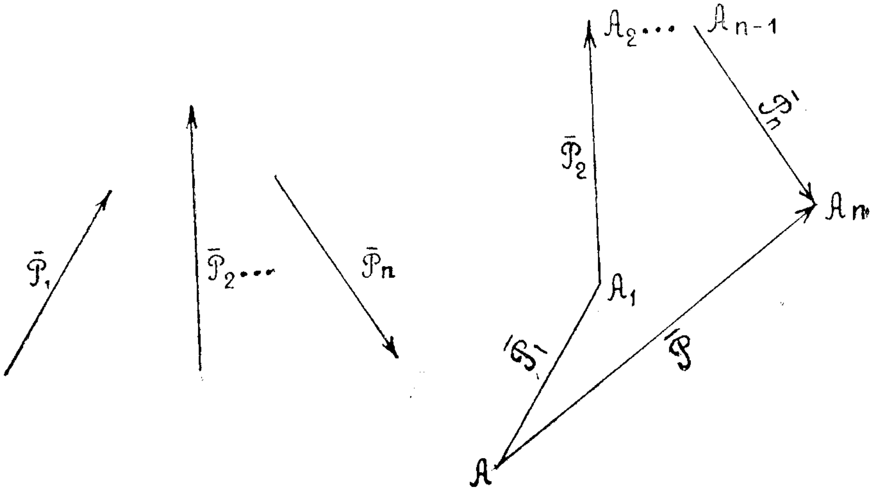
ნახ. 30.

§ 2. ვექტორთა ჯამი და მისი დაგეგმილება

1. ვექტორთა ჯამის განმარტება. მისი ძირითადი თვისებები. განვიხილოთ n ვექტორი: $P_1, P_2, \cdots, P_n$. შევარჩიოთ რაიმე A წერტილი სივრცეში. P_1 ვექტორი გადავიტანოთ პარალელურად და მოვდოთ A წერტილს. მისი ბოლო წერტილი აღვნიშნოთ A_1-ით. P_2 ვექტორი გადავიტანოთ პარალელურად და მოვდოთ P_1 ვექტორის (რომელიც უკვე A წერტილზეა მოდებული) ბოლო A_1 წერტილს. P_2 ვექტორის ბოლო წერტილი აღვნიშნოთ A_2-ით. ეს პროცესი განვაგრძოთ ასე: ყოველი შემდგომი ვექტორი პარალელური გადატანით უნდა მოვდოთ წინამავალი ვექტორის ბოლო წერტილს. ამრიგად, მივიღებთ ვექტორებისაგან შედგენილ $AA_1A_2\cdots A_n$ ტეხილს. შევაერთოთ A წერტილი A_n წერტილთან (პირველი ვექტორის საწყისი წერტილი უკანასკნელი ვექტორის ბოლო წერტილთან) და ასე შევადგინოთ AA_n ვექტორი (ნახ. 31). ამ ვექტორს ეწოდება აღებულ ვ ე ქ ტ ო რ თ ა ჯ ა მ ი და ასე აღინიშნება

$$\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\cdots+\overline{P}_n. \qquad (11)$$

ჯამის პირველი ძირითადი თვისება არის მისი კომუტაციურობა, ე. ი. დამოუკიდებლობა, შესაკრებთა მიმდევრობიდან. ჯერ დავამტკიცებთ ამ თვისებას ორი შესაკრების შემთხვევაში. განვიხილოთ ორი ვექტორი P_1 და P_2. ამ შემთხვევაში გვექნება შესაკრებთა ორნაირი მიმდევრობა P_1, P_2 და P_2, P_1. ორივე მიმდევრობისათ-



ნახ. 31.

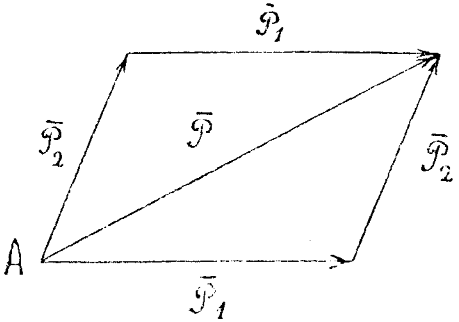
ვის ჯამი შედგება ზემოაღნიშნული წესით. პირველი მიმდევრობის შეკრების დროს A წერტილზე მოვდებთ P_1 ვექტორს.

P_2 ვექტორი კი მოედება P_1-ის ბოლო წერტილს და შედგება ჯამი P_1+P_2. მეორე მიმდევრობის შეკრების დროს P_2 ვექტორს მოვდებთ A წერტილზე. P_1 ვექტორი მოედება P_2-ის ბოლო წერტილს და ასე შედგება ჯამი P_2+P_1. ცხადია, ამ ორ ტეხილს ურთიერთპარალელური და ტოლი გვერდები ექნება და, მაშასადამე, შეადგენენ პარალელოგრამს. ამ პარალელოგრამის დიაგონალი იქნება ვექტორთა ჯამი ორივე მიმდევრობისათვის (ნახ. 32), ე. ი.

$$P_1+P_2=P_2+P_1.$$

ახლა დავამტკიცოთ ჯამის კომუტაციურობა სამი შესაკრების შემთხვევაში. ჯერ შევნიშნოთ, რომ ჯამის განმარტების მიხედვით შეგვიძლია შესაკრებთა ნაწილის დაჯგუფება, დაწყებული პირვე-

ლი შესაკრებიდან მიმდევრობით, ამ ჯგუფის ცალკე შეკრება (ფრჩხილებით გამოყოფა) და მერე მიღებული შედეგის (ცალკეული ჯგუფის ჯამის) შეკრება დანარჩენ შესაკრებებთან. სამი შესაკრების შემთხვევაში ეს ფაქტი ასე წარმოგვიდგება (ნახ. 33)

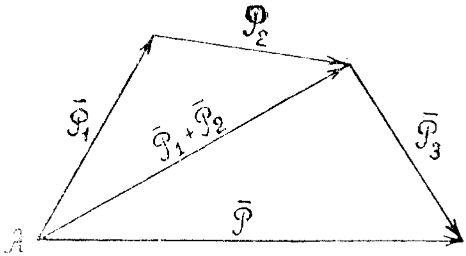


ნახ. 32.

$$\bar P_1+\bar P_2+\bar P_3=$$
$$=(\bar P_1+\bar P_2)+\bar P_3.$$

ამრიგად, სამი შესაკრების შემთხვევაში ჯამი დაიყვანება ორ შესაკრებზე. ორი შესაკრებისათვის შესაკრებთა გადანაცვლებით ჯამი არ იცვლება. აქედან კი აშკარაა, რომ ეს თვისება გადაეცემა სამი შესაკრების ჯამსაც და ა. შ. ინდუქციის წესით ჯამის კომუტაციურობა დამტკიცდება ნებისმიერი n შესაკრებისათვისაც.

ნულვექტორს ვექტორთა შეკრების დროს აქვს ისეთივე თვი-



ნახ. 33.

სება, როგორიც ჩვეულებრივ ნულს რიცხვთა შეკრების დროს. სახელდობრ,

$$\bar P+\bar 0=\bar P. \tag{15}$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში $\bar P$ ვექტორი უნდა მოვდოთ A წერტილს, $\bar P$ ვექტორის ბოლო წერტილს მოვდებთ ნულვექტორს, ამ უკანასკნელის ბოლო წერტილი იგივე $\bar P$ ვექტორის ბოლო წერტილი იქნება. ამრიგად, ჯამი განისაზღვრება $\bar P$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილებით და დაემთხვევა $\bar P$ ვექტორს.

ბოლოს განვიხილოთ ორი შესაკრების ერთი კერძო შემთხვევა

$$\overline{P}+\overline{Q}=0. \tag{16}$$

ამ შემთხვევაში შესაკრებ ვექტორთა ტეხილი იქნება ჩაკეტილი. $\overline{Q}$ ვექტორის საწყისი წერტილი იქნება $\overline{P}$ ვექტორის ბოლო წერტილი, ხოლო $\overline{Q}$-ს ბოლო წერტილი იქნება $\overline{P}$-ს საწყისი წერტილი. ცხადია, ამ ორ ვექტორს ექნება ერთნაირი სიგრძე, ხოლო მიმართულება მოპირდაპირე; ამიტომ მათ ეწოდებათ ერთიმეორის მოპირდაპირე ვექტორები.

$\overline{P}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი აღინიშნება $-\overline{P}$-თი. ამრიგად, თუ შესრულებულია (16) ტოლობა, მაშინ

$$\overline{Q}=-\overline{P}. \tag{17}$$

ეს ორი უკანასკნელი ტოლობა ეკვივალენტურია. (17) ტოლობიდან $\overline{Q}$-ს მნიშვნელობა რომ ჩავსვათ (16) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\overline{P}+(-\overline{P})=0. \tag{18}$$

ვექტორთა გამოკლება შეიძლება გამოისახოს შეკრების საშუალებით შემდეგნაირად

$$\overline{P}-\overline{Q}=\overline{P}+(-\overline{Q}). \tag{19}$$

კერძოდ, თუ $\overline{Q}=\overline{P}$, მაშინ

$$\overline{P}-\overline{P}=\overline{P}+(-\overline{P}).$$

თანახმად (18) ტოლობისა, აქედან მივიღებთ

$$\overline{P}-\overline{P}=0. \tag{20}$$

თუ $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების ჯამს აღვნიშნავთ $\overline{R}$-ით, მაშინ გვექნება

$$\overline{P}+\overline{Q}=\overline{R}. \tag{21}$$

განვიხილოთ $\overline{R}$ და $(-\overline{Q})$ ვექტორების ჯამი $\overline{R}+(-\overline{Q})$. თანახმად (21) ტოლობისა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{R}-\overline{Q}=\overline{P}+\overline{Q}-\overline{Q}=\overline{P}+(\overline{Q}-\overline{Q})=\overline{P},$$

ე. ი.

$$\overline{P}=\overline{R}-\overline{Q}. \tag{22}$$

ამრიგად, (21) ტოლობა ეკვივალენტურია (22) ტოლობისა. ვექტორთა გამოკლება წარმოგვიდგება შეკრების შებ-

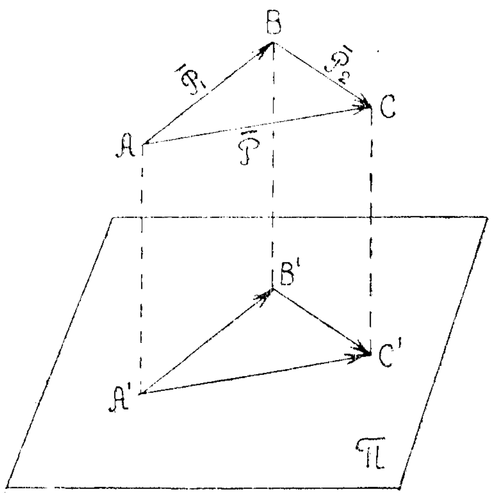
რუნებული მოქმედების სახით. პირდაპირ ჩანს, რომ (22) ტოლობა მიღებულია (21) ტოლობიდან Q შესაკრების ნიშნის შეცვლითა და ტოლობის ერთი მხრიდან მეორე მხარეს გადატანით. მაშასადამე, **ვექტორულ ტოლობაში შესაკრებები ტოლობის ერთი მხრიდან მეორე მხარეს შეგვიძლია გადავიტანოთ ნიშანშეცვლით ისევე, როგორც ჩვეულებრივ ალგებრულ ტოლობაში ხდება ხოლმე.**

2. **ვექტორთა ჯამის დაგეგმილება.** ჯერ განვიხილოთ ორი შესაკრების ჯამი. გვექნება

$$P = P_1 + P_2.$$

დავაგეგმილოთ P_1, P_2 და P ვექტორები π სიბრტყეზე. გვექნება (ნახ. 34):

$$\overline{A'B'} = \overline{გეგ_{\pi}AB},$$
$$\overline{B'C'} = \overline{გეგ_{\pi}BC},$$
$$\overline{A'C'} = \overline{გეგ_{\pi}AC},$$



ნახ. 34.

მეორე მხრივ აშკარაა, რომ

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\overline{გეგ_{\pi}AC} = \overline{გეგ_{\pi}AB} + \overline{გეგ_{\pi}BC}.$$

რადგან

$$\overline{AB}=\overline{P}_1,\ \overline{BC}=\overline{P}_2,\ \overline{AC}=\overline{P},$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\overline{გეგ_\pi P}=\overline{გეგ_\pi P_1}+\overline{გეგ_\pi P_2}.$$

აქედან ჩანს, რომ ორი ვექტორის ჯამის ვექტორული გეგმილი π სიბრტყეზე უდრის შესაკრებთა ვექტორული გეგმილების ჯამს. ინდუქციის წესით დაგეგმილების ეს კანონი გავრცელდება შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისათვის, ე. ი. თუ

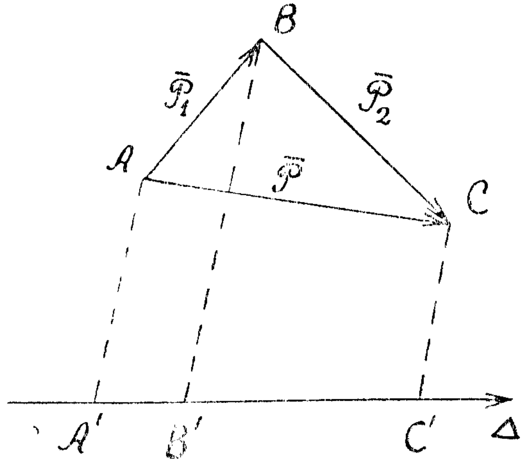
$$\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\cdots+\overline{P}_n, \tag{23}$$

მაშინ

$$\overline{გეგ_\pi\, P}=\overline{გეგ_\pi\, P_1}+\overline{გეგ_\pi\, P_2}+\cdots+\overline{გეგ_\pi\, P_n}. \tag{24}$$

ასეთივე ტოლობა მიიღება Δ ღერძზე დაგეგმილების შემთხვევაში

$$\overline{გეგ_\Delta\, P}=\overline{გეგ_\Delta\, P_1}+\overline{გეგ_\Delta\, P_2}+\cdots+\overline{გეგ_\Delta\, P_n}. \tag{25}$$



ნახ. 35.

იმავე ნახაზის მიხედვით ჩვეულებრივი გეგმილებისათვის გვექნება (ნახ. 35):

$$A'B'=გეგ_\Delta\, \overline{AB}=გეგ_\Delta\, \overline{P}_1,$$

$$B'C'=გეგ_\Delta\, \overline{BC}=გეგ_\Delta\, \overline{P}_2,$$

$$A'C'=გეგ_\Delta\, \overline{AC}=გეგ_\Delta\, \overline{P}.$$

მეორე მხრივ, შ ა ლ ი ს დებულების თანახმად (I თავის (6) ფორმულა),

$$A'C' = A'B' + B'C'$$

ან, რაც იგივეა,

$$\text{გეგ}_\Delta \overline{P} = \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_1 + \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_2.$$

ინდუქციის წესით მიიღება ჯამის დაგეგმილების (ალგებრული გეგმილის) ზოგადი ფორმულა (n შესაკრებისათვის)

$$\text{გეგ}_\Delta \overline{P} = \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_1 + \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_2 + \cdots + \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_n. \tag{26}$$

(24), (25), (26) ფორმულების მიხედვით შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა: *ვექტორთა ჯამის გეგმილი* (ვექტორული ან ალგებრული) *უდრის შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამს.*

თუ აღვნიშნავთ:

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \cdots + \overline{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i,$$

$$\text{გეგ}_\Delta \overline{P} = \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_1 + \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_2 + \cdots + \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_i,$$

მაშინ (26) ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$\text{გეგ}_\Delta \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_i. \tag{27}$$

აქედან ჩანს, რომ შეკრებისა და დაგეგმილების მოქმედებები ერთიმეორესთან გადანაცვლებადი მოქმედებებია.

3. ვექტორთა ჯამის კოორდინატები. მოცემულია ვექტორების კოორდინატები:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= (X_1,\ Y_1,\ Z_1), \\ \overline{P}_2 &= (X_2,\ Y_2,\ Z_2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \overline{P}_n &= (X_n,\ Y_n,\ Z_n). \end{aligned} \tag{28}$$

შევადგინოთ ამ ვექტორთა ჯამი. გვექნება

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \cdots + \overline{P}_n.$$

ვექტორის კოორდინატები აღვნიშნოთ X, Y, Z-ით, ე. ი.

$$\overline{P} = (X,\ Y,\ Z). \tag{29}$$

ახლა დავაგეგმილოთ ვექტორთა ჯამი x ღერძზე. (26) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$გეგ_x \overline{P} = გეგ_x \overline{P}_1 + გეგ_x \overline{P}_2 + \cdots + გეგ_x \overline{P}_n.$$

მეორე მხრივ, (28) და (29) ფორმულების მიხედვით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$გეგ_x \overline{P}_1 = X_1, \; გეგ_x \overline{P}_2 = X_2, \cdots გეგ_x \overline{P}_n = X_n,$$

$$გეგ_x \overline{P} = X.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

ანალოგიური ტოლობები მიიღება y და z ღერძებზე დაგეგმილების შედეგად. ამრიგად, ვექტორთა ჯამის კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n. \end{aligned} \tag{30}$$

თუ ვექტორთა ჯამისათვის ავიღებთ შემოკლებით ჩანაწერს $\overline{P} = \sum \overline{P}_i$, მაშინ (30) ფორმულებიც შემოკლებით ჩაიწერება:

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i.$$

აქედან ჩანს, რომ ვ ე ქ ტ ო რ თ ა ჯ ა მ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ტ ო ლ ი ა შ ე ს ა კ რ ე ბ ი ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ი ს შ ე ს ა ბ ა მ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს ჯ ა მ ე ბ ი ს ა.

თუ ვექტორები მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე, მაშინ მათი გეგმილები Z ღერძზე იქნება ნულები, ე. ი. $Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_n = 0$. ვექტორთა ჯამიც, ცხადია, მოთავსდება იმავე სიბრტყეზე, ე. ი. $Z=0$. ამ პირობებში (30) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n. \end{aligned} \tag{31}$$

ასეთია Oxy სიბრტყეზე მდებარე ვექტორთა ჯამის კოორდინატების განმსაზღვრელი ფორმულები.

§ 3. რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლი

1. რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის განმარტება. λ რიცხვისა და $\overline{P}$ ვექტორის ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\overline{Q}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი პირობებით:

2. $Q \| P$,

3. Q ისევეა მოგეზული, როგორც P, თუ $\lambda>0$. იგი საწინააღმდეგოდ არის მოგეზული, თუ $\lambda<0$. λ რიცხვისა და P ვექტორის ნამრავლი აღინიშნება ასე λP. ამრიგად, ზემოაღნიშნული სამი პირობით განსაზღვრული Q ვექტორი ასე წარმოგვიდგება

$$Q=\lambda P. \tag{32}$$

თუ $\lambda=0$, მაშინ $\overline{Q}$-ს შევუსაბამებთ ნულვექტორს, ე. ი. $\overline{Q}=0$. ამ შემთხვევაში ზემოაღნიშნული განმარტება გამოდგება. თუ შევცვლით λ-ს **(32)** ტოლობაში, ამით, საზოგადოდ, შეიცვლება Q ვექტორის სიგრძე, ხოლო მიმართულება დარჩება უცვლელი ან საწინააღმდეგოზე შეიცვლება. ასე მიიღება P ვექტორის ყველა პარალელური ვექტორი. მართლაც, თუ Q არის P-ს პარალელური ვექტორი, მაშინ ამ ვექტორებით (32) ტოლობა დაკმაყოფილდება, თუ λ-ს ნაცვლად ავიღებთ შემდეგ მნიშვნელობას

$$\lambda=\pm\frac{|Q|}{|P|}.$$

ზედა ნიშანი აიღება მაშინ, როცა Q ვექტორს აქვს P ვექტორის გეზი, ხოლო ქვედა ნიშანი აიღება, თუ Q ვექტორს აქვს P ვექტორის გეზის საწინააღმდეგო გეზი. ამრიგად P და Q პარალელური ვექტორებისათვის, და მხოლოდ მათთვის, ადგილი აქვს (32) დამოკიდებულებას.

2. **რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის დაგეგმილება.** დავუშვათ, რომ A და B არის P ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები. $Q=\lambda P$ ვექტორისათვის საწყის წერტილად ავიღოთ A წერტილი, ხოლო ბოლო წერტილი აღვნიშნოთ C-თი. რადგან $\overline{Q} \| P$, ამიტომ C წერტილი მოთავსდება AB წრფეზე. დავაგეგმილოთ P, და Q ვექტორები რაიმე Δ ღერძზე. გვექნება:

$$A'B'=\text{გეგ}_{\Delta}\, P, \quad A'C'=\text{გეგ}_{\Delta}\, \overline{Q}.$$

მეორე მხრივ ცხადია, რომ

$$\frac{A'C'}{A'B'}=\pm\frac{|Q|}{|P|}=\pm|\lambda|.$$

ზედა ნიშანი აიღება მაშინ, როცა $\lambda>0$ (ნახ. 36), ხოლო ქვე-

და ნიშანი აილება მაშინ, როცა $\lambda<0$ (ნახ. 37). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{A'C'}{A'B'}=\lambda,$$

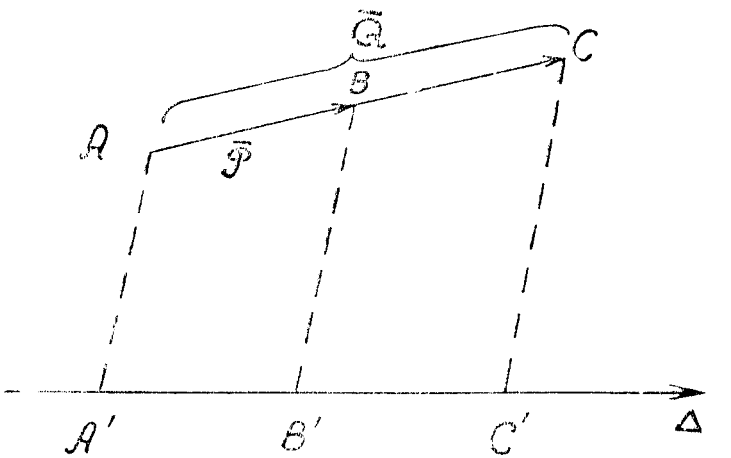
ანუ

$$A'C'=\lambda A'B',$$

ან, რაც იგივეა,

$$\text{გეგ}_{\Delta}\bar{Q}=\text{გეგ}_{\Delta}\bar{P}. \tag{33}$$

აქედან ჩანს, რომ რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის



ნახ. 36.

გეგმილი უდრის ამ რიცხვისა და ვექტორის გეგმილის ნამრავლს. რადგან $Q=\lambda P$, ამიტომ (33) ტოლობა ასე გადაიწერება

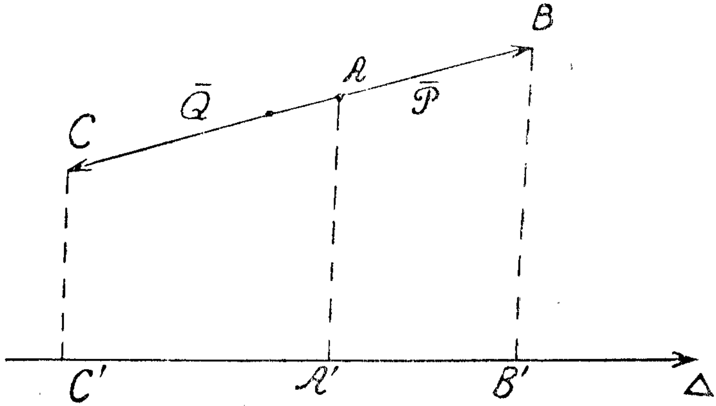
$$\text{გეგ}_{\Delta}(\lambda\bar{P})=\lambda\,\text{გეგ}_{\Delta}\bar{P}. \tag{34}$$

ამრიგად, რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის დაგეგმილების დროს რიცხობრივი მამრავლი დაგეგმილების ნიშნის გარეთ შეიძლება გამოვიტანოთ და გადავამრავლოთ ვექტორის გეგმილზე. (34) ტოლობის საფუძველზე შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი **დასკვნა.** რიცხვის ვექტორზე გადამრავლების მოქმედება და დაგეგმილების მოქმედება ერთიმეორესთან გადანაცვლებადი მოქმედებებია.

3. რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის ძირითადი თვისებები. ჩვენ განვმარტეთ λ რიცხვისა და $\overline{P}$ ვექტორის ნამრავლი. ახლა, თუ იმავე პირობით განვმარტავთ $\overline{P}$ ვექტორისა და λ რიცხვის ნამრავლს, მაშინ გვექნება

$$\lambda \overline{P} = \overline{P} \lambda, \tag{35}$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ მეორე განმარტება რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის კომუტაციურობის აღიარებაა. გარდა ამისა,



ნახ. 37.

ჩვენ დავამტკიცებთ რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის შემდეგ ძირითად თვისებებს:

1) რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლი უდრის ნულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი თანამამრავლი უდრის ნულს. მართლაც, თუ $\overline{Q}=0$, მაშინ $|\overline{Q}|=0$, ე. ი. $|\lambda|\cdot|\overline{P}|=0$. აქედან $\lambda=0$ ან $\overline{P}=0$. ამით კი ზემოაღნიშნული თვისება დამტკიცებულია.

2) რიცხვის გადამრავლება ვექტორთა ჯამზე ხდება ალგებრული მრავალწევრების გადამრავლების კანონის მიხედვით (განაწილების კანონი). ამ თვისების დასამტკიცებლად განვიხილოთ ნამრავლის გეგმილი რაიმე Δ ღერძზე. (26) ტოლობათა გამოყენებით მივიღებთ

$$გეგ_\Delta \lambda(\overline{P}_1+\overline{P}_2)=\lambda\, გეგ_\Delta(\overline{P}_1+\overline{P}_2)=\lambda(გეგ_\Delta \overline{P}_1+გეგ_\Delta \overline{P}_2).$$

რადგან უკანასკნელ ბრჩხილებში ალგებრულ რიცხვთა ($\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების ალგებრული გეგმილები) ჯამია, ამიტომ გადამრავლება მოხდება წევრ-წევრად და გვექნება

$$გეგ_\Delta \lambda(\overline{P}_1+\overline{P}_2)=\lambda\, გეგ_\Delta \overline{P}_1+\lambda\, გეგ_\Delta \overline{P}_2.$$

მეორე მხრივ, იმავე ფორმულების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\text{გეგ}_\Delta(\lambda\overline{P}_1+\lambda\overline{P}_2)=\text{გეგ}_\Delta\,\lambda\overline{P}_1+\text{გეგ}_\Delta\,\lambda\overline{P}_2=\lambda\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}_1+\lambda\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}_2.$$

ამრიგად,

$$\text{გეგ}_\Delta\,\lambda(\overline{P}_1+\overline{P}_2)=\text{გეგ}_\Delta(\lambda\overline{P}_1+\lambda\overline{P}_2).$$

რადგან ეს ტოლობა სრულდება ნებისმიერ Δ ღერძზე დაგეგმილების დროს, ამიტომ იგი შესრულდება x, y, z, ღერძებზე დაგეგმილების შემთხვევაშიც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ორ ვექტორს

$$\lambda(\overline{P}_1+\overline{P}_2) \text{ და } \lambda\overline{P}_1+\lambda\overline{P}_2$$

აქვს ერთნაირი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. ამიტომ თვით ვექტორები ტოლი უნდა იყოს. მაშასადამე,

$$\lambda(\overline{P}_1+\overline{P}_2)=\lambda\overline{P}_1+\lambda\overline{P}_2. \tag{36}$$

ეს კი ამტკიცებს გადამრავლების ზემოაღნიშნულ კანონს. აქედან ისიც გამომდინარეობს, რომ ვექტორთა ჯამში რიცხობრივი საერთო მამრავლი შეგვიძლია გამოვიტანოთ ფრჩხილების გარეთ.

3) რიცხვთა ჯამი ვექტორზე მრავლდება ალგებრულ მრავალწევრთა გამრავლების წესით. ამ თვისების დასამტკიცებლად განვიხილოთ $(a+b)\overline{P}$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე. (26), (34) ტოლობათა გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ ვექტორის გეგმილი ღერძზე ალგებრული რიცხვია, გვექნება

$$\text{გეგ}_\Delta(a+b)\overline{P}=(a+b)\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}=a\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}+b\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}.$$

მეორე მხრივ

$$\text{გეგ}_\Delta(a\overline{P}+b\overline{P})=a\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}+b\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}.$$

ამრიგად

$$\text{გეგ}_\Delta(a+b)\overline{P}=\text{გეგ}_\Delta(a\overline{P}+b\overline{P}).$$

აქედან (იმავე მსჯელობით, რომელიც (36) ფორმულის მისაღებად გამოვიყენეთ) მივიღებთ

$$(a+b)\overline{P}=a\overline{P}+b\overline{P}. \tag{37}$$

ეს კი ამტკიცებს რიცხვისა და ვექტორის გადამრავლების ზემოაღნიშნულ თვისებას. აქედან ისიც გამომდინარეობს, რომ ვექტორთა ჯამში საერთო ვექტორული მამრავლი შეიძლება ფრჩხილების გარეთ გამოვიტანოთ.

4) რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლი ემორჩილება თანამამრავლთა დაჯგუფების კანონს რიცხო-

თანამამრავლების მიმართ. ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ $(ab)\overline{P}$ ვექტორი და დავაგეგმილოთ Δ ღერძზე. გვექნება

$$\text{გეგ}_{\Delta}\,(ab)\overline{P}=(ab)\,\text{გეგ}_{\Delta}\,\overline{P}=a\,\text{გეგ}_{\Delta}\,b\overline{P}=\text{გეგ}_{\Delta}\,(b\overline{P}).$$

აქედან

$$(ab)\,\overline{P}=a\,(b\overline{P}). \tag{38}$$

5) (32) ტოლობის შექცევადობა $\overline{P}$-ს მიმართ. (32) ტოლობა გადავამრავლოთ $\frac{1}{\lambda}$-ზე. გვექნება

$$\frac{1}{\lambda}\cdot\overline{Q}=\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\overline{P})=\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\right)\overline{P}=\overline{P}.$$

ამრიგად

$$\overline{P}=\frac{1}{\lambda}\cdot\overline{Q}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{1}{\lambda}\cdot\overline{Q}=\frac{\overline{Q}}{\lambda},$$

მაშინ

$$\overline{P}=\frac{\overline{Q}}{\lambda}. \tag{40}$$

ამრიგად, (32) ტოლობიდან ვექტორული მამრავლი $\overline{P}$ ისევე ამოიხსნება, როგორც ჩვეულებრივი მამრავლი, ჩვეულებრივ რიცხვთა ნამრავლის შემთხვევაში. ყველა ზემოაღნიშნული თვისებებიდან ცხადია, რომ ვექტორული ტოლობის განხილვის დროს შეგვიძლია ვიხმაროთ ჩვეულებრივ მრავალწევრთა აღრიცხვის ტერმინები: რიცხვზე გამრავლება, რიცხვზე გაყოფა, საერთო რიცხვით მამრავლზე შეკვეცა და სხვა.

4. რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის კოორდინატები. მოცემულია

$$\overline{P}=(X,\ Y,\ Z)\ \text{და}\ \overline{Q}=\lambda\overline{P}.$$

საძიებელია $\overline{Q}$ ვექტორის კოორდინატები. (34) ფორმულის თანახმად (Δ შევცვალოთ x-ით) გვექნება

$$\text{გეგ}_x\overline{Q}=\lambda\,\text{გეგ}_x\overline{P}.$$

რადგან $\text{გეგ}_x\overline{P}=X$, ამიტომ

$$\text{გეგ}_x\overline{Q}=\lambda X.$$

ანალოგიურად მივიღებთ გეგმილებს y და z ღერძებზე. ამრიგად Q ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე, ე. ი. Q ვექტორის დეკარტის კოორდინატები იქნება λX, λY, λZ. მაშასადამე, თუ

$$\overline{P}=(X,\ Y,\ Z),$$

მაშინ

$$Q=\lambda\overline{P}=(\lambda X,\ \lambda Y,\ \lambda Z) \tag{41}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\lambda(X,\ Y,\ Z)=(\lambda X,\ \lambda Y,\ \lambda Z). \tag{42}$$

როგორც ჩანს, რ ი ც ხ ვ ი ს ა დ ა ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი შ ე ს ა ბ ა მ ა დ უ დ რ ი ს მ ო ც ე მ უ ლ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ა დ ა ვ ე ქ ტ ო რ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ე ბ ს.

კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ე ბ ი: თუ $\lambda=1$, მაშინ $\lambda\overline{P}$ ვექტორსა და P ვექტორს ექნებათ ერთნაირი სიგრძე და ერთნაირი მიმართულება, ამიტომ

$$1\cdot\overline{P}=\overline{P}.$$

თუ $\lambda=-1$, მაშინ $\lambda\overline{P}$ მხოლოდ გეზით განსხვავდება $\overline{P}$ ვექტორისაგან, მას ექნება $\overline{P}$ ვექტორის საწინააღმდეგო გეზი, ე. ი. $-1\cdot\overline{P}$ იქნება $\overline{P}$-ს მოპირდაპირე ვექტორი. ამრიგად $-1\cdot\overline{P}=-\overline{P}$, ე. ი. 1-ს და -1-ს, ვექტორზე გადამრავლების დროს, აქვთ მამრავლის ისეთივე თვისებები, როგორიც მათ აქვთ ჩვეულებრივ რიცხვზე გამრავლების დროს.

§ 4. ვექტორთა წრფივი გამოსახულების კოორდინატები

განვიხილოთ $\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\cdots,\overline{P}_n$ ვექტორები და ამ ვექტორებისაგან შევადგინოთ $\lambda_1\overline{P}_1,\ \lambda_2\overline{P}_2,\cdots,\lambda_n\overline{P}_n$ ვექტორები, სადაც $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ნამდვილი რიცხვებია. ამ უკანასკნელ ვექტორთა ჯამი ასე წარმოგვიდგება

$$\overline{P}=\lambda_1\overline{P}_1+\lambda_2\overline{P}_2+\cdots+\lambda_n\overline{P}_n. \tag{43}$$

ამ გამოსახულებას ეწოდება $\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\cdots,\ \overline{P}_n$ ვექტორთა წრფივი ნაერთი (წრფივი მრავალწევრი). დავაგეგმილოთ (43) ტოლობა Δ ღერძზე. (26) და (34) ტოლობათა გამოყენებით მივიღებთ

$$\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}=\text{გეგ}_\Delta\,(\lambda_1\overline{P}_1+\lambda_2\overline{P}_2+\cdots+\lambda_n\overline{P}_n)=$$

$$=\lambda_1\,\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}_1+\lambda_2\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}_2+\cdots+\lambda_n\text{გეგ}_\Delta\,\overline{P}_n.$$

$$\text{გეგ}_\Delta \overline{P} = \lambda_1 \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_1 + \lambda_2 \text{გეგ}_\Delta \overline{P}_2 + \cdots + \lambda_n \text{გეგ}_\Delta \overline{P}. \tag{44}$$

ასეთია ვექტორთა წრფივი გამოსახულების გეგმილის ფორმულა. როგორც აქედან ჩანს, ვექტორების წრფივი გამოსახულების გეგმილის მისაღებად მასში მოცემული ვექტორების ნაცვლად უნდა ჩავსვათ მათი გეგმილები, ხოლო რიცხობრივი მამრავლები (კოეფიციენტები) უნდა დავტოვოთ უცვლელად.

ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \cdots, \overline{P}_n$ ვექტორების კოორდინატები, ე. ი.

$$\overline{P}_1 = (X_1,\ Y_1,\ Z_1),$$
$$\overline{P}_2 = (X_2,\ Y_2\ Z_2),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\overline{P}_n = (X_n,\ Y_n,\ Z_n).$$

$\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები აღვნიშნოთ $X,\ Y,\ Z$-ით, ე. ი.

$$\overline{P} = (X,\ Y,\ Z).$$

დავაგეგმილოთ (43) ტოლობა x ღერძზე. (44) ფორმულის თანახმად გვექნება (ამ შემთხვევაში $\Delta = x$)

$$\text{გეგ}_x \overline{P} = \lambda_1 \text{გეგ}_x \overline{P}_1 + \lambda_2 \text{გეგ}_x \overline{P}_2 + \cdots + \lambda_n \text{გეგ}_x \overline{P}_n.$$

მეორე მხრივ, მოცემულობის მიხედვით

$$\text{გეგ}_x \overline{P}_1 = X_1,\ \text{გეგ}_x \overline{P}_2 = X_2, \cdots, \text{გეგ}_x \overline{P}_n = X_n.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა წინა ტოლობაში. მივიღებთ

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n.$$

ასევე მიიღება Y-ისა და Z-ის გამოსახულებანი და გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n, \\ Y &= \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \cdots + \lambda_n Y_n, \\ Z &= \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \cdots + \lambda_n Z_n. \end{aligned} \tag{45}$$

აქედან ჩანს, რომ ვექტორთა წრფივი გამოსახულების კოორდინატების მისაღებად ასე უნდა მოვიქცეთ: ვექტორთა წრფივ გამოსახულებაში მოცემული ვექტორები უნდა შევცვალოთ მათი შესაბამი კოორდინატებით, ხოლო რიცხობრივი მამრავლები (კოეფიციენტები) უნდა დავტოვოთ უცვლელად. შევნიშნოთ, რომ, თუ (43) გამოსახულება შემოკლებით არის ჩაწერილი

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{P}_i, \tag{46}$$

მაშინ P ვექტორის კოორდინატების ფორმულებისათვისაც გვექნება შემოკლებული ჩანაწერები:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i.$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i, \tag{47}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i.$$

შენიშვნა (ორი წერტილის სხვაობის შესახებ). განვიხილოთ ორი წერტილი:

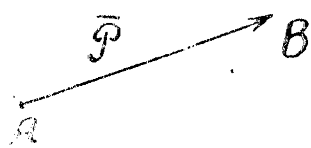
$$A = (x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$B = (x_2,\ y_2,\ z_2).$$

B და A წერტილების სხვაობა ეწოდება მათ შემაერთებელ $\overline{AB}$ ვექტორს. სხვაობა აღინიშნება ჩვეულებრივ რიცხვთა სხვაობის მსგავსად, ე. ი. შემდეგნაირად: $B-A$. ამრიგად (ნახ. 38)

$$\overline{P} = AB = B - A. \tag{47'}$$

ახლა განვიხილოთ $\overline{P}$ ვექტორის გეგმილთა (9) ფორმულები:

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1, \tag{47''}$$
$$Z = z_2 - z_1.$$



ნახ. 38.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ფორმულები ისე წარმოგვიდგებიან, თითქოს (47') ტოლობა დაგვეგეგმილებინოს კოორდინატთა ღერძებზე. ამრიგად (47'') ტოლობები მიიღება (47') ტოლობიდან, თუ ამ ტოლობაზე გავავრცელებთ დაგეგმილების კანონებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ წერტილები და ვექტორები ტოლობაში შესაბამისად შეიცვალოს მათი კოორდინატებით. (47'') ტოლობების საშუალებით ადვილად შემოწმდება, რომ (47') ტოლობა ემორჩილება ალგებრული ტოლობის წევრთა ერთი მხრიდან მეორე მხარეს გადატანის წესს.

მაგალითად, (47') ტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$B = A + \overline{P}. \tag{47'''}$$

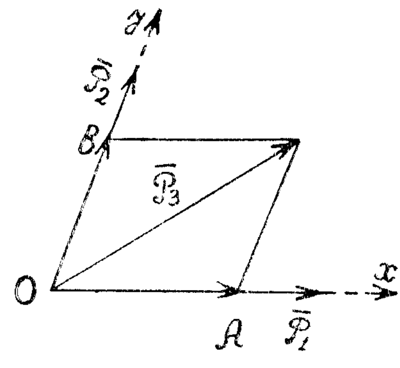
ამ ტოლობის დაგეგმილება კოორდინატთა ღერძებზე მოგვცემს:

$$x_2 = x_1 + X,$$
$$y_2 = y_1 + Y,$$
$$z_2 = z_1 + Z. \tag{47}$$

ადგილი შესამჩნევი, თუ ეს ტოლობები მიიღება (47) ტოლობებიდან x_2, y_2, z_2-ის ამოხსნით.

§ 5. სამი ვექტორის კომპლანარულობის პირობა

ვექტორებს უწოდებენ კომპლანარულს (გასიბრტყულს), თუ ისინი ერთ წერტილზე მოდების შემდეგ (პარალელური გადატანით) განლაგდებიან ერთ სიბრტყეში. ორი ვექტორი ყოველთვის კომპლანარულია, რადგან ერთ წერტილზე მოდების შემდეგ მოთავსდებიან ერთ სიბრტყეში. ეს იქნება მოდების წერტილზე და ვექტორებზე გამავალი სიბრტყე. სამი ვექტორი, საზოგადოდ, კომპლანარული არ არის. იმისათვის, რომ სამი ვექტორი კომპლანარული იყოს, საჭიროა მათ დააკმაყოფილონ გარკვეული პირობები. აქ შესწავლილი იქნება ეს პირობები. დავუშვათ, რომ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ $\overline{P}_3$ ვექტორები კომპლანარულია. მოვდოთ ეს ვექტორები O წერტილზე. ისინი განლაგდებიან ერთ სიბრტყეში. O წერტილიდან $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების მიმართულებით გავავლოთ x, y ღერძები. $\overline{P}_3$ ვექტორის ბოლო წერტილიდან გავავლოთ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების პარალელური წრფეები x, y ღერძების თანაკვეთამდე. თანაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ A-თი და B-თი შესაბამად. ასე შევადგინოთ $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორები. ნახაზიდან (ნახ. 39) აშკარაა, რომ



ნახ. 39.

$$\overline{P}_3 = \overline{OA} + \overline{OB}. \quad (47_1)$$

მეორე მხრივ,

$$\overline{OA} \parallel \overline{P}_1, \quad \overline{OB} \parallel \overline{P}_2.$$

ეს პარალელურობა შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ (პარალელური ვექტორები მხოლოდ სკალარული მამრავლით შეიძლება განსხვავდებოდეს ერთიმეორისაგან):

$$\overline{OA} = \lambda \overline{P}_1, \ \overline{OB} = \mu \overline{P}_2.$$

$\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორების ამ მნიშვნელობათა ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს

$$\overline{P}_3 = \lambda \overline{P}_1 + \mu \overline{P}_2. \quad (47_2)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ უკუსვლით ამ ტოლობიდან მიიღება წინა ტოლობა (47_1). აშკარაა, აგრეთვე, რომ, თუ $\overline{P}_3$ ვექტორი აკმაყოფილებს (47_1) ტოლობას, მაშინ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები კომპლანარული იქნება. მაშასადამე, (47_2) დამოკიდებულება წარმოგვიდგება, როგორც აუცილებელი და საკმარისი პირობა სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ (47_2) ტოლობა მიიღება შემდეგი ტოლობიდან

$$a\overline{P}_1+b\overline{P}_2+c\overline{P}_3=0 \tag{47_3}$$

$\overline{P}_3$-ის ამოხსნით (იგულისხმება, რომ $c\neq0$). თუ $c=0$, მაშინ გვექნება

$$a\overline{P}_1+b\overline{P}_2=0.$$

აქედან (იგულისხმება $b\neq0$)

$$\overline{P}_2=-\frac{a}{b}\overline{P}_1=\nu\overline{P}_1.$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\overline{P}_1 \parallel \overline{P}_2$. ამიტომ O წერტილზე მოდების შემდეგ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორები ერთ წრფეზე მოთავსდებიან; მაშასადამე, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები იქნებიან კომპლანარული ამ შემთხვევაშიც. ამრიგად (47_3) დამოკიდებულება წარმოადგენს კომპლანარული ვექტორების დამახასიათებელ პირობას, სადაც a, b, c ნებისმიერი რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად ნულები არ არის, კომპლანარულ ვექტორებს კიდევ ჰქვია წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ვ ე ქ ტ ო რ ე ბ ი, არაკომპლანარულს კი წ რ ფ ი ვ ა დ დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი. ახლა დავუშვათ, რომ მოცემულია $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორების კოორდინატები:

$$\overline{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),$$
$$\overline{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),$$
$$\overline{P}_3=(X_3,\ Y_3,\ Z_3).$$

დავაგეგმილოთ (47_3) ტოლობა კოორდინატთა ღერძებზე (ვექტორები შეიცვლება მათი კოორდინატებით შესაბამად). მივიღებთ:

$$aX_1+bX_2+cX_3=0,$$
$$aY_1+bY_2+cY_3=0,$$
$$aZ_1+bZ_2+cZ_3=0.$$

ეს არის სამი განტოლებისაგან შედგენილი ერთგვაროვანი სისტემა a, b, c უცნობების მიმართ. იმისათვის, რომ ამ სისტემას ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამოხსნი აუცილებელი და საკმა-

რისია, რომ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნული. ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნის არსებობა კი აუცილებელი და საკმარისი იქნება სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის. ამრიგად, სამი ვექტორის კომპლანარულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ასე წარმოგვიდგება (სისტემის დეტერმინანტში სტრიქონები და სვეტები გადანაცვლებულია);

$$\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (47_4)$$

დასკვნა. სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი.

§ 6. ვექტორისა და ღერძის მგეზავები

1. ვექტორის მგეზავი. $\overline{P}$ ვექტორის მგეზავი ეწოდება ისეთ $\overline{e}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

1) $|\overline{e}|=1_1$, 2) $\overline{e} \parallel \overline{P}$, 3) $\overline{e}$ ვექტორი ისეა მოგეზული, როგორც $\overline{P}$ ვექტორი. რადგან $\overline{e}$ და $\overline{P}$ პარალელური ვექტორებია, ამიტომ მათ შორის არსებობს შემდეგი (პარალელურობის ეკვივალენტური) დამოკიდებულება

$$\overline{P} = \lambda \overline{e},$$

სადაც $\lambda > 0$ ($\overline{P}$ და $\overline{e}$-ს ერთნაირი გეზი აქვთ). აქედან

$$|\overline{P}| = |\lambda| \cdot |\overline{e}|.$$

რადგან $|\overline{e}|=1$ და $\lambda>0$, ამიტომ $|\overline{P}|=|\lambda|=\lambda$. ამრიგად, $\overline{P}$ და $\overline{e}$ დაკავშირებული იქნება შემდეგნაირად

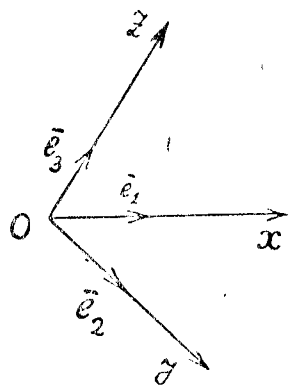
$$\overline{P} = |\overline{P}| \cdot \overline{e}. \qquad (48)$$

აქედან ჩანს, რომ ვექტორის მგეზავი ვექტორის წარმოსადგენად ისეთსავე როლს ასრულებს, როგორსაც ჩვეულებრივი ერთეული ოდენობით (ერთი ალგებრული რიცხვით განსაზღვრულ) სიდიდეთა წარმოსადგენად. ამრიგად, ვექტორის მგეზავი წარმოგვიდგება როგორც ვექტორული ერთეული. (48) ფორმულიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ თვით $\overline{e}$, მგეზავი. გვექნება

$$\overline{e} = \frac{\overline{P}}{|\overline{P}|}. \qquad (49)$$

ამრიგად, ვექტორის მგეზავი უდრის ვექტორის შეფარდებას თვით ვექტორის სიგრძესთან.

2. **ღერძის მგეზავი**. ღერძის მგეზავი ეწოდება ისეთ ერთეულ ვექტორს, რომელიც პარალელურია ღერძისა და ისევეა მოგეზული, როგორც განსახილავი ღერძი. ღერძის მგეზავს საერთაშორისო ტერმინოლოგიით ეწოდება ღერძის **ორტი**. კოორდინატთა სისტემის ღერძების, ე. ი. x, y, z ღერძების მგეზავებს აღვნიშნავთ $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$-ით შესაბამად. თუ ამ მგეზავებს მოვდებთ კოორდინატთა სისტემის სათავეზე, მაშინ ისინი მოთავსდებიან (პარალელურობის გამო) შესაბამ ღერძებზე (ნახ. 40). ახლა გამოვთვალოთ კოორდინატთა სისტემის ღერძების მგეზავების გეგმილები. ჯერ განვიხილოთ $\overline{e}_1$ მგეზავი. რადგან ეს მგეზავი x ღერძის პარალელურია, ამიტომ მისი გეგმილები y და z ღერძებზე ნულები იქნება. თვით x ღერძზე გეგმილი კი ტოლი იქნება $|\overline{e}_1|$-ს, ე. ი. 1-ის. ამრიგად, $\overline{e}_1$ ვექტორის კოორდინატებია 1, 0, 0. ასევე მიიღება e_2 და e_3 ვექტორების კოორდინატები და გვექნება:



ნახ. 40.

$$
\begin{aligned}
\overline{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0),\\
\overline{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0),\\
\overline{e}_3 &= (0,\ 0,\ 1).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

§ 7. ვექტორის განსაზღვრა კოორდინატთა ღერძების მგეზავებით

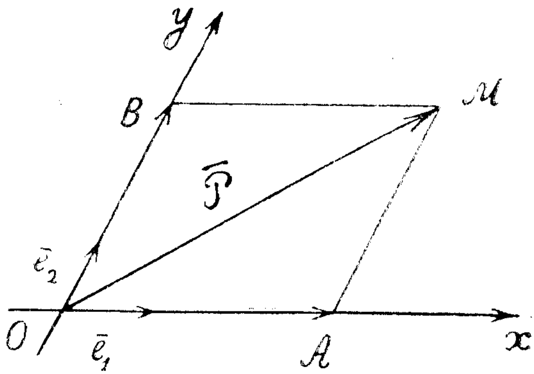
1. **Oxy სიბრტყეზე მდებარე ვექტორის განსაზღვრა ღერძების მგეზავებით.** განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე მდებარე $\overline{P}$ ვექტორი. დავუშვათ, რომ მოცემულია მისი კოორდინატები, ე. ი.

$$\overline{P} = (X,\ Y). \tag{51}$$

პარალელური გადატანით მოვდოთ ეს ვექტორი კოორდინატთა სისტემის სათავეს და დავაგეგმილოთ მისი ბოლო M წერტილი კოორდინატთა ღერძებზე. თუ ეს გეგმილებია A და B წერტილები შესაბამად, მაშინ გვექნება (ნახ. 41)

$$\overline{P}=\overline{OA}+\overline{OB}. \tag{52}$$

ამრიგად, ვექტორი წარმოგვიდგება მოცემული ორი მიმართულე-ბის (ამ შემთხვევაში კოორდინატთა ღერძების) პარალელურ შესაკ-რებთა ჯამის სახით. $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორებს ეწოდება $\overline{P}$ ვექტო-რის (აღებული ორი მიმართულებისადმი) პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი მ დ გ ე-ნ ე ლ ე ბ ი. $\overline{P}$ ვექტორის წარმოდგენას (52) ფორმულით ეწოდება ვ ე ქ ტ ო რ ი ს დ ა შ ლ ა ა ღ ე ბ უ ლ ი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი ს პ ა რ ა-ლ ე ლ უ რ მ დ გ ე ნ ე ლ ე ბ ა დ. აშკარაა, რომ ვექტორის ასეთი დაშ-



ნახ. 41.

ლა ცალსახაა, ე. ი. მოცემული მიმართულების პარალელურ შესაკ-რებთა მხოლოდ ერთი წყვილი არსებობს. მართლაც, ორი გან-სხვავებული წყვილით აიგება განსხვავებული პარალელოგრამები და შესაბამი დიაგონალები, ე. ი. განსახილავ მდგენელთა თითოე-ული წყვილის ჯამი სხვადასხვა იქნება.

41-ე ნახაზიდან ცხადია, რომ $OA \parallel \overline{e_1}$ (OA ვექტორი მოთავსებუ-ლია x ღერძზე). ეს პარალელურობა, როგორც ცნობილია, შეიძლე-ბა ჩაიწეროს (პარალელურობის ეკვივალენტური ტოლობით) ასე

$$OA=\lambda\overline{e_1}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერძზე. გვექნება

$$\text{გეგ}_x\overline{OA}=\lambda\,\text{გეგ}_x\overline{e}_1.$$

რადგან $\overline{e}_1$ მგეზავია, ამიტომ $|\overline{e_1}|=1$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\text{გეგ}_x\overline{e}_1=1,$$
$$\text{გეგ}_x\overline{OA}=X.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი წინა ტოლობაში. მივიღებთ

$$\lambda = X.$$

ამრიგად, $\overline{OA}$ ვექტორი წარმოგვიდგება ასე

$$\overline{OA} = X\overline{e_1}. \qquad (53)$$

ანალოგიური ფორმულით განისაზღვრება OB ვექტორი

$$\overline{OB} = Y\overline{e_2}. \qquad (54)$$

შევიტანოთ $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორების ეს მნიშვნელობანი (52) ტოლობაში. მივიღებთ

$$\overline{P} = X\overline{e_1} + Y\overline{e_2}. \qquad (55)$$

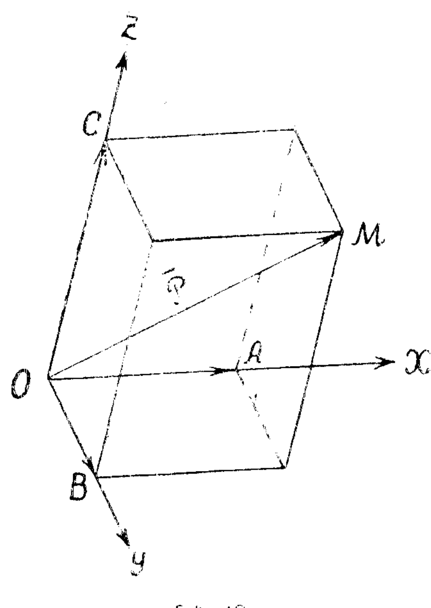
ადვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორის ასეთი გამოსახვა შესრულდება ცალსახად, ე. ი. (55) ტოლობა ტოლფასია (51) მოცემულობისა. ამ გამოსახულებას, კოორდინატთა ღერძების მგეზავების საშუალებით, ეწოდება *ვექტორის დაშლის ფორმულა*.

2. სივრცეში აღებული ვექტორის დაშლა კოორდინატთა ღერძების მგეზავების საშუალებით. განვიხილოთ P ვექტორი სივრცეში. დავუშვათ, რომ მისი კოორდინატებია X, Y, Z, ე. ი.

$$\overline{P} = (X, Y, Z). \qquad (56)$$

პარალელური გადატანით მოვდოთ ეს ვექტორი კოორდინატთა სისტემის სათავეს და დავაგეგმილოთ მისი ბოლო M წერტილი კოორდინატთა ღერძებზე. თუ ეს გეგმილებია შესაბამად A, B, C წერტილები, მაშინ წინა გამოთვლების ანალოგიური გამოთვლებით, მივიღებთ (ნახ. 42):

$$\overline{OA} = X\overline{e_1},$$
$$\overline{OB} = Y\overline{e_2},$$
$$\overline{OC} = Z\overline{e_3}.$$



ნახ. 42.

ნახ. 42-დან აშკარაა, რომ

$$\overline{P} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

ამრიგად მივიღებთ

$$P = X\bar{e}_1 + Y\bar{e}_2 + Z\bar{e}_3. \qquad (57)$$

ცხადია, რომ ეს ფორმულაც ცალსახად არის განსაზღვრული, რაც იმას ნიშნავს, რომ OA, OB, OC მდგენელები განსაზღვრულია ცალსახად P ვექტორით. მართლაც, ამ სამეულის შეცვლა გამოიწვევს მათზე აგებული პარალელეპიპედის შეცვლას და, მაშასადამე, თვით დიაგონალის შეცვლასაც. ამრიგად, (57) ფორმულა ეკვივალენტურია (56) მოცემულობისა, ე. ი. ვექტორის კოორდინატთა ღერძების მგეზავებში ყოველგვარი დაშლის კოეფიციენტები ამ ვექტორის კოორდინატებია შესაბამად.

§ 8. ვექტორი მართკუთხა კოორდინატებში

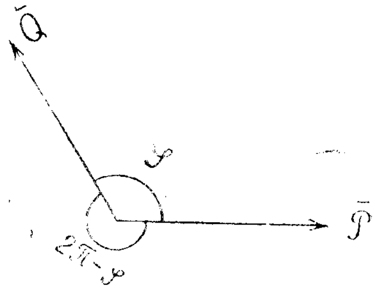
1. წერტილისა და ვექტორის მართკუთხა გეგმილები სიბრტყეზე. წერტილიდან მოცემულ π სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეს ეწოდება წერტილის მართკუთხა გეგმილი π სიბრტყეზე. M წერტილიდან მოცემული Δ ღერძის მართობულად გამავალი სიბრტყის თანაკვეთის წერტილს Δ ღერძთან ეწოდება M წერტილის მართკუთხა გეგმილი Δ ღერძზე. ეს უკანასკნელი წერტილი, ცხადია, წარმოგვიდგება როგორც M წერტილიდან Δ ღერძზე დაშვებული მართობის ფუძე. AB ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილების π სიბრტყეზე მართკუთხა გეგმილებით განსაზღვრულ ვექტორს ეწოდება AB ვექტორის მართკუთხა ვექტორული გეგმილი π სიბრტყეზე. იმავე საწყისი და ბოლო წერტილების Δ ღერძზე მართკუთხა გეგმილებით განსაზღვრულ ვექტორს ეწოდება AB ვექტორის მართკუთხა ვექტორული გეგმილი Δ ღერძზე. ბოლოს A და B წერტილების Δ ღერძზე მართკუთხა გეგმილებით განსაზღვრული მონაკვეთის ალგებრულ მნიშვნელობას ეწოდება ვექტორის მართკუთხა გეგმილი Δ ღერძზე. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში ვექტორის პარალელური გეგმილები, ცხადია, მართკუთხა გეგმილებიც იქნება. მათ ეწოდებათ ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები.

2. ვექტორის მართკუთხა გეგმილის გამოსათვლელი ფორმულა. ჯერ განვმარტოთ ორ ვექტორს შორის კუთხე. ნებისმიერად აღებული P და Q ვექტორები პარალელური გადატანით მოვდოთ ერთ წერტილზე, მაშინ ისინი ერთიმეორესთან შეადგენენ ორ კუთხეს, რომლებიც ერთიმეორეს შეავსებენ 2π-მდე. ამ ორი კუთხიდან უმცირესს ეწოდება ორ ვექტორს შორის კუთხე. მას აღვნიშნავთ φ-თი. ზოგჯერ მას ასეც აღნიშნავენ: (P, Q). ამავე ვექტო-

რებისაგან შედგენილი მეორე კუთხე იქნება $2\pi-\varphi$ (ნახ. 43). ამ ნახაზიდან და თვით განმარტებიდანაც აშკარაა, რომ φ კუთხე იცვლება შემდეგნაირად

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{58}$$

$\overline{P}$ ვექტორის მიერ Δ ღერძთან შედგენილი კუთხე ეწოდება ამ ვექტორსა და ღერძის მგეზავს შორის კუთხეს. მას აღვნიშნავთ ϑ-თი. იგი აღინიშნება აგრეთვე ასე: $(\overline{P}, \Delta)$. ამ კუთხის ცვლის შუალედი იქნება $(0, \pi)$. $\overline{P}$ ვექტორი პარალელური გადატანით მოვდოთ Δ ღერძის O წერტილს და გამოვთვალოთ ვექტორის მართკუთხა გეგმილი Δ ღერძზე. $\overline{P}$ ვექტორის ბოლო M წერტილიდან დავუშვათ მართობი Δ ღერძზე.



ნახ. 43.

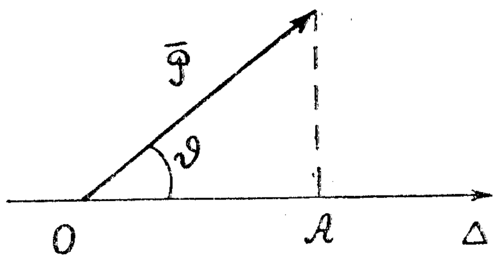
თუ მართობის ფუძეს აღვნიშნავთ A-თი, მაშინ გვექნება

$$\text{გეგ}_{\Delta}\overline{P} = OA.$$

ϑ კუთხისათვის განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $\vartheta < \dfrac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში OA დადებითია, ამიტომ (ნახ. 44)

$$OA = |OA| = |\overline{P}| \cos \vartheta.$$



ნახ. 44.

2) $\vartheta > \dfrac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში OA უარყოფითია, ამიტომ (ნახ. 45)

$$OA = -|OA| = -|\overline{P}| \cos(\pi-\vartheta) = |\overline{P}| \cos \vartheta.$$

ამრიგად, OA-სათვის ორივე შემთხვევაში მივიღეთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა

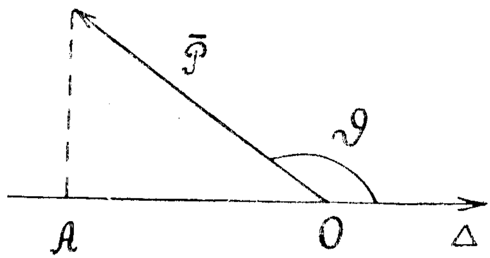
$$OA = |\overline{P}| \cos \vartheta,$$

ე. ი.

$$\text{გეგ}_{\Delta} \overline{P} = |\overline{P}| \cos \vartheta \tag{59}$$

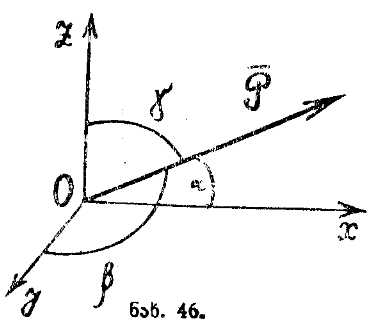
(რადგან $\text{გეგ}_{\Delta} \overline{P} = OA$).

ასეთია Δ ღერძზე $\overline{P}$ ვექტორის მართკუთხა გეგმილის გამოსათვლელი ფორმულა. ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს მ ა რ თ კ უ თ ხ ა გ ე გ მ ი ლ ი ღ ე რ ძ ზ ე უ დ რ ი ს ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ს ი გ რ ძ ი ს ა დ ა ვ ე ქ ტ ო რ ი ს მ ი ე რ ღ ე რ ძ თ ა ნ შ ე დ გ ე ნ ი ლ ი კ უ თ ხ ი ს კ ო ს ი ნ უ ს ი ს ნ ა მ რ ა ვ ლ ს.



ნახ. 45.

შ. ვექტორის მართკუთხა კოორდინატები. ახლა განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. $\overline{P}$ ვექტორის მიერ შედგენი-



ნახ. 46.

ლი კუთხეები კოორდინატთა ღერძებთან შესაბამად აღვნიშნოთ α, β, γ-თი, ე. ი.

$$\begin{aligned} \alpha &= (\overline{P},\ x), \\ \beta &= (\overline{P},\ y), \\ \gamma &= (\overline{P},\ z). \end{aligned} \tag{60}$$

ამ შემთხვევაში, ვექტორის X, Y, Z პარალელური გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე მართკუთხა გეგმილები იქნება; მაგალითად, X კოორდინატი (59) ფორმულის მიხედვით ასე გამოისახება (ამ შემთხვევაში $\theta=\alpha$)

$$X=\text{გეგ}_x P=|\bar{P}|\cos\alpha.$$

ანალოგიურად გამოითვლება Y და Z. ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს (ნახ. 46):

$$
\begin{aligned}
X &= |\bar{P}|\cos\alpha,\\
Y &= |\bar{P}|\cos\beta, \qquad (61)\\
Z &= |\bar{P}|\cos\gamma.
\end{aligned}
$$

3. ვექტორის სიგრძე მართკუთხა კოორდინატებში. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში ვექტორის $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, და $\overline{OC}$ მდგენელები მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები იქნება (იხ. ნახ. 42). ასეთი პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძის კვადრატი, როგორც ცნობილია, უდრის OA, OB, OC წიბოების კვადრატების ჯამს. მეორე მხრივ, დიაგონალის სიგრძე არის $|\bar{P}|$. ამრიგად,

$$|\bar{P}|^2=|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2.$$

ჩავსვათ აქ OA, OB, OC მონაკვეთების შემდეგი ალგებრული მნიშვნელობანი:

$$OA=X,\ OB=Y,\ OC=Z.$$

მივიღებთ

$$|\bar{P}|^2=X^2+Y^2+Z^2. \qquad (62)$$

ამრიგად, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში *ვექტორის სიგრძის კვადრატი უდრის ამ ვექტორის კოორდინატების კვადრატების ჯამს.*

(62) ტოლობიდან ფესვის ამოღებით მივიღებთ ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელ ფორმულას.

$$|\bar{P}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (63)$$

ამრიგად, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში *ვექტორის სიგრძე უდრის კვადრატულ ფესვს იმავე ვექტორის კოორდინატების კვადრატების ჯამიდან.*

4. ვექტორის გეზის კოსინუსები. ვექტორის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსებს ეწოდება *ვექტორის გეზის კოსინუსები.* თუ მოცემულია ვექტორის

მართკუთხა კოორდინატები, მაშინ ვექტორის გეზის კოსინუსები, ე. ი. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ განისაზღვრება (61) ფორმულებიდან:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{P}|},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{|\overline{P}|}, \qquad (64)$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{|\overline{P}|}.$$

თუ (64) ტოლობებში შევიტანთ $|\overline{P}|$-ს მნიშვნელობას (63) ფორმულიდან, საბოლოოდ მივიღებთ ვექტორის გეზის კოსინუსების ფორმულებს:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad (65)$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

ამ უკანასკნელ ტოლობათა კვადრატში ამაღლება და შეკრება მოგვცემს

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (66)$$

ამრიგად, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში, ვექტორის გეზის კოსინუსების კვადრატების ჯამი უდრის ერთს.

5. ვექტორის მგეზავის მართკუთხა კოორდინატები. ცხადია, რომ ვექტორის მგეზავი იმავე კუთხეებს ადგენს კოორდინატთა სისტემის ღერძებთან, რასაც თვით ვექტორი. ამიტომ მგეზავის კოორდინატები (61) ფორმულების მიხედვით განისაზღვრება, სადაც $|\overline{P}|$-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ $|\overline{e}|$, რომელიც ერთის ტოლია. მივიღებთ თვით მგეზავის კოორდინატებს. ამრიგად, თუ $\overline{e}$ მგეზავის კოორდინატებს აღვნიშნავთ e, m, n-ით, ე. ი. თუ

$$\overline{e} = (e,\ m,\ n), \qquad (67)$$

მაშინ

$$e = \cos\alpha,\quad m = \cos\beta,\quad n = \cos\gamma.$$

მაშასადამე, მგეზავი ასე განისაზღვრება

$$\overline{e} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \qquad (68)$$

ამრიგად, P ვექტორის გეზის კოსინუსები მისი მგეზავის კოორდინატებია.

6. Oxy სიბრტყეზე მდებარე ვექტორის მართკუთხა გეგმილები. იმ შემთხვევაში, როცა $\overline{P}$ ვექტორი Oxy სიბრტყეზეა მოთავსებული, მაშინ მის მიერ z ღერძთან შედგენილი კუთხე არის $\frac{\pi}{2}$, ხოლო გეგმილი z ღერძზე ნულია, ე. ი. $Z=0$. გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში, $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ (ნახ. 47), ამიტომ $\cos\beta=\sin\alpha$. ამ პირობებში (61), (62), (63), (64), (65), (68) ფორმულები შესაბამად მიიღებს შემდეგ სახეს:

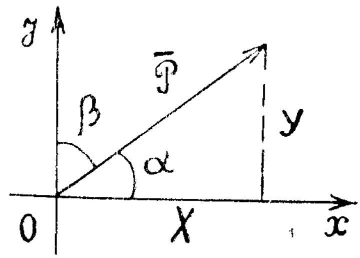
$$X=|\overline{P}|\cos\alpha,\quad Y=|\overline{P}|\sin\alpha. \tag{69}$$

$$|\overline{P}|^2=X^2+Y^2 \tag{70}$$

(ვექტორის სიგრძის კვადრატი).

$$|\overline{P}|=\sqrt{X^2+Y^2} \tag{71}$$

(ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა).



ნახ. 47.

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\overline{P}|},\quad \sin\alpha=\frac{Y}{|\overline{P}|} \tag{72}$$

(ვექტორის გეზის კოსინუსები).

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin\alpha=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \tag{73}$$

(ვექტორის გეზის კოსინუსები).

$$\overline{e}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha) \tag{74}$$

(ვექტორის მგეზავის განსაზღვრა კოორდინატებში).

აქ ჩამოთვლილი ფორმულები ადვილად შეიძლება მივიღოთ უშუალოდ 47-ე ნახაზიდანაც.

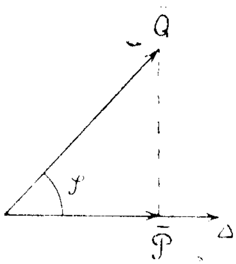
... ნამრავლის განმარტება და ძირითადი თვისე-ბები. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება ასე: $\overline{P} \cdot \overline{Q}$. განმარტების თანახმად გვექნება

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = |\overline{P}| \cdot |\overline{Q}| \cdot \cos\varphi, \tag{75}$$

სადაც

$$\varphi = (\overline{P}, \ \overline{Q}).$$

Δ ღერძი ავიღოთ $\overline{P}$ ვექტორის პარალელურად და ისევე მოვვე-ზოთ, როგორც $\overline{P}$ ვექტორია მოგეზული, მაშინ პარალელური გადატანით შეგვიძლია $\overline{P}$ ვექტორი მოვათავსოთ Δ ღერძზე. ცხადია, რომ ამ პირობებში $\overline{Q}$ ვექტორის მიერ Δ ღერძთან შედგენილი კუთხე იქნება $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებს შორის კუთხე (ნახ. 48). ამ შემთხვევაში $\overline{Q}$ ვექტორის გეგმილს Δ ღერძზე ეწოდება $\overline{Q}$ ვექტორის გეგმილი $\overline{P}$ ვექტორზე და ასე აღინიშნება: გეგ$_{\overline{P}}\overline{Q}$. ვექტორის ღერძზე მართკუთხა გეგმილის გამოსათვლელი ფორმულის (ფორმ. 59) თანახმად, მივიღებთ



ნახ. 48.

$$\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q} = |\overline{Q}| \cos\varphi.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის მიხედვით (75) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = |\overline{P}| \cdot \text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}. \tag{76}$$

ანალოგიური მსჯელობით (75) ფორმულა შეიძლება შეცვლილ იქნას შემდეგნაირადაც

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = |\overline{Q}| \, \text{გეგ}_{\overline{Q}}\overline{P}. \tag{77}$$

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1) $\overline{P} \cdot \overline{Q} = \overline{Q} \cdot \overline{P}$ (კომუტაციურობის კანონი). ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს (75) ფორმულიდან. მართლაც, ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი ნამრავლი დამოკიდებული არ არის თანამამრავლთა მიმდევრობაზე (ალგებრულ რიცხვთა ნამრავლია).

2) $\overline{P} \cdot \overline{Q} = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(\overline{P}) = 0$ ან $(\overline{Q}) = 0$, ან $\cos\varphi = 0$, ე. ი. როცა

$$\overline{P} = 0 \text{ ან } \overline{Q} = 0, \text{ ან } \varphi = 90^\circ.$$

ამრიგად, სკალარული ნამრავლი ნულს უდრის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი თანამამრავლი ნულია ან როცა ვექტორები თანამართობულია.

3) სკალარული ნამრავლი ემორჩილება ჩვეულებრივ მრავალწევრთა გადამრავლების კანონს. ამ თვისების დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ $\overline{Q}=\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+\cdots+\overline{Q}_n$. (76) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\overline{P}\cdot\overline{Q}=|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}=|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+\cdots+\overline{Q}_n)=$$

$$=|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}_1+|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}_2+\cdots+|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}_n=\overline{P}\cdot\overline{Q}_1+$$

$$+\overline{P}\cdot\overline{Q}_2+\cdots+\overline{P}\cdot\overline{Q}_n.$$

ამრიგად,

$$\overline{P}\cdot(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+\cdots+\overline{Q}_n)=\overline{P}\cdot\overline{Q}_1+\overline{P}\cdot\overline{Q}_2+\cdots+\overline{P}\cdot\overline{Q}_n. \qquad (78)$$

სკალარული ნამრავლის კომუტაციურობის გამო (78) ფორმულა მოგვცემს ვექტორულ მრავალწევრთა გადამრავლების კანონს ისევე, როგორც ეს ხდება ჩვეულებრივ მრავალწევრთა გადამრავლების დროს. ამით ზემოაღნიშნული თვისება დამტკიცებულია.

4) თუ თანამამრავლი ვექტორები შეიცავენ რიცხობრივ მამრავლებს, მაშინ სკალარული ნამრავლი ემორჩილება (რიცხობრივი თანამამრავლების მიმართ) ჩვეულებრივი გამრავლების დაჯგუფების (ასოციაციურობის) კანონს. ამის დასამტკიცებლად $\overline{Q}$-ს ნაცვლად განვიხილოთ $\lambda\overline{Q}$ და გამოვიყენოთ (76) ფორმულა. გვექნება

$$\overline{P}\cdot\lambda\overline{Q}=|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}\,\lambda\overline{Q}=|\overline{P}|\lambda\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}=$$

$$\lambda|\overline{P}|\text{გეგ}_{\overline{P}}\overline{Q}=\lambda(\overline{P}\cdot\overline{Q}).$$

ამრიგად,

$$\overline{P}\cdot\lambda\overline{Q}=\lambda(\overline{P}\cdot\overline{Q}).$$

ახლა განვიხილოთ $\lambda\overline{P}\cdot\mu\overline{Q}$. ნამრავლის კომუტაციურობის გამო მივიღებთ

$$\lambda\overline{P}\cdot\mu\overline{Q}=\lambda(\overline{P}\cdot\mu\overline{Q})=\lambda\mu(\overline{P}\cdot\overline{Q}).$$

ამრიგად,

$$\lambda\overline{P}\cdot\mu\overline{Q}=\lambda\mu(\overline{P}\cdot\overline{Q}). \qquad (79)$$

ეს კი ამტკიცებს ზემოაღნიშნულ თვისებას.

2. ვექტორის კვადრატი. $\overline{P}$ ვექტორის სკალარულ ნამ-

რავლს თავის თავზე, ე. ი. $\overline{P} \cdot \overline{P}$-ს, ეწოდება ვექტორის კვადრატი. იგი აღინიშნება $\overline{P}^2$-ით, მაშასადამე,

$$\overline{P}^2 = \overline{P} \cdot \overline{P}.$$

მეორე მხრივ, $\overline{P} \cdot \overline{P}$ მიიღება (75) ფორმულიდან, სადაც უნდა ჩავსვათ $\overline{P} = \overline{Q}$, $\varphi = 0$. გვექნება

$$\overline{P} \cdot \overline{P} = |\overline{P}| \cdot |\overline{P}| \cdot \cos 0 = |\overline{P}|^2.$$

ამრიგად

$$\overline{P}^2 = \overline{P} \cdot \overline{P} = |\overline{P}|^2. \tag{80}$$

3. კოორდინატთა ღერძების მგეზავების სკალარული ნამრავლი. რადგან

$$|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = |\overline{e}_3| = 1,$$

ამიტომ (80) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \overline{e}_1^{\,2} &= 1, \\ \overline{e}_2^{\,2} &= 1, \\ \overline{e}_3^{\,2} &= 1. \end{aligned} \tag{81}$$

ახლა გამოვთვალოთ მგეზავების ურთიერთსკალარული ნამრავლები. ჯერ გამოვთვალოთ $\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2$. რადგან $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ მგეზავებს შორის კუთხე იგივეა, რაც x, y ღერძებს შორის, ამიტომ

$$\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = |\overline{e}_1| \cdot |\overline{e}_2| \cos(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = \cos(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = \cos(x, y).$$

ამრიგად,

$$\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = \cos(x, y).$$

ასე მივიღებთ სკალარულ ნამრავლებს დანარჩენი წყვილებისათვისაც და გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 &= \cos(x, y), \\ \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_3 &= \cos(x, z), \\ \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_3 &= \cos(y, z). \end{aligned} \tag{82}$$

თუ კოორდინატთა სისტემა მართკუთხაა, მაშინ ღერძებს შორის კუთხეების კოსინუსები ნულები იქნება და (82) ტოლობანი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 &= 0, \\ \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_3 &= 0, \\ \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{83}$$

რაც შეეხება (81) ტოლობებს ისინი უცვლელად დარჩებიან მართკუთხა სისტემის შემთხვევაშიაც.

4. სკალარული ნამრავლის გამოსახვა დეკარტის კოორდინატებში. თუ მოცემულია $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორები:

$$\overline{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),$$
$$\overline{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),$$

მაშინ, თანახმად ვექტორის დაშლის (57) ფორმულისა, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overline{P}_1=X_1\overline{e}_1+Y_1\overline{e}_2+Z_1\overline{e}_3,$$
$$\overline{P}_2=X_2\overline{e}_1+Y_2\overline{e}_2+Z_2\overline{e}_3.$$

ახლა გამოვთვალოთ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი. გვექნება

$$\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2=(X_1\overline{e}_1+Y_1\overline{e}_2+Z_1\overline{e}_3)(X_2\overline{e}_1+Y_2\overline{e}_2+Z_2\overline{e}_3)=$$
$$=X_1X_2\overline{e}_1^{\,2}+Y_1Y_2\overline{e}_2^{\,2}+Z_1Z_2\overline{e}_3^{\,2}+(X_1Y_2+X_2Y_1)\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2+$$
$$+(X_1Z_2+X_2Z_1)\overline{e}_1\cdot\overline{e}_3+(Y_1Z_2+Y_2Z_1)\overline{e}_2\cdot\overline{e}_3.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (81) და (82) ფორმულებს, მაშინ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2+(X_1Y_2+Y_1X_2)\cos(x,\ y)+$$
$$+(X_1Z_2+Z_1X_2)\cos(x,\ z)+(Y_1Z_2+Z_1Y_2)\cos(y,\ z). \qquad (84)$$

ასე გამოისახება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი დეკარტის კოორდინატებში. თუ კოორდინატთა სისტემა მართკუთხაა, მაშინ ღერძებს შორის კუთხეების კოსინუსები ნულებია და (84) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \qquad (85)$$

ასე გამოისახება სკალარული ნამრავლი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში. აქედან ჩანს, რომ სკალარული ნამრავლი უდრის შესაბამი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს

5. სკალარული ნამრავლი Oxy სიბრტყეზე მდებარე ვექტორებისათვის. თუ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორები Oxy სიბრტყეზე მდებარეობენ, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი მიიღება (84) ფორმულიდან მასში $z_1=z_2=0$ ჩასმით. გვექნება

$$\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2=X_1X_2+Y_1Y_2+(X_1Y_2+Y_1X_2)\cos(x,\ y). \qquad (86)$$

თუ Oxy სისტემა მართკუთხაა, მაშინ $\cos(x,\ y)=0$ და მივიღებთ

$$\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2=X_1X_2+Y_1Y_2. \qquad (87)$$

6. ვექტორის კვადრატის გამოსახვა კოორდინატებში. თუ დავუშვებთ, რომ

$$\overline{P}_1=\overline{P}_2=\overline{P}, \text{ მაშინ } X_1=X_2=X, \ Y_1=Y_2=Y, \ Z_1=Z_2=Z.$$

ამ პირობებში სკალარული ნამრავლის (84) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\overline{P}^2=X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos(x, y)+2XZ\cos(x, z)+$$
$$+2YZ\cos(y, z). \tag{88}$$

აქედან კვადრატული ფესვის ამოღებით მივიღებთ ვექტორის სიგრძის გამოსახულებას კოორდინატებში. მართკუთხა სისტემის შემთხვევაში ღერძებს შორის კუთხეების კოსინუსები ნულებია და (88) ფორმულიდან მივიღებთ

$$P^2=X^2+Y^2+Z^2. \tag{89}$$

აქედან კვადრატული ფესვის ამოღებით მიიღება ვექტორის სიგრძის ჩვენთვის უკვე ცნობილი (63) ფორმულა.

თუ $\boldsymbol{P}$ ვექტორი მოთავსებულია $\boldsymbol{Oxy}$ სიბრტყეზე, მაშინ მისი სიგრძის კვადრატი მიიღება (88) ფორმულიდან $Z=0$-ის ჩასმით. გვექნება

$$P^2=X^2+Y^2+2XY\cos(x, y). \tag{90}$$

თუ Oxy სისტემა მართკუთხაა, მაშინ $\cos(x, y)=0$ და მივიღებთ

$$\overline{P}^2=X^2+Y^2. \tag{91}$$

აქედან კვადრატული ფესვის ამოღებით მივიღებთ ვექტორის სიგრძის უკვე ცნობილ (71) ფორმულას.

§ 10. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი

1. ვექტორული ნამრავლის განმარტება და ძირითადი თვისებები. $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\overline{R}$ ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი პირობებით:

1. $|\overline{R}|=|\overline{P}|\cdot|\overline{Q}|\cdot\sin\varphi$, სადაც $\varphi=(\overline{P}, \overline{Q})$;

2. $\overline{R}\perp(\overline{P}, \overline{Q})$ (ე. ი. ერთდროულად მართობია ორივე ვექტორისა);

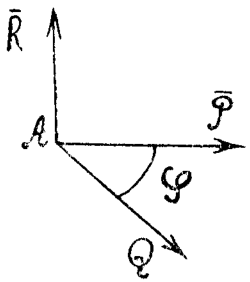
3. $\overline{R}$ მოგეზულია ისე, რომ $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ ვექტორთა **სამეული** (ერთ წერტილზე მოდებული) მარცხენა მოგეზულობისაა (ნახ. 49). ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება ასე

$$[\overline{P}, \overline{Q}] \text{ ან } \overline{P}\times\overline{Q}.$$

[illegible] ვიხმართ პირველ აღნიშვნას. ამგვარად,

$$\overline{R}=[\overline{P},\ \overline{Q}]. \tag{92}$$

განმარტებიდან აშკარაა, რომ ვექტორული ნამრავლი უდრის ნულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|\overline{P}|=0$ ან $|\overline{Q}|=0$, ან $\sin\varphi=0$, ე. ი. როცა $\overline{P}=0$ ან $\overline{Q}=0$, ან $\varphi=0, \pi$. ამრიგად, ვექტორული ნამრავლი უდრის ნულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი თანამამრავლი უდრის ნულს ან როცა ვექტორები პარალელურია.



ნახ. 49.

თუ გადავანაცვლებთ თანამამრავლებს, მაშინ ვექტორული ნამრავლი მხოლოდ მიმართულებას შეიცვლის (პირველი და მეორე პირობები არ შეიცვლება), რადგან $\overline{P}$-სა და $\overline{Q}$-ს გადანაცვლება ცვლის $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ სამეულის მოგეზულობას. ამრიგად,

$$[\overline{Q},\ \overline{P}]=-[\overline{P},\ \overline{Q}].$$

აქედან ჩანს, რომ ვექტორული ნამრავლი არ არის კომუტაციური, მაგრამ თანამამრავლთა გადაადგილების დროს მაინც გარკვეული წესით იცვლება. *თანამამრავლთა გადანაცვლებით ვექტორული ნამრავლი მხოლოდ ნიშანს იცვლის.*

განვიხილოთ $\lambda\overline{P}$ და $\mu\overline{Q}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი. განმარტების მიხედვით შევამოწმოთ მისი განმსაზღვრელი პირობები:

1. $|[\lambda\overline{P},\ \mu\overline{Q}]|=|\lambda\overline{Q}|\cdot|\mu\overline{Q}|\cdot\sin(\lambda\overline{P},\ \mu\overline{Q})=$
$=|\lambda\mu|\cdot|\overline{P}|\cdot|\overline{Q}|\cdot\sin(\lambda\overline{P},\ \mu\overline{Q})$;

2. $[\lambda\overline{P},\ \mu\overline{Q}]\perp(\lambda\overline{P},\ \mu\overline{Q})$. რადგან $\lambda\overline{P}$ და $\mu\overline{Q}$ ვექტორები პარალელურია $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებისა, ამიტომ $[\lambda\overline{P},\mu\overline{Q}]\perp(\overline{P},\ \overline{Q})$;

3. $[\lambda\overline{P},\mu\overline{Q}]$ მოგეზული უნდა იყოს ისე, რომ $\lambda\overline{P}$, $\mu\overline{Q}$, $[\lambda\overline{P},\mu\overline{Q}]$ სამეულს ჰქონდეს მარცხენა მოგეზულობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ სამეულს აქვს ისეთივე მოგეზულობა, როგორიც $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $[\overline{P},\ \overline{Q}]$ სამეულს, თუ λ-სა და μ-ს აქვს ერთნაირი ნიშანი (ე. ი. თუ $\lambda\mu>0$);

ზემოაღნიშნულ სამეულს აქვს $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $[\bar{P}, \bar{Q}]$ სამეულის საწინააღმდეგო მოგეზულობა, თუ λ-სა და μ-ს აქვთ სხვადასხვა ნიშანი (ე. ი. თუ $\lambda\mu<0$). მეორე მხრივ, $\lambda\mu[\bar{P}, \bar{Q}]$ ვექტორს აქვს ზუსტად ასეთივე განმსაზღვრელი პირობები; ამიტომ

$$[\lambda\bar{P}, \mu\bar{Q}]=\lambda\mu[\bar{P}, \bar{Q}]. \tag{94}$$

ამრიგად, **ვექტორულ ნამრავლში შემავალი სკალარული მამრავლები ემორჩილება თანამამრავლთა დაჯგუფების კანონს.**

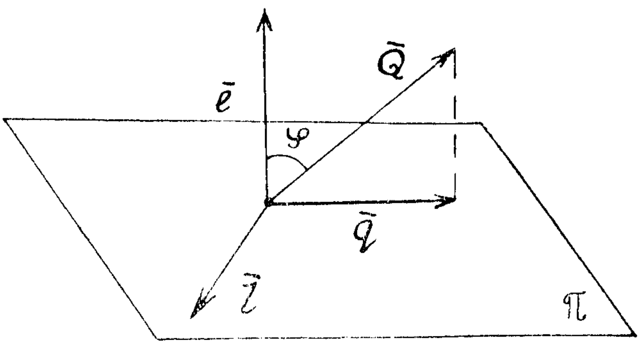
იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ვექტორის მრავალწევრზე გამრავლების საკითხი, საჭიროა აღვნიშნოთ ვექტორული ნამრავლის შემდეგი თვისება. დავუშვათ, რომ $\bar{e}$ არის $\bar{P}$ ვექტორის მგეზავი, ე. ი. $\bar{P}=|\bar{P}|\bar{e}$. (94) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$\bar{R}=[\bar{P}, \bar{Q}]=[|\bar{P}|\bar{e}, \bar{Q}]=|\bar{P}|\cdot[\bar{e}, \bar{Q}].$$

აღვნიშნოთ

$$\bar{r}=[\bar{e}, \bar{Q}].$$

$\bar{e}$ ვექტორის საწყის წერტილზე გავატაროთ ამ ვექტორის მართობული π სიბრტყე. დავაგეგმილოთ $\bar{Q}$ ვექტორი π სიბრტყეზე მართო-



ნახ. 49 ა.

ბულად. თუ $\bar{q}$-თი აღვნიშნავთ ამ გეგმილს, მაშინ გვექნება (ნახ. 49 ა)

$$|\bar{q}|=|\bar{Q}|\sin\varphi.$$

მეორე მხრივ, ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად,

$$|\bar{r}|=|\bar{e}|\cdot|\bar{Q}|\sin\varphi=|\bar{Q}|\sin\varphi.$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$|\overline{q}|=|\overline{r}|.$$

რადგან $\overline{r}$ მართობულია $\overline{e}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და $\overline{q}$ კი მდებარეობს ამ სიბრტყეში, ამიტომ $\overline{r}$ მართობი იქნება $\overline{q}$-სი. ამავე დროს $\overline{r}$ ისე უნდა იყოს მოგეზული, რომ $\overline{e}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ სამეულს ჰქონდეს მარცხენა მოგეზულობა. აქედან აშკარაა, რომ $\overline{r}$ ვექტორი მიიღება $\overline{q}$ ვექტორის მობრუნებით მართ კუთხეზე საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

ახლა დავუშვათ, რომ $\overline{Q}=\overline{Q}_1+\overline{Q}_2$. დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა π სიბრტყეზე მართობულად. გვექნება

$$\overline{q}=\overline{q}_1+\overline{q}_2,$$

სადაც $\overline{q}_1$ და $\overline{q}_2$ გეგმილებია $\overline{Q}_1$ და $\overline{Q}_2$ ვექტორებისა. მოვაბრუნოთ $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$ ვექტორები მართ კუთხეზე, მაშინ მათი ჯამიც, ე. ი. $\overline{q}$ ვექტორი, მობრუნდება იმავე კუთხეზე. $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, $\overline{q}$ ვექტორები მობრუნების შედეგად მოგვცემენ $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}$ ვექტორებს ისე, რომ $\overline{r}=\overline{r}_1+\overline{r}_2$, სადაც

$$\overline{r}_1=[\overline{e},\ \overline{Q}_1],\ \overline{r}_2=[\overline{e},\ \overline{Q}_2],\ \overline{r}=[\overline{e},\ \overline{Q}].$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$[\overline{e},\ \overline{Q}]=[\overline{e},\ \overline{Q}_1]+[\overline{e},\ \overline{Q}_2].$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $|\overline{P}|$-ზე. გვექნება

$$[|\overline{P}|\overline{e},\ \overline{Q}]=[|\overline{P}|\overline{e},\overline{Q}_1]+[|\overline{P}|\overline{e},\ \overline{Q}_2]=[\overline{P},\overline{Q}_1]+[\overline{P},\ \overline{Q}_2].$$

რადგან $\overline{Q}=\overline{Q}_1+\overline{Q}_2$, ამიტომ მივიღებთ

$$[\overline{P},\ \overline{Q}_1+\overline{Q}_2]=[\overline{P},\ \overline{Q}_1]+[\overline{P},\ \overline{Q}_2].$$

ინდუქციის წესით მიიღება გამრავლების კანონი შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაში და გვექნება

$$[\overline{P},\ \overline{Q}_1+\overline{Q}_2+\cdots+\overline{Q}_n]+[\overline{P},\ \overline{Q}_1]+[\overline{P},\ \overline{Q}_2]+\cdots+[\overline{P},\ \overline{Q}_n]. \quad (95)$$

ამრიგად, ვექტორული ნამრავლი ემორჩილება ჩვეულებრივ მრავალწევრთა გამრავლების კანონს.

2. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მგეზავების ურთიერთვექტორული ნამრავლები. პირველად განვიხილოთ $\overline{e}_1$ და $\overline{e}_2$ მგეზავების ვექტორული ნამრავლი. აღვნიშნოთ იგი $\overline{R}$-ით, ე. ი.

$$[\overline{e}_1,\ \overline{e}_2]=\overline{R}.$$

თანახმად ვექტორული ნამრავლის განმარტებისა, გვექნება

$$|\overline{R}| = |\overline{e}_1|\cdot|\overline{e}_2|\cdot\sin(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2) = 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$\overline{R}$ მართობულია $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ მგეზავებისა და $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{R}$ სამეული მარცხენა მოგეზულობისაა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\overline{e}_3$ მგეზავიც განისაზღვრება ზუსტად ასეთივე პირობებით, ამიტომ $\overline{R}=\overline{e}_3$. ამრიგად,

$$[\overline{e}_1,\ \overline{e}_2] = \overline{e}_3.$$

ანალოგიურად მივიღებთ დანარჩენ წყვილთა ნამრავლებს და გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} [\overline{e}_1,\ \overline{e}_2] &= \overline{e}_3, \\ [\overline{e}_2,\ \overline{e}_3] &= \overline{e}_1, \\ [\overline{e}_3,\ \overline{e}_1] &= \overline{e}_2. \end{aligned} \tag{96}$$

აქედან (93) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} [\overline{e}_2,\ \overline{e}_1] &= -\overline{e}_3, \\ [\overline{e}_3,\ \overline{e}_2] &= -\overline{e}_1, \\ [\overline{e}_1,\ \overline{e}_3] &= -\overline{e}_2, \end{aligned} \tag{97}$$

რაც შეეხება მგეზავების ნამრავლებს თავის თავზე, ისინი ნულები იქნება, რადგან პარალელური ვექტორების ნამრავლი ნულია.

3. ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში. გამოვთვალოთ:

$$\overline{P}_1 = (X_1,\ Y_1,\ Z_1),$$
$$\overline{P}_2 = (X_2,\ Y_2\ Z_2)$$

ვექტორების ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები. როგორც ცნობილია, ეს ვექტორები შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასე:

$$\overline{P}_1 = X_1\overline{e}_1 + Y_1\overline{e}_2 + Z_1\overline{e}_3,$$
$$\overline{P}_2 = X_2\overline{e}_1 + Y_2\overline{e}_2 + Z_2\overline{e}_3.$$

ახლა შევადგინოთ ვექტორული ნამრავლი. გვექნება

$$\overline{R} = [\overline{P}_1,\ \overline{P}_2] = [X_1\overline{e}_1 + Y_1\overline{e}_2 + Z_1\overline{e}_3,\ X_2\overline{e}_1 + Y_2\overline{e}_2 + Z_2\overline{e}_3].$$

თუ გადავამრავლებთ მრავალწევრთა გადამრავლების წესით და მხედველობაში მივიღებთ (95), (97) ფორმულებს (და იმასაც, რომ მგეზავების თავის თავზე ნამრავლები ნულებია), მივიღებთ

$$\overline{R}=(Y_1 Z_2-Y_2 Z_1)\overline{e}_1+(Z_1 Y_2-Z_2 Y_1)\,e_2+(X_1 Y_2-Y_1 X_2)\,\overline{e}_3.$$

თუ R-ის კოორდინატებია X, Y, Z, მაშინ

$$\overline{R}=X\overline{e}_1+Y e_2+Z\overline{e}_3. \tag{98}$$

რადგან ვექტორის დაშლა მგეზავების საშუალებით ცალსახად ხდება, ამიტომ უკანასკნელი ორი ტოლობის კოეფიციენტები შესაბამისად უნდა გავუტოლოთ ერთიმეორეს. გვექნება:

$$\begin{aligned} X&=Y_1 Z_2-Y_2 Z_1,\\ Y&=Z_1 Y_2-Z_2 Y_1, \ ?\\ Z&=X_1 Y_2-X_2 Y_1. \end{aligned} \tag{99}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ტოლობათა მარჯვენა მხარეს მდგომი გამოსახულებანი წარმოადგენს II რიგის დეტერმინანტებს. ამავე დროს ეს დეტერმინანტები არის მოცემული ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცის, ე. ი.

$$\begin{pmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1\\ X_2, & Y_2, & Z_2 \end{pmatrix}$$

მატრიცის II რიგის მინორები. ამრიგად:

$$\begin{aligned} X&=\begin{vmatrix} Y_1, & Z_1\\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix},\\ Y&=\begin{vmatrix} Z_1, & X_1\\ Z_2, & X_2 \end{vmatrix},\\ Z&=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1\\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{100}$$

ამ შენიშვნასთან დაკავშირებით (98) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$\overline{R}=\begin{vmatrix} Y_1, & Z_1\\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix}\overline{e}_1+\begin{vmatrix} Z_1, & X_1\\ Z_2, & X_2 \end{vmatrix}\overline{e}_2+\begin{vmatrix} X_1, & Y_1\\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\overline{e}_3. \tag{101}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგი სახითაც

$$[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2]=\begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3\\ X_1, & Y_1, & Z_1\\ X_2, & Y_2, & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{102}$$

მართლაც, თუ (102) ფორმულაში მესამე რიგის დეტერმინანტს დავშლით I სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ (101) ფორმულას.

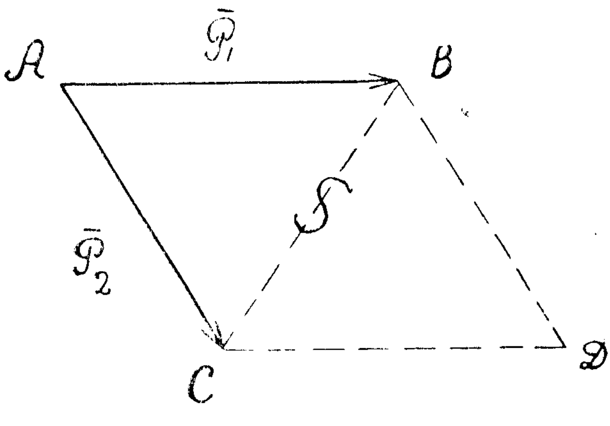
4. ორ ვექტორზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი. $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები მოვდოთ A წერტილზე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი (ნახ. 50). ამ პარალელოგრამის ფართობი იქნება გაორკეცებული სამკუთხედის ფართობი, ე. ი.

$$S = |\overline{P}_1| \cdot |\overline{P}_2| \cdot \sin \varphi.$$

მეორე მხრივ, ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი გამოსახულება $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის სიგრძეს წარმოადგენს. ამრიგად,

$$S = |\overline{R}| = |[\overline{P}_1, \overline{P}_2]|. \tag{103}$$

თუ მოცემულია $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების მართკუთხა კოორდინატები, მაშინ ვექტორული ნამრავლის X, Y, Z კოორდინატები (100)



ნახ. 50.

ფორმულებით განისაზღვრება. $\overline{R}$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება (63) ფორმულის მიხედვით. გვექნება

$$S = |\overline{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

თუ აქ შევიტანთ X, Y, Z-ის მნიშვნელობებს (100) ფორმულებიდან, მივიღებთ პარალელოგრამის ფართობის ფორმულას მართკუთხა კოორდინატებში.

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} Y_1, & Z_1 \\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1, & X_1 \\ Z_2, & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}^2}. \tag{104}$$

თუ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე, ე. ი. თუ $\overline{P}_1=(X_1, Y_1)$, $\overline{P}_2=(X_2, Y_2)$, მაშინ

$$\overline{P}_1=X_1\overline{e}_1+Y_1\overline{e}_2,$$
$$\overline{P}_2=X_2\overline{e}_1+Y_2\overline{e}_2.$$

შევადგინოთ ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი. გვექნება

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]=[X_1\overline{e}_1+Y_1\overline{e}_2, X_2\overline{e}_1+Y_2\overline{e}_2]=(X_1Y_2-Y_1X_2)[\overline{e}_1, \overline{e}_2]$$

ან, რაც იგივეა,

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix} [\overline{e}_1, \overline{e}_2]. \tag{105}$$

რადგან მართკუთხა სისტემაში $[\overline{e}_1, \overline{e}_2]=\overline{e}_3$, ამიტომ

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix} \overline{e}_3. \tag{106}$$

თუ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორთა წყვილი მარცხენა მოგეზულებისაა, ე. ი. ისეთივე მოგეზულებისაა, როგორისაცაა Oxy სისტემა, მაშინ $[\overline{P}_1, \overline{P}_2]$ ვექტორს ექნება z ღერძის გეზი. ამ შემთხვევაში (106) ფორმულაში $\overline{e}_3$-ის მამრავლი დადებითი უნდა იყოს. იგი იქნება $[\overline{P}_1, \overline{P}_2]$ ვექტორის სიგრძის ტოლი. თუ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორთა წყვილის მოგეზულობა Oxy სისტემის მოგეზულობის საწინააღმდეგოა, მაშინ $[\overline{P}_1, \overline{P}_2]$ ვექტორს z ღერძის საწინააღმდეგო გეზი აქვს და (106) ფორმულაში $\overline{e}_3$-ის მამრავლი უარყოფითი უნდა იყოს. აბსოლუტური მნიშვნელობით კი ეს რიცხვი კვლავ $[\overline{P}_1, \overline{P}_2]$-ის სიგრძის ტოლი იქნება. ამრიგად

$$|[\overline{P}_1, \overline{P}_2]|=\pm\begin{vmatrix} X_1, & Y_2 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix},$$

სადაც, როგორც აღნიშნული იყო, ზედა ნიშანი ეთანადება $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ წყვილის მარცხენა მოგეზულობას, ქვედა ნიშანი კი მარჯვენა მოგეზულობას.

ახლა, თუ პარალელოგრამს მივანიჭებთ ისეთივე მოგეზულობას, როგორიც აქვს $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორთა წყვილს, მაშინ მოგეზული პარალელოგრამის ფართობის ცნებას ჩამოვაყალიბებთ შემდეგნაირად: მოგეზული პარალელოგრამის ფართობს ვუწოდებთ ისეთ ალგებრულ რიცხვს, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა უდრის პა-

რალელოგრამის ჩვეულებრივ ფართობს. იგი დადებითია, როცა პარალელოგრამს აქვს მარჯვენა მოგეზულობა, ხოლო უარყოფითია, როცა პარალელოგრამს აქვს მარცხენა მოგეზულობა. ამ პირობებში მოგეზული პარალელოგრამის ფართობი ასე წარმოგვიდგება

$$S = \begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{107}$$

§ 11. სამი ვექტორის გარე ნამრავლი

1. სამი ვექტორის გარე ნამრავლის განმარტება და ძირითადი თვისებები. ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს ხშირად შიგა ნამრავლსაც უწოდებენ. ორი ვექტორის ვექტორულ ნამრავლს კი უწოდებენ გარე ნამრავლს. გარდა ამისა, განიხილება კიდევ სამი ვექტორის გარე ნამრავლი. იგი განიმარტება შემდეგნაირად: სამი $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ ვექტორის გარე ნამრავლი ეწოდება გამოსახულებას

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2] \cdot \overline{P}_3,$$

რომელიც აღინიშნება ასე

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3] \text{ ან } \overline{P}_1 \overline{P}_2 \overline{P}_3.$$

ჩვენ ვიხმართ პირველ აღნიშვნას. ამრიგად

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3] = [\overline{P}_1, \overline{P}_2] \cdot \overline{P}_3. \tag{108}$$

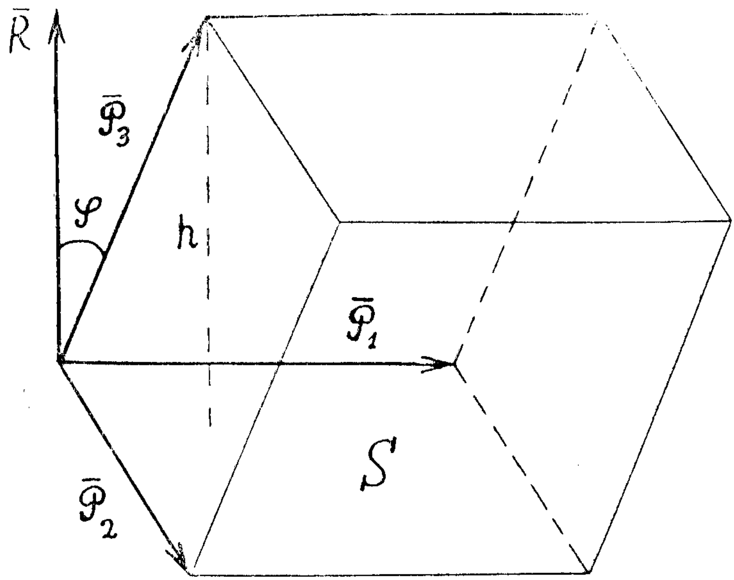
ვექტორული და სკალარული ნამრავლის თვისებების გამოყენებით (108) ფორმულიდან ადვილად მიიღება გარე ნამრავლის შემდეგი თვისებები:

1) $[\lambda \overline{P}_1, \mu \overline{P}_2, \nu \overline{P}_3] = \lambda\mu\nu\,(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3)$;

2) გარე ნამრავლი ემორჩილება მრავალწევრთა გადამრავლების ჩვეულებრივ კანონს, ოღონდ თანამამრავლთა მიმდევრობა არ უნდა შეიცვალოს.

2. სამი ვექტორის გარე ნამრავლის გეომეტრიული მნიშვნელობა. $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ ვექტორები პარალელური გადატანით მოვდოთ ერთ წერტილს და ავაგოთ ამ ვექტორზე პარალელეპიპედი. ამ პარალელეპიპედს მივანიჭოთ ისეთივე მოგეზულობა, როგორი მოგეზულობაც აქვს $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ ვექტორთა სამეულს. შევთანხმდეთ და მოგეზული პარალელეპიპედის მოცულობა ვუწოდოთ ისეთ ალგებრულ რიცხვს, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა უდრის იმავე პარალელეპიპედის ჩვეულებრივ მოცულობას (ფუძის ფართობისა

... სიმაღლის ნამრავლს). ამ ალგებრული რიცხვისათვის დადები-
თი მნიშვნელობა ავიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა პარალელეპიპე-
დი მარცხენა მოგეზულობისაა, ხოლო უარყოფითი მნიშვნელობა
ფითი მაშინ, როცა პარალელეპიპედი მარჯვენა მოგეზულობისაა.
მტკიცდება, რომ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორების გარე ნამრავლი უდრის
...ზე აგებული მოგეზული პარალელეპიპედის მოცულობას. ამი-
სათვის გამოვითვალოთ ამ პარალელეპიპედის მოცულობა (ნახ. 51).



ნახ. 51.

თუ მოგეზული პარალელეპიპედის მოცულობას აღვნიშნავთ V-თი, მაშინ გვექნება

$$V = Sh,$$

სადაც S არის $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, h კი $\overline{P}_3$ ვექტორის ბოლო წერტილიდან პარალელეპიპედის ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე. როგორც ვიცით, პარალელოგრამის ფართობი უდრის $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის სიგრძეს, ე. ი.

$$S = |[\overline{P}_1, \ \overline{P}_2]| = |\overline{R}|.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$h = \pm \text{გეგ}_{\overline{R}} \overline{P}_3 = \pm |\overline{P}_3| \cos\varphi.$$

ზედა ნიშანი აიღება მაშინ, როცა $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, ე. ი. როცა პარალე-

ლეპიპედი მარცხენა მოგეზულობისაა (ასეთია ჩვენს ნახაზზე); ქვედა ნიშანი აიღება მაშინ, როცა $\varphi > \frac{\pi}{2}$, ე. ი. როცა პარალელეპიპედი მარჯვენა მოგეზულობისაა. პარალელეპიპედის მოცულობისათვის მივიღებთ

$$|V| = \pm|\bar{R}|\cdot|\bar{P}_3|\cos\varphi = \pm\bar{R}\cdot\bar{P}_3 =$$
$$= \pm[\bar{P}_1, \bar{P}_2]\cdot\bar{P}_3 = \pm[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3].$$

ამრიგად,

$$|V| = \pm[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3], \tag{109}$$

სადაც, როგორც აღნიშნული იყო, ზედა ნიშანი შეესაბამება მარცხენა მოგეზულობის სამეულს, ხოლო ქვედა ნიშანი—მარჯვენა მოგეზულობის სამეულს. მეორე მხრივ, მოგეზული პარალელეპიპედის V მოცულობის ნიშანიც ასევე განისაზღვრება. ამიტომ

$$V = [\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]. \tag{110}$$

ასეთია მოგეზული პარალელეპიპედის მოცულობა. ამ ფორმულაზე დაყრდნობით, ადვილად მივიღებთ გარე ნამრავლის სხვა თვისებებსაც:

1) მეზობელ თანამამრავლთა წყვილის ადგილშენაცვლებით გარე ნამრავლი ნიშანს იცვლის. მართლაც, თუ მოვახდენთ $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ სამეულის რომელიმე მეზობელ თანამამრავლთა წყვილის ადგილშენაცვლებას, მაშინ სამეულის მოგეზულობა შეიცვლება. მაგრამ, სამეულზე აგებული პარალელეპიპედი კი, ცხადია, არ შეიცვლება. აგრეთვე არ შეიცვლება პარალელეპიპედის მოცულობა, ე. ი. $|V|$. ამიტომ (105) ფორმულით განსაზღვრული V თანამამრავლთა გადანაცვლებით მხოლოდ ნიშანს შეიცვლის (რ. დ. გ.).

2) $[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3] = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ვექტორები, მოდებული ერთ წერტილზე, მოთავსდებიან ერთ სიბრტყეში.

მართლაც, თუ ერთ წერტილზე მოდებული $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ ვექტორები, მოთავსდებიან ერთ სიბრტყეში, მაშინ, ცხადია, მათზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა იქნება ნული და, პირუკუ, თუ გავიხსენებთ სამი ვექტორის კომპლანარულობის განმარტებას, მაშინ შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი

დასკვნა. *სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი გარე ნამრავლი იყოს ნული*, ე. ი. კომპლანარულობისათვის დამახასიათებელი იქნება შემდეგი ტოლობა

$$[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3] = 0. \tag{111}$$

3. სამი ვექტორის გარე ნამრავლი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში. თუ მოცემულია ვექტორები მართკუთხა სისტემაში

$$\bar{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1),\ \bar{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2),\ \bar{P}_3=(X_3, Y_3, Z_3),$$

მაშინ $[\bar{P}_1, \bar{P}_2]$ ვექტორის მართკუთხა კოორდინატები განისაზღვრება (100) ფორმულებით. (108) ფორმულიდან (85) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]=[\bar{P}_1, \bar{P}_2]\cdot\bar{P}_3=XX_3+YY_3+ZZ_3.$$

თუ შევიტანთ აქ X, Y, Z-ის მნიშვნელობებს (100) ფორმულებიდან, მივიღებთ

$$[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]=\begin{vmatrix} Y_1, & Z_1 \\ Y_2, & Z_2 \end{vmatrix} X_3+\begin{vmatrix} Z_1, & X_1 \\ Z_2, & X_2 \end{vmatrix} Y_3+\begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix} Z_3$$

უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{112}$$

მართლაც, თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომ III რიგის დეტერმინანტს დავშლით მესამე სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ წინა ტოლობას. (112) ფორმულიდან ჩანს, რომ *სამი ვექტორის გარე ნამრავლი, მართკუთხა სისტემის შემთხვევაში, უდრის ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს.*

§ 12. ვექტორული ნამრავლის და გარე ნამრავლის დაკავშირება სკალარულ ნამრავლთან

1. ორი სამეულის გარე ნამრავლთა ნამრავლი. განვიხილოთ ვექტორთა ორი სამეულის გარე ნამრავლები მართკუთხა კოორდინატებში:

$$[\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3]=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix},$$

$$[\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3]=\begin{vmatrix} \overset{*}{X}_1, & \overset{*}{Y}_1, & \overset{*}{Z}_1 \\ \overset{*}{X}_2, & \overset{*}{Y}_2, & \overset{*}{Z}_2 \\ \overset{*}{X}_3, & \overset{*}{Y}_3, & \overset{*}{Z}_3 \end{vmatrix}.$$

... ამ ორი გამოსახულების ნამრავლი. გვექნება (გამოვი-ყენებთ დეტერმინანტების გამრავლების წესს)

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3]\cdot[\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{Q}_3]=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \overset{*}{X}_1, & \overset{*}{Y}_1, & \overset{*}{Z}_1 \\ \overset{*}{X}_2, & \overset{*}{Y}_2, & \overset{*}{Z}_2 \\ \overset{*}{X}_3, & \overset{*}{Y}_3, & \overset{*}{Z}_3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} X_1\overset{*}{X}_1+Y_1\overset{*}{Y}_1+Z_1\overset{*}{Z}_1, & X_1\overset{*}{X}_2+Y_1\overset{*}{Y}_2+Z_1\overset{*}{Z}_2, & X_1\overset{*}{X}_3+Y_1\overset{*}{Y}_2+Z_1\overset{*}{Z}_3 \\ X_2\overset{*}{X}_1+Y_2\overset{*}{Y}_1+Z_2\overset{*}{Z}_1, & X_2\overset{*}{X}_2+Y_2\overset{*}{Y}_2+Z_2\overset{*}{Z}_2, & X_2\overset{*}{X}_3+Y_2\overset{*}{Y}_3+Z_2\overset{*}{Z}_3 \\ X_3\overset{*}{X}_1+Y_3\overset{*}{Y}_1+Z_3\overset{*}{Z}_1, & X_3\overset{*}{X}_2+Y_3\overset{*}{Y}_2+Z_3\overset{*}{Z}_2, & X_3\overset{*}{X}_3+Y_3\overset{*}{Y}_3+Z_3\overset{*}{Z}_3 \end{vmatrix}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ უკანასკნელი დეტერმინანტის ელემენტები აღებული სამეულებიდან შედგენილი ყველა შესაძლო წყვილების სკალარული ნამრავლებია: $\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_1$, $\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_2$, $\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_3$ და ა. შ. ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3]\cdot[\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{Q}_3]=\begin{vmatrix} \overline{P}_1\cdot\overline{Q}_1, & \overline{P}_1\cdot\overline{Q}_2 & \overline{P}_1\cdot\overline{Q}_3 \\ \overline{P}_2\cdot\overline{Q}_1, & \overline{P}_2\cdot\overline{Q}_2, & \overline{P}_2\cdot\overline{Q}_3 \\ \overline{P}_3\cdot\overline{Q}_1, & \overline{P}_3\cdot\overline{Q}_2, & \overline{P}_3\cdot\overline{Q}_3 \end{vmatrix}. \quad (113)$$

რადგან ორი ვექტორის სკალარული და სამი ვექტორის გარე ნამრავლი დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე, ამიტომ (113) ტოლობის ორივე მხარეს გვექნება კოორდინატთა სისტემის არჩევიდან დამოუკიდებელი (ინვარიანტული) სიდიდეები. ეს ორი გამოსახულება თანატოლია მართკუთხა სისტემის შემთხვევაში. ამიტომ ისინი ტოლი იქნება ნებისმიერი სისტემის შემთხვევაშიაც.

2. ვექტორთა ორი წყვილის გარე ნამრავლთა სკალარული ნამრავლი. რადგან (113) ფორმულაში ვექტორთა სამეულები ნებისმიერია, ამიტომ $\overline{Q}_3$-ის ნაცვლად შეგვიძლია ჩავსვათ შემდეგი მნიშვნელობა

$$\overline{Q}_3=[\overline{P}_1, \overline{P}_2].$$

გვექნება:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1\cdot\overline{Q}_3&=[\overline{P}_1, \overline{P}_2]\cdot\overline{P}_1=0, \\ \overline{P}_2\cdot\overline{Q}_3&=[\overline{P}_1, \overline{P}_2]\cdot\overline{P}_2=0, \\ \overline{P}_3\cdot\overline{Q}_3&=[\overline{P}_1, \overline{P}_2]\cdot\overline{P}_3=[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3]. \end{aligned}$$

ამ პირობებში (113) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]\cdot[\overline{Q}_1, \overline{Q}_2]=\begin{vmatrix} \overline{P}_1\cdot\overline{Q}_1, & \overline{P}_1\cdot\overline{Q}_2 \\ \overline{P}_2\cdot\overline{Q}_1, & \overline{P}_2\cdot\overline{Q}_2 \end{vmatrix}. \qquad (114)$$

3. **ვექტორული და გარე ნამრავლების კვადრატების გამოსახვა სკალარული ნამრავლებით.** (113) და (114) ფორმულებში თუ დავუშვებთ, რომ $\overline{P}_1=\overline{Q}_1$, $\overline{P}_2=\overline{Q}_2$, $\overline{P}_3=\overline{Q}_3$, მაშინ მივიღებთ:

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3]^2=\begin{vmatrix} \overline{P}_1^{\,2}, & \overline{P}_1\cdot\overline{P}_2, & \overline{P}_1\cdot\overline{P}_3 \\ \overline{P}_2\cdot\overline{P}_1, & \overline{P}_2^{\,2}, & \overline{P}_2\cdot\overline{P}_3 \\ \overline{P}_3\cdot\overline{P}_1, & \overline{P}_3\cdot\overline{P}_2, & \overline{P}_3^{\,2} \end{vmatrix}, \qquad (115)$$

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]^2=\begin{vmatrix} \overline{P}_1^{\,2}, & \overline{P}_1\cdot\overline{P}_2 \\ \overline{P}_2\cdot\overline{P}_1, & \overline{P}_2^{\,2} \end{vmatrix}. \qquad (116)$$

უკანასკნელი ტოლობა მართკუთხა კოორდინატებში ლაგრანჟის[1] იგივეობას წარმოადგენს.

§ 13. კოორდინატთა ღერძების მგეზავებით შედგენილი პარალელოგრამი და პარალელეპიპედი

1. **Oxy სისტემის მგეზავებით შედგენილი პარალელოგრამის ფართობი.** განვიხილოთ $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ მგეზავებით შედგენილი პარალელოგრამის ფართობი. აღვნიშნოთ იგი S_0-ით. რადგან $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ ვექტორთა წყვილს აქვს მარცხენა მოგეზულობა, ამიტომ მათზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი უდრის $[\overline{e}_1, \overline{e}_2]$ ვექტორის სიგრძეს, ე. ი.

$$S_0=|[\overline{e}_1, \overline{e}_2]|. \qquad (117)$$

ახლა გამოვიყენოთ (116) ფორმულა. გვექნება

$$S_0^{\,2}=[\overline{e}_1, \overline{e}_2]^2=\begin{vmatrix} \overline{e}_1^{\,2}, & \overline{e}_1\cdot\overline{e}_2 \\ \overline{e}_2\cdot\overline{e}_1, & \overline{e}_2^{\,2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1, & \cos(x, y) \\ \cos(x, y), & 1 \end{vmatrix}.$$

ამრიგად

$$S_0^{\,2}=[\overline{e}_1, \overline{e}_2]^2=\begin{vmatrix} 1, & \cos(x, y) \\ \cos(x, y), & 1 \end{vmatrix}. \qquad (118)$$

აქედან ადვილად მივიღებთ

$$S_0=\sin(x, y). \qquad (119)$$

აქ შევნიშნავთ, რომ ასეთივე შედეგს მოგვცემდა განსახილავი პარალელოგრამის ფართობის უშუალო, ელემენტარული წესებით გამოთვლა.

[1] ლაგრანჟი—გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი (1736—1813).

2. $Oxyz$ **სისტემის მგეზავებით შედგენილი პარალელეპიპედის მოცულობა.** გამოვთვალოთ $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ მგეზავებით შედგენილი პარალელეპიპედის მოცულობა. აღვნიშნოთ იგი V_0-ით

$$V_0=[\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3]. \tag{120}$$

ავახარისხოთ ეს ტოლობა კვადრატში და გამოვიყენოთ (115) ფორმულა. მივიღებთ

$$V_0^2=[\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3]^2=\begin{vmatrix} \overline{e}_1^2, & \overline{e}_1\cdot\overline{e}_2, & \overline{e}_1\cdot\overline{e}_3 \\ \overline{e}_2\cdot\overline{e}_1, & \overline{e}_2^2, & \overline{e}_2\cdot\overline{e}_3 \\ \overline{e}_3\cdot\overline{e}_1, & \overline{e}_3\cdot\overline{e}_2, & \overline{e}_3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1, & \cos(x, y), & \cos(x, z) \\ \cos(x, y), & 1, & \cos(y, z) \\ \cos(x, z), & \cos(y, z), & 1 \end{vmatrix}.$$

ამრიგად,

$$V_0^2=[\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3]^2=\begin{vmatrix} 1, & \cos(x, y), & \cos(x, z) \\ \cos(x, y), & 1, & \cos(y, z) \\ \cos(x, z), & \cos(y, z), & 1 \end{vmatrix}. \tag{121}$$

§ 14. პარალელოგრამის ფართობი და პარალელეპიპედის მოცულობა ზოგად სისტემაში

1. პარალელოგრამის ფართობი სიბრტყეზე ზოგად სისტემაში. გამოვთვალოთ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი ზოგად სისტემაში. დავუშვათ, რომ ცნობილია მოცემული ვექტორების კოორდინატები. ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლისათვის (105) ფორმულის მსგავსად მივიღებთ

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}\cdot[\overline{e}_1, \overline{e}_2]. \tag{122}$$

ავახარისხოთ კვადრატში უკანასკნელი გამოსახულება და გამოვიყენოთ (117) ტოლობა. მივიღებთ

$$S^2=[\overline{P}_1, \overline{P}_2]^2=\begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}^2\cdot S_0^2.$$

აქედან მოგეზული პარალელოგრამის ფართობისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$S=S_0\cdot\begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{123}$$

აქ ნიშანი შერჩეულია 94-ე გვერდზე მიღებული შეთანხმების თანახმად.

2. პარალელეპიპედის მოცულობა ზოგად სისტემაში. გამოვთვალოთ $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა ზოგად სისტემაში. დავუშვათ, რომ მოცემულია

$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= (X_1, \ Y_1, \ Z_1), \\ \overline{P}_2 &= (X_2, \ Y_2, \ Z_2), \\ \overline{P}_3 &= (X_3, \ Y_3, \ Z_3) \end{aligned}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= X_1\overline{e}_1 + Y_1\overline{e}_2 + Z_1\overline{e}_3, \\ \overline{P}_2 &= X_2\overline{e}_1 + Y_2\overline{e}_2 + Z_2\overline{e}_3, \\ \overline{P}_3 &= X_3\overline{e}_1 + Y_3\overline{e}_2 + Z_3\overline{e}_3. \end{aligned}$$

ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა გამოითვლება (110) ფორმულის მიხედვით. გვექნება

$$V = |\overline{P}_1, \ \overline{P}_2, \ \overline{P}_3| = |X_1\overline{e}_1 + Y_1\overline{e}_2 + Z_1\overline{e}_3, \ X_2\overline{e}_1 + Y_2\overline{e}_2 + Z_2\overline{e}_3, \ X_3\overline{e}_1 + Y_3\overline{e}_2 + Z_3\overline{e}_3|.$$

თუ მრავალწევრებს გადავამრავლებთ გარე ნამრავლის თვისებების მიხედვით და სათანადოდ გავამარტივებთ, მივიღებთ

$$V = \begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix} \cdot |\overline{e}_1, \ \overline{e}_2, \ \overline{e}_3|. \tag{124}$$

ეს ფორმულა (120) ფორმულის თანახმად შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$V = V_0 \begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{125}$$

სადაც V_0 განსაზღვრულია (121) ფორმულით.

თ ა ვ ი III

ვექტორთა ალგებრის უშუალო გამოყენება

§ 1. ორ წერტილს შორის მანძილი

1. ორ წერტილს შორის მანძილი მართკუთხა კოორდინატებში. დავუშვათ, რომ მოცემულია A, B წერტილები მართკუთხა კოორდინატებში $A=(x_1, y_1, z_1)$, $B=(x_2, y_2, z_2)$. ამ წერტილებს შორის მანძილი აღვნიშნოთ d-თი. გვექნება

$$d=|AB|=|\overline{AB}|.$$

მეორე მხრივ $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატები განისაზღვრება A და B წერტილთა კოორდინატების სხვაობით, ე. ი.

$$\overline{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

$\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ (63) ფორმულა (სადაც X, Y, Z-ის ნაცვლად უნდა შევიტანოთ მათი მნიშვნელობები B და A წერტილთა კოორდინატების სხვაობის სახით). გვექნება

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

თუ A და B წერტილები Oxy სიბრტყეზე მდებარეობენ, მაშინ $z_1=z_2=0$. ამ შემთხვევაში (1) ფორმულიდან მიიღება მანძილის ფორმულა სიბრტყეზე

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{2}$$

რაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია I თავიდან.

2. ორ წერტილს შორის მანძილი ზოგად სისტემაში. თუ A და B წერტილები მოცემულია კოორდინატთა ზოგად სისტემაში, მაშინ $\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელად უნდა მივმართოთ ვექტორის კვადრატის ზოგად (88) ფორმულას, სადაც X, Y, Z-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ მათი მნიშვნელობები B და A წერტილების კოორდინატთა სხვაობების სახით. მივიღებთ

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos(x, y)+$$
$$+2(x_2-x_1)(z_2-z_1)\cos(x, z)+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\cos(y, z). \tag{3}$$

თუ A და B წერტილები Oxy სიბრტყეზეა მოთავსებული, მაშინ $z_1 = z_2 = 0$ და უკანასკნელი ფორმულიდან ფესვის ამოღების შედეგად მივიღებთ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos(x, y)}. \tag{4}$$

§ 2. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით

1. მონაკვეთის გაყოფა λ ფარდობით. მოცემულია A და B წერტილების კოორდინატები

$$A = (x_1, y_1, z_1), \quad B = (x_2, y_2, z_2).$$

AB მონაკვეთზე საძიებელია ისეთი M წერტილი, რომელიც ამ მონაკვეთს გაყოფს λ ფარდობით, ე. ი. აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda.$$

შევადგინოთ $\overline{AM}$ და $\overline{MB}$ ვექტორები. ცხადია, რომ ეს ვექტორები პარალელური ვექტორებია, რადგან მათი სიგრძეების შეფარდება უდრის λ-ს და ერთნაირად არიან მოგეზული. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{AM} = \lambda\, \overline{MB}. \tag{5}$$

თუ აღვნიშნავთ

$$M = (x, y, z),$$

მაშინ $\overline{AM}$ და $\overline{MB}$ ვექტორები ასე წარმოგვიდგება:

$$\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overline{MB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

ახლა დავაგეგმილოთ (4) ტოლობა კოორდინატთა ღერძებზე. გვექნება:

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x_1),$$
$$y - y_1 = \lambda (y_2 - y_1),$$
$$z - z_1 = \lambda (z_2 - z_1).$$

თუ აქედან ამოვხსნით x, y, z-ს, მივიღებთ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{6}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

თუ A და B წერტილები მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე, მაშინ $z_1=z_2=z=0$. (6) ფორმულებიდან მიიღება მონაკვეთის λ ფარდობით გაყოფის შემდეგი ფორმულები სიბრტყეზე:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\tag{7}$$

რაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია I თავიდან.

2. მონაკვეთის გაყოფა შუაზე. თუ M წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, მაშინ $AM=BM$. ამ შემთხვევაში

$$\lambda=\frac{|AM|}{|MB|}=1.$$

ამრიგად, მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები განისაზღვრება (6) ფორმულებით, თუ იქ ჩავწერთ $\lambda=1$. გვექნება:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2},\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.\tag{8}$$

თუ A და B წერტილები Oxy სიბრტყეზე მდებარეობს, მაშინ $z_1=z_2=z=0$ და (7) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2},\tag{9}$$

რაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია I თავიდან.

§ 3. სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა

1. სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა სივრცეში. თუ A, B, C წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე, ე. ი. კოლინეარულნი არიან, მაშინ $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორები ურთიერთპარალელური იქნება და, პირუკუ, თუ მოცემულია A, B, C წერტილების კოორდინატები, ე. ი. თუ

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$B=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$C=(x_3,\ y_3,\ z_3),$$

მაშინ $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორები ასე განისაზღვრება:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\overline{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1).$$

როგორც აღნიშნული იყო, A, B, C წერტილების კოლინეარულობის პირობა $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორების პარალელურობის პირობით წარმოგვიდგება. ვექტორთა პარალელურობა კი, როგორც ცნობილია, მათი კოორდინატების პროპორციულობით გამოისახება. ამრიგად, გვექნება

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}. \tag{10}$$

ასეთია სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა სივრცეში.

2. სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა სიბრტყეზე. თუ A, B, C წერტილები Oxy სიბრტყეზეა მოთავსებული, მაშინ $z_1=z_2=z_3=0$ და (10) პირობიდან მივიღებთ

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}. \tag{11}$$

ეს ტოლობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0.$$

უკანასკნელი ტოლობა თავის მხრივ ადვილად მიიღება შემდეგი ტოლობიდან

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

მართლაც, თუ ამ დეტერმინანტის პირველ სტრიქონს გამოვაკლებთ მეორე და მესამე სტრიქონებს, შემდეგ კი დავშლით დეტერმინანტს პირველი სვეტის მიხედვით, მივიღებთ წინა ტოლობას. სამი წერტილის კოლინეარულობის ასეთი პირობა ჩვენთვის ცნობილია I თავიდან, ოღონდ იქ ასეთი პირობა გამოყვანილი იყო მართკუთხა კოორდინატებში, აქ კი ეს პირობა გამოვიყვანეთ ნებისმიერი სისტემისათვის.

3. სივრცის სამი წერტილის კოლინეარულობის მეორენაირი დახასიათება. განვიხილოთ სივრცის A, B, C წერტილების გეგმილები Oxy სიბრტყეზე. თუ ამ გეგმილებს აღვნიშნავთ A', B', C'-ით, გვექნება:

$$A'=(x_1,\ y_1,\ 0),$$
$$B'=(x_2,\ y_2,\ 0),$$
$$C'=(x_3,\ y_3,\ 0).$$

ცხადია, რომ A', B', C' წერტილების კოლინეარულობის პირობა (როგორც Oxy სიბრტყეზე მდებარე წერტილებისა) გამოისახება (12) ტოლობით. ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ A, B, C წერტილები კოლინეარულია, მაშინ მათი გეგმილები სამივე კოორდინატთა სიბრტყეზე კოლინეარული იქნება და, პირუკუ. (12) პირობის მსგავსად მიიღება Oxz და Oyz სიბრტყეზე გეგმილების კოლინეარულობის პირობები:

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

ამრიგად, სამი წერტილის კოლინეარულობის (10) პირობა ეკვივალენტურია (12) და (13) პირობებისა.

§ 4. სამკუთხედის ფართობი

1. სამკუთხედის ფართობის ფორმულა ზოგად სისტემაში. დავუშვათ, რომ მოცემულია სამკუთხედის წვეროები სივრცეში:

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$B=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$C=(x_3,\ y_3,\ z_3).$$

შევადგინოთ $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორები. გვექნება:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\overline{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1).$$

ცხადია, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი უდრის $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს. $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი კი, როგორც ცნობილია, უდრის $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის სიგრძეს. ამრიგად, სამკუთხედის ფართობისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$s=\frac{1}{2}\,|[\overline{AB},\ \overline{AC}]|. \tag{14}$$

$|[\overline{AB},\ \overline{AC}]|$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება (111) ფორმულის მიხედვით, სადაც P_1 და P_2 ვექტორების ნაცვლად უნდა ჩავსვათ $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორები. მივიღებთ

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \overline{AB}^2, & \overline{AB}\cdot\overline{AC} \\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}, & \overline{AC}^2 \end{vmatrix}}$$

ან, რაც იგივეა,

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2}. \tag{15}$$

რადგან $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ვექტორების სიგრძეები და სკალარული ნამრავლი გამოისახება ზოგად სისტემაში, ამიტომ სამკუთხედის ფართობიც, (15) ფორმულის სახით, წარმოდგება წვეროების კოორდინატებით ზოგად სისტემაში.

2. სამკუთხედის ფართობი მართკუთხა სისტემაში. მართკუთხა სისტემაში სამკუთხედის ფართობის ფორმულის მისაღებად უნდა გამოვიყენოთ პარალელოგრამის ფართობის (104) ფორმულა, სადაც $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების კოორდინატების ნაცვლად უნდა ჩავწეროთ $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორების კოორდინატები, ე. ი. უნდა მოვახდინოთ შემდეგნაირი ჩასმა:

$$X_1=x_2-x_1,\ \ X_2=x_3-x_1,$$
$$Y_1=y_2-y_1,\ \ Y_2=y_3-y_1,$$
$$Z_1=z_2-z_1,\ \ Z_2=z_3-z_1.$$

მივიღებთ

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1, & z_2-z_1\\ y_3-y_1, & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1, & x_2-x_1\\ z_3-z_1, & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1\\ x_3-x_1, & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}. \tag{16}$$

ეს ფორმულა, (12) ტოლობის მსგავსად, შეიძლება ასეც ჩაიწეროს

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1\\ 1, & y_2, & z_2\\ 1, & y_3, & z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1, & z_1, & x_1\\ 1, & z_2, & x_2\\ 1, & z_3, & x_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1\\ 1, & x_2, & y_2\\ 1, & x_3, & y_3\end{vmatrix}^2}. \tag{17}$$

3. მოგეზული სამკუთხედის ფართობი სიბრტყეზე. თუ A, B, C წერტილები მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე, ე. ი. თუ

$$A=(x_1,\ y_1),\ B=(x_2,\ y_2),\ C=(x_3,\ y_3),$$

მაშინ

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$\overline{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1).$$

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ვექტორთა წყვილის მოგეზულობას, ვუწოდოთ სამკუთხედის მოგეზულობა. ცხადია, რომ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ვექტორებზე აგებული

პარალელოგრამის მოგეზულობა იგივე იქნება, რაც სამკუთხედის მოგეზულობა. ადვილი მისახვედრია, აგრეთვე, რომ ABC სამკუთხედის მოგეზულობა, შემოღებული I თავში (სამკუთხედის ABC მიმდევრობით აღწერის დროს, შემოვლის მიმართულებასთან დაკავშირებით), იგივეა, რაც სამკუთხედის მოგეზულობა $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ წყვილის მოგეზულობის მიხედვით. თუ ისევე განვმარტავთ მოგეზული სამკუთხედის ფართობს, როგორც მოგეზული პარალელოგრამის ფართობი გვაქვს განმარტებული, მაშინ მოგეზული სამკუთხედის ფართობი წარმოგვიდგება, როგორც $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ვექტორებზე აგებული მოგეზული პარალელოგრამის ფართობის ნახევარი. იგი მიიღება (115) ფორმულის მიხედვით, სადაც X_1, Y_1 და X_2, Y_2-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ მათი მნიშვნელობანი $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორების კოორდინატების სახით, ე. ი. $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორთა კოორდინატებისაგან უნდა შევადგინოთ დეტერმინანტი და გავყოთ ორზე;

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

ან, რაც იგივეა (მე-12 ტოლობის ანალოგიურად),

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

ასეთია მოგეზული სამკუთხედის ფართობის ფორმულა მართკუთხა კოორდინატებში, რაც ჩვენთვის უკვე იყო ცნობილი I თავიდან.

4. სამკუთხედის მართკუთხა გეგმილის ფართობი. განვიხილოთ ABC სამკუთხედის მართკუთხა გეგმილი Oxy სიბრტყეზე. თუ A, B, C წერტილების გეგმილებს შესაბამად აღვნიშნავთ A', B', C'-ით, მაშინ ABC სამკუთხედის გეგმილი იქნება $A'B'C'$ სამკუთხედი. A', B', C' წერტილების კოორდინატები (თანახმად დაგეგმილების განმარტებისა) ასე წარმოგვიდგება:

$$A'=(x_1,\ y_1,\ 0),$$
$$B'=(x_2,\ y_2,\ 0),$$
$$C'=(x_3,\ y_3,\ 0).$$

$A'B'C'$ სამკუთხედის ფართობი აღვნიშნოთ s_{Oxy}-ით. იგი განისაზღვრება (19) ფორმულის მიხედვით. ანალოგიურად გამოითვ-

ლები ABC სამკუთხედის გეგმილების ფართობები დანარჩენ კოორდინატთა სიბრტყეზე. გვექნება:

$$s_{Oxy}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1, & x_1, & y_1\\ 1, & x_2, & y_2\\ 1, & x_3, & y_3\end{vmatrix},$$

$$s_{Oxz}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1, & z_1, & x_1\\ 1, & z_2, & x_2\\ 1, & z_3, & x_3\end{vmatrix}, \tag{20}$$

$$s_{Oyz}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1, & y_1, & z_1\\ 1, & y_2, & z_2\\ 1, & y_3, & z_3\end{vmatrix}.$$

თუ ყურადღებას მივაქცევთ იმას, რომ (115) ფორმულით განსაზღვრული პარალელოგრამის ფართობი წარმოადგენს R ვექტორის გეგმილს z ღერძზე (იხ. მე-100 ფორმ.), მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$s_{Oxy}=\frac{1}{2}Z=\frac{1}{2}|\overline{R}|\cos\gamma.$$

რადგან ამ შემთხვევაში

$$\frac{1}{2}|R|=\frac{1}{2}|[AB,\ AC]|=s,$$

ამიტომ

$$s_{Oxy}=s\cos\gamma. \tag{21}$$

Θ-თი აღვნიშნოთ მახვილი კუთხე სამკუთხედსა და Oxy სიბრტყეს შორის. ცხადია, რომ γ და Θ კუთხეების გვერდები შესაბამად თანამართობია. ამიტომ გვექნება

$$\gamma=\Theta \ \text{ან}\ \gamma=\pi-\Theta;$$

აქედან

$$\cos\gamma=\pm\cos\Theta.$$

ამრიგად,

$$s_{Oxy}=\pm s\cos\Theta.$$

თუ სამკუთხედის გეგმილის ჩვეულებრივ ფართობს აღვნიშნავთ s'-ით, მაშინ

$$s'=|s_{Oxy}|=s\cos\Theta,$$

ე. ი.

$$s'=s\cos\Theta. \tag{22}$$

ფართობი მოცემულ სიბრტყეზე უდრის სამკუთხედის ფართობს გამრავლებულს იმ მახვილი კუთხის კოსინუსზე, რომელსაც ადგენს სამკუთხედის სიბრტყე მოცემულ სიბრტყესთან.

5. ნებისმიერი ბრტყელი ნაკვთის გეგმილის ფართობის შესახებ. ჯერ განვიხილოთ მრავალკუთხედი სიბრტყეზე. ცნობილია, რომ მრავალკუთხედი შეიძლება დაიყოს სამკუთხედებად. შემადგენელი სამკუთხედების ფართობები ავღნიშნოთ $s_1, s_2, \cdots, s_m$-ით. ამ სამკუთხედების გეგმილების ფართობები კი $s_1', s_2', \cdots, s_m'$-ით. თვით მრავალკუთხედის s ფართობი და გეგმილის s' ფართობი, ცხადია, ასე წარმოგვიდგება:

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_m,$$
$$s' = s_1' + s_2' + \cdots + s_m'.$$

მეორე მხრივ, შემადგენელი სამკუთხედების გეგმილთა ფართობები, (22) ფორმულის თანახმად, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$s_1' = s_1 \cos \Theta,$$
$$s_2' = s_2 \cos \Theta,$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_n' = s_n \cos \Theta,$$

სადაც Θ არის მრავალკუთხედის სიბრტყის მიერ შედგენილი კუთხე (ცხადია, იგივეა შემადგენელი სამკუთხედებისათვისაც) კოორდინატთა სიბრტყესთან. ამ ტოლობათა შეკრება მოგვცემს

$$s_1' + s_2' + \cdots + s_m' = (s_1 + s_2 + \cdots + s_m) \cos \Theta$$

ან, რაც იგივეა,

$$s' = s \cos \Theta.$$

ამრიგად, (22) ფორმულა და მისი შესაბამი დასკვნა მართებულია მრავალკუთხედებისათვისაც.

ახლა განვიხილოთ რაიმე წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი ნაკვთი. წირზე ავიღოთ n წერტილი და მიმდევრობითი შეერთებით შევადგინოთ მრავალკუთხედი (წირში ჩახაზული მრავალკუთხედი). ამ მრავალკუთხედის ფართობი ავღნიშნოთ s_n-ით. გეგმილის ფართობი კი s_n'-ით. (22) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$s_n' = s_n \cos \Theta.$$

ახლა n მივასწრაფოთ უსასრულობისაკენ ისე, რომ მრავალკუთხედის ყოველი გვერდი მიისწრაფოდეს ნულისაკენ. ამ პირობებში,

ჩახაზული მრავალკუთხედის ფართობის ზღვარს ეწოდება თვით მოცემული წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი ნაკვთის ფართობი. თუ მას s-ით ავღნიშნავთ, გვექნება

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n.$$

ცხადია, რომ ბრტყელი წირი დაგეგმილდება ბრტყელ წირში და წირში ჩახაზული მრავალკუთხედი კი გეგმილში ჩახაზულ მრავალკუთხედში. გეგმილით შემოსაზღვრული ბრტყელი ნაკვთის s' ფართობი ასე წარმოგვიდგება

$$s' = \lim s_n'.$$

რადგან ზღვარზე გადასვლის პროცესში Θ მუდმივია, ამიტომ $s_n' = s_n \cos \Theta$ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლა მოგვცემს

$$\lim s_n' = (\lim s_n) \cdot \cos \Theta,$$

ანუ

$$s' = s \cos \Theta.$$

ამრიგად, ნებისმიერი ბრტყელი ნაკვთის გეგმილის ფართობისათვის მართებულია (22) ფორმულა.

§ 5. ტეტრაედრის მოცულობა

1. ტეტრაედრის განმარტება და მისი მოცულობა. სივრცის ოთხი წერტილის ყველა შესაძლო სამეული სიბრტყეებით (სამკუთხედების სახით) რომ შევაერთოთ, მივიღებთ ოთხწახნაგა ფიგურას, რომელსაც ტ ე ტ რ ა ე დ რ ი ეწოდება. ტეტრაედრის წახნაგები სამკუთხედებია. ტეტრაედრს აქვს ოთხი წვერო და ექვსი წიბო. ცხადია, ტეტრაედრი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ისეთი პირამიდა, რომლის ფუძე სამკუთხედია. თუ A, B, C, D წერტილები ტეტრაედრის წვეროებია, მაშინ AB, AC, AD წიბოებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის მეექვსედი ნაწილი იქნება $ABCD$ ტეტრაედრის მოცულობა. ტეტრაედრის მოცულობა გამოითვლება პირამიდის მოცულობის ფორმულით

$$v = \frac{1}{3} sh,$$

სადაც s არის ABC სამკუთხედის ფართობი (ფუძის ფართობი), h კი D წერტილიდან ფუძეზე დაშვებული ტეტრაედრის სიმაღლე (ნახ. 52). თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი უდრის AB, AC წიბოებზე აგებული პარალელოგრამის

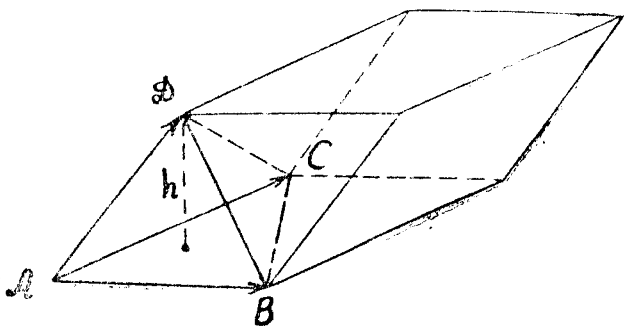
ფართობის ნახევარს, ე. ი. $s=\frac{1}{2}S$, მაშინ ტეტრაედრის მოცულობა ასე წარმოგვიდგება

$$v=\frac{1}{6}Sh.$$

რადგან AB, AC წიბოებზე აგებული პარალელოგრამი არის $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის ფუძე, ხოლო h კი პარალელეპიპედის სიმაღლე, ამიტომ Sh იქნება ამ პარალელეპიპედის მოცულობა. თუ ტეტრაედრისათვის შემოვიღებთ მოგეზულობის ცნებას $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ვექტორთა სამეულის მოგეზულობის მიხედვით, მაშინ მოგეზული ტეტრაედრის მოცულობა წარმოგვიდგება როგორც მოგეზული პარალელეპიპედის მოცულობის მეექვსედი. მოგეზული პარალელეპიპედის მოცულობა კი, როგორც ცნობილია, უდრის $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ვექტორების გარე ნამრავლს. ამრიგად, მოგეზული ტეტრაედრის მოცულობისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$v=\frac{1}{6}\,|\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}|. \tag{23}$$

2. ტეტრაედრის მოცულობა მართკუთხა კოორდინატებში. თუ მოცემულია ტეტრაედრის წვეროები მართკუთხა კოორდინატებში:



ნახ. 52.

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$

$$B=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$

$$C=(x_3,\ y_3,\ z_3),$$

$$D=(x_4,\ y_4,\ z_4),$$

მაშინ AB, AC, AD ვექტორები ასე წარმოგვიდგება:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\overline{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1),$$
$$\overline{AD}=(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1).$$

ამ ვექტორების გარე ნამრავლი მართკუთხა კოორდინატებში, როგორც ცნობილია, უდრის მათი კოორდინატებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს. ამრიგად, (23) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$v=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \\ x_4-x_1, & y_4-y_1, & z_4-z_1 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

ეს ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირადაც

$$v=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

მართლაც, პირველი სტრიქონი რომ გამოვაკლოთ დანარჩენ სტრიქონებს და დავშალოთ მიღებული დეტერმინანტი პირველი სვეტის მიხედვით, მივიღებთ (24) ფორმულას.

3. ტეტრაედრის მოცულობა ზოგად კოორდინატებში. თუ ტეტრაედრის წვეროები მოცემულია ნებისმიერი კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მაშინ ტეტრაედრის მოცულობა, პარალელეპიპედის მოცულობის (II თავის 125-ე ფორმ.) ფორმულის მსგავსად ასე წარმოგვიდგება

$$v=\frac{V_0}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \\ x_4-x_1, & y_4-y_1, & z_4-z_1 \end{vmatrix} \tag{26}$$

ან, რაც იგივეა,

$$v=\frac{V_0}{6}\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}. \tag{27}$$

§ 6. ოთხი წერტილის კომპლანარულობის პირობა

ერთ სიბრტყეზე მდებარე წერტილებს ეწოდება კომპლანარული (გასიბრტყული). ცხადია, რომ სამი წერტილი ყოველთვის კომპლანარულია. ოთხი წერტილი კი, საზოგადოდ, კომპლანარული არ

არის. იმისათვის, რომ სივრცეში აღებული ოთხი წერტილი იყოს კომპლანარული, ისინი გარკვეულ პირობას უნდა აკმაყოფილებდნენ. ცხადია, აგრეთვე, რომ, თუ A, B, C, D წერტილები კომპლანარულია, მაშინ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ვექტორებიც კომპლანარული იქნება და, პირუკუ, თუ ეს ვექტორები კომპლანარულია, მაშინ თვით A, B, C, D წერტილებიც კომპლანარული იქნება. ამრიგად, A, B, C, D წერტილების კომპლანარულობის პირობა წარმოგვიდგება $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ვექტორთა კომპლანარულობის პირობის სახით. სამი ვექტორის კომპლანარულობის პირობას კი, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს მათი გარე ნამრავლის ნულთან ტოლობა, ე. ი.

$$|\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}|=0. \tag{28}$$

რადგან მართკუთხა სისტემის შემთხვევაში სამი ვექტორის გარე ნამრავლი მათი კოორდინატებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს უდრის, ამიტომ (28) ტოლობა შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \\ x_4-x_1, & y_4-y_1, & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{29}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}=0. \tag{30}$$

ასეთია ოთხი წერტილის კომპლანარულობის პირობა მართკუთხა კოორდინატებში. თუ მხედველობაში მივიღებთ სამი ვექტორის გარე ნამრავლის ფორმულას ზოგად სისტემაში (II თავის 125-ე ფორმ.), მაშინ ადვილად მივხვდებით, რომ (29) ტოლობა და, მაშასადამე, (30) ტოლობაც წარმოადგენს ოთხი წერტილის კომპლანარულობის პირობას ზოგად სისტემაში.

თ ა ვ ი IV

დეკარტის კოორდინატების გარდაქმნები

შესავალი

ცხადია, რომ სივრცის რაიმე M წერტილს სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემების მიმართ ექნება სხვადასხვანაირი მდებარეობა. ერთი და იგივე წერტილის კოორდინატები სხვადასხვა სისტემაში სხვადასხვა იქნება. იგივე ითქმის ვექტორის შესახებაც. ცხადია, აგრეთვე, რომ ერთი ნებისმიერი სისტემიდან მეორე ნებისმიერი სისტემა შეიძლება მიღებულ იქნას პირველი სისტემის პარალელური გადატანით და ღერძების მობრუნებით. ამრიგად, კოორდინატთა სისტემის ზოგადი შეცვლა წარმოდგება ორი კერძო სახის შეცვლისაგან: 1) კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანა და 2) ღერძების მობრუნება სათავის შეუცვლელად. ხშირად პირველი სახის ცვლას სათავის გადატანას უწოდებენ. ბუნებრივია პირველად განხილულ იქნას კერძო შემთხვევები, მერე კი ზოგადი შემთხვევა.

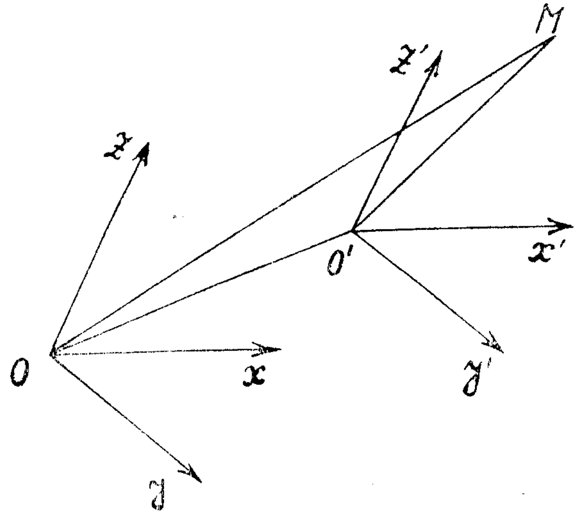
§ 1. სისტემის პარალელური გადატანა

1. **ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნა.** როგორც ცნობილია, ვექტორის კოორდინატები არ იცვლება ვექტორის პარალელური გადატანის დროს. აქედან ცხადია, რომ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი ა რ შ ე ი ც ვ ლ ე ბ ა კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ღ ე რ ძ ე ბ ი ს (მაშასადამე მთელი სისტემის) პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი გ ა დ ა ტ ა ნ ი ს დ რ ო ს.

2. **წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა.** დავუშვათ, რომ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა პარალელური გადატანის შემდეგ იღებულობს $O'x'y'z'$ სისტემის მდებარეობას. პირველ სისტემას ვუწოდოთ ძ ვ ე ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა, მეორეს კი ა ხ ა ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა. ამ უკანასკნელის მდებარეობა ძველის მიმართ სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ მოცემულია O' წერტილი ძველი სისტემის მიმართ. O' წერტილის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ a, b, c-თი. განსახილავი M წერტილის კოორდინატები ძველი სის-

ტემის მიმართ აღვნიშნოთ x, y, z-ით, ხოლო ახალი სისტემის მიმართ x', y', z'-ით. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

$$O'=(a,\ b,\ c) \text{ ძველ სისტემაში,}$$
$$M=(x,\ y,\ z) \quad \text{"} \qquad \text{"}$$
$$M=(x',\ y',\ z') \text{ ახალ სისტემაში.}$$



ნახ. 53.

განვიხილოთ შემდეგი ვექტორები $\overline{OM}$, $\overline{OO'}$, $\overline{O'M}$. ადვილად გამოითვლება მათი კოორდინატები, როგორც რადიუს-ვექტორებისა. გვექნება:

$$\overline{OM}=(x,\ y,\ z) \text{ ძველ სისტემაში,}$$
$$\overline{OO'}=(a,\ b,\ c) \quad \text{"} \qquad \text{"}$$
$$\overline{O'M}=(x',\ y',\ z') \text{ ახალ სისტემაში.}$$

რადგან ახალი სისტემა მიღებულია ძველი სისტემიდან პარალელური გადატანით, ამიტომ $\overline{O'M}$ ვექტორს აქვს იგივე კოორდინატები ძველ სისტემაშიაც. ნახაზიდან (ნახ. 53) ცხადია, რომ

$$\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M}. \tag{1}$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ძველი სისტემის ღერძებზე. მივიღებთ:

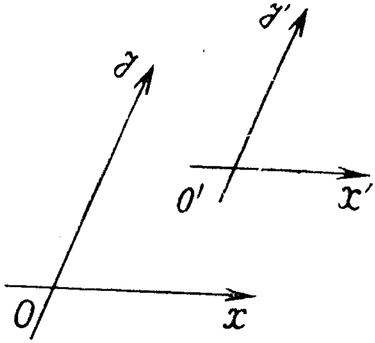
$$\begin{aligned} x&=a+x',\\ y&=b+y',\\ z&=c+z'. \end{aligned} \tag{2}$$

ასე იცვლება წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა სისტემის

პარალელური გადატანის დროს. ლიტერატურაში ამ ფორმულებს კოორდინატთა სათავის გადატანის ფორმულებს უწოდებენ.

3. **სისტემის პარალელური გადატანა ორი განზომილების შემთხვევაში.** განვიხილოთ Oxy სისტემის პარალელური გადატანა Oxy სიბრტყეზე (ნახ. 54). ამ შემთხვევაში განსახილავი M წერტილიც Oxy სიბრტყეზეა მოთავსებული, ამიტომ $z=0$. ცხადია, აგრეთვე, რომ $c=0$ და $z'=0$. ამ პირობებში (2) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} x&=a+x', \\ y&=b+y'. \end{aligned} \qquad (3)$$



ნახ. 54.

§ 2. კოორდინატთა ღერძების მობრუნება სათავის გარშემო

1. **ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნა.** დავუშვათ, რომ $Oxyz$ სისტემის ღერძების მობრუნებით სათავის გარშემო მიიღება $Ox'y'z'$ სისტემა. ამ შემთხვევაშიაც, ისევე როგორც წინა პარაგრაფებში, პირველ სისტემას ვუწოდებთ ძველ სისტემას, მეორეს კი ახალს. ახალი სისტემის მგეზავები აღვნიშნოთ $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$, $\overline{e_3}'$-ით. თუ ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ განსაზღვრულია (ნახ. 55), მაშინ განსაზღვრული იქნება აგრეთვე $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$, $\overline{e_3}'$ მგეზავებიც. დავუშვათ, რომ მოცემულია ამ ვექტორების კოორდინატები ძველ სისტემაში:

$$\begin{aligned} \overline{e_1}'&=(l_1,\ m_1,\ n_1), \\ \overline{e_2}'&=(l_2,\ m_2,\ n_2), \\ \overline{e_3}'&=(l_3,\ m_3,\ n_3). \end{aligned} \qquad (4)$$

განვიხილოთ რაიმე $\overline{P}$ ვექტორი. მისი კოორდინატები ძველ სისტემაში აღვნიშნოთ X, Y, Z-ით, ხოლო ახალ სისტემაში X', Y', Z'-ით, ე. ი.

$$\overline{P}=(X,\ Y,\ Z) \text{ ძველ სისტემაში,}$$
$$\overline{P}=(X',\ Y',\ Z') \text{ ახალ სისტემაში.}$$

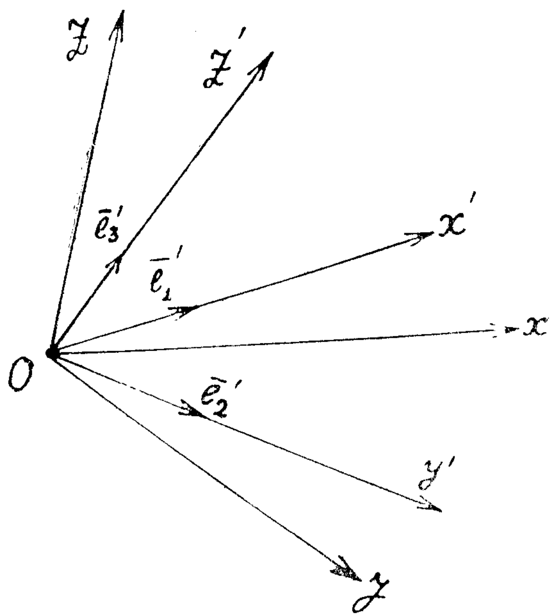
დავშალოთ $\overline{P}$ ვექტორი ახალი სისტემის მგეზავების საშუალებით. გვექნება

$$\overline{P} = X'\overline{e_1}' + Y'\overline{e_2}' + Z'\overline{e_3}'.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა ძველი სისტემის ღერძებზე (რაც იმის ეკვივალენტურია, რომ ამ ტოლობაში ვექტორები გამოვცვალოთ შესაბამად მათი კოორდინატებით). მივიღებთ:

$$\begin{aligned} X &= X'l_1 + Y'l_2 + Z'l_3, \\ Y &= X'm_1 + Y'm_2 + Z'm_3, \\ Z &= X'n_1 + Y'n_2 + Z'n_3. \end{aligned} \qquad (5)$$

ამ ფორმულებს, რომელიც აკავშირებს ვექტორის ძველსა და ახალ კოორდინატებს, ეწოდება **ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულები.** ამ ფორმულებში $l_1, l_2, l_3, \ldots, n_1, n_2, n_3$ კოეფიციენტები მუდმივებია. ამრიგად ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნები არის **წრფივი და ერთგვაროვანი.**



ნახ. 55.

2. **წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა.** დავუშვათ, რომ x, y, z არის M წერტილის კოორდინატები ძველ სისტემაში, ხო-

სადაც x', y', z' არის იმავე წერტილის კოორდინატები ახალ სისტემაში, ე. ი.

$$M=(x,\ y,\ z) \text{ ძველ სისტემაში,}$$
$$M=(x',\ y',\ z') \text{ ახალ სისტემაში.}$$

ცხადია, რომ $\overline{OM}$ ვექტორის კოორდინატები ძველსა და ახალ სისტემაში იქნება (როგორც რადიუს-ვექტორის კოორდინატები) შესაბამად M წერტილის კოორდინატები იმავე სისტემაში, ე. ი.

$$\overline{OM}=(x,\ y,\ z) \text{ ძველ სისტემაში,}$$
$$\overline{OM}=(x',\ y',\ z') \text{ ახალ სისტემაში.}$$

დავშალოთ $\overline{OM}$ ვექტორი ახალი სისტემის მგეზავების საშუალებით. გვექნება

$$\overline{OM}=x'\overline{e_1}'+y'\overline{e_2}'+z'\overline{e_3}'.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა კოორდინატთა ღერძებზე. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x&=x'l_1+y'l_2+z'l_3,\\ y&=x'm_1+y'm_2+z'm_3,\\ z&=x'n_1+y'n_2+z'n_3. \end{aligned} \tag{6}$$

ამ ფორმულებს, რომელიც აკავშირებს M წერტილის ძველსა და ახალ კოორდინატებს, ეწოდება *წერტილის კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულები*. ამ ფორმულებში კოეფიციენტები იგივეა, რაც (5) ფორმულებში. ამრიგად წერტილის კოორდინატების გარდაქმნები, ღერძების მობრუნების დროს, წრფივი და ერთგვაროვანია.

3. ვექტორის და წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე. დავუშვათ, რომ $\overline{P}$ ვექტორი და M წერტილი მდებარეობს Oxy სიბრტყეზე, მაშინ $Z=0$ და $z=0$. რადგან ახალი $Ox'y'$ სისტემა მიიღება Ox და Oy ღერძების მობრუნებით O წერტილის გარშემო მოცემულ სიბრტყეზე, ამიტომ $Z'=0$, $z'=0$. ამ შემთხვევაში ახალი სისტემის მდებარეობა განსაზღვრული იქნება ძველი სისტემის მიმართ $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ მგეზავებით (ნახ. 56):

$$\begin{aligned} \overline{e_1}'&=(l_1,\ m_1),\\ \overline{e_2}'&=(l_2,\ m_2). \end{aligned} \tag{7}$$

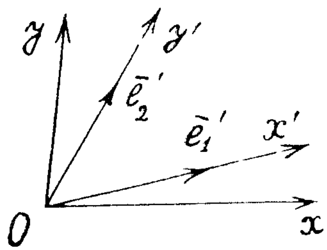
ამ შემთხვევაში $\overline{P}$ და $\overline{OM}$ ვექტორების დაშლა მოხდება $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ მგეზავების საშუალებით. გვექნება:

$$\overline{P}=X'\overline{e_1}'+Y'\overline{e_2}',$$
$$\overline{OM}=x'\overline{e_1}'+y'\overline{e_2}'.$$

პირველი ტოლობის დაგეგმილება Ox და Oy ღერძებზე (5) ფორმულების მსგავსად, მოგვცემს ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულებს:

$$X = X'l_1 + Y'l_2,$$
$$Y = X'm_1 + Y'm_2. \tag{8}$$

რაც, ცხადია, (5) ფორმულების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს და შეიძლება მიღებულ იქნას მისი პირველი ორი ტოლობიდან $Z'=0$-ის ჩასმით. მეორე ტოლობის დაგეგმილება Ox და Oy ღერძებზე, (6) ფორმულების მსგავსად, მოგვცემს წერტილის კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულებს სიბრტყეზე:



ნახ. 56.

$$x = x'l_1 + y'l_2,$$
$$y = x'm_1 + y'm_2. \tag{9}$$

რაც, ცხადია, (6) ფორმულების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს და შეიძლება მიღებული იქნეს მისი პირველი ორი ტოლობიდან $z'=0$ ჩასმით. პირდაპირ ჩანს, რომ (8) და (9) გარდაქმნებიც წრფივი და ერთგვაროვანი გარდაქმნებია.

§ 3. კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი შეცვლა

1. ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნა. დავუშვათ, რომ ძველი კოორდინატთა სისტემიდან ახალი კოორდინატთა სისტემის მისაღებად, საჭიროა სისტემის პარალელური გადატანა და ღერძების მობრუნება. რადგან ვექტორის კოორდინატები სისტემის პარალელური გადატანის დროს არ იცვლება, ხოლო კოორდინატთა ღერძების მობრუნების დროს კი გარდაიქმნება (5) ფორმულებით, ამიტომ ვექტორის კოორდინატები კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი შეცვლის დროსაც გარდაიქმნება იმავე (5) ფორმულებით. ამრიგად, ვექტორის კოორდინატების გარდაქმნა ყოველთვის წრფივი და ერთგვაროვანია.

2. წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა სივრცეში. ამ შემთხვევაში გვექნება შემდეგი მონაცემები (ნახ. 57):

$M=(x,\ y,\ z)$ ძველ სისტემაში,
$O'=(a,\ b,\ c)$ „ „
$M'=(x',\ y',\ z')$ ახალ სისტემაში.

გვქონდეს

$$\overline{OM}=(x,\ y,\ z)\ \text{ძველ სისტემაში,}$$
$$\overline{OO'}=(a,\ b,\ c)\quad \text{„}\qquad\text{„}$$
$$\overline{O'M}=(x',\ y',\ z')\ \text{ახალ სისტემაში.}$$

დავშალოთ $\overline{O'M}$ ვექტორი $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$, $\overline{e_3}'$ მგეზავების საშუალებით. გვექნება

$$\overline{O'M}=x'\overline{e_1}'+y'\overline{e_2}'+z'\overline{e_3}'.$$

ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M}.$$

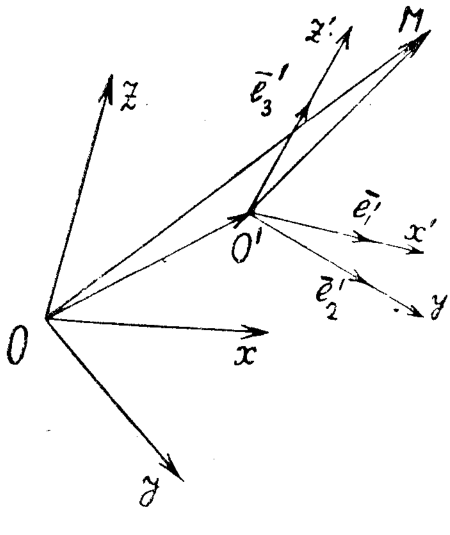
შევიტანოთ აქ $\overline{O'M}$ ვექტორის მნიშვნელობა. გვექნება

$$\overline{OM}=\overline{OO'}+x'\overline{e_1}'+y'\overline{e_2}'+z'\overline{e_3}'. \tag{10}$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა კოორდინატთა ღერძებზე. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x&=x'l_1+y'l_2+z'l_3+a,\\ y&=x'm_1+y'm_2+z'm_3+b,\\ z&=x'n_1+y'n_2+z'n_3+c. \end{aligned} \tag{11}$$

ასეთია წერტილის კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულები ზო-



ნახ. 57.

გად შემთხვევაში. პირდაპირ ჩანს, რომ ეს გარდაქმნები წრფივია, მაგრამ არაერთგვაროვანი. ეს გარდაქმნები ერთგვაროვანი იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა $a=b=c=0$. ასეთი ჩასმით კი (11) ფორმუ-

ლებიდან მიიღება (6) ფორმულები, რომელიც შეესაბამება კოორდინატთა სისტემის ღერძების მობრუნებას სათავის გარშემო.

3. წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა სიბრტყეზე. თუ M წერტილი მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე და განიხილება Oxy სისტემის ნებისმიერი შეცვლა (სათავის გადატანა და ღერძების მობრუნება) ამავე სიბრტყეზე, მაშინ გვექნება ასეთი მონაცემები:

$$M=(x,\ y),$$
$$O'=(a,\ b),$$
$$M'=(x',\ y').$$

ამ შემთხვევაში (10) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს ($z'=0$)

$$\overline{OM}=\overline{O'O}+x'\overline{e_1}'+y'\overline{e_2}',$$

სადაც $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ მოცემულია (7) ფორმულებით. ამრიგად, ტოლობის დაგეგმილება Ox და Oy ღერძებზე მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x&=a+x'l_1+y'l_2,\\ y&=b+x'm_1+y'm_2. \end{aligned} \tag{12}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ფორმულები მიიღება (11) ფორმულების პირველი ორი ტოლობიდან მასში $z'=0$ ჩასმით. ეს გარდაქმნები, როგორც ჩანს, არის წრფივი, მაგრამ არაერთგვაროვანი. ერთგვაროვანი მხოლოდ მაშინ იქნება, როცა $a=b=0$, ე. ი. როცა ახალი სისტემა მიიღება Ox, Oy ღერძების მობრუნებით სათავის გარშემო.

§ 4. შექცეული გარდაქმნები

1. მოცემული გარდაქმნების შექცევა. წინა პარაგრაფებში მიღებული ფორმულებით გამოსახულია ძველი სისტემის კოორდინატები ახალი სისტემის კოორდინატებით. მაგრამ შესაძლებელია ანალიზური გეომეტრიის სხვადასხვა საკითხების შესწავლის დროს საჭირო შეიქნას ახალი სისტემის კოორდინატების გამოსახვა ძველი სისტემის კოორდინატებით, ოღონდ იმავე მონაცემების საშუალებით, რომლებიც ზემოთ მიღებულ ფორმულებს უდევს საფუძვლად: ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ ზემოაღნიშნული გარდაქმნები ახალი კოორდინატების მიმართ. ამ მოქმედებას ეწოდება აღებულ გარდაქმნათა შექცევა. შედეგად მიღებულ ფორმულებს კი აღებული გარდაქმნების შექცეული გარდაქმნები; მაგალითად, (2) ფორმულიდან x', y', z'-ის ამოხსნა მოგვცეს:

$$\begin{aligned} x'&=x-a,\\ y'&=y-b,\\ z'&=z-c. \end{aligned} \tag{13}$$

ასეთია შექცეული გარდაქმნები ამ შემთხვევაში. (5) გარდაქმნების შექცევა (ამოხსნა x', y', z'-ის მიმართ) მოგვცემს შესაბამ შექცეულ გარდაქმნებს. ეს უკანასკნელი, ცხადია, იქნება აგრეთვე ერთგვაროვანი გარდაქმნა. როგორც ცნობილია, ამ ტოლობათა ამოხსნა დამოკიდებულია სისტემის დეტერმინანტზე

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1, & l_2, & l_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

თუ $\Delta \neq 0$ მაშინ x', y', z'-ის ამოხსნა შესაძლებელია. ამ შემთხვევაში შექცეული გარდაქმნები არსებობს ისევე, როგორც პირდაპირი გარდაქმნები. რადგან სახელწოდებანი „ძველი“ და „ახალი“ სისტემები პირობითი იყო, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ მათი ადგილშენაცვლება. ამრიგად, ჩვენს განსახილავ შემთხვევაში $\Delta \neq 0$. ასევე შეიძლება შექცევა (9) გარდაქმნებისა. ამ შემთხვევაში სისტემის დეტერმინანტები მეორე რიგისაა,

$$\delta = \begin{vmatrix} l_1, & l_2 \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1, & m_1 \\ l_2, & m_2 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

ცხადია, რომ (9) გარდაქმნების შექცეული გარდაქმნებიც იქნება ერთგვაროვანი. ცხადია, აგრეთვე, რომ (11) და (12) გარდაქმნების შექცეული გარდაქმნები იქნება არაერთგვაროვანი.

2. **გარდაქმნის მატრიცა და მისი შექცეული მატრიცა.** (6) გარდაქმნის კოეფიციენტებისაგან შედგენილ III რიგის მატრიცას

$$\begin{pmatrix} l_1, & l_2, & l_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{pmatrix} = T_3 \tag{16}$$

ეწოდება გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს მ ა ტ რ ი ც ა. ანალოგიურად (9) გარდაქმნის მატრიცა იქნება შემდეგი II რიგის მატრიცა

$$\begin{pmatrix} l_1, & l_2 \\ m_1, & m_2 \end{pmatrix} = T_2. \tag{17}$$

შექცეული გარდაქმნის მატრიცას ეწოდება აღებული გარდაქმნების მატრიცის შ ე ქ ც ე უ ლ ი მ ა ტ რ ი ც ა. ამ უკანასკნელის ელემენტები აღებულ გარდაქმნათა შექცევის (ამოხსნის) შედეგად მიღებული კოეფიციენტებია. როგორც ცნობილია უმაღლესი ალგებრიდან, ეს კოეფიციენტები შესაბამად აღებული გარდაქმნის მატრიცის ელემენტების კანონიკური მინორებია (კვადრატული მატრიცის რაიმე ელემენტის კანონიკური მინორი ეწოდება ამ ელემენტის მინორს გაყოფილს მატრიცის დეტერმინანტზე).

3. Δ და δ დეტერმინანტების ნიშნის გეომეტრიული მნიშვნელობა. გამოვითვალოთ $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა. თანახმად (125) ფორმულისა, გვექნება (X, Y, Z-ის ნაცვლად შესაბამად ჩაჯდება l, m, n)

$$V = V_0 \begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

სადაც V_0 არის $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცემულობა, ამიტომ $V_0 > 0$. (14) ფორმულის თანახმად, უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება

$$V = V_0 \Delta. \tag{19}$$

აქედან ჩანს, რომ V-ს ისეთივე ნიშანი აქვს, როგორც Δ-ს. V-ს ნიშანი კი განსაზღვრავს $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ სამეულის მოგეზულობას. ამრიგად, თუ $\Delta > 0$, მაშინ ახალი სისტემა ისევეა მოგეზული, როგორც ძველი. თუ $\Delta < 0$, მაშინ ახალი სისტემა ძველი სისტემის მოგეზულობის საწინააღმდეგოდ არის მოგეზული. შეუძლებელია ასეთი შემთხვევა: $\Delta = 0$, რადგან მას შეესაბამება $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ ვექტორების კომპლანარულობა, რასაც ადგილი არა აქვს (ეს ვექტორები ახალ სისტემას განსაზღვრავენ). ანალოგიურად $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისათვის, (123) ფორმულის თანახმად, გვექნება (X, Y უნდა შევცვალოთ l, m-ით)

$$S = S_0 \begin{vmatrix} l_1, & m_1 \\ l_2, & m_2 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

სადაც S_0 არის $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი. ცხადია, რომ $S_0 > 0$. უკანასკნელი ტოლობა, (15) ფორმულის თანახმად, ასეთ სახეს მიიღებს

$$S = S_0 \delta. \tag{21}$$

აქედან ჩანს, რომ S-ს აქვს ისეთივე ნიშანი, როგორიც δ-ს. S-ის ნიშანი კი განსაზღვრავს $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$ ვექტორების წყვილის მოგეზულობას, ე. ი. ახალი სისტემის მოგეზულობას. ამრიგად, თუ $\delta > 0$, მაშინ ახალი სისტემა ისევეა მოგეზული, როგორც ძველი. თუ $\delta < 0$, მაშინ ახალი სისტემა ძველი სისტემის მოგეზულობის საწინააღმდეგოდ არის მოგეზული. თუ $\delta = 0$, მაშინ $\overline{e_1'} \parallel \overline{e_2'}$, რასაც ადგილი არა აქვს (რადგან ეს ვექტორები განსაზღვრავენ ახალ სისტემას).

1. ორთოგონალური გარდაქმნები სივრცეში. იმ შემთხვევაში, როცა ძველი და ახალი სისტემები მართკუთხა სისტემებია, (6) გარდაქმნებს ეწოდება ორთოგონალური გარდაქმნები. ამ შემთხვევაში $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ თანამართობი ვექტორებია. ისინი დააკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\overline{e_1'}^2=1, \quad \overline{e_2'}^2=1, \quad \overline{e_3'}^2=1,$$
$$\overline{e_1'}\cdot\overline{e_2'}=0, \ \ \overline{e_1'}\cdot\overline{e_3'}=0, \ \ \overline{e_2'}\cdot\overline{e_3'}=0.$$

ამ ვექტორების კოორდინატები მოცემულია (4) ფორმულებით, ოღონდ ამ შემთხვევაში $Oxyz$ სისტემა მართკუთხაა. ამიტომ $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ მგეზავების კვადრატები და სკალარული ნამრავლები მარტივად გამოისახებიან კოორდინატებში. (95) და (85) ფორმულების შესაბამად გვექნება:

$$\begin{aligned} l_1^2+m_1^2+n_1^2&=1,\\ l_2^2+m_2^2+n_2^2&=1,\\ l_3^2+m_3^2+n_3^2&=1. \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2&=0,\\ l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3&=0,\\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3&=0. \end{aligned} \tag{23}$$

ასეთ პირობებს აკმაყოფილებს ორთოგონალური გარდაქმნის კოეფიციენტები. ამ შემთხვევაში გარდაქმნის მატრიცას ეწოდება ორთოგონალური მატრიცა. ამრიგად, ორთოგონალური მატრიცის ელემენტები (22) და (23) პირობებით არის დახასიათებული. რადგან მართკუთხა კოორდინატებში $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ ვექტორების გარე ნამრავლი უდრის კოორდინატებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს (იხ. II თავის 112-ე ფორმ.), ამიტომ

$$[\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}]=\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1\\ l_2, & m_2, & n_2\\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

მეორე მხრივ, ადვილი მისახვედრია, რომ

$$[\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}]=\pm 1. \tag{25}$$

მართლაც. $\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედი, ამ შემთხვევაში, კუბია ერთეული წიბოთი. ამიტომ მისი მოცულობა

ერთის ტოლია. ნიშანი კი დამოკიდებულია e_1', e_2', e_3' სამეულის მოგეზულობაზე. როგორც ცნობილია, ზედა ნიშანი შეესაბამება $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$, $\overline{e_3}'$ სამეულის (ე. ი. ახალი სისტემის) ისეთივე მოგეზულობას, როგორიც აქვს ძველ სისტემას, ხოლო ქვედა ნიშანი შეესაბამება ძველის საწინააღმდეგო მოგეზულობას.

დავუშვათ, რომ მოცემულია ახალი სისტემის ღერძების მიერ ძველი სისტემის ღერძებთან შედგენილი კუთხეები გარკვეული ცხრილის სახით (ნახ. 58).

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

ნახ. 58.

თვითეულ კვადრატში მოთავსებულია ის კუთხე, რომელსაც ადგენს ამ კვადრატზე გამავალი სტრიქონისა და სვეტის შესაბამი ღერძები. მაგალითად, x' ღერძი x, y, z ღერძებთან ადგენს α_1, β_1, γ_1 კუთხეებს. ცხადია, რომ $\overline{e_1}'$ მგეზავიც იმავე კუთხეებს შეადგენს x, y, z ღერძებთან. ამიტომ e_1'-ის მართკუთხა გეგმილები x, y, z ღერძებზე ტოლი იქნება ამ კუთხეების კოსინუსებისა შესაბამად, ე. ი. $\overline{e_1}' = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$. ანალოგიურად მივიღებთ დანარჩენი მგეზავების კოორდინატებსაც. ამრიგად, გვექნება:

$$\begin{aligned} e_1' &= (\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1), \\ e_2' &= (\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2), \\ e_3' &= (\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3). \end{aligned} \tag{26}$$

ამის მიხედვით (6) გარდაქმნები ასეთ სახეს მიიღებს (კოეფიციენტები შეიცვლება სათანადო კოსინუსებით):

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned} \tag{27}$$

აქედან ჩანს, რომ გარდაქმნის კოეფიციენტები (26) ცხრილის კუთხეების კოსინუსებია იმავე მიმდევრობით, როგორც ეს ცხრილშია ნაჩვენები; მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი ცხრილის პირველი სტრიქონის კუთხეების კოსინუსები (27) გარდაქმნების პირველი ტოლობის მარჯვენა მხარის კოეფიციენტებია და ა. შ.

2. ორთოგონალური გარდაქმნის შექცეული გარდაქმნა სივრცეში. რადგან ორივე სისტემა მართკუთხაა, ამიტომ x', y', z'-ის გა-

მოსახულებანი x, y, z-ის მიმართ, ე. ი. შებრუნებული გარდაქმნები, აგრეთვე, ორთოგონალური იქნება. შებრუნებული გარდაქმნა შეიძლება მივიღოთ (27) გარდაქმნების შებრუნებით, ე. ი. x', y', z'-ის ამოხსნით. შესაძლებელია კიდევ შებრუნებული გარდაქმნები მივიღოთ უშუალოდ (26) ცხრილის მიხედვით, (27) გარდაქმნების ანალოგიურად. მაგალითად, x'-ის გამოსახულების კოეფიციენტები შესაბამად იქნება პირველ სვეტში მოთავსებული კუთხეების კოსინუსები და ა. შ. ამრიგად, გვექნება:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1,\\
y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2,\\
z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

თუ შევადარებთ (27) და (28) ფორმულებს ადვილად მივხვდებით, რომ ამ ორი გარდაქმნის მატრიცები ერთიმეორისაგან მიიღება სტრიქონებისა და სვეტების ადგილშენაცვლებით.

ჩვენ აქამდე განვიხილეთ მხოლოდ ერთგვაროვანი ორთოგონალური გარდაქმნები. იმ შემთხვევაში, როცა ახალი სისტემის სათავე მოთავსებულია O' წერტილში, მაშინ შესაბამი გარდაქმნების მისაღებად (27) ფორმულების მარჯვენა მხარეს მოთავსებულ გამოსახულებებს, (11) გარდაქმნების მსგავსად, შესაბამად დაემატება O' წერტილის კოორდინატები a, b, c. გვექნება:

$$
\begin{aligned}
x &= a + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3,\\
y &= b + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3,\\
z &= c + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

შექცეული გარდაქმნის მისაღებად, საჭიროა შექცეულ იქნას (29) ფორმულები.

ამ გარდაქმნების შექცევა მოხდება ისევე, როგორც (27) გარდაქმნებისა (28) ფორმულების მისაღებად. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ (27) სისტემის თავისუფალი წევრებია x, y, z, ხოლო (29) სისტემისა კი $x-a$, $y-b$, $z-c$. ამრიგად, x', y', z'-ის გამოსახულება ისეთივე იქნება, როგორც (28) ტოლობაში, ოღონდ x, y, z-ის ნაცვლად შესაბამად უნდა დაიწეროს $x-a$, $y-b$, $z-c$. ამრიგად, გვექნება:

$$
\begin{aligned}
x' &= (x-a)\cos\alpha_1 + (y-b)\cos\beta_1 + (z-c)\cos\gamma_1,\\
y' &= (x-a)\cos\alpha_2 + (y-b)\cos\beta_2 + (z-c)\cos\gamma_2,\\
z' &= (x-a)\cos\alpha_3 + (y-b)\cos\beta_3 + (z-c)\cos\gamma_3.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

3. **ორთოგონალური გარდაქმნები სიბრტყეზე.** თუ Oxy და

$O'x'y'$ კოორდინატთა სისტემები მართკუთხაა, მაშინ შესაბამ (9) გარდაქმნებს ეწოდება ორთოგონალური გარდაქმნები სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ მგეზავები დააკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\overline{e_1}'^2=1, \ \overline{e_2}'^2=1, \ \overline{e_1}'\cdot\overline{e_2}'=0.$$

მართკუთხა კოორდინატებში ეს ტოლობანი (7) მოცემულობის თანახმად ასე გამოისახება:

$$\begin{aligned} l_1^2+m_1^2&=1,\\ l_2^2+m_2^2&=1,\\ l_1l_2+m_1m_2&=0. \end{aligned} \tag{31}$$

გამოვთვალოთ $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ ვექტორებზე აგებული მოგეზული პარალელოგრამის ფართობი. ეს ფართობი, (12) ფორმულის თანახმად, უდრის $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს

$$S=\begin{vmatrix} l_1, & m_1\\ l_2, & m_2 \end{vmatrix}. \tag{32}$$

მეორე მხრივ, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$S=\pm 1. \tag{33}$$

მართლაც, $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ თანამართობულ მგეზავებზე აგებული პარალელოგრამი იქნება კვადრატი, რომლის ჩვეულებრივი ფართობი ერთია. S-ის ნიშანზე კი დამოკიდებულია ახალი სისტემის მოგეზულობა. თუ $S=1$, მაშინ ძველსა და ახალ სისტემას ერთნაირი მოგეზულობა ექნება. თუ $S=-1$, მაშინ ძველსა და ახალ სისტემას ერთიმეორის საწინააღმდეგო მოგეზულობა ექნება.

დავუშვათ, რომ მოცემულია ახალი სისტემის ღერძების მიერ ძველი სისტემის ღერძებთან შედგენილი კუთხეები გარკვეული ცხრილის სახით (ნახ. 58 ა). ეს ცხრილი შედგენილია ისეთივე წესით, როგორითაც წინა ცხრილი. $\overline{e_1}'$, $\overline{e_2}'$ მგეზავებისათვის გვექნება:

	x'	y'
x	α_1	α_2
y	β_1	β_2

ნახ. 58 ა.

$$\begin{aligned} \overline{e_1}'&=(\cos\alpha_1, \ \cos\beta_1),\\ \overline{e_2}'&=(\cos\alpha_2, \ \cos\beta_2). \end{aligned} \tag{34}$$

(9) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს (გარდაქმნის კოეფიციენტები შეიცვლება სათანადო კოსინუსებით):

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2,\\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2. \end{aligned} \tag{35}$$

აქაც შეიძლება იგივე შევნიშნოთ, რაც (27) ფორმულებისათვის იყო აღნიშნული. სახელდობრ, (35) გარდაქმნის კოეფიციენტები უკანასკნელი ცხრილით მოცემული კუთხეების კოსინუსებია იმავე მიმდევრობით, როგორც ეს ცხრილშია ნაჩვენები. (35) გარდაქმნების შექცეული გარდაქმნები მიიღება ცხრილის მიხედვით ისეთივე წესით, როგორც (30) ფორმულები იქნა მიღებული (სტრიქონები და სვეტები როლებს შეიცვლიან). გვექნება:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1, \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2. \end{aligned} \tag{36}$$

ბოლოს, თუ ახალი სისტემის სათავე O' (a, b) წერტილშია, მაშინ ორთოგონალური გარდაქმნის ფორმულების მისაღებად საჭიროა (35) ფორმულების მარჯვენა მხარეს მდგომ გამოსახულებებს (12) ფორმულის მსგავსად შესაბამად მიემატოს O' წერტილის a, b კოორდინატები:

$$\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2, \\ y &= b + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2. \end{aligned} \tag{37}$$

შექცეული გარდაქმნების მისაღებად უნდა ამოვხსნათ (27) გარდაქმნები. (30) ფორმულების ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha_1 + (y-b)\cos\beta_1, \\ y' &= (x-a)\cos\alpha_2 + (y-b)\cos\beta_2. \end{aligned} \tag{38}$$

4. სიბრტყეზე ორთოგონალური გარდაქმნის კანონიკური სახე. სიბრტყეზე ორთოგონალური გარდაქმნის ოთხი კოეფიციენტი შეკავშირებულია (29) განტოლებებით. ამიტომ ნებისმიერი შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთი კოეფიციენტი. საინტერესოა ვიცოდეთ, თუ როგორ გამოისახება გარდაქმნის კოეფიციენტი ერთი პარამეტრით; ამისათვის უმჯობესია მივმართოთ უკანასკნელ ცხრილს. რადგან ორივე სისტემა მართკუთხაა, ამიტომ ცხრილის ყველა კუთხე და, მაშასადამე, მათი კოსინუსებიც შეგვიძლია გამოვსახოთ ერთ-ერთი მათგანის საშუალებით. თუ აღვნიშნავთ $\alpha_1 = \alpha$, მაშინ ნახაზის (ნახ. 59) მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\alpha_1 = \alpha, \ \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha, \ \beta_2 = \alpha.$$

აქედან

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\alpha, \ \cos\alpha_2 = -\sin\alpha, \\ \cos\beta_1 &= \sin\alpha, \ \cos\beta_2 = \cos\alpha. \end{aligned}$$

(35) გარდაქმნები მიიღებს ასეთ სახეს:

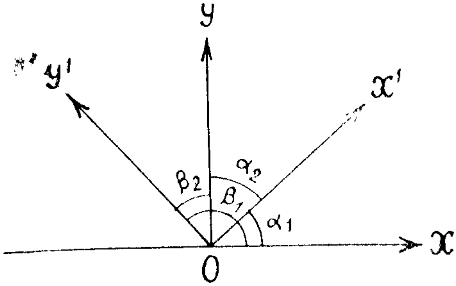
$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{39}$$

იმავე α კუთხისათვის შესაძლებელია კიდევ მეორე შემთხვევა, სადაც y'-ს აქვს 59-ე ნახაზზე აღნიშნულის საწინააღმდეგო გეზი (ნახ. 59 ა). ამ შემთხვევაში:

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \ \beta_2 = \pi - \alpha.$$

აქედან

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha, \ \cos\alpha_2 = \sin\alpha,$$
$$\cos\beta_1 = \sin\alpha, \ \cos\beta_2 = -\cos\alpha.$$

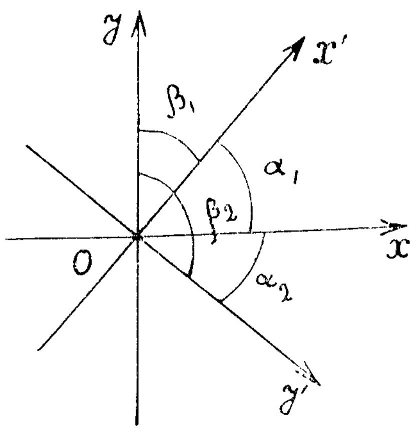


ნახ. 59.

(33) გარდაქმნები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \tag{40}$$

შევნიშნავთ, რომ (39) და (40) ფორმულების გამოყვანის დროს ნახაზები შედგენილი გვქონდა α მახვილი კუთხისათვის. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფორმულები უცვლელი დარჩება, თუ α-ს მივიჩნევთ ბლაგვ კუთხედ. იმ შემთხვევაში, როცა ახალი სისტემის სათავე გადატანილია O' წერტილში (ნახ. 60 ა, ბ), მაშინ შესაბამი გარდაქმნის ფორმულები მიიღება (35) და (36) ფორმულებიდან, თუ ამ ტოლობების მარჯვნივ მდგომ გამოსახუ-



ნახ. 59 ა.

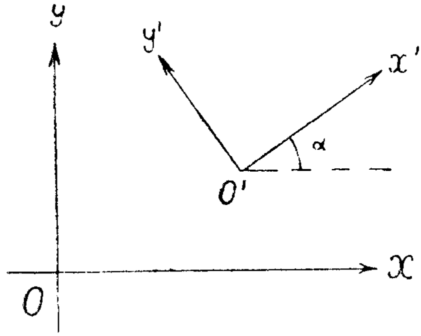
…ებს მივუმატებთ O' წერტილის a, b კოორდინატებს, გვექნება:

$$x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \tag{41}$$

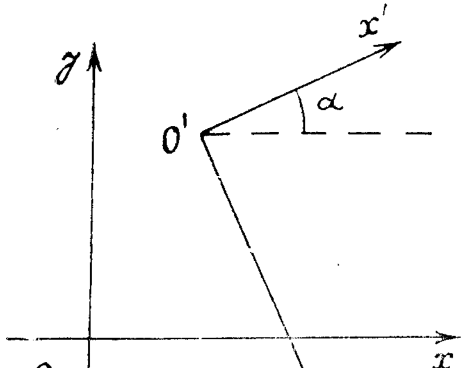
ან

$$x = a + x' \cos\alpha + y' \sin\alpha,$$
$$y = b + x' \sin\alpha - y' \cos\alpha. \tag{42}$$

ამ გარდაქმნებს ეწოდება სიბრტყეზე ორთოგონალური გარდაქმნები კანონიკური სახით.



ნახ. 60 ა.



ნახ. 60 ბ.

შექცეული გარდაქმნების მისაღებად კოსინუსების მნიშვნელობები უნდა შევიტანოთ (36) და (37) ფორმულებში. პირველ შემ-

თხვევაში (39) და (40) გარდაქმნების შექცეული გარდაქმნებისათვის გვექნება:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\
y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha
\end{aligned} \tag{43}
$$

და

$$
\begin{aligned}
x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\
y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{44}
$$

ანალოგიურად მიიღება შექცეული გარდაქმნები მეორე შემთხვევაშიც.

5. კოორდინატთა სისტემის მოძრაობა. იმ შემთხვევაში, როცა ორივე კოორდინატთა სისტემა მართკუთხაა და ერთნაირად არის მოგეზული, შეგვიძლია ერთი სისტემა მეორის მოძრაობით მივიღოთ. მართლაც, საკმარისია $Oxyz$ სისტემა პარალელურად გადავიტანოთ ისე, რომ მისი სათავე მოხვდეს O' წერტილში. შემდეგ მოვაბრუნოთ სისტემა O' წერტილის გარშემო ისე. რომ z ღერძი შეუთავსდეს z' ღერძს. ამის შემდეგ Oxy სიბრტყე მოვაბრუნოთ z' ღერძის გარშემო ისე, რომ x ღერძი შეუთავსდეს x' ღერძს. რადგან y ღერძი მართობული რჩება x, z ღერძებისა და $Oxyz$ სისტემას იგივე მოგეზულობა აქვს, რაც $O'x'y'z'$ სისტემას, ამიტომ ზემოაღნიშნული მოძრაობის შემდეგ y ღერძიც შეუთავსდება y' ღერძს. მაშასადამე, $Oxyz$ სისტემა შეუთავსდება $O'x'y'z'$ სისტემას. თუ სისტემებს აქვთ ერთიმეორის საწინააღმდეგო მოგეზულობა, მაშინ ზემოაღნიშნული მოძრაობით მათი შეთავსება შეუძლებელია. y ღერძი დაიკავებს y' ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებას. როგორც ცნობილია, სისტემების ერთნაირი მოგეზულობის შემთხვევაში ორთოგონალური გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი 1-ის ტოლია, ხოლო საწინააღმდეგო მოგეზულობის შემთხვევაში იგივე დეტერმინანტი —1-ის ტოლია. პირველ შემთხვევაში ორთოგონალური გარდაქმნა ახორციელებს სისტემის მოძრაობას და მას სისტემის მოძრაობის ფორმულებსაც უწოდებენ. ამგვარად, სისტემის მოძრაობა წარმოგვიდგება დადებითი დეტერმინანტიანი ორთოგონალური გარდაქმნებით.

იმ შემთხვევაში, როცა განსახილველ სისტემებს საერთო სათავე აქვთ, ახალი სისტემა მიიღება ძველი სისტემისაგან მხოლოდ O წერტილის გარშემო ბრუნვით. შესაბამ გარდაქმნებს ეწოდება სისტემის სათავის გარშემო ბრუნვის ფორმულები. ცხადია, რომ, თუ ახალი სისტემა მიიღება ძველის მოძრაობით, მაშინ ძველი სისტემის მიღებაც შეიძლება ახალი სისტემის მოძრაობით, ე. ი. სისტემის მოძრაობის გამომსახველი გარდაქმნების შექცეული გარდაქ-

ისეთი აგრეთვე მოძრაობას განსაზღვრავს. თუ სისტემები განიხილება სიბრტყეზე, მაშინ ერთნაირი მოგეზულობის შემთხვევაში, სისტემების შესათავსებლად ასე უნდა მოვიქცეთ: Oxy სისტემას გადავიტანთ პარალელურად ისე, რომ მისი სათავე მოხვდეს O' წერტილში. შემდეგ მოვაბრუნებთ სისტემას O' წერტილის გარშემო ისე, რომ Ox ღერძი შეუთავსდეს $O'x'$ ღერძს (ნახ. 60 ა). რადგან Oy ღერძი ამ მოძრაობის დროს მართობული რჩება Ox ღერძისა და Oxy სისტემის მოგეზულობა ისეთივეა, როგორც $O'x'y'$ სისტემისა, ამიტომ Oy ღერძი აღნიშნული მოძრაობის შემდეგ შეუთავსდება $O'y'$ ღერძს. სისტემის ურთიერთსაწინააღმდეგო მოგეზულობის შემთხვევაში Oy ღერძი მიიღებდა $O'y'$ ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებას (ნახ. 60 ბ), ე. ი. სისტემები ვერ შეთავსდებოდა. იმ შემთხვევაში, როცა ორივე სისტემას საერთო სათავე აქვს, სისტემების შეთავსება ხორციელდება Oxy სისტემის მობრუნებით α კუთხეზე სათავის გარშემო (ნახ. 59). თუ სისტემებს საწინააღმდეგო მოგეზულობა აქვთ, მაშინ ასეთი მობრუნებით სისტემები არ შეთავსდება (ნახ. 59 ა). ადვილი შესამოწმებელია, რომ (39) ორთოგონალური გარდაქმნის მატრიცა 1-ის ტოლია, მართლაც,

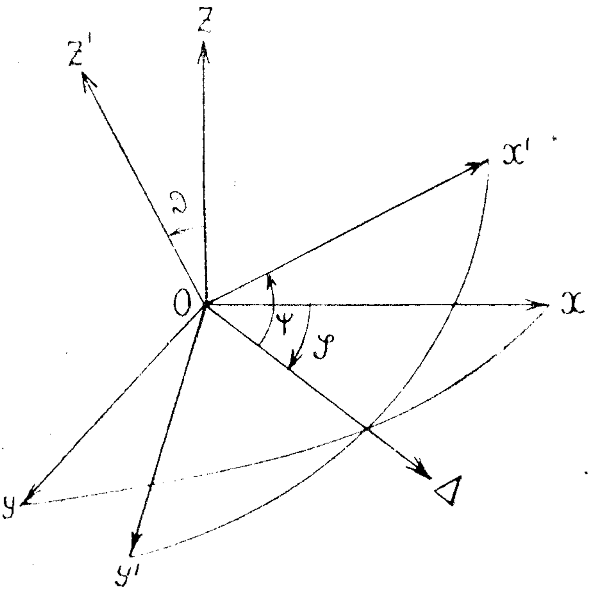
$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში ძველსა და ახალ სისტემას ერთნაირი მოგეზულობა აქვს (რაც თვით ნახაზიდანაც უშუალოდ მოჩანს). ამიტომ (39) გარდაქმნები განსაზღვრავენ Oxy სისტემის მობრუნებას სათავის გარშემო α კუთხეზე. Oxy სისტემის პარალელურ გადატანას და α კუთხეზე მობრუნებას, ე. ი. სისტემის მოძრაობას სიბრტყეზე განსაზღვრავენ (41) ფორმულები. ცხადია, სიბრტყეზედაც, როგორც სივრცეში, Oxy სისტემის მოძრაობის განმსაზღვრელი გარდაქმნების შექცეული გარდაქმნები განსაზღვრავს $O'x'y'$ სისტემის მოძრაობას.

§ 6. ეილერის კუთხეები და ფორმულები

1. ეილერის კუთხეების განმარტება. უკანასკნელ პარაგრაფში აღნიშნული იყო, რომ ორთოგონალური გარდაქმნების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ (22), (23) პირობებს. აქედან ჩანს, რომ 9 კოეფიციენტიდან მხოლოდ 3 კოეფიციენტი იქნება ნებისმიერი. ამრიგად, სისტემის ბრუნვა სათავის გარშემო განისაზღვრება სამი პარამეტრით. სისტემის პარალელური გადატანა, როგორც (1) ფორმულიდან ჩანს, განისაზღვრება აგრეთვე სამი პარამეტრით. ეს

პარამეტრებია a, b, c. აქედან ცხადია, რომ სისტემის მოძრაობა განისაზღვრება ექვსი პარამეტრით. სხვანაირად, სისტემის მოძრაობას აქვს ექვსი თავისუფლების ხარისხი. სისტემის ბრუნვას სათავის გარშემო აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი. ეილერმა[1] სისტემის ბრუნვა სათავის გარშემო წარმოადგინა სამი ბრტყელი (ღერძის



ნახ. 61.

გარშემო) ბრუნვის საშუალებით. ეს სამი ბრტყელი ბრუნვა შემდეგნაირად განისაზღვრება. Oxy და $Ox'y'$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე აღვნიშნოთ Δ-თი. ეს წრფე ისე მოვგეზოთ, რომ x ღერძის ბრუნვა Δ ღერძთან შესათავსებლად წარმოებდეს საათის ისრის ბრუნვის თანხვდენილად. აღვნიშნოთ (ნახ. 61):

$$\varphi = (x, \ \Delta),$$
$$\psi = (\Delta, \ x),$$
$$\vartheta = (z, \ z').$$

$Oxyz$ სისტემა მოვაბრუნოთ Oz ღერძის გარშემო φ კუთხეზე, ამით Ox ღერძი დაიკავებს Δ ღერძის მდებარეობას. მიღებული სისტემა მოვაბრუნოთ Δ ღერძის გარშემო ϑ კუთხეზე, ამით Oz ღერძი

[1] ეილერი –გამოჩენილი მათემატიკოსი, დაიბადა ქ. ბაზელში. დიდხანს მოღვაწეობდა პეტერბურგში (1707—1783).

შეუთავსდება Oz' ღერძს. ამის შედეგად მიღებული სისტემა მოვაბრუნოთ Oz' ღერძის გარშემო ψ კუთხეზე, ამით Δ ღერძი შეუთავსდება x' ღერძს. ამრიგად სამი ასეთი ბრუნვით x და z ღერძები შეუთავსდება Ox' და Oz' ღერძებს. რადგან ამ მოძრაობის დროს Oy ღერძი ყოველთვის მართობული რჩება Ox და Oy ღერძებისა, ამიტომ y ღერძიც შეუთავსდება y' ღერძს. მაშასადამე, ზემოაღნიშნული სამი მარტივი ბრუნვის შედეგად, $Oxyz$ სისტემა შეუთავსდება $Ox'y'z'$ სისტემას. φ, ψ, ϑ კუთხეებს ეწოდება ე ი ლ ე რ ი ს კ უ თ ხ ე ე ბ ი.

2. ეილერის ფორმულები. $Oxyz$ სისტემის z ღერძის გარშემო φ კუთხეზე მობრუნებით მიღებული სისტემა აღვნიშნოთ $Ox_1y_1z_1$-ით. რადგან ბრუნვა ხდება z ღერძის გარშემო, ამიტომ $z=z_1$. მობრუნებას განიცდის მხოლოდ Oxy სიბრტყე φ კუთხეზე და იკავებს Ox_1y_1-ის მდებარეობას; ამიტომ x, y გამოისახება x_1, y_1-ით (39) ფორმულის თანახმად, სადაც x', y' შეიცვლება x_1, y_1-ით, ხოლო α კუთხე შეიცვლება φ კუთხით. გვექნება:

$$\begin{aligned} x&=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi,\\ y&=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi,\\ z&=z_1. \end{aligned} \tag{a}$$

$Ox_1y_1z_1$ სისტემის x_1 ღერძის გარშემო ($x_1=\Delta$) ϑ კუთხეზე მობრუნებით მიღებული სისტემა აღვნიშნოთ $Ox_2y_2z_2$-ით. ამ მობრუნების დროს, როგორც აღნიშნული იყო, z ღერძი, ე. ი. z_1 ღერძი, შეუთავსდება z' ღერძს, x_1 ღერძი რჩება უცვლელი (ე. ი. $x_2=x_1$). y_1 ღერძი Oy_1z_1 სიბრტყეში მობრუნდება სათავის გარშემო ϑ კუთხეზე. ამრიგად გვექნება შემდეგი გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} x_1&=x_2,\\ y_1&=y_2\cos\vartheta-z_2\sin\vartheta,\\ z_1&=y_2\sin\vartheta+z_2\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{b}$$

$Ox_2y_2z_2$ სისტემის მობრუნებით, z' ღერძის გარშემო, როგორც აღნიშნული იყო, მივიღებთ $Ox'y'z'$ სისტემას. ამ მობრუნების დროს z_2 რჩება უცვლელი, ე. ი. $z_2=z'$. მობრუნდება მხოლოდ Ox_2y_2 სიბრტყე სათავის გარშემო ψ კუთხეზე და დაიკავებს $Ox'y'$-ის მდებარეობას. გარდაქმნის ფორმულები იქნება:

$$\begin{aligned} x_2&=x'\cos\psi-y'\sin\psi,\\ y_2&=x'\sin\psi+y'\cos\psi,\\ z_2&=z'. \end{aligned} \tag{c}$$

x_2, y_2, z_2-ის ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (b) ფორმულებში. ამით x_1, y_1, z_1 გამოისახება x', y', z'-ის საშუალებით. x_1, y_1, z_1-ის ასე

მიღებული გამოსახულებანი შევიტანოთ (a) ფორმულებში. მივიღებთ x, y, z-ის გამოსახულებებს x', y', z'-ის საშუალებით წრფივი და ერთგვაროვანი სახით. გარდაქმნის კოეფიციენტების ადგილზე გაჩნდება შემდეგი მნიშვნელობები:

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\\
m_1 &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\\
n_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta,\\
l_2 &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\\
m_2 &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\\
n_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta,\\
l_3 &= \sin\psi\cos\vartheta,\\
m_3 &= -\cos\psi\sin\vartheta,\\
n_3 &= \cos\vartheta.
\end{aligned}
$$

ამ ფორმულებს ეწოდება *ეილერის ფორმულები.*

თ ა ვ ი V

სიბრტყე და წრფე სივრცეში დეკარტის კოორდინატთა ზოგად სისტემაში

§ 1. სიბრტყის ზოგადი განტოლება

განვიხილოთ ნებისმიერი სიბრტყე სივრცეში. ავიღოთ ამ სიბრტყეზე რაიმე გარკვეული M_0 წერტილი და $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები (არაპარალელური). ეს ვექტორები მოვდოთ M_0 წერტილზე.

M_0 წერტილსა და $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებს ექნებათ თავიანთი კოორდინატები განსახილავი კოორდინატთა სისტემის მიმართ;

$$
\begin{aligned}
&M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),\\
&\overline{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\\
&\overline{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი M წერტილი და განვსაზღვროთ $\overline{M_0M}$ ვექტორი. თუ აღვნიშნავთ

$$M=(x,\ y,\ z), \tag{2}$$

მაშინ

$$\overline{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0). \tag{3}$$

ცხადია, რომ სიბრტყის ყველა წერტილისათვის, და მხოლოდ მათთვის, $\overline{M_0M}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები იქნება კომპლანარული. სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის კი (როგორც ცნობილია, თავი II) აუცილებელი და საკმარისია ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი იყოს ნული. ეს პირობა $\overline{M_0M}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებისათვის, (1) და (3) მოცემულობის თანახმად, ასეთ სახეს მიიღებს

$$
\begin{vmatrix}
x-x_0, & y-y_0 & z-z_0\\
X_1, & Y_1, & Z_1\\
X_2, & Y_2, & Z_2
\end{vmatrix}=0. \tag{4}
$$

ადვილად შეიძლება იმისი შემჩნევა, რომ ეს განტოლება წრფივია x, y, z-ის მიმართ. ამაში დავრწმუნდებით, თუ დავშლით ამ განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომ დეტერმინანტს პირველი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით. ამრიგად, სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის (მიმდინარე წერტილის) კოორდინატები, და მხოლოდ ისინი, აკმაყოფილებენ (4) განტოლებას. ამ განტოლებას ეწოდება სიბრტყის განტოლება. მაშასადამე, ყოველი სიბრტყის განტოლება წრფივია მიმდინარე კოორდინატების მიმართ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს განტოლება უსათუოდ განსაზღვრულია, ე. ი. არ წარმოადგენს იგივობას, ვინაიდან იგი ახასიათებს ორი არაპარალელური ვექტორის კომპლანარულ ვექტორებს. ახლა დავამტკიცებთ, რომ x, y, z კოორდინატების მიმართ ნებისმიერი წრფივი განტოლება გამოსახავს სიბრტყეს. განვიხილოთ წრფივი განტოლება

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{5}$$

სადაც A, B, C, D ნებისმიერად აღებული მუდმივებია, ოღონდ A, B, C კოეფიციენტები ერთდროულად ნული არ არის. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს პირობა შესრულდება ნებისმიერი განტოლებისათვის. მართლაც, თუ $A=B=C=0$, მაშინ $D=0$ და განტოლებაც აღარ გვექნება. ავიღოთ სივრცეში ისეთი $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი, რომლის კოორდინატები დააკმაყოფილებს (5) განტოლებას. ცხადია, ადვილად შეიძლება ასეთი x_0, y_0, z_0 სამეულის მოძებნა. მართლაც, საკმარისია x_0, y_0 ავიღოთ ნებისმიერად და z_0 განვსაზღვროთ (5) განტოლებიდან. გვექნება

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

გამოვაკლოთ ეს განტოლება (5) განტოლებას. მივიღებთ

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი $\overline{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ და $\overline{P}_2(x_2, y_2, z_2)$ არაპარალელური ვექტორები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ წრფივ განტოლებებს:

$$AX_1+BY_1+CZ_1=0,$$

$$AX_2+BY_2+CZ_2=0.$$

ასეთი ვექტორების შერჩევა ადვილად შეიძლება; ამისათვის საკმარისია X_1, Y_1 და X_2, Y_2 დავასახელოთ ნებისმიერად და განვსაზღვროთ შესაბამად Z_1, Z_2. სამი უკანასკნელი განტოლება წრფივი

და ერთგვაროვანია A, B, C კოეფიციენტების მიმართ, რომლებიც ერთდროულად ნულები არ არიან. მეორე მხრივ, ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას რომ ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნული. სამ უკანასკნელ განტოლებაში A, B, C-ს თუ ჩავთვლით უცნობებად და სისტემის დეტერმინანტს გავუტოლებთ ნულს, მაშინ მივიღებთ (4) განტოლებას. ეს უკანასკნელი კი, როგორც აღნიშნული იყო, წარმოადგენს სიბრტყის განტოლებას. ამრიგად, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი **დასკვნა.** ყოველი სიბრტყის განტოლება არის წრფივი და ყოველი წრფივი განტოლება წარმოადგენს სიბრტყის განტოლებას. (5) განტოლებას, რომელიც წრფივი განტოლების ზოგად სახეს წარმოადგენს, ეწოდება სიბრტყის ზოგადი განტოლება. x, y, z-ს ეწოდება მიმდინარე კოორდინატები.

§ 2. სიბრტყის აგება კოორდინატთა სისტემის მიმართ განტოლების მიხედვით

სიბრტყის სპეციალურ მდებარეობას კოორდინატთა სისტემის მიმართ თან ახლავს მისი განტოლების სპეციალური სახე. იმ შემთხვევაში, როცა სიბრტყე არ გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე, მაშინ მის მდებარეობას განსაზღვრავს სიბრტყის თანაკვეთის წერტილები კოორდინატთა ღერძებთან. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ (5) განტოლებაში $D=0$, ე. ი. განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$Ax+By+Cz=0, \tag{6}$$

მაშინ მას აკმაყოფილებს კოორდინატთა სისტემის სათავის 0, 0, 0 კოორდინატები და, პირუკუ, თუ (5) განტოლებას აკმაყოფილებს სათავის კოორდინატები, მაშინ $D=0$. ამრიგად კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი ყოველი სიბრტყე განისაზღვრება (6) სახის განტოლებით და, პირუკუ, ასეთი განტოლება აქვს მხოლოდ სისტემის სათავეზე გამავალ სიბრტყეს. ამრიგად, თუ $D\neq 0$, მაშინ სიბრტყე არ გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე.

დავუშვათ, რომ (5) განტოლებაში $D\neq O$. განვსაზღვროთ სიბრტყის თანაკვეთის წერტილები კოორდინატთა ღერძებთან. აღვნიშნოთ ეს წერტილები შესაბამად P, Q, R-ით. თუ OP, OQ, OR მო-

ნაკვეთების ალგებრულ მნიშვნელობებს ავღნიშნავთ a, b, c-თი, მაშინ გვექნება:

$$P=(a,\ 0,\ 0),$$

$$Q=(0,\ b,\ 0),$$

$$R=(0,\ 0,\ c).$$

რადგან ეს წერტილები მდებარეობენ სიბრტყეზე (როგორც სიბრტყის თანაკვეთის წერტილები ღერძებთან), ამიტომ მათი კოორდინატები დააკმაყოფილებენ (5) განტოლებას. გვექნება:

$$A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0,$$

$$A\cdot 0+B\cdot b+C\cdot 0+D=0,$$

$$A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot c+D=0.$$

აქედან

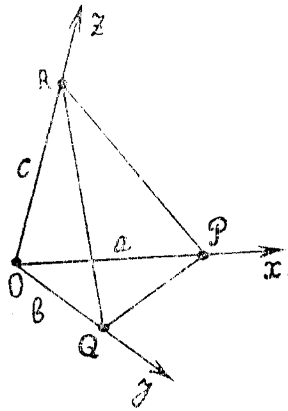
$$a=-\frac{D}{A},\qquad b=-\frac{D}{B},\qquad c=-\frac{D}{C}. \tag{7}$$

ასე განისაზღვრება სიბრტყის მიერ კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთების ალგებრული მნიშვნელობანი. მათ ლიტერატურაში ღერძებზე მონაკვეთებს უწოდებენ, ოღონდ არ ივიწყებენ, რომ a, b, c ალგებრული რიცხვებია. როცა ეს რიცხვები დადებითია, მაშინ შესაბამი მონაკვეთები გადაიზომება ღერძებზე სათავიდან ღერძის დადებით ნაწილში. თუ რიცხვები უარყოფითია, მაშინ შესაბამი მონაკვეთები გადაიზომება ღერძებზე უარყოფით ნაწილში. (7) ფორმულების მიხედვით განიხილება კოორდინატთა სათავეზე არ გამავალი ($D\neq O$) სიბრტყეების შემდეგი კერძო შემთხვევები:

1) $A\neq O$, $B\neq O$, $C\neq O$. ეს იმას ნიშნავს რომ სიბრტყის განტოლებაში შედის ყველა წევრი. ამ შემთხვევაში (7) ფორმულების თანახმად a, b, c განსაზღვრულია. ამრიგად P, Q, R წერტილები განისაზღვრება შესაბამად Ox, Oy, Oz ღერძებზე. ცხადია, რომ PQR სამკუთხედი მოთავსდება განსახილავ სიბრტყეზე. ამრიგად, ამ შემთხვევაში, სიბრტყის ასაგებად (5) ფორმულებით უნდა განვსაზღვროთ ღერძებზე მონაკვეთები; ამით განისაზღვრება სიბრტყის თანაკვეთის წერტილები ღერძებთან, ე. ი. P, Q, R (ესენია a, b, c-ს შესაბამი მონაკვეთების ბოლო წერტილები). ავაგებთ ამ წერტილებს: ზემოაღნიშნული წერტილებისაგან შევადგენთ PQR სამკუთხედს. ამით აგებული იქნება მოცემული განტოლების შესაბამი სიბრტყე სამკუთხედის სახით (ნახ. 62).

2) $C=0$. ამ შემთხვევაში სიბრტყის განტოლებაში არ შევა z კოორდინატი. (7) ფორმულების მიხედვით მონაკვეთი z ღერძზე იქნება უსასრულოდ დიდი. მართლაც, რადგან $D \neq O$, ამიტომ

$$c=-\frac{D}{C}=-\frac{D}{0}=\infty.$$

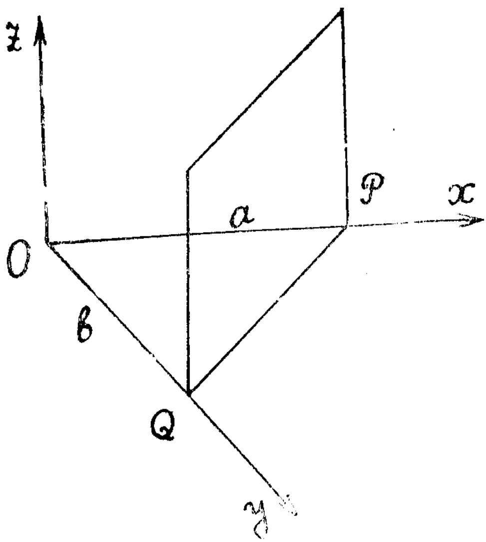


ნახ. 62.

ეს იმას ნიშნავს, რომ სიბრტყე გადაიკვეთება Oz ღერძთან უსასრულობაში, ე. ი. სიბრტყე პარალელური იქნება z ღერძისა.

ასევე განისაზღვრება დანარჩენი ღერძების პარალელური სიბრტყეები. ამგვარად ღერძების პარალელური სიბრტყეების განტოლებები შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

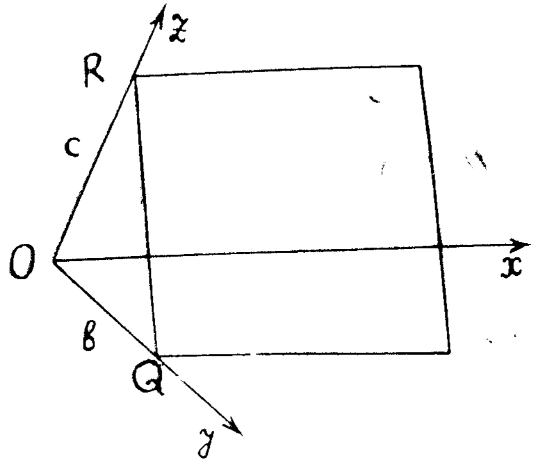
$Ax+By+D=0$	(Oz ღერძის პარალელური სიბრტყე).
$Ax+Cz+D=0$	(Oy „ „ „).
$Ay+Cz+D=0$	(Ox „ „ „).



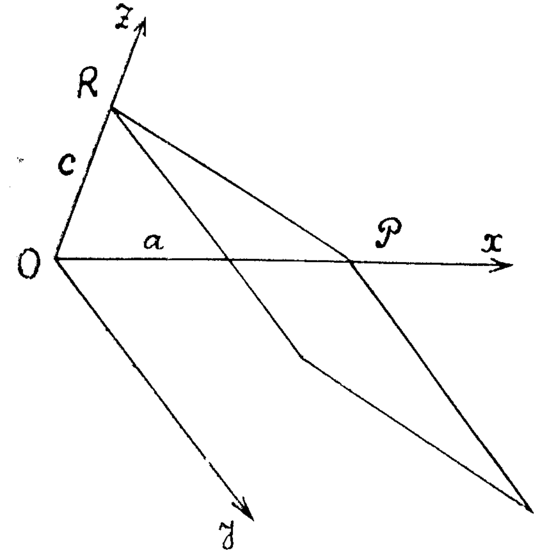
ნახ. 63.

აქედან ჩანს, რომ, როცა სიბრტყის განტოლებაში არ შედის რაიმე კოორდინატი, მაშინ სიბრტყე პარალელურია იმ ღერძისა, რომლის სახელობის კოორდინატიც არ შედის განტოლებაში. Oz ღერძის პარალელური სიბრტყისათვის განისაზღვრება a და b მონაკვეთები; ამით კი P და Q წერტილები. ცხადია, რომ PQ წრფე მოთავსდება მოცემულ სიბრტყეზე. ამრიგად, Oz ღერძის პარალე-

ლური სიბრტყის ასაგებად საჭიროა ავაგოთ P და Q წერტილები; ამით აიგება PQ წრფე. ამ წრფეზე უნდა გავატაროთ სიბრტყე



ნახ. 64.



ნახ. 65.

Oz ღერძის პარალელურად. ეს იქნება მოცემული განტოლების შესაბამი გრაფიკი. უმჯობესია ამ შემთხვევაში სიბრტყე წარმოდგეს

პარალელოგრამის სახით (ნახ. 63). ანალოგიურად აიგება Ox და და Oy ღერძების პარალელური სიბრტყეები (ნახ. 64 და 65).

3) $B=0$, $C=0$. ამ შემთხვევაში, (7) ფორმულის თანახმად, b, c მონაკვეთები უსასრულოდ დიდი იქნება. სიბრტყე გადაიკვეთება Oy და Oz ღერძებთან უსასრულობაში, ე. ი. სიბრტყე პარალელური იქნება ამ ღერძებისა. ამიტომ განსახილავი სიბრტყე პარალელური იქნება Oyz სიბრტყისა. ეს სიბრტყე Ox ღერძზე მოკვეთს a მონაკვეთს, რომელიც (7) ფორმულებიდან განისაზღვრება. ამ შემთხვევაში სიბრტყის განტოლებას ექნება სახე

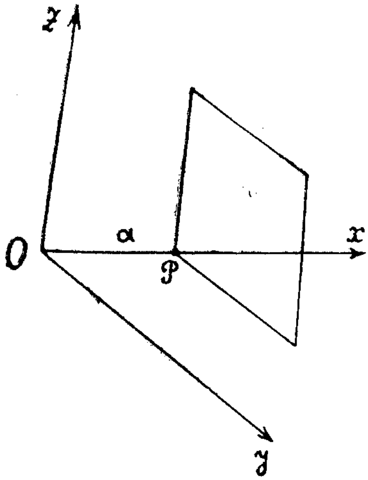
$$Ax+D=0.$$

საიდან

$$x=-\frac{D}{A},$$

ე. ი.

$$x=a.$$



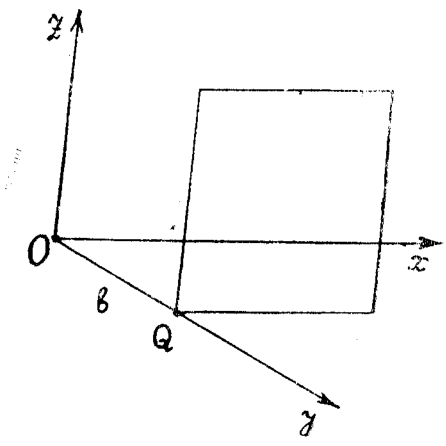
ნახ. 66.

ამ განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე რომ Oyz სიბრტყის პარალელურია უშუალოდაც შეგვიძლია შევამჩნიოთ. მართლაც, x კოორდინატი მუდმივი იქნება მხოლოდ Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყის წერტილებისათვის. ეს მუდმივი, ცხადია, ტოლი იქნება სიბრტყის მიერ Ox ღერძზე მოჭრილი მონაკვეთისა, ე. ი. a-სი. ანალოგიურად განისაზღვრება დანარჩენი კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები. გვექნება:

$x=a$ (Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე),
$y=b$ (Oxz „ „ „),
$z=c$ (Oxy „ „ „).

იმისათვის, რომ ავაგოთ $x=a$ განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე, საჭიროა ავაგოთ P წერტილი Ox ღერძზე (a მონაკვეთის ბოლო წერტილი) და ამ წერტილიდან გავატაროთ Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. ამ შემთხვევაში უმჯობესია სიბრტყე წარმოვადგინოთ პარალელოგრამის სახით (ნახ. 66). ანალოგიურად აიგება Oxz და Oxy სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები (ნახ. 67 და ნახ. 68).

ახლა განვიხილოთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება ($D=0$). აქაც განვიხილავთ ზემოთ აღნიშნული კერძო შემთხვევების ანალოგიურ შემთხვევებს:



ნახ. 67.

1) $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$. ამ შემთხვევაში (7) ფორმულები იძლევა $a=b=c=0$, ე. ი. სიბრტყე თანაიკვეთება ღერძებთან კოორდინატთა სისტემის სათავეში. სხვა წერტილები ღერძებთან სიბრტყეს არ ექნება. სიბრტყის ასაგებად საჭიროა განვსაზღვროთ ამ სიბრტყის ორი ისეთი M_1 და M_2 წერტილი, რომელნიც O წერტილთან ერთად განსაზღვრავენ სამკუთხედს (არ არიან კოლინეარული) უმჯობესია M_1 და M_2 წერტილები განვსაზღვროთ ასე: (6) განტოლებაში x, y-ს მივცეთ მიმდევრობით 1, 0 და 0, 1 მნიშვნელობები. z_1, z_2-ის შესაბამი მნიშვნელობები განვსაზღვროთ ამ განტოლებიდან. გვექნება:

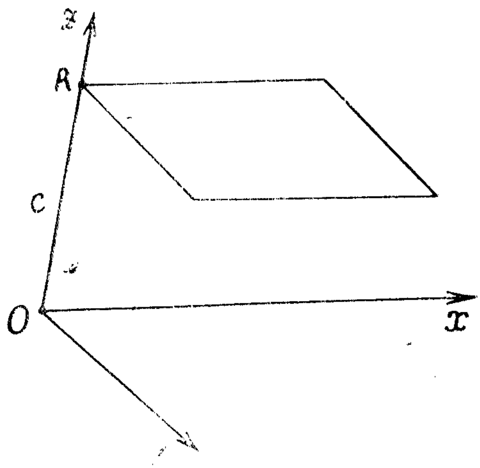
$$A\cdot 1+B\cdot 0+Cz_1=0,$$

$$A\cdot 0+B\cdot 1+Cz_2=0.$$

აქედან

$$z_1=-\frac{A}{C},$$

$$z_2=-\frac{B}{C}.$$



ნახ. 68.

ამრიგად მივიღებთ განსახილავი სიბრტყის შემდეგ წერტილებს

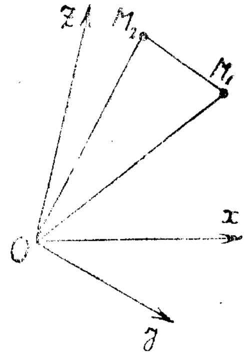
$$M_1=\left(1,\ 0,\ -\frac{A}{C}\right),\quad M_2=\left(0,\ 1,\ -\frac{B}{C}\right).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ O, M_1, M_2 წერტილები არ არიან კოლინეარული. მაშასადამე, ამ წერტილებით განისაზღვრება OM_1M_2 სამკუთხედი. ცხადია, რომ ეს სამკუთხედი მოთავსებული იქნება განსახილავ სიბრტყეზე. ამრიგად სიბრტყის ასაგებად, საკმაროა აგებული იქნეს M_1, M_2 წერტილები. ამით აიგება OM_1M_2 სამკუთხედი. ეს უკანასკნელი კი განახორციელებს თვით სიბრტყის აგებას სამკუთხედის სახით (ნახ. 69).

2) $C=0$. ამ შემთხვევაში (6) განტოლება მიიღებს სახეს

$$Ax+By=0.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს $M(0, 0, z)$ წერტილის კოორდინატები, ე. ი. Oz ღერძის წერტილის კოორდინატები, როგორიც არ უნდა იყოს z. მაშასადამე, Oz ღერძი მდებარეობს სიბრტყეზე, ანუ სიბრტყე გადის Oz ღერძზე. ეს ფაქტი (7) ფორმულებიდანაც შეიძლებოდა მიგვეღო. მართლაც, ამ შემთხვევაში Oz ღერძზე მონაკვეთი განუსაზღვრელია $\left(c=-\frac{D}{C}=\frac{0}{0}\right)$,



ნახ. 69.

ე. ი. სიბრტყე თანაიკვეთება Oz ღერძთან უამრავ წერტილებში; მაშასადამე, სიბრტყე გადის Oz ღერძზე. ანალოგიურად მიიღება დანარჩენ ღერძებზე გამავალი სიბრტყეების განტოლებები. გვექნება:

$$Ax+By=0 \quad (Oz \text{ ღერძზე გამავალი სიბრტყე}),$$
$$Ax+Cz=0 \quad (Oy \quad " \quad " \quad " \quad),$$
$$Ay+Cz=0 \quad (Ox \quad " \quad " \quad " \quad).$$

იმისათვის, რომ ავაგოთ z ღერძზე გამავალი სიბრტყე, საკმარისია განვსაზღვროთ სიბრტყის ერთი ისეთი M_0 წერტილი, რომელიც Oz ღერძის გარეშე მდებარეობს. ჩავსვათ Oz ღერძზე გამავალი სიბრტყის განტოლებაში $x=1$, $z=0$. შესაბამი y_0 მოიძებნება ამ განტოლებიდან. გვექნება:

$$A\cdot 1+By_0=0.$$

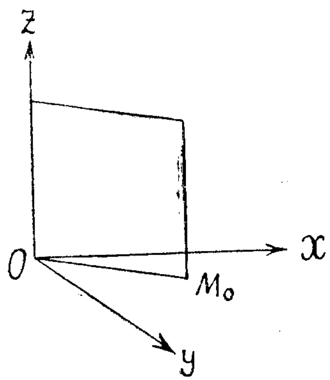
აქედან

$$y_0=-\frac{A}{B}.$$

ამრიგად მივიღებთ სიბრტყის M_0 წერტილს

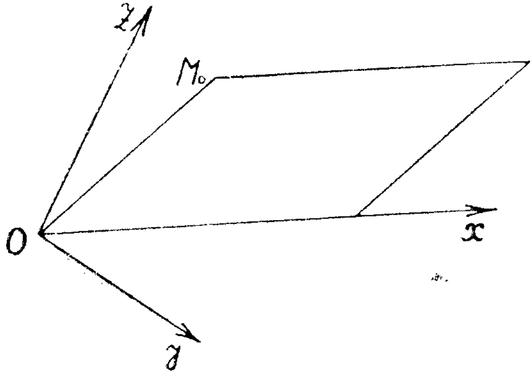
$$M_0=\left(1,\ -\frac{A}{B},\ 0\right).$$

ცხადია, რომ ეს წერტილი Oz ღერძზე არ მდებარეობს. ავაგებთ ამ წერტილს. ამით განისაზღვრება OM_0 წრფე, რომელიც მოცემულ სიბრტყეზე მოთავსდება. ამრიგად, სიბრტყე გაივლის Oz ღერძზე და OM_0 წრფეზე ერთდროულად. ავაგებთ ამ ორ წრფეზე გამავალ სიბრტყეს. ამით აგებული იქნება მოცემული განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე. ამ შემთხვევაში უმჯობესია სიბრტყე პარალელოგრამის სახით წარმოვადგინოთ (ნახ. 70). ანალოგიურად აიგება Ox და Oy ღერძებზე გამავალი სიბრტყეები (ნახ. 71 და ნახ. 72).



ნახ. 70.

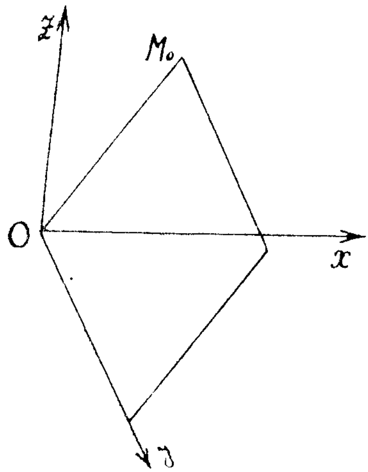
3) $B=0$, $C=0$. ამ შემთხვევაში (6) განტოლება მიიღებს სახეს: $x=0$. როგორც ცნობილია, ასეთი თვისება ახასიათებს მხოლოდ Oyz სიბრტყის წერტილებს. მათი გეგმილები Ox ღერძზე ნულია. ამრიგად $x=0$ არის Oyz



ნახ. 71.

სიბრტყის განტოლება. ასევე განისაზღვრება დანარჩენი კოორდინატთა სიბრტყეების განტოლებები და გვექნება:

$$x=0 \quad (Oyz \text{ სიბრტყის განტოლება}),$$
$$y=0 \quad (Oxz \quad " \quad " \quad),$$
$$z=0 \quad (Oxy \quad " \quad " \quad).$$



ნახ. 72.

§ 3. სიბრტყის განტოლებები სხვადასხვა მონაცემებით

1. სიბრტყის განტოლება კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთებში. ჯერ შევნიშნოთ, რომ სიბრტყის ზოგადი განტოლების ნულისაგან განსხვავებულ რაიმე λ მამრავლზე გამრავლების შედეგად მიღებული განტოლება იმავე სიბრტყეს განსაზღვრავს. მართლაც, (5) განტოლების გამრავლება λ-ზე მოგვცემს

$$\lambda(Ax+By+Cz+D=0)=0.$$

ამ განტოლებას კი აკმაყოფილებს მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (5) განტოლებას, ე. ი. ეს განტოლება ეკვივალენტურია (5) განტოლებისა. ამით ზემოთ გამოთქმული აზრი დამტკიცებულია.

გავყოთ (5) განტოლება D-ზე (იგულისხმება $D\neq 0$). გვექნება

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0.$$

(7) ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ:

$$-\frac{A}{D}=\frac{1}{a}, \quad -\frac{B}{D}=\frac{1}{b}, \quad -\frac{C}{D}=\frac{1}{c}.$$

ამრიგად, სიბრტყის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{8}$$

სადაც a, b, c კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთებია. როგორც ჩანს, ეს განტოლება მთლიანად განსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებზე მონაკვეთებით. ამიტომ მას ეწოდება სიბრტყის განტოლება ღერძებზე მონაკვეთებში.

2. მოცემულ წერტილზე და მასზე მოდებულ ორ ვექტორზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. თუ მოცემულია M_0 წერტილი და მასზე მოდებული $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები თავიანთი კოორდინატებით

$$M_0=(x_0, \ y_0, \ z_0),$$

$$P_1=(X_1, \ Y_1, \ Z_1),$$

$$P_2=(X_2, \ Y_2, \ Z_2),$$

მაშინ ადვილად შევამჩნევთ, რომ ეს მონაცემები იგივეა, რაც (1) აღნიშვნებით განსაზღვრული მონაცემები, რომელნიც ჩვენ შევარჩიეთ მოცემულ სიბრტყეზე. ასეთი პირობით კი, როგორც ვიცით, განისაზღვრება სიბრტყის (2) განტოლება. ამრიგად (2) განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მოცემულ წერტილზე და მასზე მოდებულ ორ ვექტორზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

3. მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება, სიბრტყეთა ძნული. როგორც ცნობილია, მოცემულ $M_0(x_0, \ y_0 \ z_0)$ წერტილზე გაივლის უამრავი სიბრტყე. მოითხოვება ერთი მათგანის განტოლების შედგენა. ვიცით, რომ ნებისმიერი სიბრტყე წარმოდგება წრფივი განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

იმისათვის, რომ ეს განტოლება M_0 წერტილზე გამავალ სიბრტყეს განსაზღვრავდეს, საჭიროა A, B, C, D კოეფიციენტები ისე შევარჩიოთ, რომ ეს განტოლება დაკმაყოფილდეს M_0 წერტილის კოორდინატებით. გვექნება

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

აქედან განისაზღვრება D კოეფიციენტი A, B, C კოეფიციენტების საშუალებით. შევიტანოთ D მნიშვნელობას სიბრტყის განტოლებაში და მივიღებთ სასურველ განტოლებას

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{9}$$

სადაც A, B, C ნებისმიერი მუდმივებია. (9) განტოლებიდან უშუალოდაც ჩანს, რომ ამ განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე გადის M_0 წერტილზე. მართლაც, ამ განტოლებაში მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად რომ ჩავსვათ M_0 წერტილის კოორდინატები (ე. ი. x, y, z-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ x_0, y_0, z_0), განტოლება დაკმაყოფილდება A, B, C კოეფიციენტების ნებისმიერი მნიშვნელობათათვის. (9) განტოლებას ეწოდება მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. A, B, C კოეფიციენტების ცვლით მივიღებთ M_0 წერტილზე გამავალ ყოველ სიბრტყეს. სივრცეში ერთ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა სიმრავლეს ეწოდება სიბრტყეთა კონული. იმ წერტილს, რომელზედაც სიბრტყეები გადის ეწოდება კონულის ცენტრი. ამრიგად (9) განტოლება A, B, C-ს ცვლით განსაზღვრავს სიბრტყეთა კონულის ყოველ სიბრტყეს. ამიტომ ამ განტოლებას უწოდებენ სიბრტყეთა კონულის განტოლებას.

4. სამ მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. მოცემულია სამი წერტილი:

$$M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$M_2=(x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$M_3=(x_3,\ y_3,\ z_3).$$

საძიებელია ამ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. განვსაზღვროთ შემდეგი ვექტორები:

$$\overline{P}_1=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\overline{P}_2=\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1).$$

ცხადია, რომ მოცემულ წერტილებზე გამავალი სიბრტყე გაივლის M_1-ზე და $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებზედაც. ამ მონაცემებით კი სიბრტყის განტოლება მოგვეცემა (2) სახით, სადაც M_0 წერტილის კოორდინატების ნაცვლად უნდა ავიღოთ M_1 წერტილის კოორდინატები.

$\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების კოორდინატები კი აიღება იმ სახით, როგორც იგი მოცემულია ამჟამად (სხვაობების სახით). გვექნება

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს განტოლება შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

პირველი სტრიქონი რომ გამოვაკლოთ დანარჩენ სტრიქონებს და დავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ (10) განტოლებას. თუ დავუკვირდებით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ (11) განტოლება წარმოადგენს კომპლანარულობის პირობას M, M_1, M_2, M_3 წერტილებისათვის, ე. ი. ამ განტოლებით განისაზღვრება მოცემული M_1, M_2, M_3 წერტილებისადმი ყველა კომპლანარული წერტილი. ასეთია მეორე გზა (11) განტოლების შესადგენად. ჩვენ გავეცნობით კიდევ (11) განტოლების შედგენის მესამე ხერხს. საძიებელი სიბრტყის განტოლება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

რადგან ეს სიბრტყე გადის მოცემულ წერტილებზე, ამიტომ ეს განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს მოცემულ წერტილთა კოორდინატებით. გვექნება:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,$$
$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0.$$

როგორც ჩანს, უკანასკნელი ოთხი განტოლება ქმნის ერთგვაროვან სისტემას A, B, C, D კოეფიციენტების მიმართ. იმისათვის, რომ ამ სისტემას ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი A, B, C, D კოეფიციენტებისათვის (როგორც სისტემის უცნობებისათვის), აუცილებელი და საკმარისია ამ ერთგვაროვანი სისტემის დეტერმი-

ნანტი იყოს ნული. თუ შევადგენთ სისტემის დეტერმინანტს და გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ (11) განტოლებას.

§ 4. ორი სიბრტყის ურთიერთდამოკიდებულება

1. ორი სიბრტყის პარალელურობის პირობა. განვიხილოთ შემდეგი განტოლებებით განსაზღვრული ორი სიბრტყე:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \mathrm{I}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad \mathrm{II}$$

როცა სიბრტყეები პარალელურია და ერთიმეორისაგან განსხვავებული, მაშინ მათ განტოლებათა სისტემას არ უნდა ჰქონდეს არც ერთი სასრული ამონახსნი x, y, z სამეულის სახით; ამისათვის აუცილებელია, რომ

$$\begin{pmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი იყოს 2-ზე ნაკლები. რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ მატრიცის ყველა მეორე რიგის მინორი იყოს ნული:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} A_1, & C_1 \\ A_2, & C_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} B_1, & C_1 \\ B_2, & C_2 \end{vmatrix}=0.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. ამ სამი დეტერმინანტიდან რომელიმე რომ განსხვავდებოდეს ნულისაგან, მაგალითად, პირველი დეტერმინანტი, მაშინ x, y ამოიხსნებოდა z-ის მიმართ და z-ისათვის შეგვეძლო მიგვენიჭებია ნებისმიერი მნიშვნელობა და მივიღებდით სასრულ სამეულს. უკანასკნელი ტოლობები დეტერმინანტების დაშლის შედეგად მოგვცემს:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}, \qquad \frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

აქედან

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{12}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს პირობა საკმარისიც არის ორი სიბრტყის პარალელურობისათვის. დავუშვათ, რომ (12) პირობა შესრულებულია. აღვნიშნოთ

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\lambda. \tag{13}$$

აქედან

$$A_1=\lambda A_2, \quad B_1=\lambda B_2, \quad C_1=\lambda C_2.$$

შევიტანოთ A_1, B_1, C_1-ის ეს მნიშვნელობები I განტოლებაში და გავყოთ λ-ზე. მივიღებთ

$$A_2x+B_2y+C_2z+\frac{D_1}{\lambda}=0.$$

აშკარაა, რომ ამ განტოლებას II განტოლებასთან არ ექნება საერთო სასრული ამონახსნი, თუ $\frac{D_1}{\lambda}\neq D_2$, ხოლო თუ $\frac{D_1}{\lambda}=D_2$, ე. ი. თუ $D_1=\lambda D_2$, მაშინ უკანასკნელი განტოლება თვითონ წარმოადგენს მეორე განტოლებას. ამ შემთხვევაში ორივე განტოლება ერთი და იგივე სიბრტყეს გამოსახავს. ცხადია, მათთვის პარალელურობაც ძალაში დარჩება.

ამრიგად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: იმისათვის, რომ ორი სიბრტყე იყოს პარალელური, აუცილებელი და საკმარისია მათი განტოლებათა კოეფიციენტების პირველი სამეულები შესაბამად იყოს პროპორციული.

2. პირობა იმისა, რომ I და II განტოლებები განსაზღვრავდნენ ერთი და იგივე სიბრტყეს. თუ I და II განტოლებები ერთი და იგივე სიბრტყეს განსაზღვრავენ, მაშინ უნდა შესრულდეს (12) პირობა, რადგან სიბრტყე თავისი თავის პარალელურია. გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, $D_1=$ $=\lambda D_2$. აქედან $\lambda=\frac{D_1}{D_2}$. რადგან მეორე მხრივ

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\lambda,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \tag{14}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ I და II განტოლებებისათვის (14) პირობა შესრულებულია, მაშინ ერთი განტოლებიდან მიიღება მეორე განტოლება λ-ზე გადამრავლებით. ამრიგად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: იმისათვის, რომ ორი წრფივი განტოლება გამოსახავდეს ერთი და იგივე სიბრტყეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი კოეფიციენტები შესაბამად იყოს პროპორციული. ლი-

ტერატურაში (14) პირობას ხშირად ორი სიბრტყის შეთავსების პირობასაც უწოდებენ.

§ 5. ამოცანები სიბრტყეების შესახებ

1. მოცემულ წერტილზე გამავალი მოცემული სიბრტყისადმი პარალელური სიბრტყის განტოლება. მოცემულია M_0 წერტილი და სიბრტყე შემდეგი განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

საძიებელია იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_0 წერტილზე მოცემული სიბრტყის პარალელურად. ჯერ შევადგინოთ M_0 წერტილზე გამავალი სიბრტყეთა კონის განტოლება. (9) განტოლების მიხედვით გვექნება

$$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0.$$

ამ განტოლებით განისაზღვრება M_0 წერტილზე გამავალი სიბრტყეთა კონა. აქ A_1, B_1, C_1 ნებისმიერი მუდმივებია. ეს მუდმივები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ამ მნიშვნელობათა შესაბამი კონის სიბრტყე პარალელური იყოს მოცემული სიბრტყისა. ცხადია, რომ კოეფიციენტების ასეთი შერჩევა ორი სიბრტყის პარალელურობის (10) პირობის მიხედვით მოხდება. ამ შემთხვევაში ეს პირობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{A_1}{A}=\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C}=\lambda.$$

აქედან

$$A_1=\lambda A,\quad B_1=\lambda B,\quad C_1=\lambda C.$$

A_1, B_1, C_1 კოეფიციენტების ეს მნიშვნელობანი შევიტანოთ უკანასკნელ განტოლებაში და λ-ზე შევკვეცოთ. მივიღებთ საძიებელ პარალელური სიბრტყის განტოლებას

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{15}$$

შევნიშნავთ, რომ ამ განტოლების A, B, C კოეფიციენტები წარმოადგენს მოცემული განტოლების კოეფიციენტების პირველ სამეულს.

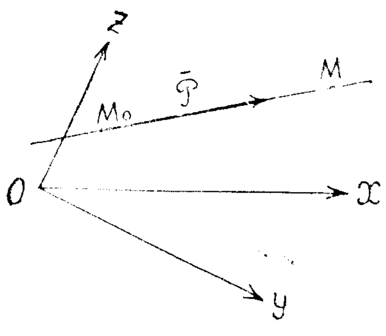
2. სამი სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატების განსაზღვრა. მოცემულია სამი სიბრტყე შემდეგი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

საძიებელია ამ სამი სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები. ცხადია, რომ სამი სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს ამ სიბრტყეთა განტოლებებს ერთდროულად (რადგან თანაკვეთის წერტილი ერთდროულად სამივე სიბრტყეზეა მოთავსებული). ამრიგად სამი სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები წარმოადგენს მოცემულ განტოლებათაგან შედგენილი სისტემის ამონახსნებს.

§ 6. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებანი სივრცეში

1. წრფის განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში. განვიხილოთ სივრცეში ნებისმიერი წრფე. ავიღოთ ამ წრფეზე ერთი გარკვეული M_0 წერტილი. გარდა ამისა, ავაგოთ წრფეზე რაიმე $\overline{P}$ ვექტორი. შეგვიძლია ეს ვექტორი პარალელური გადატანით მოვდოთ M_0 წერტილს (ნახ. 73). ცხადია, რომ M წერტილს და $\overline{P}$ ვექტორს ექნებათ თავიანთი კოორდინატები მოცემულ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. გვექნება:



ნახ. 73.

$$M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$\overline{P}=(L,\ M,\ N).$$

ავიღოთ წრფის ნებისმიერი M წერტილი. ამ წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ $x,\ y,\ z$-ით, ე. ი.

$$M=(x,\ y,\ z).$$

შევადგინოთ $\overline{M_0M}$ ვექტორი. გვექნება

$$\overline{M_0M}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0).$$

ცხადია, რომ $\overline{M_0M}$ პარალელური იქნება $\overline{P}$ ვექტორისა, ე. ი. $\overline{M_0M} \parallel \overline{P}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთ დამოკიდებულებას ადგილი ექნება წრფის ყველა წერტილისათვის და მხოლოდ მათთვის. ამრიგად $\overline{M_0M}$-სა და $\overline{P}$-ს პარალელურობა დამახასიათებელია მოცემული წრფისათვის. ამ ვექტორების პარალელურობა კი (რო-

გორც ცნობილია) მათი კოორდინატების პროპორციულობით ხასიათდება. ამიტომ გვექნება

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}. \tag{16}$$

ასეთ ორ განტოლებას აკმაყოფილებს წრფის ნებისმიერი წერტილის (ე. ი. მიმდინარე წერტილის) x, y, z კოორდინატები. ამიტომ ამ ორი განტოლების სისტემას ეწოდება წრფის განტოლება. ამ განტოლებაში, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, x_0, y_0, z_0 არის წრფის ერთი გარკვეული წერტილის კოორდინატები, L, M, N მუდმივები კი—წრფის პარალელური ვექტორის კოორდინატები. ამრიგად L, M, N კოეფიციენტები განსაზღვრავს წრფის მიმართულებას. მათ ეწოდებათ წრფის **მიმართულების კოეფიციენტები.** თვით $\overline{P}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრავს წრფის მიმართულებას, ეწოდება წრფის **მიმმართველი ვექტორი.** წრფის (16) განტოლებას ეწოდება **წრფის განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში.** ამ განტოლებაში x, y, z წარმოადგენს მიმდინარე კოორდინატებს.

2. წრფის განტოლება კანონიკური სახით. ადვილი შესამჩნევია, რომ წრფის (16) განტოლება წარმოდგება ორი წრფივი განტოლების სისტემისაგან, სახელდობრ,

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{z-z_0}{N},$$

$$\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x&=az+p,\\ y&=bz+q, \end{aligned} \tag{17}$$

სადაც

$$a=\frac{L}{N},\quad b=\frac{M}{N},\quad p=x_0-\frac{L}{N}z_0,\quad q=y_0-\frac{M}{N}z_0.$$

(17) განტოლებათა სისტემას ეწოდება **წრფის კანონიკური განტოლება.** ამ განტოლებიდან (16) სახის განტოლებაზე გადასასვლელად საკმარისია ამოვხსნათ z (17) სისტემის ორივე განტოლებიდან ცალ-ცალკე და მიღებული მნიშვნელობანი გავუტოლოთ ერთიმეორეს. გვექნება

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z}{1}. \tag{18}$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ამ განტოლებას აქვს (16) განტოლების სახე. ამ შემთხვევაში წრფის M_0 წერტილი და მიმმართველი $\overline{P}$ ვექტორი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} M_0&=(p,\ q,\ 0),\\ \overline{P}&=(a,\ b,\ 1). \end{aligned} \tag{19}$$

3. წრფის განტოლება ზოგადი სახით. როგორც ცნობილია ორი სიბრტყის თანაკვეთის წირი არის წრფე. ამიტომ, თუ მოცემულია ორი სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახით

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \mathrm{I}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad \mathrm{II}$$

მაშინ ამ სიბრტყეთა თანაკვეთის წრფის წერტილების კოორდინატები დააკმაყოფილებს მოცემულ წრფივი განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0. \end{aligned} \tag{20}$$

ამ სისტემას ეწოდება წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ზ ო გ ა დ ი ს ა ხ ი თ ს ი ვ რ ც ე შ ი. ზოგადი განტოლებიდან კანონიკურ განტოლებაზე გადასვლა ხდება (20) სისტემის ამოხსნით მიმდინარე კოორდინატების რომელიმე წყვილის მიმართ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს სისტემა ამოიხსნება რომელიმე წყვილის მიმართ, თუ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის მეორე რიგის მინორები

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & C_1\\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

ერთდროულად ნულები არ არის. თუ ეს დეტერმინანტები ერთდროულად ნულებია, მაშინ სიბრტყეები პარალელური იქნება და თანაკვეთის წრფეს ვერ განსაზღვრავს. დავუშვათ, რომ პირველი მინორი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ამოიხსნება x, y კოორდინატები. ცხადია, რომ ამოხსნის შედეგად მივიღებთ z-ის მიმართ წრფივ გამოსახულებებს, ე. ი. წრფის კანონიკურ განტოლებას:

$$\begin{aligned} x&=az+p,\\ y&=bz+q, \end{aligned}$$

სადაც a, b, p, q ამოხსნის შედეგად მიღებული მუდმივებია. ამ განტოლებიდან კი (როგორც ვიცით) ადვილად მიიღება (18) გან-

ტოლება. ამრიგად, ყოველი წრფის განტოლება სივრცეში წარმო-
დგება ორი წრფივი განტოლების სისტემის სახით და, პირუკუ,
წრფივი განტოლების ყოველი წყვილი გამოსახავს წრფეს სივრ-
ცეში.

§ 7. ორი წრფის ურთიერთდამოკიდებულება

1. ორი წრფის პარალელურობის პირობა. განვიხილოთ ორი
წრფის განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში:

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1},$$

$$\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_1}{N_2}.$$

მიმართულების კოეფიციენტები განსაზღვრავს მიმმართველ ვექტო-
რებს. გვექნება:

$$\overline{P}_1=(L_1,\ M_1,\ N_1),$$
$$\overline{P}_2=(L_2,\ M_2,\ N_2). \qquad (21)$$

ცხადია, რომ ამ წრფეთა პარალელურობისათვის დამახასიათებელი
იქნება მათი მიმმართველი ვექტორების პარალელურობა, ე. ი.
$\overline{P}_1 \parallel \overline{P}_2$. ეს პირობა (21) ფორმულების თანახმად ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2}. \qquad (22)$$

ამრიგად, ორი წრფის პარალელურობისათვის აუცი-
ლებელი და საკმარისია, რომ მათი განტოლებათა
მიმართულების კოეფიციენტები შესაბამად იყოს
პროპორციული.

2. ორი წრფის შეთავსების პირობა. იმისათვის, რომ წრფის
განტოლებათა ორი სისტემა განსაზღვრავდეს ერთი და იგივე
წრფეს, საჭიროა ეს ორი სისტემა კმაყოფილდებოდეს ერთი და
იგივე კოორდინატებით. წარმოვიდგინოთ, რომ ეს ორი სისტემა
კანონიკურ სახეზე არის დაყვანილი

$$x=a_1z+p_1,$$
$$y=b_1z+q_1,$$
$$x=a_2z+p_2,$$
$$y=b_2z+q_2.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ამ განტოლებას აქვს (16) განტოლების სახე. ამ შემთხვევაში წრფის M_0 წერტილი და მიმმართველი $\overline{P}$ ვექტორი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$M_0=(p,\ q,\ 0),$$
$$\overline{P}=(a,\ b,\ 1). \tag{19}$$

3. წრფის განტოლება ზოგადი სახით. როგორც ცნობილია ორი სიბრტყის თანაკვეთის წირი არის წრფე. ამიტომ, თუ მოცემულია ორი სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახით

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \mathrm{I}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad \mathrm{II}$$

მაშინ ამ სიბრტყეთა თანაკვეთის წრფის წერტილების კოორდინატები დააკმაყოფილებს მოცემულ წრფივი განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას:

$$\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{aligned} \tag{20}$$

ამ სისტემას ეწოდება წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ზ ო გ ა დ ი ს ა ხ ი თ ს ი ვ რ ც ე შ ი. ზოგადი განტოლებიდან კანონიკურ განტოლებაზე გადასვლა ხდება (20) სისტემის ამოხსნით მიმდინარე კოორდინატების რომელიმე წყვილის მიმართ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს სისტემა ამოიხსნება რომელიმე წყვილის მიმართ, თუ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცის მეორე რიგის მინორები

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

ერთდროულად ნულები არ არის. თუ ეს დეტერმინანტები ერთდროულად ნულებია, მაშინ სიბრტყეები პარალელური იქნება და თანაკვეთის წრფეს ვერ განსაზღვრავს. დავუშვათ, რომ პირველი მინორი განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ამოიხსნება x, y კოორდინატები. ცხადია, რომ ამოხსნის შედეგად მივიღებთ z-ის მიმართ წრფივ გამოსახულებებს, ე. ი. წრფის კანონიკურ განტოლებას:

$$x=az+p,$$
$$y=bz+q,$$

სადაც a, b, p, q ამოხსნის შედეგად მიღებული მუდმივებია. ამ განტოლებიდან კი (როგორც ვიცით) ადვილად მიიღება (18) გან-

ტოლება. ამრიგად, ყოველი წრფის განტოლება სივრცეში წარმოდგება ორი წრფივი განტოლების სისტემის სახით და, პირუკუ, წრფივი განტოლების ყოველი წყვილი გამოსახავს წრფეს სივრცეში.

§ 7. ორი წრფის ურთიერთდამოკიდებულება

1. ორი წრფის პარალელურობის პირობა. განვიხილოთ ორი წრფის განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში:

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}, \qquad \text{I}$$

$$\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_1}{N_2}. \qquad \text{II}$$

მიმართულების კოეფიციენტები განსაზღვრავს მიმმართველ ვექტორებს. გვექნება:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1&=(L_1,\ M_1,\ N_1),\\ \overline{P}_2&=(L_2,\ M_2,\ N_2). \end{aligned} \tag{21}$$

ცხადია, რომ ამ წრფეთა პარალელურობისათვის დამახასიათებელი იქნება მათი მიმმართველი ვექტორების პარალელურობა, ე. ი. $\overline{P}_1 \parallel \overline{P}_2$. ეს პირობა (21) ფორმულების თანახმად ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2}. \tag{22}$$

ამრიგად, *ორი წრფის პარალელურობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი განტოლებათა მიმართულების კოეფიციენტები შესაბამად იყოს პროპორციული.*

2. ორი წრფის შეთავსების პირობა. იმისათვის, რომ წრფივ განტოლებათა ორი სისტემა განსაზღვრავდეს ერთი და იგივე წრფეს, საჭიროა ეს ორი სისტემა კმაყოფილდებოდეს ერთი და იგივე კოორდინატებით. წარმოვიდგინოთ, რომ ეს ორი სისტემა კანონიკურ სახეზე არის დაყვანილი

$$\begin{aligned} x&=a_1z+p_1,\\ y&=b_1z+q_1, \end{aligned} \qquad \text{I}$$

$$\begin{aligned} x&=a_2z+p_2,\\ y&=b_2z+q_2. \end{aligned} \qquad \text{II}$$

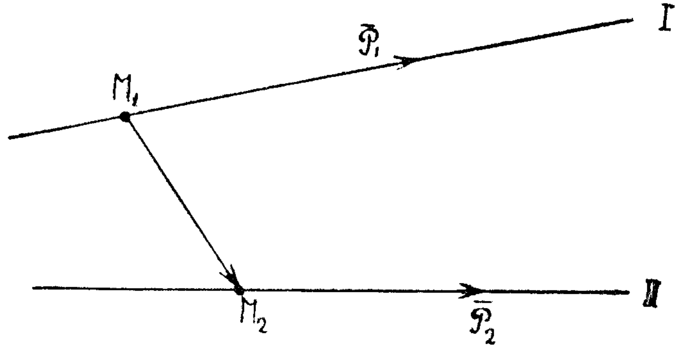
ეს ორი სისტემა რომ ერთი და იგივე წრფეს გამოსახავდეს, საჭიროა პირველი სისტემიდან განსაზღვრული x, y იგივურად ტოლი იყოს მეორე სისტემიდან განსაზღვრული x, y-სა. გვექნება:

$$a_1z+p_1=a_2z+p_2,$$
$$b_1z+q_1=b_2z+q_2.$$

აქედან

$$a_1=a_2, \qquad p_1=p_2,$$
$$b_1=b_2, \qquad q_1=q_2.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ წრფივ განტოლებათა ორი სისტემა ერთი და იგივე წრფეს გამოსახავდეს აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს ორი სისტემა ერთი და იგივე კანონიკურ სახეს გვაძლევდეს. ამ პირობას ლიტერატურაში ორი წრფის შეთავსების პირობას უწოდებენ. მაშასადამე, **ორი წრფის შეთავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი კანონიკური განტოლებანი ერთი და იგივე იყოს.** აქედან ისიც ჩანს, რომ სივრცეში კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები



ნახ. 74.

სავსებით განისაზღვრება მოცემული წრფით და, პირუკუ. ამრიგად კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების რიცხვი მინიმალურია ისეთ პარამეტრთა შორის, რომლებითაც განისაზღვრება წრფის მდებარეობა სივრცეში. თუ გავიხსენებთ, I თავში წრფის კანონიკური განტოლების კოეფიციენტებს ჰქონდა ანალოგიური თვისება, ოღონდ იქ კანონიკურ განტოლებაში შედიოდა ორი კოეფიციენტი.

V 3. ორი წრფის თანაკვეთის პირობა სივრცეში. როგორც ცნობილია, სივრცეში ორი წრფე საზოგადოდ არ თანაიკვეთება, ე. ი.

აცდენილი წრფეებია. იმისათვის, რომ ორი წრფე თანაიკვეთებოდეს, საჭიროა მათი განტოლებათა კოეფიციენტები რაიმე პირობას აკმაყოფილებდნენ. დავუშვათ, რომ წრფეების განტოლებანი მოცემულია მიმართულების კოეფიციენტებში. $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ იყოს მიმმართველი ვექტორები, M_1 და M_2 კი წრფეებზე აღებული წერტილები შესაბამად (ნახ. 74). გვექნება:

$$M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$M_2=(x_2,\ y_2,\ z_2).$$

აქედან

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

$\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორები კი მოცემული იქნება (21) ფორმულებით. ცხადია, რომ, თუ მოცემული ორი წრფე თანაიკვეთება, მაშინ $\overline{M_1M_2}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები კომპლარული იქნება და, პირუკუ, თუ ეს ვექტორები კომპლანარულია, მაშინ წრფეებიც კომპლანარული იქნება, ე. ი. თანაიკვეთება. ამრიგად, იმისათვის, რომ ორი წრფე თანაიკვეთებოდეს აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\overline{M_1M_2}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები იყოს კომპლანარული. როგორც ვექტორთა ალგებრიდან არის ცნობილი, სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი იყოს ნული. ამ შემთხვევისათვის გვექნება

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (23)$$

ასეთია ორი წრფის თანაკვეთის პირობა იმ შემთხვევაში, როცა წრფეების განტოლებანი მოცემულია მიმართულების კოეფიციენტებში. თუ წრფეების განტოლებანი მოცემულია ზოგადი სახით, მაშინ ჯერ უნდა გადავიდეთ მიმართულების კოეფიციენტებიდან განტოლებაზე და მერე გამოვიყენოთ (23) პირობა. მაგრამ შესაძლებელია თანაკვეთის პირობა უშუალოდაც იქნას განსაზღვრული წრფეთა ზოგადი განტოლებების შემთხვევაში. მართლაც, დავუშვათ, რომ მოცემულია I და II წრფეები შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{I}$$
$$\left.\begin{aligned} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{II}$$

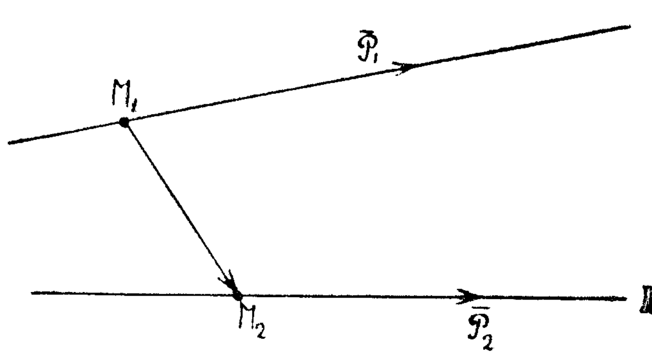
ეს ორი სისტემა რომ ერთი და იგივე წრფეს გამოსახავდეს, საჭიროა პირველი სისტემიდან განსაზღვრული x, y იგივურად ტოლი იყოს მეორე სისტემიდან განსაზღვრული x, y-სა. გვექნება:

$$a_1 z + p_1 = a_2 z + p_2,$$
$$b_1 z + q_1 = b_2 z + q_2.$$

აქედან

$$a_1 = a_2, \qquad p_1 = p_2,$$
$$b_1 = b_2, \qquad q_1 = q_2.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ წრფივ განტოლებათა ორი სისტემა ერთი და იგივე წრფეს გამოსახავდეს აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს ორი სისტემა ერთი და იგივე კანონიკურ სახეს გვაძლევდეს. ამ პირობას ლიტერატურაში ორი წრფის შეთავსების პირობას უწოდებენ. მაშასადამე, ორი წრფის შეთავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი კანონიკური განტოლებანი ერთი და იგივე იყოს. აქედან ისიც ჩანს, რომ სივრცეში კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები



ნახ. 74.

სავსებით განისაზღვრება მოცემული წრფით და, პირუკუ. ამრიგად კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების რიცხვი მინიმალურია ისეთ პარამეტრთა შორის, რომლებითაც განისაზღვრება წრფის მდებარეობა სივრცეში. თუ გავიხსენებთ, I თავში წრფის კანონიკური განტოლების კოეფიციენტებს ჰქონდა ანალოგიური თვისება, ოღონდ იქ კანონიკურ განტოლებაში შედიოდა ორი კოეფიციენტი.

3. ორი წრფის თანაკვეთის პირობა სივრცეში. როგორც ცნობილია, სივრცეში ორი წრფე საზოგადოდ არ თანაიკვეთება, ე. ი.

აცდენილი წრფეებია. იმისათვის, რომ ორი წრფე თანაიკვეთებოდეს, საჭიროა მათი განტოლებათა კოეფიციენტები რაიმე პირობას აკმაყოფილებდნენ. დავუშვათ, რომ წრფეების განტოლებანი მოცემულია მიმართულების კოეფიციენტებში. $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ იყოს მიმმართველი ვექტორები, M_1 და M_2 კი წრფეებზე აღებული წერტილები შესაბამად (ნახ. 74). გვექნება:

$$M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$M_2=(x_2,\ y_2,\ z_2).$$

აქედან

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

$\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორები კი მოცემული იქნება (21) ფორმულებით. ცხადია, რომ, თუ მოცემული ორი წრფე თანაიკვეთება, მაშინ $\overline{M_1M_2}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები კომპლარული იქნება და, პირუკუ, თუ ეს ვექტორები კომპლანარულია, მაშინ წრფეებიც კომპლანარული იქნება, ე. ი. თანაიკვეთება. ამრიგად, იმისათვის, რომ ორი წრფე თანაიკვეთებოდეს აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\overline{M_1M_2}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორები იყოს კომპლანარული. როგორც ვექტორთა ალგებრიდან არის ცნობილი, სამი ვექტორის კომპლანარულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი იყოს ნული. ამ შემთხვევისათვის გვექნება

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (23)$$

ასეთია ორი წრფის თანაკვეთის პირობა იმ შემთხვევაში, როცა წრფეების განტოლებანი მოცემულია მიმართულების კოეფიციენტებში. თუ წრფეების განტოლებანი მოცემულია ზოგადი სახით, მაშინ ჯერ უნდა გადავიდეთ მიმართულების კოეფიციენტებიდან განტოლებაზე და მერე გამოვიყენოთ (23) პირობა. მაგრამ შესაძლებელია თანაკვეთის პირობა უშუალოდაც იქნას განსაზღვრული წრფეთა ზოგადი განტოლებების შემთხვევაში. მართლაც, დავუშვათ, რომ მოცემულია I და II წრფეები შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{aligned}\right\}\quad \text{I}$$
$$\left.\begin{aligned} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.\end{aligned}\right\}\quad \text{II}$$

წრფეების თანაკვეთის შემთხვევაში ამ ოთხ განტოლებას უნდა ჰქონდეს საერთო ამონახსნი; ამისათვის ამ ოთხი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემის დეტერმინანტი უნდა იყოს ნული (თავსებადობის პირობა). მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

ასეთ პირობას უნდა აკმაყოფილებდნენ ორი წრფის ზოგად განტოლებათა კოეფიციენტები თანაკვეთის შემთხვევაში.

§ 8. წრფის განტოლებები სხვადასხვა მონაცემებით

1. წრფეთა ძნული. სივრცეში ერთ წერტილზე გამავალ წრფეთა სიმრავლეს ეწოდება წრფეთა ძნული. იმ წერტილს კი, რომელზედაც წრფეები გადიან, ეწოდება ძნულის ცენტრი. დავუშვათ, რომ მოცემულია ძნულის ცენტრი

$$M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

საძიებელია ძნულის რაიმე წრფის განტოლება, ე. ი. ისეთი წრფის განტოლება, რომელიც მოცემულ წერტილზე გადის. M_0 წერტილს მოვდოთ ნებისმიერი $\overline{P}$ ვექტორი

$$\overline{P}=(L,\ M,\ N),$$

სადაც L, M, N ნებისმიერი მუდმივებია. როგორც ცნობილია, M_0 წერტილზე და $\overline{P}$ ვექტორზე გამავალი წრფე განისაზღვრება (16) განტოლებით. ამრიგად გვექნება

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}. \tag{25}$$

ასეთი განტოლებით განისაზღვრება ძნულის ყოველი წრფე L, M, N კოეფიციენტების სხვადასხვა მნიშვნელობების შესაბამად. ამიტომ (25) განტოლებას ეწოდება წრფეთა ძნულის განტოლება. L, M, N—ძნულის პარამეტრებია. მათი მნიშვნელობების ყოველ სამეულს შეესაბამება ერთი გარკვეული წრფე ძნულში.

2. ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. მოცემულია ორი წერტილი:

$$M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1),$$
$$M_2=(x_2,\ y_2,\ z_2).$$

საძიებელია ამ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება. განვიხილოთ $\overline{M_1M_2}$ ვექტორი. გვექნება

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

ცხადია, რომ $\overline{M_1M_2}$ ვექტორი მოთავსდება მოცემული წერტილების შემაერთებელ წრფეზე. ამიტომ ამ წრფის მიმმართველ ვექტორად შეგვიძლია მივიღოთ M_1M_2 ვექტორი. ამრიგად, მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფე წარმოგვიდგება როგორც M_1 წერტილზე და $\overline{M_1M_2}$ ვექტორზე გამავალი წრფე. ამ პირობებში წრფის განტოლება შედგება (16) განტოლების მსგავსად, ოღონდ ამ შემთხვევაში M_0 წერტილად უნდა ავიღოთ M_1 წერტილი და P ვექტორის ნაცვლად კი $\overline{M_1M_2}$ ვექტორი, ე. ი. x_0, y_0, z_0 შეიცვლება x_1, y_1, z_1-ით და L, M, N შეიცვლება x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1-ით. გვექნება

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{26}$$

ასეთია ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება სივრცეში.

3. მოცემული წრფისადმი პარალელური წრფის გავლება მოცემულ წერტილზე. მოცემულია $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ წერტილი და წრფე შემდეგი განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}.$$

საძიებელია M_1 წერტილზე გამავალ წრფეთაგან ისეთი წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია მოცემული წრფისა. ცხადია, რომ მოცემული წრფის მიმმართველი ვექტორი

$$\overline{P}=(L,\ M,\ N)$$

პარალელური იქნება საძიებელი წრფისა. ამიტომ, თუ $\overline{P}$ ვექტორს მოვდებთ M_1 წერტილზე, იგი მოთავსდება საძიებელ პარალელურ წრფეზე. ამრიგად $\overline{P}$ ვექტორი შეგვიძლია განვიხილოთ საძიებელი პარალელური წრფის მიმმართველ ვექტორად. საძიებელი წრფე

გაივლის M_1 წერტილზე და $\overline{P}$ ვექტორზე. მისი განტოლება შედგება (16) განტოლების მსგავსად (ოღონდ აქ M_0 წერტილის ნაცვლად უნდა ავიღოთ M_1 წერტილი). გვექნება

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}. \tag{27}$$

იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული წრფის განტოლება ზოგადი სახისაა, მაშინ ჯერ უნდა გადავიდეთ მიმართულების კოეფიციენტებიან განტოლებაზე და შემდეგ შევადგინოთ (27) განტოლება.

ჩვენ აქ გავეცნობით ამ საკითხის გადაჭრის მეორე წესს, რომელიც შესაძლებელია მკითხველს უფრო უმჯობესად მოეჩვენოს. ჯერ შევადგინოთ M_1 წერტილზე გამავალი წრფეთა ძნულის განტოლება (25) განტოლების მსგავსად. გვექნება (ამ შემთხვევაში ძნულის ცენტრია M_1 წერტილი, ნაცვლად M_0 წერტილისა, პარამეტრები კი L_1, M_1, N_1, ნაცვლად L, M, N-ისა)

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}.$$

აქ L_1, M_1, N_1—ძნულის პარამეტრები—ნებისმიერი მუდმივებია. ისე უნდა შევარჩიოთ ეს პარამეტრები, რომ მათი შესაბამი ძნულის წრფე პარალელური იყოს მოცემული წრფისა. ამიტომ უნდა ვისარგებლოთ ორი წრფის პარალელურობის პირობით, რაც მოცემულ წრფეთა მიმართულების კოეფიციენტების პროპორციულობით გამოისახება. ამ შემთხვევაში L_1, M_1, N_1 პროპორციული უნდა იყოს L, M, N-ისა. გვექნება

$$\frac{L_1}{L}=\frac{M_1}{M}=\frac{N_1}{N}=\lambda.$$

აქედან

$$L_1=\lambda L, \quad M_1=\lambda M, \quad N_1=\lambda N.$$

შევიტანოთ პარამეტრების ეს მნიშვნელობები ძნულის განტოლებაში და შევკვეცოთ λ-ზე, მივიღებთ (27) განტოლებას.

§ 9. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთდამოკიდებულება

1. მოცემულ წრფეზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. სიბრტყეთა კონა.

სივრცეში ერთ წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა სიმრავლეს ეწოდება სიბრტყეთა კონა. თვით წრფეს კი, რომელზედაც სიბრტყეები გადის, ეწოდება

სიბრტყეთა კონის ღერძი. დავუშვათ მოცემულია სიბრტყეთა კონის ღერძი შემდეგი განტოლებით:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

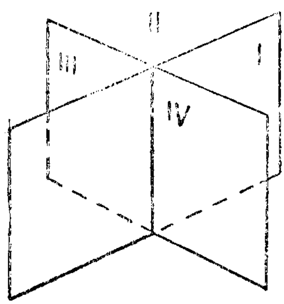
საძიებელია სიბრტყეთა კონის რაიმე სიბრტყის განტოლება, ე. ი. ისეთი სიბრტყის განტოლება, რომელიც მოცემულ წრფეზე გადის. შევადგინოთ განტოლება

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{28}$$

სადაც λ ნებისმიერი მუდმივია. რადგან ეს განტოლება წრფივია x, y, z-ის მიმართ, ამიტომ იგი გამოსახავს სიბრტყეს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს სიბრტყე გაივლის მოცემულ წრფეზე. მართლაც, თუ (28) განტოლებაში ჩავსვამთ მოცემული წრფის რაიმე წერტილის კოორდინატებს, განტოლება დაკმაყოფილდება; რადგან პირველი ოთხი წევრის ჯამი და ფრჩხილებში მოთავსებული ოთხი წევრის ჯამი ცალ-ცალკე გაუტოლდება ნულს მოცემული წრფის განტოლების თანახმად. გვექნება

$$0+\lambda\cdot 0=0.$$

ამრიგად, λ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის (28) განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე გადის მოცემულ წრფეზე. λ-ს ცვლით (28) განტოლებიდან მივიღებთ სიბრტყეთა კონის ყოველ სიბრტყეს, ამიტომ (28) განტოლებას ეწოდება **სიბრტყეთა კონის განტოლება**. λ პარამეტრს, რომლის ცვლითაც მიიღება კონაში შემავალი სიბრტყეები, ეწოდება **სიბრტყეთა კონის პარამეტრი**. როცა $\lambda=0$, მაშინ (28) განტოლებიდან მივიღებთ მოცემული განტოლებათა სისტემის პირველ განტოლებას. როცა $\lambda=\infty$, მაშინ მივიღებთ მოცემული განტოლებათა სისტემის მეორე განტოლებას. ეს ორი განტოლება ცალ-ცალკე კონაში შემავალ სიბრტყეებს განსაზღვრავს. ეს ორი სიბრტყე გაყოფს სივრცეს ოთხ ნაწილად. I და III ნაწილში მოხვდებიან ერთი და იგივე სიბრტყეები, რომელნიც შეესაბამებიან λ



ნახ. 75.

პარამეტრის ცვლას (0, ∞) შუალედში ან (—∞, 0) შუალედში. II და IV ნაწილში მოთავსდებიან აგრეთვე ერთი და იგივე სიბრტყეები, რომელნიც შეესაბამებიან λ პარამეტრის ცვლას (—∞, 0) შუალედში ან (0, ∞) შუალედში (ნახ. 75). ადვილი შესამოწმებელია, რომ λ პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ერთი გარკვეული სიბრტყე კონაში და, პირუკუ. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ **λ** პარამეტრის რაიმე მნიშვნელობისათვის (1) განტოლება არ არის განსაზღვრული, ე. ი. თუ მისი ყველა კოეფიციენტი ნულია, მაშინ A_1, B_1, C_1, D_1 პროპორციული იქნება A_2, B_2, C_2, D_2-ისა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მოცემული განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული სიბრტყეები შეთავსებულია, რაც შეუძლებელია (რადგან მოცემული სისტემა განსაზღვრავს წრფეს).

2. მოცემული წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატების განსაზღვრა. მოცემულია წრფე და სიბრტყე ზოგადი განტოლებებით შესაბამად:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(წრფე)}$$

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad \text{(სიბრტყე)}$$

საძიებელია წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები. ცხადია, რომ თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს წრფისა და სიბრტყის განტოლებებს, ე. ი. მოცემულ სამ განტოლებას ერთდროულად. ამრიგად, თანაკვეთის წერტილის კოორდინატების მისაღებად უნდა ამოვხსნათ მოცემული სამი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა. ამოხსნის შედეგად x, y, z-ისათვის მიღებული მნიშვნელობები იქნება თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

3. სიბრტყისა და წრფის პარალელურობის პირობა. დავუშვათ, რომ სიბრტყე მოცემულია ზოგადი განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad \text{I}$$

ცხადია, რომ შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყე

$$Ax+By+Cz=0 \qquad \text{II}$$

პარალელური იქნება მოცემული სიბრტყისა და გაივლის კოორდინატთა სათავეზე. თუ რაიმე წრფე პარალელურია მოცემული სიბრტყისა, მაშინ წრფის მიმმართველი $P(L, M, N)$ ვექტორი აგრეთვე პარალელური იქნება მოცემული სიბრტყისა და, პირუკუ. ცხადია, აგრეთვე, რომ $\overline{P}$ ვექტორი პარალელური იქნება მოცემული

სიბრტყის იმ პარალელური სიბრტყისაც, რომელიც სათავეზე გადის. თუ $\overline{P}$ ვექტორს პარალელური გადატანით მოვდებთ კოორდინატთა სისტემის სათავეზე, მაშინ იგი მოთავსდება II სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში $\overline{P}$ ვექტორის ბოლო M წერტილის კოორდინატები თვით ვექტორის კოორდინატები იქნება, ე. ი. $x=L$, $y=M$, $z=N$. რადგან ვექტორის ბოლო წერტილი მდებარეობს აღნიშნულ II სიბრტყეზე, ამიტომ მისი კოორდინატები დააკმაყოფილებს ამ განტოლებას. გვექნება

$$AL+BM+CN=0. \tag{29}$$

ასეთია წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის პირობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს პირობა საკმარისიც იქნება სიბრტყისა და წრფის პარალელურობისათვის (ამისათვის უნდა შევაბრუნოთ მსჯელობა).

3. მოცემული წრფის მოცემულ სიბრტყეზე მოთავსების პირობები. განვიხილოთ სიბრტყე ზოგადი განტოლებით და წრფე მიმართულების კოეფიციენტებიანი განტოლებით შესაბამად, ე. ი.

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{(სიბრტყე)}$$

და

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N} \quad \text{(წრფე)}.$$

იმისათვის, რომ მოცემული წრფე მოთავსებული იყოს მოცემულ სიბრტყეზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ წრფე პარალელური იყოს სიბრტყისა (ე. ი. შესრულდება (29) პირობა) და წრფის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი მოთავსებული იყოს სიბრტყეზე (ე. ი. M_0 წერტილის კოორდინატებმა დააკმაყოფილოს მოცემული სიბრტყის განტოლება). ამრიგად გვექნება:

$$\begin{aligned} &AL+BM+CN=0, \\ &Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{aligned} \tag{30}$$

ასეთია წრფის სიბრტყეზე მოთავსების პირობები.

§ 10. ᲬᲠᲤᲘᲡᲐ ᲓᲐ ᲡᲘᲑᲠᲢᲧᲘᲡ ᲞᲐᲠᲐᲛᲔᲢᲠᲣᲚᲘ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲔᲑᲘ

1. წრფის პარამეტრული განტოლება. როდესაც წრფის განტოლება გამოვიყვანეთ სივრცეში (§ 6), დავემყარეთ $\overline{M_0M}$ ვექტორისა და P ვექტორის პარალელურობას (ნახ. 76). პარალელურობის ეს დამოკიდებულება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$\overline{M_0M}=\lambda\overline{P}. \tag{31}$$

M_0 და M წერტილების რადიუს-ვექტორები შესაბამად აღვნიშნოთ $\bar{r}_0$-ითა და $\bar{r}$-ით. გვექნება:

$$\bar{r}_0=\overline{OM}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

$$\bar{r}=\overline{OM}=(x,\ y,\ z).$$

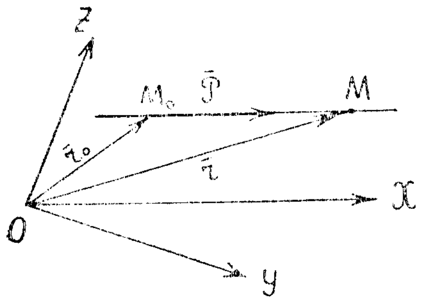
ნახაზიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება $\bar{r}=\bar{r}_0+\overline{M_0M}$. რადგან $\overline{M_0M}=\lambda\bar{P}$,

ამიტომ
$$\bar{r}=\bar{r}_0+\lambda\bar{P}. \tag{32}$$

ამ ტოლობის დაგეგმილება კოორდინატთა ღერძებზე (ვექტორები შეიცვლება შესაბამი კოორდინატებით) მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x&=x_0+\lambda L,\\ y&=y_0+\lambda M,\\ z&=z_0+\lambda N. \end{aligned} \tag{33}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (31) ტოლობის საფუძველზე λ პარამეტრის ცვლა განსაზღვრავს M წერტილის მოძრაობას წრფეზე. როცა λ მიიღებს ნამდვილ რიცხვთა ყველა მნიშვნელობებს $(-\infty,\ \infty)$ შუალედში, მაშინ M წერტილი მიიღებს წრფის ყველა წერტილის მდებარეობას, ე. ი. აღწერს წრფეს. ამიტომ λ პარამეტრს ეწოდება მიმდინარე პარამეტრი, (33) განტოლებათა სისტემას კი წრფის განტო-



ნახ. 76.

ლება პარამეტრული სახით. ამ განტოლებაში λ არის მიმდინარე პარამეტრი. დანარჩენ წევრებს კი აქვს ისეთივე მნიშვნელობები, როგორიც მათ ჰქონდათ წრფის მიმართულების კოეფიციენტებიან განტოლებაში, სახელდობრ, $x,\ y,\ z$ არის მიმდინარე კოორდინატები, $x_0,\ y_0,\ z_0$—წრფის ერთი ფიქსირებული წერტილის კოორდინატები, $L,\ M,\ N$—მიმართულების კოეფიციენტები. თუ (31) განტოლებიდან გამოვრიცხავთ λ პარამეტრს, მივიღებთ წრფის განტოლებას რომელიმე სახით. კერძოდ, თუ (31) სისტემის თვითეული განტოლებიდან ამოვხსნით λ-ს და მიღებულ მნიშვნელო-

ბებს გავუტოლებთ ერთიმეორეს, მივიღებთ წრფის განტოლებას მიმართულების კოეფიციენტებში. (32) განტოლებას, რომლის დაგეგმილება გვაძლევს პარამეტრულ განტოლებას, ეწოდება წრფის განტოლება ვ ე ქ ტ ო რ უ ლ ი ს ა ხ ი თ.

2. სიბრტყის პარამეტრული განტოლება. სიბრტყის განტოლების გამოყვანის დროს (§ 1) ჩვენ დავემყარეთ $\overline{M_0M}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების კომპლანარულობის პირობას. მეორე მხრივ ვიცით, რომ, როცა სამი ვექტორი კომპლანარულია, მაშინ ერთი მათგანი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ორი დანარჩენის წრფივი ნაერთის სახით. ამ შემთხვევაში $\overline{M_0M}$ ვექტორი წარმოდგება $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების წრფივი ნაერთის სახით. გვექნება

$$\overline{M_0M}=\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2. \tag{34}$$

λ, μ სკალარული მუდმივებია. ამ შემთხვევაში ვიგულისხმებთ იგივე მონაცემებს, რაც სიბრტყის (1) განტოლების გამოყვანის დროს გვქონდა, სახელდობრ,

$$M=(x,\ y,\ z),$$
$$M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$\overline{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),$$
$$\overline{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2).$$

M_0 და M წერტილების რადიუს-ვექტორისათვის გვექნება:

$$\overline{r}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$\overline{r}=(x,\ y,\ z).$$

ნახაზიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა (ნახ. 77)

$$\overline{r}=\overline{r}_0+\overline{M_0M}.$$

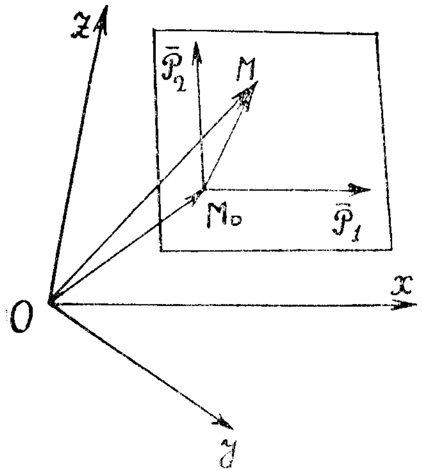
შევიტანოთ ამ განტოლებაში $\overline{M_0M}$-ის მნიშვნელობა (34) ტოლობიდან. მივიღებთ

$$\overline{r}=\overline{r}_0+\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2. \tag{35}$$

ამ ტოლობის დაგეგმილება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x&=x_0+\lambda X_1+\mu X_2,\\ y&=y_0+\lambda Y_1+\mu Y_2,\\ z&=z_0+\lambda Z_1+\mu Z_2. \end{aligned} \tag{36}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (33) განტოლებაში λ, μ პარამეტრების ცვლა განსაზღვრავს M წერტილის მოძრაობას სიბრტყეზე (ნახ. 77). როცა λ, μ ერთიმეორისაგან დამოუკიდებლად მიიღებს ყველა ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობას $(-\infty, \infty)$ შუალედში, მაშინ M წერტილი მიიღებს სიბრტყის ყველა წერტილის მდებარეობას, ე. ი. აღწერს სიბრტყეს. ამიტომ λ, μ პარამეტრებს ეწოდება სიბრტყის მიმდინარე პარამეტრები, (36) განტოლებათა სისტემას კი სიბრტყის პარამეტრული განტოლება. ამ განტოლებაში λ და μ მიმდინარე პარამეტრებია, დანარჩენ სიდიდეებს კი აქვთ ისეთივე მნიშვნელობები, როგორიც მათ (1) განტოლებაში ჰქონდათ. თუ (36) განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხავთ λ და μ პარამეტრებს, მივიღებთ სიბრტყის განტოლებას რომელიმე სახით. კერძოდ, თუ შევნიშნავთ, რომ λ და μ პარამეტრების მიმართ (36) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს სამი წრფივი განტოლების სისტემას, მაშინ ამ სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ამ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნული იყოს. გვექნება



ნახ. 77.

$$\begin{vmatrix} x-x_0, & X_1, & X_2 \\ y-y_0, & Y_1, & Y_2 \\ z-z_0, & Z_1, & Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

ამ დეტერმინანტში სვეტებისა და სტრიქონების გადანაცვლებით მივიღებთ სიბრტყის (1) განტოლებას. (35) განტოლებას, რომლის დაგეგმილება გვაძლევს სიბრტყის პარამეტრულ განტოლებას, ეწოდება სიბრტყის განტოლება ვექტორული სახით.

§ 11. წრფისა და სიბრტყის სიმბოლური განტოლებები

1. წრფის სიმბოლური განტოლება. განვიხილოთ (31) განტოლება

$$\overline{M_0M} = \lambda \overline{P}$$

და შევცვალოთ $\overline{M_0M}$ ვექტორი M და M_0 წერტილების სხვაობის სახით (იხ. II თავის 47'-ე ფორმ.)

$$\overline{M_0M}=M-M_0.$$

გვექნება

$$M-M_0=\lambda P.$$

აქედან

$$M=M_0+\lambda\overline{P}. \tag{37}$$

ამ ტოლობის დაგეგმილება კოორდინატთა ღერძებზე (წერტილები და ვექტორები შეიცვლება კოორდინატებით შესაბამად) მოგვცემს (32) განტოლებათა სისტემას, ე. ი. წრფის პარამეტრულ განტოლებას. (37) განტოლებას ეწოდება წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ი მ ბ ო ლ უ რ ი ს ა ხ ი თ. ამ განტოლების უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ აქ წრფის მიმდინარე წერტილი გამოსახული გვაქვს ცნობილი ელემენტებით M_0 წერტილით და $\overline{P}$ ვექტორით. λ, როგორც უწინ, აქაც მიმდინარე პარამეტრია.

2. სიბრტყის სიმბოლური განტოლება. განვიხილოთ (34) ტოლობა, ე. ი. $\overline{M_0M}=\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2$ და ჩავსვათ ამ ტოლობაში $\overline{M_0M}=M-M_0$. გვექნება

$$M-M_0=\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2.$$

აქედან

$$M=M_0+\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2. \tag{38}$$

ამ ტოლობის დაგეგმილება კოორდინატთა ღერძებზე მოგვცემს (36) განტოლებათა სისტემას, ე. ი. სიბრტყის პარამეტრულ განტოლებას. (38) განტოლებას ეწოდება ს ი ბ რ ტ ყ ი ს ს ი მ ბ ო ლ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. ამ განტოლების უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ აქ სიბრტყის მიმდინარე წერტილი გამოსახული გვაქვს ცნობილი ელემენტებით: M_0 წერტილით და $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებით. λ და μ, როგორც უწინ, აქაც მიმდინარე პარამეტრებია.

§ 12. ძირითადი ამოცანები წრფეთა და სიბრტყეთა შესახებ

ამოცანა № 1. მოცემულია წრფე და მის გარეშე $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი. საძიებელია ამ წრფეზე და

წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება. განვიხილოთ მოცემული წრფის განტოლება ზოგადი სახით:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

შევადგინოთ ამ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა კონის განტოლება

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

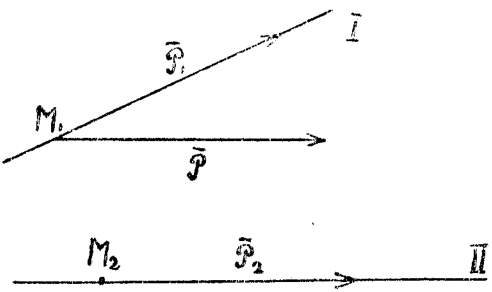
და λ პარამეტრი ისე შევარჩიოთ, რომ შესაბამმა სიბრტყემ გაიაროს M_0 წერტილზე; ამისათვის M_0 წერტილის კოორდინატები უნდა შევიტანოთ კონის განტოლებაში. გვექნება

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0.$$

აქედან მიიღება λ პარამეტრის სასურველი მნიშვნელობა

$$\lambda=-\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}.$$

რადგან M_0 წერტილი არ მდებარეობს წრფეზე, ამიტომ ამ გამოსახულების მნიშვნელი და მრიცხველი ერთდროულად ნული არ იქნება. ამრიგად λ პარამეტრი განსაზღვრულია ცალსახად.



ნახ. 78.

λ-ს ეს მნიშვნელობა რომ შევიტანოთ კონის განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას.

ამოცანა № 2. მოცემული ორი წრფე შემდეგი განტოლებებით:

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}, \qquad \text{I}$$

$$\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}. \qquad \text{II}$$

საძიებელია (I) წრფეზე მეორე წრფისადმი პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება. საძიებელი სიბრტყე, ცხადია, გაივლის პირველი წრფის M_1 (x_1, y_1, z_1) წერტილზე და მასზე მოდებულ მიმმართველ $\overline{P}_1$ ვექტორზე. ცხადია, რომ ეს სიბრტყე პარალელური იქნება (II) წრფის მიმმართველი $\overline{P}_2$ ვექტორისადმი. თუ $\overline{P}_2$ ვექტორს პარალელური გადატანით მოვდებთ M_1 წერტილს, მაშინ იგი მოთავსდება საძიებელ სიბრტყეზე. ამრიგად, საძიებელი სიბრტყე განისაზღვრება M_1 წერტილით და მასზე მოდებული $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებით (ნახ. 78). ამიტომ ამ სიბრტყის განტოლება ისევე შედგება, როგორც სიბრტყის (I) განტოლება, სადაც ამ შემთხვევაში M_0 წერტილის x_0, y_0, z_0 კოორდინატების ნაცვლად უნდა ჩავსვათ M_1 წერტილის x_1, y_1, z_1 კოორდინატები. X_1, Y_1, Z_1 და X_2, Y_2, Z_2 შეიცვლება L_1, M_1, N_1-ითა და L_2, M_2, N_2-ით. გვექნება

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ L_1, & M_1, & N_1 \\ L_2, & M_2, & N_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{39}$$

ამოცანა № 3. მოცემულია ორი წრფე და მათ გარეშე წერტილი. საძიებელია მოცემულ წერტილზე გამავალი მოცემულ წრფეებთან თანამკვეთი წრფის განტოლება.

მოცემულ წერტილზე და მოცემულ წრფეებზე უნდა გავატაროთ სიბრტყეები. მათი განტოლებები შედგება № 1 ამოცანაში ნაჩვენები წესით. ამ ორი სიბრტყის თანაკვეთის წრფე, ცხადია, გაივლის მოცემულ წერტილზე და თანაიკვეთება მოცემულ წრფეებთან. ამრიგად, საძიებელი წრფის განტოლება წარმოდგება ზემოაღნიშნული ორი სიბრტყის განტოლებათა სისტემის სახით.

თ ა ვ ი VI

სიბრტყე და წრფე სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ

§ 1. სიბრტყისა და წრფის ნორმალური ვექტორები

1. სიბრტყის ნორმალური ვექტორი. ამ თავში ყველგან ნაგულისხმევი გვექნება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ცხადია, რომ წინა თავში მიღებული შედეგები ზოგადი სისტემის მიმართ ძალაში დარჩება მართკუთხა სისტემის შემთხვევაშიაც. გარდა ამისა, მართკუთხა სისტემაში სიბრტყისა და წრფის ანალიზური გეომეტრია შეიცავს სპეციალურ ფორმულებს, რომლებსაც აქ აღვრიცხავთ. განვიხილოთ წინა თავში გამოყვანილი სიბრტყის (I) განტოლება. იგი მიღებული იყო $\overline{M_0M}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ვექტორების კომპლანარულობის პირობიდან. როგორც ცნობილია, ეს პირობა მათი გარე ნამრავლის ნულთან გატოლებით გამოისახება, ე. ი.

$$|\overline{M_0M}, \quad \overline{P}_1, \quad \overline{P}_2|=0. \tag{40}$$

კოორდინატებში ეს ტოლობა სიბრტყის (I) განტოლებას მოგვცემს. სამი ვექტორის გარე ნამრავლის განმარტების თანახმად (40) განტოლება ასე გადაიწერება

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2]\cdot \overline{M_0M}=0.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\overline{Q}=[\overline{P}_1, \overline{P}_2]=(A, B, C), \tag{41}$$

მაშინ

$$\overline{Q}\cdot \overline{M_0M}=0. \tag{42}$$

რადგან

$$\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$

ამიტომ კოორდინატთა სისტემის მართობულობის გამო $\overline{Q}$ და $\overline{M_0M}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ასე გამოისახება

$$\overline{Q}\cdot \overline{M_0M}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0).$$

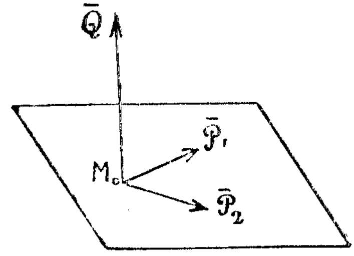
ამრიგად, (42) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

ეს კი (ჩვენთვის უკვე ცნობილი) სიბრტყის განტოლებაა. (41) ტოლობა ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად გვიჩვენებს, რომ $\overline{Q}\perp(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$, ამიტომ $\overline{Q}$ მართობი იქნება განსახილავი სიბრტყის. ამრიგად, *სიბრტყის ზოგადი განტოლების* A, B, C *კოეფიციენტებით განსაზღვრული ვექტორი*

$$\overline{Q}=(A, B, C) \qquad (43)$$

მართობია სიბრტყისა. ცხადია, რომ ეს ვექტორი მთლიანად განსაზღვრავს სიბრტყის მიმართულებას (ნახ. 79). ამ ვექტორს ეწოდება *სიბრტყის ნორმალური ვექტორი.*



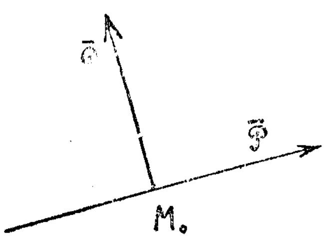
ნახ. 79.

2. წრფის ნორმალური ვექტორი სიბრტყეზე. განვიხილოთ წრფე Oxy სიბრტყეზე. მისი მიმმართველი ვექტორის გეგმილი z ღერძზე იქნება ნული; მაშასადამე, იგი ასე წარმოგვიდგება

$$\overline{P}=(L, M, 0)=(L, M).$$

წრფის განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში მიიღება (16) განტოლებიდან, თუ მასში ჩავსვამთ $N=0$, $z=z_0=0$. გვექნება:

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}.$$



ნახ. 79 ა.

მივიღეთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი განტოლება (I თავი). თუ აქედან გადავალთ ზოგად განტოლებაზე, მივიღებთ

$$Ax+By+C=0,$$

სადაც

$$A=L, \quad B=-M.$$

შევადგინოთ ვექტორი

$$\overline{Q}=(A, B). \qquad (43')$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\overline{P}\cdot\overline{Q}=0,\ \text{ანუ}\ \overline{P}\perp\overline{Q}.$$

ამრიგად, Oxy სიბრტყეზე წრფის ზოგადი განტოლების A, B კოეფიციენტებისაგან შედგენილი ვექტორი არის წრფის მართობი. ამ ვექტორს ეწოდება წრფის ნორმალური ვექტორი (ნახ. 79 ა).

§ 2. ორი სიბრტყის ურთიერთდამოკიდებულება

1. ორი სიბრტყის პარალელურობის პირობა. განვიხილოთ ორი სიბრტყე ზოგადი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \mathrm{I}$$

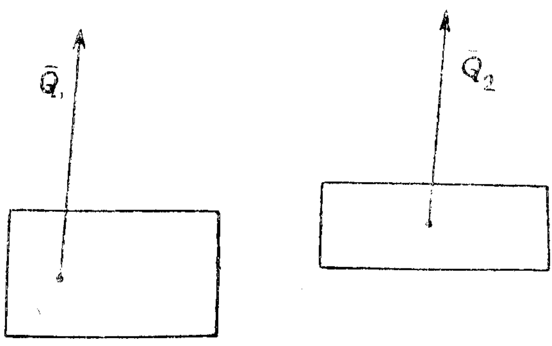
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad \mathrm{II}$$

ამ სიბრტყეთა ნორმალური ვექტორები შესაბამად აღვნიშნოთ $\overline{Q}_1$-თა და $\overline{Q}_2$-ით. გვექნება:

$$\overline{Q}_1=(A_1,\ B_1,\ C_1), \qquad \mathrm{I}$$

$$\overline{Q}_2=(A_2,\ B_2,\ C_2). \qquad \mathrm{II}$$

ცხადია, რომ მოცემული სიბრტყეების პარალელურობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი ნორმალური ვექტორები იყვნენ



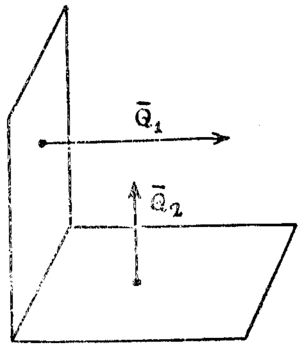
ნახ. 80.

პარალელურნი, ე. ი. $\overline{Q}_1 \parallel \overline{Q}_2$ (ნახ. 80). პარალელურობის პირობა კი, როგორც ცნობილია, მათი კოორდინატების პროპორციულობით გამოისახება, ე. ი.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

მივიღეთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი ორი სიბრტყის პარალელურობის პირობა.

2. ორი სიბრტყის თანამართობულობის პირობა. განვიხილოთ ორი სიბრტყე ისეთივე სახით, როგორც ეს ამ პარაგრაფის დასაწყისში გვქონდა აღებული. ცხადია, რომ ამ ორი სიბრტყის თანამართობულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი ნორმალური ვექტორები იყოს თანამართობული (ნახ. 81). ორი ვექტორის თანამართობულობისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია მათი სკალარული ნამრავლი იყოს ნული. ამრიგად, გვექნება



ნახ. 81.

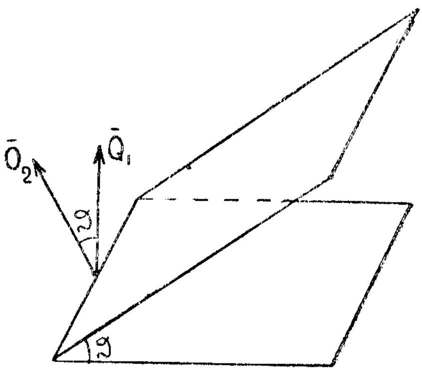
$$\overline{Q}_1 \cdot \overline{Q}_2 = 0. \qquad (44)$$

მართკუთხა კოორდინატებში (41)-ის თანახმად ეს ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (45)$$

ასეთია ორი სიბრტყის თანამართობულობის პირობა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

3. ორ სიბრტყეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა. როგორც ცნობილია, ორი სიბრტყე ერთიმეორესთან ადგენს ოთხ კუთხეს წყვილ-წყვილად თანატოლს (ვერტიკალური კუთხეების ორი წყვილი). ცხადია, რომ ორი სიბრტყით შედგენილ ორ განსხვავებულ კუთხეთაგან (მოსაზღვრე კუთხეები) ერთი კუთხე ტოლი იქნება $\overline{Q}_1$ და $\overline{Q}_2$ ვექტორებს შორის კუთხისა (ნახ. 82). ეს კუთხე აღვნიშნოთ ϑ-თი. ამ



ნახ. 82.

კუთხის კოსინუსი გამოითვლება ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელი ფორმულით. გვექნება

$$\cos\vartheta = \frac{\overline{Q}_1 \cdot \overline{Q}_2}{|\overline{Q}_1| \cdot |\overline{Q}_2|}. \qquad (46)$$

მართკუთხა კოორდინატებში სკალარული ნამრავლისა და ვექტორის სიგრძის ფორმულების თანახმად, ეს ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\cos\vartheta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{47}$$

§ 3. ორი წრფის ურთიერთდამოკიდებულება

1. ორი წრფის თანამართობულობის პირობა. დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი წრფე მიმართულების კოეფიციენტებიანი განტოლებებით:

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}, \tag{I}$$

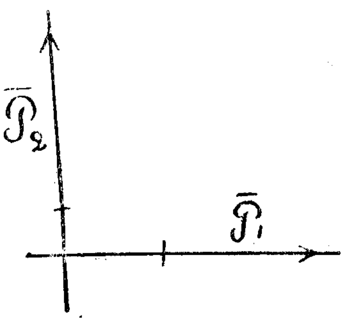
$$\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}. \tag{II}$$

მიმმართველი ვექტორები აღვნიშნოთ $\overline{P}_1$-ით და $\overline{P}_2$-ით. გვექნება:

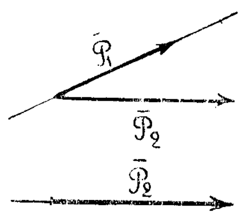
$$\overline{P}_1=(L_1,\ M_1,\ N_1),$$

$$\overline{P}_2=(L_2,\ M_2,\ N_2).$$

ცხადია, რომ ორი წრფის თანამართობულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი მიმმართველი ვექტორების თანამართობულობა (ნახ. 83). ვექტორების თანამართობულობისათვის კი აუცილე-



ნახ. 83.



ნახ. 84.

ბელი და საკმარისია მათი სკალარული ნამრავლი იყოს ნული. გვექნება

$$\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2=0. \tag{48}$$

მართკუთხა კოორდინატებში სკალარული ნამრავლის ფორმულის თანახმად, ეს ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2=0.$$

ასეთია ორი წრფის თანამართობულობის პირობა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

2. ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა. ორი წრფე პარალელური გადატანით თანაკვეთაში რომ მოვიყვანოთ ერთიმეორესთან, შექმნის ოთხ კუთხეს—წყვილ-წყვილად თანატოლს (ვერტიკალური კუთხეები). ერთიმეორისაგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ ორი კუთხე (მოსაზღვრე კუთხეები). ცხადია, რომ ერთი ამ კუთხეთაგანი ტოლი იქნება მოცემულ წრფეების მიმმართველ ვექტორთა შორის კუთხისა (ნახ. 84). ეს უკანასკნელი აღვნიშნოთ φ-თი. ამ კუთხეს ეწოდება ორ მოცემულ წრფეს შორის კუთხე. φ კუთხის კოსინუსი გამოითვლება ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის ფორმულით, სახელდობრ,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2}{|\overline{P}_1|\cdot|\overline{P}_2|}. \tag{50}$$

მართკუთხა კოორდინატებში ეს ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\cos\varphi=\frac{L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}\sqrt{L_2^2+M_2^2+N_2^2}}. \tag{51}$$

შენიშვნა. ორი წრფის პარალელურობის პირობა რჩება ისეთივე, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები ნებისმიერ კოორდინატებში.

§ 4. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთდამოკიდებულება

1. წრფის და სიბრტყის პარალელურობის პირობა. დავუშვათ, რომ მოცემულია სიბრტყე და წრფე შემდეგი განტოლებებით:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \text{(სიბრტყე)},$$

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N} \qquad \text{(წრფე)}.$$

ამ განტოლებებიდან განისაზღვრება სიბრტყისა და წრფის მიმმართველი ვექტორები:

$$\begin{aligned}\overline{Q}&=(A,\ B,\ C),\\ \overline{P}&=(L,\ M,\ N).\end{aligned} \tag{52}$$

ცხადია, რომ წრფისა და სიბრტყის პარალელურობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს ვექტორები იყვნენ მართობულნი (ნახ. 85)

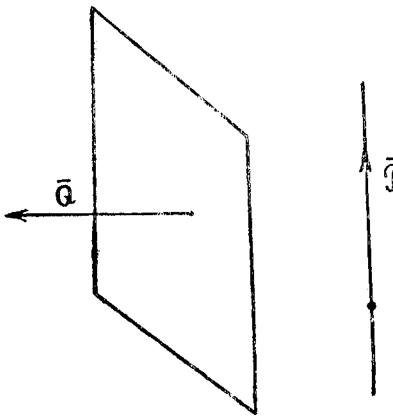
$$\overline{Q}\cdot\overline{P}=0. \tag{53}$$

ცნობილია, რომ მართკუთხა კოორდინატებში ეს პირობა, თანახმად (52) მონაცემებისა, ასე გამოისახება

$$AL+BM+CN=0.$$

მივიღეთ ჩვენთვის უკვე ცნობილი პირობა (ფორმ. 29).

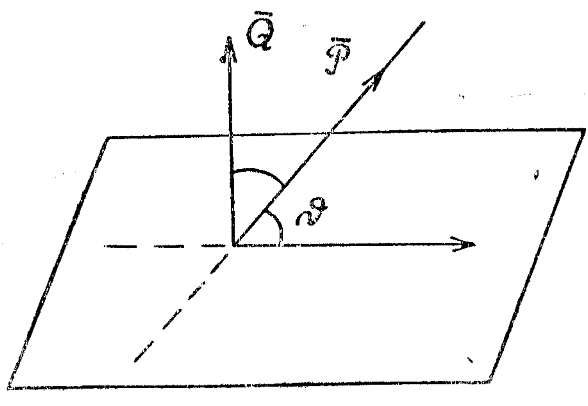
2. **წრფისა და სიბრტყის თანამართობულობის პირობა.** ცხადია, რომ მოცემული წრფისა და სიბრტყის თანამართობულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, $\overline{Q}$ და $\overline{P}$ ვექტორები იყოს პარალელური, ე. ი. $\overline{Q} \parallel \overline{P}$. ვექტორთა პარალელურობის პირობა კი (როგორც ცნობილია) მათი კოორდინატების პროპორციულობით წარმოდგება. თანახმად (52) მონაცემებისა, გვექნება



ნახ. 85.

$$\frac{A}{L}=\frac{B}{M}=\frac{C}{N}. \tag{54}$$

ასეთია წრფისა და სიბრტყის თანამართობულობის პირობა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში.



ნახ. 86.

3. **წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა.** წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება უმცირესს იმ

ორი კუთხიდან, რომლებსაც წრფე ადგენს თავისივე მართკუთხა გეგმილთან ამავე სიბრტყეზე. ეს კუთხე, ცხადია, იქნება მინიმალური ყველა იმ კუთხეთა შორის, რომელსაც წრფე ადგენს სიბრტყეზე მდებარე წრფეებთან. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე აღვნიშნოთ ϑ-თი. ცხადია, რომ ეს კუთხე შემდეგნაირად წარმოგვიდგება

$$\vartheta=\pm\left[\frac{\pi}{2}-(\overline{P},\ \ \overline{Q})\right]$$

(ჩვენს ნახაზს შეესაბამება ნიშანი $+$. ნახ. 86). აქედან

$$\sin\vartheta=\pm\cos(\overline{P},\ \ \overline{Q}).$$

ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\sin\vartheta=\pm\frac{\overline{P}\cdot\overline{Q}}{|\overline{P}|\cdot|\overline{Q}|}. \tag{55}$$

მართკუთხა კოორდინატებში სკალარული ნამრავლისა და ვექტორის სიგრძის ფორმულების მიხედვით (55) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\sin\vartheta=\pm\frac{AL+BM+CN}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{L^2+M^2+N^2}}. \tag{56}$$

§ 5. სიბრტყის ნორმალური განტოლება

განვიხილოთ რაიმე სიბრტყე სივრცეში. დავუშვათ მასზე მართობი კოორდინატთა სისტემის სათავიდან. ამ მართობის ფუძე აღვნიშნოთ A-თი. დავუშვათ, რომ $\overline{OA}$ ვექტორი კოორდინატთა ღერძებთან შესაბამად ადგენს α, β, γ კუთხეებს. თუ აღვნიშნავთ $|OA|=h$, მაშინ $\overline{OA}$ ვექტორი, მართკუთხა დაგეგმილების ფორმულის თანახმად, ასე წარმოგვიდგება

$$\overline{OA}=(h\cos\alpha,\ h\cos\beta,\ h\cos\gamma).$$

ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი M წერტილი (მიმდინარე წერტილი). დავუშვათ, რომ $M=(x,\ y,\ z)$. ამ შემთხვევაში $\overline{OM}$ ვექტორი (რადიუს-ვექტორი) ასე წარმოგვიდგება

$$\overline{OM}=(x,\ y,\ z).$$

ნახაზიდან აშკარაა (ნახ. 87) შემდეგი დამოკიდებულება

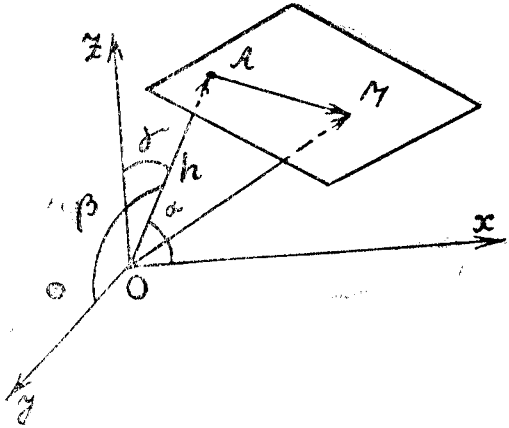
$$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა OA-ზე. გვექნება

$$\overline{OA}\cdot\overline{OM}=\overline{OA}^2+\overline{OA}\cdot\overline{AM}.$$

რადგან $\overline{OA}\perp\overline{AM}$, ამიტომ

$$\overline{OA}\cdot\overline{AM}=0.$$



ნახ. 87.

გარდა ამისა, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლისა და ვექტორის კვადრატის ფორმულების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\overline{OA}\cdot\overline{OM}=xh\cos\alpha+yh\cos\beta+zh\cos\gamma,$$

$$\overline{OA}^2=|\overline{OA}|^2=h^2.$$

ამ უკანასკნელი სამი ტოლობის საფუძველზე წინა ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$xh\cos\alpha+yh\cos\beta+zh\cos\gamma=h^2.$$

აქედან (h-ზე შეკვეცის შემდეგ)

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-h=0. \qquad (57)$$

ამ განტოლებას ეწოდება სიბრტყის განტოლება **ნორმალური სახით**. ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს, რომ ამ განტოლებაში h არის სათავიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძე. α, β, γ არის აღნიშნული მართობის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი კუთხეები, x, y, z კი მიმდინარე კოორდინატები.

ახლა დავუშვათ, რომ სიბრტყის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით

$$Ax+By+Cz+D=0$$

და მოითხოვება მისი დაყვანა ნორმალურ სახეზე. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ (57) განტოლება არის მოცემული სიბრტყის ნორმალური განტოლება, მაშინ უკანასკნელი განტოლება და (57) განტოლება ერთი და იგივე სიბრტყეს უნდა გამოსახავდეს. ამიტომ (57) განტოლება მხოლოდ რიცხობრივი მამრავლით უნდა განსხვავდებოდეს მოცემული განტოლებისაგან, ე. ი. უნდა არსებობდეს ისეთი ნულისაგან განსხვავებული λ მამრავლი, რომელზედაც გამრავლებული უკანასკნელი განტოლება (ზოგადი განტოლება) მოგვცემს (57) განტოლებას. ამრიგად შემდეგი განტოლება

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)=0$$

უნდა იყოს ნორმალური განტოლება. ამისათვის საჭიროა λ აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

$$\left.\begin{aligned}\lambda A&=\cos\alpha,\\ \lambda B&=\cos\beta,\\ \lambda C&=\cos\gamma.\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{I}$$

$$\lambda D=-h<0. \qquad \mathrm{II}$$

I ტოლობები ავახარისხოთ კვადრატში და შევკრიბოთ. გვექნება

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2+(\lambda C)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

აქედან მივიღებთ

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (58)$$

ნიშანი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ λD იყოს უარყოფითი, ე. ი. λ-ს უნდა ჰქონდეს D-ს ნიშნის საწინააღმდეგო ნიშანი. ამრიგად სიბრტყის ზოგადი განტოლება გადამრავლებული (58) ფორმულით განსაზღვრულ λ-ზე მოგვცემს იმავე სიბრტყის ნორმალურ განტოლებას, ე. ი. შემდეგი განტოლება

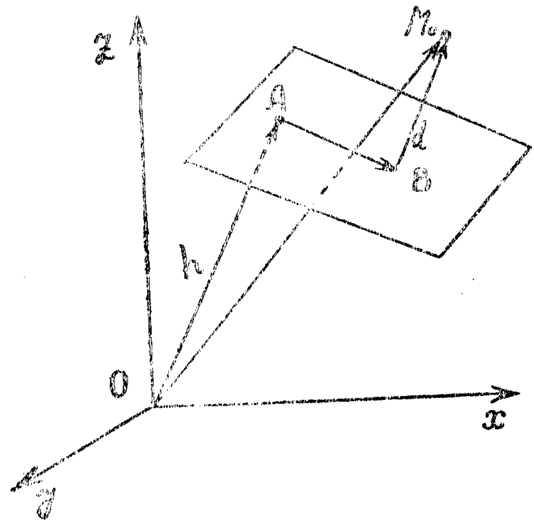
$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (59)$$

იქნება ნორმალური სახის განტოლება, სადაც რადიკალის ნიშანი აიღება D-ს ნიშნის საწინააღმდეგო.

შევნიშნავთ, რომ (49) განტოლებას მაშინაც ეწოდება სიბრტყის ნორმალური განტოლება, როცა $C=0$, ოღონდ ამ შემთხვევაში ნიშანი განუსაზღვრელია.

§ 6. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე

მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე ეწოდება ამ წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს. სიბრტყის განტოლება ავიღოთ ნორმალური სახით. მოცემული წერტილი აღვნიშნოთ



ნახ. 88.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$-ით. დავუშვათ სიბრტყეზე მართობები კოორდინატთა სათავიდან და მოცემული წერტილიდან. ამ მართობთა ფუძეები აღვნიშნოთ შესაბამად A-თი და B-თი (ნახ. 88). ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$\overline{OM_0}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BM_0}.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $\overline{OA}$-ზე. გვექნება

$$\overline{OA}\cdot\overline{OM_0}=OA^2+\overline{OA}\cdot\overline{AB}+\overline{OA}\cdot\overline{BM_0}. \qquad \mathrm{I}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\overline{OA}^2=h^2$, $\overline{OA}\cdot\overline{AB}=0$, $\overline{OA}\cdot\overline{BM_0}=\pm hd$, მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ უკანასკნელ ტოლობაში ზედა ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა M_0 წერტი-

ლი და კოორდინატთა სისტემის სათავე სიბრტყიდან სხვადასხვა მხარესაა მოთავსებული (ასეა ჩვენს ნახაზზე). ქვედა ნიშანი კი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა M_0 წერტილი და სისტემის სათავე სიბრტყიდან ერთ მხარესაა მოთავსებული. ამ მნიშვნელობათა ჩასმა (1) ტოლობაში მოგვცემს

$$\overline{OA}\cdot\overline{OM_0}=h^2\pm hd.$$

მეორე მხრივ, რადგან

$$\overline{OA}=(h\cos\alpha,\ h\cos\beta,\ h\cos\gamma),$$

$$OM_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

ამიტომ

$$\overline{OA}\cdot\overline{OM_0}=x_0h\cos\alpha+y_0h\cos\beta+z_0h\cos\gamma.$$

ამრიგად გვექნება

$$x_0h\cos\alpha+y_0h\cos\beta+z_0h\cos\gamma=h^2\pm hd,$$

აქედან მივიღებთ

$$d=\pm(x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-h). \tag{60}$$

ასეთია მოცემული წერტილიდან მოცემულ სიბრტყემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა, სადაც ზედა ნიშანი იმ შემთხვევაში აიღება, როცა M_0 წერტილი და სისტემის სათავე მოცემული სიბრტყიდან სხვადასხვა მხარესაა მოთავსებული, ხოლო ქვედა ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა M_0 წერტილი და სისტემის სათავე მოთავსებულია ცალ მხარეს მოცემული სიბრტყის მიმართ. ახლა, თუ (60) ფორმულაში ნიშნებს უკუვაგდებთ, მაშინ ასე მიღებული რიცხვი

$$d=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-h \tag{61}$$

იქნება ალგებრული რიცხვი, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა იქნება M_0 წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძე (მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე), ხოლო ნიშანი იმას გვიჩვენებს, თუ M_0 წერტილი და სისტემის სათავე როგორ არის განლაგებული სიბრტყის მიმართ, სხვადასხვა მხარესაა, თუ ერთ მხარეს. ამიტომ (61) ფორმულით განსაზღვრულ d-ს უწოდებენ წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილს ანალიზური გეომეტრიის თვალსაზრისით. თუ დავუკვირდებით, ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეს მდგომი გამოსახულება მიღებულია სიბრტყის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულებიდან მასში მოცემული M_0 წერტილის x_0, y_0, z_0 კოორდინატების ჩასმით მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად.

თუ სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახით არის მოცემული, მაშინ ჯერ ეს განტოლება უნდა დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე. მივიღებთ (59) განტოლებას, შემდეგ მარცხენა მხარეს მდგომ გამოსახულებაში ჩავსვათ M_0 წერტილის კოორდინატები მიმდინარე კოორდინატების ნაცვლად. მივიღებთ

$$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{62}$$

ასეთია M_0 წერტილიდან მოცემულ სიბრტყემდე მანძილის ფორმულა ზოგადი განტოლების შესაბამად, სადაც ნიშანი აიღება D-ს ნიშნის საწინააღმდეგო. შევნიშნავთ, რომ (62) ფორმულით განსაზღვრული რიცხვი იმ შემთხვევაშიაც გამოსახავს წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილს, როცა $C=0$, ოღონდ ამ შემთხვევაში ნიშანი გაურკვეველია.

§ 7. ორწახნაგა კუთხის ბისექტორი

ორწახნაგა კუთხის ორ თანატოლ ორწახნაგა კუთხედ გამყოფ სიბრტყეს ეწოდება აღებული კუთხის **ბისექტორული სიბრტყე** ან, უბრალოდ, **ბისექტორი**. როგორც ცნობილია, ორი სიბრტყე ერთიმეორესთან ადგენს ოთხ ორწახნაგა კუთხეს, რომელნიც წყვილ-წყვილად თანატოლია (ვერტიკალური კუთხეები). მათ ერთნაირი ბისექტორი ექნებათ. ამრიგად მიიღება მხოლოდ ორი ბისექტორი. დავუშვათ, რომ კუთხის წახნაგები მოცემულია ზოგადი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \text{I}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad \text{II}$$

ბისექტორული სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი აღვნიშნოთ $M(x, y, z)$-ით. მანძილები ამ წერტილიდან მოცემულ სიბრტყემდე შესაბამად აღვნიშნოთ d_1-ით და d_2-ით. თანახმად მანძილის (62) ფორმულისა (აქ x_0, y_0, z_0-ის ნაცვლად აიღება x, y, z), გვექნება:

$$d_1=\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$d_2=\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

რადგან ბისექტორის ყოველი წერტილი თანატოლად არის დაშორებული კუთხის გვერდებიდან (წახნაგებიდან), ამიტომ

$$|d_1|=|d_2|.$$

აქედან

$$d_1 \pm d_2 = 0.$$

შევიტანოთ აქ d_1-ის და d_2-ის მნიშვნელობები. მივიღებთ:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = 0. \tag{63}$$

აქ შემავალი ორი ნიშნის (+ და —) განხილვა მორიგეობით შესაბამად მოგვცემს ბისექტორების განტოლებებს. ამრიგად მივიღებთ ორივე ბისექტორული სიბრტყის განტოლებებს.

§ 8. ძირითადი ამოცანები წრფეთა და სიბრტყეთა შესახებ

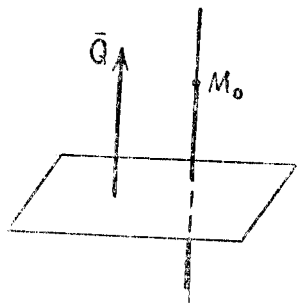
№ 1. მოცემულია $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი და სიბრტყე ზოგადი განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

საძიებელია მოცემული წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეზე დაშვებული მართობი წრფის განტოლება.

შევადგინოთ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი. გვექნება

$$\overline{Q}=(A,\ B,\ C).$$



ნახ. 89.

ცხადია, რომ ეს ვექტორი პარალელური იქნება საძიებელი მართობი წრფისა, ამიტომ გამოდგება ამ უკანასკნელის მიმმართველ ვექტორად (ნახ. 89). ამრიგად, საძიებელი წრფის განტოლება განისაზღვრება M_0 წერტილით და მიმმართველი $\overline{Q}$ ვექტორით. ეს განტოლება (16) განტოლების მსგავსად შედგება, ოღონდ აქ L, M, N-ის ნაცვლად აიღება A, B, C (რადგან $P=Q$). გვექნება

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \tag{64}$$

ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება ჩატარებულ იქნას შემდეგნაირადაც. ჯერ გავატაროთ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე წრფეთა ძნული.

გვექნება

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}.$$

ახლა L, M, N შევარჩიოთ ისე, რომ ძნულის შესაბამი წრფე იყოს მოცემული სიბრტყის მართობი; ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ წრფისა და სიბრტყის თანამართობულობის პირობა. გვექნება

$$\frac{L}{A}=\frac{M}{B}=\frac{N}{C}=\lambda.$$

აქედან

$$L=\lambda A,\quad M=\lambda B,\quad N=\lambda C.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა წრფეთა ძნულის განტოლებაში და λ-ზე შეკვეცა მოგვცემს საძიებელი წრფის (64) განტოლებას.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ, თუ სიბრტყე მოცემულია სიმბოლური განტოლებით

$$M=M_1+\lambda\overline{P}_1+\mu\overline{P}_2$$

(სადაც M_1 წერტილი სიბრტყის ერთი ფიქსირებული წერტილია, $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ კი რაიმე ვექტორებია სიბრტყეზე, აგრეთვე ფიქსირებული), მაშინ უმჯობესია საძიებელი წრფისათვისაც სიმბოლური განტოლება შევადგინოთ; ამისათვის განვსაზღვროთ ვექტორი

$$\overline{Q}=[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2].$$

ეს იქნება სიბრტყის ნორმალური ვექტორი, ხოლო საძიებელი წრფისათვის კი მიმმართველი ვექტორი. რადგან საძიებელი წრფე M_0 წერტილზე გადის, ამიტომ მისი სიმბოლური განტოლება ასე დაიწერება (წრფის (37) განტოლებაში P შეიცვლება Q-თი)

$$M=M_0+\lambda\overline{Q}.$$

№ 2. მოცემულია $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ წერტილი და წრფე შემდეგი განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}.$$

საძიებელია M_1 წერტილზე გამავალი ისეთი სიბრტყის განტოლება, რომელიც მართობულია მოცემული წრფისა.

შევადგინოთ მოცემული წრფის მიმმართველი ვექტორი. გვექნება

$$\overline{P}=(L,\ M,\ N).$$

ცხადია, ეს ვექტორი მართობული იქნება საძიებელი სიბრტყისა, ამიტომ იგი გამოდგება საძიებელი სიბრტყის ნორმალურ ვექტორად (ამ შემთხვევაში $\overline{Q}$-ს ნაცვლად აიღება $\overline{P}$). რადგან სიბრტყე გადის M_1 წერტილზე, ამიტომ მისი განტოლება დაიწერება (9) განტოლების მსგავსად (ოღონდ იქ A, B, C უნდა შეიცვალოს L, M, N-ით, რადგან $\overline{Q}=\overline{P}$. გარდა ამისა, x_0, y_0, z_0-ის ნაცვლად აიღება x_1, y_1, z_1). გვექნება

$$L(x-x_1)+M(y-y_1)+N(z-z_1)=0. \tag{65}$$

აქაც შეიძლება განხილულ იქნას ამოცანის ამოხსნის მეორე ხერხი ისევე, როგორც წინა ამოცანაში.

№ 3. მოცემულია $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილი და წრფე შემდეგი განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}.$$

საძიებელია მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული მართობის განტოლება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ საძიებელი წრფე მოთავსებული იქნება M_0 წერტილზე და მოცემულ წრფეზე გამავალ სიბრტყეში. ასევე ადვილი შესამჩნევია, რომ საძიებელი წრფე მოთავსებული იქნება M_0 წერტილიდან წრფისადმი მართობულად გამავალ სიბრტყეში. ამრიგად, საძიებელი წრფე წარმოგვიდგება როგორც ზემოაღნიშნული ორი სიბრტყის თანაკვეთა. ამ ორი სიბრტყის განტოლებების შედგენა მოხდება ჩვენთვის უკვე ცნობილი წესით. ეს ორი განტოლება ერთად მოგვცემს საძიებელი წრფის ზოგად განტოლებას. ახლა განვიხილოთ ამ ამოცანის სიმბოლური გადაწყვეტა; ამისათვის განვიხილოთ ვექტორები:

$$\overline{P}=(L, M, N),$$

$$\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0).$$

ცხადია, რომ ეს ვექტორები მოთავსებული იქნება მოცემულ წერტილზე და წრფეზე გამავალ სიბრტყეში. მათი ვექტორული ნამრავლი კი მართობული იქნება აღნიშნული სიბრტყისა; მაშასადამე,

$$\overline{Q}=[\overline{M_0M_1}, \overline{P}]$$

ვექტორი იქნება ამ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი. რაც შეეხება M_1 წერტილზე გამავალი წრფის მართობულ სიბრტყეს, მისი ნორმალური ვექტორი იქნება $\overline{P}$. შევადგინოთ ვექტორი

$$\overline{R}=[\overline{P}, \overline{Q}].$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ვექტორი ზემოაღნიშნული ორი სიბრტყის თანაკვეთის წრფის პარალელურია და გამოდგება მის მიმმართველ ვექტორად (ნახ. 90). საძიებელი წრფის სიმბოლური განტოლება ასე დაიწერება

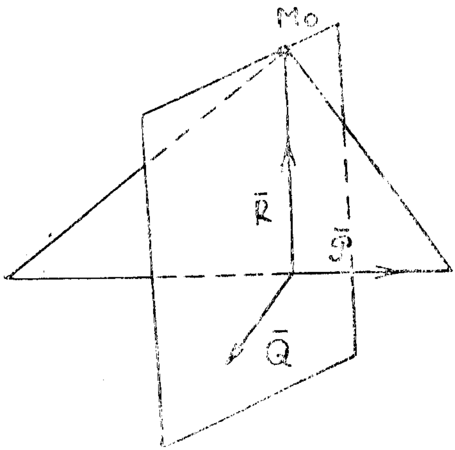
$$M = M_1 + \lambda \overline{R}. \tag{66}$$

№ 4. მოცემულია წრფე და სიბრტყე შემდეგი განტოლებებით შესაბამად:

$$\frac{x - x_0}{L} = \frac{y - y_0}{M} = \frac{z - z_0}{N},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

საძიებელია იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ წრფეზე და მართობულია მოცემული სიბრტყისა.



ნახ. 90.

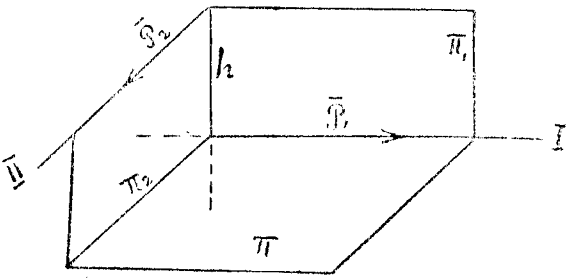
რადგან საძიებელი სიბრტყე გადის მოცემულ წრფეზე, ამიტომ მასზე მოთავსდება წრფის მიმმართველი $\overline{P}(L, M, N)$ ვექტორი. ასევე, რადგან საძიებელი სიბრტყე მართობულია მოცემული სიბრტყისა, ამიტომ ამ უკანასკნელის მიმმართველი $\overline{Q}(A, B, C)$ ვექტორი პარალელური იქნება საძიებელი სიბრტყისაც და თუ ამ ვექტორს მოვდებთ (პარალელური გადატანით) M_0 წერტილზე, მაშინ ეს ვექტორიც მოთავსდება საძიებელ სიბრტყეში. ამრიგად, საძიებელი სიბრტყე წარმოგვიდგება როგორც M_0 წერტილზე და მასზე მოდებულ $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყე. ჩვენ კი ვიცით ასეთი სიბრტყის განტოლების შედგენა. იგი სიმბოლური სახით ასე დაიწერება (აქ $\overline{P}_1$-ისა და P_2-ის ნაცვლად ჩასმულია P და Q)

$$M = M_0 + \lambda P + \mu Q. \tag{67}$$

ამ სიბრტყის ჩვეულებრივი განტოლება კი დაიწერება (4) განტოლების მსგავსად (სადაც $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების კოორდინატები შეიცვლება $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების კოორდინატებით). გვექნება

$$\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0, & z-z_0 \\ L, & M, & N \\ A, & B, & C \end{vmatrix} = 0. \tag{68}$$

№ 5. მოცემულია ორი წრფე. საძიებელია იმ წრფის განტოლება, რომელიც ორივე მოცემული წრფის მართობულია და ამავე დროს თანაიკვეთება მათთან.



ნახ. 91.

გავატაროთ პირველ წრფეზე π სიბრტყე მეორე წრფის პარალელურად (იხ. თავი V, § 12. ამოცანა № 2). შემდეგ I და II წრფეებზე გავატაროთ π_1 და π_2 სიბრტყეები π სიბრტყის მართობულად (იხ. თავი V, ამოცანა № 4). ამ ორი უკანასკნელი სიბრტყის თანაკვეთის წრფე იქნება საძიებელი საერთო მართობული წრფე (ნახ. 91).

№ 6. მოცემულია ორი წრფე შემდეგი განტოლებებით:

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}, \tag{I}$$

$$\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}. \tag{II}$$

საძიებელია მათ შორის უმოკლესი მანძილი. ცხადია, ეს იქნება მათი საერთო მართობული მონაკვეთის (რომელიც ამავე

ღროს აერთებს წრფის წერტილებს ნახ. 91) სიგრძე. ცხადია, აგრეთვე, რომ ეს უმოკლესი მანძილი იქნება II წრფის რაიმე წერტილიდან π სიბრტყეზე დაშვებულ მართობის სიგრძე. ასეთ წერტილად უმჯობესია ავიღოთ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ და მოვძებნოთ მანძილი M_2 წერტილიდან π სიბრტყემდე. ამ მანძილის განსაზღვრა შეიძლება სხვანაირადაც ვაწარმოოთ. განვიხილოთ ვექტორები $\overline{M_1M_2}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ მოდებული M_1 წერტილზე. $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ მოთავსდება π სიბრტყეზე. ამიტომ საძიებელი მართობი იქნება $\overline{M_1M_2}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის სიმაღლე დაშვებული M_2 წერტილიდან. ამ პარალელეპიპედის მოცულობა, როგორც ცნობილია, აღებული ვექტორების გარე ნამრავლით გამოისახება. გვექნება

$$V=\pm[\overline{M_1M_2},\ \overline{P}_1,\ \overline{P}_2].$$

მეორე მხრივ ამავე პარალელეპიპედის მოცულობა უდრის ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლს

$$V=Sh,$$

სადაც S (ფუძის ფართობი) წარმოადგენს $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს. როგორც ცნობილია, ეს ფართობი უდრის $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის სიგრძეს, ე. ი.

$$S=|[\overline{P}_1, \overline{P}_2]|.$$

წინა ფორმულიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ h. გვექნება

$$h=\frac{V}{S}.$$

თუ აქ ჩავსვამთ V და S-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$h=\pm\frac{[\overline{M_1M_2},\ \overline{P}_1,\ \overline{P}_2]}{|[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2]|}. \tag{69}$$

რადგან კოორდინატთა სისტემა მართკუთხაა, ამიტომ უკანასკნელი ფორმულის მრიცხველი ტოლია მოცემული სამი ვექტორის კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტისა, მნიშვნელი კი გამოითვლება პარალელოგრამის ფართობის (III თავის მე-14 ფორმ.) მიხედვით. გვექნება

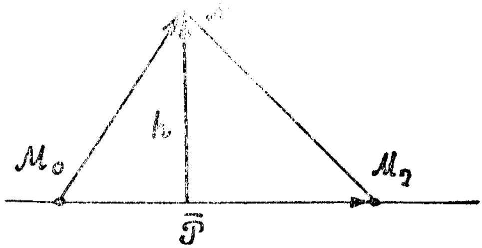
$$h=\pm\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ L_1, & M_1, & N_1 \\ L_2, & M_2, & N_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} M_1, & N_1 \\ M_2, & N_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} N_1, & L_1 \\ N_2, & L_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} L_1, & M_1 \\ L_2, & M_2 \end{vmatrix}^2}} \tag{70}$$

(აქ X, Y, Z-ის ნაცვლად დაწერილია L, M, N).

№ 7. მოცემულია $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილი და წრფე შემდეგი განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}.$$

საძიებელია მოცემული წერტილიდან წრფემდე მანძილი.



ნახ. 92.

წერტილიდან წრფემდე მანძილი ეწოდება ამ წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს. თუ $\overline{P}(L, M, N)$ ვექტორს მოვდებთ M_0 წერტილზე და ამ შემთხვევაში ვექტორის ბოლოს წერტილს აღვნიშნავთ M_2-ით, მაშინ საძიებელი მართობი წარმოგვიდგება როგორც $M_0M_1M_2$ სამკუთხედის სიმაღლე დაშვებული M_1 წერტილიდან (ნახ. 92).

განვიხილოთ ვექტორები:

$$\overline{M_0M}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0),$$

$$\overline{P}=(L,\ M,\ N),$$

ცხადია, რომ სამკუთხედის ფართობი წარმოგვიდგება როგორც ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის ნახევარი. ეს უკანასკნელი კი განისაზღვრება ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის სიგრძით. გვექნება

$$s=\frac{1}{2}|[\overline{M_0M_1},\ \overline{P}]|.$$

მეორე მხრივ სამკუთხედის ფართობი უდრის ფუძისა და სიმაღლის ნამრავლის ნახევარს, ე. ი.

$$s=\frac{1}{2}\,|\overline{P}|\cdot h.$$

ეს ორი უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს

$$|[\overline{M_0M_1},\ \overline{P}]|=|\overline{P}|\cdot h.$$

აქედან

$$h=\frac{|[\overline{M_0M_1}, \overline{P}]|}{|\overline{P}|}. \tag{71}$$

ამ ფორმულის მრიცხველი გამოითვლება ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სიგრძის ფორმულის თანახმად, ოღონდ იქ $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ ვექტორების კოორდინატები შეიცვლება $\overline{M_0M}$, $\overline{P}$ ვექტორების კოორდინატებით. გვექნება

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-y_0, & z-z_0 \\ M, & N \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0, & x-x_0 \\ N, & L \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0 \\ L, & M \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}. \tag{72}$$

სავარჯიშო

1. მოცემულია $M_0(1, 2, 2)$ წერტილი და წრფე ზოგადი განტოლებით

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=0, \\ x+y-1&=0. \end{aligned}\right\}$$

საძიებელია იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_0 წერტილზე მოცემული წრფის მართობულად.

2. წინა ამოცანის მოცემულობისათვის შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_0 წერტილზე მოცემული წრფის პარალელურად.

3. პირველი ამოცანის მოცემულობისათვის შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის მოცემულ წრფეზე და დაშორებულია M_0 წერტილიდან 3 ერთეულით.

4. მოცემულია $M_0(6, 1, 0)$ წერტილი და წრფე შემდეგი განტოლებით

$$\left.\begin{aligned} x+2y-1&=0, \\ x-z+1&=0. \end{aligned}\right\}$$

საძიებელია იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის M_0 წერტილზე, მართობია მოცემული წრფისა და დაშორებულია მისგან 5 ერთეულით.

თ ა ვ ი VII

მეორე რიგის წირთა თეორიის ელემენტები

შესავალი

ჩვეულებრივად, წირი (ხაზი) განიმარტება როგორც მოძრავი წერტილის მიერ აღწერილი წერტილთა სიმრავლე (მოძრავი წერტილის მიერ აღწერილი გზა). ვგულისხმობთ, რომ მოძრავი წერტილის მდებარეობა სავსებით გარკვეულია დროის ყოველ მომენტში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მოძრავი წერტილის კოორდინატები გარკვეულია დროის ყოველ მომენტში; მაშასადამე, მოძრავი წერტილის კოორდინატები იცვლებიან როგორც დროის ფუნქციები. ამრიგად, თუ $M(x, y, z)$ არის მოძრავი წერტილი, მაშინ x, y, z დროის ფუნქციებია, ე. ი. (აქ t პარამეტრით აღნიშნულია დრო):

$$\left.\begin{array}{l} x=f(t), \\ y=\varphi(t), \\ z=\psi(t). \end{array}\right\} \qquad (a)$$

ამ სისტემას ეწოდება წ ი რ ი ს პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ი ვ რ ც ე შ ი. თუ M წერტილის მოძრაობა ხდება Oxy სიბრტყეზე, მაშინ მოძრაობა დახასიათებული იქნება მხოლოდ ორი განტოლებით:

$$\left.\begin{array}{l} x=f(t), \\ y=\varphi(t). \end{array}\right\} \qquad (b)$$

ამ სისტემას ეწოდება წ ი რ ი ს პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ი ბ რ ტ ყ ე ზ ე. თუ ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს მივიღებთ გარკვეულ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას x-სა და y-ს შორის. ამ დამოკიდებულებას, საზოგადოდ, ექნება შემდეგი სახე (უცხადო ფუნქცია)

$$F(x, y)=0. \qquad (c)$$

ამ განტოლებას ეწოდება წირის განტოლება უცხადო სახით. თუ აქედან ამოვხსნით y-ს, მივიღებთ

$$y=f(x). \tag{d}$$

ამ განტოლებას ეწოდება წირის განტოლება ცხადი სახით. თუ აღვნიშნავთ $x=t$, მაშინ უკანასკნელი განტოლება ასე დაიწერება: $y=f(t)$. ამრიგად მოგვეცემა შემდეგი სისტემა

$$x=t,$$
$$y=f(t).$$

ეს კი წირის პარამეტრული განტოლებაა. მაშასადამე, თუ მოცემულია ნებისმიერი ერთი განტოლება x, y კოორდინატების დამაკავშირებელი, (c) სახისა, მაშინ შეგვიძლია ამ განტოლებიდან გადავიდეთ (b) სახეზე, რომელიც გამოსახავს წერტილის მოძრაობას სიბრტყეზე, ე. ი. განსაზღვრავს წირს. ამრიგად, ნებისმიერი ერთი განტოლება x, y კოორდინატების დამაკავშირებელი განიხილება როგორც წირის განტოლება სიბრტყეზე. აქედან ჩანს, რომ წირი წარმოგვიდგება როგორც სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები, და მხოლოდ ისინი, აკმაყოფილებენ ერთ გარკვეულ განტოლებას. წირის ფორმა (ე. ი. აღწერილი გზის ფორმა) დამოკიდებულია $F(x, y)$ ფუნქციის აგებულებაზე და, პირუკუ. მაგალითად, თუ $F(x, y)$ ფუნქცია წრფივია ე. ი. (c) განტოლება წრფივი განტოლებაა, მაშინ შესაბამი წირი იქნება წრფე. წრფივი განტოლების შემდეგ ბუნებრივია განვიხილოთ მეორე ხარისხის (ანუ მეორე რიგის) განტოლება და შევისწავლოთ მასთან დაკავშირებული წირები.

§ 1. მეორე რიგის წირი

განმარტება. მეორე რიგის წირი ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ მეორე რიგის განტოლებას. თვით იმ განტოლებას კი, რომელსაც აკმაყოფილებენ მეორე რიგის წირის წერტილთა კოორდინატები, ეწოდება მეორე რიგის წირის განტოლება.

ამ განმარტების თანახმად, მეორე რიგის წირი განისაზღვრება შემდეგი მეორე რიგის განტოლებით

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

სადაც A, B, C, D, E, F ნებისმიერი მუდმივებია, ოღონდ A, B, C კოეფიციენტები (მეორე რიგის წევრების კოეფიციენტები) ერთდროულად ნულები არ არის. ეს რიცხვები რომ ერთდროულად ნულები ყოფილიყო, მაშინ მეორე რიგის განტოლება აღარ გვექნებოდა; მაშასადამე, აღნიშნული შეზღუდვა არ გამორიცხავს არც ერთ მეორე რიგის განტოლებას, ე. ი. (1) განტოლებით განიხილება ნებისმიერი მეორე რიგის წირი. კოეფიციენტების ყოველ კერძო მნიშვნელობებს შეესაბამება ერთი გარკვეული მეორე რიგის წირი. ბუნებრივია დაისვას შემდეგი საკითხები: 1. როგორია მეორე რიგის წირთა ფორმები? 2. როგორ ავაგოთ მეორე რიგის წირი განტოლების მიხედვით კოორდინატთა სისტემის მიმართ? და სხვ. წინამდებარე თავში გარჩეული იქნება მხოლოდ პირველი საკითხი, დანარჩენ საკითხებს კი გავარჩევთ შემდეგ თავში. პირველ ყოვლისა მოვიყვანთ ზოგიერთი მეორე რიგის წირის მაგალითებს, რომლებიც ცნობილია ელემენტარულ გეომეტრიაში მარტივი გეომეტრიული განმარტებებით.

2. წრეწირი

წრეწირს განვიხილავთ ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილი განმარტებით, სახელდობრ: *წრეწირი ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელნიც თანატოლად არიან დაშორებული ერთი მოცემული წერტილიდან. თვით მოცემულ წერტილს ეწოდება წრეწირის ცენტრი. ცენტრიდან წრეწირის წერტილამდე მანძილს ეწოდება წრეწირის რადიუსი.*

თუ მოცემულია წრეწირის ცენტრი და რადიუსი, მაშინ ადვილად შეიძლება შევადგინოთ წრეწირის განტოლება. დავუშვათ, რომ $C=(a,\ b)$ არის წრეწირის ცენტრი, ხოლო r—წრეწირის რადიუსი. შევადგინოთ წრეწირის განტოლება. წრეწირის მიმდინარე წერტილი იყოს $M=(x,\ y)$. განმარტების თანახმად, გვექნება

$$|CM|=r. \tag{2}$$

მეორე მხრივ (ნახ. 93),

$$|CM|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.^{1}$$

---

[1] აქ და შემდეგშიაც, მეორე რიგის წირთა და ზედაპირთა თეორიაში, ყველგან განიხილება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები.

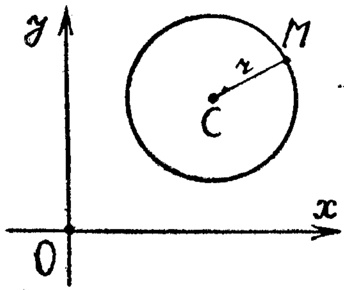
ამრიგად

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r. \tag{3}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს მოცემული წრეწირის ყველა წერტილის კოორდინატები, და მხოლოდ ისინი; მაშასადამე, ეს განტოლება არის წრეწირის განტოლება. (3) განტოლება რომ კვადრატში ავახარისხოთ, მივიღებთ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{4}$$

ცხადია, ამ განტოლებასაც დააკმაყოფილებს მოცემული წრეწირის ყველა წერტილის კოორდინატები, მაგრამ ჯერ ცნობილი არ არის მხოლოდ ისინი დააკმაყოფილებს თუ არა. იმისათვის, რომ ეს უკანასკნელი საკითხი გამოვარკვიოთ, ასე მოვიქცეთ: (4) ტოლობის ორივე მხრიდან ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი. გვექნება



ნახ. 93.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\pm r.$$

თუ ამ ტოლობაში ზედა ნიშანს (ე. ი. $+$ ნიშანს) ავიღებთ, მივიღებთ (3) განტოლებას, ე. ი. წრეწირის განტოლებას. თუ ქვედა ნიშანს ავიღებთ, მაშინ გვექნება ახალი განტოლება

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=-r.$$

რადგან r დადებითია, ამიტომ $-r$ უარყოფითია. ამრიგად ამ განტოლებას არ დააკმაყოფილებს x-ისა და y-ის ნამდვილი მნიშვნელობანი (და არც წარმოსახვითი); მაშასადამე, ამ უკანასკნელი განტოლებით არ განისაზღვრება წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, ე. ი. (3) განტოლების კვადრატში ახარისხებით წრეწირის წერტილებს არ დაემატება სხვა რაიმე წერტილები. ამრიგად (3) და (4) განტოლებები ეკვივალენტურია, ერთსა და იმავე წირს (წრეწირს) განსაზღვრავენ. მაშასადამე, (4) განტოლება არის წრეწირის განტოლება. თუ წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, მაშინ $a=b=0$ და (4) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x^2+y^2=r^2. \tag{5}$$

ასეთია კოორდინატთა სათავის გარშემო შემოხაზული წრეწირის განტოლება. (4) განტოლება შეიძლება ასე გადავწეროთ (ფრჩხილების გახსნის შემდეგ)

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

აქედან ჩანს, რომ წრეწირის განტოლება მეორე რიგისაა. ამრიგად, წრეწირი არის მეორე რიგის წირი. იმისათვის, რომ (1) განტოლება წრეწირს გამოსახავდეს, საჭიროა იგი იყოს უკანასკნელი განტოლების ეკვივალენტური. ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია ამ ორი განტოლების კოეფიციენტები იყოს პროპორციული. ეს მოგვცემს

$$A=C,\quad B=0. \tag{6}$$

ამრიგად (1) განტოლებას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0. \tag{7}$$

თუ ამ განტოლებას გავყოფთ A-ზე და შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნებს

$$\frac{D}{A}=-2a,\quad \frac{E}{A}=-2b,\quad \frac{F}{A}=a^2+b^2\pm r^2,$$

მაშინ (7) განტოლება მიიყვანება შემდეგ განტოლებაზე

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\pm r^2.$$

ზედა ნიშანი გვაძლევს (4) განტოლებას, ე. ი. წრეწირის განტოლებას. ქვედა ნიშნის შემთხვევაში კი გვექნება

$$(x-a)^2+(y-b)^2=-r^2. \tag{8}$$

ეს განტოლება შეიძლება ასე დავწეროთ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(ir)^2.$$

როგორც ჩანს, ეს განტოლება განსხვავდება წრეწირის (4) განტოლებისაგან იმით, რომ r შეცვლილია ir-ით. ამიტომ ამ განტოლებით განსაზღვრულ წირს ეწოდება *წარმოსახვითრადიუსიანი წრეწირი*. ადვილი შესამჩნევია, რომ (8) განტოლებას აკმაყოფილებს მხოლოდ წარმოსახვითი წერტილები; მაშასადამე, წარმოსახვითრადიუსიანი წრეწირი წარმოსახვითი წირია.

§ 3. ელიფსი

1. ელიფსის განმარტება და კანონიკური განტოლება. *ელიფსი ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტ-*

რიულ ადგილს, რომელთაგან იმავე სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების ჯამი მუდმივია. მოცემულ წერტილებს ეწოდება ელიფსის ფოკუსები. ფოკუსებიდან ელიფსის რაიმე წერტილებამდე მანძილებს კი ელიფსის ფოკალური რადიუსები.

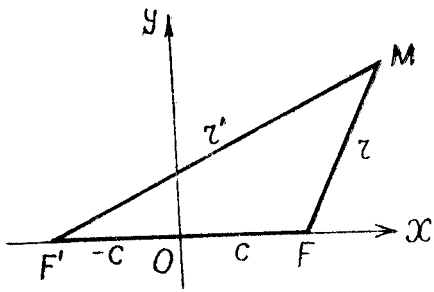
ელიფსის ფოკუსები ავიღოთ x ღერძზე სიმეტრიულად კოორდინატთა სათავის მიმართ და ამ პირობებში შევადგინოთ ელიფსის განტოლება. ელიფსის ფოკუსები აღვნიშნოთ F და F'-ით. ელიფსის ფოკალური რადიუსები კი r და r'-ით. ელიფსის მიმდინარე წერტილი იყოს $M=(x, y)$. თუ $FF'=2c$, მაშინ ფოკუსები განისაზღვრება შემდეგი კოორდინატებით (ნახ. 94).

$$F=(c,\ 0),\ F'=(-c,\ 0).$$

თანახმად განმარტებისა,

$$r+r'=2a, \tag{9}$$

ადაც a მუდმივია. მეორე მხრივ,



ნახ. 94.

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \\ r'&=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

შევიტანოთ ფოკალური რადიუსების ეს მნიშვნელობები (9) ტოლობაში, მივიღებთ ელიფსის შემდეგ განტოლებას

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \tag{11}$$

უშუალო გადაქმნებით შეიძლება ამ განტოლების გამარტივება (ირაციონალობის მოსპობა). მაგრამ უმჯობესია ასე მოვიქცეთ: (10)

ტოლობები ავახარისხოთ კვადრატში და ერთი გამოვაკლოთ მეორეს, მივიღებთ

$$r^2-r'^2=-4cx,$$

ანუ

$$(r+r')(r-r')=-4cx.$$

თანახმად (9) პირობისა, უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება

$$2a(r-r')=-4cx.$$

აქედან

$$r-r'=-2\frac{c}{a}x.$$

ეს ტოლობა (9) ტოლობასთან ერთად განსაზღვრავს r და r' სიდიდეებს (რაც ამ ორი ტოლობის შეკრება-გამოკლებით მიიღება):

$$r=a-\frac{c}{a}x,$$
$$r'=a+\frac{c}{a}x. \qquad (12)$$

ეს ფორმულები ეკვივალენტურია (9) ტოლობისა, რადგან მიღებულია (9) ტოლობის გამოყენებით და, პირუკუ, (9) ტოლობა მიიღება ამ ფორმულებიდან (შეკრებით). ახლა ჩავსვათ r-ის მნიშვნელობა (10) ფორმულებიდან (12)-ში. გვექნება

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

აქედან კვადრატში ახარისხებით (რაც არ შეცვლის ელიფსის წერტილებს ისევე, როგორც წრეწირის შემთხვევაში) მივიღებთ

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2.$$

ამ განტოლების მცირე გარდაქმნით მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$FF'<r+r',$$

ანუ

$$2c<2a.$$

აქედან

$$c<a.$$

მაშასადამე,

$$a^2-c^2>0.$$

ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$a^2-c^2=b^2. \tag{13}$$

ამ აღნიშვნის შედეგად უკანასკნელი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{14}$$

ამ განტოლებას დააკმაყოფილებს ელიფსის ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი; მაშასადამე, ეს იქნება ელიფსის განტოლება. ეს განტოლება შედგენილია ელიფსის ფოკუსების სპეციალური მდებარეობისათვის· საზოგადოდ კი ელიფსის განტოლებას უფრო რთული სახე აქვს, ამიტომ ამ განტოლებას ეწოდება ელიფსის კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. პირდაპირ ჩანს, რომ ელიფსის განტოლება არის მეორე რიგისა, ე. ი. ელიფსი მეორე რიგის წირია.

2. ელიფსის ნახაზის შედგენა (აგება). ელიფსის ფორმაზე შეგვიძლია წარმოდგენა ვიქონიოთ თვით განმარტების მიხედვით. ამისათვის $2a$ სიგრძის მქონე ძაფის ბოლო წერტილები დავამაგროთ F და F' წერტილებში ისე, რომ FF' ნაკლები იყოს $2a$-ზე. ძაფი არ იქნება მოჭიმული. ძაფი ფანქრის წვერით მოვჭიმოთ სიბრტყეზე და ვამოძრაოთ ფანქარი ისე, რომ ძაფი მოჭიმული რჩებოდეს. ფანქრის წვერი ასეთი მოძრაობით აღწერს ელიფსს (ნახ. 95). ელიფსის ნახაზი, კოორდინატთა სისტემის მიმართ, შეგვიძლია ავაგოთ კანონიკური განტოლების მიხედვითაც; ამისათვის ამოვხსნათ y ელიფსის (14) განტოლებიდან. მივიღებთ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ ელიფსის (14) განტოლება სახეს არ იცვლის, თუ x ან y-ს ნიშანს შევუცვლით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ელიფსი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ x-ის მნიშვნელობები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

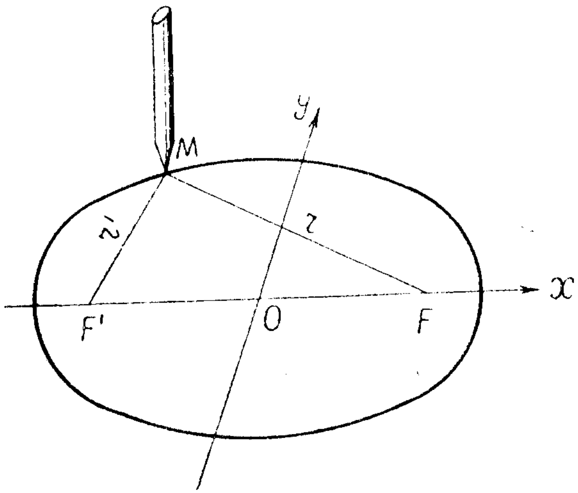
y-ის შესაბამი მნიშვნელობები კი—ასეთ პირობებს:

$$b \geqq y \geqq -b.$$

ამრიგად, ელიფსის უკიდურესი წერტილები x და y ღერძებზე იქნება შემდეგი წერტილები:

$$A=(a,\ 0),\quad A'=(-a,\ 0),$$
$$B=(0,\ b),\quad B'=(0,\ -b).$$

ამ წერტილებს ეწოდება ელიფსის წვეროები. როცა x იცვლება ნულიდან a-მდე, მაშინ წირის წერტილი B წერტილიდან



ნახ. 95.

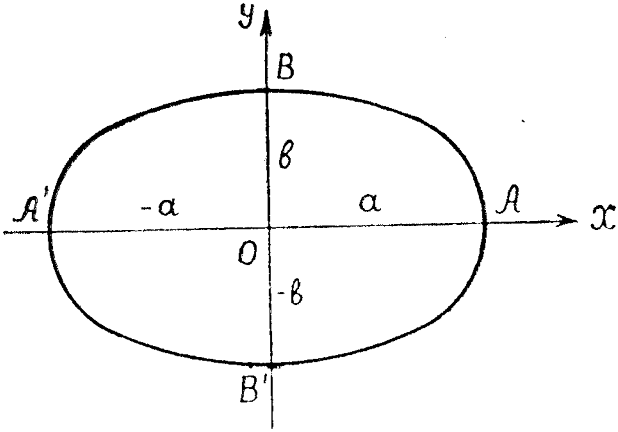
თანდათანობით ეშვება A წერტილამდე ისე, რომ წერტილის მიერ აღწერილი ძირის ნაწილი (ელიფსის რკალი) მოთავსებულია A და B წერტილების შემაერთებელი წრფის ზემოთ. მართლაც, აღნიშნული წრფის განტოლება იქნება

$$y=\frac{b}{a}(a-x).$$

ამ განტოლებით განსაზღვრული წრფის განსახილავი წერტილის ორდინატა კი ნაკლებია ელიფსის განტოლებით განსაზღვრულ ორდინატაზე

$$\sqrt{a^2-x^2}>a-x.$$

ამრიგად, ელიფსის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის პირველ კუთხეში, ამოზნექილი იქნება ზევით. ასეთივე ნაწილი იქნება მეორე კუთხეში. მათი სიმეტრიული ნაწილები კი იქნება x ღერძის დაბლა. ამრიგად, ელიფსს დაახლოებით ექნება (96) ნახაზზე წარმოდგენილი სახე.



ნახ. 96.

3. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი. როგორც აღნიშნული გვქონდა, (14) განტოლებით განსაზღვრული ელიფსისათვის კოორდინატთა ღერძები სიმეტრიის ღერძებია. ამ ღერძებზე AA' და BB' მონაკვეთებს ეწოდება ელიფსის ღერძები; AA'-ს ეწოდება ელიფსის დიდი ღერძი, ხოლო BB'-ს კი ელიფსის მცირე ღერძი. ცხადია, რომ

$$AA'=2a, \quad BB'=2b.$$

ამის გამო a და b მონაკვეთებს ეწოდება ელიფსის ნ ა ხ ე ვ ა რ-ღ ე რ ძ ე ბ ი. ფოკუსებს შორის მანძილს, ე. ი. FF' მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება ს ა ფ ო კ უ ს ო მ ა ნ ძ ი ლ ი. ცხადია, რომ

$$FF'=2c.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $a=b$, მაშინ (14) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x^2+y^2=a^2.$$

ეს კი, როგორც ვიცით, a-რადიუსიანი წრეწირის განტოლებაა. ამ შემთხვევაში, (13) ფორმულის თანახმად, $c=0$, ე. ი. ფოკუსები

ერთიმეორეს ემთხვევა კოორდინატთა სათავეში. ამრიგად, რამდენადაც a და b ახლოს იქნება ერთიმეორესთან, ე. ი. რამდენადაც $\frac{b}{a}$ ახლოს იქნება 1-თან, იმდენად ელიფსი ახლოს იქნება წრეწირთან და, პირუკუ. ეს შეფარდება (13) ფორმულის თანახმად ასე წარმოგვიდგება

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}.$$

ამრიგად $\frac{c}{a}$ განსაზღვრავს $\frac{b}{a}$ შეფარდებას; მაშასადამე, იგი განსაზღვრავს ელიფსის სიახლოვეს წრეწირთან. $\frac{c}{a}$ შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{FF'}{AA'},$$

ე. ი. $\frac{c}{a}$ არის საფოკუსო მანძილის (ფოკუსებს შორის მანძილის) შეფარდება დიდ ღერძთან. მას ეწოდება ელიფსის ექსცენტრისიტეტი. აღინიშნება e-თი. ამრიგად, ელიფსის ექსცენტრისიტეტი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$e=\frac{c}{a}. \tag{15}$$

ამ აღნიშვნის თანახმად, (12) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} r&=a-ex,\\ r'&=a+ex. \end{aligned} \tag{15^1}$$

ცხადია, რომ e დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობას $0\leqslant e<1$. როცა $e=0$, მაშინ $c=0$, ე. ი. $a=b$. მივიღებთ წრეწირს. ამრიგად წრეწირის ექსცენტრისიტეტი არის ნული. რაც უფრო მცირეა ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, მით უფრო ახლოსაა ელიფსი წრეწირთან (ნაკლებად განსხვავდება წრეწირისაგან). მაგალითად, დედამიწის ბრუნვა მზის ირგვლივ ხდება ისეთ ელიფსზე, რომლის ექსცენტრისიტეტი დაახლოებით უდრის $\frac{1}{149}$-ს. ამრიგად დედამიწის ორბიტა (მზის გარშემო მოქცევის გზა) წრეწირისაგან მცირედ განსხ-

ვავებული ელიფსია. ამიტომ კეპლერამდე[1] ასტრონომები (თვით კოპერნიკიც[2]) დედამიწის ორბიტას წრეწირად თვლიდნენ.

4. ელიფსის პარამეტრული განტოლება. განვიხილოთ t პარამეტრის შემდეგი ფუნქციები:

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos t, \\
y &= b\sin t.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ x-ისა და y-ის ცვალების შუალედებია შესაბამად $(-a,\ a)$ და $(-b,\ b)$, ე. ი. ისეთი შუალედები აქვთ, როგორიც ელიფსის წერტილის კოორდინატებს ჰქონდათ. მეორე მხრივ (16) ტოლობებიდან, თუ პირველ ტოლობას გავყოფთ a-ზე, მეორე ტოლობას კი b-ზე, შედეგად მიღებულ ტოლობებს ავახარისხებთ კვადრატში და შევკრებთ, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{17}$$

ამრიგად (16) განტოლებანი განსაზღვრავენ ელიფსს. ამიტომ ამ სისტემას ეწოდება ე ლ ი ფ ს ი ს პ ა რ ა მ ე ტ რ უ ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა, სადაც t არის მიმდინარე პარამეტრი.

5. ელიფსი როგორც წრეწირის მართკუთხა გეგმილი. აქ ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ წრეწირის მართკუთხა გეგმილი სიბრტყეზე არის ელიფსი. განვიხილოთ a-რადიუსიანი წრეწირი და მართობულად დავაგეგმილოთ იგი π სიბრტყეზე. რადგან π სიბრტყის პარალელური გადაადგილების დროს მასზე წრეწირის გეგმილი არ შეიცვლება, ამიტომ π სიბრტყე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წრეწირის ცენტრზე გამავალი. α-თი აღვნიშნოთ ის კუთხე, რომელსაც წრეწირის სიბრტყე ადგენს π სიბრტყესთან. წრეწირის სიბრტყეზე ავიღოთ Oxy კოორდინატთა სისტემა; π სიბრტყეზე კი $Ox'y'$ სისტემა, სადაც O წრეწირის ცენტრია, $Ox=Ox'$ ღერძი ემთხვევა წრეწირის სიბრტყისა და π სიბრტყის თანაკვეთის წრფეს (ნახ. 97). ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$
\begin{aligned}
x &= x_1, \\
y &= \frac{y_1}{\cos\alpha}.
\end{aligned}
$$

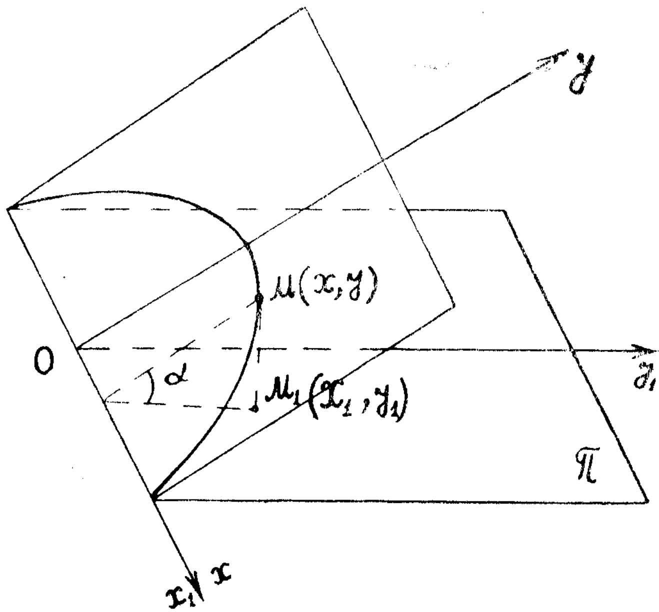
[1] კეპლერი—გამოჩენილი გერმანელი ასტრონომი (1571—1630).

[2] კოპერნიკი—განთქმული პოლონელი ასტრონომი (1473—1543).

რადგან $M(x, y)$ სათავის გარშემო შემოხაზული a-რადიუსიანი წრეწირის წერტილია, ამიტომ იგი აკმაყოფილებს წრეწირის განტოლებას ე. ი.

$$x^2+y^2=a^2.$$

ჩავსვათ ამ განტოლებაში x, y-ის მნიშვნელობანი. მივიღებთ



ნახ. 97.

$$x_1^2+\frac{y_1^2}{\cos^2\alpha}=a^2.$$

აქედან

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

სადაც

$$b=a\cos\alpha. \tag{17}$$

ამრიგად წრეწირის ნებისმიერი M წერტილის მართკუთხა გეგმილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ ელიფსის განტოლებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ წრეწირის მართკუთხა გეგმილი სიბრტყეზე არის ელიფსი. აქ მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს ადვილად გამოვთვალოთ ელიფსით შემოსაზღვრული ბრტყელი ნაკვთის ფართო-

ბი. ელიფსის ფართობი აღვნიშნოთ s-ით, წრეწირის ფართობი კი S-ით. რადგან ელიფსი წრეწირის გეგმილია, ამიტომ ელიფსით შემოსაზღვრული ბრტყელი ნაკვთის (ელიფსური ფირფიტა) ფართობი ტოლი იქნება წრეწირით შემოსაზღვრული ბრტყელი ნაკვთის (წრე) ფართობისა და იმ კუთხის კოსინუსის ნამრავლისა, რომელსაც წრეწირის სიბრტყე ადგენს π სიბრტყესთან, ე. ი.

$$s=S\cos\alpha.$$

ჩავსვათ აქ $\cos\alpha$-ს მნიშვნელობა (17) ფორმულიდან. მივიღებთ

$$s=S\frac{b}{a}.$$

ახლა ვისარგებლოთ a-რადიუსიანი წრის ფართობის ცნობილი ფორმულით

$$S=\pi a^2.$$

S-ის მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს ელიფსის ფართობისათვის შემდეგ ფორმულას

$$s=\pi ab. \tag{18}$$

§ 4. ჰიპერბოლა

1. ჰიპერბოლის განმარტება და კანონიკური განტოლება. ჰიპერბოლა განიმარტება ელიფსის ანალოგიურად, სახელდობრ: ჰიპერბოლა ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთაგან იმავე სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების სხვაობა მუდმივია. მოცემულ წერტილებს ეწოდება ჰიპერბოლის ფოკუსები. ფოკუსებიდან ჰიპერბოლის რაიმე წერტილამდე მანძილებს კი ჰიპერბოლის ფოკალური რადიუსები.

ჰიპერბოლის ფოკუსები ავიღოთ x ღერძზე სიმეტრიულად კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ და ამ პირობებში შევადგინოთ ჰიპერბოლის განტოლება. ჰიპერბოლის ფოკუსები აღვნიშნოთ F და F' ასოებით. დავუშვათ, რომ $FF'=2c$, მაშინ F და F' წერტილები (როგორც სიმეტრიული წერტილები სათავის მიმართ) ასე წარმოგვიდგება:

$$F=(c,\ 0),$$
$$F'=(-c,\ 0).$$

ჰიპერბოლის მიმდინარე წერტილი აღვნიშნოთ M-ით. მისი კოორდინატები იყოს x, y, ე. ი.

$$M=(x, y).$$

ფოკუსებიდან M წერტილამდე მანძილები, ე. ი. ფოკალური რადიუსები შესაბამად აღვნიშნოთ r და r'-ით. თანახმად განმარტებისა, გვექნება

$$r'-r=2a, \tag{19}$$

სადაც a მუდმივია.

მეორე მხრივ, ნახაზიდან (ნახ. 98)

$$\begin{aligned} r&=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \\ r'&=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (19) ტოლობაში. მივიღებთ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{21}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს ჰიპერბოლის ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი. ამიტომ ეს განტოლება იქნება ჰიპერბოლის განტოლება. ამ განტოლების გამარტივება (ირაციონალობის მოსპობა) შეიძლება უშუალოდაც. მაგრამ, უმჯობესია ისევე მოვიქცეთ, როგორც ელიფსის განხილვის დროს. (20) ტოლობები ავახარისხოთ კვადრატში და მიღებული შედეგები გამოვაკლოთ ერთიმეორეს. გვექნება

$$r'^2-r^2=4cx,$$

ანუ

$$(r'-r)(r'+r)=4cx.$$

აქედან (19) ტოლობის თანახმად მივიღებთ

$$2a\,(r'+r)=4cx.$$

ამრიგად

$$r'+r=2\frac{c}{a}x.$$

ეს ტოლობა (19) ტოლობასთან ერთად (შეკრება-გამოკლებით) ფოკალური რადიუსებისათვის მოგვცემს შემდეგ ფორმულებს

$$\begin{aligned} r&=-a+\frac{c}{a}x, \\ r'&=a+\frac{c}{a}x. \end{aligned} \tag{22}$$

ჩავსვათ ამ უკანასკნელ ფორმულებში r-ის მნიშვნელობა (20) ფორმულებიდან. გვექნება

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-a+\frac{c}{a}x.$$

ამ ტოლობის კვადრატში ახარისხება და უბრალო გარდაქმნა მოგვცემს

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

98-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$FF'>r'-r,$$

ე. ი.

$$2c>2a,$$

ანუ

$$c>a.$$

აქედან

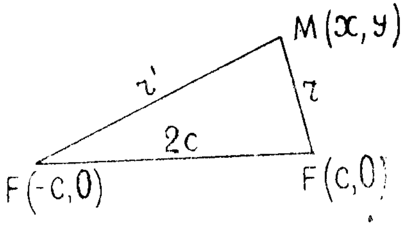
$$c^2-a^2>0.$$

შეგვიძლია შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნა

$$c^2-a^2=b^2. \tag{23}$$

ამ აღნიშვნის თანახმად, უკანასკნელი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{24}$$

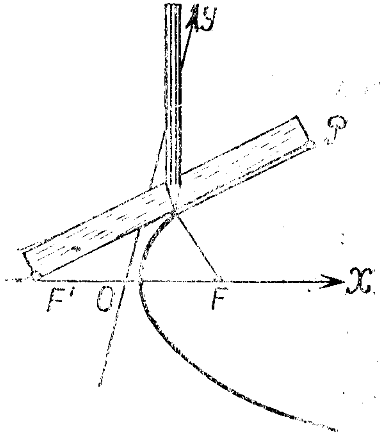


ნახ. 98.

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს ჰიპერბოლის ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი (ისე როგორც ელიფსის შემთხვევაში, აქაც ჩატარებული ოპერაციების დროს ჰიპერბოლის წერტილებს არ შეიძლება მიმატებოდა სხვა წერტილები), ე. ი. ეს არის ჰიპერბოლის განტოლება. რადგან ეს განტოლება მიღებულია ჰიპერბოლის ფოკუსების სპეციალური მდებარეობისათვის და მეტად მარტივი სახე აქვს (შედარებით მეორე რიგის ზოგად განტოლებასთან), ამიტომ მას ეწოდება ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ი ს კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა

2. ჰიპერბოლის ნახაზის შედგენა (აგება). ჰიპერბოლის ფორმაზე შეგვიძლია წარმოდგენა ვიქონიოთ თვით განმარტებიდან; ამი-

სათვის საკმაო სიგრძის ძაფის ბოლოები დავამაგროთ F წერტილში და ისეთი ღეროს ბოლო P წერტილში, რომელიც ბრუნავს F' წერტილის გარშემო. ძაფი მოვჭიმოთ ფანქრის წვერით ღეროს გასწვრივ. ღეროს F'-ის გარშემო ბრუნვის დროს მანძილებს F და F' წერტილებიდან M წერტილამდე (ფანქრის წვერამდე) დაემატება ან მოაკლდება ერთნაირი სიდიდეები; მაშასადამე, ამ მანძილებს შორის სხვაობა დარჩება მუდმივი, ე. ი. ფანქრის წვერი ზემოაღნიშნული მოძრაობის დროს აღწერს ჰიპერბოლას (ნახ. 99).



ნახ. 99.

როგორც ჩანს, ღეროს და ძაფის სიგრძეები შეზღუდული არ არის. ამიტომ წერტილის მოძრაობა ჰიპერბოლაზე შემოსაზღვრული არ არის. იგი შეიძლება უსასრულოდ შორდებოდეს F და F' წერტილებს. ჰიპერბოლის საკმაოდ დაშორებული ნაწილის ფორმაზე წარმოდგენას იძლევა თვით ჰიპერბოლის განტოლება. ამისათვის ამოვხსნათ y ჰიპერბოლის განტოლებიდან. გვექნება

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

აქედან ჩანს, რომ x-ის და y-ის ცვალება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$-\infty<x\leqslant-a \text{ და } a\leqslant x<\infty,$$

$$-\infty<y<\infty,$$

ე. ი. x გამოტოვებს $(-a, a)$ შუალედის შიგა წერტილებს. y კი გაივლის ნამდვილ რიცხვთა ყველა მნიშვნელობას. კერძოდ, როცა $x=\pm a$, მაშინ $y=0$. ამრიგად, წირი გადაკვეთს x ღერძს შემდეგ წერტილებში:

$$A(a, 0), \quad A'=(-a, 0).$$

ეს წერტილები ჰიპერბოლის უახლოესი წერტილებია y ღერძიდან. ამიტომ მათ ეწოდებათ ჰიპერბოლის წვეროები. ჰიპერბოლა $x=a$ და $x=-a$ წრფეებით განსაზღვრული ზოლის გარეთ იქნება მო-

თავსებული მთლიანად. იმისათვის, რომ წარმოდგენა ვიქონიოთ ჰიპერბოლის ფორმაზე საკმაოდ დაშორებულ ნაწილში, საჭიროა ჰიპერბოლის განტოლებაში x-ს მივანიჭოთ საკმაოდ დიდი მნიშვნელობა. შესაბამი y-ის მნიშვნელობა, განსაზღვრული ჰიპერბოლის განტოლებიდან, ე. ი.

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

ასე გადავწეროთ

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

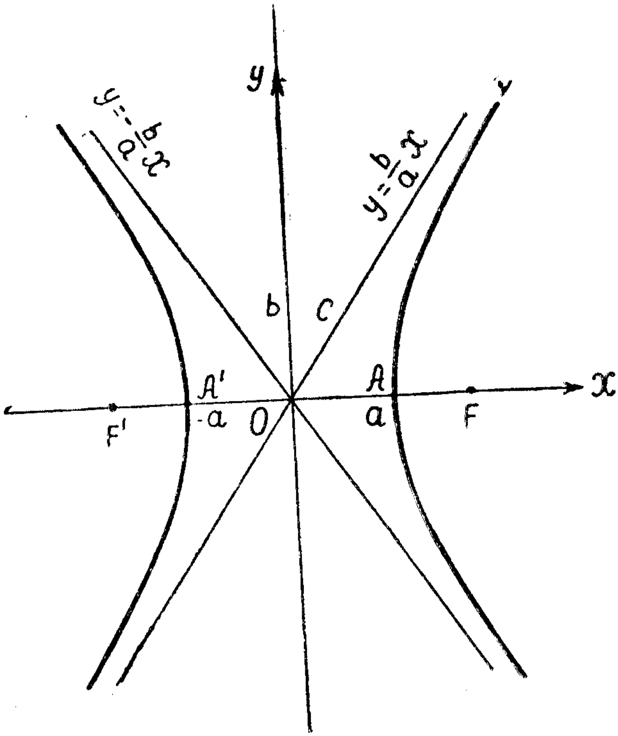
როცა x საკმაოდ დიდია, მაშინ $\frac{a^2}{x^2}$ საკმაოდ მცირე რიცხვი იქნება, ე. ი. რადიკალის ქვეშ მოთავსებული გამოსახულება უმნიშვნელო რიცხვით განსხვავდება ერთისაგან. ამრიგად, სიბრტყის საკმაოდ შორეულ ნაწილში ჰიპერბოლის განტოლება უმნიშვნელოდ განსხვავდება შემდეგი განტოლებიდან

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{25}$$

ეს განტოლება, ზედა და ქვედა ნიშნების შესაბამად, განსაზღვრავს ორ წრფეს, რომელნიც გადიან კოორდინატთა სათავეზე და რომლებსაც უსასრულოდ უახლოვდება ჰიპერბოლის მიმდინარე წერტილი, როცა იგი შორდება ფოკუსებს. ამ წრფეებს ეწოდებათ ჰიპერბოლის ა ს ი მ პ ტ ო ტ ე ბ ი. რადგან რადიკალის ქვეშ მოთავსებული გამოსახულება ერთზე ნაკლებია, ამიტომ ჰიპერბოლის წერტილის ორდინატები აბსოლუტური სიდიდით უფრო ნაკლებია, ვიდრე (25)-ით განსაზღვრული წრფის ორდინატები. ეს საშუალებას იძლევა დავხაზოთ ჰიპერბოლა. მისი ფორმა ფოკუსებთან, საკმაოდ ახლო ნაწილში, 99-ე ნახაზის მიხედვით უნდა წარმოვიდგინოთ და შემდეგ კი ვუახლოოთ (25) განტოლებით განსაზღვრულ წრფეებს, რომლებსაც წინასწარ ავაგებთ ან წარმოვიდგენთ დახაზულად. ნახაზის აგების დროს ის ფაქტიც უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ჰიპერბოლა სიმეტრიულია ღერძების მიმართ (x-ის და y-ის ნიშნების შეცვლა ცალ-ცალკე არ ცვლის განტოლებას). ყველა ზემოაღნიშნულის შედეგად ჰიპერბოლის ნახაზი კოორდინატთა სისტემის მიმართ შემდეგნაირად წარმოგვიდგება (ნახ. 100).

ჰიპერბოლის განტოლებაში შემავალ a-სა და b-ს ეწოდება

ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ხოლო შეფარდებას $\frac{c}{a}$ ეწოდება ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი. იგი აღინიშნება e-თი. ამ შემთხ-



ნახ. 100.

ვევაში, ელიფსის ექსცენტრისიტეტისაგან განსხვავებით, $e>1$ (რადგან $c>a$). ამ აღნიშვნის თანახმად (22) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$r=-a+ex,$$
$$r'=a+ex. \tag{22'}$$

§ 5. პარაბოლა

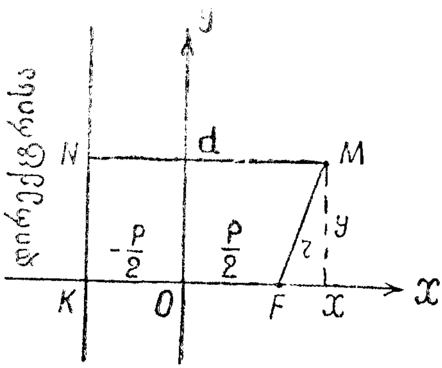
1. პარაბოლის განმარტება და კანონიკური განტოლება. პარაბოლა ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთაგან მანძილები, იმავე სიბრტყის მოცემულ წერტილამდე და მოცემულ წრფემდე ტოლია. მოცემულ წერტილს ეწოდება პარაბოლის ფოკუსი, მოცემულ წრფეს კი პარაბოლის დი-

რექტრისა. პარაბოლის წერტილიდან ფოკუსამდე მანძილს ეწოდება პარაბოლის ფოკალური რადიუსი. პარაბოლის ფოკუსი ავიღოთ x ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან მარჯვნივ. პარაბოლის დირექტრისა ავიღოთ y ღერძის პარალელურად მარცხნივ სათავიდან დაშორებული ისეთივე მანძილით, როგორითაც დაშორებულია ფოკუსი. ფოკუსიდან დირექტრისამდე მანძილი აღვნიშნოთ p-თი, მაშინ პარაბოლის ფოკუსი, რომელსაც F-ით აღვნიშნავთ, ასე წარმოგვიდგება

$$F=\left(\frac{p}{2},\ 0\right).$$

პარაბოლის მიმდინარე წერტილი აღვნიშნოთ M-ით. მისი კოორდინატები იყოს x, y, ე. ი.

$$M=(x,\ y).$$



ნახ. 101.

ამ პირობებში პარაბოლის ფოკალური რადიუსი ასე წარმოგვიდგება (ნახ. 101)

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}. \tag{26}$$

ნახაზიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მანძილი წერტილიდან დირექტრისამდე, რომელსაც d-თი აღვნიშნავთ, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$d=x+\frac{p}{2}. \tag{27}$$

პარაბოლის განმარტების თანახმად

$$r=d. \tag{28}$$

თუ ჩავსვამთ აქ r-ისა და d-ს მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

რადგან r და d დადებითი რიცხვებია, ამიტომ ამ ტოლობის კვადრატში ახარისხებით წერტილები არ დაემატება პარაბოლას. გვექნება

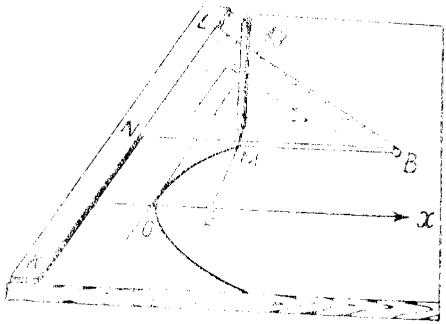
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

აქედან

$$y^2=2px. \qquad (29)$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს პარაბოლის ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი. მას *ეწოდება პარაბოლის კანონიკური განტოლება*. p-ს *ეწოდება პარაბოლის პარამეტრი*.

2. პარაბოლის ნახაზის შედგენა (აგება). პარაბოლის ფორმაზე შეგვიძლია წარმოდგენა ვიქონიოთ თვით განმარტებიდან. ამისათვის ავიღოთ მართკუთხა ABC სამკუთხედი, სადაც A მართი კუთხეა. AC კათეტი მოვათავსოთ პარაბოლის დირექტრისაზე, AB კათეტი კი მივმართოთ x ღერძის დადებითი მიმართულებით. ავიღოთ AB კათეტის სიგრძის მქონე ძაფი და მისი ბოლოები დავამაგროთ ფოკუსში და B წერტილში. შემდეგ ფანქრის წვერით მოვჭიმოთ ძაფი AB კათეტზე. გავასრიალოთ სამკუთხედი AC გვერდით დირექტრისაზე ისე, რომ ფანქრის წვერით ყოველთვის მოჭიმული რჩებოდეს ძაფი კათეტზე. სამკუთხედის სრიალის დროს, ცხადია, ფანქრის წვერიც გადაადგილდება და აღწერს პარაბოლას, რადგან ყოველთვის შესრულდება პირობა $NM=FM$, ანუ $d=r$. მას ექნება 102-ე ნახაზზე მოცემული სახე. პარაბოლის ფორმაზე შეგვიძლია წარმოდგენა ვიქონიოთ კიდევ თვით განტოლებიდანაც. მართლაც, ამოვხსნათ პარაბოლის განტოლება y-ის მიმართ. გვექნება

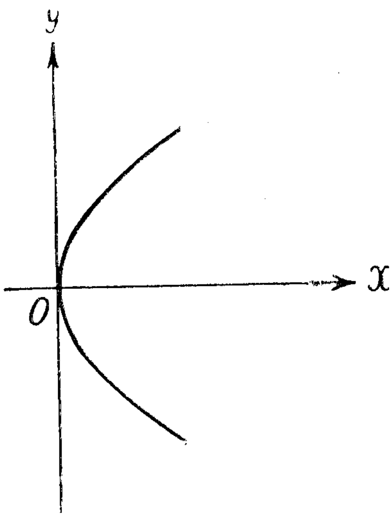


ნახ. 102.

$$y=\pm\sqrt{2px}=\pm\sqrt{2p}\cdot\sqrt{x}\,.$$

აქედან ჩანს, რომ x ვერ მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობებს. იგი იცვლება 0-დან ∞-მდე. როცა $x=0$, მაშინ $y=0$, ე. ი. პარაბოლა გადის კოორდინატთა სათავეზე. ამრიგად პარაბოლა მოთავსებულია y ღერძის მარჯვნივ სიმეტრიულად x ღერძის მიმართ (y ღებულობს სიმეტრიულ მნიშვნელობებს). გარდა ამისა, რადგან $\sqrt{x}$ საგრძნობლად მეტია x-ზე, როცა x საკმაოდ მცირეა, ხოლო პირუკუ, $\sqrt{x}$ საგრძნობლად ნაკლებია x-ზე, როცა x იზრ-

დება, ამიტომ სათავის მახლობლად პარაბოლის წერტილების ორდინატები ჭარბობს აბსცისის მნიშვნელობებს, ე. ი. წირი ამობურცულია y ღერძისაკენ. შემდგომ კი წირი უფრო სწრაფად სცილდება y ღერძს, ვიდრე x ღერძს. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ წირი არ შეიძლება უსასრულოდ უახლოვდებოდეს რაიმე წრფეს. მართლაც, წრფე განისაზღვრება წრფივი ფუნქციით



ნახ. 103.

$$y = kx + b,$$

პარაბოლა კი ნახევარხარისხიანი ფუნქციით

$$y = \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ორი ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობა უსასრულოდ იზრდება x-ის ზრდასთან ერთად. ყველა ზემოაღნიშნულის თანახმად, პარაბოლას კოორდინატთა სისტემის მიმართ უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე (ნახ. 103).

§ 6. ელიფსისა და ჰიპერბოლის დირექტრისები

1. ელიფსის დირექტრისები. ელიფსის დირექტრისები ეწოდება შემდეგი განტოლებებით განსაზღვრულ წრფეებს:

$$x = \frac{a}{e}, \ x = -\frac{a}{e}. \tag{30}$$

ეს წრფეები y ღერძის პარალელურია და დაშორებულია მისგან $\frac{a}{e}$ მანძილით მარჯვნივ და მარცხნივ. რადგან $e < 1$, ამიტომ $\frac{a}{e} > a$. ამრიგად ელიფსის დირექტრისები ელიფსის გარეთაა მოთავსებული (ელიფსს არ კვეთს ნახ. 104).

გამოვთვალოთ ელიფსის M წერტილიდან მანძილი დირექტრისამდე. აღვნიშნოთ იგი d-თი. ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$d = OA - OP,$$

ე. ი.

$$d=\frac{a}{e}-x,$$

ანუ

$$d=\frac{a-ex}{e}. \tag{31}$$

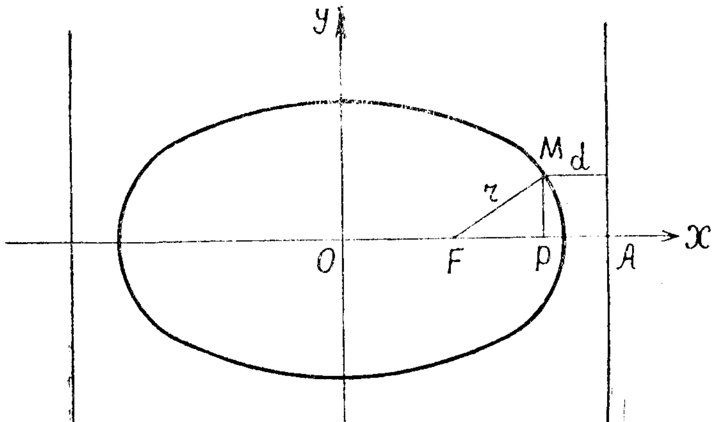
აქედან (15) ფორმულების თანახმად მივიღებთ

$$d=\frac{r}{e}$$

ან, რაც იგივეა,

$$r=ed. \tag{32}$$

დასკვნა. ელიფსის წერტილიდან ფოკუსამდე და დირექტრისამდე მანძილების შეფარდება მუდმივია (ერთი და იგივეა ელიფსის ყველა წერტილისათვის).



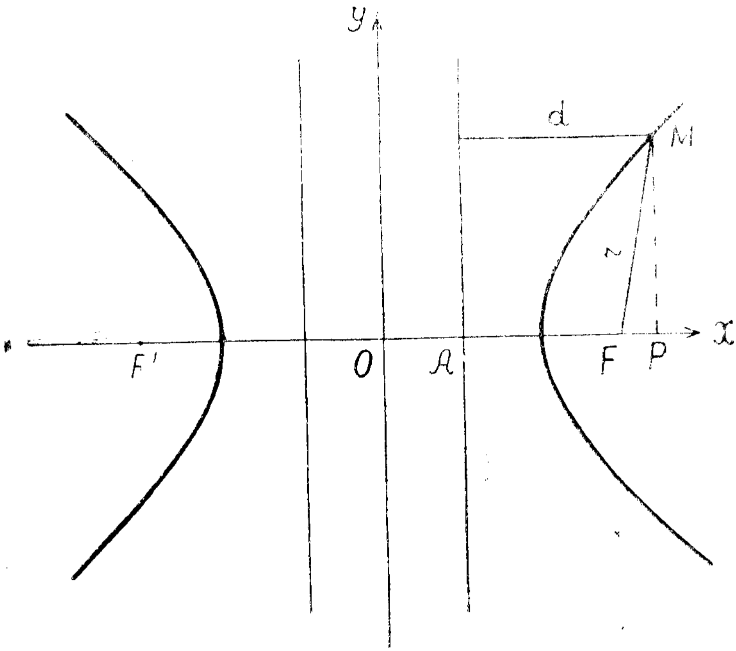
ნახ. 104.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ წირი, რომლის წერტილები (32) პირობას აკმაყოფილებს, არის ელიფსი. მართლაც, (32) და (31) ტოლობებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს (15) ფორმულების პირველი ტოლობა, რაც დამახასიათებელია ელიფსისათვის.

2. ჰიპერბოლის დირექტრისები. ჰიპერბოლის დირექტრისები ეწოდება შემდეგი განტოლებით განსაზღვრულ წრფეებს:

$$x=\frac{a}{e}, \quad x=-\frac{a}{e}. \tag{33}$$

ეს წრფეები პარალელურია y ღერძისა და დაშორებულია მისგან $\frac{a}{e}$ მანძილით მარჯვნივ და მარცხნივ შესაბამად. რადგან ჰიპერბოლისათვის $e>1$, ამიტომ $\frac{a}{e}<a$. მაშასადამე, დირექტრისები



ნახ. 105.

უფრო ახლოსაა y ღერძიდან, ვიდრე ჰიპერბოლის წვეროები, ე. ი. დირექტრისები ჰიპერბოლის გარეთაა (მათ არ გადაკვეთს ნახ. 105). გამოვთვალოთ მანძილი ჰიპერბოლის M წერტილიდან დირექტრისამდე. აღვნიშნოთ იგი d-თი. ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$d=OP-OA,$$

ე. ი.

$$d=x-\frac{a}{e},$$

ანუ

$$d=\frac{-a+ex}{e}. \tag{34}$$

აქედან (22) ფორმულების თანახმად მივიღებთ

$$d=\frac{r}{e}$$

ან, რაც იგივეა,

$$r=ed. \tag{35}$$

დასკვნა. ჰიპერბოლის M წერტილიდან ფოკუსამდე და დირექტრისამდე მანძილების შეფარდება მუდმივია (ერთი და იგივეა ჰიპერბოლის ყველა წერტილისათვის). ადვილი დასამტკიცებელია, რომ წირი, რომლის წერტილებიც აკმაყოფილებს (35) პირობას არის ჰიპერბოლა. მართლაც, (34) და (35) ტოლობები განსაზღვრავენ (22) ფორმულების პირველ ტოლობას, რაც დამახასიათებელია ჰიპერბოლისათვის.

ახლა, თუ გავიხსენებთ პარაბოლის დამახასიათებელ პირობას $r=d$, მაშინ სამივე ზემოთ განხილული მეორე რიგის წირი (ელიფსი, ჰიპერბოლა, პარაბოლა) შემდეგი პირობით იქნება განსაზღვრული

$$r=ed,$$

სადაც e მუდმივია (მას ეწოდება წირის ექსცენტრისიტეტი). ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა განისაზღვრება ამ მუდმივის შემდეგ მნიშვნელობათა შესაბამად:

1) როცა $e<1$, მაშინ წირი ელიფსია,
2) როცა $e>1$, მაშინ წირი ჰიპერბოლაა,
3) როცა $e=1$, მაშინ წირი პარაბოლაა.

§ 7. ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის განტოლებები პოლარულ კოორდინატებში

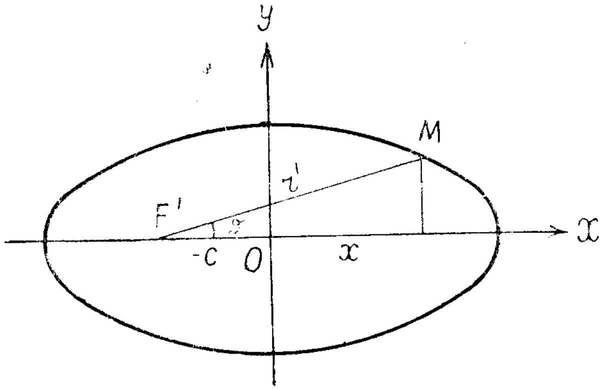
1. ელიფსის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. პოლარულ კოორდინატთა სათავე ავიღოთ F' წერტილში (ე. ი. მარცხნივ მდებარე ფოკუსში), მაშინ M წერტილის პოლარული კოორდინატები ასე წარმოგვიდგება:

$$\vartheta=(\overline{F'M},\ x),$$
$$\rho=|F'M'|=r'.$$

თანახმად (15^1) ფორმულებისა, გვექნება

$$\rho = a + ex.$$

მეორე მხრივ ნახაზიდან (ნახ. 106) უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება



ნახ. 106.

$$x + c = r' \cos \vartheta = \rho \sin \vartheta.$$

აქედან

$$x = \rho \cos \vartheta - c.$$

ჩავსვათ x-ის ეს მნიშვნელობა ρ-ს გამოსახულებაში. მივიღებთ

$$\rho = a + e(\rho \cos \vartheta - c).$$

აქედან

$$\rho = \frac{a - ec}{1 - e \cos \vartheta}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a - ec = a - \frac{c}{a} c = \frac{b^2}{a} = p.$$

ასეთი აღნიშვნის შედეგად ელიფსის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}. \tag{36}$$

2. **ჰიპერბოლის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში.** პოლარულ კოორდინატთა სათავე ავიღოთ F წერტილში (ე. ი. მარჯ-

ვენა ფოკუსში), მაშინ M წერტილის პოლარული კოორდინატები ასე წარმოგვიდგება:

$$\vartheta=(x,\ FM),$$

$$\rho=|FM|=r.$$

(22) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\rho=-a+ex.$$

მეორე მხრივ ნახაზიდან (ნახ. 107) უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება

$$OA-OF=FA=r\cos\vartheta,$$

ანუ

$$x-c=\rho\cos\vartheta.$$

აქედან

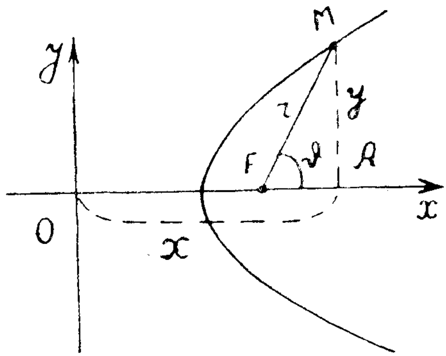
$$x=c+\rho\cos\vartheta.$$

ჩავსვათ x-ის ეს მნიშვნელობა ρ-ს გამოსახულებაში. გვექნება

$$\rho=-a+e(c+\rho\cos\vartheta).$$

აქედან

$$\rho=\frac{ec-a}{1-e\cos\vartheta}.$$



ნახ. 107.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$ec-a=\frac{c}{a}\cdot c-a=\frac{b^2}{a}=p.$$

ასეთი აღნიშვნის შედეგად ჰიპერბოლის უკანასკნელი განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\vartheta}. \qquad (37)$$

8. პარაბოლის პოლარული განტოლება. პოლარული კოორდინატების სათავე ავიღოთ პარაბოლის ფოკუსში. მაშინ პარაბოლის M წერტილის პოლარული კოორდინატები ასე წარმოგვიდგება:

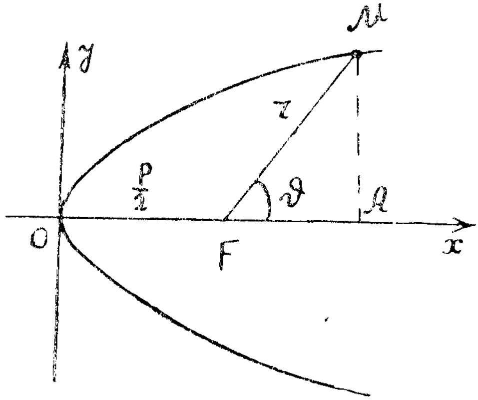
$$\vartheta=(FM,\ x),$$

$$\rho=|FM|=r=d.$$

(37) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\rho=x+\frac{p}{2}.$$

მეორე მხრივ ნახაზიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება (ნახ. 108).



ნახ. 108.

$$OA-OF=FA=r\cos\vartheta,$$

ანუ

$$x-\frac{p}{2}=\rho\cos\vartheta.$$

აქედან

$$x=\frac{p}{2}+\rho\cos\vartheta.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა ρ-ს გამოსახულებაში. გვექნება

$$\rho=\frac{p}{2}+\rho\cos\vartheta+\frac{p}{2}=p+\rho\cos\vartheta.$$

აქედან მივიღებთ პარაბოლის პოლარულ განტოლებას შემდეგი სახით

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\vartheta}. \tag{38}$$

თუ შევადარებთ (36), (37) და (38) განტოლებებს შევამჩნევთ, **რომ** ელიფსს, ჰიპერბოლას და პარაბოლას გარეგნულად ერთნაირი პოლარული განტოლება აქვს. ეს არის შემდეგი განტოლება

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\vartheta},$$

სადაც e წირის ექსცენტრისიტეტია, ხოლო p კი რაიმე მუდმივი რიცხვი (მას ეწოდება წირის პარამეტრი). e მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობათა შესაბამად უკანასკნელი განტოლება განსაზღვრავს სამივე წირს, სახელდობრ:

1) როცა $e<1$, მაშინ წირი ელიფსია,

2) როცა $e>1$, მაშინ წირი ჰიპერბოლაა,

3) როცა $e=1$, მაშინ წირი პარაბოლაა.

§ 8. მეორე რიგის წირის ძირითადი სახეები

წინა პარაგრაფებში გავეცანით მეორე რიგის წირის სამ ძირითად სახეს: ელიფსს, ჰიპერბოლას და პარაბოლას. ახლა ბუნებრივად იბმის კითხვა—კიდევ რა სახისა შეიძლება იყოს მეორე რიგის წირი. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად გავამარტივოთ წირის (1) განტოლება კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის საშუალებით. ჯერ განვიხილოთ სისტემის მობრუნება სათავის გარშემო α კუთხეზე. როგორც ცნობილია, შესაბამი გარდაქმნის ფორმულები იქნება (იხ. IV თავის 40 ფორმ.):

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \tag{39}$$

ჩავსვათ x და y-ის ეს მნიშვნელობები (1) განტოლებაში. გვექნება

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+$$
$$+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0.$$

ფრჩხილების გახსნისა და სათანადო აღნიშვნების შემდეგ მივიღებთ წირის განტოლებას x', y' კოორდინატებში

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ B' კოეფიციენტს (რომელიც ჩვენ გვაინტერესებს) ექნება შემდეგი მნიშვნელობა

$$B'=2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

ისე შევარჩიოთ α კუთხე, რომ ახალ განტოლებაში x' და y'-ის ნამრავლიანი წევრი არ შევიდეს. ამისათვის საჭიროა B' გავუტოლოთ ნულს. გვექნება

$$B'=2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

ანუ

$$(C-A)\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0.$$

აქედან

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{B}{A-C}. \tag{40}$$

ამრიგად, თუ კოორდინატთა სისტემას მოვაბრუნებთ ისეთ კუთხეზე, რომელიც (40) განტოლებას აკმაყოფილებს, მაშინ ახალ განტოლებაში არ შევა B' კოეფიციენტი. თვით (39) გარდაქმნები ამ შემთხვევაში ცნობილი იქნება, რადგან α კუთხე განისაზღვრება (40) ფორმულით (საკმარისია განისაზღვროს პირდაპირ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$). ასეთი გარდაქმნის შემდეგ განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0, \tag{41}$$

სადაც A', C', D', E' კოეფიციენტები ცნობილი იქნება, როგორც ცნობილი გარდაქმნების შედეგად მიღებული.

ახლა განვიხილოთ (41) განტოლების კერძო შემთხვევები:

1. $A'\neq 0$, $C'\neq 0$. ამ შემთხვევაში მოვახდინოთ $Ox'y'$ სისტემის პარალელური გადატანა ისე, რომ მისი სათავე მივიდეს O' წერტილში, სადაც

$$O'=\left(-\frac{D'}{2A'},\ -\frac{E'}{2C'}\right).$$

$Ox'y'$ სისტემის პარალელური გადატანით მიღებული $O'x''y''$ სისტემა დაუკავშირდება $Ox'y'$ სისტემას ცნობილი ფორმულებით — კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანის ფორმულებით (იხ. თავი IV, ფორმ. 3):

$$x'=-\frac{D'}{2A'}+x'',$$

$$y'=-\frac{E'}{2C'}+y''.$$

თუ ჩავსვამთ x' და y'-ის ამ მნიშვნელობებს (41) განტოლებაში, უბრალო გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0. \tag{42}$$

ამ განტოლების მიმართ განიხილება შესაბამი კერძო შემთხვევები:

1) $F'\neq 0$. ამ შემთხვევაში გავყოთ განტოლება F'-ზე. გვექნება

$$\frac{A'}{F'}x''^2+\frac{C'}{F'}y''^2+1=0.$$

იმისდა მიხედვით, თუ როგორი ნიშნები აქვთ კოეფიციენტებს, შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$\frac{A'}{F'}=\pm\frac{1}{a^2}, \quad \frac{C'}{F'}=\pm\frac{1}{b^2}.$$

ამ აღნიშვნების შემდეგ უკანასკნელი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{x''^2}{a^2}\pm\frac{y''^2}{b^2}=\pm1. \tag{43}$$

ამ განტოლებაში ნიშნები მარჯვნივ და მარცხნივ ერთიმეორეზე დამოუკიდებელია. მათი სხვადასხვა კომბინაცია მოგვცემს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1, \quad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1,$$

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1, \quad \frac{y''^2}{b^2}-\frac{x''^2}{a^2}=1.$$

როგორც ჩანს, პირველი განტოლება ელიფსის განტოლებაა. მეორე განტოლება წარმოსახვითი წირის განტოლებაა; მას ეწოდება წარმოსახვითი ელიფსი. მესამე ჰიპერბოლის განტოლებაა. მეოთხეც ჰიპერბოლის განტოლებაა, ოღონდ x'' და y'' ღერძები არის ურთიერთ ადგილშენაცვლებული (ჰიპერბოლის ფოკუსები ამ შემთხვევაში მოთავსებულია y'' ღერძზე).

2) $F''=0$. ამ შემთხვევაში წირის (42) განტოლებას ასეთი სახე ექნება

$$A'x''^2+C'y''^2=0.$$

აქედან

$$y''=\pm\sqrt{-\frac{A'}{C'}}\,x''.$$

როგორც ჩანს, ამ შემთხვევაში წირი წრფეთა წყვილით წარმოდგება. ეს წყვილი ნამდვილი ან წარმოსახვითია იმისდა მიხედვით A' და C' კოეფიციენტებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ თუ ერთნაირი ნიშანი.

II. $A'=0$. ამ შემთხვევაში (41) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0.$$

აქაც განიხილება თავისი ქვეშემთხვევები:

1) $D'\neq0$. ამ შემთხვევაში მოვახდინოთ $Ox'y'$ სისტემის პარა-

ლელური გადატანა ისე, რომ ახალი $O'x''y''$ სისტემის სათავე მოხვდეს (α, β) წერტილში. გვექნება გარდაქმნები:

$$x'=\alpha+x'',$$
$$y'=\beta+y''.$$

ისე შევარჩიოთ α და β, რომ ჩასმის შემდეგ მიღებულ განტოლებაში y''-ის კოეფიციენტი და თავისუფალი წევრი F'' არ შევიდეს. α და β-ს ასეთი შერჩევის შედეგად წირის უკანასკნელი განტოლება დაიყვანება ასეთ სახეზე

$$C'y''^2+D'x''=0. \tag{44}$$

აქედან

$$y''^2=\pm 2px'',$$

სადაც

$$p=\mp\frac{1}{2}\,\frac{D'}{C'}.$$

ამ განტოლებიდან ზედა და ქვედა ნიშნების შესაბამად მივიღებთ:

$$y''^2=2px'', \quad y''^2=-2px''.$$

პირველი განტოლება, როგორც ვიცით, პარაბოლის განტოლებაა; მეორე განტოლებაც პარაბოლას გამოსახავს, ოღონდ ეს პარაბოლა შექცეულია პირველის მიმართ. იგი მიმართულია x'' ღერძის უარყოფით მიმართულებით.

2) $D'=0$. ამ შემთხვევაში წირის განტოლებას ექნება ასეთი სახე

$$C'y'^2+E'y'+F=0.$$

როგორც ჩანს, ეს განტოლება მხოლოდ y'-ს შეიცავს და მის მიმართ არის მუდმივკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლება. აქედან ამოიხსნება y' და მივიღებთ ორ მნიშვნელობას (ორ ფესვს):

$$y'=b_1, \quad y'=b_2.$$

ეს განტოლებანი კი განსაზღვრავს ორ პარალელურ წრფეს ნამდვილს, წარმოსახვითს ან შეთავსებულს იმისდა მიხედვით, თუ როგორია ფესვები ნამდვილი, წარმოსახვითი თუ ჯერადი.

ყველა ზემოაღნიშნულის შედეგად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: როგორიც არ უნდა იყოს მეორე რიგის განტოლება სიბრტყეზე, იგი გამოსახავს ელიფსს. ჰიპერბოლას, პარაბოლას ან წრფეთა წყვილს, ე. ი. მეორე რიგის წირის სახეებია: „ელიფსი, ჰიპერბოლა, პარაბოლა და წრფეთა წყვილები".

აქ ჩვენ არ მოვიხსენიეთ წრეწირები იმიტომ, რომ ის შედის ელიფსების ჯგუფში როგორც თანატოლღერძებიანი ელიფსები.

თუმცა ზემოხსენებული გამოკვლევა საკმაო ცნობებს იძლევა მეორე რიგის წირის შესახებ, მაგრამ იგი არ ჩაითვლება სრულყოფილად იმიტომ, რომ წირის რაიმე თვისების გამოსავლინებლად საჭიროა მისი განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე, რაც საკმაოდ რთულ და მოუხერხებელ გამოთვლებს შეიცავს. გარდა ამისა, ამ გზით ძნელია წირის აგება მოცემული კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამიტომ მეორე რიგის წირი საჭიროებს უფრო ზოგად და მწყობრ გამოკვლევას. სწორედ ამას ისახავს მიზნად შემდეგი თავი.

მაგალითები. 1. განვიხილოთ მეორე რიგის წირი შემდეგი განტოლებით

$$xy-\lambda=0.$$

ამ შემთხვევაში

$$A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=0,\ E=0,\ F=-\lambda.$$

განვსაზღვროთ კოორდინატთა სისტემის მობრუნების α კუთხე (40) ფორმულის მიხედვით; ამისათვის ჩავსვათ ამ ფორმულაში A, B, C-ს მნიშვნელობანი. გვექნება

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{1}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

აქედან $\alpha=45°$. ამის მიხედვით $\cos\alpha$ და $\sin\alpha$ ასე წარმოგვიდგება:

$$\cos\alpha=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\alpha=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ამ მნიშვნელობათა შეტანა კოორდინატთა სათანადო გარდაქმნის ფორმულებში მოგვცემს:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},$$

$$y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

ჩავსვათ x, y-ის მნიშვნელობანი მოცემული წირის განტოლებაში. გვექნება

$$\frac{(x'-y')(x'+y')}{2}-\lambda=0.$$

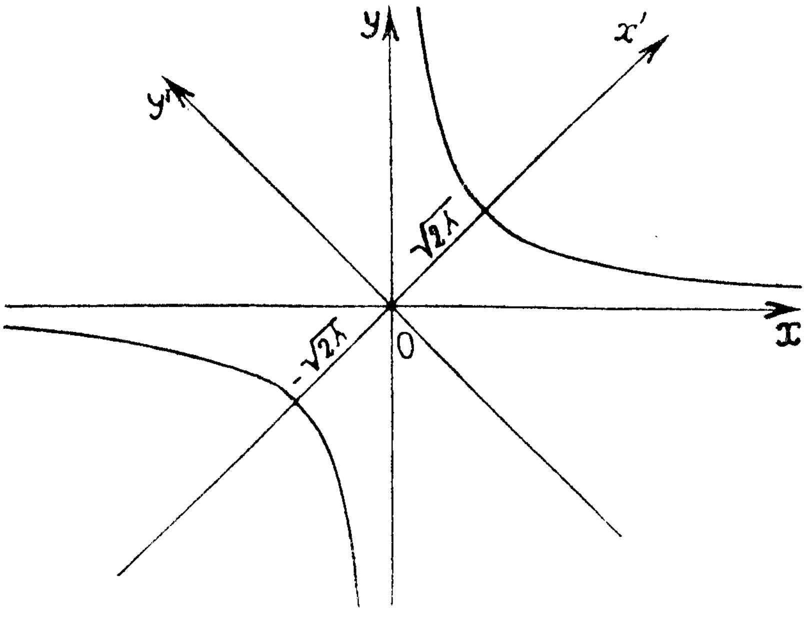
აქედან

$$\frac{x'^2}{2\lambda}-\frac{y'^2}{2\lambda}=1.$$

ამრიგად, წირი ყოფილა ჰიპერბოლა. პირდაპირ ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში $a=b$. ასეთ ჰიპერბოლას ეწოდება ტ ო ლ ფ ე რ დ ა ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ ა. ამ შემთხვევაში ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებანი ახალ სისტემაში (25-ე განტ.) ასეთ სახეს მიიღებს

$$y'=\pm x'.$$

ეს არის x', y' კოორდინატთა ღერძებს შორის კუთხეების ბისექტრისები. ვინაიდან ახალი x' ღერძი 45° კუთხეს ადგენს x ღერძთან, ამიტომ x ღერძი ბისექტრისას შეუთავსდება. მეორე ბისექტრისას



ნახ. 109.

შეუთავსდება y ღერძი, ე. ი. ძველი ღერძები წირის ასიმპტოტებია. ეს ფაქტი საშუალებას გვაძლევს ნათელი წარმოდგენა ვიქონიოთ აღებული წირის ფორმაზე (უნდა ავაგოთ ახალი სისტემა ძველის მიმართ, რაც ძველი სისტემის 45°-ზე მობრუნებით განხორციელდება. ავაგოთ წირი ახალი სისტემის მიმართ წესის მიხედვით იმ ვარაუდით, რომ ძველი სისტემის ღერძები ასიმპტო-

ტები იყოს). მას ექნება 109-ე ნახაზზე მოცემული სახე (ვგულისხმობთ, რომ $\lambda>0$).

2. მოცემულია მეორე რიგის წირი შემდეგი განტოლებით

$$x^2+4xy+4y^2+x+2y-1=0.$$

გამოვარკვიოთ წირის ხასიათი და ავაგოთ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. პირველყოვლისა განვსაზღვროთ α კუთხე (40) ფორმულის მიხედვით. გვექნება (ამ შემთხვევაში $A=1$, $B=4$, $C=4$):

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ამის მიხედვით ადვილად გამოითვლება $\cos\alpha$ და $\sin\alpha$. მივიღებთ:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ამრიგად, სათანადო გარდაქმნები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}, \quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}. \qquad \mathrm{I}$$

ჩავსვათ x, y-ის ეს მნიშვნელობანი მოცემულ განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{7}{5}x'^2+\frac{3}{5}y'^2+\sqrt{5}\,x'-1=0.$$

მოვახდინოთ კიდევ შემდეგი გარდაქმნა ($Ox'y'$ სისტემის პარალელური გადატანა):

$$\left.\begin{aligned} x'&=x''-\frac{5\sqrt{5}}{14}, \\ y'&=y''. \end{aligned}\right\} \qquad \mathrm{II}$$

ჩავსვათ x', y'-ის ეს მნიშვნელობანი უკანასკნელ განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{7}{5}x''^2+\frac{3}{5}y''^2-\frac{53}{28}=0.$$

ეს განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1,$$

სადაც

$$a=\sqrt{\frac{53\cdot 5}{28\cdot 7}}, \qquad b=\sqrt{\frac{53\cdot 5}{28\cdot 3}}.$$

ამრიგად, განსახილავი წირი ელიფსია. იმისათვის, რომ მოვახდინოთ წირის აგება ძველი სისტემის მიმართ, საჭიროა ავაგოთ x'', y'' ღერძები ძველი სისტემის მიმართ ამისათვის კი საჭიროა x'', y'' გამოვსახოთ x, y-ის საშუალებით. ჯერ გამოვსახოთ x', y' კოორდინატები x, y-ის საშუალებით. ეს მოხდება გარდაქმნების შებრუნებით. მივიღებთ:

$$x'=\frac{x+2y}{\sqrt{5}},$$

$$y'=\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}.$$

ეს მნიშვნელობანი რომ შევიტანოთ II გარდაქმნებში, მივიღებთ x'', y''-ის გამოსახულებას x, y-ის საშუალებით. გვექნება:

$$x''=\frac{x+2y}{\sqrt{5}}+\frac{5\sqrt{5}}{14},$$

$$y''=\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}.$$

ჩვენ ვიცით, რომ x'', y'' ღერძების განტოლებანი ახალ სისტემაში ($O'x''y''$ სისტემაში) წარმოდგება შემდეგნაირად:

$$x''=0 \quad (y'' \text{ ღერძი}),$$
$$y''=0 \quad (x'' \text{ ღერძი}).$$

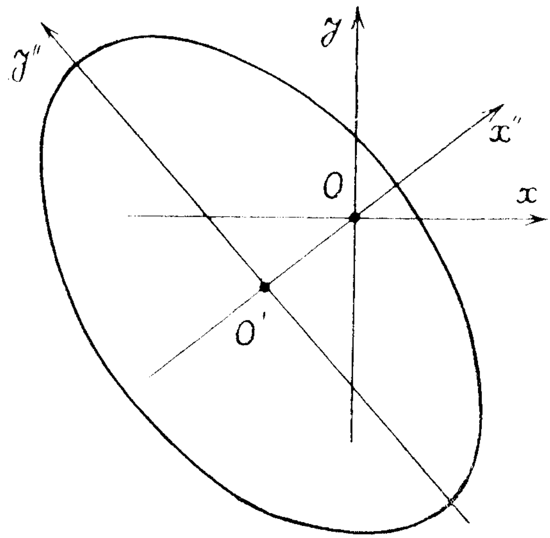
ჩავსვათ აქ x'', y''-ის ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი წინა ფორმულებიდან. მივიღებთ:

$$\frac{x+2y}{\sqrt{5}}+\frac{5\sqrt{5}}{14}=0 \quad (y'' \text{ ღერძი}),$$

$$\frac{-2x+y}{\sqrt{5}}=0 \quad (x'' \text{ ღერძი}).$$

ავაგოთ ეს წრფეები ძველი სისტემის მიმართ. ამით მოგვეცემა $O'x''y''$ სისტემის მდებარეობა ძველ სისტემაში. ელიფსის ნახაზი

ახალი სისტემის მიმართ შედგება ცნობილი წესის მიხედვით. ასე აიგება მოცემული ელიფსი (ნახ. 110).



ნახ. 110.

სავარჯიშო

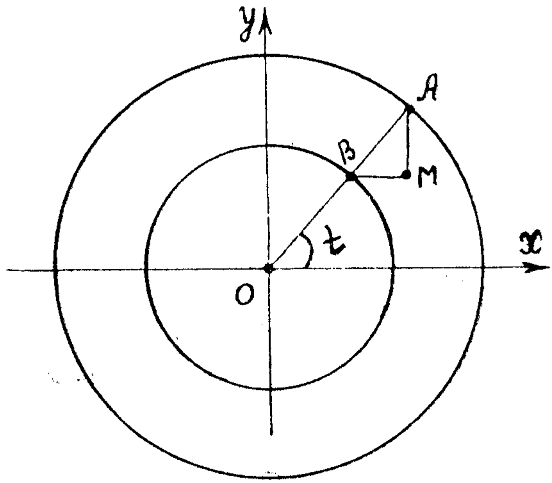
1. მოცემულია ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{1}{2}$ და დირექტრისის განტოლება $x=5$. საძიებელია ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები მოთავსებულია x ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან სიმეტრიულად.

2. კოორდინატთა სათავის გარშემო შემოვხაზოთ ორი წრეწირი a და b რადიუსებით (დავუშვათ, რომ $a>b$). კოორდინატთა სათავიდან გავატაროთ რაიმე წრფე ამ წრეწირების თანაკვეთამდე. თანაკვეთის წერტილები შესაბამად აღვნიშნოთ A-თი და B-თი. B წერტილიდან გავატაროთ x ღერძის პარალელური წრფე, A წერტილიდან კი y ღერძის პარალელური წრფე. ამ ორი წრფის თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M-ით. დაამტკიცეთ, რომ სათავეზე გამავალი OA წრფის ბრუნვის დროს M წერტილი შემოწერს ელიფსს.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. კოორდინატთა სათავეზე გამავალი OA წრფის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხე აღნიშნეთ t-თი და M წერტილის

კოორდინატები გამოსახეთ t პარამეტრის საშუალებით (ნახ. 111).

3. M წერტილი ისე მოძრაობს სიბრტყეზე, რომ მასზე x, y ღერძების პარალელურად გატარებული წრფეები კოორდინატთა ღერძებთან ქმნიან მართკუთხედს, რომლის ფართობი არ იცვლება წერტილის მოძრაობის დროს. შეადგინეთ M წერტილის მიერ აღწერილი წირის განტოლება.



ნახ. 111.

4. M წერტილი ისე მოძრაობს სიბრტყეზე, რომ მისგან ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების კვადრატების ჯამი მუდმივია. შეადგინეთ M წერტილის მიერ აღწერილი წირის განტოლება.

5. მოცემულია მეორე რიგის წირი შემდეგი განტოლებით

$$2x^2+3y^2-2x-3y-1=0.$$

შეადგინეთ მისი კანონიკური განტოლება და ააგეთ წირი Oxy სისტემის მიმართ.

6. მოცემულია მეორე რიგის წირი შემდეგი განტოლებით

$$x^2-2xy+y^2-2x=0.$$

შეადგინეთ ამ წირის კანონიკური განტოლება და ააგეთ იგი Oxy სისტემის მიმართ.

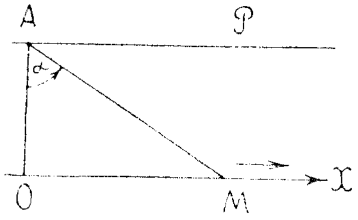
თ ა ვ ი VIII

მეორე რიგის წირთა ზოგადი თეორია

§ 1. ზოგიერთი შეთანხმებანი და აღნიშვნები

1. უსასრულოდ დაშორებული ელემენტების შესახებ. როდესაც მოვახდინეთ წერტილთა კოორდინაცია წრფეზე, ვგულისხმობდით, რომ წრფის ნებისმიერი M წერტილი სასრული მანძილით არის დაშორებული მოცემული O (ფიქსირებული) წერტილიდან, ე. ი. ვგულისხმობდით, რომ შესაძლებელია ნებისმიერი OM მონაკვეთის გაზომვა რაიმე ერთეული მონაკვეთით (მასშტაბით). ვგულისხმობდით, აგრეთვე, რომ ერთი მონაკვეთი შეგვიძლია გადავზომოთ ნებისმიერ რიცხვჯერ წრფეზე O წერტილიდან ორივე მხარეს, მარცხნივ და მარჯვნივ (თუ წრფეს წარმოვიდგენთ ჰორიზონტალურ მდებარეობაში ჩვენს წინ). ეს იმას ნიშნავს, რომ წრფეზე M წერტილის მოძრაობის დროს (მაგალითად, მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობა) OM მონაკვეთის სიგრძე შეიძლება ნებისმიერ რიცხვს გაუტოლდეს, ე. ი. შეიძლება იგი მიისწრაფოდეს უსასრულობისაკენ. მაგრამ ჩვენ არ ვიცით როგორია M წერტილის ზღვარი, როცა $OM|\to\infty$. იგი არ შეიძლება წრფის ჩვეულებრივი წერტილი (ე. ი. ისეთი წერტილი, რომელზედაც ვრცელდება გეომეტრიის ყველა კანონი) იყოს. რადგან ამ წერტილიდან მანძილი O წერტილამდე სასრული არ არის. M წერტილის ასეთი ზღვრული მდებარეობა, როცა $|OM|\to\infty$ არ განიხილება ელემენტარულ გეომეტრიაში. ანალიზურ გეომეტრიაში კი ასეთი ზღვრის განხილვას დიდი მნიშვნელობა აქვს. საქმეს ძალიან გაგვიადვილებს, თუ M წერტილის მოძრაობას განვიხილავთ შემდეგი სქემის მიხედვით: წრფის გარეშე ავიღოთ A წერტილი და შევაერთოთ იგი M წერტილთან. როცა M წერტილი იმოძრავებს წრფეზე მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ AM წრფე იბრუნებს A წერტილის გარშემო საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 111 ა). M წერტილის ყოველ მდებარეობას შეესაბამება α კუთხის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. როცა

$|OM| \to \infty$, მაშინ $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. პირუკუ, α კუთხის ყოველ მნიშვნელობას $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში შეესაბამება M წერტილის გარკვეული მდებარეობა. გამონაკლისს წარმოადგენს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა $\alpha = \frac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში $|OM| \to \infty$. ამიტომ, თუ განვიხილავთ M წერტილის ზღვრულ მდებარეობას, მაშინ ეს ზღვარი წარმოგვიდგება როგორც $\alpha = \frac{\pi}{2}$ კუთხის შესაბამი წერტილი. მეორე მხრივ, რადგან $\alpha = \frac{\pi}{2}$-ს შეესაბამება Ox წრფის პარალელური AP წრფე,



ნახ. 111 ა.

ამიტომ M წერტილის ზღვრული მდებარეობა წარმოგვიდგება როგორც Ox ღერძისა და მისი პარალელური წრფის AP-ს თანაკვეთის წერტილი. აქედან ბუნებრივია, რომ წრფეზე, მარჯვნივ, ჩვეულებრივი წერტილების გარდა განხილულ იქნას კიდევ ერთი განსაკუთრებული წერტილი. ამ წერტილს *უსასრულოდ დაშორებული წერტილი* ეწოდება. ანალოგიურად განიხილება Ox ღერძის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი მარცხნივ. რადგან A წერტილზე გადის მხოლოდ ერთი პარალელური წრფე, ამიტომ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი მარცხნივ წარმოგვიდგება როგორც Ox ღერძისა და მისი AP პარალელური წრფის თანაკვეთის წერტილი. აქედან ჩანს, რომ, თუ Ox ღერძს მივაკუთვნებთ ორ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს (მარჯვნივ და მარცხნივ), მაშინ Ox ღერძსა და მის AP პარალელურ წრფეს ექნება ორი უსასრულოდ დაშორებული საერთო წერტილი. ამრიგად, უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებზე არ გავრცელდება გეომეტრიის პირველი აქსიომა—„ორ წერტილზე გაივლის მხოლოდ ერთი წრფე." იმისათვის, რომ გავავრცელოთ პირველი აქსიომა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებზე, საჭიროა წრფის ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი (მარჯვნივ და მარცხნივ) წარმოვიდგინოთ ერთიმეორესთან შეთავსებულად, ე. ი. წრფე უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც ჩაკეტილი წირი უსასრულოდ დაშორებული წერტილით. ასეთი შეთანხმება გარკვეულ თვისებებს ანიჭებს წრფის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს, მაგრამ იგი ამით მაინც არ

გადაიქცევა ჩვეულებრივ წერტილად. ანალოგიური მოსაზრებებით განიმარტება სიბრტყის და სივრცის უსასრულოდ დაშორებული ელემენტები. იმ გათვალისწინებით, რომ ჩვეულებრივი წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების შემაკავშირებელი აქსიომები რჩებოდეს ძალაში უსასრულოდ დაშორებული ელემენტებისათვისაც, შემოგვაქვს შემდეგი შეთანხმებანი: 1. წრფეს აქვს ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. წრფის პარალელური წრფეები თანაიკვეთებიან ამ წრფესთან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში; 2. სიბრტყეს აქვს ერთი უსასრულოდ დაშორებული წრფე. სიბრტყის ყველა უსასრულოდ დაშორებული წერტილი მოთავსებულია ამავე სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებულ წრფეზე. სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები თანაიკვეთებიან ამ სიბრტყესთან უსასრულოდ დაშორებულ წრფეზე; 3. სივრცეს აქვს ერთი უსასრულოდ დაშორებული სიბრტყე. სივრცის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები და წრფეები დალაგებულია იმავე სივრცის უსასრულოდ დაშორებულ სიბრტყეზე.

უსასრულოდ დაშორებულ ელემენტებს არასაკუთრივ ელემენტებსაც უწოდებენ, ჩვეულებრივ ელემენტებს კი (სასრულეთის ელემენტებს) უწოდებენ საკუთრივს.

რადგან ყოველი რიცხვთა სამეული x, y, z დეკარტის კოორდინატების სახით განსაზღვრავს ჩვეულებრივ (სასრულეთის) წერტილს და, პირუკუ, ყოველი ჩვეულებრივი წერტილისათვის არსებობს ერთი გარკვეული სამეული (დეკარტის კოორდინატები), ამიტომ სივრცის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი არ არის კოორდინირებული. იმისათვის რომ მოძრავი წერტილი მოექცეს უსასრულეთში (მაგალითად, სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფის თანაკვეთის წერტილი, იმ შემთხვევაში, როცა ერთი წრფე ბრუნვით იკავებს მეორის პარალელურ მდებარეობას), საჭიროა მისი კოორდინატებიდან ერთი მაინც გახდეს უსასრულოდ დიდი.

2. **აღნიშვნები.** შემდგომი აღრიცხვის გასაადვილებლად უმჯობესია შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნები მეორე რიგის წირის განტოლებასთან დაკავშირებით. წირის განტოლებას ავიღებთ ისევე, როგორც წინა თავში, ოღონდ კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ შემდეგ აღნიშვნას:

$$A=a_{11},\ B=2a_{12},\ C=a_{22},\ D=2a_{13},\ E=2a_{23},\ F=a_{33}.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{1}$$

წირის განტოლების მარცხენა მხარეს აღვნიშნავთ $F(x, y)$-ით, ე. ი.

$$F(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}. \tag{2}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ტოლობა შეიძლება ასე იქნას წარმოდგენილი

$$F(x, y)=xF_1(x, y)+yF_2(x, y)+F_3(x, y), \tag{3}$$

სადაც

$$\begin{aligned} F_1(x, y)&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ F_2(x, y)&=a_{12}x+a_{22}y+a_{23},\\ F_3(x, y)&=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}. \end{aligned} \tag{4}$$

წირის განტოლების კოეფიციენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს (ე. ი. (a_{ij}) მატრიცის დეტერმინანტს, სადაც $a_{ij}=a_{ji}$) აღვნიშნავთ Δ-თი. მას ვუწოდებთ *წირის განტოლების დისკრიმინანტს*. წირის განტოლების მეორე რიგის წევრების კოეფიციენტებისაგან გარკვეული წესით შედგენილ დეტერმინანტს, რომელიც Δ დეტერმინანტში a_{33} ელემენტის ალგებრულ დამატებას წარმოადგენს, აღვნიშნავთ D-თი. მას ვუწოდებთ წირის განტოლების *უფროს წევრთა დისკრიმინანტს*. ზემოაღნიშნულის თანახმად, წირის განტოლების დისკრიმინანტი და უფროს წევრთა დისკრიმინანტი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

შენიშვნა. ვინც ნაწილობითი წარმოებულები იცის, მისთვის ადვილი შესამჩნევი იქნება, რომ (4) აღნიშვნების ორი ტოლობა შეიძლება ასე იქნას წარმოდგენილი:

$$\begin{aligned} F_1(x, y)&=\frac{1}{2}F_x'(x, y),\\ F_2(x, y)&=\frac{1}{2}F_y'(x, y). \end{aligned} \tag{7}$$

§ 2. მეორე რიგის წირისა და წრფის თანაკვეთა

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მოცემული წრფისა და მოცემული წირის თანაკვეთის წერტილების კოორდინატები, უმჯობესია წრფის განტოლება ავიღოთ პარამეტრული სახით:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+tL, \\ y&=y_0+tM \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

და x, y-ის ეს მნიშვნელობანი ჩავსვათ წირის (1) განტოლებაში. გვექნება

$$a_{11}(x_0+tL)^2+2(x_0+tL)(y_0+tM)+a_{22}(y_0+tM)^2+$$
$$+2(x_0+tL)+2(y_0+tM)+a_{33}=0.$$

ფრჩხილების გახსნისა და t-ს კლებად ხარისხებად დალაგების შემდეგ მივიღებთ (თანაც მხედველობაში ვიქონიოთ ზემოთ მიღებული აღნიშვნები)

$$at^2+bt+c=0, \tag{10}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} a&=a_{11}L^2+2a_{12}LM+a_{22}M^2, \\ b&=LF_1(x_0, y_0)+MF_2(x_0, y_0), \\ c&=F(x_0, y_0). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ამრიგად, თანაკვეთის წერტილების შესაბამი t პარამეტრის მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ (10) კვადრატულ განტოლებას. ამოვხსნათ ეს განტოლება. მივიღებთ t_1, t_2 ფესვებს. ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები (9) განტოლებაში. მივიღებთ თანაკვეთის წერტილების კოორდინატებს. ამრიგად, თუ თანაკვეთის M_1 და M_2 წერტილების კოორდინატებს შესაბამად აღვნიშნავთ x_1, y_1-ით და x_2, y_2-ით გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_0+t_1L, \\ y_1&=y_0+t_1M, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2&=x_0+t_2M, \\ y_2&=y_0+t_2M. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

§ 3. მეორე რიგის წირთა კლასიფიკაცია უსასრულოდ დაშორებული წერტილების მიხედვით

დავუშვათ, რომ წირს აქვს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. შევაერთოთ ეს წერტილი სიბრტყის რაიმე ჩვეულებრივ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილთან წრფით. ამ წრფის განტოლება წარმოვიდგინოთ (9) განტოლების სახით. ამრიგად წირის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი წარმოგვიდგება როგორც წრფისა და წირის საერთო წერტილი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ წერტილის შესაბამი t პარამეტრის მნიშვნელობა განისაზღვროს (10) კვადრატული განტოლებით. მაგრამ, ამ შემთხვევაში t უნდა იყოს უსასრულოდ დიდი, წინააღმდეგ შემთხვევაში (9) განტოლებათა სისტემიდან მიღებული x, y სასრული იქნებოდა და, მაშასადამე, შესაბამი

წერტილიც სასრულეთში მოთავსდებოდა. ამრიგად (10) ტოლობას უნდა ჰქონდეს უსასრულოდ დიდი ამონახსნი; ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ განტოლების პირველი კოეფიციენტი იყოს ნული. გვექნება: $a=0$, რაც (11) აღნიშვნების ძალით მოგვცემს

$$a_{11}L^2+2a_{12}LM+a_{22}M^2=0. \tag{17}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს იმ წრფის მიმართულების კოეფიციენტები, რომელნიც წირთან თანაიკვეთება უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. ასეთ მიმართულებას ეწოდება წირის ასიმპტოტური მიმართულება. ასიმპტოტური მიმართულების მქონე წრფის კუთხური კოეფიციენტი განისაზღვრება (17) განტოლებიდან. თუ ამ განტოლებას გავყოფთ L^2-ზე და გავიხსენებთ კუთხური კოეფიციენტის ფორმულას (იხ. I თავის 37-ე ფორმ.)

$$k=\frac{M}{L},$$

მაშინ (17) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0. \tag{18}$$

ამ განტოლებიდან განისაზღვრება ასიმპტოტური მიმართულების მქონე წრფეების კუთხური კოეფიციენტები. გვექნება:

$$k=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a^2_{12}-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

აქედან ჩანს, რომ მეორე რიგის წირს აქვს მხოლოდ ორი ასიმპტოტური მიმართულება. რადგან თითოეული ასიმპტოტური მიმართულებით მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილია (წრფეს მეტი არ შეიძლება ჰქონდეს), ამიტომ წირს ექნება მხოლოდ ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. ეს წერტილები შეიძლება იყოს წარმოსახვითი (ე. ი. წირს არ ჰქონდეს უსასრულოდ დაშორებული წერტილები), ნამდვილი, განსხვავებული (ე. ი. წირს ჰქონდეს ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი) ან შეთავსებული (ე. ი. წირს ჰქონდეს მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი) იმისდა მიხედვით, თუ როგორია (18) განტოლების ფესვები k_1 და k_2. ეს უკანასკნელნი კი დამოკიდებულია რადიკალის ქვეშ მოთავსებულ გამოსახულების ნიშანზე. თუ გავიხსენებთ წირის განტოლების უფროს წევრთა დისკრიმინანტის (6) ფორმულას, ადვილად მივიღებთ

$$a^2_{12}-a_{11}a_{22}=-D.$$

ამრიგად წირის უსასრულოდ დაშორებული წერტილების ხასიათი დამოკიდებულია D ნიშანზე. რადგან D უარყოფითი ნიშნით შედის რადიკალის ქვეშ, ამიტომ წარმოგვიდგება შემდეგი სურათი:

1) $D>0$. წირს არ ექნება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი,

2) $D<0$. წირს ექნება ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი,

3) $D=0$. წირს ექნება ერთი უსასროლოდ დაშორებული წერტილი.

ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ელიფსის კანონიკური განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ამ შემთხვევაში

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}, \quad a_{12}=0, \quad a_{22}=\frac{1}{b^2}.$$

უფროს წევრთა დისკრიმინანტი მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობას

$$D=\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{b^2}-0^2=\frac{1}{a^2 b^2}.$$

ამრიგად ელიფსისათვის $D>0$.ასეთივე მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ ჰიპერბოლისათვის $D<0$ და პარაბოლისათვის $D=0$. ელიფსს უსასრულოდ დაშორებული წერტილები არა აქვს (ეს უშუალოდაც მოჩანს), ჰიპერბოლას აქვს ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, პარაბოლას კი — ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. ამ გარემოების გამო, უსასრულოდ დაშორებული წერტილების მიხედვით, მეორე რიგის წირები იყოფა შემდეგ ტიპებად (კლასებად):

1) $D>0$. წირს ეწოდება ელიფსის ტიპის წირი,

2) $D<0$. წირს ეწოდება ჰიპერბოლის ტიპის წირი,

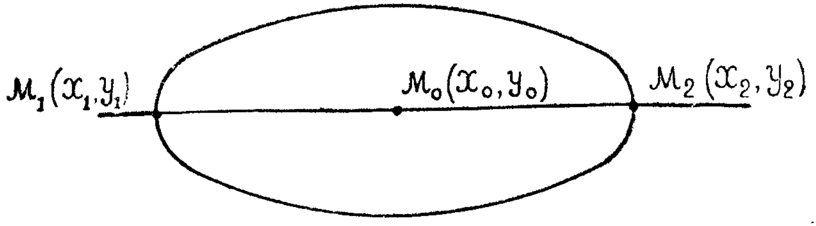
3) $D=0$. წირს ეწოდება პარაბოლის ტიპის წირი.

§ 4. მეორე რიგის წირი. ცენტრი და დიამეტრი

1. წირის ცენტრი. მეორე რიგის წირის ცენტრი ეწოდება სიბრტყის ისეთ წერტილს, რომელიც შუაზე ყოფს წირის ყველა ქორდას[1] გამავალს ამ წერტილზე. ამ განმარტების თანახმად, წირის წერტილები სიმეტრი-

[1] მეორე რიგის წირის ქორდა ეწოდება წირის ორი ნებისმიერი წერტილის შემაერთებელი წრფის მონაკვეთს.

ულად იქნება განლაგებული ცენტრის მიმართ, რაც იმას ნიშნავს, რომ წირის ყოველ წერტილს მოეძებნება სიმეტრიული წერტილი, ცენტრის მიმართ, იმავე წირზე. ეს უკანასკნელი თვისება ეკვივალენტურია ცენტრის განმარტებისა. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ წირის ცენტრის კოორდინატები, უმჯობესია ასე მოვიქცეთ. ცენ-



ნახ. 112.

ტრის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_0, y_0-ით. გავატაროთ ამ წერტილზე რაიმე წრფე (არა ასიმპტოტური მიმართულების). მისი განტოლება განვიხილოთ პარამეტრული სახით, ე. ი. (9) განტოლებათა სისტემაში ვიგულისხმოთ, რომ x_0, y_0 წირის ცენტრის კოორდინატებია. წრფის თანაკვეთის წერტილები წირთან, ე. ი. ქორდის ბოლო წერტილების (ნახ. 112) კოორდინატები განისაზღვრება (12) და (13) ფორმულებით. რადგან M_0 წერტილი M_1M_2 ქორდის შუაწერტილია, ამიტომ მისი კოორდინატები განისაზღვრება მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატების განმსაზღვრელი ცნობილი ფორმულებით (იხ. I თავის მე-8 ფორმ.), სახელდობრ,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

ჩავსვათ აქ x_1, y_1, x_2, y_2-ის მნიშვნელობანი (12) და (13) ფორმულებიდან. გვექნება:

$$x_0 = x_0 + \frac{t_1 + t_2}{2} L,$$

$$y_0 = y_0 + \frac{t_1 + t_2}{2} M.$$

აქედან

$$(t_1 + t_2) L = 0,$$

$$(t_1 + t_2) M = 0.$$

რადგან L და M ერთდროულად ნულები არ არის (წრფის მიმართულების კოეფიციენტებია), ამიტომ უკანასკნელი განტოლებანი მოგვცემს

$$t_1+t_2=0. \tag{19}$$

აქ გავიხსენოთ ალგებრის ცნობილი ფორმულა ფესვების ჯამის შესახებ (ვიეტას ფორმულები). გვექნება

$$t_1+t_2=-\frac{b}{a}$$

($a\neq 0$, რადგან წრფეს არა აქვს მოცემული წირის ასიმპტოტური მიმართულება). (19) ტოლობის თანახმად, გვექნება $b=0$, რაც (11) აღნიშვნის ძალით მოგვცემს

$$LF_1(x_0,\ y_0)+MF_2(x_0,\ y_0)=0. \tag{20}$$

ეს პირობა უნდა შესრულდეს ნებისმიერი ქორდისათვის, ე. ი. L და M კოეფიციენტების ნებისმიერ მნიშვნელობათათვის; ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ (20) განტოლება იყოს იგივური L-ისა და M-ის მიმართ. გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0,\ y_0)=0,\\ F_2(x_0,\ y_0)=0.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ამ ტოლობათა სისტემას აკმაყოფილებს წირის ცენტრის კოორდინატები. (4) აღნიშვნების მიხედვით სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0,\\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0.\end{aligned} \tag{22}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ სისტემის დეტერმინანტი არის წირის განტოლების უფროს წევრთა დისკრიმინანტი. ამრიგად, თუ $D\neq 0$, მაშინ (22) განტოლებათა სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი, ე. ი. წირს ექნება ერთადერთი ცენტრი. თუ $D=0$, მაშინ სისტემას ექნება ამონახსნი ან უსასრულოდ დიდი, ან უამრავი (ეს მაშინ მოხდება, როცა სისტემის განტოლებანი ურთიერთდამოკიდებულია. ერთი მიიღება მეორის გადამრავლებით რაიმე რიცხვზე). ამის მიხედვით წირს ცენტრი ან არ ექნება, ან ექნება უამრავი. ეს ცენტრები განლაგებული იქნება ერთ წრფეზე ((22) სისტემის ერთი განტოლებით განსაზღვრულ წრფეზე). პირველ შემთხვევაში წირს ეწოდება ცენტრიანი წირი, მეორე შემთხვევაში კი უცენტრო და მრავალცენტრიანი წირები. ამრიგად, ცენტრის მიხედვით შემდეგი სურათი წარმოგვიდგება:

1) $D \neq 0$. წირი ცენტრიანია.

2) $D=0$. წირი უცენტრო ან მრავალცენტრიანია.

რადგან ელიფსური ტიპის და ჰიპერბოლური ტიპის წირებისათვის $D \neq 0$ (პირველისათვის $D>0$, მეორისათვის კი $D<0$), ხოლო პარაბოლური ტიპისათვის კი $D=0$, ამიტომ ელიფსური ტიპის და ჰიპერბოლური ტიპის წირები ცენტრიანია, პარაბოლური ტიპის წირები კი უცენტრო ან მრავალცენტრიანია. კერძოდ, თვით ელიფსი და ჰიპერბოლა ცენტრიანი წირებია (რადგან მათთვის $D \neq 0$). თუ ისინი კანონიკური განტოლებით არიან წარმოდგენილი, მაშინ მათი ცენტრები მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში. ეს ფაქტი უშუალოდ გამომდინარეობს თვით კანონიკური განტოლებიდან. მართლაც, x, y-ს რომ ერთდროულად ნიშანი შევუცვალოთ, ე. ი. რომ განვიხილოთ $-x$, $-y$, განტოლება კვლავ დაკმაყოფილდება. მაშასადამე, წირის წერტილები სიმეტრიულ წყვილებად არიან დალაგებული კოორდინატთა სათავის მიმართ, რაც იმას ნიშნავს, რომ კოორდინატთა სათავე წირის ცენტრია. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ პარაბოლა უცენტრო წირია; ამისათვის ავიღოთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება

$$y^2=2px.$$

ამ შემთხვევაში

$$a_{11}=0, \quad a_{12}=0, \quad a_{22}=1, \quad a_{13}=-p, \quad a_{23}=0.$$

ამ პირობებში (22) სისტემა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} &0 \cdot x_0+0 \cdot y_0-p=0, \\ &0 \cdot x_0+1 \cdot y_0+0=0. \end{aligned}$$

აქედან ჩანს, რომ $x_0=\infty$, ხოლო y_0 განუსაზღვრელია. ამ შემთხვევაში x_0, y_0 წერტილი, ე. ი. პარაბოლის ცენტრი, მოთავსებული იქნება უსასრულეთში, ეს იქნება x ღერძის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი.

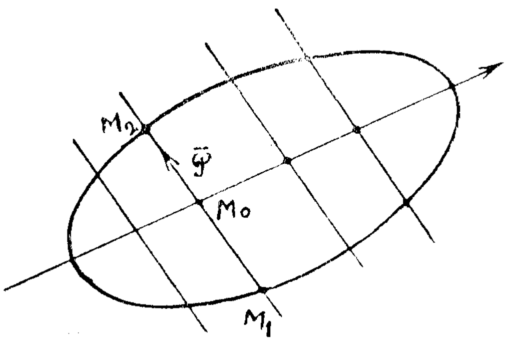
9. მეორე რიგის წირის დიამეტრი. მეორე რიგის წირის ცენტრზე გამავალ ყოველ წრფეს ეწოდება ამ წირის დიამეტრი. თუ წირი ცენტრიანია, მაშინ მისი დიამეტრები (წირის ცენტრზე გამავალი წრფეთა სიმრავლე) შეადგენს წრფეთა კონას, რადგან წირის ცენტრი მოცემულია (22) სისტემით. ამიტომ ცენტრზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება შედგენილი იქნება ცნობილი წესით, რომელიც უკვე განხილული იყო (იხ. I თავის 57-ე განტ). ამ წესის თანახმად, დიამეტრთა კონის განტოლება ასე დაიწერება

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}+k(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0, \tag{23}$$

სადაც k — პარამეტრია. მისი ცვლით მივიღებთ სხვადასხვა დიამეტრებს. როცა წირი უცენტროა (ე. ი. როცა მისი ცენტრი უსასრულოდ დაშორებულ ერთსა და იმავე წერტილზე). ამ პარალელურ წრფეთა სამრავლეს იგივე (23) განტოლება განსაზღვრავს. როცა წირი მრავალცენტრიანია, მაშინ დიამეტრი განუსაზღვრელია. სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფე წირის დიამეტრი იქნება.

§ 5. შეუღლებული და მთავარი დიამეტრები

1. მოცემული მიმართულებისადმი შეუღლებული დიამეტრი. მოცემული მიმართულების პარალელურ ქორდათა შუაწერტილების გეომეტრიულ ადგილს ეწოდება ამ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრი.



ნახ. 112 ა.

დავუშვათ, რომ მოცემული მიმართულება განისაზღვრება შემდეგი ვექტორით

$$P=(L,\ M). \tag{24}$$

ავიღოთ ასეთი მიმართულების რაიმე პარალელური ქორდა. მისი შუაწერტილი აღვნიშნოთ M_0-ით. ქორდის განტოლება პარამეტრული სახით ავიღოთ. ეს იქნება იგივე (9) განტოლება, სადაც x_0, y_0, ამ შემთხვევაში, ქორდის შუაწერტილის კოორდინატებს გამოსახავს (ნახ. 112 ა). წინა პარაგრაფიდან ვიცით, რომ, თუ M_0 არის M_1M_2 ქორდის შუაწერტილი, მაშინ ადგილი ექნება (20) პირობას, სახელდობრ,

$$LF_1(x_0,\ y_0)+MF_2(x_0,\ y_0)=0.$$

ამრიგად, მოცემული მიმართულების პარალელური ქორდების x_0, y_0 შუაწერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას

$$LF_1(x, y)+MF_2(x, y)=0. \tag{25}$$

ეს განტოლება (4) აღნიშვნების თანახმად ასეთ სახეს მიიღებს

$$L(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+M(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0. \tag{26}$$

რადგან L, M მუდმივი რიცხვებია (მოცემული ვექტორის კოორდინატები), ამიტომ ეს განტოლება გამოსახავს წრფეს. ამრიგად, პარალელური ქორდების შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი არის წრფე. მაშასადამე, მოცემულ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრი არის წრფე. იგი განისაზღვრება (26) განტოლებით. პირდაპირ ჩანს, რომ ეს განტოლება კმაყოფილდება წირის ცენტრის კოორდინატებით, ე. ი. შეუღლებული დიამეტრი გადის წირის ცენტრზე; მაშასადამე, მიეკუთვნება ჩვეულებრივ დიამეტრთა კონას. ფრჩხილების გახსნის შემდეგ ეს განტოლება ასე გადაიწერება

$$Ax+By+C=0, \tag{27}$$

სადაც

$$\left.\begin{aligned} A&=a_{11}L+a_{12}M, \\ B&=a_{12}L+a_{22}M. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

როგორც ცნობილია, A, B კოეფიციენტებით განსაზღვრული ვექტორი

$$\overline{Q}=(A, B) \tag{29}$$

იქნება (27) განტოლებით განსაზღვრული წრფის (ე. ი. შეუღლებული დიამეტრის) მართობული ვექტორი. ახლა აღვნიშნოთ მოცემული მიმართულების კუთხური კოეფიციენტი k-თი. ამ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი კი k'-ით, მაშინ გვექნება:

$$k=\frac{M}{L}, \qquad k'=-\frac{A}{B}.$$

ჩავსვათ აქ A და B-ს მნიშვნელობა (28) ფორმულიდან. მივიღებთ

$$k'=-\frac{a_{11}L+a_{12}M}{a_{12}L+a_{22}M}=-\frac{a_{11}+ka_{12}}{a_{12}+ka_{22}}.$$

თუ წირი ცენტრიანია, მაშინ $D\neq0$. უკანასკნელი გამოსახულების მრიცხველი და მნიშვნელი ვერ შეიკვეცება. კოეფიციენტები არ

იქნება პროპორციული. უბრალო გარდაქმნით იგი დაიყვანება შემდეგ სახეზე (მნიშვნელის მოხსნით)

$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0. \tag{36}$$

ასეთია მოცემული მიმართულების კუთხური კოეფიციენტისა და ამ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტის კავშირი. უშუალოდ ჩანს, რომ (30) ტოლობის მარცხენა მხარე სიმეტრიულია k-სა და k'-ის მიმართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ k' არის k მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი, მაშინ k იქნება k' მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრის კუთხური კოეფიციენტი. k და k' მიმართულების დიამეტრებს **ურთიერთშეუღლებული დიამეტრები** ეწოდება. ზემოაღნიშნულიდან ჩანს, რომ ყოველ მიმართულებას მოეძებნება, (30) ტოლობის საფუძველზე, თავისი შეუღლებული მიმართულება.

2. მთავარი მიმართულება და მთავარი დიამეტრი. ისეთ მიმართულებას, რომელიც მართობულია მისდამი შეუღლებული დიამეტრისა, ეწოდება **მთავარი მიმართულება**; თვით დიამეტრს კი (ამ შემთხვევაში)—**მთავარი დიამეტრი**. იმისათვის, რომ $\overline{P}(L, M)$ ვექტორით განსაზღვრული მიმართულება იყოს მთავარი, საჭიროა $\overline{P}$ მართობული იყოს მასთან შეუღლებული დიამეტრისა, ე. ი. (27) განტოლებით განსაზღვრული წრფისა. მაგრამ ამ წრფის მართობულია $\overline{Q}(A, B)$ ვექტორი. ამრიგად, იმისათვის, რომ $\overline{P}$ ვექტორი განსაზღვრავდეს მთავარ მიმართულებას აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი პარალელური იყოს $\overline{Q}$ ვექტორისა. გვექნება (პარალელურობის პირობა)

$$\overline{Q}=\lambda\overline{P}. \tag{31}$$

კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$A=\lambda L,$$
$$B=\lambda M.$$

თუ აქ ჩავსვამთ A-სა და B-ს მნიშვნელობებს (28) ფორმულებიდან, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}L+a_{12}M&=\lambda L,\\ a_{12}L+a_{22}M&=\lambda M \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)L+a_{12}M&=0,\\ a_{12}L+(a_{22}-\lambda)M&=0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

ამრიგად, მთავარი მიმართულების განმსაზღვრელი L, M სიდიდეები აკმაყოფილებენ (33) განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემას ეწოდება მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი ს ი ს ტ ე მ ა. ეს სისტემა არის ერთგვაროვანი L, M-ის მიმართ. ამიტომ მას რომ ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი (L და M ერთდროულად ნულები არ შეიძლება იყოს—მიმმართველი ვექტორის კოორდინატებია) აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნული. გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{34}$$

ამ განტოლებას ეწოდება მ ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ე ლ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა. თუ დავშლით ამ განტოლების მარცხენა მხარეს მოთავსებულ დეტერმინანტს, მივიღებთ

$$\lambda^2-S\lambda+D=0, \tag{35}$$

სადაც

$$S=a_{11}+a_{22}, \quad D=a_{11}a_{22}-a^2_{12}. \tag{36}$$

ამ კვადრატული განტოლებიდან ამოიხსნება მთავარი დიამეტრის შესაბამი λ-ს მნიშვნელობანი. გვექნება

$$\lambda=\frac{S\pm\sqrt{S^2-4D}}{2}.$$

ფესვების ხასიათი დამოკიდებული იქნება ფესვქვეშა გამოსახულების ნიშანზე. (36) აღნიშვნების თანახმად ფესვქვეშა გამოსახულება ასეთ სახეს მიიღებს

$$S^2-4D=(a_{11}-a_{22})^2+4a^2_{12}. \tag{37}$$

ეს გამოსახულება, საზოგადოდ, მეტია ნულზე; მაშასადამე, (34) განტოლებას ორი ნამდვილი, ერთიმეორისაგან განსხვავებული ფესვი აქვს, ე. ი. წირს აქვს ორი მთავარი მიმართულება. გამონაკლისს წარმოადგენს ისეთი წირი, რომლისთვისაც (37) გამოსახულება ნულია, ეს მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა

$$a_{11}=a_{22}, \quad a_{12}=0.$$

ეს პირობები კი (როგორც ცნობილია) ახასიათებს წრეწირს. ამრიგად (34) განტოლებას ჯერადი ფესვი ექნება მხოლოდ წრეწირის შემთხვევაში. ამ პირობებში (34) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს.

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)=0.$$

აქედან

$$\lambda=a_{11}=a_{22}.$$

ამ მნიშვნელობის ჩასმა (33) განტოლებათა სისტემაში მას იგივობად აქცევს. ამიტომ L და M განუსაზღვრელი დარჩება. ეს იმას ნიშნავს, რომ წრეწირის მთავარი მიმართულება განუსაზღვრელია და, მაშასადამე, მთავარი დიამეტრებიც განუსაზღვრელი იქნება. ეს ფაქტი წრეწირისათვის უშუალოდაც შეგვიძლია შევამჩნიოთ. მართლაც, წრეწირის ყოველი დიამეტრი შუაზე ყოფს მისდამი მართობულად გავლებულ ქორდებს, ე. ი. მათი შეუღლებულია. ამრიგად წრეწირის ყოველი დიამეტრი მთავარი დიამეტრია.

ზოგად შემთხვევაში, ე. ი. როცა (34) განტოლების ფესვები განსხვავებულია, წირის მთავარი მიმართულებანი განისაზღვრება (33) სისტემიდან, სადაც მორიგეობით უნდა ჩავსვათ (34) განტოლების ფესვები λ_1 და λ_2. შესაბამი მთავარი მიმართულების განმსაზღვრელი ვექტორები აღვნიშნოთ ასე:

$$\overline{P}_1=(L_1, M_1), \quad \overline{P}_2=(L_2, M_2).$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ მთავარ მიმართულებათა წყვილი თანამართობულია. ამისათვის ასე მოვიქცეთ: მოვაბრუნოთ კოორდინატთა სისტემა სათავის გარშემო ისე, რომ Ox ღერძი გახდეს ერთერთი მთავარი მიმართულების პარალელური. დავუშვათ, რომ ასეთი მობრუნება უკვე შესრულებულია, მაშინ მთავარი მიმართულების განმსაზღვრელი $\overline{P}$ ვექტორი Ox ღერძის პარალელური იქნება. რადგან Ox ღერძის პარალელური ვექტორის გეგმილი Oy ღერძზე ნულია, ამიტომ $\overline{P}$ ვექტორი ასე წარმოგვიდგება $\overline{P}=(L, 0)$. ამრიგად (33) სისტემა უნდა დაკმაყოფილდეს $M=0$-ისათვის. გვექნება:

$$(a_{11}-\lambda)L=0,$$
$$a_{12}L=0.$$

აქედან აშკარაა (რადგან $L\neq0$), რომ $a_{12}=0$. (33) სისტემა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$(a_{11}-\lambda)L=0,$$
$$(a_{22}-\lambda)M=0.$$

თუ λ-ს მივცემთ მნიშვნელობებს $\lambda=a_{11}$, $\lambda=a_{22}$, მაშინ ამ სისტემას შესაბამად დააკმაყოფილებს შემდეგი წყვილები:

$$(L,\ 0) \text{ და } (0,\ M),$$

ე. ი. Ox ღერძისა და Oy ღერძის მიმართულებანი. ამრიგად, Oy ღერძის მიმართულებაც ყოფილა აგრეთვე მთავარი მიმართულება, რაც ადასტურებს მთავარი მიმართულებების თანამართობულობას. ამრიგად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: როცა Ox

ღერძი პარალელურია ერთ-ერთი მთავარი მიმართულებისა, მაშინ Oy ღერძიც პარალელური იქნება მეორე მთავარი მიმართულებისა. წირის განტოლება ამ შემთხვევაში არ შეიცავს ნამრავლიან წევრს.

3. სიმეტრიის ღერძი. წირის სიმეტრიის ღერძი ეწოდება ისეთ წრფეს, რომლის მიმართაც წირის წერტილები სიმეტრიულ წყვილებად არიან დალაგებული. ამ განმარტების მიხედვით ცხადია, რომ სიმეტრიის ღერძი შუაზე გაყოფს მისდამი მართობულ ქორდებს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სიმეტრიის ღერძი შეუღლებული იქნება ამ ღერძის მართობულ ქორდებთან, ე. ი. სიმეტრიის ღერძი მთავარი დიამეტრია. ცენტრიან წირს ექნება ორი სიმეტრიის ღერძი. ესენია ცენტრზე გამავალი წრფეები მთავარი მიმართულების პარალელურად. მათი განტოლებანი მიიღება შეუღლებული დიამეტრის (26) განტოლებიდან. თუ მასში ჩავსვამთ მორიგეობით L, M-ის მნიშვნელობებს განსაზღვრულს (33) სისტემიდან λ_1 და λ_2 ფესვების შესაბამად, გვექნება:

$$\begin{aligned} L_1(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+M_1(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0, \\ L_2(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+M_2(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0. \end{aligned} \tag{38}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\overline{P}_1$ ვექტორი იქნება λ_2-ის შესაბამი ღერძის მიმმართველი ვექტორი, $\overline{P}_2$ კი λ_1-ის შესაბამი ღერძის მიმმართველი ვექტორი. რადგან უცენტრო წირის დიამეტრები ურთიერთპარალელურია, ამიტომ მას ექნება მხოლოდ ერთი სიმეტრიის ღერძი (მეორე სიმეტრიის ღერძი ექნება უსასრულეთში). ამ წრფის განტოლება მიიღება აგრეთვე (26) განტოლებიდან, სადაც L, M ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $\overline{P}(L, M)$ ვექტორი მართობული იყოს უცენტრო წირის დიამეტრის მიმართულებისა. ცხადია, რომ უცენტრო წირისა და დიამეტრის თანაკვეთის ერთი წერტილი არის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. ასე რომ არ ყოფილიყო, ე. ი. დიამეტრს რომ წირი გაეკვეთა სასრულეთის წერტილებში, მაშინ თვით ქორდის შუაწერტილი სასრულეთში იქნებოდა. მაგრამ ამ შემთხვევაში ქორდის შუაწერტილი დიამეტრის შუაწერტილია, ე. ი. ცენტრია, რომელიც უსასრულეთშია მოთავსებული. ამრიგად დიამეტრს წირთან აქვს საერთო უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, ე. ი. დიამეტრი ასიმპტოტური მიმართულებისაა. მაშასადამე მისი კუთხური კოეფიციენტი ამოიხსნება (18) განტოლებიდან.

იმისათვის, რომ $\overline{P}(L, M)$ ვექტორი მართობული იყოს სიმეტრიის ღერძისა, საჭიროა L, M ასე შეირჩეს

$$\frac{M}{L}=-\frac{1}{k}.$$

ამის მიხედვით (26) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$k(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})-(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0. \tag{42}$$

ასეთია უცენტრო წირის სიმეტრიის ღერძის განტოლება, სადაც k არის (34) განტოლების ფესვი. ამ შემთხვევაში, ე. ი. როცა $D=0$, (34) განტოლების ფესვები ასე წარმოგვიდგება:

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=a_{11}+a_{22}.$$

პირველი ფესვის ჩასმა (33) განტოლებაში მოგვცემს:

$$\begin{aligned} &a_{11}L+a_{12}M=0,\\ &a_{12}L+a_{22}M=0. \end{aligned} \tag{43}$$

ამ სისტემის პირველი ტოლობა გავამრავლოთ L-ზე, მეორე ტოლობა კი M-ზე და შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$a_{11}L^2+2a_{12}LM+a_{22}M^2=0. \tag{44}$$

ეს განტოლება კი ასიმპტოტურ მიმართულებას განსაზღვრავს, ე. ი. თვით სიმეტრიის ღერძის მიმართულებას. ამრიგად (43) სისტემის ამონახსნი L, M-ის მიმართ, განსაზღვრავს სიმეტრიის ღერძის მიმმართველ ვექტორს. აქ აღსანიშნავია ისიც, რომ (43) სისტემა მიღებულია (33) სისტემიდან პირველი ფესვის (ე. ი. $\lambda=0$) შესაბამად. მაშასადამე, უცენტრო წირის სიმეტრიის ღერძი შეესაბამება პირველ ფესვს (ე. ი. $\lambda=0$-ს).

§ 6. ცენტრიანი მეორე რიგის წირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე. წირის აგება კოორდინატთა სისტემაში

1. ცენტრიანი მეორე რიგის წირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე. წირის სიმეტრიის ღერძები მივიღოთ კოორდინატთა ახალ ღერძებად. ამ შემთხვევაში ახალი სისტემის სათავე, ცხადია, მოთავსებული იქნება წირის ცენტრში, რომლის კოორდინატები x_0, y_0 განსაზღვრულია (22) სისტემით. რადგან ახალი სისტემის ღერძები სიმეტრიის ღერძებია, ამიტომ წირის განტოლება ახალი სისტემის მიმართ სახეს არ უნდა იცვლიდეს, თუ მასში x'-ს ან y'-ს შევუცვლით ნიშანს (x', y' სიმეტრიის ღერძებია). ეს კი მაშინ არის შესაძლებელი, როცა განტოლებაში არ შედის

x'-ის ან y'-ის მიმართ პირველხარისხიანი წევრები. ასეთი წევრებია ნამრავლიანი წევრი და პირველი რიგის წევრები. ამრიგად წირის განტოლების მარცხენა მხარეს მყოფ გამოსახულებას, ე. ი. $F(x, y)$ ფუნქციას ახალ კოორდინატებში, ასეთი სახე ექნება

$$F(x', y') = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}.$$

რადგან წირის ცენტრი ახალი სისტემის სათავეა, ამიტომ მისი კოორდინატები ახალ სისტემაში იქნება 0, 0, ე. ი. ძველი სისტემის x_0, y_0 კოორდინატებს შეესაბამება, ახალი სისტემის 0, 0 კოორდინატები. ამრიგად, თუ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეს მდგომ გამოსახულებაში x, y-ის ნაცვლად ჩავწერთ x_0, y_0-ს, მაშინ მარჯვენა მხარეს მდგომ გამოსახულებაში x', y'-ის ნაცვლად უნდა ჩავწეროთ 0, 0. მივიღებთ

$$a'_{33} = F(x_0, y_0). \tag{46}$$

თანახმად (4) აღნიშვნებისა, გვექნება

$$F(x_0, y_0) = x_0F_1(x_0, y_0) + y_0F_2(x_0, y_0) + F_3(x_0, y_0).$$

რადგან წირის ცენტრის კოორდინატები, ე. ი. x_0, y_0 აკმაყოფილებენ (21) სისტემას, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$F(x_0, y_0) = F_3(x_0, y_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

ამრიგად

$$a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

თუ ჩავსვამთ აქ x_0, y_0-ის მნიშვნელობებს ამოხსნილს (22) სისტემიდან (ე. ი. ცენტრის კოორდინატებს), მივიღებთ a'_{33}-ის გამოსახულებას, მაგრამ უმჯობესია (22) სისტემის ორი განტოლებიდან და უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_0, y_0. ამისათვის ამ სამი განტოლების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი უნდა გავუტოლოთ ნულს. გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - a'_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

ეს განტოლება შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} + 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} + 0 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - a'_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოდგება ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ a_{13}, & a_{23}, & -a'_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან

$$a'_{33} = \frac{\Delta}{D}. \tag{47}$$

ახლა გამოვთვალოთ a'_{11}, a'_{22} კოეფიციენტები. ამისათვის ჯერ დავამტკიცებთ, რომ (28) ფორმულებით განსაზღვრული $\overline{Q}$ ვექტორი არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის მოძრაობის დროს, რაც იმას ნიშნავს, რომ (28) ფორმულების შესაბამი ფორმულები ახალ კოორდინატებში

$$\begin{aligned} A' &= a'_{11}L' + a'_{12}M', \\ B' &= a'_{12}L' + a'_{22}M' \end{aligned} \tag{28'}$$

განსაზღვრავს იმავე $\overline{Q}$ ვექტორს, ე. ი.

$$\overline{Q} = (A', B') \text{ ახალ კოორდინატებში.}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ წირის განტოლების უფროს წევრთა (მეორე რიგის წევრთა) კოეფიციენტები არ შეიცვლება კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანის დროს, ე. ი. x, y-ის შემდეგნაირი გარდაქმნის დროს:

$$\begin{aligned} x &= a + x', \\ y &= b + y'. \end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში (როგორც ცნობილია), აგრეთვე, არ შეიცვლება $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები, ე. ი. L, M რიცხვები. (28) ფორმულებიდან ჩანს, რომ A, B განსაზღვრულია უფროს წევრთა კოეფიციენტებით და L, M რიცხვებით. მაშასადამე, (28′) ფორმულების მარჯვენა მხარეს გვექნება იგივე სიდიდეები, რასაც (28) ფორმულების მარჯვენა მხარე შეიცავს. გვექნება $A' = A$, $B' = B$; მაშასადამე,

$$(A', B') = (A, B) = \overline{Q}.$$

ამრიგად გამოთქმული აზრი $\overline{Q}$ ვექტორის შესახებ მართებულია კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანის შემთხვევისათვის. ახლა საკმარისია დავამტკიცოთ მისი მართებულობა კოორდინატთა სისტემის (სათავის გარშემო) ბრუნვის შემთხვევაში.

როგორც ცნობილია, კოორდინატთა სისტემის ბრუნვის დროს M წერტილის x, y კოორდინატების გარდაქმნები არის წრფივი და ერთგვაროვანი, სახელდობრ:

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2,$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2,$$

სადაც α_1, α_2, β_1, β_2 ის კუთხეებია, რომლებსაც ახალი სისტემის ღერძები ადგენენ ძველი სისტემის ღერძებთან. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში მეორე რიგის წირის განტოლების მეორე რიგის წევრები წარმოშობენ მხოლოდ მეორე რიგის წევრებს და, პირუკუ. ამრიგად გვექნება

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2. \qquad (*)$$

აქ x, y-ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობები. თუ დავუშვებთ, რომ $\overline{P}$ ვექტორი მოდებულია კოორდინატთა სათავეზე, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{OM} = \overline{P}.$$

ამ ტოლობის დაგეგმილება (ძველსა და ახალ ღერძებზე) მოგვცემს შესაბამად:

$$x = L, \quad y = M,$$
$$x' = L', \quad y' = M'.$$

ამ ტოლობათა საფუძველზე (*) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$a_{11}L^2 + 2a_{12}LM + a_{22}M^2 = a'_{11}L'^2 + 2a'_{12}L'M' + a'_{22}M'^2. \qquad (**)$$

ახალი სისტემის მიმართ A', B' რიცხვებთან დაკავშირებული ვექტორი აღვნიშნოთ $\overline{Q}'$-ით, ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$\overline{Q}' = (A',\ B').$$

გამოვთვალოთ $\overline{Q}$, $\overline{P}$ და $\overline{Q}'$ $\overline{P}'$ ვექტორთა წყვილების სკალარული ნამრავლები $(\overline{P}' = \overline{P})$. გვექნება:

$$\overline{Q} \cdot \overline{P} = AL + BM,$$
$$\overline{Q}' \cdot \overline{P} = A'L' + B'M'.$$

ჩავსვათ აქ A, B და A', B'-ის მნიშვნელობანი (28) და (28') ფორმულებიდან. მივიღებთ:

$$\overline{Q} \cdot \overline{P} = a_{11}L^2 + 2a_{12}LM + a_{22}M^2,$$
$$\overline{Q}' \cdot \overline{P} = a'_{11}L'^2 + 2a'_{12}L'M' + a'_{22}M'^2.$$

აქედან (**) ტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{Q}\cdot\overline{P}=\overline{Q'}\cdot\overline{P}.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ $\overline{Q}$ და $\overline{Q'}$ ვექტორები ერთი და იგივე წრფის (აღებულ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრის) ნორმალური ვექტორებია; პირველი ძველ კოორდინატებში, მეორე კი ახალში. ამიტომ ეს ორი ვექტორი ერთიმეორის პარალელური იქნება, ე. ი. $\overline{Q'}\parallel\overline{Q}$ ან, რაც იგივეა, $\overline{Q'}=\mu\overline{Q}$. ჩავსვათ $\overline{Q'}$-ის ეს მნიშვნელობა უკანასკნელ ტოლობაში. მივიღებთ

$$\overline{Q}\cdot\overline{P}=\mu\overline{Q}\cdot\overline{P}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\overline{Q}\cdot\overline{P}\neq 0$. მართლაც, ტოლობა $\overline{Q}\cdot\overline{P}=0$ მოგვცემს (17) განტოლებას, რომელიც ასიმპტოტურ მიმართულებებს განსაზღვრავს. $\overline{P}$ ვექტორს კი არა აქვს ასიმპტოტური მიმართულება. ამიტომ წინა ტოლობა შეიძლება შეკვეცილი იქნეს $\overline{Q}\cdot\overline{P}$-ზე. მივიღებთ: $\mu=1$, მაშასადამე $\overline{Q'}=\overline{Q}$.

ამრიგად A, B და A', B' (ამ შემთხვევაშიაც) განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე $\overline{Q}$ ვექტორს (რ. დ. გ).

A, B რიცხვების ზემოაღნიშნული თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ერთი მნიშვნელოვანი შედეგი: (31) ტოლობა ერთი და იგივე იქნება ძველსა და ახალ კოორდინატებში. განსხვავება წარმოიშვება მხოლოდ დაგეგმილების შემდეგ. დაგეგმილების დროს კი აღნიშნულ ტოლობაში შემავალი λ მამრავლი არ იცვლება. ამრიგად λ პარამეტრი, რომელიც შედის მახასიათებელ სისტემაში და მახასიათებელ განტოლებაში, ერთი და იგივე იქნება ძველსა და ახალ სისტემაში.

უკანასკნელი დასკვნის მიხედვით აშკარაა, რომ (34) განტოლების ანალოგიური განტოლება (ე. ი. მახასიათებელი განტოლება) ახალ სისტემაში ასეთ სახეს მიიღებს (რადგან $a'_{12}=0$)

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda, & 0 \\ 0, & a'_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

ანუ

$$(a'_{11}-\lambda)(a'_{22}-\lambda)=0.$$

აქედან

$$\lambda_1=a'_{11},\quad \lambda_2=a'_{22}.$$

ამრიგად ახალ სისტემაში წრის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{D} = 0. \tag{48}$$

ამ განტოლებას ეწოდება ცენტრიანი წირის კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა, სადაც λ_1, λ_2 განსაზღვრულია როგორც (34) განტოლების ფესვები. აქ უნდა გვახსოვდეს, რომ x' ღერძი λ_2-ით განსაზღვრული სიმეტრიის ღერძია, y' ღერძი კი λ_1-ით განსაზღვრული სიმეტრიის ღერძი, ე. ი. x', y' ღერძების განტოლებანი იქნება (38) განტოლებანი შესაბამად. ახალი ღერძები შეგვიძლია ნებისმიერად მოვგეზოთ. (48) განტოლება მოგეზულობაზე დამოკიდებული არ არის.

ახლა განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $\Delta \neq 0$. გავყოთ (48) განტოლება $\frac{\Delta}{D}$-ზე. გვექნება

$$\frac{D\lambda_1}{\Delta} x'^2 + \frac{D\lambda_2}{\Delta} y'^2 + 1 = 0.$$

კოეფიციენტების ნიშნების მიხედვით შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{D\lambda_1}{\Delta} = \pm \frac{1}{a^2}, \quad \frac{D\lambda_2}{\Delta} = \pm \frac{1}{b^2}.$$

ასეთი აღნიშვნების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} = \pm 1.$$

ამრიგად, როცა $\Delta \neq 0$, მაშინ ცენტრიანი წირის სახეები იქნება შემდეგი:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1 \quad \text{(წარმოსახვითი ელიფსი)},$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{(ელიფსი)},$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$ (ჰიპერბოლა, რომლის ფოკუსები მოთავსებულია x ღერძზე),

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1$$ (ჰიპერბოლა, რომლის ფოკუსები მოთავსებულია y ღერძზე),

2) $\Delta = 0$, ამ შემთხვევაში (48) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0.$$

ეს კი განსაზღვრავს წარმოსახვით ან ნამდვილ წრფეთა წყვილს იმისდამიხედვით, თუ როგორია λ_1 და λ_2-ის ნიშნები, ერთნაირი თუ სხვადასხვანაირი.

2. ცენტრიანი მეორე რიგის წირის აგება განტოლების მიხედვით. წინა მასალის საფუძველზე ადვილად შეიძლება წირის აგების წესი შევიმუშაოთ. უნდა ავაგოთ სიმეტრიის ღერძები (38) განტოლებათა მიხედვით. მიღებული სიმეტრიის ღერძები მოვგეზოთ ნებისმიერად და მივიღოთ ახალ კოორდინატთა სისტემად ისე, რომ λ_2-ის შესაბამი სიმეტრიის ღერძი იყოს x' ღერძი. წირის განტოლებას ახალ სისტემაში მიეცემა კანონიკური სახე. შეგვიძლია ავაგოთ წირი ახალ სისტემაში კანონიკური განტოლების მიხედვით ისევე, როგორც წინა თავში იყო შესრულებული. ამრიგად წირი აგებული აღმოჩნდება ძველ სისტემაში.

§ 7. უცენტრო მეორე რიგის წირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე. წირის აგება კოორდინატთა სისტემაში

1. უცენტრო მეორე რიგის წირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე. მოვაბრუნოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ ახალი სისტემის Ox' ღერძი პარალელური იყოს სიმეტრიის ღერძისა. როგორც ცნობილია, ამ მობრუნებას განსაზღვრავს შემდეგი გარდაქმნები:

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2,$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2.$$

Ox' ღერძს მივანიჭოთ $P(L,\ M)$ ვექტორის გეზი, სადაც L და M ამოხსნებია (43) სისტემისა, სახელდობრ, მოცემულია (44) ფორმულებით. ამ პირობებში P ვექტორი Ox, Oy ღერძებთან შეადგენს ისეთივე კუთხეებს, როგორსაც ადგენს Ox' ღერძი; ესენია α_1 და β_1 კუთხეები. გვექნება:

$$\cos\alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2}}. \tag{49}$$

ასეთი გარდაქმნის შემდეგ განტოლებაში არ უნდა შევიდეს x', y'-ის ნამრავლიანი წევრი, ე. ი. $a'_{12}=0$, ხოლო a'_{11}, a'_{22} გამოითვლება (34) განტოლების თანახმად. ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც გვექნება:

$$a'_{11} = \lambda_1, \quad a'_{22} = \lambda_2.$$

მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = S.$$

ამრიგად წირის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$Sy'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0. \tag{50}$$

ადვილი შესამოწმებელია, აგრეთვე, რომ განსახილავი გარდაქმნის დროს ახალ კოორდინატებში მეორე ხარისხის წევრები მოგვცემენ მეორე ხარისხის წევრებს, პირველი ხარისხის წევრები—პირველი ხარისხის წევრებს, თავისუფალი წევრი კი თავისუფალ წევრს. ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ პირველი ხარისხის წევრები. გვექნება

$$a_{13}x+a_{23}y\equiv a'_{13}x'+a'_{23}y'.$$

ამ ტოლობაში x, y-ის მნიშვნელობათა ჩასმა, განსახილავი გარდაქმნების მიხედვით, მოგვცემს

$$a'_{13}=a_{13}\cos\alpha_1+a_{23}\cos\beta_1. \tag{51}$$

თუ აქ შევიტანთ (49) ფორმულებიდან კოსინუსების მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ

$$a'_{13}=\frac{a_{13}L+a_{23}M}{\sqrt{L^2+M^2}}, \tag{52}$$

სადაც უნდა გვახსოვდეს, რომ L, M მოცემულია (43) სისტემით. ახლა განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $a'_{13}\neq 0$. კოორდინატთა სისტემა გადავიტანოთ პარალელურად ისე, რომ ახალი სისტემის $O'x''$ ღერძი დაემთხვეს სიმეტრიის ღერძს. ახალ განტოლებაში არ შევა $O'y''$-ის პირველი ხარისხის წევრი (რადგან x'' სიმეტრიის ღერძია). S და a'_{13} კოეფიციენტები ამ შემთხვევაში ცვლილებას არ განიცდის. გვექნება

$$Sy''^2+2a'_{13}x''+a'_{33}=0.$$

თუ აქ ჩავსვამთ $y''=0$, მაშინ მივიღებთ $O'x''$ ღერძის, რაც იგივეა, სიმეტრიის ღერძის თანაკვეთის წერტილს წირთან. ამ წერტილს ეწოდება წ ი რ ი ს წ ვ ე რ ო. ეს წერტილი შეგვეძლო თავიდანვე განგვესაზღვრა როგორც უცენტრო წირისა და მისი სიმეტრიის ღერძის თანაკვეთის წერტილი. შემდეგ ახალი სისტემა აგვეღო ისე, რომ $O'x'$ ღერძი შეთავსებოდა სიმეტრიის ღერძს და ახალი სისტემის სათავე კი მოთავსებულიყო წირის წვეროში. ასეთ პირობებში წირის განტოლებაში a'_{33} გაუტოლდება ნულს (რადგან წირი გაივლიდა ახალი სისტემის სათავეზე, წირის წვეროზე). მაშასადამე, ასეთი შერჩევის დროს წირის განტოლება მიიღებდა შემდეგ სახეს

$$Sy'^2+2a'_{13}x'=0,$$

სადაც a'_{13} მოცემულია (52) ფორმულით. გავყოთ ეს განტოლება S-ზე. გვექნება

$$y'^2+\frac{2a'_{13}}{S}x'=0.$$

იმისდა მიხედვით, თუ როგორია კოეფიციენტების ნიშნები, შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{a'_{13}}{S}=\pm p \quad (p>0).$$

ამრიგად მივიღებთ საბოლოოდ

$$y'^2=\pm 2px'.$$

აქედან ჩანს, რომ, როცა $a'_{13}\neq 0$, მაშინ უცენტრო წირის კანონიკური განტოლება იქნება შემდეგი სახისა

$y'^2=2px'$ (პარაბოლა, რომლის ფოკუსი მოთავსებულია x' ღერძზე სათავიდან მარჯვნივ),

$y'^2=-2px'$ (პარაბოლა, რომლის ფოკუსი მოთავსებულია x' ღერძზე სათავიდან მარცხნივ).

2) $a'_{13}=0$. ამ შემთხვევაში წირის (50) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$Sy'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}=0.$$

აქედან ამოიხსნება y' და მივიღებთ ორ ფესვს:

$$y'=b_1, \quad y'=b_2.$$

ამრიგად მივიღებთ ორ პარალელურ წრფეს. ამ შემთხვევაში წირი მრავალცენტრიანია, ე. ი. (22) სისტემას უნდა ჰქონდეს უამრავი ამონახსნი. ეს კი მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა ამ ორი განტოლების კოეფიციენტები პროპორციულია. ამ პირობებში ცხადია, რომ Δ იქნება ნული (ორი სტრიქონის ელემენტები პროპორციულია). ამრიგად, პარალელურ წრფეთათვის $D=0$, $\Delta=0$. პირუკუ, თუ $D=0$, $\Delta=0$, მაშინ წირი პარალელურ წრფეთა წყვილს წარმოადგენს. მართლაც, ამ შემთხვევაში შემდეგ სამუცნობიან სისტემას

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0,\\
a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=0,\\
a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3&=0
\end{aligned}$$

ექნება ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი (რადგან $\Delta=0$). რადგან $D=0$, ამიტომ, თუ დავუშვებთ $x_3\neq 0$, მაშინ პირველი ორი

განტოლების კოეფიციენტები უნდა იყოს პროპორციული. ხოლო, თუ დავუშვებთ $x_3=0$, მაშინ კოეფიციენტების პირველი ორი სვეტი (რაც იგივე პირველი ორი სტრიქონის კოეფიციენტებია) უნდა იყოს პროპორციული. ამრიგად, თუ $D=0$ და $\Delta=0$, მაშინ (22) სისტემის კოეფიციენტები პროპორციულია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ განსახილავი წირი მრავალცენტრიანია. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ასეთი წირი მხოლოდ პარალელურ წრფეთა წყვილს წარმოადგენს. მართლაც, რადგან წირი მრავალცენტრიანია, ამიტომ მისი განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე (ერთ-ერთი ცენტრის მიმართ ჩავატარებთ ისეთივე მსჯელობას, როგორც ცენტრიანი წირისათვის).

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}=0.$$

ამ შემთხვევაში a'_{11}, a'_{22} კოეფიციენტები ისევე გამოითვლება, როგორც ცენტრიანი წირისათვის (მახასიათებელი განტოლების ფესვებია),

$$a'_{11}=\lambda_1, \quad a'_{22}=\lambda_2.$$

a'_{33} კი გამოითვლება (46) ფორმულის მიხედვით. მეორე მხრივ, რადგან $D=0$, ამიტომ λ_1, λ_2 ფესვებიდან ერთ-ერთი ნული უნდა იყოს. დავუშვათ, რომ $\lambda_2=0$. ამრიგად წირის კანონიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $a'_{33}=F(x_0, y_0)$

$$\lambda_1 x'^2+F(x_0, y_0)=0. \tag{55}$$

ეს განტოლება კი, ცხადია, პარალელურ წრფეთა წყვილის განტოლებაა (ეს წყვილი შეიძლება იყოს ნამდვილი ან წარმოსახვითი). ამრიგად, $\Delta=0$ დამახასიათებელია მხოლოდ წრფეთა წყვილებისათვის.

2. უცენტრო წირის აგება განტოლების მიხედვით. ზემოაღნიშნული მსჯელობა საშუალებას იძლევა ავაგოთ უცენტრო წირი მისი განტოლების მიხედვით; ამისათვის საჭიროა ავაგოთ ჯერ წირის სიმეტრიის ღერძი (42) განტოლების მიხედვით. განვსაზღვროთ წირის წვერო (თუ $\Delta\neq 0$), როგორც წირისა და სიმეტრიის ღერძის თანაკვეთის წერტილი. მისი კოორდინატები იქნება წირის განტოლებისა და სიმეტრიის ღერძის (42) განტოლებისაგან შედგენილი სისტემის ამონახსნები. Ox' ღერძად მივიღოთ სიმეტრიის ღერძი. ეს ღერძი მოვვეზოთ $P(L, M)$ ვექტორით (სადაც L, M განსაზღვრულია (43) სისტემით). ახალი სისტემის კოორდინატთა სათავე ავიღოთ წირის წვეროში. $O'y'$ ღერძი, ცხადია, აიგება $O'x'$ ღერძის მართობულად. მოგეზულობას მნიშვნელობა არა აქვს (რადგან კანონიკურ განტოლებაში y' შედის მხოლოდ y'^2-ის სახით). ახა-

ლი სისტემის მიმართ წირის განტოლებას ექნება კანონიკური სახე (პარაბოლის კანონიკური განტოლება) და იგი აიგება ახალ სისტემაში VII თავში განხილული წესის მიხედვით. რადგან ახალი სისტემა თვითონ სავსებით განსაზღვრულია ძველის მიმართ, ამიტომ წირი აგებული აღმოჩნდება ძველი სისტემის მიმართაც.

თუ $D=0$, მაშინ წირი ორ პარალელურ წრფეს წარმოადგენს. ამ წრფეების განტოლებანი განისაზღვრება y-ის ამოხსნით წირის განტოლებიდან. მიღებულ განტოლებათა მიხედვით აიგება წრფეები და ამით აგებული იქნება თვით წირი.

§ 8. დასკვნები

1. მეორე რიგის წირთა სახეობრივი კლასიფიკაცია.

1) $\Delta\neq 0$, $D>0$ ელიფსი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი),

2) $\Delta\neq 0$, $D<0$ ჰიპერბოლა,

3) $\Delta\neq 0$, $D=0$ პარაბოლა,

4) $\Delta=0$ წრფეთა წყვილი. წრფეების განტოლებანი მიიღება y-ის ამოხსნით წირის განტოლებიდან.

2. ცენტრიანი წირის კანონიკური განტოლება. თუ სიმეტრიის ღერძებს მივიღებთ ახალი სისტემის ღერძებად, მაშინ წირის განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\Delta}{D}=0,$$

სადაც λ_1, λ_2 ფესვებია შემდეგი განტოლებისა

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

3. სიმეტრიის ღერძების განტოლებები ცენტრიანი წირისათვის.

$$L(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+M(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0,$$

სადაც L, M ამონახსნებია შემდეგი სისტემისა:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)L+a_{12}M=0, \\ a_{12}L+(a_{22}-\lambda)M=0. \end{aligned}\right\}$$

ამ განტოლებათა სისტემაში მორიგეობით უნდა ჩავსვათ λ_1, λ_2, შემდეგ კი ამოვხსნათ L, M-ის შესაბამი მნიშვნელობანი L_1, M_1 და L_2, M_2. ეს მნიშვნელობანი განისაზღვრება ნებისმიერი მამრავლის სიზუსტით. მაგრამ მამრავლს მნიშვნელობა არა აქვს სიმეტრიის ღერძების განტოლებაში.

4. ცენტრიანი წირის აგება. აიგება ჯერ სიმეტრიის ღერძები. ამ ღერძებისაგან შედგენილი იქნება ახალი კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ $O'x'$ ღერძი შეუთავსდეს λ_2 ფესვის შესაბამ სიმეტრიის ღერძს, ხოლო $O'y'$ ღერძი კი λ_1-ის შესაბამ სიმეტრიის ღერძს. ახალი ღერძების მოგეზულობა ნებისმიერად შეიძლება ავიღოთ. ამ სისტემის მიმართ დაიწერება წირის კანონიკური განტოლება

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{D} = 0.$$

ამ განტოლების მიხედვით აიგება წირი ახალი სისტემის მიმართ. ამით იგი აგებული აღმოჩნდება ძველი სისტემის მიმართაც.

5. პარაბოლის კანონიკური განტოლება $(\Delta \neq 0)$. თუ $O'x'$ ღერძს შევუთავსებთ სიმეტრიის ღერძს, ხოლო კოორდინატთა სათავეს ავიღებთ წირის წვეროში, მაშინ წირის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$Sy'^2 + 2a'_{13}x' = 0,$$

სადაც

$$S = a_{11} + a_{22},$$

$$a'_{13} = \frac{a_{13}L + a_{23}M}{\sqrt{L^2 + M^2}}.$$

აქ L, M ამონახსნებია შემდეგი სისტემისა:

$$a_{11}L + a_{12}M = 0,$$
$$a_{12}L + a_{22}M = 0.$$

აქვე აღვნიშნავთ, რომ $O'x'$ ღერძი მოგეზულია $\overline{P}(L, M)$ ვექტორით. $O'y'$ ღერძის გეზი კი ნებისმიერია. აქაც L, M განისაზღვრება ნებისმიერ მამრავლამდე, მაგრამ მას მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ $O'x'$ ღერძის მოგეზვისათვის.

6. სიმეტრიის ღერძი და წვერო $(\Delta \neq 0)$. სიმეტრიის ღერძი განისაზღვრება შემდეგი განტოლებით

$$k(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) - (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

წირის წვეროს კოორდინატები კი განისაზღვრება როგორც შემდეგი სისტემის ამონახსნები (წირისა და სიმეტრიის ღერძის განტოლებათა სისტემა):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$k(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) - (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

7. პარაბოლის აგება. უნდა ავაგოთ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი და წვერო. წვეროდან აღვმართოთ სიმეტრიის ღერძის

ქართობული წრფე. ამ ორი წრფით შევადგინოთ ახალი სისტემა შემდეგნაირად: ახალი სისტემის $O'x'$ ღერძი შევუთავსოთ სიმეტრიის ღერძს. იგი მოვგეზოთ $\overline{P}(L, M)$ ვექტორით. ახალი სისტემის სათავე ავიღოთ წვეროში. $O'y'$ ღერძი შეგვიძლია მოვგეზოთ ნებისმიერად ამ სისტემაში. ამ სისტემის მიმართ დაიწერება წირის კანონიკური განტოლება

$$Sy'^2+2a'_{13}x'=0.$$

ავაგებთ მას ახალ სისტემაში და ამით იგი აგებული აღმოჩნდება ძველი სისტემის მიმართაც.

8. წირის აგება იმ შემთხვევაში, როცა $\Delta=0$. ამ შემთხვევაში წირი წრფეთა წყვილს წარმოადგენს. უნდა ამოვხსნათ y წირის განტოლებიდან. მივიღებთ ორ წრფივ განტოლებას. ამ განტოლებათა მიხედვით ავაგებთ წრფეებს. ამით აიგება წირი.

მაგალითები. 1. მოცემულია წირი შემდეგი განტოლებით

$$x^2+xy+y^2-2x-1=0.$$

მოითხოვება ეს განტოლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე და ავაგოთ წირი. ამ შემთხვევაში კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$a_{11}=1,\quad a_{12}=\frac{1}{2},\quad a_{22}=1,\quad a_{13}=-1,\quad a_{23}=0,\quad a_{33}=1.$$

გამოვთვალოთ Δ და D დეტერმინანტები. გვექნება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}, & -1 \\ \frac{1}{2}, & 1, & 0 \\ -1, & 0. & -1 \end{vmatrix}=-\frac{7}{4},$$

$$D=\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}.$$

როგორც ჩანს, $\Delta\neq 0$, $D>0$; მაშასადამე, წირი ელიფსია. ამოვხსნათ მახასიათებელი განტოლება. ამ შემთხვევაში იგი ასეთ სახეს მიიღებს

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

ამ დეტერმინანტის დაშლით მივიღებთ

$$\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0.$$

აქედან

$$\lambda_1=\frac{3}{2}, \quad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

ამრიგად კანონიკურ განტოლებას მიეცემა შემდეგი სახე (კანონიკურ განტოლებაში უნდა ჩავსვათ λ_1, λ_2, Δ, D-ს მნიშვნელობანი)

$$\frac{3}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2-\frac{7}{3}=0.$$

ახლა შევადგინოთ სიმეტრიის ღერძების განტოლებანი; ამისათვის ჩავსვათ λ_1, λ_2-ის მნიშვნელობანი (33) სისტემაში და ამოვხსნათ შესაბამი L_1, M_1, და L_2, M_2. ადვილი შესამოწმებელია, რომ, თუ ამ სისტემაში ჩავსვამთ $\lambda=\frac{3}{2}$, მაშინ სისტემას დააკმაყოფილებს L, M-ის შემდეგი მნიშვნელობანი: $L=1$, $M=1$; მაშასადამე, $L_1=1$, $M_1=1$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $L_2=1$, $M_2=-1$. ამ მნიშვნელობათა ჩასმა სიმეტრიის ღერძების (38) განტოლებებში მოგვცემს სიმეტრიის ღერძების განტოლებებს. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$3x+3y-2=0 \quad (\text{I სიმეტრიის ღერძი}),$$
$$x-y-2=0 \quad (\text{II სიმეტრიის ღერძი}).$$

ავაგოთ ეს წრფეები კოორდინატთა სისტემის მიმართ და მათგან შევადგინოთ ახალი სისტემა ისე, რომ $O'x'$ დაემთხვეს II სიმეტრიის ღერძს და $O'y'$ კი I სიმეტრიის ღერძს. მოგეზულობა სურვილისამებრ ავიღოთ. შემდეგ ავაგოთ ელიფსი $O'x'y'$ სისტემის მიმართ. იგი წარმოგვიდგება 113-ე ნახაზის მიხედვით.

2. მოცემულია წირის განტოლება

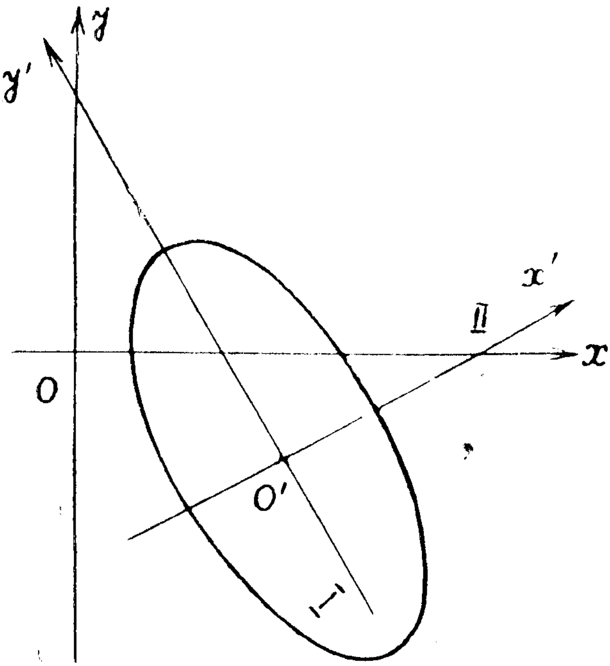
$$x^2-3xy+y^2-2x+4y-2=0.$$

ამ შემთხვევაში: $a_{11}=1$, $a_{12}=-\frac{3}{2}$, $a_{22}=1$, $a_{13}=-1$, $a_{23}=2$, $a_{33}=-2$. გამოვითვალოთ Δ და D. გვექნება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & -\frac{3}{2}, & -1 \\ -\frac{3}{2}, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & -2 \end{vmatrix}=-6+\frac{3}{2}\cdot 5+1\cdot 2=\frac{7}{2},$$

$$D=\begin{vmatrix} 1, & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}, & 1 \end{vmatrix}=-\frac{5}{4}.$$

ამრიგად $\Delta\neq 0$, $D>0$; მაშასადამე, წირი ჰიპერბოლაა. დავიყვანოთ განტოლება კანონიკურ სახეზე. ამისათვის ამოვხსნათ მახასიათებელი განტოლება. ამ შემთხვევაში იგი ასეთ სახეს მიიღებს



ნახ. 113.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}, & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

ანუ (გაშლის შემდეგ)

$$\lambda^2-2\lambda-\frac{5}{4}=0.$$

აქედან

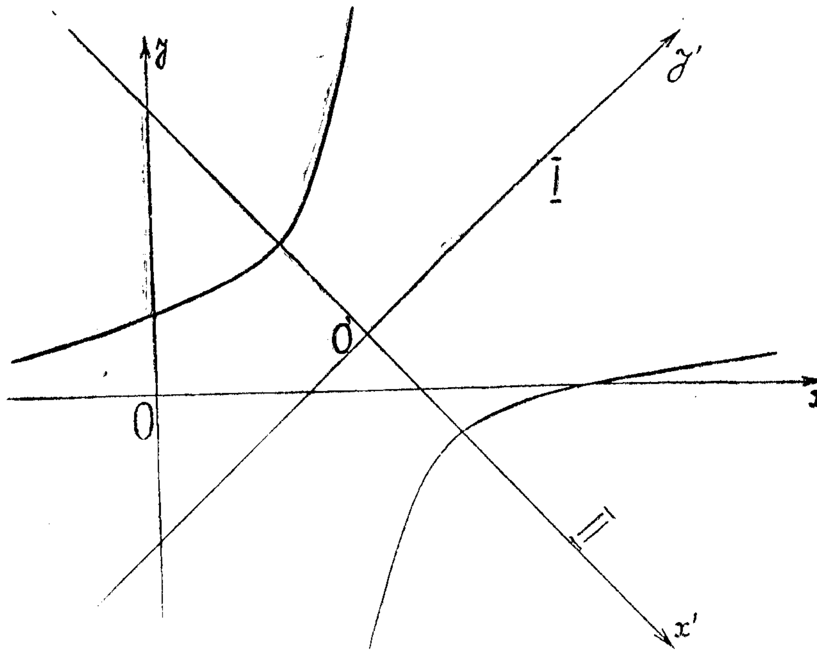
$$\lambda_1=\frac{5}{2}, \qquad \lambda_2=-\frac{1}{2}.$$

წირის კანონიკური განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{5}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2-\frac{14}{5}=0.$$

ახლა შევადგინოთ სიმეტრიის ღერძების განტოლებანი. წინა მაგალითზე ჩატარებული გამოთვლების მსგავსი გამოთვლით მივიღებთ:

$$L_1=-1,\quad M_1=1;\quad L_2=1,\quad M_2=1.$$



ნახ. 114.

(38) განტოლებანი ამ პირობებში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y-3=0 \quad (\text{I ღერძი}),$$

$$\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-3=0 \quad (\text{II ღერძი}).$$

ავაგოთ ეს წრფეები და მათგან შევადგინოთ ახალი კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ $O'x'$ ღერძი დაემთხვეს II სიმეტრიის ღერძს, $O'y'$ კი I სიმეტრიის ღერძს. შემდეგ ავაგოთ ჰიპერბოლა ახალი სისტემის მიმართ კანონიკური განტოლებით. წარმოგვიდგება 114-ე ნახაზზე მოცემული სურათი.

3. მოცემულია შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული წირი

$$x^2-2xy+y^2-2x-3y-2=0.$$

ამ შემთხვევაში $a_{11}=1$, $a_{12}=-1$, $a_{22}=1$, $a_{13}=-1$, $a_{23}=-\frac{3}{2}$, $a_{33}=-2$. გამოვთვალოთ Δ და D. გვექნება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -\frac{3}{2} \\ -1, & -\frac{3}{2}, & -2 \end{vmatrix}=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4},$$

$$D=\begin{vmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{vmatrix}=0.$$

ამრიგად $\Delta\neq 0$, $D=0$ წირი პარაბოლაა. დავიყვანოთ განტოლება კანონიკურ სახეზე; ამისათვის გამოვთვალოთ S და a'_{13} გვექნება:

$$S=a_{11}+a_{22}=1+1=2,$$

$$a'_{13}=\frac{a_{13}L+a_{23}M}{\sqrt{L^2+M^2}}=-\frac{-L-\frac{3}{2}M}{\sqrt{L^2+M^2}}.$$

თუ ჩავსვამთ (43) სისტემაში წირის განტოლების კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, მაშინ L, M-ისათვის მივიღებთ: $L=1$, $M=1$. ამრიგად a'_{13} მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობას

$$a'_{13}=\frac{-1-\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{5}{2\sqrt{2}}.$$

წირის კანონიკური განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$2y'^2-\frac{2\cdot 5}{2\sqrt{2}}x'=0.$$

აქედან

$$y'^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}x'.$$

ახლა შევადგინოთ სიმეტრიის ღერძის განტოლება; ამისათვის ჩავსვათ k-ს მნიშვნელობა სიმეტრიის ღერძის განტოლებაში. ამ შემთხვევაში $k=\frac{M}{L}=1$. სიმეტრიის ღერძის (42) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

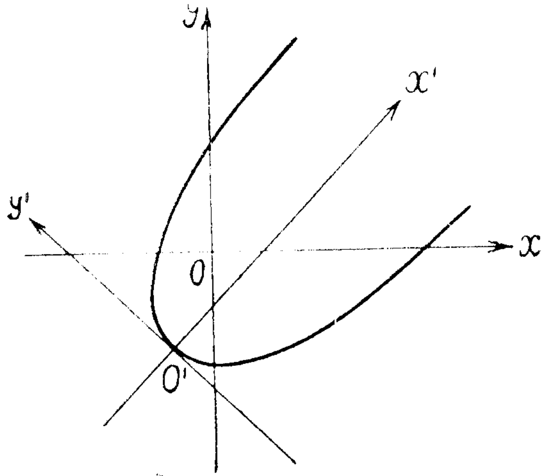
$$\left(x-\frac{3}{2}y-1\right)-\left(-\frac{3}{2}x+y-\frac{3}{2}\right)=0,$$

ანუ

$$5x-5y-1=0.$$

გამოვთვალოთ წვეროს კოორდინატები; ამისათვის სიმეტრიის ღერძის განტოლება უნდა მივუწეროთ წირის განტოლებას და მიღებული სისტემიდან ამოვხსნათ x, y. გვექნება:

$$x^2-2xy+y^2-2x-3y-2=0,$$
$$5x-5y-1=0.$$



ნახ. 115.

აქედან

$$x=-\frac{34}{125}, \qquad y=-\frac{59}{125}.$$

ავაგოთ სიმეტრიის ღერძი და წვერო. შევადგინოთ ახალი სისტემა ისე, რომ $O'x'$ ღერძი შეუთავსდეს სიმეტრიის ღერძს. იგი მოგეზული იქნება $\overline{P}(1,\ 1)$ ვექტორით. ახალი კოორდინატთა სათავე ავიღოთ წირის წვეროში. $O'y'$ ღერძი აღვმართოთ წვეროდან სიმეტრიის ღერძის მართობულად. მისი გეზი ნებისმიერია. ავაგოთ პარაბოლა ახალი სისტემის მიმართ კანონიკური განტოლების მიხედვით. ამით წარმოგვიდგება 115-ე ნახაზზე მოცემული სურათი.

1. მეორე რიგის წირის მხები წრფის განტოლება. ავიღოთ მეორე რიგის წირზე $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი და შევადგინოთ წირის მხების[1] განტოლება ამ წერტილში. რადგან წერტილი წირზე მდებარეობს, ის დააკმაყოფილებს წირის განტოლებას, რაც (2) აღნიშვნის ძალით ასე წარმოგვიდგება: $F(x, y)=0$. აქ x_0, y_0-ის ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$F(x_0, y_0)=0.$$

ამ შემთხვევაში (10) კვადრატული განტოლების c კოეფიციენტი იქნება ნული

$$c=F(x_0, y_0)=0.$$

ამიტომ (10) განტოლების ერთი ფესვი ნული იქნება. შეხების წერტილში წრფისა და წირის თანაკვეთის ორი წერტილი უნდა შეთავსდეს (ე. ი. მხებს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი უნდა ჰქონდეს წირთან). ამიტომ (10) კვადრატულ განტოლებას მეორე ფესვიც ნული უნდა ჰქონდეს; ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ განტოლების მეორე კოეფიციენტიც ნული იყოს. გვექნება: $b=0$, რაც (11) აღნიშვნების ძალით მოგვცემს

$$LF_1(x_0, y_0)+MF_2(x_0, y_0)=0. \tag{56}$$

ამრიგად (9) განტოლებით განსაზღვრული წრფე იქნება მხები, თუ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი წირზეა აღებული, ხოლო L, M მიმართულების კოეფიციენტები კი აკმაყოფილებენ (56) პირობას. ამრიგად (9) და (56) განტოლებანი განსაზღვრავენ მხებს. მხების განტოლების მისაღებად საჭიროა ამ სამი განტოლებიდან გამოირიცხოს L და M; ამისათვის უმჯობესია ასე მოვიქცეთ. (9) განტოლებათა სისტემიდან ამოვხსნათ L, M და ჩავსვათ (56) ტოლობაში. მივიღებთ

$$F_1(x_0, y_0)(x-x_0)+F_2(x_0, y_0)(y-y_0)=0. \tag{57}$$

---

[1] მეორე რიგის წირის მხები ეწოდება ისეთ წრფეს, რომელსაც წირთან საერთო აქვს მხოლოდ ერთი წერტილი. საზოგადოდ, წირის მხები M_0 წერტილში განიმარტება როგორც ზღვრული წრფე M_0 წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფისა, როცა ამავე მკვეთის წირთან თანაკვეთის მეორე წერტილი მიისწრაფვის M_0 წერტილისაკენ. ამ განმარტების მიხედვით მეორე რიგის წირის მხებს ექნება სწორედ ის თვისება, რაც საფუძვლად უდევს მეორე რიგის წირის მხების ზემომოყვანილ სხვანაირ განმარტებას.

ასეთია მეორე რიგის წირის მხები წრფის განტოლება, სადაც x, y არის მიმდინარე კოორდინატები, x_0, y_0—შეხების წერტილის კოორდინატები, ხოლო $F_1(x_0, y_0)$ და $F_2(x_0, y_0)$ განისაზღვრება (4) აღნიშვნების თანახმად მათში x, y-ის ნაცვლად x_0, y_0-ის ჩასმით. გვექნება:

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0) &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ F_2(x_0, y_0) &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}. \end{aligned} \tag{58}$$

შენიშვნა. (7) ტოლობათა მიხედვით მხების განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$F'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y-y_0) = 0. \tag{59}$$

2. მხები წრფე დიამეტრის ბოლო წერტილში. განვიხილოთ $P(L, M)$ ვექტორით განსაზღვრული მიმართულების შეუღლებული დიამეტრის განტოლება

$$LF_1(x, y) + MF_2(x, y) = 0.$$

დიამეტრის თანაკვეთის წერტილი წირთან აღვნიშნოთ M_0-ით. ამ წერტილის x_0, y_0 კოორდინატები დააკმაყოფილებს დიამეტრის განტოლებას. გვექნება

$$LF_1(x_0, y_0) + MF_2(x_0, y_0) = 0.$$

მეორე მხრივ, სწორედ ასეთ პირობას აკმაყოფილებენ M_0 წერტილში მხები წრფის მიმართულების L, M კოეფიციენტები; მაშასადამე, *დიამეტრის ბოლო წერტილში წირის მხებ წრფეს აქვს აღებული დიამეტრის შეუღლებული მიმართულება.*

თუ წირი ცენტრიანია, მაშინ დიამეტრი მას ორ წერტილში გაკვეთს. ამ ორივე ბოლო წერტილში მხებ წრფეებს უნდა ჰქონდეთ შეუღლებული მიმართულება. აქედან აშკარაა, რომ ეს წრფეები პარალელური იქნება. ამრიგად, *ცენტრიანი წირის დიამეტრის ბოლო წერტილებში გავლებული მხები წრფეები პარალელურია.*

3. მეორე რიგის ოვალი. რადგან წრფეს მეორე რიგის წირთან არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი საერთო წერტილი, ხოლო მხებ წრფეს კი წირთან აქვს ორი შეთავსებული საერთო წერტილი, ამიტომ მხებ წრფეს წირთან შეხების წერტილის გარდა, არ შეიძლება ჰქონდეს სხვა საერთო წერტილი, ე. ი. მხები წრფე წირთან არ თანაიკვეთება სხვა რაიმე წერტილში შეხების წერტილის გარეშე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წირი *ყოველთვის მხების ცალ მხარეს იქნება მოთავსებული.* ჩაკეტილ წირს, რომელსაც

ზემოაღნიშნული თვისება აქვს, ეწოდება ო ვ ა ლ უ რ ი წ ი რ ი. მეორე რიგის წირთა შორის ელიფსი წარმოადგენს ოვალურ წირს. მას მ ე ო რ ე რ ი გ ი ს ო ვ ა ლ ი ე წ ო დ ე ბ ა.

4. წრფის მხები წრფე. თუ წრფის ორ წერტილს შევაერთებთ რაიმე წრფით, მივიღებთ იმავე წრფეს. ეს ორი წერტილი ერთიმეორეს რომ მივუახლოვოთ შეთავსებამდე, ამით აღებული წრფე არ შეიცვლება. ამრიგად წ რ ფ ი ს მ ხ ე ბ ი წ რ ფ ე ყ ო ვ ე ლ წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა რ ი ს თ ვ ი თ ა ღ ე ბ უ ლ ი წ რ ფ ე.

მაგალითი. შევადგინოთ მხები წრფის განტოლება იმ შემთხვევაში, როცა მეორე რიგის წირი მოცემულია კანონიკური განტოლებით. ჯერ განვიხილოთ ელიფსი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ამ შემთხვევაში

$$a_{11}=\frac{1}{a^2},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=\frac{1}{b^2},$$

$$a_{13}=0,\quad a_{23}=0,\quad a_{33}=-1.$$

ჩავსვათ კოეფიციენტების ეს მნიშვნელობანი (58) ტოლობაში. მივიღებთ:

$$F_1(x_0, y_0)=\frac{x_0}{a^2},$$

$$F_2(x_0, y_0)=\frac{y_0}{b^2}.$$

ამის მიხედვით მხების (57) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=0.$$

აქედან

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^{\,2}}{a^2}+\frac{y_0^{\,2}}{b^2}.$$

რადგან M_0 წერტილი მდებარეობს ელიფსზე, ამიტომ აკმაყოფილებს მის განტოლებას. გვექნება

$$\frac{x_0^{\,2}}{a^2}+\frac{y_0^{\,2}}{b^2}=1.$$

ამრიგად, წინა განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \text{ (ელიფსის მხები).}$$

ასეთია ელიფსის მხების განტოლება ამ შემთხვევაში. ანალოგიური გამოთვლებით მიიღება ჰიპერბოლისა და პარაბოლის მხები წრფეების განტოლებანი. ამ წირთა კანონიკური განტოლების შესაბამად გვექნება:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{(ჰიპერბოლის მხები)},$$

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \text{(პარაბოლის მხები)}.$$

კერძოდ, წრეწირის მხები მიიღება ელიფსის მხებისაგან, თუ იქ ჩავწერთ

$$a = b = r.$$

ამგვარად მივიღებთ

$$x_0 x + y_0 y = r^2 \quad \text{(წრეწირის მხები)}.$$

თუ დავუკვირდებით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი უდრის $-\frac{x_0}{y_0}$. მეორე მხრივ წრეწირის რადიუსის კუთხური კოეფიციენტი ტოლია $\frac{y_0}{x_0}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წრეწირის მხები მართობულია შესაბამი რადიუსისა, რაც უშუალოდაც ჩანს.

§ 10. მეორე რიგის წირის ასიმპტოტები

მეორე რიგის წირის მხების ზღვრულ წრფეს, როცა შეხების წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, ეწოდება წირის ასიმპტოტი. ამ განმარტების თანახმად, ასიმპტოტი წარმოგვიდგება როგორც მხები უსასრულობაში. რადგან მხებ წრფეს, შეხების წერტილში, წირთან აქვს ორი შეთავსებელი თანაკვეთის წერტილი, ამიტომ ასიმპტოტს, როგორც წირის მხებს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში, წირთან ექნება ორი შეთავსებული თანაკვეთის წერტილი უსასრულეთში. ამრიგად, მოცემული წრფე ასიმპტოტს განსაზღვრავს, თუ მისი მხებთან თანაკვეთის ორი წერტილი უსასრულეთშია. ეს მოხდება მაშინ, როცა თანაკვეთის წერტილების განმსაზღვრელი (10) კვადრატული განტოლების ორივე ფესვი იქნება უსასრულოდ დიდი. ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ განტოლების პირველი და მეორე კოეფიციენტი იყოს ნული, ე. ი.

$$a = 0, \quad b = 0.$$

თანახმად (11) აღნიშვნებისა, გვექნება:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}L^2+2a_{12}LM+a_{22}M^2=0, \\ F_1(x_0, y_0)L+F_2(x_0, y_0)M=0. \end{array}\right\} \tag{60}$$

სადაც x_0, y_0 აღებული წრფის (ამ შემთხვევაში ასიმპტოტის) რაიმე წერტილის კოორდინატებია. შესაძლებელია ისინი მივიღოთ მიმდინარე კოორდინატებად, მაშინ უკანასკნელი სისტემის მეორე განტოლება განსაზღვრავს ასიმპტოტს, პირველი განტოლებით კი განისაზღვრება ასიმპტოტის მიმართულება. მეორე მხრივ პირველი განტოლება განსაზღვრავს ასიმპტოტურ მიმართულებას. ამრიგად ასიმპტოტი წარმოგვიდგება შემდეგი განტოლებით

$$LF_1(x, y)+MF_2(x, y)=0, \tag{61}$$

სადაც L, M ასიმპტოტურ მიმართულებას განსაზღვრავს. მეორე მხრივ (61) განტოლება $\overline{P(L, M)}$ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრის განტოლებაა. ამრიგად წირის ასიმპტოტი წარმოგვიდგება როგორც ასიმპტოტური მიმართულებისადმი შეუღლებული დიამეტრი. რადგან ასიმპტოტს აქვს ასიმპტოტური მიმართულება, ამიტომ ასიმპტოტური მიმართულების შეუღლებული მიმართულება (ე. ი. ასიმპტოტის მიმართულება) იქნება აგრეთვე ასიმპტოტური მიმართულება; მაშასადამე, ასიმპტოტი წარმოგვიდგება როგორც თავისი თავისადმი შეუღლებული დიამეტრი.

ახლა გამოვარკვიოთ თუ რომელი წირებისათვის არსებობს ასიმპტოტები. ამისათვის გავიხსენოთ $\overline{P(L, M)}$ მიმართულებისადმი შეუღლებული დიამეტრის (27) განტოლება, რომელიც ამ შემთხვევაში ასიმპტოტს წარმოადგენს. ეს განტოლება განსაზღვრავს წრფეს, თუ A და B კოეფიციენტები ერთდროულად ნული არ არის, ხოლო, თუ ეს კოეფიციენტები ერთდროულად ნულია, წრფე არ განისაზღვრება. ამრიგად წირს არ ექნება ასიმპტოტი იმ შემთხვევაში, როცა

$$A=0, \quad B=0.$$

ეს ტოლობანი (28) აღნიშვნების თანახმად ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{array}{l} a_{11}L+a_{12}M=0, \\ a_{12}L+a_{22}M=0. \end{array}$$

ამ სისტემას მხოლოდ მაშინ ექნება ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი, როცა სისტემის დეტერმინანტი ნულია. პირდაპირ ჩანს, რომ სისტემის დეტერმინანტი არის D. ამრიგად, თუ $D=0$ არ არსებობს $\overline{P(L, M)}$ მიმართულების შეუღლებული დიამეტრი. მაგ-

რამ ასეთი მიმართულება, რომელიც უკანასკნელ სისტემას აკმაყოფილებს, არის ასიმპტოტური მიმართულება (იხ. (43) სისტემა). მაშასადამე, თუ $D=0$ წირს ასიმპტოტი არა აქვს. მეორე მხრივ ვიცით, რომ $D=0$ პირობა ახასიათებს პარაბოლას; მაშასადამე, პარაბოლას ასიმპტოტი არა აქვს. თუ $D\neq 0$ წირს ექნება იმდენი ასიმპტოტი, რამდენიც აქვს ასიმპტოტური მიმართულება. როგორც ვიცით, მეორე რიგის წირს ამ შემთხვევაში აქვს ორი ასიმპტოტური მიმართულება—წარმოსახვითი ან ნამდვილი იმისდა მიხედვით, თუ როგორია D-ს ნიშანი, ე. ი. რომელი მეორე რიგის წირია ელიფსი თუ ჰიპერბოლა. ელიფსს წარმოსახვითი ასიმპტოტური მიმართულებანი აქვს, ამიტომ მისი ასიმპტოტებიც წარმოსახვითია. ჰიპერბოლას ნამდვილი ასიმპტოტური მიმართულებანი აქვს. ამიტომ მისი ასიმპტოტებიც ნამდვილია. ამრიგად ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირებიდან მხოლოდ ჰიპერბოლას აქვს ნამდვილი ასიმპტოტები. მათი განტოლება მიიღება (61) განტოლებიდან მასში L, M-ის იმ მნიშვნელობათა ჩასმით, რომელნიც შეესაბამებიან ასიმპტოტურ მიმართულებებს. ასიმპტოტების განტოლებათა შესადგენად შეგვიძლია კიდევ ასეც მოვიქცეთ. განვსაზღვროთ წირის ცენტრის კოორდინატები, ასიმპტოტურ მიმართულებათა კუთხური კოეფიციენტები და დავწეროთ ცენტრზე გამავალი წრფეების განტოლებანი ასიმპტოტურ მიმართულებათა კუთხური კოეფიციენტებით. მივიღებთ ასიმპტოტური მიმართულების მქონე დიამეტრების განტოლებებს, ე. ი. ასიმპტოტების განტოლებებს. ამრიგად ასიმპტოტის განტოლება ასე წარმოგვიდგება

$$y-y_0=k(x-x_0), \tag{62}$$

სადაც k ასიმპტოტური მიმართულების კუთხური კოეფიციენტია. იგი ამოიხსნება (18) განტოლებიდან.

თუ წირი გადაგვარებულია წრფეთა წყვილად, მაშინ ასიმპტოტები იქნება თვით წირის შემადგენელი წრფეები. მართლაც, წრფის მხები ყოველ წერტილში თვით აღებული წრფეა. მისი ზღვარიც, როცა შეხების წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, იქნება თვით აღებული წრფე.

მაგალითი. განვსაზღვროთ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებანი, როცა ჰიპერბოლა მოცემულია კანონიკური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(18) განტოლება ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{k^2}{b^2}-\frac{1}{a^2}=0.$$

აქედან $k=\pm\frac{b}{a}$. გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში წირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ე. ი. $x_0=y_0=0$. ამრიგად, ასიმპტოტის (62) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

§ 11. მეორე რიგის წირის განსაზღვრა 5 წერტილით

როგორც ცნობილია, ნებისმიერ ორ წერტილზე შეგვიძლია გავატაროთ წრფე. ნებისმიერ არაკოლინეარულ სამ წერტილზე შეგვიძლია გავატაროთ წრეწირი. ამის ანალოგიურად მეორე რიგის წირებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას: **სიბრტყის ნებისმიერ ხუთ წერტილზე შეიძლება მეორე რიგის წირის გატარება.**

დავამტკიცოთ ეს დებულება. ვთქვათ, მოცემულია 5 წერტილი: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ და საძიებელია ისეთი მეორე რიგის წირი, რომელიც ამ წერტილებზე გაივლის; ამისათვის წირის (1) განტოლებაში კოეფიციენტები ისე შევარჩიოთ, რომ ეს განტოლება დაკმაყოფილდეს მოცემული წერტილების კოორდინატებით. გვექნება:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1y_1+a_{22}y_1^2+2a_{13}x_1+2a_{23}y_1+a_{33}=0,\\
&a_{11}x_2^2+2a_{12}x_2y_2+a_{22}y_2^2+2a_{13}x_2+2a_{23}y_2+a_{33}=0,\\
&a_{11}x_3^2+2a_{12}x_3y_3+a_{22}y_3^2+2a_{13}x_3+2a_{23}y_3+a_{33}=0,\\
&a_{11}x_4^2+2a_{12}x_4y_4+a_{22}y_4^2+2a_{13}x_4+2a_{23}y_4+a_{33}=0,\\
&a_{11}x_5^2+2a_{12}x_5y_5+a_{22}y_5^2+2a_{13}x_5+2a_{23}y_5+a_{33}=0.
\end{aligned}$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ეს არის ხუთი განტოლებისაგან შედგენილი ერთგვაროვანი სისტემა (1) განტოლების კოეფიციენტების, ე. ი. a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}-ის მიმართ. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ასეთ სისტემას ყოველთვის აქვს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. მართლაც, თუ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცის (ე. ი. ყველა კოეფიციენტისაგან შედგენილი მატრიცი) რანგი 5-ის ტოლია, მაშინ შეგვიძლია ხუთი უცნობი გამოვსახოთ მეექვსის სა-

შუალებით. თვით მეექვსეს კი მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობანი. შევნიშნოთ, რომ ერთადერთი სახის ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობანი კოეფიციენტებისა, რომელნიც არ განსაზღვრავენ არავითარ წირს არის შემდეგი:

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0, \quad a_{33}\neq 0.$$

მაგრამ პირდაპირ ჩანს, რომ კოეფიციენტების ასეთი მნიშვნელობანი არ შეიძლება აკმაყოფილებდეს ზემოაღნიშნულ სისტემას. ყველა დანარჩენი მნიშვნელობანი მოგვცემენ რაიმე განტოლებას. კერძოდ, შესაძლებელია მოცემული წერტილები ისე იყოს დალაგებული, რომ მოგვცეს

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=0.$$

ამ შემთხვევაში (1) განტოლებიდან მივიღებდით წრფივ განტოლებას

$$a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0,$$

რომელიც განსაზღვრავს წრფეს. მაშასადამე, მოცემული წერტილები ამ წრფეზე იქნება დალაგებული. ნებისმიერი სხვა წრფე ამ წრფესთან ერთად მოგვცემს ისეთ წრფეთა წყვილს (ე. ი. გადაგვარებულ მეორე რიგის წირს), რომელიც გაივლის მოცემულ ხუთ წერტილზე. მაშასადამე, დებულება ამ შემთხვევაშიაც მართებული იქნება. თუ ზემოაღნიშნული სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგი 4-ის ტოლია, მაშინ მოცემული ხუთი განტოლებიდან მხოლოდ ოთხი იქნება დამოუკიდებელი. ამ ოთხი განტოლებიდან შეგვიძლია გამოვსახოთ ოთხი უცნობი ორი დანარჩენის საშუალებით. ამ ორ უკანასკნელს კი მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობანი. მაშასადამე, იარსებებს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნები, ე. ი. იარსებებს მეორე რიგის წირი, რომელიც მოცემულ წერტილებზე გაივლის. ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება დებულების მართებულობა დანარჩენ შემთხვევებში. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ მოცემული ხუთი წერტილიდან არც ერთი სამეული არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, ე. ი. თუ მოცემული წერტილები ქმნიან ხუთკუთხედს, მაშინ მათზე გამავალი მეორე რიგის წირი იქნება ჩვეულებრივი. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. წირი რომ წრფეთა წყვილს წარმოადგენდეს, მაშინ მოცემულ წერტილთა ერთ-ერთი სამეული მოთავსდებოდა ამ წერტილებზე გამავალ წრფეთა წყვილის რომელიმე წრფეზე, რაც ეწინააღმდეგება ზემოაღნიშნულ პირობას. ადვილად მტკიცდება, აგრეთვე, რომ ამ შემთხვევაში მოცემულ 5 წერტილზე გამავალი ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირი

განისაზღვრება ცალსახად. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ორ სხვადასხვა ჩვეულებრივ მეორე რიგის წირს არ შეიძლება ჰქონდეს ოთხზე მეტი საერთო წერტილი. ამის დასამტკიცებლად წარმოვიდგინოთ, რომ აღებული ორი წირიდან ერთ-ერთი წირის განტოლება დაყვანილია კანონიკურ სახეზე. მეორე წირს, საზოგადოდ, ექნება ნებისმიერი განტოლება (არა კანონიკური). კანონიკური განტოლებიდან ამოვხსნათ y^2. იგი გამოისახება x-ის საშუალებით. შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა მეორე წირის განტოლებაში y^2-ის ნაცვლად. განტოლებაში y დარჩება მხოლოდ პირველ ხარისხში. ამოვხსნათ ამ უკანასკნელი განტოლებიდან y. იგი x-ის საშუალებით გამოისახება რაციონალურად. y-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ პირველი წირის კანონიკურ განტოლებაში, მივიღებთ მეოთხე ხარისხის განტოლებას x-ის მიმართ, რომელსაც არ შეიძლება ჰქონდეს ოთხზე მეტი ფესვი თუ იგი იგივური არ არის. თუ იგივურია, მას დააკმაყოფილებს x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობა, ე. ი. წირები შეთავსდებიან. ამრიგად ორ სხვადასხვა ჩვეულებრივ წირს არ შეიძლება ჰქონდეს ოთხზე მეტი საერთო წერტილი. აქედან კი აშკარაა, რომ ზემოაღნიშნული წესით აღებულ (ხუთკუთხედის წვეროები) ხუთ წერტილზე გაივლის ერთადერთი მეორე რიგის წირი ამ დებულების დამტკიცება მოყვანილია სხვა სახით წიგნის ბოლო თავში.

§ 12. მეორე რიგის წირის ინვარიანტები

1. ორთოგონალური ინვარიანტები. ორთოგონალური გარდაქმნის დროს წირის განტოლების კოეფიციენტები, საზოგადოდ, იცვლება. მაგრამ შესაძლებელია კოეფიციენტებისაგან შედგენილი გარკვეული გამოსახულებანი არ იცვლებოდეს, მათ ეწოდება ორთოგონალური გარდაქმნის ინვარიანტები. ასეთებია, მაგალითად, მახასიათებელი განტოლების ფესვები: λ_1 და λ_2. ცხადია, არ შეიცვლება აგრეთვე ამ ფესვების ჯამი და ნამრავლი. მეორე მხრივ, კვადრატული განტოლების ფესვების თვისებების თანახმად, გვექნება:

$$\lambda_1+\lambda_2=S, \quad \lambda_1\lambda_2=D.$$

ამრიგად S და D ორთოგონალური გარდაქმნის ინვარიანტებია. მაგრამ ამით არ ამოიწურება ორთოგონალური გარდაქმნის ყველა ინვარიანტი. მეორე რიგის წირის ინვარიანტების სრული სისტემის განსასაზღვრავად გამოვიყენებთ უმაღლესი ალგებრის შემდეგ დებულებას: თუ მოცემული კვადრატული ფორმა

$$\Phi=\sum_{i,\,j} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

წრფივი ჩასმით $x_i' = \sum_j \lambda_{ij} x_j$ დაიყვანება შემდეგ სახეზე

$$\Phi = \sum_{i,j} a'_{ij}\, x_i'\, x_j',$$

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\Delta' = \delta^2 \Delta, \tag{63}$$

სადაც Δ, Δ'; δ შესაბამად არიან (a_{ij}), (a'_{ij}), (λ_{ij}) მატრიცების დეტერმინანტები.

მეორე რიგის წირის განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულება შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$F(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, x_j,$$

სადაც

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1.$$

ამის ანალოგიურად ორთოგონალური გარდაქმნები სიბრტყეზე ასე წარმოგვიდგება:

$$x_1 = x_1'\cos\alpha \mp x_2'\sin\alpha + x_3' a,$$
$$x_2 = x_1'\sin\alpha \pm x_2'\cos\alpha + x_3' b,$$
$$x_3 = x'_3,$$

სადაც

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = 1$$

(ერთდროულად აიღება ზედა ან ქვედა ნიშნები). ამ შემთხვევაში δ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \mp\sin\alpha, & a \\ \sin\alpha, & \pm\cos\alpha, & b \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

აქედან $\delta = \pm 1$, ამის მიხედვით (63) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\Delta' = \Delta.$$

ამრიგად, წირის განტოლების დისკრიმინანტი Δ ინვარიანტია ორთოგონალური გარდაქმნის მიმართ.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი კვადრატული ფორმა

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - \lambda(x^2 + y^2).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფორმა ერთგვაროვანი ჩასმით

$$x = x'\cos\alpha \mp y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha \pm y'\sin\alpha$$

დაიყვანება შემდეგ სახეზე

$$\varphi(x, y) = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 - \lambda(x'^2 + y'^2).$$

ამ შემთხვევაში δ ასე წარმოგვიდგება

$$\delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha, \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha, \pm\cos\alpha \end{vmatrix} = \pm 1.$$

ამრიგად, $\varphi(x, y)$ ფორმის დისკრიმინანტი

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

უნდა იყოს ინვარიანტი. მაშასადამე,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda, & a'_{12} \\ a'_{12}, & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

ეს ტოლობა დაცული უნდა იყოს λ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ამიტომ მარჯვნივ და მარცხნივ მდგომი გამოსახულებათა კოეფიციენტები ტოლი უნდა იყოს. გვექნება:

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22},$$
$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a^2_{22},$$

ანუ

$$S' = S,$$
$$D' = D.$$

ამრიგად S და D აგრეთვე არიან ინვარიანტები (რაც ზემოთ უკვე აღნიშნული გვქონდა).

ჩვენ გამოვთვალეთ სამი ინვარიანტი S, Δ, D. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ეს ინვარიანტები ერთიმეორეზე დამოუკიდებელნი არიან. S და D ინვარიანტების დამოუკიდებლობა აშკარაა. მათ განსხვავებული აქვთ შემდგენელი ერთი კოეფიციენტი: a_{12}. ეს საშუალებას გვაძლევს ისე ვცვალოთ D, რომ არ შეიცვალოს S. მაშასადამე, მათ შორის არ შეიძლება არსებობდეს ფუნქციონალური დამოკიდებულება. Δ შეიცავს ისეთ კოეფიციენტებს, რომლებიც არ შედიან S და D ინვარიანტების გამოსახულებაში. ესენია: a_{13}, a_{23} და a_{33}. ამიტომ Δ დამოუკიდებელია S და D ინვარიანტებისაგან. შემდეგში S, D, Δ ინვარიანტებს აღვნიშნავთ ასე: $I_1 = S$, $I_2 = D$, $I_3 = \Delta$.

2. ინვარიანტების გამოყენება. ჩვენ უკვე ვიცით VII თავიდან, რომ კოორდინატთა სისტემის მობრუნებით და შემდეგ პარალელური გადატანით ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირის განტოლება დაიყვანება ერთ-ერთ შემდეგ სახეზე:

$$1)\ A'x'^2+C'y'^2+F'=0,$$
$$2)\ C'y'^2+D'x'=0.$$

შევადგინოთ ინვარიანტები ამ განტოლებათათვის. გვექნება:

$$1)\ I_1=A'+C',\quad I_2=A'C',\ I_3=A'C'F',$$
$$2)\ I_1=C',\ I_2=0,\quad I_3=-\frac{1}{4}C'D'^2.$$

აქედან ჩანს, რომ

1) A', C' ფესვებია $\lambda-I_1\lambda+I_2=0$ კვადრატული განტოლებისა, ხოლო F' განისაზღვრება ასე: $F'=\frac{I_3}{I_2}$.

$$2)\ C'=I_1,\quad D'=\pm\sqrt{-\frac{2I_3}{I_1}}.$$

ამრიგად, ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირის ორთოგონალური ინვარიანტები სავსებით განსაზღვრავს წირის კანონიკურ განტოლებას და, მაშასადამე, თვით წირის ფორმას. ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ წირის მოცემულ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს კიდევ სხვა დამოუკიდებელი ორთოგონალური ინვარიანტი. მართლაც, ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირის ყოველი ინვარიანტი უნდა წარმოგვიდგეს კანონიკური განტოლების კოეფიციენტებით. მაგრამ ეს უკანასკნელნი კი გამოისახება ზემოაღნიშნული სამი ინვარიანტით. მაშასადამე, ყოველი ინვარიანტი წარმოგვიდგება ზემოაღნიშნულ სამი დამოუკიდებელი ინვარიანტით.

ახლა შევნიშნოთ, რომ მეორე რიგის წირი არ შეიცვლება, თუ მის განტოლებას გადავამრავლებთ რაიმე ნულისაგან განსხვავებულ ρ რიცხვზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში I_1, I_2, I_3 ინვარიანტები შეიცვლება და მივიღებთ:

$$I_1'=\rho I_1,\quad I_2'=\rho^2 I_2,\quad I_3'=\rho^3 I_3.$$

აქედან ჩანს, რომ მეორე რიგის წირის ფორმა ცალსახად არ განსაზღვრავს ზემოაღნიშნულ ინვარიანტებს. ამ ტოლობათა საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{I_2'}{I_1'^2}=\frac{I_2}{I_1^2},\quad \frac{I_3'}{I_1'^3}=\frac{I_3}{I_1^3}.$$

აქედან ჩანს, რომ შემდეგი გამოსახულებანი:

$$\mathring{I}_1=\frac{I_2}{I_1^2},\quad \mathring{I}_2=\frac{I_3}{I_1^3}$$

დამოკიდებული არ არის ρ-ზე. ამრიგად $\mathring{I}_1$, $\mathring{I}_2$ განისაზღვრება წირის ფორმით და, პირუკუ, ეს სიდიდეები განსაზღვრავენ წირის ფორმას. ამრიგად, $\mathring{I}_1$, $\mathring{I}_2$ წირის შინაგანი სტრუქტურის გამომსახველი სიდიდეებია. მათ ეწოდება წ ი რ ი ს შ ი ნ ა გ ა ნ ი ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ე ბ ი. I_1, I_2, I_3 ინვარიანტებს კი ფ ა რ დ ო ბ ი თ ი ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ე ბ ი ეწოდება.

იმ შემთხვევაში, როცა წირი გადაგვარებულია თანამკვეთ წრფეთა წყვილად, მაშინ $\Delta=0$, ე. ი. $I_3=0$. I_1 და I_2 შეინარჩუნებს ძველ მნიშვნელობებს.

იმ შემთხვევაში, როცა წირი გადაგვარებულია პარალელურ წრფეთა წყვილად, მაშინ

$$I_2=0,\quad I_3=0.$$

I_1 შეინარჩუნებს ძველ მნიშვნელობას, მაგრამ აქ იარსებებს კიდევ მეორე ინვარიანტი. მართლაც, კანონიკურ განტოლებას ამ შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე (ცენტრიანი წირის განტოლების პირველი სახე)

$$\lambda_1 x'^2+F(x_0, y_0)=0,$$

სადაც x_0, y_0 ერთი რომელიმე ცენტრის (წირი მრავალცენტრიანია) კოორდინატებია. აქ λ_1 მახასიათებელი განტოლების ფესვია. გვექნება $\lambda_1=S=I_1$. ადვილი მისახვედრია, რომ $F(x_0, y_0)$ უნდა იყოს ინვარიანტი. ამ შემთხვევაში ცენტრის კოორდინატების განმსაზღვრელი სისტემიდან მხოლოდ ერთი განტოლება იქნება დამოუკიდებელი, ე. ი.

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

ამ პირობებში

$$F(x_0, y_0)=a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}=\frac{a_{22}a_{33}-a^2_{23}}{a_{22}}$$

ან

$$F(x_0, y_0)=a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a^2_{13}}{a_{11}}.$$

ამრიგად I_1 და შემდეგი გამოსახულება

$$I = \frac{a_{22}a_{33} - a^2_{23}}{a_{22}}$$

ან

$$I = \frac{a_{11}a_{33} - a^2_{13}}{a_{11}}$$

წარმოადგენს პარალელურ წრფეთა წყვილის ინვარიანტებს. I და I_1-ის შეფარდება კი განსაზღვრავს წირის შინაგან ინვარიანტს.

3. დეკარტის კოორდინატთა ზოგადი გარდაქმნის ინვარიანტები. დეკარტის კოორდინატების ზოგადი გარდაქმნები სიბრტყეზე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$x_1 = x_1'l_1 + x_2'l_2 + x_3'a,$$
$$x_2 = x_1'm_1 + x_2'm_2 + x_3'b,$$
$$x_3 = x_3'.$$

ამ შემთხვევაში

$$\delta = \begin{vmatrix} l_1, & l_2, & a \\ m_1, & m_2, & b \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1, & l_2 \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\delta = \begin{vmatrix} l_1, & m_1 \\ l_2, & m_2 \end{vmatrix}.$$

მეორე მხრივ, (123) ფორმულის თანახმად, l_1, l_2 ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის S_0' ფართობი ასე წარმოგვიდგება (იხ. II თავის 123-ე ფორმ.)

$$S_0' = S_0 \begin{vmatrix} l_1, & m_1 \\ l_2, & m_2 \end{vmatrix},$$

სადაც S_0 არის $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი. ამრიგად

$$S_0' = S_0\delta.$$

აქედან

$$\delta = \frac{S_0'}{S_0}.$$

ჩავსვათ δ-ს მნიშვნელობა (63) ფორმულაში. მივიღებთ

$$\frac{\Delta'}{S_0'^2} = \frac{\Delta}{S_0^2}. \tag{64}$$

ამრიგად შემდეგი გამოსახულება

$$I_3=\frac{\Delta}{S_0{}^2} \tag{65}$$

ინვარიანტია დეკარტის კოორდინატების ზოგადი გარდაქმნის მიმართ. ანალოგიურად, შემდეგი კვადრატული ფორმის

$$\varphi=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-\lambda(x^2+y^2+2xy\cos\omega)$$

დისკრიმინანტთან დაკავშირებული გამოსახულება

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}-\lambda\cos\omega \\ a_{12}-\lambda\cos\omega, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}}{S_0{}^2}$$

ინვარიანტი იქნება λ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ გამოსახულების კოეფიციენტები არის ინვარიანტი (ω ღერძებს შორის კუთხეა). ასე მივიღებთ შემდეგ ორ ინვარიანტს:

$$I_1=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{S_0{}^2},$$

$$I_2=\frac{D}{S_0{}^2}. \tag{66}$$

შევნიშნოთ, რომ $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი S_0 მოცემულია შემდეგი ფორმულით

$$S_0=\sin\omega.$$

ამრიგად, მეორე რიგის წირის ინვარიანტები ამ შემთხვევაში ასე წარმოგვიდგება:

$$I_1=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega},$$

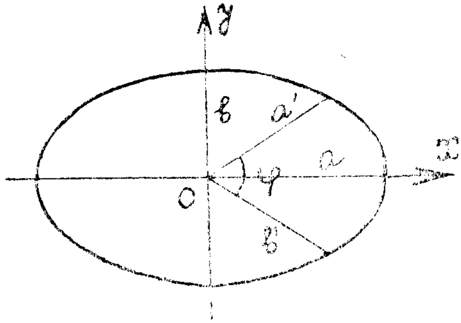
$$I_2=\frac{\Delta}{\sin^2\omega}, \tag{67}$$

$$I_3=\frac{\Delta}{\sin^2\omega}.$$

კერძოდ, თუ $\omega=90^\circ$, მაშინ $\sin\omega=1$, $\cos\omega=0$ და უკანასკნელი ფორმულები მოგვცემს ორთოგონალურ ინვარიანტებს.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ კანონიკურ განტოლებათა შემთხვევაში ცენტრიანი წირების (ელიფსის და ჰიპერბოლის) შეუღლებული დიამეტრების k და k' კუთხური კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:



ნახ. 116.

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2} \text{ (ელიფსისათვის)},$$

$$kk' = \frac{b^2}{a^2} \text{ (ჰიპერბოლისათვის)}.$$

2. ცენტრიანი წირების შეუღლებული დიამეტრების (როგორც ქორდების) სიგრძეები შესაბამად აღვნიშნოთ $2a'$-ით და $2b'$-ით. დაამტკიცეთ, რომ (ნახ. 116)

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \quad a'b'\sin\varphi = ab, \text{ (აპოლონიუსის თეორემები)[1]}$$

სადაც φ არის შეუღლებულ დიამეტრებს შორის კუთხე.

შენიშვნა. ნახაზი შედგენილია მხოლოდ ელიფსისათვის. ანალოგიურად შედგება ნახაზი ჰიპერბოლისათვის.

3. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე მეორე რიგის წირთა შემდეგი განტოლებანი:

1) $2x^2 + 3y^2 - 2x - 4 = 0,$

2) $xy - 2x - 2 = 0,$

3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y - 1 = 0,$

4) $2x^2 + 3y^2 - 2x - 3y - 1 = 0,$

5) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0.$

---

[1] აპოლონიუსი—გამოჩენილი ბერძენი მათემატიკოსი (მესამე საუკ. ჩვენს ერამდე).

ააგეთ ეს წირები Oxy სისტემის მიმართ.

4. მოძებნეთ კანონიკური განტოლებით მოცემულ ელიფსზე, ჰიპერბოლაზე და პარაბოლაზე ისეთი წერტილები, რომლებზედაც გატარებული ამ წირების მხები წრფეები მართობულია სათანადო ფოკალური რადიუსებისა.

5. მოძებნეთ ელიფსზე ისეთი წერტილი, რომელზედაც გატარებული დიამეტრი და ამ უკანასკნელის შეუღლებული დიამეტრი ერთიმეორესთან ადგენს მინიმალურ კუთხეს დანარჩენ შეუღლებულ წყვილებთან შედარებით.

თ ა ვ ი IX

მეორე რიგის ზედაპირთა თეორია

§ 1. ზოგიერთი კერძო სახის ზედაპირის განტოლება

1. სფერო. ცნობილია, რომ სფერო განიმარტება როგორც სივრცის ისეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელნიც თანატოლი მანძილით არიან დაშორებული ერთი მოცემული წერტილიდან. მოცემულ წერტილს ეწოდება სფეროს ცენტრი, ცენტრიდან სფეროს წერტილამდე მანძილს კი სფეროს რადიუსი. დავუშვათ, რომ სფეროს ცენტრი მოთავსებულია $C(a, b, c)$ წერტილში, სფეროს რადიუსი კი R-ის ტოლია. სფეროს მიმდინარე წერტილი აღვნიშნოთ $M(x, y, z)$-ით. თანახმად განმარტებისა, გვექნება

$$|CM|=R.$$

მეორე მხრივ,

$$|CM|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

ამრიგად, სფეროსათვის დამახასიათებელი იქნება შემდეგი განტოლება

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R$$

ან, რაც იგივეა (ისევე, როგორც წრეწირების განტოლების შემთხვევაში),

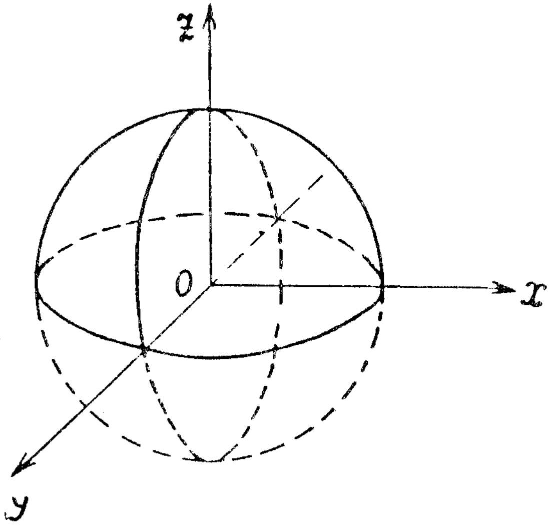
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{1}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს სფეროს ყველა წერტილის კოორდინატები, და მხოლოდ ისინი, ამიტომ ამ განტოლებას ეწოდება სფეროს განტოლება. ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს, რომ აქ x, y, z მიმდინარე კოორდინატებია, a, b, c — სფეროს ცენტრის კოორდინატები, ხოლო R — სფეროს რადიუსი. თუ სფეროს ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, მაშინ $a=b=c=0$ და (1) განტოლებიდან მივიღებთ (ნახ. 116 ა)

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{2}$$

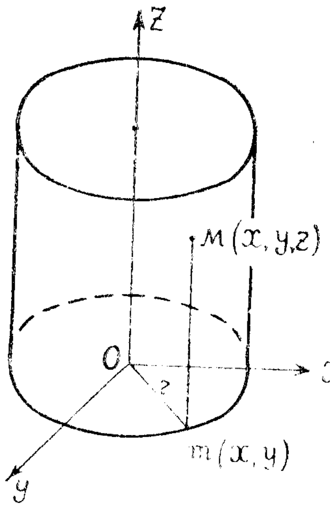
ასეთია კოორდინატთა სათავის გარშემო შემოხაზულ R-რადიუსიანი სფეროს განტოლება.

2. წრიული ცილინდრი. როგორც ცნობილია, წრიული ცილინდრი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელიც მიიღება რაიმე წრფის



ნახ. 116 ა.

ბრუნვით მისივე პარალელური ღერძის გარშემო. ბრუნვის ღერძს ეწოდება ცილინდრის ღერძი, ღერძიდან ცილინდრის წერტილამდე მანძილს — ცილინდრის რადიუსი, თვით მბრუნავ წრფეს კი ცილინდრის მსახველი (ყოველი მდებარეობისათვის). ცილინდრის ღერძად მივიღოთ z ღერძი, მიმდინარე წერტილი აღვნიშნოთ $M(x, y, z)$-ით, ხოლო რადიუსი იყოს R. ცილინდრის $M(x, y, z)$ წერტილი რომ დავაგეგმილოთ Oxy სიბრტყეზე, ის ყოველთვის მოხვდება R-რადიუსიან წრეწირზე (ცილინდრის ფუძეზე). ცხადია, რომ გეგმილის კოორდინატები იქნება x, y, 0, ე. ი. $m=(x, y, 0)$ (ნახ. 117). ამრიგად x, y დააკმაყოფილებს კოორდინატთა სათავის გარშემო შემოხაზული R-რადიუსიანი წრეწირის განტოლებას



ნახ. 117.

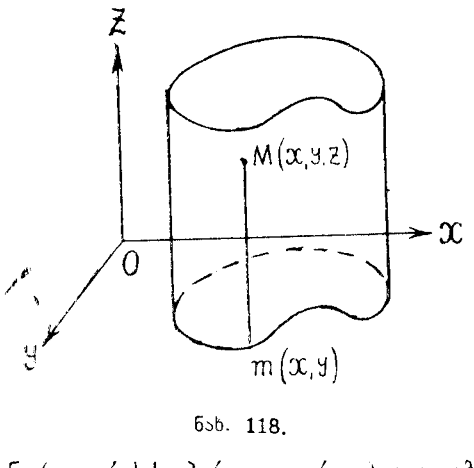
$$x^2+y^2=R^2. \tag{3}$$

მაშასადამე, ამ განტოლებას აკმაყოფილებს ცილინდრის ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი. ამიტომ ამ განტოლებას ეწოდება მოცემული ცილინდრის განტოლება.

3. ნებისმიერი ცილინდრული ზედაპირის განტოლება. ცილინდრული ზედაპირი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელსაც აღწერს წრფე თავისი თავისადმი პარალელური მოძრაობის დროს. მოძრავ წრფეს (ყოველი მდებარეობისათვის) ეწოდება ცილინდრული ზედაპირის მსახველი. ცხადია, რომ ცილინდრული ზედაპირის მსახველები ურთიერთპარალელური წრფეები იქნება. განსახილავი ცილინდრული ზედაპირი მოვათავსოთ ისე, რომ მისი მსახველები პარალელური იყოს z ღერძისა და ამ პირობებში შევადგინოთ მისი დამახასიათებელი ანალიზური პირობები. დავუშვათ, რომ ცილინდრული ზედაპირის თანაკვეთის წირი Oxy სიბრტყესთან განისაზღვრება შემდეგი განტოლებით

$$F(x,\ y)=0. \tag{4}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ცილინდრული ზედაპირი ამ შემთხვევაში წარმოგვიდგება როგორც (4) განტოლებით განსაზღვრული წირის



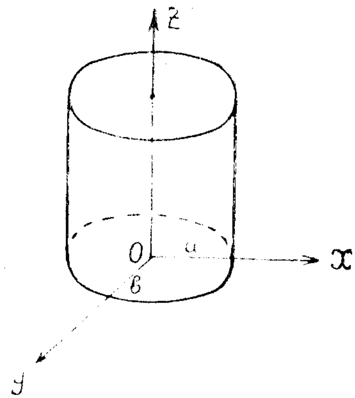
ნახ. 118.

წერტილებიდან (z ღერძის პარალელურად) გავლებული წრფეების გეომეტრიული ადგილი (ნახ. 118). ამიტომ ცილინდრის ნებისმიერი M წერტილის m გეგმილი ყოველთვის მოხვდება (4) განტოლებით განსაზღვრულ წირზე (ცილინდრული ზედაპირის ფუძეზე); მაშასადამე, m წერტილის x, y კოორდინატები დააკმაყოფილებს (4) განტოლებას. ამრიგად (4) განტოლებას დააკმაყოფილებს აღებული ცილინდრული ზედაპირის ყველა წერტილის კოორდინატები

და მხოლოდ ისინი. ამიტომ ამ განტოლებას ეწოდება აღებული ცილინდრული ზედაპირის განტოლება. რადგან ცილინდრული ზედაპირის ფუძედ ნებისმიერი წირი შეიძლება ავიღოთ და ისე შევადგინოთ ცილინდრული ზედაპირი, ამიტომ (4) განტოლებაში $F(x, y)$ შეიძლება იყოს ნებისმიერი.

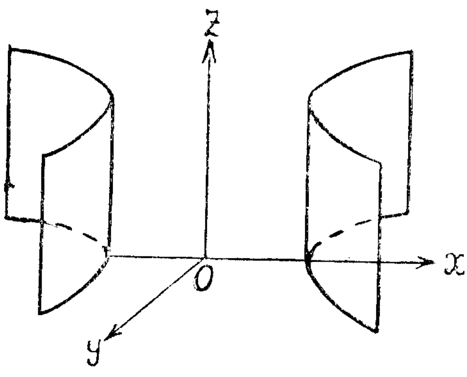
მაგალითები. 1. განვიხილოთ შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



ნახ. 119.

ეს განტოლება განსაზღვრავს z ღერძის პარალელურმსახველებიან (რადგან z არ შედის) ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის ფუძე Oxy სიბრტყეზე ამავე განტოლებით განსაზღვრული ელიფსია. ამიტომ მას ეწოდება *ელიფსური ცილინდრი*. ამ ზედაპირის ასაგებად უნდა დავხაზოთ ფუძე (ელიფსი) Oxy სიბრტყეზე და ელიფსის წერტილებიდან გავატაროთ z ღერძის პარალელური წრფეები (გადავკვეთოთ Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით), ამით წარმოდგენა მოგვეცემა ელიფსურ ცილინდრზე (ნახ. 119).



ნახ. 120.

2. განვიხილოთ შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირი

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

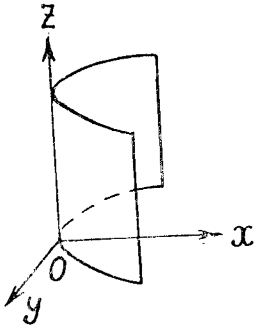
ეს იქნება z ღერძის პარალელურმსახველებიანი ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის ფუძე (Oxy სიბრტყე) ჰიპერბოლაა. ამიტომ მას ეწოდება *ჰიპერბოლური ცილინდრი*. ამ ზედაპირის ნახაზის შესადგენად უნდა დავხაზოთ ჰიპერბოლა Oxy სიბრტყეზე და მისი წერტილებიდან გავატაროთ z ღერძის პარალელური წრფეები (შემდეგ გადავკვეთოთ Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით). ამით წარმოდგენა მოგვეცემა ჰიპერბოლურ ცილინდრზე (ნახ. 120).

3. განვიხილოთ შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირი

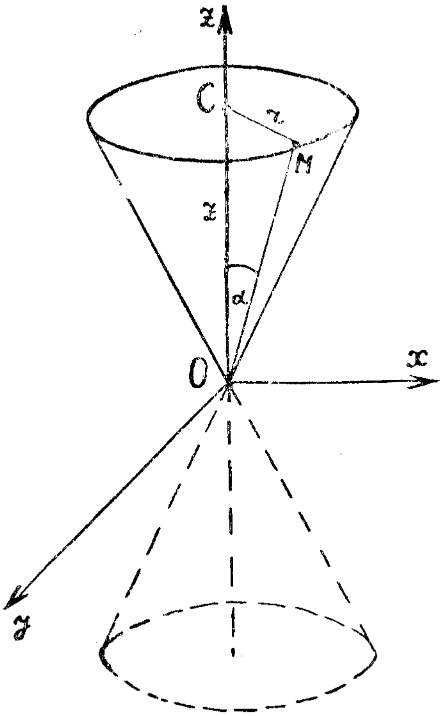
$$y^2=2px.$$

ეს განტოლება გამოსახავს ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის ფუძე (Oxy სიბრტყეზე) პარაბოლაა. ამიტომ მას ეწოდება *პარაბოლური ცილინდრი*. ამ ზედაპირის ნახაზის შესადგენად ისევე უნდა მოვიქცეთ, როგორც წინა შემთხვევაში. დავხაზავთ პარაბოლას Oxy სიბრტყეზე და მისი წერტილებიდან გავატარებთ z-ის პარალელურ წრფეებს (ნახ. 121).

4. წრიული კონუსი. როგორც ცნობილია, წრიული



ნახ. 121.



ნახ. 122.

კონუსი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელსაც აღწერს წრფე ისეთი ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს, რომელიც თანაიკვეთება

მოძრავ წრფესთან. ბრუნვის ღერძს ეწოდება კონუსის ღერძი, მოძრავ წრფეს (ყოველი მდებარეობისათვის)—კონუსის მსახველი. მსახველების თანაკვეთის წერტილს ღერძთან ეწოდება კონუსის წვერო. ცხადია, რომ კონუსის მსახველები თანატოლ კუთხეებს შეადგენენ კონუსის ღერძთან. კონუსის წვერო ავიღოთ კოორდინატთა სათავეში. კონუსის ღერძად კი მივიღოთ z ღერძი. ამ პირობებში შევადგინოთ კონუსის დამახასიათებელი ანალიზური პირობები. კონუსის მიმდინარე წერტილი აღვნიშნოთ M-ით. ამ წერტილის კოორდინატები კი x, y, z-ით. მანძილი M წერტილიდან z ღერძამდე აღვნიშნოთ r-ით. გვექნება (ნახ. 122):

$$C=(0,\ 0,\ z),\ M=(x,\ y,\ z).$$

ამის მიხედვით მივიღებთ

$$r=|CM|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

მეორე მხრივ, $r=\pm z \operatorname{tg} \alpha$ (ნიშნის შერჩევა მოხდება z-ის ნიშნის მიხედვით), ანუ

$$\sqrt{x^2+y^2}=\pm z \operatorname{tg} \alpha.$$

აქედან

$$x^2+y^2-z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha=0. \tag{5}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს აღებული კონუსის ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი, ამიტომ მას ეწოდება აღებული კონუსის განტოლება.

ნ. ნებისმიერი კონუსური ზედაპირი. კონუსური ზედაპირი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელსაც აღწერს მოძრავი წრფე ისე, რომ ყოველთვის ერთ მოცემულ წერტილზე გადიოდეს (ე. ი. წრფე ასრულებს წერტილის გარშემო ბრუნვას). მოცემულ წერტილს ეწოდება კონუსური ზედაპირის წ ვ ე რ ო. კონუსური ზედაპირის წვერო მოვათავსოთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში და ამ პირობებში შევადგინოთ კონუსური ზედაპირის დამახასიათებელი ანალიზური პირობები. გადავკვეთოთ კონუსური ზედაპირი სიბრტყით $z=1$. რადგან ეს სიბრტყე Oxy სიბრტყის პარალელურია, ამიტომ თანაკვეთის წირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე იქნება იგივე წირი გადატანილი ამ უკანასკნელზე (ე. ი. Oxy სიბრტყეზე). დავუშვათ, რომ გეგმილს აქვს ასეთი განტოლება: $F(x_1,\ y_1)=0$. მსახველის განტოლება იქნება შემდეგი სახისა

$$\frac{x}{L}=\frac{y}{M}=\frac{z}{N}.$$

რადგან მსახველს აკმაყოფილებს $M_1(x_1,\ y_1,\ 1)$ წერტილი (ნახ. 123), ამიტომ გვექნება

$$\frac{x_1}{L}=\frac{y_1}{M}=\frac{1}{N}.$$

აქედან

$$x_1=\frac{L}{N}, \quad y_1=\frac{M}{N}.$$

მეორე მხრივ, თვით მსახველის განტოლებიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{L}{N}=\frac{x}{z}, \quad \frac{M}{N}=\frac{y}{z}.$$

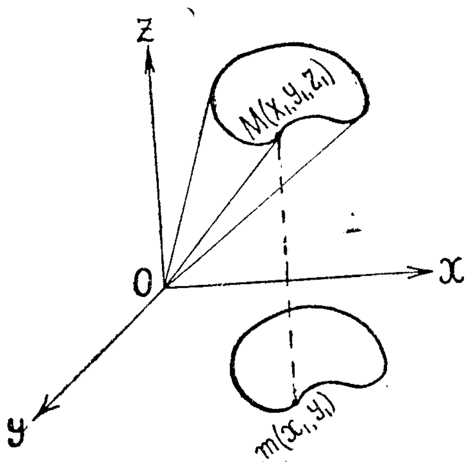
ამრიგად

$$x_1=\frac{x}{z}, \quad y_1=\frac{y}{z}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი თანაკვეთის წირის გეგმილის განტოლებაში. მივიღებთ

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0. \tag{6}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს აღებული კონუსური ზედაპირის



ნახ. 123.

ყველა წერტილის კოორდინატები და მხოლოდ ისინი, ამიტომ ამ განტოლებას ეწოდება აღებული კონუსური ზედაპირის განტოლება.

ჩვენ კონუსური ზედაპირის თანაკვეთა მოვახდინეთ z-ის მართობული სიბრტყით და ისე მივიღეთ (6) განტოლება. ცხადია, x-ის მართობული სიბრტყით რომ მოვახდინოთ კონუსური ზედაპირის თანაკვეთა, მაშინ მივიღებთ ((6) განტოლების ანალოგიურად) შემდეგ განტოლებას

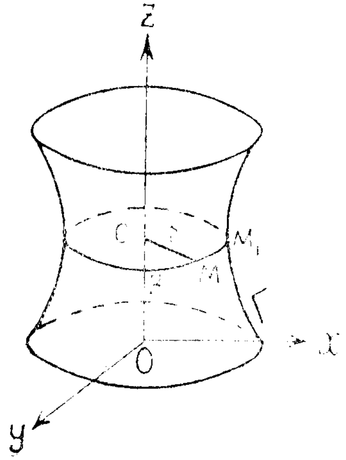
$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)=0.$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებიდან z-ს, მივიღებთ

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

ხშირად ამ სახით წერენ კონუსური ზედაპირის განტოლებას. კონუსური ზედაპირის ფუძედ შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი წირი და ისე შევადგინოთ კონუსური ზედაპირი (წირის წერტილები უნდა შევაერთოთ წვეროსთან). ამიტომ (7) განტოლებაში $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ნებისმიერი ფუნქციაა თავისი არგუმენტისა. შევნიშნოთ, რომ (6) განტოლებისათვის ე. ი. კონუსური ზედაპირის განტოლებისათვის დამახასიათებელია ერთგვაროვნება.

6. ბრუნვითი ზედაპირი. ბრუნვითი ზედაპირი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელსაც აღწერს სიბრტყეზე მდებარე ბრტყელი წირი, როცა სიბრტყე ბრუნავს იმავე სიბრტყეზე მდებარე ღერძის გარშემო. ცხადია, რომ ბრუნვის დროს წირის წერტილები აღწერენ წრეწირებს, რომელთა ცენტრები მოთავსებული იქნება ბრუნვის ღერძზე. ბრუნვის ღერძს ეწოდება ბრუნვის ზედაპირის ღერძი, მბრუნავ წირს კი (ყოველი მდებარეობისათვის) მსახველი წირი. ბრუნვის ღერძად ავიღოთ z ღერძი და მსახველი Γ წირის საწყისი მდებარეობა განვიხილოთ Oxz სიბრტყეზე. მისი განტოლება იქნება



ნახ. 124.

$$z_1=f(x_1).$$

ცხადია, რომ r-რადიუსიან წრეწირზე მდებარე წერტილებისათვის z ერთი და იგივეა. იგი შეიცვლება მხოლოდ წრეწირის შეცვლასთან

ერთად, ე. ი. r რადიუსის შეცვლასთან ერთად. ამრიგად z ფუნქციაა მხოლოდ r-ისა.

$$z=\varphi(r).$$

მეორე მხრივ, რადგან $C=(0, 0, z)$, ამიტომ

$$r=|CM|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

ჩავსვათ წინა განტოლებაში r-ის მნიშვნელობა. მივიღებთ

$$z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

ამ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს M_1 წერტილის კოორდინატები. მივიღებთ

$$z_1=\varphi(x_1).$$

შევადარებთ რა ამ განტოლებას და Γ წირის განტოლებას, მივიღებთ

$$\varphi(x_1)=f(x_1).$$

აქედან

$$\varphi(r)=f(r).$$

ამრიგად, ბრუნვის ზედაპირის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$z=f(r), \tag{8}$$

სადაც

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

დასკვნა. *იმისათვის, რომ მივიღოთ z ღერძის გარშემო Γ წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება, საჭიროა ამ წირის განტოლებაში x შევცვალოთ r-ით, სადაც $r=\sqrt{x^2+y^2}$.* ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ წირი მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე, მაშინ ამ წირის x ან y ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის განტოლება ისეთივე წესით შედგება, როგორც წინა შემთხვევაში (z ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს), ოღონდ x ღერძის გარშემო ბრუხვის დროს y შეიცვლება $\sqrt{y^2+z^2}$-ით და y ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს x შეიცვლება $\sqrt{x^2+z^2}$-ით.

მაგალითები. 1. მოცემულია ელიფსი კანონიკური განტოლებით

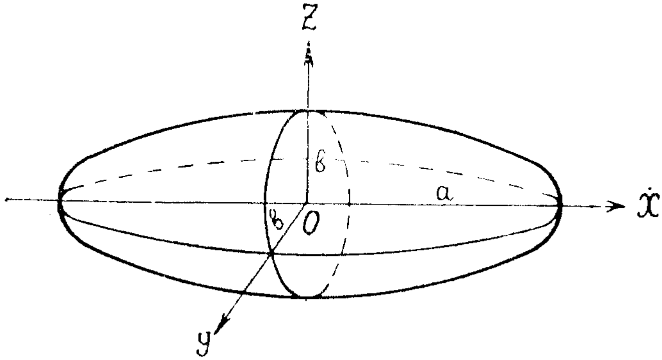
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

ვაბრუნოთ ეს წირი x ღერძის გარშემო და შევადგინოთ ასე მიღებული ბრუნვის ზედაპირის განტოლება. თანახმად ზემოაღნიშნული წესისა, y უნდა შეიცვალოს $\sqrt{y^2+z^2}$-ით. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

ამ ზედაპირს ეწოდება *ბრუნვის ელიფსოიდი*. მის ფორმაზე წარმოდგენას იძლევა მისივე წარმოშობის ზემოაღნიშნული პროცე-

სი (ელიფსის ბრუნვა იმავე ელიფსის ღერძის გარშემო). დაახლოებით ეს ზედაპირი კვერცხს მოგვაგონებს (ნახ. 125). ადვილი შესამჩნევია, რომ იმავე ელიფსის ბრუნვა y ღერძის გარშემო მოგვცემს უკვე განხილული ზედაპირის ანალოგიურ ზედაპირს.



ნახ. 125.

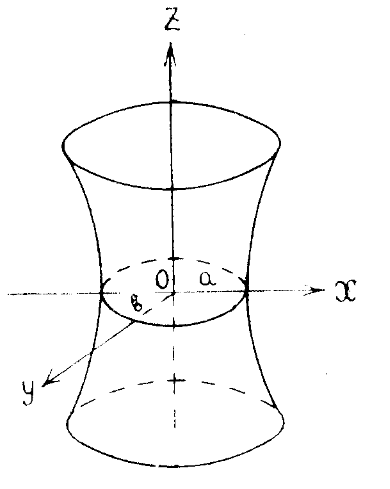
2. ავიღოთ ჰიპერბოლა Oxz სიბრტყეზე კანონიკური განტოლებით

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

და ვაბრუნოთ იგი ჯერ z ღერძის, შემდეგ x ღერძის გარშემო. მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1.$$



ნახ. 126.

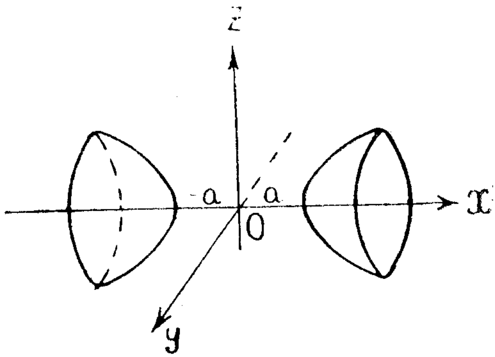
ამ ზედაპირთა სახეებიც, თვით მათი წარმოქმნიდან, ადვილი წარმოსადგენია. პირველ შემთხვევაში ზედაპირი მთლიანია, მეორე შემთხვევაში კი ზედაპირი შედგება ორი ცალკეული ნაწილისაგან, ანუ კალთისაგან. ამიტომ პირველ შემთხვევაში ზედაპირს ეწოდება ბრუნვის *ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი*, მეორე შემთხვევაში კი ბრუნვის *ორკალთა ჰიპერბოლოიდი* (ნახ. 126 და 127).

ვ. განვიხილოთ პარაბოლა Oxz სიბრტყეზე კანონიკური განტოლებით

$$x^2 = 2pz$$

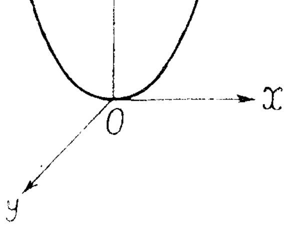
და ვაბრუნოთ იგი z ღერძის გარშემო. მივიღებთ ბრუნვის ზედაპირის შემდეგ განტოლებას

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$



ნახ. 127.

ამ ზედაპირს ეწოდება **ბრუნვის პარაბოლოიდი**. იგი აიგება განმარტების მიხედვით (ნახ. 128).



ნახ. 128.

7. ნებისმიერი ზედაპირი. როგორც ზემოთ განხილული შემთხვევიდან დავინახეთ, ცნობილ ზედაპირებს (რომელნიც მარტივი განმარტებებით განისაზღვრება) აქვთ გარკვეული განტოლებანი. თვითეულ მითგანს აქვს ერთი გარკვეული განტოლება x, y, z ცვლადების მიმართ. ამიტომ ბუნებრივია, საზოგადოდ, ზედაპირი წარმოვიდგინოთ როგორც ისეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა x, y, z კოორდინატები აკმაყოფილებენ ერთ გარკვეულ განტოლებას

$$F(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

სადაც F თავისი არგუმენტების გარკვეული ფუნქციაა. რადგან ყველა ზემოთ მიღებული განტოლებანი (8) განტოლების კერძო-

შემთხვევებია, ამიტომ ზემოჩამოთვლილი კერძო სახის ზედაპირები (8) განტოლებით განსაზღვრულ ზედაპირთა კერძო შემთხვევებს წარმოადგენენ. (8) განტოლების ყოველი კერძო სახისათვის მივიღებთ ზედაპირის გარკვეულ კერძო სახეს. მაგალითად, განტოლება $F(x, y)=0$, სადაც არ შედის z, იქნება z ღერძის პარალელურმსახველებიანი ცილინდრული ზედაპირის განტოლება. ანალოგიურად, შემდეგი სახის განტოლება $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ე. ი. ერთგვაროვანი განტოლება, იქნება ისეთი კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია და ა. შ.

8. წირი სივრცეში. სივრცითი წირი (ე. ი. წირი, რომლის წერტილები შეიძლება ერთ სიბრტყეზე არ იყოს მოთავსებული) განიმარტება როგორც ორი ზედაპირის საერთო წერტილთა გეომეტრიული ადგილი (მოკლედ, ორი ზედაპირის თანაკვეთის სახით). წირის განტოლება წარმოგვიდგება თანამკვეთი ზედაპირების განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

§ 2. მეორე რიგის ზედაპირი. მისი თანაკვეთა წრფესთან და სიბრტყესთან

1. განმარტება. მეორე რიგის ზედაპირი ეწოდება სივრცის ისეთ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ერთ გარკვეულ მეორე რიგის განტოლებას. თვით ამ განტოლებას ეწოდება მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება. ამრიგად, მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ასე წარმოგვიდგება

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერი რიცხვებია, ოღონდ მეორე რიგის წევრთა კოეფიციენტები ერთდროულად ნულები არ უნდა იყოს. წინააღმდეგ შემთხვევაში (10) განტოლება მეორე რიგისა არ იქნებოდა. ამრიგად განიხილება ყველა მეორე რიგის განტოლება. ანალოგიურად განიმარტება მესამე რიგის ზედაპირი და ა. შ.

ძირითადი საკითხები, რომელიც (10) განტოლების ირგვლივ განიხილება, შემდეგია: 1) როგორია (10) განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირის ფორმა? 2) როგორ ავაგოთ ზედაპირი კოორდინატთა სისტემის მიმართ (10) განტოლების მიხედვით?

2. ზოგიერთი დამხმარე აღნიშვნა. შემდგომ $F(x, y, z)$ ფუნქციის ქვეშ ყოველთვის ვიგულისხმებთ (10) ტოლობით მოცემულ მეორე რიგის გამოსახულებას. როგორც ჩანს, მეორე რიგის ზედაპირის განტოლების კოეფიციენტები ქმნიან სიმეტრიულ a_{ij} მატრიცას (ე. ი. $a_{ij}=a_{ji}$). ამ მატრიცის დეტერმინანტს, ე. ი. შემდეგ დეტერმინანტს

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} \tag{11}$$

ეწოდება მეორე რიგის ზედაპირის განტოლების დისკრიმინანტი. მეორე რიგის წევრების კოეფიციენტებისაგან შედგენილ შემდეგ დეტერმინანტს

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} \tag{12}$$

ეწოდება უფროს წევრთა დისკრიმინანტი.

თუ შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$\begin{aligned} F_1&=F_1(x, y, z)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}, \\ F_2&=F_2(x, y, z)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}, \\ F_3&=F_3(x, y, z)=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34}, \\ F_4&=F_4(x, y, z)=a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}, \end{aligned} \tag{13}$$

მაშინ (10) განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად იქნას ჩაწერილი

$$F(x, y, z)=xF_1+yF_2+zF_3+F_4=0. \tag{14}$$

შენიშვნა. ვინც ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულები იცის, მათთვის ადვილი შესამჩნევია, რომ (13) ფორმულების მიხედვით F_1, F_2, F_3 იქნებიან $F(x, y, z)$ ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულების ნახევრები, ე. ი.

$$F_1=\frac{1}{2}F'_x(x, y, z),\quad F_2=\frac{1}{2}F'_y(x, y, z),\quad F_3=\frac{1}{2}F'_z(x, y, z) \tag{15}$$

3. ზედაპირის თანაკვეთა სიბრტყესთან. ჩვენ გვაინტერესებს გამოვარკვიოთ, თუ როგორ წირზე თანაიკვეთება მეორე რიგის ზედაპირი სიბრტყესთან. ამისათვის კოორდინატთა სისტემა ვამოძრაოთ ისე, რომ Oxy კოორდინატთა სიბრტყე დაემთხვეს მკვეთ სიბრტყეს. ასეთი მოძრაობა, როგორც ვიცით, განხორციელდება ორთოგონალური გარდაქმნებით. რადგან ეს გარდაქმნები წრფივია (x, y, z წრფივად გამოისახება x', y', z'-ის საშუალებით), ამიტომ

x, y, z-ის შეცვლის შემდეგ ზედაპირის ახალი განტოლება x', y', z' კოორდინატებში იქნება, აგრეთვე, მეორე რიგისა, ე. ი. გარდაქმნის შედეგად განტოლების რიგი არ შეიცვლება. ამრიგად, მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ახალ კოორდინატებში იქნება (10) განტოლების მსგავსი

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a_{13}x'z'+2a_{23}y'z'+$$
$$+2a_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0. \tag{16}$$

როგორც აღნიშნული იყო, ამ შემთხვევაში მკვეთი სიბრტყე შეთავსებულია $O'x'y'$ სიბრტყესთან, ამიტომ მისი განტოლება იქნება $z'=0$. იმისათვის, რომ მივიღოთ თანაკვეთის წირი, (16) განტოლებას უნდა დავუმატოთ $z'=0$. მივიღებთ

$$a'_{11}x'^2+2a'_{22}y'^2+2a'_{12}x'y'+2a_{14}x'+2a'_{24}y'+a'_{44}=0.$$

ეს განტოლება კი გამოსახავს მეორე რიგის წირს $O'x'y'$ სიბრტყეზე, თუ იგი იგივური არ არის. ამრიგად ნებისმიერი სიბრტყის თანაკვეთის წირი მეორე რიგის ზედაპირთან არის მეორე რიგის წირი, ან სიბრტყე ეკუთვნის ზედაპირს.

ამ დებულების გამოყენებით გამოვიკვლიოთ წრიული კონუსის თანაკვეთის წირი ისეთ სიბრტყესთან, რომელიც წვეროზე არ გადის. განვიხილოთ სამი შემთხვევა: 1) მკვეთი სიბრტყე თანაიკვეთება კონუსის ყველა მსახველთან. თანაკვეთაში მივიღებთ მეორე რიგის წირს, რომელსაც უსასრულოდ დაშორებული წერტილი არა აქვს. ასეთი მეორე რიგის წირი კი ელიფსია; 2) მკვეთი სიბრტყე პარალელურია კონუსის მხოლოდ ერთი მსახველისა. თანაკვეთაში მივიღებთ მეორე რიგის წირს, რომელსაც ექნება მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. ასეთი მეორე რიგის წირი კი პარაბოლაა; 3) მკვეთი სიბრტყე პარალელურია კონუსის ორი მსახველისა. თანაკვეთაში მივიღებთ მეორე რიგის წირს, რომელსაც ორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი აქვს. ასეთი მეორე რიგის წირი კი ჰიპერბოლაა. ამრიგად სამივე სახის მეორე რიგის წირი: ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წრიული კონუსის თანაკვეთის წირები სიბრტყესთან. ეს ფაქტი ცნობილი იყო ძველ საბერძნეთშიაც, ოღონდ სხვა თანმიმდევრობით. სახელდობრ, ძველი ბერძნების მიერ დადგენილი იყო, რომ წრიული კონუსის თანაკვეთის წირებს სიბრტყესთან, ზემოაღნიშნულ სამ შემთხვევაში, აქვთ ელიფსის, პარაბოლის და ჰიპერბოლის ის თვისებანი, რომელნიც საფუძვლად დავუდეთ ამ წირების განმარტებებს შესაბამად. ამიტომ ლიტერატურაში ხშირად ელიფსს,

ჰიპერბოლას და პარაბოლას კონუსური კვეთის წირებს უწოდებენ.

4. ზედაპირის თანაკვეთა წრფესთან. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მოცემული წრფის თანაკვეთის წერტილები მეორე რიგის ზედაპირთან, საჭიროა ზედაპირის (10) განტოლება და წრფის განტოლება განვიხილოთ ერთად, როგორც სისტემა. ამ სისტემის ამონახსნები მოგვცემენ საძიებელი თანაკვეთის წერტილების კოორდინატებს. წრფის განტოლება ავიღოთ პარამეტრული სახით. გვექნება:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tL, \\ y &= y_0 + tM, \\ z &= z_0 + tN. \end{aligned} \tag{17}$$

რადგან ეს განტოლებანი განიხილება (10) განტოლებასთან ერთად, ამიტომ x, y, z-ის ეს მნიშვნელობანი შეგვიძლია შევიტანოთ (10) განტოლებაში. გვექნება

$$a_{11}(x_0+tL)^2+a_{22}(y_0+tM)^2+a_{33}(z_0+tN)^2+2a_{12}(x_0+tL)(y_0+tM)+$$
$$+2a_{13}(x_0+tL)(z_0+tN)+2a_{23}(y_0+tM)(z_0+tN)+2a_{14}(x_0+tL)+$$
$$+2a_{24}(y_0+tM)+2a_{34}(z_0+tN)+a_{44}=0.$$

რომ გავხსნათ ფრჩხილები და დავალაგოთ წევრები t-ს ხარისხების მიხედვით (თანაც გამოვიყენოთ (13) აღნიშვნები), მივიღებთ

$$at^2+2bt+c=0, \tag{18}$$

სადაც

$$\begin{aligned} a &= a_{11}L^2+a_{22}M^2+a_{33}N^2+2a_{12}LM+2a_{13}LN+2a_{23}MN, \\ b &= LF_1(x_0, y_0, z_0)+MF_2(x_0, y_0, z_0)+NF_3(x_0, y_0, z_0), \\ c &= F(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \tag{19}$$

ამრიგად, მოცემული წრფისა და მეორე რიგის ზედაპირის თანაკვეთის წერტილების შესაბამი პარამეტრის მნიშვნელობანი აკმაყოფილებენ (18) კვადრატულ განტოლებას. როგორც ცნობილია, კვადრატულ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი ფესვი, თუ ეს განტოლება იგივური არ არის, ე. ი. თუ ყველა კოეფიციენტი ნული არ არის. თუ განტოლება იგივურია, ე. ი. თუ მას დააკმაყოფილებს t-ს ნებისმიერი მნიშვნელობა, მაშინ წრფის ყველა წერტილი იქნება ზედაპირთან თანაკვეთის (ანუ საერთო) წერტილი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ წრფე მოთავსებულია ზედაპირზე; მაშასადამე, სივრცის ნებისმიერ წრფეს არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი საერთო წერტილი მეორე რიგის ზედაპირთან, თუ ეს წრფე არ მდებარეობს განსახილავ ზედაპირზე.

(18) განტოლების ფესვები აღვნიშნოთ t_1, t_2-ით. მათი შესაბამი წერტილები წრფეზე, ე. ი. თანაკვეთის წერტილები შესაბამად აღვნიშნოთ M_1, M_2-ით. ამ წერტილების კოორდინატები განისაზღვრება წრფის (17) განტოლებიდან მასში t-ს ნაცვლად t_1 და t_2 მნიშვნელობათა ჩასმით. გვექნება:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + t_1 L, \\ y_1 &= y_0 + t_1 M, \\ z_1 &= z_0 + t_1 N. \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 + t_2 L, \\ y_2 &= y_0 + t_2 M, \\ z_2 &= z_0 + t_2 N. \end{aligned} \tag{21}$$

§ 3. მეორე რიგის ზედაპირთა კლასიფიკაცია უსასრულოდ დაშორებული წერტილების მიხედვით

შევაერთოთ ზედაპირის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი კოორდინატთა სათავესთან წრფით. ამ წრფის პარამეტრული განტოლება ასე წარმოგვიდგება (ამ შემთხვევაში $x_0 = y_0 = z_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x &= tL, \\ y &= tM, \\ z &= tN. \end{aligned}$$

ჩავსვათ ზედაპირის (10) განტოლებაში x, y, z-ის ეს მნიშვნელობანი. მივიღებთ (18) განტოლების ანალოგიურ განტოლებას, ოღონდ ამ შემთხვევაში $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ პირველი კოეფიციენტი იქნება ზუსტად ისეთივე, როგორც (18) განტოლებაშია მოცემული. სახელდობრ, ეს კოეფიციენტი მოცემული იქნება (19) აღნიშვნებით. როგორც აღნიშნული იყო, განსახილავი წრფე აერთებს ზედაპირის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს კოორდინატთა სისტემის სათავესთან, ე. ი. ამ წრფეს ზედაპირთან აქვს უსასრულოდ დაშორებული საერთო წერტილი. ამიტომ (18) განტოლებას, ამ შემთხვევაში, უნდა ჰქონდეს ერთი მაინც უსასრულოდ დიდი ფესვი; ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ განტოლების პირველი კოეფიციენტი იყოს ნული. ამრიგად, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისათვის დამახასიათებელია შემდეგი ტოლობა: $a = 0$, რაც, თანახმად (19) აღნიშვნებისა, მოგვცემს

$$a_{11}L^2 + a_{22}M^2 + a_{33}N^2 + 2a_{12}LM + 2a_{13}LN + 2a_{23}MN = 0. \tag{25}$$

ამ განტოლებას აკმაყოფილებს იმ წრფეთა მიმართულების კოეფი-

ცენტრები, რომელნიც თანაიკვეთებიან ზედაპირთან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებში. ჩავსვათ აქ L, M, N-ის მნიშვნელობანი. წრფის (24) განტოლებიდან მივიღებთ

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0. \qquad (26)$$

ასეთია ერთადერთი განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს იმ წრფეთა მიმდინარე წერტილების კოორდინატები, რომელნიც თანაიკვეთებიან ზედაპირთან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებში. ეს განტოლება კი, როგორც მეორე რიგის ერთგვაროვანი განტოლება, განსაზღვრავს კონუსურ ზედაპირს, რომლის წვერო კოორდინატთა სისტემის სათავეშია. ამ კონუსურ ზედაპირს ეწოდება აღებული მეორე რიგის ზედაპირის ა ს ი მ პ ტ ო ტ უ რ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა თ ა კ ო ნ უ ს ი. პირდაპირ ჩანს, რომ ამ კონუსის განტოლება მიიღება ზედაპირის (10) განტოლებიდან უფროსი წევრების ჯამის ნულთან გატოლებით. მაგალითად, ბრუნვის ელიფსოიდისათვის, რომლის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსის განტოლება იქნება შემდეგი განტოლება (უფროს წევრთა ჯამი უნდა გავუტოლოთ ნულს)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=0.$$

ამ განტოლებას, გარდა კოორდინატთა სისტემის სათავისა, არ აკმაყოფილებს არც ერთი ნამდვილი წერტილი. ამიტომ მას წარმოსახვითი კონუსი ეწოდება. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ ბრუნვის ელიფსოიდს არა აქვს ნამდვილი უსასრულოდ დაშორებული წერტილები. ბრუნვის ჰიპერბოლოიდების (ორივესათვის ერთად) ასიმპტოტური მიმართულებათა კონუსი იქნება წრიული კონუსი. ბრუნვის პარაბოლოიდისათვის კი ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი განისაზღვრება შემდეგი განტოლებით

$$x^2+y^2=0.$$

ეს განტოლება იშლება შემდეგ ორ განტოლებად:

$$x-iy=0, \quad x+iy=0.$$

ამრიგად, ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი გადაგვარებულია წარმოსახვით სიბრტყეთა წყვილად. ამ მაგალითების მიხედვით ბუნებრივი უნდა იყოს მეორე რიგის ზედაპირთა შემდეგი კლასიფიკაცია:

1) თუ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი წარმოსახვითია, ზედაპირს ეწოდება ელიფსოიდის ტიპის ზედაპირი.

2) თუ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი ნამდვილია, ზედაპირს ეწოდება ჰიპერბოლოიდის ტიპის ზედაპირი.

3) თუ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი გადაგვარებულია ნამდვილ ან წარმოსახვით სიბრტყეთა წყვილად, ზედაპირს ეწოდება პარაბოლოიდის ტიპის ზედაპირი.

§ 4. მეორე რიგის ზედაპირის ცენტრი, დიამეტრები და დიამეტრული სიბრტყეები

1. ცენტრი. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, წრფე მეორე რიგის ზედაპირთან თანაიკვეთება ორ წერტილში. თანაკვეთის წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს, ე. ი. M_1M_2 მონაკვეთს, ეწოდება ზედაპირის ქორდა. სივრცის ისეთ წერტილს, რომელიც შუაზე ყოფს მასზე გამავალ ყოველ ქორდას, ეწოდება ზედაპირის ცენტრი. ამ განმარტებიდან აშკარაა, რომ ზედაპირის წერტილები სიმეტრიულ წყვილებად იქნებიან დალაგებული ცენტრის მიმართ. დავუშვათ, რომ M_0 წერტილი ზედაპირის ცენტრია, მაშინ ეს წერტილი უნდა იყოს M_1M_2 ქორდის შუაწერტილი. ამიტომ შუაწერტილის კოორდინატების განმსაზღვრელი ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

ჩავსვათ აქ x_1, y_1, z_1 და x_2, y_2, z_2-ის მნიშვნელობანი (20) და (21) ფორმულებიდან. მივიღებთ:

$$(t_1+t_2)L=0, \ (t_1+t_2)M=0, \ (t_1+t_2)N=0.$$

რადგან L, M, N ერთდროულად ნულები არ შეიძლება იყოს, ამიტომ ეს სამი ტოლობა ეკვივალენტური იქნება ერთადერთი შემდეგი ტოლობისა

$$t_1+t_2=0, \tag{27}$$

რომელიც ახასიათებს ქორდის შუაწერტილს. ამრიგად, თუ M_0 წერტილი ქორდის შუაწერტილია, მაშინ (18) განტოლების ფესვების ჯამი ნულის ტოლია. გავიხსენოთ კვადრატული განტოლების ფესვების თვისება

$$t_1+t_2=-\frac{2b}{a}.$$

ეს იმ შემთხვევაში, თუ $a\neq 0$, ე. ი. თუ M_1M_2 ქორდას არა აქვს

ასიმპტოტური მიმართულება. ამ ფორმულის თანახმად (27) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს: $b=0$, რაც (19) აღნიშვნების მიხედვით მოგვცემს

$$LF_1(x_0, y_0, z_0)+MF_2(x_0, y_0, z_0)+NF_3(x_0, y_0, z_0)=0. \quad (28)$$

ასეთია ქორდის შუაწერტილის დამახასიათებელი პირობა. თუ M_0 წერტილი ზედაპირის ცენტრია, მაშინ (28) ტოლობა უნდა შესრულდეს ნებისმიერი ქორდისათვის, ე. ი. L, M, N კოეფიციენტების ნებისმიერ მნიშვნელობათათვის. ეს კი მაშინ მოხდება, როცა (28) განტოლება იგივობას წარმოადგენს L, M, N-ის მიმართ; ამისათვის საჭიროა ამ განტოლების კოეფიციენტები იყოს ნული. გვექნება:

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0)&=0,\\ F_2(x_0, y_0, z_0)&=0,\\ F_3(x_0, y_0, z_0)&=0. \end{aligned} \quad (29)$$

ასეთ სისტემას აკმაყოფილებს ზედაპირის ცენტრის კოორდინატები. ეს სისტემა, (19) აღნიშვნების თანახმად, შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}&=0,\\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}&=0,\\ a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34}&=0. \end{aligned} \quad (30)$$

ამრიგად, მეორე რიგის ზედაპირის ცენტრის კოორდინატები ამ სისტემის ამონახსნები იქნება. პირდაპირ ჩანს, რომ (30) სისტემის დეტერმინანტი (10) განტოლების უფროს წევრთა დისკრიმინანტია, რომელიც D-თი გვაქვს აღნიშნული (ფორმ. 12). თუ $D\neq 0$, მაშინ (30) სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსნი, ე. ი. ზედაპირს ექნება ერთადერთი ცენტრი. თუ $D=0$, მაშინ (30) სისტემას ან უსასრულოდ დიდი ამონახსნი ექნება, ანდა მას ექნება უამრავი ამონახსნი; ეს იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის ყველა კოეფიციენტისაგან შედგენილი მატრიცის რანგი ორია, ე. ი. როცა სისტემის მხოლოდ ორი განტოლებაა დამოუკიდებელი. პირველ შემთხვევაში ზედაპირის ცენტრი უსასრულეთშია, მეორე შემთხვევაში ზედაპირის ცენტრების კოორდინატები ორი წრფივი განტოლების ამონახსნები იქნება, ანუ ორი სიბრტყის თანაკვეთის წერტილები იქნება. მაშასადამე, ზედაპირის ცენტრები დალაგებული იქნება ერთ წრფეზე. შესაძლებელია, აგრეთვე, რომ (30) სისტემის რანგი იყოს ერთის ტოლი, მაშინ ზედაპირის ცენტრები დალაგებული იქნება ერთ სიბრტყეზე. ამრიგად, ცენტრის მიხედვით გვეძლევა მეორე რიგის ზედაპირთა შემდეგი კლასიფიკაცია:

1) ცენტრიანი ზედაპირები, როცა $D\neq 0$.

2) უ ც ე ნ ტ რ ო ზ ე დ ა პ ი რ ე ბ ი, როცა $D=0$ და ამავე დროს (30) სისტემა არ არის თავსებადი.

3) მ რ ა ვ ა ლ ც ე ნ ტ რ ი ა ნ ი ზ ე დ ა პ ი რ ე ბ ი, როცა $D=0$ და ამავე დროს (30) სისტემა თავსებადია.

თუ ამ კლასიფიკაციას შევადარებთ ზედაპირთა ზემოთ მოყვანილ ტიპობრივ კლასიფიკაციას, მაშინ ადვილად შევამჩნევთ, რომ ელიფსოიდისა და ჰიპერბოლოიდის ტიპის ზედაპირები ცენტრიანია, ხოლო პარაბოლოიდის ტიპის ზედაპირები კი უცენტრო ან მრავალცენტრიანი.

2. დიამეტრი. მეორე რიგის ზედაპირის ცენტრზე გამავალ ყოველ წრფეს დიამეტრი ეწოდება. თუ ზედაპირი ცენტრიანია, მაშინ დიამეტრები შექმნიან წრფეთა ძნულს. თუ ზედაპირი უცენტროა, ე. ი. თუ ზედაპირის ცენტრი უსასრულეთშია, მაშინ დიამეტრები პარალელურ წრფეთა სიმრავლეს შეადგენს. თუ ზედაპირი მრავალცენტრიანია და მისი ცენტრები დალაგებულია ერთ წრფეზე, მაშინ ამ წრფის თანამკვეთი ყოველი წრფე იქნება ზედაპირის დიამეტრი. თუ ზედაპირის ცენტრები განლაგებულია სიბრტყეზე (ისე, რომ ამ სიბრტყეს ქმნიან), მაშინ სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე გამავალი ყოველი წრფე იქნება ზედაპირის დიამეტრი. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ უკანასკნელ შემთხვევაში სივრცის ყოველი წრფე აღმოჩნდება დიამეტრად.

3. დიამეტრული სიბრტყე. მეორე რიგის ზედაპირის ცენტრზე გამავალ ყოველ სიბრტყეს ეწოდება ამ ზედაპირის დიამეტრული სიბრტყე. თუ ზედაპირი ცენტრიანია, მაშინ დიამეტრული სიბრტყეები შეადგენს სიბრტყეთა ძნულს. თუ ზედაპირი უცენტროა, ე. ი. თუ ზედაპირის ცენტრი უსასრულეთშია, მაშინ დიამეტრული სიბრტყეები შეადგენს პარალელურღერძებიან სიბრტყეთა კონებს. თუ ზედაპირი მრავალცენტრიანია და ცენტრები დალაგებულია ერთ წრფეზე, მაშინ ამ წრფის ყოველი თანამკვეთი სიბრტყე იქნება დიამეტრული სიბრტყე. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში სივრცის ყოველი სიბრტყე იქნება დიამეტრული სიბრტყე. ასეთივე მდგომარეობას ექნება ადგილი, როცა ზედაპირის ცენტრები განლაგებულია ერთ სიბრტყეზე (და ავსებს ამ სიბრტყეს).

§ 5. მოცემულ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრული სიბრტყე

განვიხილოთ რაიმე (ოღონდ არა ასიმპტოტური) მიმართულება, განსაზღვრული $P(L, M, N)$ ვექტორით. ავიღოთ ამ მიმართულების რაიმე წრფე. მისი თანაკვეთის წერტილები ზედაპირთან აღვნიშ-

ნოთ M_1, M_2-ით. M_1M_2 ქორდის შუაწერტილი აღვნიშნოთ M_0-ით. ამ წერტილის x_0, y_0, z_0 კოორდინატები დააკმაყოფილებს (28) განტოლებას. თუ განსახილავ წრფეს $\overline{P}$ ვექტორის პარალელურად გადავაადგილებთ, მაშინ შეიცვლება M_1M_2 ქორდა და მისი შუაწერტილი; მაშასადამე, ამ წერტილის x_0, y_0, z_0 კოორდინატებიც. მაგრამ ეს უკანასკნელნი ყოველთვის დააკმაყოფილებენ (28) განტოლებას, რომელიც წრფივია x_0, y_0, z_0-ის მიმართ. თუ ამ განტოლებაში x_0, y_0, z_0-ს მიმდინარე კოორდინატებად განვიხილავთ და სიმარტივისათვის აღვნიშნავთ: $x_0=x$, $y_0=y$, $z_0=z$, მაშინ ეს განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეს

$$LF_1(x, y, z)+MF_2(x, y, z)+NF_3(x, y, z)=0. \tag{31}$$

ამრიგად, მოცემული მიმართულების პარალელურ ქორდათა შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი არის სიბრტყე. ამ სიბრტყეს ეწოდება ა ღ ე ბ უ ლ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა ს თ ა ნ შ ე უ ღ ლ ე ბ უ ლ ი დ ი ა მ ე ტ რ უ ლ ი ს ი ბ რ ტ ყ ე. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, $P(L, M, N)$ ვექტორით განსაზღვრულ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრული სიბრტყის განტოლება იქნება (31) განტოლება. აქედან (19) აღნიშვნების თანახმად გვექნება

$$L(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})+M(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})+$$
$$+N(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34})=0. \tag{32}$$

ფრჩხილების გახსნისა და სათანადო აღნიშვნების შემდეგ მივიღებთ

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{33}$$

სადაც

$$\begin{aligned} A&=La_{11}+Ma_{12}+Na_{13},\\ B&=La_{12}+Ma_{22}+Na_{23},\\ C&=La_{13}+Ma_{23}+Na_{33} \end{aligned} \tag{34}$$

და

$$D=La_{14}+Ma_{24}+Na_{34}. \tag{35}$$

§ 6. მთავარი დიამეტრები და მთავარი დიამეტრული სიბრტყეები. სიმეტრიის ღერძები

1. **მთავარი დიამეტრები და მთავარი დიამეტრული სიბრტყეები.** რაიმე მიმართულებას ეწოდება მთავარი, თუ მისი შეუღლებული დიამეტრული სიბრტყე მართობულია ამავე მიმართულებისა. მთავარი მიმართულების პარალელურ დიამეტრს ეწოდება მთავარი დიამეტრი, მთავარ მიმართულებასთან შეუღლებულ დიამეტრულ სიბრტყეს კი მთავარი დიამეტრული სიბრტყე. ამ სიბრტყის ნორმალური Q ვექტორი (სიბრტყის მართობული ვექტორი) პარალე-

ლური იქნება აღებული მიმართულებისა, ე. ი. $\overline{P}$ ვექტორისა. ამის თვის დამახასიათებელი იქნება შემდეგი დამოკიდებულება

$$\overline{Q}=\lambda\overline{P}. \tag{36}$$

$\overline{Q}$ ვექტორის კოორდინატები, როგორც ცნობილია, შეუღლებულის დიამეტრული სიბრტყის განტოლების, ე. ი. (33) განტოლების კოეფიციენტების პირველი სამეულია; მაშასადამე, $\overline{Q}=(A, B, C)$, სადაც A, B, C (34) ფორმულებით არის დაკავშირებული L, M, N-თან.

ახლა დავაგეგმილოთ (36) ტოლობა კოორდინატთა ღერძებზე. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} A&=\lambda L,\\ B&=\lambda M,\\ C&=\lambda N. \end{aligned} \tag{37}$$

შევიტანოთ აქ A, B, C-ს მნიშვნელობები (34) ფორმულებიდან. გვექნება:

$$\begin{aligned} a_{11}L+a_{12}M+a_{13}N&=\lambda L,\\ a_{12}L+a_{22}M+a_{23}N&=\lambda M,\\ a_{13}L+a_{23}M+a_{33}N&=\lambda N, \end{aligned} \tag{38}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)L+a_{12}M+a_{13}N&=0,\\ a_{12}L+(a_{22}-\lambda)M+a_{23}N&=0,\\ a_{13}L+a_{23}M+(a_{33}-\lambda)N&=0. \end{aligned} \tag{39}$$

ამ სისტემას აკმაყოფილებს მთავარი მიმართულების განმსაზღვრელი ვექტორის კოორდინატები: L, M, N. რადგან ეს სისტემა ერთგვაროვანია, ამიტომ მას ექნება ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულია, ე. ი. როცა λ აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & a_{13}\\ a_{12}, & a_{22}-\lambda, & a_{23}\\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{40}$$

ამ განტოლებას ზედაპირის **მახასიათებელი განტოლება** ეწოდება, (39) განტოლებათა სისტემას კი **მახასიათებელი სისტემა**. ადვილი შესამჩნევია, რომ (40) განტოლება კუბური განტოლებაა λ-ს მიმართ. ამიტომ მას ექნება სამი ფესვი, რომლებსაც აღვნიშნავთ λ_1, λ_2, λ_3-ით. თუ λ-ს ნაცვლად (39) სისტემაში მორიგეობით ჩავსვამთ (40) განტოლების ფესვებს, მივიღებთ შესა...

ბამ თავსებად სისტემებს. ამ სისტემების ამოხსნა კი მოგვცემს შესაბამ მთავარ მიმართულებათა განმსაზღვრელ L, M, N-ის მნიშვნელობებს. რადგან (39) სისტემა ერთგვაროვანია, ამიტომ L, M, N სიდიდეები განისაზღვრებიან ნებისმიერ მამრავლამდე. მაგრამ მნიშვნელობა არა აქვს მამრავლის შერჩევას. მართლაც, თუ L, M, N განსაზღვრავს რაიმე მიმართულებას, მაშინ ρL, ρM, ρN (სადაც ρ ნებისმიერი მამრავლია, ოღონდ $\rho \neq 0$) განსაზღვრავს იმავე მიმართულებას ან მის მოპირდაპირე მიმართულებას. რადგან (40) განტოლება კენტი ხარისხისაა (მესამე ხარისხის), ამიტომ მას ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი ექნება. შევიტანოთ ეს ფესვი (39) სისტემაში და განვსაზღვროთ მისი შესაბამი ერთი რომელიმე მთავარი მიმართულება (შეიძლება არსებობდეს რამოდენიმე. ეს დამოკიდებულია სისტემის დეტერმინანტის რანგზე). დავუშვათ, რომ z ღერძი პარალელურია ამ მიმართულებისა (თუ ეს ასე არ არის, მაშინ კოორდინატთა სისტემა უნდა მოვაბრუნოთ სათავის გარშემო ისე, რომ z ღერძი გახდეს მთავარი მიმართულების პარალელური), მაშინ (39) სისტემას დააკმაყოფილებს z ღერძის მიმართულება, რომელიც განისაზღვრება $\overline{P}(0, 0, 1)$ ვექტორით. ამრიგად (39) სისტემა უნდა დაკმაყოფილდეს $L=0$, $M=0$, $N=1$ მნიშვნელობებით. გვექნება (პირველი ორი ტოლობიდან):

$$a_{13}=0,$$

$$a_{23}=0.$$

ამრიგად, თუ z ღერძი მთავარი მიმართულების პარალელურია, მაშინ ზედაპირის განტოლებაში არ შევა xz და yz-ის შემცველი წევრები, ე. ი. განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

ახლა z ღერძი დავტოვოთ უცვლელად და Oxy სიბრტყე მოვაბრუნოთ z ღერძის გარშემო ისე, რომ ახალ განტოლებაში $x'y'$-ის შემცველი წევრი არ შევიდეს (ეს მოხდება α კუთხეზე მობრუნებით, სადაც $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$ (იხ. VII თავის მე-40 ფორმ. ამ შემთხვევაში $A=a_{11}$, $B=2a_{12}$, $C=a_{22}$).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი გარდაქმნის შემდეგ ახალ განტოლებაში $x'z'$ და $y'z'$-ის შემცველი წევრები არ წარმოიშვება; მაშასადამე, ახალ განტოლებაში არ შევა არც ერთი ნამრავლიანი წევრი. ამრიგად შეგვიძლია კოორდინატთა სისტემა ისე ვაბრუნოთ მისივე სათავის გარშემო, რომ ახალ განტოლებაში არ შევიდეს

არც ერთი ნამრავლიანი წევრი. ახალი სისტემის მიმართ ზედაპირის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{14}x'+2a_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0. \quad (41)$$

წირთა თეორიაში (წინა თავში) ჩატარებული გამოთვლების მსგავსი გამოთვლებით დამტკიცდება, რომ (36) დამოკიდებულება (ე. ი. $Q=\lambda P$) უცვლელი დარჩება კოორდინატთა სისტემის ზემოაღნიშნული ბრუნვის დროს. შეიცვლება მხოლოდ $\overline{Q}$ და $\overline{P}$ ვექტორების კოორდინატები, ე. ი. ცვლილება წარმოიშვება დაგეგმილების შემდეგ. თუ P ვექტორის კოორდინატებს ახალ სისტემაში აღვნიშნავთ L', M', N'-ით, მაშინ (39) სისტემა (41) განტოლების მიხედვით ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} (a'_{11}-\lambda)\,L'&=0,\\ (a'_{22}-\lambda)\,M'&=0,\\ (a'_{33}-\lambda)\,N'&=0. \end{aligned} \quad (42)$$

შესაბამი მახასიათებელი განტოლება, ე. ი. (40) განტოლება, ამ შემთხვევაში, წარმოგვიდგება ასე

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda, & 0, & 0\\ 0, & a'_{22}-\lambda, & 0\\ 0, & 0, & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან ადვილად განისაზღვრება მისი ფესვები. გვექნება:

$$\lambda_1=a'_{11}, \quad \lambda_2=a'_{22}, \quad \lambda_3=a'_{33}. \quad (43)$$

აქედან ცხადია, რომ მახასიათებელი განტოლების სამივე ფესვი ნამდვილია. თუ შევიტანთ λ_1 ფესვს (42) სისტემაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} (a'_{22}-\lambda_1)\,M'&=0,\\ (a'_{33}-\lambda_1)\,N'&=0 \end{aligned}$$

ან, რაც იგივეა (წინა ფორმულების თანახმად),

$$\begin{aligned} (\lambda_2-\lambda_1)\,M'&=0,\\ (\lambda_3-\lambda_1)\,N'&=0. \end{aligned} \quad (44)$$

აშკარაა, რომ ამ უკანასკნელ სისტემას აკმაყოფილებს L', M', N'-ის შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$M'=0, \quad N'=0.$$

ამით განისაზღვრება $P_1(L, 0, 0)$ ვექტორი, რომელიც x' ღერძის მიმართულებას განსაზღვრავს. მაშასადამე, λ_1 ფესვს შეესაბამება x'

ღერძის მიმართულება. ანალოგიურად, λ_2 და λ_3 ფესვებს შესაბამება y' და z' ღერძების მიმართულებანი. რადგან, მეორე მხრივ, λ_1, λ_2, λ_3 ფესვებს შესაბამება ზედაპირის მთავარი მიმართულებანი, ამიტომ x', y', z' ღერძებს აქვთ მთავარი მიმართულებანი. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის ზედაპირისათვის არსებობს მთავარ მიმართულებათა ერთი მაინც თანამართობული სამეული. როგორც ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, თუ კოორდინატთა სისტემის ღერძებს ავიღებთ თანამართობულ მთავარ მიმართულებათა სამეულის პარალელურად, მაშინ განტოლება დაიყვანება (41) სახეზე. აქ შემავალი a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} კოეფიციენტები (43) ფორმულებით არის მოცემული. ამრიგად გვექნება

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0, \qquad (45)$$

სადაც λ_1, λ_2, λ_3 მახასიათებელი განტოლების, ე. ი. (40) განტოლების, ფესვებია.

კერძო შემთხვევები: 1) თუ λ_1 მარტივი ფესვია (ე. ი. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$), მაშინ (44) განტოლებათა სისტემას მხოლოდ ერთი ამონახსნი აქვს: $M'=0$, $N'=0$, ე. ი. ასეთ ფესვს შესაბამება მხოლოდ ერთი მთავარი მიმართულება. ანალოგიურად, სხვა ფესვებისათვისაც; მაშასადამე, თუ სამივე ფესვი მარტივია (ერთიმეორისაგან განსხვავებული), მაშინ არსებობს მხოლოდ ერთი მთავარ მიმართულებათა სამეული (იგი, ცხადია, იქნება თანამართობული); 2) თუ $\lambda_1=\lambda_2$, მაშინ (44) სისტემა მხოლოდ ერთი განტოლებისაგან წარმოდგება, სახელდობრ,

$$(\lambda_3-\lambda_1)\,N'=0.$$

აქედან $N'=0$. ამრიგად, ყოველი ვექტორი $P(L',\ M',\ 0)$ სახისა, ე. ი. $Ox'y'$ სიბრტყის პარალელური, მთავარ მიმართულებას განსაზღვრავს. რაც შეეხება λ_3-ს, მისი შესაბამი მთავარი მიმართულება იქნება ერთადერთი. ამ შემთხვევაში (41) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\lambda_1(x'^2+y'^2)+\lambda_3 z'^2+2a_{14}x'+2a_{24}y'+2a_{34}z'+a'_{44}=0.$$

ამ ზედაპირის თანაკვეთა z'-ის მართობული სიბრტყეებით, ე. ი. $z'=h$ სიბრტყეებით (h ნებისმიერია), მოგვცემს წრეწირებს, რომელთა ცენტრები მოთავსდება z ღერძის პარალელურ წრფეზე (მართლაც, ამ წრეწირის ცენტრის გეგმილის კოორდინატები $O'x'y'$ სიბრტყეზე დამოკიდებული არ არის h-ზე). ამიტომ ეს ზედაპირი უნდა იყოს ამ წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირი.

ამრიგად, თუ მახასიათებელი განტოლების ერთი ფესვი ჯერადია, მაშინ ზედაპირი ბრუნვის ზედაპირია; 3) თუ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, მაშინ (45) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\lambda_1(x'^2+y'^2+z'^2)+2a_{14}x'+2a_{24}y'+2a_{34}z'+a'_{44}=0. \qquad (46)$$

ეს განტოლება უბრალო აღნიშვნებით დაიყვანება სფეროს ცნობილ განტოლებაზე. ამრიგად, თუ მახასიათებელ განტოლებას სამჯერადი ფესვი აქვს, მაშინ ზედაპირი სფეროა (ან წარმოსახვითი სფერო). ადვილი შესამჩნევია, რომ, საზოგადოდ, თუ მეორე რიგის ზედაპირი სფეროს გამოსახავს, მაშინ მისი კვადრატული წევრების კოეფიციენტები ტოლი უნდა იყოს და მასში არ უნდა შედიოდეს ნამრავლიანი წევრები, ე. ი. მას ყოველთვის (46) სახე უნდა ჰქონდეს. ამ შემთხვევაში (44) სისტემიდან აღარაფერი რჩება, ე. ი. მახასიათებელ სისტემას აკმაყოფილებს L, M, N-ის ნებისმიერი მნიშვნელობანი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი მიმართულება იქნება ზედაპირის მთავარი მიმართულება, რაც ისედაც აშკარაა სფეროსათვის. სფეროს ცენტრზე გამავალი ყოველი წრფე (სფეროს ყოველი დიამეტრი) იქნება მთავარი დიამეტრი, ცენტრზე გამავალი ყოველი სიბრტყე კი მთავარი დიამეტრული სიბრტყე.

2. სიმეტრიის ღერძები. რადგან მთავარი დიამეტრული სიბრტყე შუაზე ყოფს მის თანამართობულ პარალელურ ქორდებს, ამიტომ ამ ქორდების ბოლო წერტილები სიმეტრიულად იქნება განლაგებული მთავარი დიამეტრული სიბრტყის მიმართ. ამრიგად მთავარი დიამეტრული სიბრტყე ზედაპირის სიმეტრიის სიბრტყეა. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თანამართობული სიმეტრიის სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე იქნება სიმეტრიის ღერძი. მართლაც, ამისათვის საკმარისია განსახილავი თანამართობული სიმეტრიის სიბრტყეები მივიღოთ კოორდინატთა სიბრტყეებად (მაგალითად, Oxy და Oxz სიბრტყეებად), მაშინ მათი თანაკვეთის წრფე იქნება კოორდინატთა ღერძი (x ღერძი) და ზემოაღნიშნული თვისება აშკარა გახდება (y-ისა და z-ის ნიშნების შეცვლა ზედაპირის განტოლებაში ცვლილებას არ გამოიწვევს, რადგან Oxy და Oxz სიბრტყეები სიმეტრიის სიბრტყეებია. ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ x ღერძი არის სიმეტრიის ღერძი).

რადგან აღებულ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრული სიბრტყე შეიცავს ამ მიმართულების პარალელური ქორდების შუაწერტილებს, ხოლო ზედაპირის ცენტრი წარმოადგენს ნებისმიერი ქორდის შუაწერტილს, ამიტომ აღებულ მიმართულებასთან შეუღლებული დიამეტრული სიბრტყე გადის ცენტრზე, ე. ი. შედის დია-

მეტრულ სიბრტყეთა ოჯახში. ცხადია, რომ მთავარი დიამეტრული სიბრტყეც, ე. ი. სიმეტრიის სიბრტყე, გაივლის ცენტრზე; მაშასადამე, იგი შევა დიამეტრულ სიბრტყეთა ოჯახში.

თუ ზედაპირი ცენტრიანია, მაშინ იარსებებს სამი მაინც თანამართობული სიმეტრიის სიბრტყე (რადგან არსებობს სამი მაინც თანამკვეთი მთავარი მიმართულება). მათი თანაკვეთის წრფეები მოგვცემს (სამ თანამართობულ) სიმეტრიის ღერძებს. ამრიგად ცენტრიან ზედაპირს აქვს სამი მაინც სიმეტრიის ღერძი. სიმეტრიის ღერძების მიმართულებანი, როგორც სიმეტრიის სიბრტყეების მართობული წრფეების მიმართულებასთან, იქნებიან ზედაპირის მთავარი მიმართულებანი. ამიტომ სიმეტრიის ღერძების მიმმართველი ვექტორების კოორდინატები განისაზღვრება მახასიათებელი სისტემიდან, სადაც მორიგეობით უნდა ჩავსვათ მახასიათებელი განტოლების ფესვები λ-ს ნაცვლად. ასე მივიღებთ სამი მთავარი მიმართულების განმსაზღვრელ შემდეგ ვექტორებს:

$$\overline{P}_1=(L_1,\ M_1,\ N_1),\ \ \overline{P}_2=(L_2,\ M_2,\ N_2),\ \ \overline{P}_3=(L_3,\ M_3,\ N_3). \quad (47)$$

ცხადია, რომ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების შესაბამი სიმეტრიის სიბრტყეები თანაიკვეთებიან $\overline{P}_3$ ვექტორის პარალელურ სიმეტრიის ღერძზე და ა. შ. თვით სიმეტრიის სიბრტყეთა განტოლებანი მიიღება (31) ან, რაც იგივეა, (32) განტოლებიდან, თუ მასში მორიგეობით ჩავსვამთ L, M, N-ის ნაცვლად მათ მნიშვნელობებს (47) ფორმულების მიხედვით.

თუ ზედაპირი უცენტროა, მაშინ თანამართობულ სიმეტრიის სიბრტყეთა სამეულიდან ერთი იქნება უსასრულეთში (სამივე უნდა გადიოდეს ცენტრზე და თანამართობული იყოს. სასრულეთის თანამართობული ორი სიბრტყე კი თანაიკვეთება სასრულეთში), ორი დანარჩენი კი სასრულეთში. ამ ორი უკანასკნელი სიბრტყის თანაკვეთის წრფე იქნება ზედაპირის სიმეტრიის ღერძი. ამრიგად უცენტრო ზედაპირს აქვს ერთი მაინც სიმეტრიის ღერძი.

თუ ზედაპირი მრავალცენტრიანია, მაშინ თვითეული მისი ცენტრისათვის გამოდგება ცენტრიანი ზედაპირების შესახებ ჩატარებული მსჯელობა; მაშასადამე, მრავალცენტრიან ზედაპირებს ექნება მრავალი სიმეტრიის სიბრტყეები და სიმეტრიის ღერძები.

§ 7. ცენტრიანი მეორე რიგის ზედაპირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე

ზედაპირის სიმეტრიის ღერძები მოვგეზოთ ნებისმიერად და ისე შევადგინოთ ახალი კოორდინატთა სისტემა. ძველი სისტემიდან ახალზე გადასვლა მოხდება ორთოგონალური გარდაქმნებით. ცხა-

დია, რომ ასე შედგენილი სისტემის სათავე მოთავსდება ზედაპირის ცენტრში. ამიტომ ახალი სისტემის სათავე ზედაპირის სიმეტრიის წერტილი უნდა იყოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ $M(x', y', z')$ აკმაყოფილებს ზედაპირის განტოლებას, მაშინ $N(-x', -y', -z')$ წერტილმაც უნდა დააკმაყოფილოს ზედაპირის განტოლება, ე. ი. ზედაპირის განტოლებაში x', y', z'-ის ნიშნის შეცვლამ ცვლილება არ უნდა გამოიწვიოს. ეს კი მაშინ მოხდება, როცა განტოლება არ შეიცავს პირველი რიგის წევრებს. გარდა ამისა, რადგან ახალი ღერძები სიმეტრიის ღერძებია და, მაშასადამე, თანამართობულ მთავარ მიმართულებათა პარალელური, ამიტომ განტოლებაში არ შევა ნამრავლიანი წევრები. ამრიგად ზედაპირის განტოლებას ახალი სისტემის მიმართ ექნება შემდეგი სახე

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+a'_{44}=0. \tag{48}$$

ამ განტოლებას ეწოდება ცენტრიანი ზედაპირის კანონიკური განტოლება. რადგან ახალი ღერძები თანამართობულ მთავარ მიმართულებათა პარალელურია, ამიტომ (48) განტოლების კვადრატული წევრების კოეფიციენტები ისევე გამოითვლება, როგორც (45) განტოლების შემთხვევაში, ე. ი. ეს კოეფიციენტები მოცემული იქნება (43) ფორმულებით. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+a'_{44}=0. \tag{49}$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ (48) განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულება მიიღება ზედაპირის (10) განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულებიდან (რომელიც $F(x, y, z)$-ით გვაქვს აღნიშნული) ორთოგონალური გარდაქმნებით; მაშასადამე, გვექნება

$$F(x, y, z)=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+a'_{44}.$$

შევიტანოთ აქ ზედაპირის ცენტრის x_0, y_0, z_0 კოორდინატები x, y, z-ის ნაცვლად. რადგან ახალ სისტემაში ზედაპირის ცენტრის კოორდინატები ნულებია (ცენტრი ახალი სისტემის სათავეა), ამიტომ x', y', z' შეიცვლება ნულებით და მივიღებთ

$$F(x_0, y_0, z_0)=a'_{44}. \tag{50}$$

როგორც ცნობილია, ცენტრის კოორდინატები (29) განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებს. ამიტომ, თუ ცენტრის კოორდინატებს ჩავსვამთ (14) ტოლობაში, მივიღებთ

$$F(x_0, y_0, z_0)=F_4(x_0, y_0, z_0)=a_{14}x_0+a_{24}y_0+a_{34}z_0+a_{44}.$$

ამრიგად a'_{44} ასე წარმოგვიდგება (50-ე ფორმულის თანახმად)

$$a'_{44}=a_{14}x_0+a_{24}y_0+a_{34}z_0+a_{44}. \tag{51}$$

აქ რომ ჩავსვათ x_0, y_0, z_0-ის მნიშვნელობანი, ამოხსნილი (30) სისტემიდან, მივიღებთ a'_{44}-ის გამოსახულებას ზედაპირის განტოლების კოეფიციენტებში. მაგრამ უმჯობესია ასე მოვიქცეთ: (30) და (51) ოთხი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემიდან გამოვრიცხოთ x_0, y_0, z_0; ამისათვის ამ ოთხი განტოლების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულს უნდა გავუტოლოთ (სისტემის თავსებადობის პირობა). გვექნება

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44}-a'_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ a'_{44}-სათვის შემდეგ გამოსახულებას (ეს ფორმულა მიიღება XIII თავის 47-ე ფორმულის მსგავსად)

$$a'_{44} = \frac{\Delta}{D}. \tag{52}$$

ამრიგად ცენტრიანი მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება საბოლოოდ დაიყვანება შემდეგ განტოლებაზე

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{D} = 0, \tag{53}$$

სადაც λ_1, λ_2, λ_3 არის მახასიათებელი განტოლების ფესვები, Δ და D კი—ცნობილი დეტერმინანტები (განტოლების დისკრიმინანტი და უფროს წევრთა დისკრიმინანტი). რადგან ზედაპირი ცენტრიანია, ამიტომ $D \neq 0$.

კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ე ბ ი: 1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ და $\Delta \neq 0$. გავყოთ (53) ტოლობა $\frac{\Delta}{D}$-ზე და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{\lambda_1 D}{\Delta} = \pm \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2 D}{\Delta} = \pm \frac{1}{b^2}, \quad \frac{\lambda_3 D}{\Delta} = \pm \frac{1}{c^2}. \tag{54}$$

რადგან $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, ამიტომ ერთდროულად განიხილება ან ზედა ნიშანი, ან ქვედა ნიშანი. ამ აღნიშვნების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = \pm 1.$$

ამ შემთხვევაში ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი ასე წარმოგვიდგება (ახალ კოორდინატებში)

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 0.$$

ეს კი წარმოსახვითი კონუსია (მას აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი წერტილი—კოორდინატთა სათავე), ამიტომ ზედაპირი არის ელიფსოიდის ტიპისა. სულ გვექნება ორი ზედაპირი — ზედა და ქვედა ნიშნების შესაბამისად. ამავე დროს ზედა ნიშანს შეესაბამება ნამდვილი ზედაპირი, ქვედას კი წარმოსახვითი. პირველს ეწოდება ელიფსოიდი, მეორეს წარმოსახვითი ელიფსოიდი. ამრიგად გვექნება:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \text{ (ელიფსოიდი)},$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=-1 \text{ (წარმოსახვითი ელიფსოიდი)}.$$

2) $\lambda_1, \lambda_2>0$, $\lambda_3<0$ და $\Delta\neq 0$. ამ შემთხვევაში აღნიშვნები იქნება შემდეგი სახისა:

$$\frac{\lambda_1 D}{\Delta}=\pm\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2 D}{\Delta}=\pm\frac{1}{b^2}, \quad \frac{\lambda_3 D}{\Delta}=\pm\frac{1}{c^2}. \tag{55}$$

აქაც ზედა და ქვედა ნიშნები განიხილება ერთდროულად. გვექნება

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=\pm 1.$$

ამ შემთხვევაში ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი ასე წარმოგვიდგება

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0.$$

ეს კი ნამდვილ კონუსს განსაზღვრავს. ამიტომ განსახილავი ზედაპირი იქნება ჰიპერბოლოიდის ტიპისა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ორივე ნიშანს (ზედასა და ქვედა ნიშანს) შეესაბამება ნამდვილი ზედაპირი. პირველს ეწოდება ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, მეორეს კი ორკალთა ჰიპერბოლოიდი.

3) $\Delta=0$. ამ შემთხვევაში (53) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2=0. \tag{56}$$

ეს კი მეორე რიგის კონუსის განტოლებაა (რადგან ერთგვაროვანია x', y', z'-ის მიმართ); მისი ცენტრი თვით კონუსის წვეროა. ამ შემთხვევაში (54) და (55) აღნიშვნები ძალაში არა რჩება. თუ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3>0$, მაშინ უნდა შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$\lambda_1=\frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2=\frac{1}{b^2}, \quad \lambda_3=\frac{1}{c^2}.$$

(56) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=0 \text{ (წარმოსახვითი კონუსი).}$$

თუ λ_1, $\lambda_2>0$ და $\lambda_3<0$, მაშინ უნდა შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\lambda_1=\frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2=\frac{1}{b^2}, \ \lambda_3=-\frac{1}{c^2}.$$

ამ პირობებში (56) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0 \text{ (ნამდვილი კონუსი).}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა დანარჩენი შემთხვევები, λ_1, λ_2, λ_3-ის ნიშნების შესახებ, მიგვიყვანს ზემოთ ჩამოთვლილ რომელიმე სახის განტოლებამდე (შესაძლებელია მოხდეს x', y', z'-ის მხოლოდ ადგილშენაცვლება). გარდა ამისა, უნდა აღინიშნოს, რომ λ_1, λ_2, λ_3 სამივე ნულისაგან განსხვავებულია. მართლაც, ფესვების ნამრავლი $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ ტოლია (40) განტოლების თავისუფალი წევრისა, რომელიც შეესაბამება $D(0)$-ს. მივიღებთ

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3=D\neq 0.$$

§ 8. უცენტრო ზედაპირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე

განვიხილოთ უცენტრო ზედაპირი. გვექნება: $D=0$, ე. ი. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3=0$. აქედან ჩანს, რომ ერთ-ერთი ფესვი ნულია. დავუშვათ, რომ $\lambda_3=0$. მეორე მხრივ, (37) ფორმულების მიხედვით, როცა $\lambda=0$, მაშინ მთავარი დიამეტრული სიბრტყის განტოლებაში A, B, C ერთდროულად იქნება ნულები, რაც შეუძლებელია (ან სხვანაირად, სიბრტყე უსასრულეთში უნდა იყოს მოთავსებული). ამიტომ მთავარი დიამეტრული სიბრტყეები შეესაბამებიან მხოლოდ ნულისაგან განსხვავებულ ფესვებს. ამ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე კი იქნება ზედაპირის სიმეტრიის ღერძი. ამრიგად, უცენტრო ზედაპირის სიმეტრიის ღერძი შეესაბამება $\lambda=\lambda_3=0$ ფესვს. სიმეტრიის ღერძის მიმმართველი $\vec{P}(L, M, N)$ ვექტორი განისაზღვრება შესაბამისი სისტემიდან, სადაც უნდა ჩავსვათ $\lambda=0$. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_{11}L+a_{12}M+a_{13}N&=0, \\ a_{12}L+a_{22}M+a_{23}N&=0, \\ a_{13}L+a_{23}M+a_{33}N&=0. \end{aligned} \qquad (57)$$

λ_1 და λ_2 ფესვების შესაბამი სიმეტრიის სიბრტყეების განტოლებანი განისაზღვრება (31) ან, რაც იგივეა, (32) განტოლებიდან ისევე, როგორც ცენტრიანი ზედაპირების შემთხვევაში. ახლა სიმეტრიის ღერძი მოვგეზოთ $\overline{P}(L, M, N)$ ვექტორით და ეს ღერძი მივიღოთ ახალი სისტემის z' ღერძად. x', y' ღერძები კი ავიღოთ თანამართობულ მთავარ მიმართულებათა პარალელურად, რომლებიც შეესაბამებიან λ_1, λ_2 ფესვებს. მათი მოგეზულობა მნიშვნელოვანი არ არის. შესაძლებელია მოვგეზოთ, მაგალითად, $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ ვექტორებითაც. რადგან ახალი სისტემის ღერძები თანამართობული მთავარი მიმართულების პარალელურია, ამიტომ ახალ განტოლებაში არ შევა ნამრავლიანი წევრები. $O'x'z'$ და $O'y'z'$ კი, როგორც მთავარ მიმართულებათა მართობული სიბრტყეები, გამავალი სიმეტრიის ღერძზე (z' ღერძზე), იქნება სიმეტრიის სიბრტყეები. ეს იმას ნიშნავს, რომ განტოლებაში არ უნდა შედიოდეს x' და y'-ის მიმართ პირველი ხარისხის წევრები. ამრიგად ზედაპირის ახალ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{34}z'+a'_{44}=0.$$

აქ კვადრატული წევრების კოეფიციენტები ისეთივე იქნება, როგორც (45) განტოლებისათვის. ე. ი. ეს კოეფიციენტები მოცემული იქნება (43) ფორმულებით; მაშასადამე,

$$a'_{11}=\lambda_1,\ a'_{22}=\lambda_2,\ a'_{33}=\lambda_3=0.$$

მივიღებთ

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{34}z'+a'_{44}=0. \tag{58}$$

a'_{34} კოეფიციენტის გამოსათვლელად მხედველობაში მივიღოთ, რომ ეს კოეფიციენტი წარმოიშვება ძველი კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს, როდესაც ჩვენ გადავდივართ (45) განტოლებაზე. ამის შემდგომ კი, სისტემის პარალელური გადატანით, ეს კოეფიციენტი არ იცვლება, ე. ი. ზემოაღნიშნული კოეფიციენტი ისეთივეა, როგორც (45) განტოლებაში. სისტემის სათავის გარშემო მობრუნების ცნობილი ფორმულებიდან:

$$\begin{aligned}
x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,\\
y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,\\
z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3,
\end{aligned}$$

შევიტანოთ x, y, z-ის მნიშვნელობანი (10) განტოლებაში. ადვილი მისახვედრია, რომ a'_{14} წარმოიშვება პირველი ხარისხის წევრებიდან, ე. ი. შემდეგი გამოსახულებიდან

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z.$$

აქ რომ ჩავსვათ x, y, z-ის მნიშვნელობანი ზემოაღნიშნულ გარდაქმნებიდან და დავალაგოთ წევრები x', y', z'-ის მიხედვით, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას z'-ის კოეფიციენტებისათვის

$$a'_{34} = a_{14}\cos\alpha_3 + a_{24}\cos\beta_3 + a_{34}\cos\gamma_3,$$

სადაც α_3, β_3, γ_3, z' ღერძის მიერ შედგენილი კუთხეებია x, y, z ღერძებთან. რადგან z' ღერძი მოგეზულია $\overline{P}(L, M, N)$ ვექტორით (ამ შემთხვევაში სიმარტივისათვის დაშვებულია $\overline{P}_3 = \overline{P}$), ამიტომ აღნიშნული კუთხეები იქნება $\overline{P}$ ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხეები. ამ კუთხეების კოსინუსები კი $\overline{P}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებია, რაც ცნობილი ფორმულებით წარმოგვიდგება:

$$\cos\alpha_3 = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos\beta_3 = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

კოსინუსების ამ მნიშვნელობათა ჩასმა წინა ფორმულაში მოგვცემს a'_{34}-ის შემდეგ გამოსახულებას:

$$a'_{34} = \frac{La_{14} + Ma_{24} + Na_{34}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \tag{59}$$

სადაც L, M, N ამონახსნებია (57) სისტემისა. ახლა დავამტკიცებთ, რომ $a'_{34} \neq 0$. დავუშვათ საწინააღმდეგო: $a'_{34} = 0$, მაშინ (58) განტოლებაში აღარ შევა z' და იგი გამოსახავს ცილინდრს, რომელიც მრავალცენტრიანია. ამრიგად უცენტრო ზედაპირისათვის $a'_{34} \neq 0$. ამ შემთხვევაში სიმეტრიის ღერძი (ე. ი. z' ღერძი) თანაიკვეთება ზედაპირთან. ამ წერტილს ეწოდება ზ ე დ ა პ ი რ ი ს წ ვ ე რ ო. თუ $O'x'y'z'$ კოორდინატთა სისტემის სათავეს მოვათავსებთ ზედაპირის წვეროში, მაშინ (58) განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს $x' = y' = z' = 0$ მნიშვნელობებით. ამიტომ ეს განტოლება არ უნდა შეიცავდეს თავისუფალ წევრს, ე. ი. $a'_{44} = 0$. ამრიგად, თუ ახლა უცენტრო ზედაპირის სიმეტრიის ღერძს, მოგეზულს $\overline{P}$ ვექტორით, ავიღებთ z' ღერძად, x', y' ღერძებს ავიღებთ თანამართობულ მთავარ მიმართულებათა პარალელურად და ახალი სისტემის სათავეს მოვათავსებთ ზედაპირის წვეროში, მაშინ ზედაპირის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{23} z' = 0, \tag{60}$$

სადაც a'_{34} განსაზღვრულია (59) ფორმულით. ამ განტოლებას ეწოდება უცენტრო ზედაპირის კანონიკური განტოლება.

კერძო შემთხვევები: 1) $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. გავყოთ (50) განტოლება a'_{34}-ზე და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{\lambda_1}{a'_{34}}=\pm\frac{1}{p}, \quad \frac{\lambda_2}{a'_{34}}=\pm\frac{1}{q}, \tag{61}$$

სადაც p, q დადებითია (ორივე ტოლობაში ზედა და ქვედა ნიშნები შეესაბამება ერთიმეორეს ცალ-ცალკე). ამ აღნიშვნების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{x'^2}{p}+\frac{y'^2}{q}=\pm 2z'. \tag{62}$$

შევნიშნოთ, რომ ზედა და ქვედა ნიშნების შესაბამი განტოლებანი ერთიმეორეზე დაიყვანება, თუ z' ღერძს შევუცვლით გეზს. ამიტომ ორივე ეს განტოლება ერთნაირ ზედაპირს გამოსახავს. ერთი ზედაპირი მიიღება მეორისაგან, თუ სიმეტრიის ღერძს (ზედაპირთან ერთად) მოვაბრუნებთ 180°-ით კოორდინატთა სისტემის სათავის გარშემო. (52) განტოლებით განსაზღვრულ ზედაპირს ეწოდება ე ლ ი ფ ს უ რ ი   პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი.

2) $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$. ამ შემთხვევაში, ნაცვლად (61) აღნიშვნებისა, გამოგვადგება შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{\lambda_1}{a'_{34}}=\pm\frac{1}{p}, \quad \frac{\lambda_2}{a'_{34}}=\mp\frac{1}{q}. \tag{63}$$

ამ აღნიშვნების შემდეგ (50) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{x'^2}{p}-\frac{y'^2}{q}=\pm 2z'.$$

ისევე, როგორც პირველ შემთხვევაში, აქაც ორივე ნიშანს შეესაბამება ერთნაირი მეორე რიგის ზედაპირი. ამ ზედაპირს ეწოდება ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი   პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი.

3) $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=\lambda_3=0$. ამ შემთხვევაში (60) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\lambda_1 x'^2+2a'_{34}z'=0.$$

აქედან (61) აღნიშვნების თანახმად მივიღებთ

$$x'^2=\pm 2pz'. \tag{64}$$

ეს კი y' ღერძის პარალელურმსახველებიან ცილინდრულ ზედაპირს გამოსახავს (რადგან ეს განტოლება არ შეიცავს y'-ს), რომლის ფუძე $O'x'z'$ სიბრტყეზე (64) განტოლებით განსაზღვრული პარაბო-

ლაა. ამ ზედაპირს, როგორც ეს ამ თავის პირველ პარაგრაფში იყო აღნიშნული, ეწოდება პარაბოლური ცილინდრი.

რადგან λ_1 ფესვს, როგორც მარტივ ფესვს, შეესაბამება ერთი მთავარი მიმართულება, ამიტომ ორი დანარჩენი თანამართობული მთავარი მიმართულება $\lambda_2=\lambda_3=0$ — ფესვის შესაბამი უნდა იყოს. ამრიგად (57) სისტემის მხოლოდ ერთი განტოლება იქნება დამოუკიდებელი, ე. ი. სამივე განტოლებას ერთიმეორის პროპორციული კოეფიციენტები უნდა ჰქონდეს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ პირობებში $\Delta=0$. ისევე, როგორც პარაბოლის განხილვის დროს იყო დამტკიცებული, აქაც ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ, თუ $D=0$, $\Delta=0$; მაშინ ზედაპირი არის ცილინდრული ან სიბრტყეთა წყვილად გადაგვარებული.

§ 9 მრავალცენტრიანი ზედაპირის განტოლების დაყვანა კანონიკურ სახეზე

თუ ზედაპირი მრავალცენტრიანია, მაშინ $D=0$, ე. ი. $\lambda_3=0$ და, გარდა ამისა, მისთვის მართებული იქნება ცენტრიანი ზედაპირისათვის ჩატარებული მსჯელობა (50) ფორმულამდე ჩათვლით. ცხადია, მართებული არ იქნება (52) ფორმულა (რადგან $D=0$). ამ შემთხვევაში (49) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+a'_{44}=0, \tag{65}$$

სადაც a'_{44} განსაზღვრული იქნება (50) ან (51) ფორმულით (ვინაიდან ამ შემთხვევაში (30) სისტემის მხოლოდ ორი განტოლებაა დამოუკიდებელი, შეგვიძლია განვსაზღვროთ ერთი რომელიმე წერტილი ამ ორი განტოლებით განსაზღვრული წრფისა და შევიტანოთ (51) ფორმულაში). პირდაპირ ჩანს, რომ ეს განტოლება გამოსახავს z' ღერძის პარალელურმსახველებიან (რადგან z' არ შედის) ცილინდრულ ზედაპირს. ამ შემთხვევაში (30) და (51) განტოლებათა თავსებადობის პირობის განხილვა, ისევე როგორც (52) ფორმულისათვის იყო ჩატარებული, მოგვცემს $\Delta=0$. ამრიგად მრავალცენტრიანი ზედაპირისათვის $D=0$, $\Delta=0$.

კ ე რ ძ ო შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ე ბ ი: 1) $\lambda_1, \lambda_2>0$, $a'_{44}\neq 0$. გავყოთ (65) განტოლება a'_{44}-ზე და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{\lambda_1}{a'_{44}}=\pm\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2}{a'_{44}}=\pm\frac{1}{b^2}. \tag{66}$$

ამ აღნიშვნების საფუძველზე (55) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=\pm 1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ განტოლებაში ზედა ნიშანს შეესაბამება ნამდვილი ზედაპირი, რომელსაც, როგორც აღნიშნული იყო ამ თავის პირველ პარაგრაფში, ეწოდება ელიფსური ცილინდრი. ქვედა ნიშანს კი—წარმოსახვითი ზედაპირი. ამ უკანასკნელ ზედაპირს ეწოდება წარმოსახვითი ელიფსური ცილინდრი. პირველის ფუძე $O'x'y'$ სიბრტყეზე ნამდვილი ელიფსია, მეორის ფუძე კი წარმოსახვითი ელიფსი. ამრიგად გვექნება:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \text{ (ელიფსური ცილინდრი)},$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1 \text{ (წარმოსახვითი ელიფსური ცილინდრი)}.$$

2) $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, $a'_{44}\neq0$. ამ შემთხვევაში (66) აღნიშვნების ნაცვლად უნდა შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{\lambda_1}{a'_{44}}=\pm\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2}{a'_{44}}=\mp\frac{1}{b^2}.$$

(55) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=\pm1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ზედა და ქვედა ნიშნის შესაბამი განტოლებანი ერთიმეორეზე დაიყვანება x', y'-ის ადგილმონაცვლებით. ამიტომ ეს ორივე განტოლება ერთნაირ ზედაპირს გამოსახავს. ეს არის z' ღერძის პარალელურმსახველებიანი ცილინდრი, რომლის ფუძე $O'x'y'$ სიბრტყეზე არის ჰიპერბოლა. ამ ზედაპირს, როგორც ამ თავის პირველ პარაგრაფშიაც იყო მოხსენებული, ეწოდება ჰიპერბოლური ცილინდრი.

3) $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$, $a'_{44}=0$. ამ შემთხვევაში (65) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=0. \tag{67}$$

ასეთი განტოლება კი, როგორც ცნობილია, იშლება ორ წრფივ განტოლებად. თუ კოეფიციენტებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, მაშინ დაშლა მოხდება წარმოსახვით წრფივ განტოლებებად, ხოლო, თუ კოეფიციენტებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ დაშლა მოხდება ნამდვილ წრფივ განტოლებებად. ამრიგად (57) განტოლებით განისაზღვრება ან წარმოსახვით სიბრტყეთა წყვილი, ან ნამდვილ სიბრტყეთა წყვილი. ამ შემთხვევაში (30) და (51) განტოლებათა სისტემიდან მხოლოდ ორი განტოლება იქნება დამოუკიდებელი.

4) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a'_{44} \neq 0$. ამ შემთხვევაში (65) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\lambda_1 x'^2 + a'_{44} = 0.$$

აქედან

$$x' = \pm \sqrt{-\frac{a'_{44}}{\lambda_1}}.$$

იმისდა მიხედვით, თუ როგორია ფესვქვეშა გამოსახულება, მივიღებთ ნამდვილ ან წარმოსახვით სიბრტყეებს, რომლებიც პარალელურია $O'x'y'$ სიბრტყისა. ამრიგად ზედაპირი წარმოდგება პარალელურ სიბრტყეთა წყვილით. ამ შემთხვევაში (30) სისტემის მხოლოდ ერთი განტოლება იქნება დამოუკიდებელი.

5) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a'_{44} = 0$. ამ შემთხვევაში (65) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x'^2 = 0.$$

აქედან

$$x' = \pm 0 = 0.$$

ამრიგად ზედაპირი წარმოგვიდგება ორი შეთავსებული სიბრტყით (ეს არის $O'y'z'$ სიბრტყე). ამ შემთხვევაში (30) და (51) განტოლებათა სისტემის მხოლოდ ერთი განტოლებაა დამოუკიდებელი. ეს უკანასკნელი, ცხადია, (30) სისტემაში უნდა შედიოდეს, რადგან ეს სისტემა არ შეიძლება იყოს იგივურად ნული (მასში შედიან უფროს წევრთა კოეფიციენტები).

დასკვნები. უკანასკნელი სამი პარაგრაფის საფუძველზე წარმოგვიდგება შემდეგი სურათი:

1) $D \neq 0$. ცენტრიანი ზედაპირი. მისი კანონიკური განტოლება შემდეგი სახისაა

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{D} = 0, \qquad (a)$$

სადაც λ_1, λ_2, λ_3 არის

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}-\lambda, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (b)$$

განტოლების ფესვები. თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ λ_1, λ_2, λ_3-ის სხვადასხვა ნიშნების მიხედვით მოგვეცემა ელიფსოიდები და ჰიპერბოლოიდები. თუ $\Delta = 0$, მაშინ მივიღებთ კონუსებს.

2) $D = 0$, $\Delta \neq 0$. უცენტრო ზედაპირი. მისი კანონიკური განტოლება შემდეგი სახისაა

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{34} z' = 0, \qquad (c)$$

სადაც λ_1, λ_2 არის (b) განტოლების ფესვები (მიღებული გვაქვს, რომ $\lambda_3=0$). a'_{34} განსაზღვრულია შემდეგი ფორმულით

$$a'_{34}=\frac{La_{14}+Ma_{24}+Na_{34}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \qquad (d)$$

ხოლო L, M, N წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნებს:

$$\begin{aligned} a_{11}L+a_{12}M+a_{13}N&=0,\\ a_{12}L+a_{22}M+a_{23}N&=0,\\ a_{13}L+a_{23}M+a_{33}N&=0. \end{aligned} \qquad (e)$$

λ_1-ისა და λ_2-ის სხვადასხვა შესაძლებელი მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ ელიფსურ პარაბოლოიდს, ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს და პარაბოლურ ცილინდრს.

3) $D=0$, $\Delta=0$. მრავალცენტრიანი ზედაპირი. მისი კანონიკური განტოლება შემდეგი სახისაა

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+F(x_0, y_0, z_0)=0, \qquad (f)$$

სადაც λ_1, λ_2 ისეთივეა, როგორც (c) განტოლებაში, x_0, y_0, z_0 კი შემდეგი სისტემის რაიმე ამონახსნებია:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}&=0,\\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}&=0,\\ a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34}&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

ამ შემთხვევაში სისტემას მრავალი ამონახსნი აქვს. უნდა ავიღოთ ერთი მათგანი. თუ $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, მაშინ λ_1, λ_2-ის სხვადასხვა შესაძლებელ მნიშვნელობათათვის მივიღებთ: ელიფსურ ცილინდრებს, ჰიპერბოლურ ცილინდრს და პარალელურ სიბრტყეთა წყვილებს. თუ $F(x_0, y_0, z_0)=0$, მაშინ მივიღებთ თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილებს და შეთავსებულ სიბრტყეთა წყვილებს.

§ 10. მეორე რიგის ზედაპირთა აგება კანონიკური განტოლების მიხედვით

ამ თავის პირველ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანეთ ელიფსურ, ჰიპერბოლურ და პარაბოლურ ცილინდრთა აგებანი. იქვე გავეცანით აგრეთვე კონუსური ზედაპირის აგების საერთო წესს. საზოგადოდ, ეს ზედაპირები (და რა თქმა უნდა სიბრტყეთა წყვილებიც) შედარებით მარტივი ზედაპირებია მეორე რიგის ზედაპირთა შორის (მათი ანალიზური დამახასიათებელი პირობაა $\Delta=0$). მათ განსაკუთრებული მეორე რიგის ზედაპირები ეწოდება. რაც შეეხება ელიფსოიდებს, ჰიპერბოლოიდებს და პარაბოლოიდებს, ესენი ზოგადი წარმომადგენლებია მეორე რიგის ზედაპირებისა, მათი სტრუქტუ-

რაც უფრო რთულია. მათ ეწოდებათ ჩვეულებრივი მეორე რიგის ზედაპირები (მათი ანალიზურად დამახასიათებელი პირობაა $\Delta \neq 0$). რადგან აგებები ხდება მხოლოდ ნამდვილი ზედაპირებისა, ამიტომ ჩვეულებრივ ზედაპირებიდან სულ ხუთი ზედაპირი გვექნება განსახილავი, სახელდობრ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (ელიფსოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ (ორკალთა ჰიპერბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \text{ (ელიფსური პარაბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \text{ (ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი)}.$$

გარდა ამისა, მოგვყავს აგრეთვე მეორე რიგის კონუსის აგება მისი კანონიკური განტოლების მიხედვით (რადგან ამ თავის პირველ პარაგრაფში მეორე რიგის კონუსებიდან მხოლოდ წრიული კონუსის ნახაზი გვაქვს მოყვანილი), ე. ი. შემდეგი განტოლების მიხედვით

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (მეორე რიგის კონუსი)}.$$

ამ უკანასკნელი ზედაპირის ასაგებად საკმარისია განვსაზღვროთ კონუსის თანაკვეთის წირი Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით. შევაერთოთ ამ წირის წერტილები კოორდინატთა სისტემის სათავესთან. უმჯობესია ავიღოთ სიბრტყე $z=c$. შევიტანოთ z-ის ეს მნიშვნელობა კონუსის განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

ამრიგად თანაკვეთის წირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის ელიფსი. თვით თანაკვეთის წირიც იქნება იგივე ელიფსი გადატანილი თანამკვეთ სიბრტყეზე. მაშასადამე, აღებულ სიბრტყეზე უნდა დავხაზოთ ეს ელიფსი და შევაერთოთ მისი წერტილები კოორდინატთა სისტემის სათავესთან. ამრიგად აიგება განსახილავი კონუსი (ნახ. 129).

ელიფსოიდის აგება. მოვახდინოთ ელიფსოიდის თანაკვეთა Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით. $z=h$ იყოს ამ სიბრტყის განტოლება. შევიტანოთ ელიფსოიდის განტოლებაში z-ის ეს მნიშვნელობა. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=1.$$

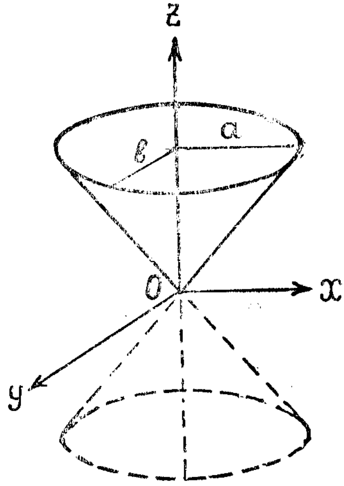
აქედან

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1,$$

სადაც

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$



ნახ. 129.

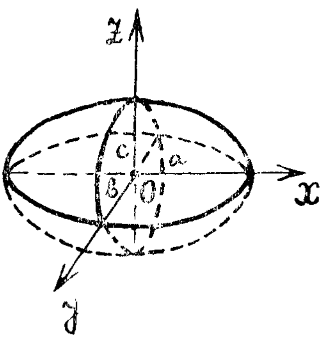
ამრიგად თანაკვეთის წირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის ak, bk ნახევარღერძებიანი ელიფსი. ასეთივე იქნება თვით თანაკვეთის წირიც. უდიდესი ამ ელიფსიდან შეესაბამება $k=1$-ს, ე. ი. $z=h=0$. ეს კი Oxy სიბრტყით თანაკვეთის წირია. მინიმალური ელიფსი შეესაბამება $k=0$, ე. ი, $z=c$-ს. ეს არის წერტილი (0, 0, c). ამრიგად a, b ნახევარღერძებიანი ელიფსი გადაადგილდება ისე, რომ თან პროპორციულად მცირდება მისი ნახევარღერძები ნულებამდე. ეს საკმაო წარმოდგენას იძლევა ელიფსოიდზე. მაგრამ უმჯობესია ვიცოდეთ კიდევ, თუ რომელ წირზე მოძრაობს ელიფსის წვეროები გადაადგილების დროს; ამისათვის უნდა განვსაზღვროთ ელიფსოიდის თანაკვეთის წირი Oxz სიბრტყესთან (რადგან ელიფსის წვეროები მოძრაობენ ამ სიბრტყეზე). ამ სიბრტყის განტოლებაა $y=0$. შევიტანოთ ეს y-ის მნიშვნელობა ელიფსოიდის განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ამრიგად Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებით თანაკვეთის ელიფსების წვეროები მოთავსებულია a, c ნახევარღერძებთან ელიფსზე. ეს ყველაფერი საშუალებას იძლევა შევადგინოთ ელიფსოიდის ნახაზი (ნახ. 130). a, b, c-ს ეწოდება ელიფსოიდის ნახევარღერძები. ელიფსოიდის სიმეტრიის ღერძების თანაკვეთის წერტილებს

ამავე ზედაპირთან ეწოდება ელიფსოიდის წვეროები (ამ შემთხვევაში წვეროები ელიფსოიდის თანაკვეთის წერტილებია თვით კოორდინატთა ღერძებთან). ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ $b=c$, მაშინ ელიფსოიდის განტოლებიდან მივიღებთ ბრუნვის ელიფსოიდის განტოლებას, ხოლო როცა $a=b=c=r$, მაშინ მივიღებთ სფეროს განტოლებას

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$



ნახ. 130.

ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის აგება. მოვახდინოთ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთა Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით. $z=h$ იყოს ამ სიბრტყის განტოლება. z-ის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=1.$$

აქედან

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1,$$

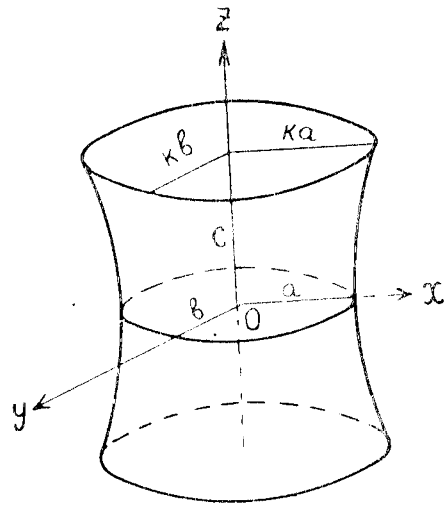
სადაც

$$k=\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\,.$$

ამრიგად ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთის წირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის ak, bk ნახევარღერძებიანი ელიფსი. იგივე იქნება თვით თანაკვეთ სიბრტყეზეც. მინიმალური ელიფსი შეესაბამება $k=1$-ს, ე. ი. $z=h=0$-ს. ეს კი Oxy სიბრტყით თანაკვეთის წირია. მაქსიმალური ელიფსი არ არსებობს. h-მა შეიძლება მიიღოს ყოველი ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობა. ამრიგად Oxy სიბრტყეზე მდებარე a, b ნახევარღერძებიანი ელიფსი გადაადგილდება Oxy სიბრტყის პარალელურად ისე, რომ თან მისი ნახევარღერძები პროპორციულად იზრდება დაუსრულებლად. ეს ფაქტი საკმაო წარმოდგენას იძლევა ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ფორმაზე. მაგრამ უმჯობესია გავიგოთ, თუ რომელ წირზე მოძრაობს ელიფსის წვეროები. ამისათვის მოვახდინოთ ზედაპირის თანაკვეთა Oxz სიბრტყით, ე. ი. ჩავსვათ ზედაპირის განტოლებაში $y=0$. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ეს კი a, c ნახევარღერძებიანი ჰიპერბოლაა. ამ წირზე მდებარეობენ ზემოაღნიშნული ელიფსების წვეროები. ეს ნათელ წარმოდგენას იძლევა ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ფორმაზე (ნახ. 131). a, b, c-ს ეწოდება ჰიპერბოლოიდის ნახევარღერძები. როცა $a=b$, მაშინ



ნახ. 131.

ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლება განსაზღვრავს ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს. მინიმალურ ელიფსს, ე. ი. a, b ნახევარღერძებიან ელიფსს ეწოდება ჰიპერბოლოიდის ყელის ელიფსი. ბრუნვის ჰიპერბოლოიდის შემთხვევაში, ცხადია, ყელის ელიფსი წრეწირია. ყელის ელიფსის წვეროებს ეწოდება ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წვეროები.

ორკალთა ჰიპერბოლოიდის აგება. მოვახდინოთ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთა Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით. $z=h$ იყოს ამ სიბრტყის განტოლება. შევიტანოთ z-ის მნიშვნელობა ორკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებაში. მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=-1.$$

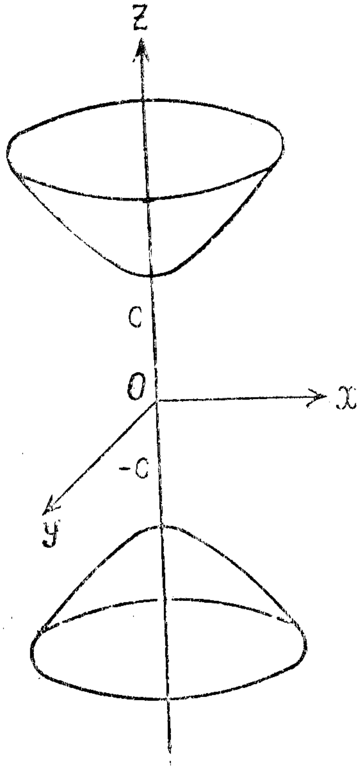
აქედან

$$\frac{x}{(ak)^2}+\frac{y}{(bk)^2}=1,$$

სადაც

$$k=\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

ამრიგად, თანაკვეთაში მიიღება ak, bk ნახევარღერძებიანი ელიფსი. მინიმალური ელიფსი შეესაბამება $k=0$, ე. ი. $h=\pm c$. h-ის ზრდასთან ერთად ელიფსიც იზრდება. ადვილი შესამჩნევია, რომ h-ს შეუძლია მიიღოს ნამდვილ რიცხვთა ყველა მნიშვნელობანი, გარდა $(-c, c)$ შუალედში მოთავსებული მნიშვნელობებისა. ამრიგად ელიფსი, დაწყებული $(0, 0, c)$ წერტილიდან, გადაადგილდება Oxy სიბრტყის პარალელურად ისე, რომ მისი ნახევარღერძები იზრდება პროპორციულად. ეს იძლევა ზედაპირის ფორმაზე წარმოდგენას. მაგრამ უმჯობესია ვიცოდეთ, თუ რომელ წირზე მოძრაობს თანაკვეთის ელიფსის წვეროები მკვეთი სიბრტყის პარალელური გადაადგილების დროს. ამისათვის ჩავსვათ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებაში $y=0$ (რადგან ელიფსის წვეროების მოძრაობა ხდება Oxz სიბრტყეზე). მივიღებთ



ნახ. 132.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

ეს კი ჰიპერბოლაა, რომლის ფოკუსები z ღერძზეა მოთავსებული. ამრიგად, თანაკვეთის ელიფსების წვეროები მოთავსებულია ჰიპერბოლაზე. ამით კი ნათლად წარმოგვიდგება ორკალთა ჰიპერბოლოიდის სურათი (ნახ. 132). a, b, c-ს ეწოდება ორკალთა ჰიპერბოლოიდის ნახევარღერძები. $(0, 0, c)$ და $(0, 0, -c)$ წერტილებს ეწოდება ჰიპერბოლოიდის წვეროები. როცა $a=b$, მაშინ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებიდან მივიღებთ ბრუნვის ორკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებას.

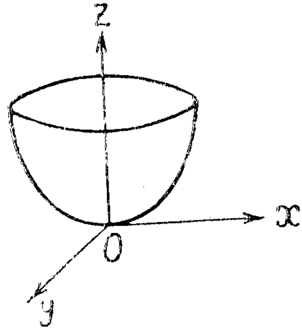
ე ლ ი ფ ს უ რ ი პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი ს ა გ ე ბ ა. მოვახდინოთ ელიფსური პარაბოლოიდის თანაკვეთა Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით, ე. ი. ჩავსვათ ელიფსური პარაბოლოიდის განტოლებაში $z=h$-ს. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h.$$

აქედან

$$\frac{x^2}{(\sqrt{ph})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{qh})^2}=1.$$

ეს განტოლება კი $\sqrt{ph}$, $\sqrt{qh}$ ნახევარღერძებიან ელიფსს განსაზღვრავს. ამრიგად Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით თანაკვეთის წირი ელიფსია. მინიმალური ელიფსი შეესაბამება $h=0$-ს. ეს იქნება O წერტილი (კოორდინატთა სისტემის სათავე). პირდაპირ ჩანს, რომ h არ შეიძლება იყოს უარყოფითი (იგულისხმება, რომ $p>0$, $q>0$). ამრიგად h იცვლება $(0, \infty)$ შუალედში, თანაკვეთის ელიფსის ნახევარღერძები კი იზრდება პროპორციულად აგრეთვე იმავე შუალედში. ახლა გამოვარკვიოთ რომელ წირზე მოძრაობენ თანაკვეთის ელიფსის წვეროები; ამისათვის ელიფსური პარაბოლოიდის განტოლებაში ჩავსვათ $y=0$. მივიღებთ



ნახ. 133.

$$\frac{x^2}{p}=2z,$$

ანუ

$$x^2=2pz.$$

ეს კი პარაბოლის განტოლებაა, რომლის ფოკუსი z ღერძზე მდებარეობს. ამრიგად თანაკვეთის ელიფსების წვეროები მდებარეობენ ზემოაღნიშნულ პარაბოლაზე. ეს ნათელ წარმოდგენას იძლევა ელიფსურ პარაბოლოიდის ფორმაზე (ნახ. 133). ელიფსური პარაბოლოიდის წვერო (ამ შემთხვევაში) კოორდინატთა სათავეა. p და q-ს ეწოდება ელიფსური პარაბოლოიდის პარამეტრები. როცა $p=q$, მაშინ ელიფსური პარაბოლოიდის განტოლება მოგვცემს ბრუნვის პარაბოლოიდის ცნობილ განტოლებას.

ჰ ი პ ე რ ბ ო ლ უ რ ი პ ა რ ა ბ ო ლ ო ი დ ი ს ა გ ე ბ ა. მოვახდინოთ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის თანაკვეთა Oxy სიბრტყის პარალელური სიბრტყით; ამისათვის ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის განტოლებაში ჩავსვათ $z=h$. მივიღებთ

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h.$$

აქედან

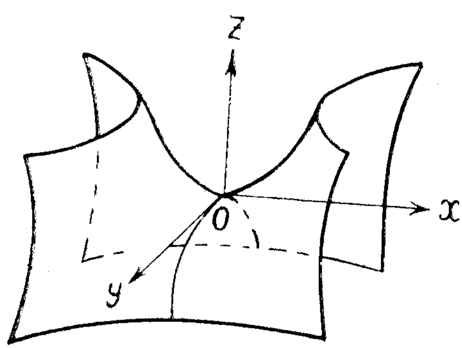
$$\frac{x^2}{(\sqrt{ph})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{qh})^2}=1 \text{ (როცა } h>0),$$

$$\frac{y^2}{(\sqrt{qh})^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{ph})^2}=1 \text{ (როცა } h<0).$$

ამრიგად, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის თანაკვეთის წირი Oxy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყესთან ყოველთვის ჰიპერბოლაა. როცა თანამკვეთი სიბრტყე z ღერძის დადებით მხარესაა ($h>0$), მაშინ თანაკვეთის ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძი x ღერძის პარალელურია. როცა თანამკვეთი სიბრტყე z ღერძის უარყოფით მხარესაა ($h<0$), მაშინ თანაკვეთის ჰიპერბოლის ნამდვილი ღერძი y ღერძის პარალელურია. ამ ჰიპერბოლების ნახევარღერძები პროპორციულად იზრდებიან. როცა $h=0$, მაშინ თანაკვეთის წირის განტოლება ასეთი იქნება

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0.$$

ეს კი წრფეთა წყვილს გამოსახავს. ადვილი შესამჩნევია, რომ პირველ შემთხვევაში ჰიპერბოლის წვეროები მოძრაობენ Oxz სიბრტყე-



ნახ. 134

ზე, ხოლო მეორე შემთხვევაში Oyz სიბრტყეზე. ამიტომ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის განტოლებაში მორიგეობით უნდა ჩავსვათ $y=0$ და $x=0$. მივიღებთ:

$$x^2=2pz,$$

$$y^2=-2qz.$$

როგორც ჩანს, ეს ორივე წირი პარაბოლაა. პირველის სიმეტრიის ღერძი z ღერძის დადებითი ნაწილია, ხოლო მეორის სიმეტრიის

ღერძი z ღერძის უარყოფითი ნაწილი. ეს ორი წირი თანამართობულ სიბრტყეებში (Oxz და Oyz სიბრტყეები) არის განლაგებული ერთიმეორის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ამ პარაბოლებზე მოძრაობენ ზემოაღნიშნული თანაკვეთის ჰიპერბოლების წვეროები. ეს ყველაფერი დაახლოებით წარმოდგენას იძლევა ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის აღნაგობაზე კოორდინატთა სისტემის სათავის მახლობლობაში (ნახ. 134). კოორდინატთა სათავე (ამ შემთხვევაში) ზედაპირის წვეროა. p, q-ს ეწოდება ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის პარამეტრები. როგორც ჩანს, ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს რთული სახე აქვს მეორე რიგის სხვა ზედაპირებთან შედარებით. იგი თავისი ფორმით სამხედრო უნაგირს მოგვაგონებს.

მაგალითები. 1. მოცემულია ზედაპირი შემდეგი განტოლებით

$$x^2+3xy+y^3+2z^2-2x-4=0.$$

საძიებელია ამ ზედაპირის კანონიკური განტოლება და ძველი სისტემის მიმართ ნახაზი.

ამ შემთხვევაში განტოლების კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$a_{11}=1,\ a_{22}=1,\ a_{33}=2,\ a_{12}=3/2,\ a_{13}=0,$$
$$a_{33}=0,\ a_{14}=1,\ a_{24}=0,\ a_{34}=0,\quad a_{44}=-4.$$

მახასიათებელი განტოლება კოეფიციენტების ამ მნიშვნელობათათვის ასეთ სახეს მიიღებს (იხ. მე-40 განტ.)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & \frac{3}{2}, & 0 \\ \frac{3}{2}, & 1-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

აქედან გვექნება

$$(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda, & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

ამ განტოლების ამოხსნა მოგვცემს:

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{5}{2},\ \lambda_3=-\frac{1}{2}.$$

ახლა გამოვთვალოთ D და Δ დეტერმინანტები. გვექნება:

$$D=\begin{vmatrix} 1, & \frac{3}{2}, & 0 \\ \frac{3}{2}, & 1 & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{vmatrix}=-\frac{5}{2}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & \frac{3}{2}, & 0, & -1 \\ \frac{3}{2}, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & -4 \end{vmatrix}=18.$$

ამრიგად, $D\neq 0$, $\Delta\neq 0$. ზედაპირი ცენტრიანია (ამავე დროს ჩვეულებრივია). მისი კანონიკური განტოლება (იხ. 54-ე განტ.), ამ შემთხვევაში, ასეთ სახეს მიიღებს (λ_1, λ_2, λ_3-ის და D, Δ-ს მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ)

$$2x'^2+\frac{5}{2}y'^2-\frac{1}{2}z'^2-\frac{9}{5}=0.$$

როგორც ჩანს, ზედაპირი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი ყოფილა, იმისათვის, რომ ავაგოთ ეს ზედაპირი ძველი სისტემის მიმართ, საჭიროა განვსაზღვროთ სიმეტრიის ღერძების მდებარეობა. რადგან სიმეტრიის ღერძების მიმართულებანი უკვე ვიცით (ესენია $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორების მიმართულებანი), ამიტომ საკმარისია მხოლოდ ზედაპირის ცენტრის განსაზღვრა. ამ წერტილზე მოდებული $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები განსაზღვრავენ სიმეტრიის ღერძების მიმართულებას და, მაშასადამე, ახალ ღერძებს. ზედაპირის ცენტრის განმსაზღვრელი (30) სისტემა, ამ შემთხვევაში, ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x_0+\frac{3}{2}y_0-1=0,$$

$$\frac{3}{2}x_0+y_0=0,$$

$$2z_0=0.$$

აქედან

$$x_0=-\frac{4}{5}, \quad y_0=\frac{6}{5}, \quad z_0=0.$$

ამრიგად წირის M_0 ცენტრი განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$M_0 = \left(-\frac{5}{4}, \ \frac{6}{5}, \ 0 \right).$$

უნდა ავაგოთ ეს წერტილი, მასზე მოვდოთ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები და ასე შევადგინოთ ახალი სისტემა.

ამ ვექტორების კოორდინატები განისაზღვრება მახასიათებელი სისტემიდან, რომელიც ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს (იხ. 39-ე სისტემა)

$$(1-\lambda)L + \frac{3}{2}M = 0,$$

$$\frac{3}{2}L + (1-\lambda)M = 0,$$

$$(2-\lambda)N = 0.$$

თუ ჩავსვამთ აქ $\lambda = \lambda_1 = 2$, მივიღებთ:

$$-L + \frac{3}{2}M = 0,$$

$$\frac{3}{2}L - M = 0,$$

$$0 \cdot N = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ სისტემას აკმაყოფილებს L, M, N-ის შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$L = 0, \ M = 0, \ N = 1.$$

ამრიგად, $\overline{P}_1$ ვექტორი განისაზღვრება ასე

$$\overline{P}_1 = (0, \ 0, \ 1).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება λ_2 და λ_3 ფესვების შესაბამი $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ ვექტორები. გვექნება:

$$\overline{P}_2 = (1, \ 1, \ 0),$$

$$\overline{P}_3 = (1, \ -1, \ 0).$$

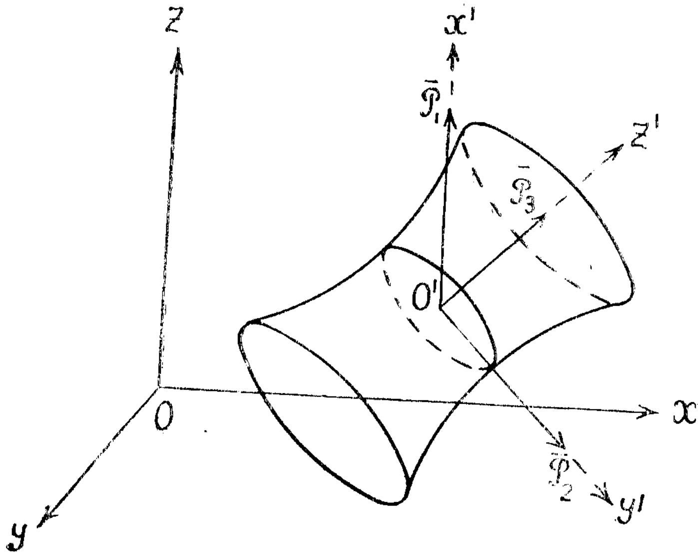
უნდა ავაგოთ M_0 წერტილი და მასზე მოვდოთ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები. ამით მოგვეცემა ახალი სისტემა. ახალ სისტემაში დაიხაზება ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ამით მოგვეცემა საძიებელი ნახაზი ძველი სისტემის მიმართ (ნახ. 135).

2. მოცემულია ზედაპირი შემდეგი განტოლებით

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 4x - 5 = 0.$$

საძიებელია ზედაპირის კანონიკური განტოლება და ძველი სისტემის მიმართ ნახაზი. ამ შემთხვევაში განტოლების კოეფიციენტებს აქვთ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$a_{11}=1,\ a_{22}=2,\ a_{33}=1,\ a_{12}=0,\ a_{13}=1,$$
$$a_{23}=0,\ a_{14}=+2,\ a_{24}=0,\ a_{34}=0,\ a_{44}=-5.$$



ნახ. 135.

მახასიათებელი განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს (იხ. მე-40 განტ.)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & 0, & 1 \\ 0, & 2-\lambda, & 0 \\ 1, & 0, & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

აქედან λ-სათვის მივიღებთ:

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=0.$$

გამოვთვალოთ ახლა D, Δ დეტერმინანტები. გვექნება:

$$D=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & -5 \end{vmatrix}=-8.$$

აქედან ჩანს, რომ ზედაპირი უცენტროა (პარაბოლოიდია). მისი კანონიკური განტოლება, ამ შემთხვევაში, ასეთ სახეს მიიღებს (იხ. 260-ე განტ.)

$$2x'^2+2y'^2+3a'_{34}z'=0,$$

სადაც a'_{34} განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით (ფორმ. 59)

$$a'_{34}=\frac{La_{14}+Ma_{24}+Na_{34}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

ეს ფორმულა ამ შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს

$$a'_{34}=\frac{2L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

რაც შეეხება L, M, N-ს, ისინი ამოიხსნება (57) სისტემიდან, რომელსაც ამ შემთხვევაში (წირის განტოლების კოეფიციენტების ჩასმის შემდეგ) ექნება ასეთი სახე:

$$\begin{aligned} L+N&=0,\\ 2M&=0,\\ L+N&=0. \end{aligned}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ განტოლებათა სისტემას დააკმაყოფილებს L, M, N-ის შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$L=-1,\ M=0,\ N=1.$$

ამრიგად, ზედაპირის სიმეტრიის ღერძის მიმართულებას განსაზღვრავს ასეთი ვექტორი

$$P=(-1,\ 0,\ 1).$$

თუ შევიტანთ L, M, N-ის მნიშვნელობებს, მაშინ a'_{34}-სათვის მივიღებთ

$$a'_{34}=\frac{2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}.$$

ამრიგად, მოცემული ზედაპირის კანონიკურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$2x'^2+2y'^2-3\sqrt{2}\,z'=0.$$

აქედან ჩანს, რომ ზედაპირი ბრუნვის ელიფსური პარაბოლოიდი ყოფილა. ზედაპირის ასაგებად საჭიროა განისაზღვროს მისი წვერო; ამისათვის ჯერ უნდა შევადგინოთ სიმეტრიის ღერძის განტოლება. სიმეტრიის ღერძი წარმოგვიდგება როგორც იმ დიამეტრული სიბ-

რტყეების თანაკვეთა, რომლებიც შეესაბამებიან მახასიათებელი განტოლების ნულისაგან განსხვავებულ ფესვებს. ამ შემთხვევაში ნულისაგან განსხვავებული ფესვი ჯერადია: $\lambda_1=\lambda_2=2$. შესაბამი დიამეტრული სიბრტყე განისაზღვრება (32) განტოლებიდან, სადაც უნდა ჩავსვათ მოცემული ზედაპირის განტოლების კოეფიციენტები. გვექნება:

$$L(x+z+2)+M(2y)+N(x+z)=0.$$

ამ განტოლებაში უნდა ჩავსვათ L, M, N-ის მნიშვნელობანი ამოხსნილი მახასიათებელი სისტემიდან, როცა მასში $\lambda=2$. ამ შემთხვევაში მახასიათებელ სისტემას (სისტ. 39) აქვს შემდეგი სახე:

$$(1-\lambda)L+N=0,$$
$$(2-\lambda)M=0,$$
$$L+(1-\lambda)N=0.$$

თუ ჩავსვამთ $\lambda=2$-ს, მაშინ მივიღებთ:

$$-L+N=0,$$
$$0\cdot M=0,$$
$$L-N=0.$$

ამ სისტემას დააკმაყოფილებს შემდეგი ვექტორი

$$P=(1,\ M,\ 1),$$

როგორიც არ უნდა იყოს M. შევარჩიოთ M-ის ისეთი ორი მნიშვნელობა, რომ შესაბამი ვექტორები იყოს თანამართობული. მაგალითად, ასეთი იქნება შემდეგი ვექტორები:

$$P_1=(1,\ 1,\ 1),$$
$$P_2=(1,\ -2,\ 1).$$

ახლა ჩავსვათ ამ ვექტორების კოორდინატები L, M, N-ის ნაცვლად დიამეტრული სიბრტყის განტოლებაში. მივიღებთ:

$$x+y+z+1=0,$$
$$x-2y+z+1=0.$$

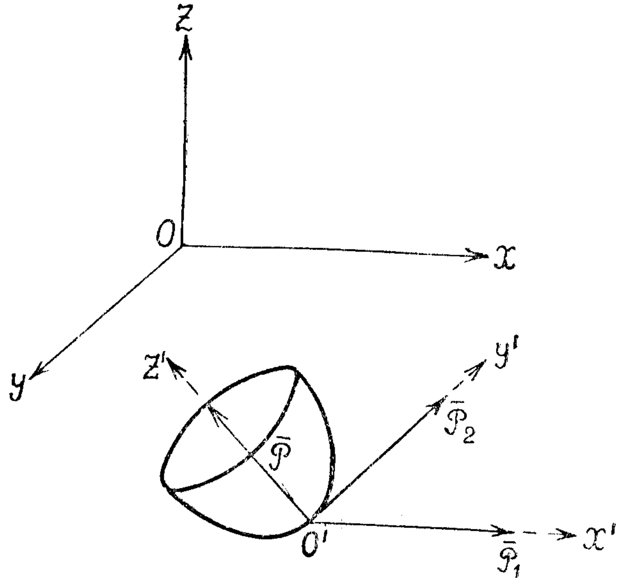
ზედაპირის წვეროს კოორდინატების გასაგებად ერთდროულად უნდა ამოვხსნათ ზედაპირის განტოლება და უკანასკნელი ორი განტოლება (როგორც სისტემა). მივიღებთ:

$$x=1,\ y=0,\ z=-2.$$

ამრიგად, ზედაპირის წვერო (ახალი სისტემის სათავე) იქნება შემდეგ წერტილში

$$O'=(1,\ 0,\ -2).$$

უნდა ავაგოთ O' წერტილი და მასზე მოვდოთ $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}$ ვექტორები. ამით შედგება ახალი სისტემა. ამ სისტემის მიმართ აიგება ელიფსური პარაბოლოიდი კანონიკური განტოლებით და მოგვეცემა ზედაპირის საძიებელი ნახაზი (ნახ. 136).



ნახ. 136.

§. 11. ზედაპირის მხები წრფე და მხები სიბრტყე

ისეთ წრფეს, რომელსაც ზედაპირთან თანაკვეთის ორი წერტილი შეთავსებული აქვს, ეწოდება **ზედაპირის მხები წრფე** დავუშვათ, რომ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი ზედაპირზე მდებარეობს. მაშინ თანაკვეთის ერთი წერტილი იქნება თვით M_0 წერტილი. მისი შესაბამი პარამეტრის მნიშვნელობა იყოს t_1 (ე. ი. მივიღოთ, რომ $M_1 = M_0$). ამრიგად (20) ფორმულებში უნდა ჩავსვათ $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$. მივიღებთ: $t_1 L = 0$, $t_1 M = 0$, $t_1 N = 0$. რადგან L, M, N ერთდროულად ნულები არ არის, ამიტომ გვექნება $t_1 = 0$. იმისათვის, რომ თანაკვეთის ორი წერტილი შეთავსდეს, საჭიროა $M_2 = M_0$. ეს კი მოგვცემს (ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში) $t_2 = 0$. ამრიგად, იმისათვის, რომ M_0 წერტილზე გამავალი წრფე იყოს მეორე რიგის ზედაპირის მხები M_0 წერტილში, საჭიროა (18) კვადრატულ განტოლებას ჰქონდეს ორივე ფესვი ნულის ტოლი ($t_1 = t_2 = 0$). ამი-

სათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ (18) გატოლების მეორე და მესამე კოეფიციენტები იყოს ნული, ე. ი. $b=0$, $c=0$. თანახმად (19) აღნიშვნებისა, გვექნება:

$$LF_1(x_0, y_0, z_0)+MF_2(x_0, y_0, z_0)+NF_3(x_0, y_0, z_0)=0.$$
$$F(x_0, y_0, z_0)=0.$$

აქ მეორე ტოლობა უბრალოდ იმას ნიშნავს, რომ M_0 წერტილი მოთავსებულია ზედაპირზე. არსებითია მხოლოდ პირველი ტოლობა. ჩავსვათ ამ ტოლობაში L, M, N-ის ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი განსაზღვრული (17) ტოლობებიდან. მივიღებთ

$$(x-x_0)F_1(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)F_2(x_0, y_0, z_0)+ \\ +(z-z_0)F_3(x_0, y_0, z_0)=0. \tag{68}$$

ეს არის ერთადერთი პირობა, რომელსაც აკმაყოფილებს მხები წრფის მიმდინარე წერტილის x, y, z კოორდინატები. მაგრამ (68) ტოლობა სიბრტყის განტოლებას წარმოადგენს, სადაც x, y, z მიმდინარე კოორდინატებია. ამრიგად ზედაპირის M_0 წერტილზე გაივლის უამრავი მხები წრფე, რომელნიც ერთ სიბრტყეზე არიან მოთავსებული. ამ სიბრტყეს ეწოდება ზედაპირის **მხები სიბრტყე**. M_0 წერტილს ეწოდება **შეხების წერტილი**.

შენიშვნა. თუ მკითხველმა ფუნქციის ნაწილობითი წარმოებულები იცის, მისთვის (68) განტოლება უფრო მარტივად ჩაიწერება (თანახმად §ე-15 ფორმულებისა)

$$(x-x_0)F'_x(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)F'_y(x_0, y_0, z_0)+(z-z_0)F'_z(x_0, y_0, z_0)=0. \tag{69}$$

მაგალითები. 1. განვიხილოთ სიბრტყე. თუ წრფეს სიბრტყესთან აქვს ორი საერთო წერტილი, მაშინ ეს წრფე სიბრტყეზე მდებარეობს. ეს წერტილები რომ ვუახლოოთ ერთიმეორეს შეთავსებამდე, აღებული წრფის გასწვრივ, ამით წრფის მდებარეობა არ შეიცვლება. ამრიგად სიბრტყის მხები წრფე მდებარეობს თვით სიბრტყეზე. პირუკუ, სიბრტყეზე მდებარე ყოველი წრფე შეიძლება განხილულ იქნას როგორც მისი მხები. აქედან ცხადია, რომ სიბრტყის მოცემულ წერტილში მხები წრფეების გეომეტრიული ადგილი იქნება თვით მოცემული სიბრტყე. ამრიგად **სიბრტყის მხები სიბრტყე მის ნებისმიერ წერტილში არის თვითონ მოცემული სიბრტყე.**

2. გამოვიყვანოთ მეორე რიგის ზედაპირთა მხები სიბრტყეების განტოლებანი ზედაპირთა კანონიკური განტოლების შესაბამად. ჯერ განვიხილოთ ელიფსოიდი

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ამ შემთხვევაში

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}, \quad a_{22}=\frac{1}{b^2}, \quad a_{33}=\frac{1}{c^2}, \quad a_{44}=-1,$$

$$a_{12}=0, \; a_{13}=0, \quad a_{23}=0, \; a_{14}=0, \; a_{24}=0, \; a_{34}=0.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა $F_1(x_0, y_0, z_0)$, $F_2(x_0, y_0, z_0)$, $F_3(x_0, y_0, z_0)$,-ის გამოსახულებებში მოგვცემს:

$$F_1(x_0, \; y_0, \; z_0)=\frac{x_0}{a^2},$$

$$F_2(x_0, \; y_0, \; z_0)=\frac{y_0}{b^2},$$

$$F_3(x_0, \; y_0, \; z_0)=\frac{z_0}{c^2}.$$

ჩავსვათ კოეფიციენტების ეს მნიშვნელობანი მხები სიბრტყის (68) განტოლებაში. მივიღებთ

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

აქედან

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}.$$

რადგან $M_0(x_0, \; y_0, \; z_0)$ შეხების წერტილი ელიფსოიდზე მდებარეობს, ამიტომ იგი აკმაყოფილებს ელიფსოიდის განტოლებას და გვექნება

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

ამ ტოლობის თანახმად, წინა განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

ასეთია ელიფსოიდის მხები სიბრტყის განტოლება. ანალოგიური გამოთვლებით მიიღება დანარჩენი მეორე რიგის ზედაპირთა მხები სიბრტყეების განტოლებანი. გვექნება:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=\pm 1 \text{ (ჰიპერბოლოიდების მხები სიბრტყეები)},$$

$$\frac{x_0x}{p}\pm\frac{y_0y}{q}=z+z_0 \text{ (პარაბოლოიდების მხები სიბრტყეები)},$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=0 \text{ (კონუსის მხები სიბრტყე)},$$

$$\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1 \quad \text{(ელიფსური და ჰიპერბოლური ცილინდრების მხები სიბრტყეები)},$$

$$y_0y=p(x+x_0) \text{ (პარაბოლური ცილინდრის მხები სიბრტყე)}.$$

რაც შეეხება სფეროს, მისი მხები სიბრტყე მიიღება ელიფსოიდის მხები სიბრტყიდან მასში $a=b=c=R$-ის ჩასმით. გვექნება:

$$x_0x+y_0y+z_0z=R^2 \text{ (სფეროს მხები სიბრტყე)}.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ამ სიბრტყის ნორმალური ვექტორი ასე წარმოგვიდგება

$$Q=(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

მეორე მხრივ $\overline{OM}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$; მაშასადამე, $Q=\overline{OM}_0$.

ამრიგად, $\overline{OM}_0$ მხები სიბრტყის მართობულია. მაგრამ OM_0 ვექტორი სფეროს სათანადო რადიუსის მიმმართველი ვექტორია; მაშასადამე, მხები სიბრტყე მართობულია შეხების წერტილზე გამავალი რადიუსისა (ეს ფაქტი სფეროსათვის ისედაც ადვილი შესამჩნევია).

§ 12. მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირები

განმარტება. წრფოვანი ზედაპირი ეწოდება ისეთ ზედაპირს, რომელიც აღიწერება რაიმე წრფის მოძრაობით. მოძრავ წრფეს (ყოველი მდებარეობისათვის) ეწოდება ზედაპირის მსახველი.

ცხადია, რომ კონუსური და ცილინდრული ზედაპირები წარმოადგენენ წრფოვანი ზედაპირების კერძო შემთხვევებს. ამათგან მეორე რიგის კონუსები და ცილინდრები მეორე რიგის წრფოვან ზედაპირთა მაგალითებს იძლევა. ბუნებრივია გამოვარკვიოთ კიდევ რომელი ზედაპირებია წრფოვანი მეორე რიგის ზედაპირთა შორის. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ წრფოვანი ზედაპირის ყოველ წერტილზე გაივლის ერთი მაინც წრფე მთლიანად ზედაპირზე მდებარე. გარდა ამისა შევნიშნოთ, რომ, თუ წრფეს მეორე რიგის ზედაპირთან სამი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს წრფე მთლიანად ზედაპირზე მდებარეობს. ეს შენიშვნები საშუალებას იძლევა ადვილად დავამტკიცოთ, რომ ელიფსოიდი ორკალთა ჰიპერბოლოიდი და ელიფსური პარაბოლოიდი არ შეიძლება იყოს წრფოვანი ზედაპირები ან მათი ნაწილები. მართლაც, ეს ზედაპირები, როგორც მეო-

რე რიგის ზედაპირები. თუ შეიცავენ წრფის რაიმე ნაწილს, მაშინ ისინი უნდა შეიცავდნენ მთელ წრფესაც. მაგრამ ადვილი შესამჩნევია, რომ ელიფსოიდზე ორკალთა ჰიპერბოლოიდზე და ელიფსურ პარაბოლოიდზე არ შეიძლება წრფე მოთავსდეს მთლიანად. ახლა განვიხილოთ დანარჩენი მეორე რიგის ზედაპირები, ე. ი. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. დავამტკიცებთ, რომ ეს ზედაპირები წრფოვანია.

1. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის წრფოვანი მსახველები. განვიხილოთ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის კანონიკური განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ეს განტოლება შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}.$$

აქედან

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განტოლება ეკვივალენტურია შემდეგი ორი სისტემისა ცალ-ცალკე:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{x}{a}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(\lambda)$$

და

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(\mu)$$

სადაც λ და μ ნებისმიერი პარამეტრებია. საკმარისია (λ) სისტემის ორივე ტოლობის ნაწილები გადავამრავლოთ შესაბამად ერთიმეორეზე, რომ მივიღოთ თვით ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლება (გადამრავლების დროს მოხდება λ-ზე შეკვეცა). ანალოგიურად, (μ) სისტემიდან შეგვიძლია დავუბრუნდეთ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის განტოლებას. პირდაპირ ჩანს, რომ (λ) და (μ) სისტემების განტოლებანი წრფივია x, y, z-ის მიმართ. ამიტომ თვითეული მათ-

განი განსაზღვრავს სიბრტყეს. (λ) სისტემა, როგორც ორი სიბრტყის განტოლებისაგან შედგენილი, განსაზღვრავს წრფეს λ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის. ცხადია, ეს წრფეები მოთავსდებიან განსახილავ ზედაპირზე (იმიტომ, რომ წრფის მიმდინარე წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ ზედაპირის განტოლებას λ-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის). ცხადია, აგრეთვე, რომ ეს წრფეები დაფარავენ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს მთლიანად. ანალოგიურად, (μ) სისტემაც (რომელიც მიიღება μ პარამეტრის ცვლით) დაფარავს იმავე ზედაპირს. ახლა დავამტკიცებთ, რომ მეორე სისტემის არც ერთი წრფე არ შედის პირველ სისტემაში. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს λ და μ პარამეტრების ისეთი მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც ეს ორი სისტემა ერთი და იგივე წრფეს განსაზღვრავს, მაშინ ამ ორი სისტემის ოთხი განტოლება უნდა იყოს თავსებადი x-ის ნებისმიერ მნიშვნელობათათვის. (λ) და (μ) სისტემების ერთად განხილვა მოგვცემს

$$\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

აქედან

$$\lambda=\mu,\quad a=0,$$

რაც შეუძლებელია (რადგან $a\neq 0$). ამრიგად (λ) და (μ) წრფეთა ორ სხვადასხვა სისტემას წარმოადგენს, რომელნიც ფარავენ ზედაპირს ცალ-ცალკე. ამ ორი სისტემის წრფეები, ცხადია, თანაიკვეთება ერთიმეორესთან (რადგან ფარავენ ზედაპირს ცალ-ცალკე). ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ერთი სისტემის წრფეები ერთიმეორესთან არ თანაიკვეთებიან. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ პარამეტრის λ_1, λ_2 მნიშვნელობათა შესაბამი წრფეები თანაიკვეთება. ეს იმას ნიშნავს, რომ შემდეგი ორი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\lambda_1\left(1-\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda_1}\left(1+\frac{x}{a}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(\lambda_1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=\lambda_2\left(1-\frac{x}{a}\right),\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda_2}\left(1+\frac{x}{a}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(\lambda_2)$$

იყოს თავსებადი (ე. ი. არსებობდეს x, y, z-ის ისეთი მნიშვნელო-

ბანი, რომელიც ამ ოთხ განტოლებას აკმაყოფილებს). ამ განტოლებათა შედარება მოგვცემს:

$$\lambda_1\left(1-\frac{x}{a}\right)=\lambda_2\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\lambda_2}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

რადგან გამოსახულებანი $1-\frac{x}{a}$ და $1+\frac{x}{a}$ ერთდროულად ნული არ შეიძლება იყოს ($a\neq 0$), ამიტომ უკანასკნელი ორი ტოლობიდან ერთი მაინც შეიკვეცება ბრჩხილებში მყოფ გამოსახულებაზე და მოგვცემს $\lambda_1=\lambda_2$, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ განსახილავი ორი წრფე ერთიმეორეს ემთხვევა. ამრიგად, ზემოთ გამოთქმული (λ) სისტემის მსახველთა თვისება დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ (μ) სისტემის წრფეებიც ერთიმეორესთან არ თანაიკვეთება. (λ) და (μ) სისტემების ამ თვისების გამო ზედაპირის ყოველ წერტილზე გაივლის აღნიშნული სისტემების წრფეთა მხოლოდ ერთი წყვილი. ზედაპირი დაიფარება ოთხკუთხედებით.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ მეორე რიგის ზედაპირი არ შეიცავს რაიმე ისეთ წრფეს, რომელიც არ შედის (λ) სისტემაში ან (μ) სისტემაში. ამისათვის ჯერ შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი მეორე რიგის ზედაპირის (ე. ი. როცა $\Delta\neq 0$) ყოველ წერტილში მხები სიბრტყე ცალსახადაა განსაზღვრული. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, მხები სიბრტყე $M_0(x_0, y_0, z_0)$ განუსაზღვრელია, მაშინ მხები სიბრტყის (68) განტოლების კოეფიციენტები ერთდროულად ნული უნდა იყოს. გვექნება:

$$F_1(x_0, y_0, z_0)=0,$$
$$F_2(x_0, y_0, z_0)=0,$$
$$F_3(x_0, y_0, z_0)=0.$$

გარდა ამისა, რადგან M_0 წერტილი ზედაპირზე მდებარეობს, $F(x_0, y_0, z_0)=0$. ეს ტოლობა (19) აღნიშვნების თანახმად მოგვცემს

$$F_4(x_0, y_0, z_0)=0.$$

ოთხი უკანასკნელი განტოლება წრფივია (მე-2 აღნიშვნების თანახმად) x_0, y_0, z_0-ის მიმართ. მათი თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი იყოს ნული. ეს დეტერმინანტი კი არის Δ. მაშასადამე, სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია,

რომ Δ იყოს ნული. ამრიგად, თუ $\Delta \neq 0$ (ე. ი. თუ ზედაპირი ჩვეულებრივია), მაშინ ზედაპირის ყოველ წერტილში მხები სიბრტყე ცალსახად განისაზღვრება. ადვილი შესამჩნევია, რომ აქ განხილული ოთხი განტოლებიდან პირველი სამი განტოლება ზედაპირის ცენტრს განსაზღვრავს. ამრიგად, თუ M_0 წერტილში მხები სიბრტყე განუსაზღვრელია, მაშინ ეს წერტილი ზედაპირის ცენტრია, ე. ი. ზედაპირის ცენტრი მდებარეობს თვით აღებულ ზედაპირზე.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ასეთი ზედაპირი (რომლის ცენტრი მდებარეობს ზედაპირზე) მხოლოდ კონუსი ან ორ თანამკვეთ სიბრტყედ გადაგვარებული ზედაპირია. მართლაც, შევაერთოთ M_0 წერტილთან ზედაპირის რაიმე M წერტილი. რადგან M_0 ზედაპირის ცენტრია, მის მიმართ M წერტილს ექნება სიმეტრიული M' წერტილი ზედაპირზე. რადგან M_0 ზედაპირზე მდებარეობს, ამიტომ M_0M წრფეს ზედაპირთან ექნება სამი საერთო წერტილი. ესენია: M_0, M, M' წერტილები. ეს კი მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა M_0M წრფე მოთავსდება ზედაპირზე. ამრიგად ზედაპირი დაიფარება ისეთი წრფეებით, რომელნიც გადიან M_0 წერტილზე. ასეთი ზედაპირი კი კონუსია. კერძოდ, თუ M_0 წერტილი ერთადერთი არ არის და აღწერს წრფეს (M_0 წერტილი თუ უძრავი არ არის, როგორც ცენტრი, უსათუოდ წრფეს აღწერს), მაშინ მივიღებთ თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილს. ამრიგად, გარდა კონუსისა და თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილისა, მეორე რიგის ზედაპირის ყოველ წერტილში მხები სიბრტყე ცალსახად განსაზღვრულია. ორი შეთავსებული სიბრტყისათვის იგივე ითქმის, რადგან იგი თანამკვეთ სიბრტყეთა კერძო შემთხვევას წარმოადგენს.

ახლა შევნიშნოთ, რომ M_0 წერტილში მხები სიბრტყე შეიცავს შეხების წერტილზე (ე. ი. M_0 წერტილზე) გამავალ ზედაპირის მსახველს. მართლაც, მხები სიბრტყე შეიცავს ზედაპირის მხებ წრფეებს M_0 წერტილში. მსახველი, როგორც წრფე, თავისი თავის მხებია და, მაშასადამე, ზედაპირის მხებიც იქნება. ამავე მსახველის ყოველ წერტილში, კერძოდ, M_0 წერტილში. ამრიგად, მსახველი მოთავსდება მხებ სიბრტყეზე, ანუ მხები სიბრტყე გაივლის მსახველზე. რადგან ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ყოველ წერტილში მხები ცალსახად განსაზღვრულია, ამიტომ მისი მხები სიბრტყე M_0 წერტილში უნდა გადიოდეს λ და μ მსახველებზე.

ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი u წრფე, რომელიც გადის M_0 წერტილზე და მდებარეობს ზედაპირზე, მაგრამ არ ეკუთვნის არც (λ) სისტემას და არც (μ) სისტემას. ამ პირობებში M_0 წერტილზე გაივლის ზედაპირის სამი მსახველი: λ, μ, u. სამივე ეს

წრფე უნდა მდებარეობდეს მხებ სიბრტყეზე. გამოდის, რომ მხები სიბრტყე თანაიკვეთება მეორე რიგის ზედაპირთან სამ წრფეზე. ეს კი შეუძლებელია (რადგან სიბრტყის თანაკვეთა მეორე რიგის ზედაპირთან ყოველთვის მეორე რიგის წირია და არ შეიძლება იყოს სამი წრფე), თუ თვით მხები სიბრტყე არ ეკუთვნის ზედაპირს, ე. ი. თუ ზედაპირი გადაგვარებული არ არის ორ სიბრტყედ. მაშასადამე, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდზე მხოლოდ (λ) და (μ) სისტემების მსახველებია მოთავსებული.

რადგან მხები სიბრტყე გადის λ და μ მსახველებზე, ამიტომ ეს წრფეები წარმოგვიდგება, როგორც თანაკვეთა ზედაპირისა და მხები სიბრტყისა. მსახველთა განტოლება კი წარმოდგება ზედაპირის განტოლების და მხები სიბრტყის განტოლების შეერთებით (ამ განტოლებათა სისტემით). ამრიგად მსახველები წარმოგვიდგება შემდეგი სისტემით

$$F(x, y, z)=0,$$

$$(x-x_0)\,F_1(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)\,F_2(x_0, y_0, z_0)+ \\ +(z-z_0)\,F_3(x_0, y_0, z_0)=0. \tag{69}$$

ცხადია, ეს სისტემა მართებულია ზედაპირის ნებისმიერი განტოლების შემთხვევაში და არა მხოლოდ კანონიკური განტოლებისათვის.

2. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის წრფივანი მსახველები. განვიხილოთ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის კანონიკური განტოლება

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$

აქედან (რადგან $p>0$, $q>0$)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განტოლება ეკვივალენტურია შემდეგი ორი სისტემისა ცალ-ცალკე:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\lambda\cdot 2, \\ \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\lambda}\cdot z, \end{aligned}\right\} \tag{λ}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\mu\cdot z, \\ \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\mu}\cdot 2 \end{aligned}\right\} \tag{μ}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (λ) განტოლება გამოსახავს წრფეს λ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის. წრფეთა ეს სისტემა ფარავს ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს. მართლაც, თუ გადავამრავლებთ (λ) სისტემის ორი ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებს ერთიმეორეზე შესაბამად, მივიღებთ თვით ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის განტოლებას. იგივე ითქმის (μ) სისტემის შესახებაც. ანალოგიური მსჯელობით (როგორიც ნაწარმოები იყო ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის შესახებ) დამტკიცდება, რომ (λ) და (μ) სისტემებს აქვს ისეთივე თვისებები, როგორიც ჰქონდა ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის მსახველთა სისტემებს.

ახლა ჩვენ აღვნიშნავთ ამ ორი ზედაპირის მსახველთა განმასხვავებელ ნიშანს. ადვილი შესამჩნევია, რომ ზედაპირის ყოველ მსახველს ასიმპტოტური მიმართულება აქვს. მართლაც, მსახველის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი ზედაპირის უსასრულოდ დაშორებული წერტილიც არის, ე. ი. მსახველი ზედაპირს კვეთს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილშიაც. მაშასადამე, მსახველს ასიმპტოტური მიმართულება აქვს. ამიტომ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსის მსახველები ზედაპირის მსახველთა პარალელური უნდა იყოს. რადგან ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი მეორე რიგის კონუსია, ამიტომ იგი არ შეიძლება შეიცავდეს ერთ სიბრტყეზე მდებარე სამ მსახველს. ასე რომ ყოფილიყო, მაშინ ეს სიბრტყე თანაიკვეთებოდა კონუსთან სამ წრფეზე, რაც ეწინააღმდეგება ზოგად დებულებას იმის შესახებ, რომ ნებისმიერი სიბრტყე მეორე რიგის ზედაპირთან თანაკვეთაში გვაძლევს მეორე რიგის წირს ან თვით სიბრტყე ეკუთვნის ზედაპირს. ამრიგად, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ერთი სისტემის მსახველთა არც ერთი სამეული არ შეიძლება იყოს ერთ სიბრტყეში მდებარე წრფეთა სამეულის პარალელური ან, რაც იგივეა, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის ერთი სისტემის მსახველთა არც ერთი სამეული არ შეიძლება იყოს ერთი სიბრტყის პარალელური.

ახლა ამ თვალსაზრისით განვიხილოთ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის მსახველები. აქ ასიმპტოტურ მიმართულებათა კონუსი წარმოადგენს თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილს. ამიტომ ერთი სისტემის მსახველები პარალელური იქნება ერთი სიბრტყისა, ხოლო მეორე სისტემის მსახველები — მეორე სიბრტყისა.

3. წრფოვანი ზედაპირის განსაზღვრა სამი წრფით. ჯერ შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერ ცხრა წერტილზე შეგვიძლია გავატაროთ მეორე რიგის ზედაპირი. მართლაც, მეორე რიგის ზედაპირის ზოგად განტოლებაში რომ შევიტანოთ მოცემული ცხრა წერტილის

კოორდინატები, მორიგეობით, მივიღებთ ცხრა განტოლებას წრფეებ-სა და ერთგვაროვანს ზედაპირის განტოლების კოეფიციენტების მიმართ. ამრიგად გვექნება ცხრა ერთგვაროვანი წრფივი განტოლება ათი უცნობით (ესენია ზედაპირის განტოლების კოეფიციენტები). ამ სისტემას უსათუოდ ექნება ნულისაგან განსხვავებული მრავალი ამონახსნი (შესაძლებელია ეს ამონახსნები პროპორციული იყოს). მაშასადამე, არსებობს მეორე რიგის ზედაპირი, რომელიც მოცემულ 9 წერტილზე გადის (შესაძლებელია ეს ზედაპირი იყოს ერთადერთიც). ამ დებულების დამტკიცება დაწვრილებით შეიძლება ჩატარდეს ისეთივე მსჯელობით, როგორიც ვაწარმოეთ 5 წერტილზე მეორე რიგის წირის გატარებისათვის. ახლა განვიხილოთ სამი ნებისმიერი არათანამკვეთი წრფე სივრცეში. აღვნიშნოთ ისინი u_1, u_2, u_3-ით. ავიღოთ სამ-სამი წერტილი თვითეულზე. მივიღებთ სულ ცხრა წერტილს. ამ წერტილებზე გავატაროთ მეორე რიგის რაიმე ზედაპირი. ცხადია, რომ მოცემულ წრფეებს ექნება სამ-სამი საერთო წერტილი ზედაპირთან (ესენია ჩვენს მიერ წრფეებზე აღებული წერტილები, რომლებზედაც გავატარეთ ზედაპირი). ამიტომ მოცემული წრფეები მოთავსდება ზედაპირზე, ე. ი. ზედაპირი გაივლის ამ წრფეებზე. ავიღოთ რაიმე M წერტილ u_1 წრფეზე და გავატაროთ ამ წერტილზე ისეთი v წრფე, რომელიც თანაიკვეთება დანარჩენ ორ წრფესთან. ასე მივიღებთ წრფეს, რომელსაც სამი საერთო წერტილი აქვს ზედაპირთან (მოცემულ სამ წრფესთან თანაკვეთის წერტილები). ამიტომ, ეს უკანასკნელი წრფეც მოთავსდება ზედაპირზე. როცა M წერტილი აღწერს u_1 წრფეს, მაშინ v წრფე აღწერს წრფოვან ზედაპირს.

რადგან v წრფე ყოველთვის მოთავსებულია იმ მეორე რიგის ზედაპირზე, რომელიც გადის მოცემულ სამ წრფეზე, ამიტომ v წრფით აღწერილი ზედაპირი მეორე რიგის ზედაპირი იქნება. ცხადია, რომ (v) სისტემის რაიმე სამეული: v_1, v_2, v_3 აგრეთვე არათანამკვეთი სამეული იქნება. ამ სამეულის თანამკვეთი წრფეები მოგვცემს ზედაპირის დამფარავ მეორე სისტემას, რომელიც შეიცავს u_1, u_2, u_3 წრფეებსაც. ამრიგად, ზედაპირი დაიფარება მსახველთა ორი სისტემით: (u) და (v). ეს ზედაპირი უნდა იყოს ან ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, ან ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ აღებული არათანამკვეთ წრფეთა სამეული პარალელური არ არის ერთი სიბრტყისა, მაშინ ამ სამეულის თანამკვეთი წრფის მოძრაობით აღიწერება ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, ხოლო, თუ აღებული არათანამკვეთი წრფეთა სამეული პარალელურია ერთი სიბრტყისა, მაშინ ამ სამეულის თანა-

შკვეთი წრფის მოძრაობით აღიწერება ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი.

4. მეორე რიგის წრფოვან ზედაპირთა ერთი დამახასიათებელი თვისება. ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი დაფარულია წრფოვან მსახველთა ორი სისტემით. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ასეთი თვისება (სიბრტყის გარდა, სადაც წრფოვან მსახველთა სისტემები განუსაზღვრელია) აქვს მხოლოდ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს და ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს, ე. ი. მეორე რიგის ჩვეულებრივ წრფოვან ზედაპირებს. დავუშვათ, რომ ზედაპირს ფარავს წრფეთა ორი სისტემა: (u) და (v). ამ სისტემების წრფეები ერთიმეორესთან თანაიკვეთებიან (რადგან ზედაპირს ფარავენ) ისე, რომ ყოველი u წრფე თანაიკვეთება (v) სისტემის ყოველ წრფესთან. ავიღოთ (v) სისტემის სამი წრფე: v_1, v_2, v_3. გავატაროთ ამ სამ წრფეზე მეორე რიგის ზედაპირი. რადგან u წრფე თანაიკვეთება აღებულ სამ წრფესთან, ამიტომ იგი მოთავსდება აღნიშნულ მეორე რიგის ზედაპირზე. ამრიგად, (u) სისტემა დაფარავს ამ მეორე რიგის ზედაპირს. რადგან (u) სისტემა ფარავს მოცემულ ზედაპირსაც, ამიტომ მოცემული ზედაპირი და v_1, v_2, v_3 წრფეებზე გამავალი მეორე რიგის ზედაპირი შეუთავსდება ერთიმეორეს, ე. ი. მოცემული ზედაპირი მეორე რიგის ზედაპირი ყოფილა; მაშასადამე, თუ ზედაპირი დაფარულია წრფოვან მსახველთა ორი სისტემით, მაშინ იგი მეორე რიგის ზედაპირია ან სიბრტყე.

ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ ზედაპირი დაფარულია წრფოვან მსახველთა ორზე მეტი სისტემით, მაშინ იგი სიბრტყეა. მართლაც, ორი სისტემა განსაზღვრავს მეორე რიგის ზედაპირს. გამოდის, რომ ამ მეორე რიგის ზედაპირზე უნდა მოთავსდეს კიდევ მესამე სისტემა, რაც შეუძლებელია, თუ ზედაპირი გადაგვარებული არ არის ორ შეთავსებულ სიბრტყედ.

§ 13. მეორე რიგის ზედაპირის წრიული კვეთები

ჩვენ ვიცით, რომ მეორე რიგის ზედაპირის თანაკვეთის წირი სიბრტყესთან არის მეორე რიგის წირი. ეს უკანასკნელი ზოგჯერ შეიძლება აღმოჩნდეს წრეწირიც; მაგალითად, სფეროს თანაკვეთის წირი ნებისმიერ სიბრტყესთან არის წრეწირი (ნამდვილი ან წარმოსახვითი). ბრუნვის მეორე რიგის ზედაპირების (და საერთოდ ბრუნვის ზედაპირებისაც) თანაკვეთის წირები ბრუნვის ღერძის მართობულ სიბრტყეებთან არიან წრეწირები. ბუნებრივად ისმის კითხვა: სხვა მეორე რიგის ზედაპირებზედაც არსებობენ თუ არა

წრეწირები და როგორ განვსაზღვროთ ისინი? ამ საკითხზე პასუხის გაცემას გაგვიადვილებს შემდეგი შენიშვნები: 1) თუ რაიმე სიბრტყე ზედაპირთან თანაიკვეთება წრეწირზე, მაშინ მისი პარალელური სიბრტყეებიც თანაიკვეთება იმავე ზედაპირთან წრეწირებზე. ამის დასამტკიცებლად წარმოვიდგინოთ, რომ მკვეთი სიბრტყე პარალელურია Oxy სიბრტყისა (თუ ეს ასე არ არის თავიდან, მაშინ კოორდინატთა სისტემა უნდა მოვაბრუნოთ სათავის გარშემო ისე, რომ Oxy სიბრტყე გახდეს მოცემული მკვეთი სიბრტყის პარალელური); მისი განტოლება იქნება $z=h$. თუ z-ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ ზედაპირის განტოლებაში, მივიღებთ

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2(a_{13}h+a_{14})x+$$
$$+2(a_{23}h+a_{24})y+a_{33}h^2+2a_{34}h=0.$$

ამ განტოლებით განისაზღვრება თანაკვეთის წირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე. რადგან მოცემული სიბრტყე პარალელურია Oxy სიბრტყისა, ამიტომ თანაკვეთის წირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე იქნება თვით აღებული წირი პარალელურად გადატანილი Oxy სიბრტყეზე. ახლა დავუშვათ, რომ ეს თანაკვეთის წირი წრეწირია. ამისათვის საჭიროა კოეფიციენტებმა დააკმაყოფილონ შემდეგი პირობები:

$$a_{11}=a_{22},\ a_{12}=0.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ეს პირობები დამოკიდებული არ არის h-ზე, ე. ი. თუ ეს პირობები შესრულდება h-ის რაიმე მნიშვნელობისათვის, მაშინ ისინი შესრულდება h-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვისაც; მაშასადამე, თუ მოცემული სიბრტყე ზედაპირთან თანაიკვეთება წრეწირზე, მაშინ მისი პარალელური ყოველი სიბრტყე თანაიკვეთება აგრეთვე წრეწირზე; 2) თუ ორი ზედაპირის განტოლებებს ერთნაირი მეორე რიგის წევრები აქვთ, მაშინ მათ ექნებათ წრიული თანაკვეთები ერთი და იმავე სიბრტყეებთან. მართლაც, თუ ორი ზედაპირის განტოლებათა მეორე რიგის წევრები ერთნაირია, მაშინ კოორდინატთა სისტემის ორთოგონალური გარდაქმნის შემდეგაც ერთნაირი მეორე რიგის წევრები ექნებათ (მხოლოდ მეორე რიგის წევრები წარმოშობენ მეორე რიგის წევრებს). სიბრტყესთან თანაკვეთის წირის ხასიათი (წრიულობა) კი დამოკიდებულია მხოლოდ მეორე რიგის წევრების კოეფიციენტებზე. ამრიგად წრიული კვეთების ზემოთ გამოთქმული თვისება დამტკიცებულია. ამ თვისების მიხედვით აშკარაა, რომ ერთსა და იმავე სიბრტყეებთან თანაკვეთის წრეწირებს მოგვცემენ ზედაპირთა შემდეგი ჯგუ-

ფები (ამას გვიჩვენებს ზედაპირთა კანონიკური განტოლებანი, სადაც უნდა წარმოვიდგინოთ: $p=a^2$, $q=b^2$):

ა) ელიფსოიდი;

ბ) კონუსი, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ორკალთა ჰიპერბოლოიდი;

გ) ელიფსური ცილინდრი და ელიფსური პარაბოლოიდი;

დ) ჰიპერბოლური ცილინდრი, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი და ორ თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილად გადაგვარებული ზედაპირი;

ე) პარაბოლური ცილინდრი და ორ შეთავსებულ სიბრტყეთა წყვილად გადაგვარებული ზედაპირი.

რადგან სიბრტყეს არ შეიძლება ჰქონდეს წრიული თანაკვეთა სიბრტყეთა წყვილთან (ამ შემთხვევაში თანაკვეთის წირი იქნება წრფეთა წყვილი), ამიტომ დ) და ე) ჯგუფებში შემავალ ზედაპირებს არა აქვთ წრიული თანაკვეთის წირები. მაშასადამე, წრიული თანაკვეთების საკითხი განიხილება მხოლოდ ა), ბ) და გ) ჯგუფებისათვის. რადგან ერთ ჯგუფში შემავალი ზედაპირების წრიული თანაკვეთები განისაზღვრება საერთო სიბრტყეებით, ამიტომ საკმარისია ამ ჯგუფებიდან ავიღოთ თითო წარმომადგენელი (ზედაპირი) და მათთვის მოვახდინოთ წრიული თანაკვეთის განსაზღვრა. ასეთ წარმომადგენლებად (ზედაპირებად) უმჯობესია განვიხილოთ ელიფსოიდი, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ელიფსური ცილინდრი. ამ სამივე ზედაპირის დამახასიათებელი ის არის, რომ თვითეულ მათგანს აქვს ცენტრი (პირველი ორი ცენტრიანი ზედაპირებია, მესამე კი მრავალცენტრიანი ზედაპირი. ამ სამი ზედაპირის განტოლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\lambda z^2=1. \tag{70}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ელიფსოიდი, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ელიფსური ცილინდრი შეესაბამებიან λ პარამეტრის შემდეგ მნიშვნელობებს: $\lambda=\frac{1}{c^2}$, $\lambda=-\frac{1}{c^2}$, $\lambda=0$. ახლა დავუშვათ, რომ რაიმე სიბრტყე ზედაპირთან თანაიკვეთება წრეწირზე. პირველი შენიშვნის თანახმად, ამ სიბრტყის პარალელური სიბრტყე, რომელიც ზედაპირის ცენტრზე გადის, უნდა თანაიკვეთებოდეს ზედაპირთან აგრეთვე წრეწირზე. ცხადია, რომ ზედაპირის ცენტრი (ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სისტემის სათავე) იქნება უკანასკნელი წრეწირის ცენტრი (წირის ქორდების შუაგამყოფი წერტილი), ამიტომ

წრეწირის წერტილები თანატოლი მანძილებით იქნება დაშორებული სათავიდან. თუ წრეწირის რადიუსს აღვნიშნავთ r-ით, მაშინ გვექნება (x, y, z წრეწირის მიმდინარე წერტილის კოორდინატებია)

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

აქედან

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1.$$

გამოვაკლოთ ეს ტოლობა (70) ტოლობას. მივიღებთ

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)y^2+\left(\lambda-\frac{1}{r^2}\right)z^2=0. \qquad (71)$$

აქედან ჩანს, რომ განსახილავი წრეწირის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ მეორე რიგის ერთგვაროვან განტოლებას. ეს უკანასკნელი განტოლება კი გამოსახავს კონუსს, რომლის წვერო კოორდინატთა სათავეშია. მაგრამ, თუ კონუსი გადაგვარებული არ არის ორ სიბრტყედ, მაშინ სათავეზე (ამ შემთხვევაში ეს წერტილი კონუსის წვეროა) გამავალი სიბრტყე კონუსთან თანაიკვეთება ორ წრფეზე და არა წრეწირზე. ამიტომ (71) განტოლებით განსაზღვრული კონუსი გადაგვარებული უნდა იყოს (სიბრტყეთა წყვილს უნდა წარმოადგენდეს). ამისათვის, როგორც ვიცით, აუცილებელია შემდეგი პირობების: $\Delta=0$, $D=0$ დაკმაყოფილება. პირველი პირობა თავისთავად სრულდება; საჭიროა შესრულდეს მეორე პირობაც. მივიღებთ

$$D=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{r^2}\right)=0. \qquad (72)$$

ამ განტოლებიდან განისაზღვრება r-ის მნიშვნელობა λ-ს სხვადასხვა მნიშვნელობათა შესაბამად, ე. ი. როცა $\lambda=\frac{1}{c^2}$, $\lambda=-\frac{1}{c^2}$ და $\lambda=0$. (72) განტოლების ამოხსნა r-სათვის მოგვცემს:

$$r=a,\ r=b,\ r=\sqrt{\lambda}.$$

ამ სამი შესაძლებლობიდან ისე უნდა შევარჩიოთ r, რომ (71) განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყეთა წყვილი იყოს ნამდვილი. ეს სიბრტყეთა წყვილი თვითონ განსაზღვრავს საძიებელ წრიულ კვეთებს ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ამ სიბრტყეთა პარალელური სიბრტყეები კი მოგვცემენ ყველა შესაძლებელი თანაკვეთის წრეწირებს. მაგალითად, თუ $\lambda=\frac{1}{c^2}$ და $a>b>c$, მაშინ მისაღებია

r-ის მხოლოდ შემდეგი მნიშვნელობა: $r=b$. ამ შემთხვევაში (71) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს სიბრტყეთა წყვილი ნამდვილი იქნება. მართლაც, უტოლობანი $a>b>c$ გვაძლევს:

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}<0,\quad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}>0.$$

ამ პირობებში სიბრტყეთა წყვილის უკანასკნელი განტოლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,x+\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,z=0,$$

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,x-\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,z=0.$$

როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული, $\lambda=\frac{1}{c^2}$-ს შეესაბამება ელიფსოიდი. ამრიგად უკანასკნელი ორი განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყეები და მათი პარალელური სიბრტყეები თანაიკვეთება ელიფსოიდთან წრეწირებზე. აშკარაა, რომ ასეთ სიბრტყეთა განტოლებანი წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,x+\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,z=\mu,$$

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,x-\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,z=\nu,$$

სადაც μ, ν ნებისმიერი მუდმივებია.

ანალოგიურად მიიღება $\lambda=-\frac{1}{c^2}$-ის შესაბამი (ე. ი. მეორე ჯგუფის ზედაპირთა შესაბამი) წრიულად თანამკვეთი სიბრტყეების განტოლებანი (ამ შემთხვევაში ვარგისია $x=a$-ს):

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,y+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\,z=\mu,$$

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,y-\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\,z=\nu.$$

ახლა განვიხილოთ $\lambda=0$. რადგან $r>0$, ამიტომ r-სათვის განიხილება $r=a$ ან $r=b$. ადვილი შესამჩნევია, რომ აქედან გამოსადეგია მხოლოდ პირველი მნიშვნელობა, ე. ი. $r=a$. გვექნება:

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,y-\frac{1}{a}\,z=\mu,$$

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,y-\frac{1}{a}\,z=\nu.$$

ასეთია მესამე ჯგუფის ზედაპირთა წრიულად თანამკვეთი სიბრტყეების განტოლებანი.

§ 14. მეორე რიგის ზედაპირის ინვარიანტების შესახებ

უკვე აღნიშნული გვქონდა, რომ მახასიათებელ (40) განტოლებაში შემავალი λ ინვარიანტია კოორდინატთა ორთოგონალური გარდაქმნის მიმართ. ამიტომ ამ განტოლების ფესვებიც, ე. ი. λ_1, λ_2, λ_3, იქნებიან ინვარიანტები. რადგან განტოლების კოეფიციენტები გამოისახება ფესვების საშუალებით, ამიტომ ეს კოეფიციენტებიც ინვარიანტები უნდა იყოს. ამ კოეფიციენტებს შორის იქნება ფესვების ჯამი და ნამრავლი. ეს უკანასკნელნი ასე წარმოგვიდგება:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=S,$$

$$\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}=D.$$

ამრიგად, S და D ინვარიანტებია.

ზედაპირის განტოლების მარცხენა მხარეს მდგომი გამოსახულება შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$F(x,\ y,\ z)=\sum_{i,\,j=1}^{4}a_{ij}x_ix_j,$$

სადაც

$$x_1=x,\ \ x_2=y,\ \ x_3=z,\ \ x_4=1.$$

ამ შემთხვევაში დეკარტის კოორდინატების გარდაქმნებს უნდა მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
x_1&=x_1'l_1+x_2'l_2+x_3'l_3+x_4'a,\\
x_2&=x_1'm_1+x_2'm_2+x_3'm_3+x_4'b,\\
x_3&=x_1'n_1+x_2'n_2+x_2'n_3+x_4'c,\\
x_4&=x_4',
\end{aligned}$$

სადაც
$$x_1'=x',\ x_2'=y',\ x_3'=z',\ x_4'=1.$$
ამ გარდაქმნების მიხედვით δ მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობას
$$\delta=\begin{vmatrix} l_1, & l_2, & l_3, & a\\ m_1, & m_2, & m_3, & b\\ n_1, & n_2, & n_3, & c\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_1, & l_2 & l_3\\ m_1, & m_2, & m_3\\ n_1, & n_2, & n_3\end{vmatrix}.$$

აქედან ჩანს, რომ, როცა გარდაქმნები ორთოგონალურია, მაშინ $\delta=\pm 1$. თუ შევიტანთ δ-ს მნიშვნელობას VIII თავის (63) ფორმულაში (რომელიც მართებულია ნებისმიერი კვადრატული ფორმისათვის), მივიღებთ
$$\Delta'=\Delta.$$

ამრიგად ზედაპირის განტოლების დისკრიმინანტი ორთოგონალური გარდაქმნის ინვარიანტია. ჩვენ აქ მოვიყვანეთ ოთხი ორთოგონალური ინვარიანტი: მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტები და განტოლების დისკრიმინანტი. თუ ამ ინვარიანტებს აღვნიშნავთ I_1, I_2, I_3, I_4-ით შესაბამად, გვექნება:
$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$
$$I_2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23},$$
$$I_3=D,$$
$$I_4=\Delta.$$

განვიხილოთ ჩვეულებრივი მეორე რიგის ზედაპირი. დავიყვანოთ იგი კანონიკურ სახეზე. გვექნება:
$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+\frac{\Delta}{D}=0 \text{ (ცენტრიანი ზედაპირი)},$$
$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{34}z'=0 \text{ (უცენტრო ზედაპირი)}.$$

პირველი განტოლების კოეფიციენტები, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მოცემული ოთხი ინვარიანტით გამოისახება. მეორე განტოლებაში λ_1, λ_2 კოეფიციენტებს აქვთ იგივე მნიშვნელობა, რაც პირველში. დარჩა მხოლოდ a'_{34}. მის გამოსათვლელად შევადგინოთ I_4 ინვარიანტი. გვექნება
$$I_4=\Delta=\begin{vmatrix} \lambda_1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & \lambda_2, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & a'_{34}\\ 0, & 0, & a'_{34}, & 0\end{vmatrix}=-\lambda_1\lambda_2 a_{34}'^2.$$

აქედან

$$a'_{34} = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}}. \tag{70}$$

ამრიგად, ჩვეულებრივი მეორე რიგის ზედაპირის კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები გამოისახება I_1, I_2 I_3, I_4 ინვარიანტებით და, პირუკუ, რადგან კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები ერთიმეორეზე დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ I_1, I_2, I_3, I_4 ინვარიანტებიც ერთიმეორეზე დამოუკიდებელნი უნდა იყვნენ. ისევე როგორც მეორე რიგის წირების შემთხვევაში, აქაც ზემოაღნიშნული ინვარიანტები ცალსახად განსაზღვრავენ წირის ფორმას. მაგრამ თვითონ არ არიან ცალსახად განსაზღვრულნი წირის საშუალებით. ესენი ფარდობითი ინვარიანტებია. მათგან შეიძლება შედგენილ იქნას შინაგანი ინვარიანტები. მაგალითად, ცენტრიანი ზედაპირის a, b, c ნახევარღერძები და უცენტრო ზედაპირის p, q პარამეტრები, რომელნიც ინვარიანტებით გამოისახება, შინაგანი ინვარიანტები იქნება.

მრავალცენტრიანი ზედაპირის ინვარიანტები, საზოგადოდ, განსხვავებულია ჩვეულებრივი ზედაპირის ინვარიანტისაგან. მათი მოპოვება შეიძლება მოხდეს ისევე, როგორც პარალელურ წრფეთა წყვილის ინვარიანტებისათვის იყო მოხდენილი; მათზე ჩვენ აქ არ შევჩერდებით.

შენიშვნა. მეორე რიგის ზედაპირისათვისაც შეიძლება განსაზღვრულ იქნას ზოგადი გარდაქმნის ინვარიანტები. გამოთვლები ჩატარდება ისევე, როგორც მეორე რიგის წირების შემთხვევაში იყო წარმოებული. აქ $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის S_0 ფართობის ნაცვლად მონაწილეობას მიიღებს $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის v_0 მოცულობა. მაგალითად, I_3, I_4 ინვარიანტებს (ამ შემთხვევაში) ექნებათ შემდეგი სახე:

$$I_3 = \frac{D}{V_0^2}, \qquad I_4 = \frac{\Delta}{V_0^2}. \tag{71}$$

სავარჯიშო

1. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე მეორე რიგის ზედაპირის შემდეგი განტოლება

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2z^2 - 1 = 0.$$

ააგეთ ეს ზედაპირი $Oxyz$ სისტემის მიმართ (ძველი სისტემის მიმართ).

2. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე მეორე რიგის ზედაპირის შემდეგი განტოლება

$$x^2-2xy+y^2+z^2-2z=0.$$

ააგეთ ეს ზედაპირი $Oxyz$ სისტემის მიმართ (ძველი სისტემის მიმართ).

3. მოცემულია წირის განტოლება სივრცეში:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=R^2, \\ x+y+z-1=0. \end{array}\right\}$$

შეადგინეთ იმ კონუსის განტოლება, რომლის მსახველები აერთებს მოცემული წირის წერტილებს კოორდინატთა სათავესთან.

4. განსაზღვრეთ სივრცის ისეთ წერტილთა გეომეტრიული ადგილის განტოლება, რომელთაგან ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების შეფარდება მუდმივია.

5. შეადგინეთ ისეთი წრიული კონუსის განტოლება, რომელიც შეიცავს კოორდინატთა ღერძებს, როგორც მსახველებს.

6. მოცემულია ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი შემდეგი განტოლებით

$$x^2-2y^2=2z.$$

საძიებელია კუთხე იმ მსახველთა შორის, რომელნიც გადიან პარაბოლოიდის (2, 0, 2) წერტილზე.

7. შეადგინეთ შემდეგი განტოლებით განსაზღვრული ზედაპირის მსახველის განტოლება

$$x^2+2xy-z^2-2=0$$

იმ პირობით, რომ მსახველი გადიოდეს (1, 1, 1) წერტილზე.

თ ა ვ ი X

მეორე რიგის წირები და ზედაპირები ერთგვაროვან კოორდინატებში

§ 1. ერთგვაროვანი კოორდინატები

1. ერთგვაროვანი კოორდინატები წრფეზე. განვიხილოთ Ox ღერძზე რაიმე M წერტილი, მისი კოორდინატი აღვნიშნოთ x-ით. როგორიც არ უნდა იყოს ეს რიცხვი სასრული თუ უსასრულოდ დიდი (ე. ი. როგორიც არ უნდა იყოს M წერტილი სასრულეთისა თუ უსასრულოდ დაშორებული) ყოველთვის იარსებებს ისეთი სასრულ რიცხვთა ξ_1, ξ_2 წყვილი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას

$$x=\frac{\xi_1}{\xi_2}. \tag{1}$$

მართლაც, თუ x სასრულია, მაშინ (1) ტოლობას დააკმაყოფილებს შემდეგი წყვილი

$$\xi_1=x, \qquad \xi_2=1. \tag{2}$$

თუ $x=\infty$, მაშინ (1) ტოლობას დააკმაყოფილებს ასეთი წყვილი

$$\xi_1\neq 0, \qquad \xi_2=0. \tag{3}$$

(1) ტოლობით განსაზღვრულ ξ_1, ξ_2 რიცხვებს ეწოდება M წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები წრფეზე. ეს დამოკიდებულება ასე აღინიშნება:

$$M=(\xi_1,\ \xi_2) \quad \text{ან} \quad M(\xi_1,\ \xi_2). \tag{4}$$

ორივე ეს აღნიშვნა ერთნაირად უნდა წავიკითხოთ „M წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები არის ξ_1, ξ_2".

ზემოაღნიშნულიდან აშკარაა, რომ წრფის ნებისმიერი წერტილისათვის (უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით) არსებობს ერთგვაროვანი კოორდინატები — სასრული სახით, ოღონდ ეს დამოკიდებულება არ არის ცალსახა. ადვილი შესამჩნევია, რომ,

თუ ξ_1, ξ_2 წყვილი აკმაყოფილებს (1) ტოლობას, მაშინ მას დააკმაყოფილებს $\rho\xi_1$, $\rho\xi_2$ წყვილი (სადაც $\rho \neq 0$), ე. ი. ეს წყვილიც განსაზღვრავს იმავე M წერტილს. ამრიგად

$$(\rho\xi_1, \rho\xi_2) = (\xi_1, \xi_2). \tag{5}$$

ადვილი შესამჩნევია, აგრეთვე, რომ, თუ ξ_1, ξ_2 და η_1, η_2 წყვილები ერთსა და იმავე წერტილს განსაზღვრავს, ე. ი. თუ

$$(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2),$$

მაშინ ადგილი ექნება შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\eta_1 = \rho\xi_1, \quad \eta_2 = \rho\xi_2. \tag{6}$$

მაშასადამე, ორი წერტილის შეთავსებისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი ერთგვაროვანი კოორდინატები იყოს პროპორციული.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერ რიცხვთა ξ_1, ξ_2 წყვილი, გარდა 0, 0 წყვილისა, წარმოადგენს წრფის ერთადერთი წერტილის ერთგვაროვან კოორდინატებს; ამისათვის განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) $\xi_2 \neq 0$. ამ შემთხვევაში (1) ტოლობა ცალსახად განსაზღვრავს დეკარტის x კოორდინატს და, მაშასადამე, M წერტილს წრფეზე; 2) $\xi_2 = 0$. ამ შემთხვევაში (1) ტოლობა გვაძლევს $x = \infty$, რაც შეესაბამება წრფის ერთადერთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს. ამრიგად, რიცხვთა წყვილი (გარდა 0, 0 წყვილისა), როგორც ერთგვაროვანი კოორდინატები, ცალსახად განსაზღვრავს წრფეზე წერტილს, ოღონდ თვით წერტილი არ განსაზღვრავს ცალსახად რიცხვთა წყვილს. თუ მოცემულია წერტილი Ox ღერძზე, მაშინ მისი ერთგვაროვანი კოორდინატები განისაზღვრება ნებისმიერ მამრავლამდე. ეს მამრავლი შეგვიძლია შევარჩიოთ ნებისმიერად და დავაფიქსიროთ. ამ მოქმედებას ერთგვაროვანი კოორდინატების ნ ო რ მ ი რ ე ბ ა ეწოდება. ერთგვაროვანი კოორდინატებიდან გადასვლა დეკარტის კოორდინატებზე მოხდება (1) ფორმულის მიხედვით, თუ $\xi_2 \neq 0$. ამ შემთხვევაში დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა შეიძლება მოხდეს აგრეთვე (2) ფორმულებით. თუ $\xi_2 = 0$, მაშინ დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა არ შეიძლება, ე. ი. წრფის სასრულეთის წერტილებისათვის შეიძლება დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა, ხოლო უსასრულოდ დაშორებული წერტილისათვის არა. ამრიგად, დეკარტის კოორდინატებში შეიძლება აღირიცხოს წრფის მხოლოდ სასრულეთის წერტილები, ერთგვაროვან კოორდინატებში კი აღირიცხება წრფის ყვე-

ლი წერტილი (უსასრულოდ დაშორებულის ჩათვლით). ამაშია ერთგვაროვანი კოორდინატების უპირატესობა.

2. **ერთგვაროვანი კოორდინატები სიბრტყეზე**. განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე M წერტილი, რომელსაც x, y აქვს დეკარტის კოორდინატებად. როგორიც არ უნდა იყოს x, y რიცხვები, სასრული თუ უსასრულოდ დიდი (ე. ი. როგორიც არ უნდა იყოს M წერტილი სიბრტყის სასრულეთისა თუ უსასრულოდ დაშორებული), ყოველთვის იარსებებს ისეთი სასრულ რიცხვთა ξ_1, ξ_2, ξ_3 სამეული, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს:

$$x=\frac{\xi_1}{\xi_3},\qquad y=\frac{\xi_2}{\xi_3}. \tag{7}$$

მართლაც, თუ x, y სასრული რიცხვებია, მაშინ (7) ტოლობებს დააკმაყოფილებს შემდეგი სამეული:

$$\xi_1=x,\quad \xi_2=y,\quad \xi_3=1. \tag{8}$$

თუ x, y რიცხვებიდან ერთი მაინც (შეიძლება ორივე ერთადაც) უსასრულოდ დიდია, მაშინ (7) ტოლობებს დააკმაყოფილებს შემდეგი სამეული:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ 0, \tag{9}$$

სადაც ξ_1, ξ_2 რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან (შეიძლება ორივე ერთადაც განსხვავდებოდეს ნულისაგან. ეს მაშინ, როცა x, y ერთდროულად უსასრულოდ დიდებია). (7) ტოლობით განსაზღვრულ ξ_1, ξ_2, ξ_3 რიცხვებს ეწოდება M წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები სიბრტყეზე. ეს დამოკიდებულება ასე აღინიშნება

$$M=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\quad \text{ან}\quad M(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3).$$

ორივე ეს აღნიშვნა ერთნაირად გამოითქმის: „M წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები არის ξ_1, ξ_2, ξ_3“.

ისეთივე მსჯელობით, როგორიც ვაწარმოეთ ერთგვაროვანი კოორდინატებისათვის (წრფეზე), დამტკიცდება ერთგვაროვანი კოორდინატების შემდეგი თვისება (სიბრტყეზე)

$$(\rho\xi_1,\ \rho\xi_2,\ \rho\xi_3)=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) \tag{10}$$

და, პირუკუ, თუ

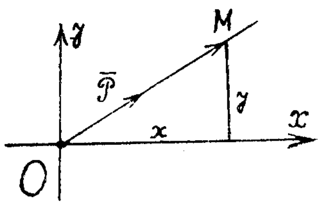
$$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3),$$

მაშინ

$$\eta_1=\rho\cdot\xi_1,\quad \eta_2=\rho\cdot\xi_2,\quad \eta_3=\rho\cdot\xi_3. \tag{11}$$

ამ შემთხვევაშიაც ნებისმიერ ξ_1, ξ_2, ξ_3 სამეულს, გარდა 0, 0, 0 სამეულისა, ცალსახად შეესაბამება M წერტილი სიბრტყეზე. M წერტილი განსაზღვრავს ერთგვაროვანი კოორდინატების სამეულს ნებისმიერ, ნულისაგან განსხვავებულ მამრავლამდე. ეს მამრავლი შეგვიძლია ამოვარჩიოთ ნებისმიერად და დავაფიქსიროთ. ამ მოქმედებას აქაც ეწოდება ერთგვაროვანი კოორდინატების ნორმირება. ერთგვაროვანი კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა მოხდება (7) ან (8) ფორმულებით, როცა $\xi_3 \neq 0$, ე. ი. როცა აღირიცხება სიბრტყის სასრულეთის წერტილები. ხოლო, როცა $\xi_3=0$, ე. ი. როცა განიხილება სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები, მაშინ დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა არ ხდება.

ახლა უნდა დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყის ნებისმიერი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი შეიძლება განისაზღვროს ერთგვაროვანი კოორდინატებით. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფეების უსასრულოდ დაშორებული წერტილები. ყოველი მიმართულებით იქნება სიბრტყის ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. დავუშვათ, რომ განსახილავი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი OM წრფის უსასრულოდ დაშორებული წერტილია. აღვნიშნოთ ამ წრფის მიმმართველი $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები L, M-ით. გვექნება (ნახ. 137)



ნახ. 137.

$$\overline{OM} \parallel \overline{P},$$

ანუ

$$\frac{x}{L}=\frac{y}{M}.$$

შევიტანოთ აქ x, y-ის მნიშვნელობანი (7) ფორმულებიდან. მივიღებთ

$$\frac{\xi_1}{L}=\frac{\xi_2}{M}. \tag{12}$$

ამრიგად, თუ წერტილი ისე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, რომ მისი ერთგვაროვანი კოორდინატები აკმაყოფილებს (12) ტოლობას, მაშინ მივიღებთ OM წრფის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს.

ამ წერტილისათვის, ცხადია, $\xi_3=0$. ამრიგად $(\xi_1, \xi_2, 0)$ წარმოადგენს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს $\overline{P}$ მიმართულებით, თუ ξ_1, ξ_2 ერთგვაროვანი კოორდინატები აკმაყოფილებს (12) პირობას, კერძოდ, ამ პირობას აკმაყოფილებს ξ_1, ξ_2-ის შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$\xi_1=L, \quad \xi_2=M. \tag{13}$$

მაშასადამე, $\overline{P}(L, M)$ ვექტორის მიმართულებით უსასრულოდ დაშორებული წერტილი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\xi_1=L, \quad \xi_2=M, \quad \xi_3=0. \tag{14}$$

ამრიგად, $(L, M, 0)$ **ა რ ი ს უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ა შ ო რ ე ბ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი $P(L, M)$ ვ ე ქ ტ ო რ ი ს მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ი თ.** $\overline{P}(L, M)$ ვექტორი რომ შევცვალოთ პარალელური ვექტორით, მაშინ L, M შეიცვლება პროპორციული სიდიდეებით. მაგრამ ერთგვაროვანი კოორდინატების პროპორციული შეცვლა არ შეცვლის წერტილს, ამიტომ $(L, M, 0)$ წერტილი დარჩება უცვლელი. ახლა, თუ ვაბრუნებთ $\overline{P}$ ვექტორს კოორდინატთა სისტემის სათავის გარშემო, მივიღებთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებს ყველა მიმართულებით, ე. ი. სიბრტყის ყველა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს. ამრიგად, **ს ი ბ რ ტ ყ ე ზ ე ყ ო ვ ე ლ ი მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა ვ ს ე რ თ უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ა შ ო რ ე ბ უ ლ წ ე რ ტ ი ლ ს დ ა, პ ი რ უ ქ უ, ყ ო ვ ე ლ ი უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ა შ ო რ ე ბ უ ლ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს ა გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა ვ ს ე რ თ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა ს.** (14) ფორმულები აკავშირებს მიმართულებასა და მის შესაბამ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს. ამავე ფორმულებით ხდება ერთიმეორეზე გადასვლა.

3. ერთგვაროვანი კოორდინატები სივრცეში. განვიხილოთ სივრცეში რაიმე $M(x, y, z)$ წერტილი. ნებისმიერ x, y, z-სათვის უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობის ჩათვლით (ე. ი. ნებისმიერი წერტილისათვის უსასრულოდ დაშორებულის ჩათვლით) შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი სასრულ რიცხვთა ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ოთხეული, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს:

$$x=\frac{\xi_1}{\xi_4}, \qquad y=\frac{\xi_2}{\xi_4}, \qquad z=\frac{\xi_3}{\xi_4}. \tag{15}$$

მართლაც, თუ x, y, z სასრულია, მაშინ (15) ტოლობებს დააკმაყოფილებს შემდეგი ოთხეული:

$$\xi_1=x, \quad \xi_2=y, \quad \xi_3=z, \quad \xi_4=1. \tag{16}$$

თუ x, y, z რიცხვებიდან ერთი მაინც (შეიძლება ორი ან სამივე

ერთად) უსასრულოდ დიდია, მაშინ (15) ტოლობებს დააკმაყოფილებს შემდეგი ოთხეული

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ \xi_4 = 0, \tag{17}$$

სადაც ξ_1, ξ_2, ξ_3 რიცხვებიდან ერთი მაინც (შეიძლება ორი ან სამივე ერთად) განსხვავდება ნულისაგან. (15) ტოლობით განსაზღვრულ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 რიცხვებს ეწოდება M წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები სივრცეში. ეს დამოკიდებულება ასე აღინიშნება:

$$M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \quad \text{ან} \quad M(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4).$$

ორივე ეს აღნიშვნა ერთნაირი შინაარსისაა: „M წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები არის ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4".

ისეთივე მსჯელობით, როგორიც ვაწარმოეთ ერთგვაროვანი კოორდინატებისათვის სიბრტყეზე, შეგვიძლია დავამტკიცოთ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ერთგვაროვანი კოორდინატების შემდეგი თვისებანი:

$$(\rho\xi_1, \rho\xi_2, \rho\xi_3, \rho\xi_4) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \tag{18}$$

და, პირუკუ, თუ

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

მაშინ

$$\eta_1 = \rho\xi_1, \quad \eta_2 = \rho\xi_2, \quad \eta_3 = \rho\xi_3, \quad \eta_4 = \rho\xi_4. \tag{19}$$

აქაც ნებისმიერ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ოთხეულს ცალსახად შეესაბამება წერტილი სივრცეში; ხოლო სივრცის M წერტილი განსაზღვრავს ერთგვაროვან კოორდინატებს ნულისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ მამრავლამდე. ეს მამრავლი შეიძლება შეირჩეს ნებისმიერად და ფიქსირებულ იქნას. ამ მოქმედებას აქაც ეწოდება ერთგვაროვანი კოორდინატების ნორმირება. ერთგვაროვანი კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა მოხდება (15) ან (16) ფორმულებით, როცა x, y, z სასრულია; ხოლო, როცა $\xi_4 = 0$, ე. ი. როცა განიხილება სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები, მაშინ დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა არ ხდება. აქაც ყოველი მიმართულებით (სივრცეში) უსასრულოდ დაშორებული წერტილისათვის არსებობს ერთგვაროვანი კოორდინატები. სახელდობრ, თუ განიხილება $\overline{P}(L, M, N)$ ვექტორით განსაზღვრული მიმართულება, მაშინ სათანადო უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები წარმოდგება (14) ფორმულების ანალოგიური ფორმულებით:

$$\xi_1 = L, \quad \xi_2 = M, \quad \xi_3 = N, \quad \xi_4 = 0. \tag{20}$$

ე. ი. $P(L, M, N)$ ვექტორის მიმართულებით უსასრულოდ დაშორებული წერტილი იქნება $(L, M, N, 0)$ წერტილი. ამ შემთხვევაშიაც ყოველ მიმართულებას შეესაბამება ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი და, პირუკუ, ყოველი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი განსაზღვრავს ერთ მიმართულებას სივრცეში. უსასრულოდ დაშორებული წერტილიდან გადასვლა შესაბამ მიმართულებაზე და, პირუკუ, მოხდება (20) ფორმულებით.

§ 2. წრფისა და სიბრტყის განტოლებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში

1. წრფის ზოგადი განტოლება სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში. განვიხილოთ წრფის განტოლება სიბრტყეზე დეკარტის კოორდინატებში ზოგადი სახით

$$Ax+By+C=0,$$

სადაც, როგორც ცნობილია, A, B კოეფიციენტები ერთდროულად ნულები არ არის. ჩავსვათ აქ x, y-ის მნიშვნელობანი (7) ფორმულებიდან. გვექნება

$$A\frac{\xi_1}{\xi_3}+B\frac{\xi_2}{\xi_3}+C=0.$$

აქედან ξ_3-ზე გადამრავლებით მივიღებთ

$$A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3=0.$$

ამრიგად, წრფის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში არის წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლება. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში იქნება წრფის განტოლება; ამისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი **წ რ ფ ი ვ ი   დ ა   ე რ თ გ ვ ა რ ო ვ ა ნ ი** განტოლება

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=0. \tag{21}$$

სადაც a_1, a_2, a_3 ერთდროულად ნულები არ არის. ერთდროულად ნულები რომ ყოფილიყო, მაშინ, ცხადია, წრფივი განტოლება აღარ გვექნებოდა. ამრიგად ეს შეზღუდვა არ გამორიცხავს რაიმე წრფივ განტოლებას. წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა: 1) a_1, a_2 ერთდროულად ნულები არ არის. ამ შემთხვევაში გადავიდეთ დე-

კარტის კოორდინატებზე; ამისათვის მივმართოთ (8) ფორმულებს, ე. ი. (21) განტოლებაში ჩავსვათ $\xi_1=x$, $\xi_2=y$, $\xi_3=1$. გვექნება

$$a_1x+a_2y+a_3=0.$$

რადგან a_1, a_2 ერთდროულად ნულები არ არის, ამიტომ ეს განტოლება წრფეს გამოსახავს; 2) $a_1=a_2=0$. ამ შემთხვევაში (21) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს: $a_3\xi_3=0$. ცხადია, რომ $a_3\neq 0$ (რადგან $a_1=a_2=0$ და სამივე კოეფიციენტი კი ერთად ნულები არ უნდა იყოს); ამიტომ

$$\xi_3=0. \tag{22}$$

რაც შეეხება ξ_1, ξ_2-ს ისინი ნებისმიერია. ამ პირობებში, როგორც ვიცით, განისაზღვრება უსასრულოდ დაშორებული წერტილები. ამრიგად, (22) განსაზღვრავს უსასრულოდ დაშორებული წერტილების ერთობლიობას. რადგან სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, ამიტომ (22) განტოლებით განისაზღვრება სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წრფე. ξ_1, ξ_2, ξ_3-ს ეწოდება მიმდინარე ერთგვაროვანი კოორდინატები; მაშასადამე, სიბრტყის ნებისმიერი (უსასრულოდ დაშორებულის ჩათვლით) წრფე ერთგვაროვან კოორდინატებში განისაზღვრება წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლებით და, პირუკუ.

2. წრფის პარამეტრული განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი წერტილი ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$A=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3), \qquad C=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3).$$

საძიებელია იმ წრფის განტოლება, რომელიც აერთებს ამ ორ წერტილს. იმისათვის, რომ (21) განტოლებიდან მივიღოთ საძიებელი წრფის განტოლება, საჭიროა კოეფიციენტები ისე შეირჩეს, რომ (21) განტოლება დაკმაყოფილდეს A და B წერტილების კოორდინატებით. ე. ი. (21) განტოლებაში ξ_1, ξ_2, ξ_3 მიმდინარე ერთგვაროვანი კოორდინატები რომ შევცვალოთ A და B წერტილების ერთგვაროვანი კოორდინატებით (მორიგეობით), განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს. გვექნება:

$$a_1\eta_1+a_2\eta_2+a_3\eta_3=0,$$
$$a_1\zeta_1+a_2\zeta_2+a_3\zeta_3=0.$$

ეს ორი განტოლება (21) განტოლებასთან ერთად (ქმნის სამი განტოლებისაგან შედგენილ ერთგვაროვან სისტემას a_1, a_2, a_3 კოეფიციენტების მიმართ. რადგან ეს რიცხვები ერთდროულად ნულე-

ბი არ შეიძლება იყოს, ამიტომ უნდა მოვითხოვოთ, რომ ზემოაღნიშნულ ერთგვაროვან სისტემას ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია ამ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნული. გვექნება

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

ეს ტოლობა მეორე მხრივ, ცხადია, გამოსახავს M, A, B წერტილთა კოლინეარულობის პირობასაც ერთგვაროვან კოორდინატებში. ეს ტოლობა არ შეიძლება იყოს განუსაზღვრელი იმიტომ, რომ ორი წერტილის კოლინეარული წერტილები განუსაზღვრელი არ არის. თუ ამ საკითხს წმინდა ალგებრული თვალსაზრისით მივუდგებით, მაშინ (23) განტოლების განუსაზღვრელობა გამოიწვევს დეტერმინანტის II და III სტრიქონების ელემენტების პროპორციულობას, რაც თავის მხრივ იმის მაჩვენებელი იქნება, რომ B და C წერტილები შეუთავსდება ერთიმეორეს. ამრიგად, (23) განტოლება სავსებით განსაზღვრულია და მას აკმაყოფილებს მოცემული წერტილების შემაერთებელი წრფის ყოველი წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები ξ_1, ξ_2, ξ_3. ამავე დროს პირდაპირ ჩანს, რომ (23) განტოლება არის წრფივი და ერთგვაროვანი ξ_1, ξ_2, ξ_3-ის მიმართ, ე. ი. ეს განტოლება წრფის განტოლებაა. ამრიგად (23) განტოლება განსაზღვრავს საძიებელ წრფეს. ამ განტოლებაში ξ_1, ξ_2, ξ_3 მიმდინარე კოორდინატებია, დანარჩენი სიდიდეები კი არიან მუდმივები. ადვილი დასამტკიცებელია (ეს უმაღლესი ალგებრიდანაც ცნობილია), რომ (23) განტოლება ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემისა:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda\eta_1 + \mu\zeta_1, \\ \xi_2 &= \lambda\eta_2 + \mu\zeta_2, \\ \xi_3 &= \lambda\eta_3 + \mu\zeta_3. \end{aligned} \tag{24}$$

სადაც λ და μ რაიმე პარამეტრებია. მართლაც, თუ ξ_1, ξ_2, ξ_3-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (23) განტოლებაში, იგი დაკმაყოფილდება და, პირუკუ, (23) განტოლება თავსებადობის პირობას წარმოადგენს (24) სისტემისათვის. ამრიგად, (24) სისტემით განისაზღვრება A და B წერტილებზე გამავალი წრფე; ამიტომ ამ სისტემას ეწოდება წრფის პარამეტრული განტოლება ერთგვაროვან კოორ-

დინატებში. λ და μ პარამეტრების პროპორციული ცვლით პროპორციულად შეიცვლება აგრეთვე ξ_1, ξ_2, ξ_3. ამიტომ λ-სა და μ-ს ეწოდება ერთგვაროვანი პარამეტრები. მათი რიცხვის შემცირება შეიძლება A ან B წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატების ნორმირებით. მართლაც, $\lambda\eta_1$, $\lambda\eta_2$, $\lambda\eta_3$ განსაზღვრავს B წერტილს; მაშასადამე, თავიდანვე თუ B წერტილის კოორდინატებს ავიღებდით ასე: $\frac{\eta_1}{\lambda}$, $\frac{\eta_2}{\lambda}$, $\frac{\eta_3}{\lambda}$, მაშინ (24) განტოლებაში λ აღარ შევიდოდა. იგი მიიღებდა შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}\xi_1&=\eta_1+t\zeta_1,\\ \xi_2&=\eta_2+t\zeta_2,\\ \xi_3&=\eta_3+t\zeta_3,\end{aligned} \tag{25}$$

სადაც შემოღებული გვაქვს აღნიშვნა $\mu=t$. ამრიგად, (25) სისტემაც A და B წერტილებზე გამავალ წრფეს განსაზღვრავს. ამ შემთხვევაში t არაერთგვაროვანი პარამეტრია. მოცემული A და B წერტილები შეესაბამებიან t პარამეტრის 0 და ∞ მნიშვნელობებს.

3. სიბრტყის ზოგადი განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. განვიხილოთ სიბრტყის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში ზოგადი სახით

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{26}$$

სადაც A, B, C ერთდროულად ნულები არ არის. ჩავსვათ აქ x, y, z-ის მნიშვნელობანი (15) ფორმულებიდან. გვექნება

$$A\frac{\xi_1}{\xi_4}+B\frac{\xi_2}{\xi_4}+C\frac{\xi_3}{\xi_4}+D=0.$$

აქედან (ξ_4-ზე გადამრავლებით) მივიღებთ

$$A\xi_1+B\xi_2+C\xi_3+D\xi_4=0.$$

ამრიგად, სიბრტყის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში არის წრფივი და ერთგვაროვანი. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ყოველი წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში განსაზღვრავს სიბრტყეს; ამისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლება

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\xi_4=0. \tag{27}$$

სადაც a_1, a_2, a_3, a_4 კოეფიციენტები ერთდროულად ნულები არ არის (ერთდროულად ნულები რომ ყოფილიყო, მაშინ განტოლებაც

არ გვექნებოდა). წარმოგვიდგება ორი შემთხვევა: 1) a_1, a_2, a_3 ერთდროულად ნულები არ არის. ამ შემთხვევაში (27) განტოლებაში გადავიდეთ დეკარტის კოორდინატებზე. ეს მოხდება (16) ფორმულების მიხედვით. გვექნება

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0.$$

ეს კი სიბრტყის ზოგადი განტოლებაა; 2) $a_1=a_2=a_3=0$. ამ შემთხვევაში (27) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს: $a_4\xi_4=0$. რადგან $a_4\neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ოთხივე კოეფიციენტი ერთდროულად ნული აღმოჩნდებოდა, რაც შეუძლებელია), ამიტომ

$$\xi_4=0. \tag{28}$$

აქ ξ_1, ξ_2, ξ_3 ნებისმიერია. ამ პირობებში, როგორც ცნობილია (14) ფორმულიდან, განისაზღვრება უსასრულოდ დაშორებული წერტილები. ყველა ეს წერტილები დალაგებულია სივრცის უსასრულოდ დაშორებულ სიბრტყეზე. ამრიგად (28) განტოლება წარმოადგენს სივრცის უსასრულოდ დაშორებული სიბრტყის განტოლებას; მაშასადამე, ნებისმიერი სიბრტყე (უსასრულოდ დაშორებული სიბრტყის ჩათვლით) წარმოდგება წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლებით ერთგვაროვან კოორდინატებში და, პირუკუ. ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-ს (27) განტოლებაში ეწოდება მიმდინარე ერთგვაროვანი კოორდინატები.

4. სიბრტყის პარამეტრული განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. დავუშვათ, რომ მოცემულია სამი არაკოლინეარული წერტილი:

$$A=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4),$$
$$B=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4),$$
$$C=(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4).$$

საძიებელია იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის ამ სამ წერტილზე. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ნებისმიერი სიბრტყე წარმოდგება (27) განტოლებით. იმისათვის, რომ ეს განტოლება განსაზღვრავდეს მოცემულ წერტილებზე გამავალ სიბრტყეს, საჭიროა კოეფიციენტები ისე შეირჩეს, რომ განტოლება დაკმაყოფილდეს მოცემული წერტილების კოორდინატებით. გვექნება:

$$a_1\eta_1+a_2\eta_2+a_3\eta_3+a_4\eta_4=0,$$
$$a_1\zeta_1+a_2\zeta_2+a_3\zeta_3+a_4\zeta_4=0,$$
$$a_1\tau_1+a_2\tau_2+a_3\tau_3+a_4\tau_3=0.$$

ეს სამი განტოლება (27) განტოლებასთან ერთად მოგვცემს, ოთხი განტოლებისაგან შედგენილ, ერთგვაროვან სისტემას a_1, a_2, a_3, a_4 უცნობთა მიმართ. რადგან არსებობს სიბრტყე, რომელიც სამ მოცემულ წერტილზე გადის, ამიტომ აღნიშნულ სისტემას უნდა ჰქონდეს ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი; ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია ამ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნული. გვექნება

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \tau_1, & \tau_2, & \tau_3, & \tau_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

ეს ტოლობა, ცხადია, წარმოადგენს M, A, B, C წერტილების კომპლანარულობის პირობასაც ერთგვაროვან კოორდინატებში. (29) განტოლება არ შეიძლება იყოს განუსაზღვრელი (სამი არაკოლინეარული წერტილით განისაზღვრება სიბრტყე, ამიტომ კომპლანარული წერტილები არ შეიძლება განუსაზღვრელი იყოს). იგი წრფივი განტოლებაა მიმდინარე კოორდინატების მიმართ, ამიტომ გამოსახავს სიბრტყეს; მაშასადამე, სამ მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყე განისაზღვრება (29) განტოლებით, სადაც ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 არის მიმდინარე კოორდინატები, დანარჩენი სიდიდეები კი— მუდმივები. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ეს განტოლება ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემისა:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda\eta_1 + \mu\zeta_1 + \nu\tau_1, \\ \xi_2 &= \lambda\eta_2 + \mu\zeta_2 + \nu\tau_2, \\ \xi_3 &= \lambda\eta_3 + \mu\zeta_3 + \nu\tau_3, \\ \xi_4 &= \lambda\eta_4 + \mu\zeta_4 + \nu\tau_4. \end{aligned} \tag{30}$$

სადაც λ, μ, ν პარამეტრებია. მართლაც, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-ის ეს მნიშვნელობანი რომ ჩავსვათ (29) განტოლებაში, იგი დაკმაყოფილდება და, პირუკუ, (29) განტოლება თავსებადობის პირობას წარმოადგენს (30) სისტემისათვის. ადვილი შესამჩნევია, რომ, თუ λ, μ, ν პარამეტრებს შევცვლით პროპორციულად (გავამრავლებთ რაიმე რიცხვზე), მაშინ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-იც შეიცვლება პროპორციულად. თვით M წერტილი კი არ შეიცვლება. ამიტომ λ, μ, ν პარამეტრებს ეწოდება ერთგვაროვანი პარამეტრები. მათი რიცხვის შემცირება შეიძლება წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატების ნორ-

მირების საშუალებით. მაგალითად, თუ η_1, η_2, η_3, η_4-ის ნაცვლად თავიდანვე ავიღებდით $\frac{\eta_1}{\lambda}$, $\frac{\eta_2}{\lambda}$, $\frac{\eta_3}{\lambda}$, $\frac{\eta_4}{\lambda}$-ს, მაშინ (30) სისტემა ასეთ სახეს მიიღებდა:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1 + u\zeta_1 + v\tau_1, \\ \xi_2 &= \eta_2 + u\zeta_2 + v\tau_2, \\ \xi_3 &= \eta_3 + u\zeta_3 + v\tau_3, \\ \xi_4 &= \eta_4 + u\zeta_4 + v\tau_4, \end{aligned} \tag{31}$$

სადაც $\mu = u$, $\nu = v$. (30) სისტემას ეწოდება სიბრტყის პარამეტრული განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში, სადაც λ, μ, ν ერთგვაროვანი პარამეტრებია. (31) სისტემას, რომელიც (30) სისტემის ეკვივალენტურია, ეწოდება აგრეთვე სიბრტყის პარამეტრული განტოლება, სადაც u და v არაერთგვაროვანი პარამეტრებია.

5. წრფის განტოლება სივრცეში ერთგვაროვან კოორდინატებში. თუ წრფეს განვიხილავთ როგორც ორი სიბრტყის თანაკვეთას, მაშინ წრფის განტოლება წარმოგვიდგება ამ სიბრტყეების განტოლებათა სისტემის სახით. გვექნება:

$$\begin{aligned} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4 &= 0, \\ b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\xi_4 &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი წრფე სივრცეში (უსასრულოდ დაშორებულის ჩათვლით) წარმოგვიდგება ორი წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლების სისტემის სახით ერთგვაროვან კოორდინატებში და, პირუკუ, ნებისმიერი ორი წრფივი და ერთგვაროვანი განტოლების სისტემა ერთგვაროვან კოორდინატებში განსაზღვრავს წრფეს. (32) განტოლებას ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. ადვილი შესამჩნევია, რომ (32) სისტემა შეიძლება ამოხსნილ იქნას ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 კოორდინატების რომელიმე წყვილის მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში (32) სისტემის ორ განტოლებას პროპორციული კოეფიციენტები ექნებოდა და დაიყვანებოდა ერთიმეორეზე. დავუშვათ სიმარტივისათვის, რომ ამოხსნა შეიძლება ξ_1, ξ_2-ის მიმართ. ცხადია, ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ წრფივსა და ერთგვაროვან გამოსახულებებს დანარჩენი წყვილის მიმართ. გვექნება:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a\xi_3 + b\xi_4, \\ \xi_2 &= c\xi_3 + d\xi_4. \end{aligned}$$

ახლა ξ_3, ξ_4 შევცვალოთ სხვა პარამეტრებით შემდეგნაირად:

$$\xi_3=\lambda\eta_3+\mu\zeta_3,$$
$$\xi_4=\lambda\mu_4+\mu\zeta_4,$$

სადაც η_3, η_4 და ζ_3, ζ_4 რაიმე მუდმივებია. ჩავსვათ ξ_3, ξ_4-ის ეს მნიშვნელობანი წინა ტოლობებში. მივიღებთ:

$$\xi_1=(a\eta_3+b\eta_4)\lambda+(a\zeta_3+b\zeta_4)\mu,$$
$$\xi_2=(c\eta_3+d\eta_4)\lambda+(a\zeta_3+d\zeta_4)\mu.$$

თუ ბრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებებს შესაბამად აღვნიშნავთ η_1, ζ_1-ითა და η_2, ζ_2-ით, მაშინ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-სათვის მოგვეცემა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned}\xi_1&=\lambda\eta_1+\mu\zeta_1,\\ \xi_2&=\lambda\eta_2+\mu\zeta_2,\\ \xi_2&=\lambda\eta_3+\mu\zeta_3,\\ \xi_4&=\lambda\eta_4+\mu\zeta_4,\end{aligned} \tag{33}$$

სადაც λ და μ ნებისმიერი პარამეტრებია; კერძოდ, ამ პარამეტრების მნიშვნელობათა 1,0 და 0,1 წყვილებს შეესაბამება (η_1, η_2, η_3, η_4) და (ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4) წერტილები, ე. ი. (33) განტოლებათა სისტემით განსაზღვრული წრფე გადის ამ წერტილებზე. (33) სისტემას ეწოდება წრფის პარამეტრული სახის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში (სივრცეში). შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება გავს წრფის პარამეტრულ განტოლებას სიბრტყეზე. აქაც შეგვიძლია შევამციროთ პარამეტრების რიცხვი ერთით. გვექნება:

$$\begin{aligned}\xi_1&=\eta_1+t\zeta_1,\\ \xi_2&=\eta_2+t\zeta_2,\\ \xi_3&=\eta_3+t\zeta_3,\\ \xi_4&=\eta_4+t\zeta_4.\end{aligned} \tag{34}$$

იმისათვის, რომ გადავიდეთ დეკარტის კოორდინატებზე, უმჯობესია (34) განტოლებაში (ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4) წერტილი წარმოვიდგინოთ უსასრულეთში და გამოვიყენოთ (17) და (20) ფორმულები. თუ $B(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ წერტილის დეკარტის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_0, y_0, z_0-ით, გვექნება:

$$\xi_1=x,\quad \xi_2=y,\quad \xi_3=z,\quad \xi_4=1,$$

$$\eta_1=x_0,\quad \eta_2=y_0,\quad \eta_3=z_0,\quad \eta_4=1,$$

$$\zeta_1=L,\quad \zeta_2=M,\quad \zeta_3=N,\quad \zeta_4=0.$$

ამ მნიშვნელობათა ჩასმა (34) განტოლებაში მოგვცემს:

$$x = x_0 + tL,$$

$$y = y_0 + tM,$$

$$z = z_0 + tN.$$

ეს კი წარმოადგენს წრფის პარამეტრულ განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში.

6. ზოგიერთი შემოკლებული აღნიშვნები და ზემოთ მიღებული შედეგების შეჯამება. ჩანაწერების გასამარტივებლად ხელსაყრელია (ξ_1, ξ_2, ξ_3) წერტილი აღვნიშნოთ ξ-თი. ასევე მოვიქცეთ სხვა წერტილებისათვისაც. გვექნება:

$$\xi = (\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3),$$

$$\eta = (\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3),$$

$$\zeta = (\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3).$$

ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$(\xi, \ \eta, \ \zeta) = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

ანალოგიურად, სივრცეში. ξ, η, ζ, τ წერტილებისათვის გვექნება შემდეგი აღნიშვნა

$$(\xi, \ \eta, \ \zeta, \ \tau) = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \tau_1, & \tau_2, & \tau_3, & \tau_4 \end{vmatrix}. \tag{36}$$

ამ აღნიშვნების თანახმად სამი წერტილის კოლინეარულობის (23) პირობა და ოთხი წერტილის კომპლანარულობის (29) პირობა ასე დაიწერება:

$(\xi, \ \eta, \ \zeta) = 0$ (კოლინეარულობის პირობა სიბრტყეზე),

$(\xi, \ \eta, \ \zeta, \ \tau) = 0$ (კომპლანარულობის პირობა სივრცეში).

ადვილი შესამჩნევია, რომ (21), (24), (25), (27), (30), (31), (33)

და (34) განტოლებანი შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგი შემოკლებული სახით:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\xi_i=0 \quad \text{(წრფის განტოლება)},$$

$\xi_i=\lambda\eta_i+\mu\zeta_i$ (წრფის პარამეტრული განტოლება სიბრტყეზე),

$\xi_i=\eta_i+t\zeta_i$ (წრფის პარამეტრული განტოლება სიბრტყეზე; პარამეტრი არაერთგვაროვანია),

სადაც $i=1, 2, 3.$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\xi_i=0 \quad \text{(სიბრტყის განტოლება)},$$

$\xi_i=\lambda\eta_i+\mu\zeta_i+\nu\tau_i$ (სიბრტყის პარამეტრული განტოლება),

$\xi_i=\eta_i+u\zeta_i+v\tau_i$ (სიბრტყის პარამეტრული განტოლება; პარამეტრები არაერთგვაროვანია),

$\xi_i=\lambda\eta_i+\mu\zeta_i$ (წრფის პარამეტრული განტოლება სივრცეში),

$\xi_i=\eta_i+t\zeta_i$ (წრფის პარამეტრული განტოლება სივრცეში; აქ პარამეტრი არაერთგვაროვანია),

სადაც $i=1, 2, 3, 4.$

წრფისა და სიბრტყის პარამეტრულ განტოლებებს ხშირად შემდეგი სიმბოლური სახითაც წერენ ხოლმე:

$\xi=\lambda\eta+\mu\zeta$ (წრფის განტოლება),

$\xi=\lambda\eta+\mu\zeta+\nu\tau$ (სიბრტყის განტოლება).

ამ უკანასკნელი ფორმულების მიხედვით განიმარტება რიცხვისა და წერტილის ნამრავლი და ორი წერტილის ჯამი. ამასთან დაკავშირებით ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ (ξ, η, ζ) და (ξ, η, ζ, τ) სიმბოლოებს აქვთ სამი ვექტორის გარე ნამრავლის თვისებანი; სახელდობრ:

1) მეზობელ თანამამრავლთა გადანაცვლებით (ζ, η, ζ) ნიშანს იცვლის;

2) $(\lambda\xi, \mu\eta, \nu\zeta)=\lambda\mu\nu(\xi, \eta, \zeta)$;

3) $(\xi, \eta, \zeta_1+\zeta_2)=(\xi, \eta, \zeta_1)+(\xi, \eta, \zeta_2)$;

4) $(\xi, \eta, \zeta)=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ξ, η, ζ წერტილები კოლინეარულია. ამ შემთხვევაში ξ წერტილი გამოისახება ორი დანარჩენი წერტილის მიმართ წრფივი კომბინაციით.

ანალოგიური თვისებანი დაიწერება (ξ, η, ζ, τ) სიმბოლოსათვის, ოღონდ მეოთხე თვისება გამოსახავს ოთხი წერტილის კომპლანარულობას.

§ 3. წრფისა და სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატები

1. წრფის ტანგენციალური კოორდინატები სიბრტყეზე. განვიხილოთ წრფის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=0.$$

როგორც აღნიშნული იყო, a_1, a_2, a_3 ნებისმიერია, ოღონდ ერთდროულად ნულები არ არის. ცხადია, აგრეთვე, რომ ნებისმიერ ასეთ რიცხვთა სამეულს შეესაბამება ერთი გარკვეული წრფე სიბრტყეზე. მეორე მხრივ პირდაპირ ჩანს, რომ განტოლების გადამრავლებით რაიმე ρ რიცხვზე კოეფიციენტები შეიცვლება ρ მამრავლით. თვით წრფე კი, ცხადია, არ შეიცვლება, ე. ი. ρa_1, ρa_2, ρa_3 სამეული გამოსახავს იმავე წრფეს, რომელსაც a_1, a_2, a_3 სამეული. ამრიგად a_1, a_2, a_3 რიცხვთა სამეულს ისეთივე დამოკიდებულება აქვს წრფესთან, როგორიც ξ_1, ξ_2, ξ_3 ერთგვაროვან კოორდინატებს წერტილთან. ამიტომ a_1, a_2, a_3 კოეფიციენტებს ეწოდება წრფის ერთგვაროვანი კოორდინატები. უფრო ხშირად კი ეს სიდიდეები იხსენიება ტანგენციალური კოორდინატების სახელწოდებით. თუ უკანასკნელი განტოლებით განსაზღვრულ წრფეს a-თი აღვნიშნავთ, მაშინ წრფისა და მისი ტანგენციალური კოორდინატების ურთიერთდამოკიდებულება ჩაიწერება წერტილისა და მისი ერთგვაროვანი კოორდინატების ურთიერთკავშირის გამომსახველი სიმბოლური ჩანაწერის მსგავსად, სახელდობრ, ასე

$$a=(a_1, a_2, a_3) \quad \text{ან} \quad a(a_1, a_2, a_3).$$

ორივე ეს აღნიშვნა ერთნაირი შინაარსისაა: „a წრფის ტანგენციალური კოორდინატები არის a_1, a_2, a_3". წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატების მსგავსად წრფის ტანგენციალურ კოორდინატებს აქვს შემდეგი თვისება

$$(\rho a_1, \rho a_2, \rho a_3)=(a_1, a_2, a_3) \tag{37}$$

და, პირუკუ, თუ a და b წრფეები შეთავსებულია, ე. ი. თუ

$$(a_1, a_2, a_3)=(b_1, b_2, b_3),$$

მაშინ

$$b_1=\rho a_1, \quad b_2=\rho a_2, \quad b_3=\rho a_3. \tag{38}$$

თუ M წერტილი მდებარეობს a წრფეზე, მაშინ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ a წრფის განტოლებას, ე. ი.

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=0 \ \text{(წრფე)}.$$

ეს პირობა, ცხადია, იმასაც გვიჩვენებს, რომ a წრფე გადის M წერტილზე. თუ ამ განტოლებაში ვაფიქსირებთ a_1, a_2, a_3-ს, მაშინ მივიღებთ წრფის განტოლებას. თუ ვაფიქსირებთ ξ_1, ξ_2, ξ_3-ს, ხოლო a_1, a_2, a_3-ს განვიხილავთ ცვლადებად, მაშინ უკანასკნელი განტოლება განსაზღვრავს ყველა იმ წრფის ტანგენციალურ კოორდინატებს, რომელნიც მოცემულ წერტილზე გადიან, ე. ი. ამ შემთხვევაში განტოლება განსაზღვრავს წრფეთა კონას. ამრიგად, წრფეთა კონის განტოლება წრფის ტანგენციალურ კოორდინატებში არის წრფივი და ერთგვაროვანი. თუ მხედველობაში მივიღებთ იმას, რომ ზოგად განტოლებაში მუდმივი კოეფიციენტები წინ უნდა ეწეროს ცვლადებს, მაშინ წრფეთა კონის განტოლება ასე უნდა დაიწეროს

$$\xi_1 a_1+\xi_2 a_2+\xi_3 a_3=0 \ \text{(კონა)}.$$

ცხადია, ეს განტოლება მიიღება წინა განტოლებიდან წერტილისა და წრფის ერთგვაროვანი კოორდინატების ადგილშენაცვლებით. აქედან აშკარაა, რომ, თუ წრფის წერტილთა რაიმე ურთიერთობაში წერტილების ერთგვაროვან კოორდინატებს შევცვლით წრფეების ერთგვაროვანი კოორდინატებით, მაშინ მივიღებთ ანალოგიურ ურთიერთობას წრფეებს შორის—წრფეთა კონაში. მაგალითად, სამი წერტილის კოლინეარულობას შეესაბამება სამი წრფის ერთ წერტილზე გავლა. თუ სამი წერტილის კოლინეარულობის (23) პირობაში წერტილების ერთგვაროვან კოორდინატებს შევცვლით მოცემული a, b, c წრფეების ტანგენციალური კოორდინატებით, მივიღებთ სამი წრფის ერთ წერტილზე გავლის პირობას

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}=0, \tag{39}$$

ანდა, შემოკლებით, სიმბოლურად $(a, b, c)=0$.

სრულიად ანალოგიურად წრფის პარამეტრული განტოლებიდან მიიღება წრფეთა კონის პარამეტრული განტოლება

$$a_i = \lambda b_i + \mu c_i, \tag{40}$$

სადაც $i = 1, 2, 3$.

2. სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატები. განვიხილოთ სიბრტყის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4 = 0.$$

ისევე, როგორც წრფისათვის, აქაც a_1, a_2, a_3, a_4 კოეფიციენტებს სიბრტყის მიმართ აქვთ ისეთივე დამოკიდებულება, როგორიც ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ერთგვაროვან კოორდინატებს წერტილისათვის. ამიტომ a_1, a_2, a_3, a_4 კოეფიციენტებს ეწოდება უკანასკნელი განტოლებით განსაზღვრული სიბრტყის ერთგვაროვანი კოორდინატები. მათ ჩვეულებრივად უწოდებენ აგრეთვე სიბრტყის ტანგენციალურ კოორდინატებს. თუ სიბრტყეს აღვნიშნავთ α-თი, მაშინ სიბრტყისა და მისი ტანგენციალური კოორდინატების ურთიერთდამოკიდებულება ისეთივე სიმბოლური ჩანაწერით აღინიშნება, როგორიც ნახმარი იყო წერტილისა და წრფისათვის, სახელდობრ:

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4) \quad \text{ან} \quad \alpha(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

ეს ორივე აღნიშვნა ერთნაირი შინაარსისაა: „α სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატებია a_1, a_2, a_3, a_4. სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატები, ისევე როგორც წრფის ტანგენციალური კოორდინატები, აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$(\rho a_1, \rho a_2, \rho a_3, \rho a_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4). \tag{41}$$

და, პირუკუ, თუ

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4),$$

მაშინ

$$b_1 = \rho a_1, \quad b_2 = \rho a_2, \quad b_3 = \rho a_3, \quad b_4 = \rho b_4 \tag{42}$$

ან შემოკლებით

$$b_i = \rho a_i. \tag{42'}$$

ისე, როგორც წრფეების შემთხვევაში, აქაც განტოლება

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4 = 0$$

ერთდროულად გამოსახავს M წერტილის α სიბრტყეზე მდებარეობის პირობას და α სიბრტყის M წერტილზე გავლის პირობას. როცა ამ განტოლებაში ვაფიქსირებთ a_1, a_2, a_3, a_4-ს, მივიღებთ $\alpha(a_1, a_2, a_3, a_4)$ სიბრტყეზე მდებარე წერტილთა სიმრავლეს, ე. ი.

α სიბრტყეს. თუ იმავე განტოლებაში ვაფიქსირებთ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ერთგვაროვან კოორდინატებს, მაშინ მივიღებთ $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა სიმრავლეს, ე. ი. სიბრტყეთა ძნულს. ამრიგად შემდეგი განტოლება

$$\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4 = 0$$

იქნება ძნულის განტოლება. ეს განტოლება წინა განტოლებიდან წერტილისა და სიბრტყის ერთგვაროვანი კოორდინატების ადგილ-შენაცვლებით მიიღება; მაშასადამე, სიბრტყის წერტილთა სიმრავ-ლიდან სიბრტყეთა ძნულზე გადასასვლელად, საჭიროა წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები შეიცვალოს სიბრტყის ტანგენცია-ლური კოორდინატებით და, პირუკუ, ამ წესით ოთხი წერტილის კომპლანარულობის (29) პირობა შეიცვლება α, β, γ, δ ოთხი სიბრ-ტყის ერთ წერტილზე გავლის პირობით

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{43}$$

ანდა შემოკლებით, სიმბოლურად: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$.

სიბრტყის პარამეტრული განტოლების მსგავსად დაიწერება სიბრტყეთა ძნულის პარამეტრული განტოლება

$$a_i = \lambda b_i + \mu c_i + \nu d_i, \tag{44}$$

სადაც $i = 1, 2, 3, 4$.

§ 4. მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. წირის თანაკვეთის წერტილები წრფესთან

1. **წირის განტოლება.** იმისათვის, რომ მივიღოთ მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში, საჭიროა ავიღოთ წირის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში და ჩავსვათ იქ დე-კარტის კოორდინატების ნაცვლად მათი მნიშვნელობანი (7) ფორ-მულების თანახმად. გვექნება

$$a_{11}\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\xi_1}{\xi_3}\cdot\frac{\xi_2}{\xi_3} + a_{22}\left(\frac{\xi_2}{\xi_3}\right)^2 +$$

$$+ 2a_{13}\frac{\xi_1}{\xi_3} + 2a_{23}\frac{\xi_2}{\xi_3} + a_{33} = 0.$$

გადავამრავლოთ ეს ტოლობა $\xi_3{}^2$-ზე, მივიღებთ

$$a_{11}\xi_1{}^2+a_{22}\xi_2{}^2+a_{33}\xi_3{}^2+2a_{12}\xi_1\cdot\xi_2+2a_{13}\xi_1\cdot\xi_3+2a_{23}\xi_2\cdot\xi_3=0, \quad (45)$$

ანდა შემოკლებით

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\xi_i\xi_j=0, \quad (46)$$

სადაც $a_{ij}=a_{ji}$ (სიმეტრიულია). ამრიგად, ნებისმიერი მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი განტოლება. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში გამოსახავს მეორე რიგის წირს; ამისათვის დავუშვათ, რომ (46) განტოლებაში a_{ij} კოეფიციენტები ნებისმიერია, ოღონდ ერთდროულად ნულები არ არის (ერთდროულად ნულები რომ ყოფილიყო, მაშინ არავითარი განტოლება არ გვექნებოდა). განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) a_{11}, a_{12}, a_{22} ერთდროულად ნულები არ არის. ამ შემთხვევაში გადავიდეთ დეკარტის კოორდინატებზე; ამისათვის (45) განტოლებაში უნდა ჩავსვათ $\xi_1=x$, $\xi_2=y$, $\xi_3=1$. მივიღებთ მეორე რიგის განტოლებას, სადაც უფროს წევრთა კოეფიციენტები ერთდროულად ნულები არ არის; მაშასადამე, მივიღებთ მეორე რიგის წირის ჩვეულებრივ განტოლებას. 2) $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$. ამ შემთხვევაში (45) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$a_{13}\xi_1\xi_3+a_{23}\xi_2\xi_3+a_{33}\xi_3{}^2=0.$$

აქედან მივიღებთ ორ წრფივ განტოლებას:

$$x_3=0, \quad a_{13}\xi_1+a_{23}\xi_2+a_{33}\xi_3=0.$$

ეს განტოლებანი განსაზღვრავენ წრფეთა წყვილს, რომელსაც მეორე რიგის წირთა ოჯახს მივაკუთვნებთ, როგორც გადაგვარებულ წირს. პირდაპირ ჩანს, რომ (46) განტოლების გადამრავლება რაიმე ნულისაგან განსხვავებულ ρ მამრავლზე იწვევს a_{ij} მატრიცის გამრავლებას იმავე ρ-ზე. ახალი კოეფიციენტები იქნება ρa_{ij}, ხოლო თვით წირი, ცხადია, არ შეიცვლება. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ, თუ ორი განტოლება

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,x_ix_j=0 \quad \text{და} \quad \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}\,x_i\,x_j=0$$

ერთსა და იმავე წირს გამოსახავს, მაშინ $b_{ij}=\rho a_{ij}$. ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ეს ფაქტი პირველ შემთხვევაში უკვე

... შესაბამისი კი (წრფეთა წყვილისათვის) წრფის კოეფიციენტების თვისებიდან გამომდინარეობს.

2. წრფის თანაკვეთის წერტილები წირთან. წირისა და წრფის თანაკვეთის წერტილების ერთგვაროვანი კოორდინატები განისაზღვრება წირისა და წრფის განტოლებებისაგან შედგენილი სისტემიდან. გვექნება:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\xi_i\xi_j=0, \qquad \xi_i=\eta_i+t\zeta_i.$$

შევიტანოთ ξ_i-ს მნიშვნელობა მეორე განტოლებიდან პირველში. მივიღებთ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\eta_i+t\zeta_i)(\eta_j+\zeta_j)=0.$$

აქედან (Σ სიმბოლოს თვისების თანახმად)

$$t^2\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\,\zeta_i\,\zeta_j+2t\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j+\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\eta_j=0. \qquad (47)$$

ამრიგად, მივიღეთ კვადრატული განტოლება t-ს მიმართ. ამ განტოლების t_1, t_2 ფესვები განსაზღვრავენ თანაკვეთის წერტილების ერთგვაროვან კოორდინატებს. თუ თანაკვეთის წერტილების კოორდინატებს აღვნიშნავთ ξ_i' და ξ_i''-ით ($i=1, 2, 3$), მაშინ t_1, t_2 ფესვების ჩასმა წრფის განტოლებაში მოგვცემს:

$$\begin{aligned}\xi_i'&=\eta_i+t_1\zeta_i,\\ \xi_i''&=\eta_i+t_2\zeta_i.\end{aligned} \qquad (48)$$

§ 5. მხები წრფის ტანგენციალური კოორდინატები

როგორც ცნობილია, იმისათვის, რომ მკვეთი წრფე მხებად გადაიქცეს, მისი თანაკვეთის წერტილები წირთან უნდა შეთავსდეს ერთიმეორესთან: ეს, ცხადია, მოხდება მაშინ, როცა $t_1=t_2$. ახლა, თუ თავიდანვე (η_1, η_2, η_3) წერტილს ავიღებთ წირზე, მაშინ ეს წერტილი იქნება თანაკვეთის ერთი წერტილი წირთან. წრფის განტოლებიდან კი აშკარაა, რომ ეს წერტილი შეესაბამება $t_1=0$. რადგან მხებისათვის $t_1=t_2$, ამიტომ მივიღებთ $t_1=t_2=0$. ამრიგად, (47) კვადრატული განტოლების ორივე ფესვი ნული უნდა იყოს. ეს კი

მაშინ მოხდება, როცა განტოლების მეორე და მესამე კოეფიციენტები გაუტოლდება ნულს. გვექნება:

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\eta_j=0,$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j=0.$$

პირველი ტოლობა მხოლოდ იმას გამოსახავს, რომ (η_1, η_2, η_3) წერტილი მდებარეობს წირზე. მეორე ტოლობა კი მხები წრფის დამახასიათებელია. აქ ζ_j-ს ცვლით მივიღებთ მხები წრფის ყოველ წერტილს. ამრიგად, შემდეგი განტოლება

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j=0, \tag{49}$$

რომელიც წრფივია ζ_j-ს მიმართ, მხები წრფის განტოლებაა. აქ ζ_1, ζ_2, ζ_3 არის მხები წრფის მიმდინარე წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები, (η_1, η_2, η_3) კი შეხების წერტილია.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$u_j=\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i, \tag{50}$$

სადაც $j=1,\ 2,\ 3$. ამრიგად გვექნება

$$\sum_{j=1}^{3} u_j\,\zeta_j=0, \tag{51}$$

ანუ გაშლილი სახით

$$u_1\zeta_1+u_2\zeta_2+u_3\zeta_3=0. \tag{52}$$

აქედან ჩანს, რომ u_1, u_2, u_3 მხები წრფის ტანგენციალური კოორდინატებია. ისინი განსაზღვრულია (50) აღნიშვნით.

თუ a_{ij} მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც ჩვენ Δ-თი გვაქვს აღნიშნული, ნული არ არის, მაშინ (50) ტოლობიდან ამოიხსნება η_1, η_2, η_3 კოორდინატები და გამოისახება u_1, u_2, u_3-ის საშუალებით. ეს გამოსახვები იქნება წრფივი და ერთგვაროვანი. გვექნება

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{3} b_{ij}\,u_j.$$

თუ შევიტანთ η_i-ს მნიშვნელობას წირის განტოლებაში, მივიღებთ მეორე რიგის ერთგვაროვან განტოლებას u_1, u_2, u_3 კოორდინატების მიმართ. გვექნება

$$\sum_{i,j=1}^{3} c_{ij}\, u_i u_j = 0. \tag{53}$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება წირის განტოლება ტანგენციალურ კოორდინატებში. ამ განტოლების საშუალებით გამოვიკვლიოთ, თუ რამდენი მხების გატარება შეიძლება წირისადმი ერთი წერტილიდან. ამ წერტილში მოვათავსოთ წრფეთა კონის ცენტრი. კონის განტოლება ავიღოთ პარამეტრული სახით. ეს არის (40) განტოლება. ამოცანა ასეთ სახეს მიიღებს: მოვძებნოთ წირის ის მხები წრფეები, რომელნიც კონაში შედიან; ამისათვის (40) და (53) განტოლება ერთად უნდა განვიხილოთ, როგორც სისტემა. ეს საშუალებას მოგვცემს (53) განტოლებაში u_i-ს ნაცვლად ჩავსვათ a_i-ს მნიშვნელობა (40) განტოლებიდან. მივიღებთ $\left(\text{სადაც } t = \dfrac{\mu}{\lambda}\right)$

$$\sum_{i,j=1}^{3} c_{ij}\,(b_i + t c_i)\,(b_j + t c_j) = 0;$$

ეს განტოლება კი წარმოადგენს კვადრატულ განტოლებას t-ს მიმართ, რომელსაც, საზოგადოდ, ორი ფესვი აქვს t_1, t_2. ამ ფესვების შესაბამი წრფეები მიიღება კონის განტოლებიდან. კვადრატულ განტოლებას ორზე მეტი ფესვი რომ ჰქონოდა, განტოლება იგივური იქნებოდა, ე. ი. წირის ყველა მხები წრფე გაივლიდა ერთ მუდმივ წერტილზე. თუ ამ წერტილს აღვნიშნავთ $\overset{\circ}{\xi}_i$-თი, მაშინ გვექნება

$$\sum_{i=1}^{3} u_i\, \overset{\circ}{\xi}_i = 0.$$

შევიტანოთ აქ u_i-ს მნიშვნელობა (50) აღნიშვნიდან. მივიღებთ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, \overset{\circ}{\xi}_i\, \eta_j = 0.$$

ამრიგად, η_i აკმაყოფილებს წრფივ განტოლებას, ე. ი. წირის წერტილები მოთავსებულნი არიან ერთ წრფეზე; მაშასადამე, თუ წირი გადაგვარებული არ არის წრფეთა წყვილად, მაშინ სიბრტყის

ყოველი წერტილიდან შეგვიძლია გავატაროთ წირის ორი მხები: ნამდვილი (როცა ფესვები ნამდვილია), წარმოსახვითი (როცა ფესვები წარმოსახვითია) ან შეთავსებული (როცა ფესვები ჯერადია). ამის მიხედვით ხდება სიბრტყის წერტილთა კლასიფიკაცია წირის მიმართ:

1) წერტილს ეწოდება წირის მიმართ გარე წერტილი, თუ ამ წერტილიდან შეიძლება წირისადმი ორი ნამდვილი მხების გატარება.

2) წერტილს ეწოდება წირის მიმართ შიგა წერტილი, თუ ამ წერტილიდან ორი წარმოსახვითი მხები გატარდება (ე. ი. ფაქტიურად ამ წერტილიდან მხები ვერ გატარდება).

3) თუ წერტილიდან მხოლოდ ერთი მხები გადის, მაშინ ეს წერტილი იქნება თვით წირის წერტილი.

§ 6. პოლარი და პოლუსი

1. პოლარისა და პოლუსის განმარტება. დავუშვათ, რომ სიბრტყეზე (46) განტოლებით მოცემულია რაიმე მეორე რიგის წირი ერთგვაროვან კოორდინატებში. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ წერტილი. (53) ფორმულების მსგავსად შევადგინოთ შემდეგი გამოსახულებანი

$$v_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\,\eta_j. \tag{54}$$

აქედან მიღებული v_1, v_2, v_3 ტანგენციალური კოორდინატებით განსაზღვრულ წრფეს ეწოდება M წერტილის პოლარი აღებული მეორე რიგის წირის მიმართ. თვით M წერტილს კი ეწოდება პოლუსი თავისივე პოლარისათვის იმავე წირის მიმართ. ამრიგად, პოლარის განტოლება წარმოგვიდგება შემდეგი სახით

$$\sum_{i=1}^{3} v_i\,\zeta_i = 0,$$

ანუ (თანახმად 54-ე ფორმულებისა)

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j = 0, \tag{55}$$

სადაც η_i პოლუსის ერთგვაროვანი კოორდინატებია, ζ_j კი პოლა-

რის ერთგვაროვანი მიმდინარე კოორდინატები. ცხადია, რომ, როცა პოლუსი წირზე მდებარეობს, მაშინ (55) განტოლება გამოსახავს იმავე წრფეს, რომელსაც (49) განტოლება, ე. ი. მხებ წრფეს; მაშასადამე, წირზე მდებარე წერტილის პოლარი მხები წრფეა ამავე წერტილში და, პირუკუ, მხების პოლუსი შეხების წერტილია.

2. პოლარისა და პოლუსის ძირითადი თვისებანი. გამოვიკვლიოთ თუ რა პირობებში შეიძლება წერტილის პოლარი გადიოდეს ამავე წერტილზე; ამისათვის $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ წერტილი უნდა აკმაყოფილებდეს პოლარის (55) განტოლებას, ე. ი. ζ_i-ს ნაცვლად რომ ჩავსვათ η_i, განტოლება უნდა დაკმაყოფილდეს. მივიღებთ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\eta_j = 0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ წერტილი მდებარეობს მოცემულ მეორე რიგის წირზე. ამრიგად, პოლარი გადის თავისივე პოლუსზე მხოლოდ მაშინ, როცა პოლუსი წირზეა აღებული. ახლა დავუშვათ, რომ M წერტილის პოლარი გადის $(\overset{\circ}{\zeta}_1, \overset{\circ}{\zeta}_2, \overset{\circ}{\zeta}_3)$ წერტილზე, ე. ი. $\overset{\circ}{\zeta}_i$ აკმაყოფილებს პოლარის (55) განტოლებას. გვექნება

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\overset{\circ}{\zeta}_j = 0.$$

a_{ij} მატრიცის სიმეტრიის გამო ეს განტოლება ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\overset{\circ}{\zeta}_i\,\eta_j = 0.$$

შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნა

$$\overset{\circ}{v}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\,\overset{\circ}{\zeta}_i.$$

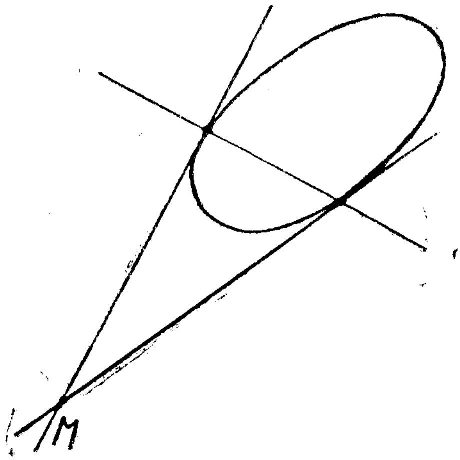
აშკარაა, რომ $\overset{\circ}{v}_j$ მიიღება (54) აღნიშვნებიდან, თუ იქ η_i-ს ნაცვლად ჩავსვამთ $\overset{\circ}{\eta}_i$-ს; მაშასადამე, $\overset{\circ}{v}_j$ გამოსახავს M_0 წერტილის პოლარის ტანგენციალურ კოორდინატებს. უკანასკნელის წინა ტოლობა კი იმას გვიჩვენებს, რომ $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ წერტილი მდებარეობს $\overset{\circ}{v}_j$ ტანგენციალური კოორდინატებით განსაზღვრულ წრფეზე.

ე. ი. M_0 წერტილის პოლარზე, ანუ M_0 წერტილის პოლარი გადის M წერტილზე. ამრიგად მივიღებთ შემდეგ დებულებებს:

დებულება № 1. თუ M წერტილის პოლარი გადის M_0 წერტილზე, მაშინ M_0 წერტილის პოლარიც გადის M წერტილზე და, პირუკუ, თუ v წრფის პოლუსი მდებარეობს v_0 წრფეზე, მაშინ v_0 წრფის პოლუსიც მოთავსდება v წრფეზე.

ამ დებულებიდან ადვილად მიიღება შემდეგი დებულება.

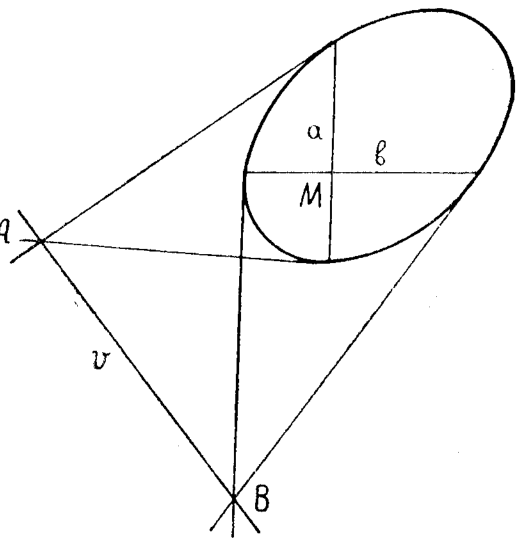
დებულება № 2. ერთ წრფეზე დალაგებული წერტილების პოლარები გადიან ერთ წერტილზე, მოცემული წრფის პოლუსზე და, პირუკუ, ერთ წერტილზე გამავალი წრფეების პოლუსები მოთავსდებიან ერთ წრფეზე, მოცემული წერტილის პოლარზე. მართლაც, თუ წერტილები მდებარეობენ v_0 წრფეზე, მაშინ მათმა პოლარებმა, № 1 დებულების თანახმად, უნდა გაიარონ მოცემული წრფის, ე. ი. v_0 წრფის პოლუსზე. ასევე, თუ წრფეები გადიან M_0 წერტილზე, მაშინ მათი პოლუსები, № 1 დებულების თანახმად, უნდა მოთავსდნენ მოცემული წერტილის, ე. ი. M_0 წერტილის პოლარზე (რ. დ. გ).



ნახ. 138.

3. პოლარისა და პოლუსის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ M წერტილი წირის გარეთ და გავატაროთ ამ წერტილიდან წირის ორი მხები. შეხების A, B წერტილები შევაერთოთ წრფით (ნახ. 138). დავამტკიცებთ, რომ AB წრფე იქნება M წერტილის პოლარი. მართლაც, AB წრფეზე დალაგებული წერტილების პოლარები გადიან ამ წრფის პოლუსზე. რადგან A და B წერტილები ამ წრფეზე მდებარეობენ, ამიტომ მათი პოლარები გაივლიან პოლუსზე. მაგრამ A და B წერტილების პოლარები წირის მხები წრფეებია ამ წერტილებში; მაშასადამე, ეს მხები წრფეები გაივლიან AB წრფის პოლუსზე, ე. ი. AB წრფის პოლუსი

თანაკვეთის წერტილი არის მოცემული M წერტილი. ამრიგად, AB წრფის პოლუსი იქნება M წერტილი (რ. დ. გ.). აქ მიღებული შედეგი საშუალებას იძლევა ავაგოთ პოლარი, თუ წერტილი წირის გარეთ არის მოცემული და, პირუკუ, ავაგოთ წრფის პოლუსი, თუ ეს წრფე კვეთს მეორე რიგის წირს. ნახაზზე მოცემული სქემა გამოდგება ორივე აგებისათვის, ოღონდ სქემის აგება უნდა ჩატარდეს სხვადასხვა მიმდევრობით. ახლა, დავუშვათ, რომ M წერტილი წირის შიგა წერტილია. გავატაროთ ამ წერტილზე წირის ორი ნებისმიერი თანამკვეთი წრფე. აღვნიშნოთ ეს წრფეები a-თი და b-თი. თითოეული მათგანისათვის ავაგოთ პოლუსი 138-ე ნახაზზე მოცემული სქემის მიხედვით. მივიღებთ ორ A და B წერტილებს (ორ პოლუსს). შევაერთოთ ეს წერტილები წრფით (ნახ. 139). დავამტკიცებთ, რომ AB წრფე იქნება M წერტილის



ნახ. 139.

პოლარი. მართლაც, M წერტილზე გამავალი წრფეების პოლუსები მოთავსდებიან M წერტილის პოლარზე. რადგან a და b წრფეები გადიან M წერტილზე, ამიტომ მათი პოლუსებიც მოთავსდებიან M წერტილის პოლარზე, ე. ი. A და B წერტილები მოთავსდებიან M წერტილის პოლარზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ AB წრფე იქნე-

ბა M წერტილის პოლარი (რ. დ. გ.). ეს შედეგი საშუალებას იძლევა ავაგოთ წირის შიგა წერტილის პოლარი და იმ წრფის პოლუსი, რომელიც წირს არ კვეთს. ორივე ეს აგება მოხდება 139-ე ნახაზზე ნაჩვენები სქემის მიხედვით, ოღონდ ეს სქემა მეორე შემთხვევაში შედგება პირველი შემთხვევის საწინააღმდეგო მიმდევრობით, სახელდობრ, დავიწყებთ v წრფიდან. ავიღებთ მასზე ნებისმიერ A და B წერტილებს. ავაგებთ ამ წერტილების a და b პოლარებს. ამ პოლარების თანაკვეთის M წერტილი იქნება v წრფის პოლუსი.

4. ავტოპოლარული სამკუთხედი. სამკუთხედს ეწოდება ავტოპოლარული მეორე რიგის წირის მიმართ, თუ ამ სამკუთხედის გვერდები მათი მოპირდაპირე წვეროების პოლარებია შესაბამად და, პირუკუ, წვეროების პოლუსები მათი მოპირდაპირე გვერდების პოლუსებია. მოცემული მეორე რიგის წირისათვის არსებობს უამრავი ავტოპოლარული სამკუთხედი. მართლაც, ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი A წერტილი; განვსაზღვროთ ამ წერტილის პოლარი, აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი a-თი. ავიღოთ ამ წრფეზე ნებისმიერი B წერტილი; განვსაზღვროთ ამ წერტილის პოლარი. აღვნიშნოთ იგი b-თი. ეს წრფე გაივლის A წერტილზე (რადგან A წერტილის პოლარი გადის B წერტილზე). ამ წრფის თანაკვეთის წერტილი a წრფესთან აღვნიშნოთ C-თი. ამ წერტილის პოლარი გაივლის a და b წრფეების პოლუსებზე (თანახმად № 2 დებულებისა), ე. ი. A და B წერტილებზე; მაშასადამე, AB წრფე იქნება C წერტილის პოლარი. ამრიგად ასე აგებული ABC სამკუთხედი ავტოპოლარულია.

§ 7. პოლარისა და პოლუსის ზოგიერთი გამოყენება

განვიხილოთ წირის დიამეტრი. როგორც ვიცით, დიამეტრის ბოლო წერტილებში (დიამეტრის თანაკვეთის წერტილები წირთან) მხები წრფეები ურთიერთპარალელურია და აქვთ ამ დიამეტრის შეუღლებული მიმართულება. ამ მხებთა თანაკვეთის წერტილი იქნება უსასრულეთში, განსახილავი დიამეტრის შეუღლებული მიმართულებით. მეორე მხრივ, მხებთა თანაკვეთის წერტილი (სქემის თანახმად) დიამეტრის პოლუსია; მაშასადამე, დიამეტრის პოლუსი უსასრულოდ დაშორებული წერტილია ამ დიამეტრის შეუღლებული მიმართულებით. თუ წირი ცენტრიანია, მაშინ შეგვიძლია ცენტრზე გავატაროთ ნებისმიერი ორი დიამეტრი. მათი პოლუსები იქნება უსასრულოდ დაშორებული წერტილები. მეორე მხრივ ცენტრის პოლარმაც უნდა გაიაროს დიამეტრების პოლუსებზე (თანახმად

№ 2 დებულებისა). ამრიგად, ცენტრის პოლარმა უნდა გაიაროს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებზე. ასეთი წრფე კი სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წრფეა; მაშასადამე, მეორე რიგის წირის ცენტრის პოლარი არის უსასრულოდ დაშორებული წრფე.

ახლა განვიხილოთ აღებული დიამეტრის შეუღლებული მიმართულება. როგორც აღნიშნული იყო, ეს მიმართულება გაივლის დიამეტრის პოლუსზე, (რომელიც უსასრულოდ დაშორებული წერტილია); მაშასადამე, დიამეტრის შეუღლებული მიმართულება წარმოგვიდგება როგორც ისეთი მიმართულება, რომელიც გადის ამ დიამეტრის პოლუსზე. თუ წირი ცენტრიანია, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ შეუღლებული დიამეტრები. რადგან პირველი დიამეტრის მიმართულება შეუღლებულია მეორე დიამეტრთან, ამიტომ პირველი დიამეტრი გაივლის მეორე დიამეტრის პოლუსზე და, პირუკუ, მეორე დიამეტრი გაივლის პირველის პოლუსზე. ამრიგად, ცენტრიანი წირისათვის შეუღლებული დიამეტრები წარმოგვიდგება როგორც ისეთი დიამეტრები, რომელნიც ერთიმეორის პოლუსებზე გადიან.

ახლა განვიხილოთ თავისი თავისადმი შეუღლებული დიამეტრი, ე. ი. ისეთი დიამეტრი, რომელიც გადის თავისივე პოლუსზე. მეორე მხრივ, ვიცით, რომ მხოლოდ წირის მხები გადის თავისივე პოლუსზე (შეხების წერტილზე). ეს წერტილი, როგორც დიამეტრის პოლუსი უსასრულეთშია. ამრიგად, თავისი თავისადმი შეუღლებული დიამეტრი წარმოგვიდგება როგორც წირის მხები უსასრულეთში, ე. ი. როგორც ასიმპტოტი (რაც ადრეც იყო ცნობილი).

§ 8. მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. თანაკვეთა წრფესთან

1. მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. იმისათვის, რომ მივიღოთ მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში, საჭიროა ზედაპირის ზოგად განტოლებაში (იხ. IX თავის მე-10 განტ.) ჩავსვათ დეკარტის კოორდინატების, ე. ი. x, y, z-ის, ნაცვლად. მათი მნიშვნელობანი (15) ფორმულებიდან. გვექნება (ξ_4^2-ზე გამრავლების შემდეგ)

$$a_{11}\xi_1^2+a_{22}\xi_2^2+a_{33}\xi_3^2+a_{44}\xi_4^2+2a_{12}\xi_1\xi_2+2a_{13}\xi_1\xi_3+$$
$$+2a_{14}\xi_1\xi_4+2a_{23}\xi_2\xi_3+2a_{24}\xi_2\xi_4+2a_{34}\xi_3\xi_4=0. \qquad (56)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0, \qquad (57)$$

სადაც $a_{ij}=a_{ji}$. ამრიგად, მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი განტოლება. ისეთივე მსჯელობით, როგორიც ჩატარებული იყო წრის შემთხვევაში, დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის ერთგვაროვანი განტოლება

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0,$$

სადაც a_{ij} კოეფიციენტები ნებისმიერია, ოღონდ ერთდროულად ნულები არ არის, გამოსახავს მეორე რიგის ზედაპირს (სიბრტყეთა წყვილები, სასრულეთისა და უსასრულეთის, მიეთვლება მეორე რიგის ზედაპირთა ოჯახს). (56) განტოლებაში დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლა მოხდება (16) ფორმულების მიხედვით, ე. ი. (56) განტოლებაში ერთგვაროვანი კოორდინატები შეიცვლება შემდეგნაირად:

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = y, \quad \xi_3 = t, \quad \xi_4 = 1.$$

2. მეორე რიგის ზედაპირის თანაკვეთა წრფესთან. ცხადია, რომ ზედაპირისა და წრფის თანაკვეთის წერტილები დააკმაყოფილებს ზედაპირისა და წრფის განტოლებებს ერთდროულად. გვექნება:

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0.$$

$$\xi_i = \eta_i + t\zeta_i.$$

მეორე განტოლებიდან ξ_i-ს მნიშვნელობის ჩასმა პირველ განტოლებაში მოგვცემს (47-ე განტოლების მსგავსად)

$$t^2 \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\zeta_i\,\zeta_j + 2t \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j + \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\eta_i\eta_j = 0. \qquad (58)$$

ამ კვადრატული განტოლების t_1, t_2 ფესვები განსაზღვრავენ თანაკვეთის წერტილებს. თუ ამ წერტილების ერთგვაროვან კოორდი-

ნატებს აღვნიშნავთ ξ_i', ξ_i''-ით, მივიღებთ (48-ე ფორმულების მსგავსად):

$$\begin{aligned} \xi_i' &= \eta_i + t_1\zeta_i, \\ \xi_i'' &= \eta_i + t_2\zeta_i, \end{aligned} \tag{59}$$

სადაც $i = 1, 2, 3, 4.$

§ 9. მხები სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატები

1. მხები სიბრტყის განტოლება. ზედაპირის მხებ წრფეს ორი შეთავსებული თანაკვეთის წერტილი აქვს ზედაპირთან. ამრიგად, აღებული წრფე რომ მხები იყოს, საჭიროა (58) განტოლებას ჯერადი ფესვი ჰქონდეს, ე. ი. $t_1 = t_2$. თუ $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ წერტილს თავიდანვე ავიღებთ ზედაპირზე, მაშინ ეს წერტილი იქნება ერთ-ერთი თანაკვეთის წერტილი. წრფის განტოლებიდან კი პირდაპირ ჩანს, რომ M წერტილი შეესაბამება $t = 0$-ს. ამრიგად (58) განტოლების ერთ-ერთი ფესვი ნული უნდა იყოს. დავუშვათ, რომ ეს ფესვი არის t_1; მაშასადამე, $t_1 = 0$. რადგან მხები წრფისათვის $t_1 = t_2$, ამიტომ $t_1 = t_2 = 0$. ამრიგად, იმისათვის, რომ M წერტილზე გამავალი წრფე იყოს ზედაპირის მხები, საჭიროა (58) განტოლების ორივე ფესვი იყოს ნული. ეს კი მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა ამ განტოლების მეორე და მესამე კოეფიციენტი ნულია. გვექნება:

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\eta_i\,\eta_j = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j = 0.$$

აქედან პირველი ტოლობა მხოლოდ იმას გვიჩვენებს, რომ η წერტილი მდებარეობს ზედაპირზე (რაც ისედაც ცნობილია). საინტერესოა მეორე განტოლება, ე. ი.

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j = 0. \tag{60}$$

ეს არის ერთადერთი განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს ზედაპირის η_i წერტილში მხები წრფის მიმდინარე ζ წერტილი. რადგან η_i მუდმივებია, ამიტომ (60) განტოლება იქნება წრფივი და ერთგვაროვანი ζ_i-ს მიმართ; მაშასადამე, (60) განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეს, რომელსაც, როგორც ვიცით, მხები სიბრტყე

ეწოდება. ამრიგად (60) განტოლება მხები სიბრტყის განტოლებაა ერთგვაროვან კოორდინატებში, სადაც η_i არის შეხების წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები, ζ_i—მიმდინარე ერთგვაროვანი კოორდინატები. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$u_j = \sum_{i=1}^{4} a_{ij}\, \eta_i. \tag{61}$$

ამ აღნიშვნის მიხედვით (60) განტოლება ასე წარმოსდგება

$$\sum_{j=1}^{4} u_j\, \zeta_j = 0. \tag{62}$$

აქედან ჩანს, რომ u_j ($j=1,\ 2,\ 3,\ 4$) წარმოადგენს მხები სიბრტყის ტანგენციალურ კოორდინატებს.

2. მეორე რიგის ზედაპირის ტანგენციალური განტოლება. თუ (a_{ij}) მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც Δ-თი გვაქვს აღნიშნული, ნული არ არის, ე. ი. თუ ზედაპირი განსაკუთრებული არ არის, მაშინ (61) სისტემიდან ამოიხსნება η_i. იგი u_j-ს მიმართ წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციებით გამოისახება. გვექნება

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{4} b_{ij}\, u_j.$$

ახლა, თუ η_i-ს მნიშვნელობას ჩავსვამთ ზედაპირის განტოლებაში, მივიღებთ მეორე რიგის ერთგვაროვან განტოლებას ტანგენციალურ კოორდინატებში

$$\sum_{i,j=1}^{4} c_{ij}\, u_i\, u_j = 0. \tag{63}$$

ამას უწოდებენ მეორე რიგის ზედაპირის განტოლებას ტანგენციალურ კოორდინატებში.

§ 10. პოლარი და პოლუსი (მეორე რიგის ზედაპირის მიმართ)

1. წერტილის პოლარი ზედაპირის მიმართ. განვიხილოთ მეორე რიგის ზედაპირი მოცემული (57) განტოლებით. ავიღოთ სივრცეში ნებისმიერი $M(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4)$ წერტილი და შევადგინოთ შემდეგი გამოსახულება,

$$v_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, \eta_j. \tag{64}$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი გამოსახულება ისეთივეა, როგორც (61) ფორმულაში მხები სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატებისათვის. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ (64) ფორმულაში η_j სივრცის ნებისმიერი წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატებია, (61) ფორმულაში კი შეხების წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები. v_1, v_2, v_3, v_4 ტანგენციალური კოორდინატებით განსაზღვრულ სიბრტყეს ეწოდება M წერტილის პოლარი მოცემული მეორე რიგის ზედაპირის მიმართ. თვით M წერტილს ეწოდება პოლუსი პოლარისათვის. ამრიგად. პოლარი განისაზღვრება შემდეგი განტოლებით

$$\sum_{i=1}^{4} v_i \zeta_i = 0,$$

რაც, თანახმად (64) აღნიშვნისა, ასეთ სახეს მიიღებს

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} \eta_i \zeta_j = 0. \qquad (65)$$

ეს განტოლება გარეგნულად ისეთივეა, როგორიც მხები სიბრტყის განტოლება, ოღონდ აქ η_i ნებისმიერია და არა უსათუოდ ზედაპირის წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები. ცხადია, რომ, თუ M წერტილს ავიღებთ ზედაპირზე, მაშინ (65) განტოლება პირდაპირ მხები სიბრტყის განტოლებად გადაიქცევა. ამრიგად, ზედაპირზე მდებარე M წერტილის პოლარი არის ზედაპირის მხები სიბრტყე ამავე წერტილში. შეხების წერტილი იქნება მხები სიბრტყის პოლუსი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ წერტილის პოლარი სიბრტყე გადის იმავე წერტილზე მხოლოდ მაშინ, როცა წერტილი მდებარეობს ზედაპირზე. მართლაც, თუ პოლარი სიბრტყე გადის M წერტილზე, მაშინ მისი η_i კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ პოლარის (65) განტოლებას, ე. ი. თუ ამ განტოლებაში ζ_i კოორდინატებს შევცვლით η_i კოორდინატებით, მაშინ განტოლება დაკმაყოფილდება. გვექნება

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} \eta_i \eta_j = 0.$$

ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ წერტილი მდებარეობს ზედაპირზე.

2. პოლარისა და პოლუსის ძირითადი თვისებანი. განვიხილოთ M წერტილის v პოლარი და დავუშვათ, რომ ეს სიბრტყე გადის v_0 სიბრტყის M_0 პოლუსზე. ეს პირობა ასე ჩაიწერება (ვგულისხმობთ, რომ M_0 წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატებია: $\overset{\circ}{\eta}_i$)

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\eta_i\,\overset{\circ}{\eta}_j=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\overset{\circ}{\eta}_j\,\eta_i=0.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\overset{\circ}{v}_i=\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\,\overset{\circ}{\eta}_j$$

და დავუკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ $\overset{\circ}{v}_i$ არის M_0 წერტილის პოლარის, ე. ი. v_0 სიბრტყის ტანგენციალური კოორდინატები. $\overset{\circ}{v}_i$-ის მნიშვნელობის ჩასმა წინა ტოლობაში მოგვცემს

$$\sum_{i=1}^{4} \overset{\circ}{v}_i\,\eta_i=0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ M წერტილი მდებარეობს v_0 სიბრტყეზე, ანუ v_0 სიბრტყე გადის M წერტილზე. ამრიგად მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

დებულება № 3. თუ v სიბრტყე გადის v_0 სიბრტყის პოლუსზე, მაშინ v_0 სიბრტყეც გაივლის v სიბრტყის პოლუსზე და, პირუკუ.

ახლა განვიხილოთ ერთ სიბრტყეზე დალაგებული წერტილების პოლარები. თანახმად წინა დებულებისა, ასეთ წერტილთა პოლარებმა უნდა გაიაროს მოცემული სიბრტყის პოლუსზე და, მაშასადამე, ერთ წერტილზე. ასევე, თუ სიბრტყეები გადიან ერთ წერტილზე, მაშინ მათი პოლუსები უნდა მოთავსდნენ მოცემული წერტილის პოლარ სიბრტყეზე. ამრიგად მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

დებულება № 4. ერთ წერტილზე გამავალი სიბრტყეების პოლუსები მოთავსდებიან ამ წერტილის პოლარ სიბრტყეზე და, პირუკუ.

3. პოლარულად შეუღლებული წრფეები მეორე რიგის ზედაპირის მიმართ. განვიხილოთ რაიმე წრფე, მასზე გავატაროთ ორი

სიბრტყე. წრფეზე მდებარე წერტილების პოლარები გაივლიან აღებული ორი სიბრტყის (როგორც მათი საერთო წერტილების პოლარები) პოლუსებზე, ე. ი. ორ წერტილზე (ორი სიბრტყე გვქონდა აღებული; თვითეულს ექნება თითო პოლუსი). ამრიგად, წრფეზე მდებარე წერტილების პოლარი სიბრტყეები გადიან ერთ წრფეზე. ამ წრფეს ეწოდება აღებული წრფის პოლარულად შეუღლებული წრფე. ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ ერთი წრფის წერტილთა პოლარი სიბრტყეები გადიან მეორე წრფეზე, მაშინ მეორე წრფის წერტილთა პოლარი სიბრტყეებიც გაივლიან პირველ წრფეზე, ე. ი. თუ ერთი წრფე პოლარულად შეუღლებულია მეორესთან, მაშინ მეორე წრფეც პოლარულად შეუღლებული იქნება პირველთან.

ახლა დავუშვათ, რომ a წრფეზე გადის α სიბრტყე. ამ სიბრტყის წერტილთა პოლარები (თანახმად № 4 დებულებისა) გაივლიან ამ სიბრტყის პოლუსზე. კერძოდ a წრფის წერტილთა პოლარი სიბრტყეებიც გაივლიან α სიბრტყის პოლუსზე. რადგან a წრფის წერტილთა პოლარი სიბრტყეები გადიან ამ წრფის პოლარულად შეუღლებულ წრფეზე, ამიტომ a წრფის პოლარულად შეუღლებული წრფე გაივლის α სიბრტყის პოლუსზე. ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ დებულებას

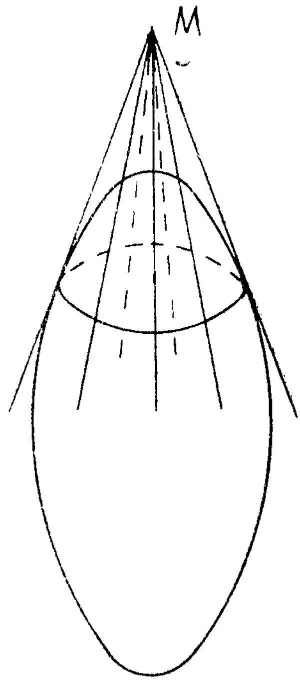
დებულება № 5. *თუ a წრფე მდებარეობს α სიბრტყეზე, მაშინ ამ წრფის პოლარულად შეუღლებული წრფე გაივლის α სიბრტყის პოლუსზე და, პირუკუ.*

ამ დებულების გამოყენებით ადვილად მტკიცდება შემდეგი დებულება

დებულება № 6. *თუ წრფეები გადიან ერთ მოცემულ წერტილზე, მაშინ მათი პოლარულად შეუღლებული წრფეები მოთავსდებიან მოცემული წერტილის პოლარ სიბრტყეზე და, პირუკუ.*

4. პოლარისა და პოლუსის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ M წერტილი ზედაპირის გარეთ (ე. ი. სივრცის იმ ნაწილში, საიდანაც შეიძლება ზედაპირისადმი ნამდვილი მხები სიბრტყეების გატარება). ამ წერტილიდან გავატაროთ ზედაპირისადმი სამი მხები სიბრტყე. ეს სიბრტყეები არ შეიძლება ერთ წრფეზე გადიოდნენ; ამიტომ მათი შეხების სამი წერტილი (უსათუოდ სამი იქნება, რადგან თვითეულ მხებ სიბრტყეს თავისი შეხების წერტილი აქვს) ერთ წრფეზე არ მოთავსდება. ეს სამი წერტილი განსაზღვრავს სიბრტყეს. რადგან შეხების წერტილები

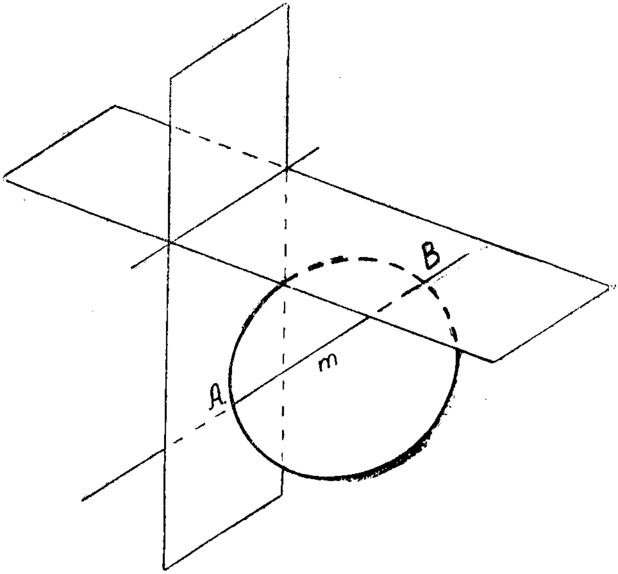
ალებული მხები სიბრტყეების პოლუსებია შესაბამად, ამიტომ ამ წერტილებით განსაზღვრული სიბრტყე პოლარი სიბრტყე იქნება მოცემული წერტილისათვის. მოცემულ წერტილზე გამავალი მხები წრფეები, როგორც სათანადო მხებ სიბრტყეებზე მდებარე, შეეხებიან ზედაპირს მოცემული წერტილის პოლარისა და ზედაპირის თანაკვეთის წირზე. რომელიც, ცხადია, მეორე რიგის წირი იქნება (სიბრტყისა და ზედაპირის თანაკვეთის წირი). ამრიგად M წერტილიდან გამავალი მხები წრფეები შეადგენენ მეორე რიგის კონუსს. კონუსის წვერო იქნება ფუძის პოლუსი (ნახ. 140). როცა M წერტილი მოთავსებულია ზედაპირის შიგნით, მაშინ მასზე უნდა გავატაროთ რაიმე სამი სიბრტყე, რომელნიც ერთ წრფეზე არ გადიან. განვსაზღვროთ თვითეული სიბრტყის პოლუსი 140-ე სქემას მიხედვით. ამ სამი პოლუსით განსაზღვრული სიბრტყე იქნება M წერტილის პოლარი.



ნახ. 140.

ახლა განვიხილოთ რაიმე m წრფე, რომელიც ზედაპირს კვეთს ორ წერტილში. აღვნიშნოთ ეს წერტილები A-თი და B-თი. გავატაროთ ამ წერტილებში ზედაპირის მხები სიბრტყეები. ამ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე იქნება m წრფის პოლარულად შეუღლებული წრფე. მართლაც, A და B წერტილებში გავლებული მხები სიბრტყეები პოლარი სიბრტყეებია ამ წერტილებისათვის; m წრფის წერტილთა პოლარი სიბრტყეები კი უნდა გადიოდეს ამ წრფისადმი პოლარულად შეუღლებულ წრფეზე; მაშასადამე, A და B წერტილების პოლარი სიბრტყეების, ე. ი. მხები სიბრტყეების თანაკვეთის წრფე იქნება m წრფესთან პოლარულად შეუღლებული წრფე (ნახ. 141). ეს ნახაზი საშუალებას იძლევა ავაგოთ პოლარულად შეუღლებული წრფე იმ შემთხვევაშიაც, როცა მოცემული m წრფე არ თანაიკვეთება ზედაპირთან. ამ შემთხვევაში m წრფეზე უნდა გავატაროთ ორი მხები სიბრტყე. მათი შეხების წერტილების შემაერთებელი წრფე იქნება საძიებელი წრფე.

ნ. პოლარობა და პოლუსის ზოგიერთი გამოყენება. განვიხილოთ მეორე რიგის ზედაპირის დიამეტრის ბოლო წერტილები. ამ წერტილებზე გამავალი მხები სიბრტყეები თანაიკვეთება დიამეტრის პოლარულად შეუღლებულ წრფეზე. მეორე მხრივ ეს მხები



ნახ. 141.

სიბრტყეები პარალელურია; მაშასადამე, თანაიკვეთება უსასრულეთში. ამრიგად, მეორე რიგის დიამეტრის პოლარულად შეუღლებული წრფე უსასრულოდ დაშორებული წრფეა. ცენტრიანი ზედაპირისათვის არსებობს დიამეტრთა ძნული. მათი პოლარულად შეუღლებული წრფეები მოთავსდებიან ცენტრის პოლარ სიბრტყეზე. მეორე მხრივ დიამეტრთა პოლარულად შეუღლებული წრფეები მდებარეობენ სივრცის უსასრულოდ დაშორებულ სიბრტყეზე, ამიტომ მეორე რიგის ზედაპირის ცენტრის პოლარი არის უსასრულოდ დაშორებული სიბრტყე. ახლა განვიხილოთ დიამეტრული სიბრტყე. რადგან ეს სიბრტყე გადის ცენტრზე, ამიტომ მისი პოლუსი მოთავსდება ცენტრის პოლარ სიბრტყეზე, ე. ი. უსასრულოდ დაშორებულ სიბრტყეზე. ამრიგად, დიამეტრული სიბრტყის პოლუსი მდებარეობს უსასრულეთში. ადვილი მისახვედრია, რომ შექცეული დებულებაც მართებული იქნება, ე. ი. უსასრულოდ დაშორებული წერტილის პოლარი სიბრტყე დიამეტრული სიბრტყეა.

თ ა ვ ი XI

მეორე რიგის წირთა და ზედაპირთა პროექციული თეორიის ელემენტები

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

განვიხილოთ სიბრტყეზე Oxy კოორდინატთა მართკუთხა სისტემა და რაიმე Γ ნაკვთი, რომელსაც სავსებით გარკვეული მდებარეობა აქვს აღებული სისტემის მიმართ. ამ ნაკვთზე ავიღოთ რაიმე M წერტილი. ამავე ნაკვთზე დავამაგროთ რაიმე $O'x'y'$ ორთოგონალური სისტემა. ამ სისტემას გარკვეული მდებარეობა ექნება ძველის მიმართ. თუ დავუშვებთ, რომ ახალ სისტემას ისეთივე მოგეზულობა აქვს, როგორიც ძველს, მაშინ ახალი სისტემა მიიღება ძველისაგან მოძრაობით.

ახლა ავამოძრაოთ ნაკვთი მასზე დამაგრებული ახალი სისტემიანად ისე, რომ ეს სისტემა შეუთავსდეს ძველ სისტემას. ამით Γ ნაკვთი დაიკავებს ძველის მიმართ ისეთივე მდებარეობას, როგორიც მას ჰქონდა ახალი სისტემის მიმართ. აღვნიშნოთ ეს ახალი ნაკვთი (Γ ნაკვთის მოძრაობით მიღებული) Γ'-ით. ამრიგად Oxy სისტემის მიმართ გვექნება ორი ერთიმეორის კონგრუენტული ნაკვთი Γ და Γ'. ცხადია, რომ Γ ნაკვთზე აღებული M წერტილიც, ზემოაღნიშნული მოძრაობის შემდეგ დაიკავებს ახალ მდებარეობას. აღვნიშნოთ ეს წერტილი M'-ით. ცხადია, აგრეთვე, რომ M' წერტილს ექნება ისეთივე მდებარეობა Oxy სისტემის მიმართ, როგორიც M წერტილს ჰქონდა $O'x'y'$ სისტემის მიმართ.

თუ $M=(x,\ y)$ ძველ სისტემაში,
$M=(x',\ y')$ ახალ სისტემაში,

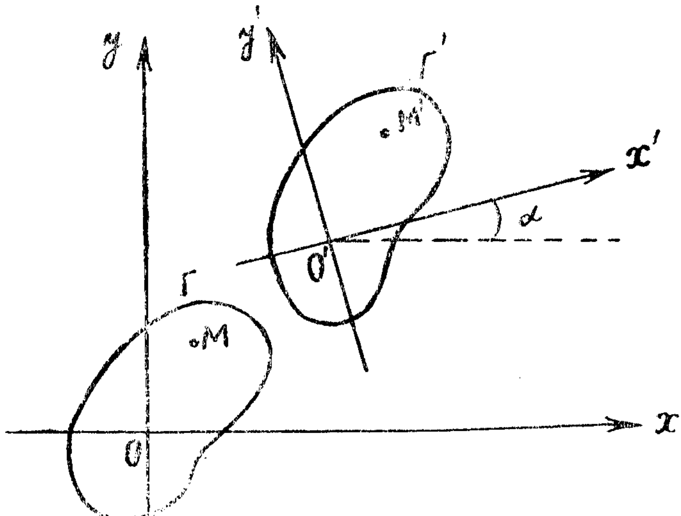
მაშინ

$M'=(x',\ y')$ ძველ სისტემაში.

რადგან ძველი და ახალი სისტემები ერთიმეორის მოძრაობით მიიღება, ამიტომ ისინი დაკავშირებული იქნება სისტემის მოძრაობის ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + a, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \end{aligned} \tag{1}$$

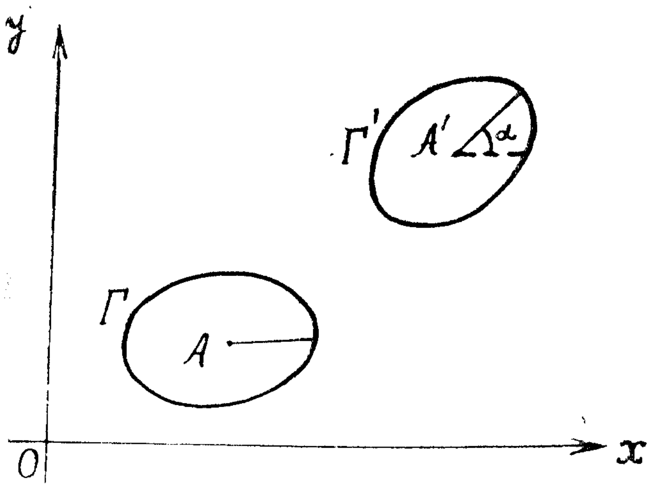
სადაც a არის x და x' ღერძებს შორის კუთხე, a და b კი გარკვეული მუდმივები (ნახ. 142). ცხადია, რომ, როცა M წერტილი აღწერს Γ ნაკვთს, მაშინ M' წერტილი აღწერს Γ' ნაკვთს; მაშასადამე, (1) გარდაქმნის ფორმულები აკავშირებს ერთსა და იმავე Oxy სისტემაში აღებულ ორ კონგრუენტულ ნაკვთს. ამ ფორმუ-



ნახ. 142.

ლებით ხდება Γ ნაკვთის გადასახვა Γ' ნაკვთში, ამიტომ მათ ეწოდება ნაკვთის ორთოგონალური გადასახვის ფორმულები. თუ ვცვლით α და a, b-ს, მივიღებთ Γ' ნაკვთის ყოველ მდებარეობას სიბრტყეზე. ამიტომ (1) ფორმულები ახორციელებენ Γ ნაკვთის ყოველგვარ მოძრაობას სიბრტყეზე და მათ ამ შემთხვევაში ნაკვთის მოძრაობის ფორმულები ეწოდება. ნაკვთის ახალი მდებარეობის მიღება მოხდება ნაკვთის პარალელური გადატანით A წერტილიდან A' წერტილში და მისი მობრუნებით სათანადო კუთხეზე (ნახ. 143). კერძოდ, შეგვიძლია Γ ნაკვთის ქვეშ ვიგულისხმოთ მთელი სიბრტყე, ე. ი. M წერტილს მივაღებინოთ სიბრტყის ყოველი წერტილის მდებარეობა; მაშინ M' წერტილიც მიიღებს იმავე სიბრტყის ყოველი წერტილის მდებარეობას, ოღონდ სხვა მიმდევრობით. ამრიგად, სიბრტყე გადაისახება თავის თავში. ამ შემთხვევაში (1) ფორმულებს ეწოდება სიბრტყის ორთოგონალური გარდაქმნები თავის თავში ან, უბრალოდ, მოძრაობანი სიბრტყეზე. ახლა განვიხილოთ

Γ ნაკვთის ზოგადი ცვლა—მოძრაობა და დეფორმაცია—ერთად. ასე მიღებული ახალი ნაკვთი აღვნიშნოთ Γ''-ით. იგულისხმება, რომ Γ ნაკვთის ცვლის პროცესი საშუალებას მოგვცემს Γ ნაკვთის ნებისმიერი M წერტილიდან მივიღოთ Γ'' ნაკვთის შესაბამი M'



ნახ. 143.

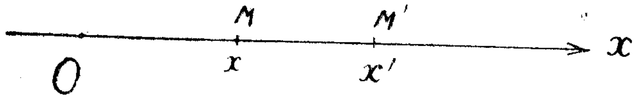
წერტილი ანალიზურად, ე. ი. M წერტილის კოორდინატებსა და M' წერტილის კოორდინატებს შორის დავამყაროდ გარკვეული ფუნქციონალური დამოკიდებულება:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x,\ y), \\ y' &= \psi(x,\ y), \end{aligned} \tag{2}$$

სადაც φ და ψ რაიმე (მაგრამ გარკვეული) ფუნქციებია თავიანთი არგუმენტებისა (ე. ი. x-ისა და y-ისა). ამ ფორმულებით Γ ნაკვთი გადაისახება Γ'' ნაკვთში. ამიტომ, მათ Γ ნაკვთის გარდაქმნის ფორმულები ეწოდება.

φ და ψ ფუნქციების სტრუქტურა (აღნაგობა) დამოკიდებულია Γ'' ნაკვთის ფორმაზე და თვით იმ პროცესის ბუნებაზე, რომლითაც მიიღება Γ ნაკვთიდან Γ'' ნაკვთი. პირუკუ, φ და ψ ფუნქციების სტრუქტურაზე თავის მხრივ დამოკიდებულია Γ'' ნაკვთის ფორმა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მოცემული φ და ψ ფუნქციები გადასახავენ მოცემულ Γ ნაკვთს გარკვეულ Γ'' ნაკვთში ისე, რომ Γ'' ნაკვთი დამოკიდებულია Γ ნაკვთზე და φ და ψ ფუნქციების სტრუქტურაზე, ე. ი. გარდაქმნის ხასიათზე. შესაძლებელია Γ'' ნაკვ-

თად ავიღოთ მთლიანად სიბრტყე (თუკი ამის საშუალებას მოგვცემს φ და ψ ფუნქციები); მაშინ სიბრტყის გადასახვა მოხდება მასზევე მოთავსებულ Γ' ნაკვთში. შესაძლებელია Γ' ნაკვთმაც, მოიცვას (ეს დამოკიდებულია φ და ψ ფუნქციებზე) მთელი სიბრტყე. ამ შემთხვევაში სიბრტყე გადაისახება თავის თავში. ასეთია, მაგალითად, (1) გარდაქმნები. ამრიგად, ნებისმიერი გარდაქმნა, (2) სახისა, სადაც x, y და x', y' წარმოადგენენ სიბრტყის M და



ნახ. 144.

M' წერტილების დეკარტის კოორდინატებს ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემის მიმართ, განიხილება როგორც სიბრტყის გარდაქმნა. M წერტილით აღწერილი ნებისმიერი Γ ნაკვთი გადაისახება ერთ გარკვეულ Γ' ნაკვთში, ე. ი. ეს ფორმულები განახორციელებენ აგრეთვე სიბრტყეზე მდებარე ნაკვთების გარდაქმნას. გარდაქმნის ხასიათი, ცხადია, დამოკიდებული იქნება φ და ψ ფუნქციებზე და თვით Γ ნაკვთზე.

ჩვენ აქ მსჯელობა ჩავატარეთ მხოლოდ სიბრტყეზე მოთავსებული ნაკვთების გარდაქმნაზე. მაგრამ, ანალოგიურად შეიძლება განიმარტოს გარდაქმნები წრფეზე და სივრცეში. Ox წრფეზე გარდაქმნას ექნება შემდეგი სახე

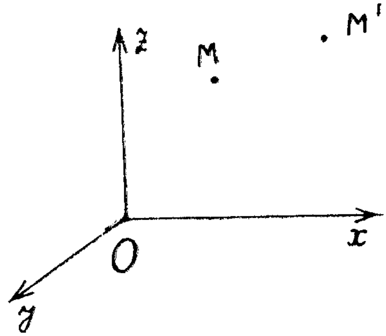
$$x' = \varphi(x), \tag{3}$$

სადაც x და x' წრფის M და M' წერტილების კოორდინატებია (ნახ. 144). გარდაქმნის ბუნება დამოკიდებულია φ ფუნქციაზე. შესაძლებელია ამ გარდაქმნით Ox ღერძის ყოველი წერტილი გადაისახოს იმავე ღერძის რაიმე წერტილში. აქ უწყვეტი გეომეტრიული ნაკვთები Ox ღერძზე აღებული მონაკვეთების სახით წარმოდგება. ცხადია, რომ, საზოგადოდ, რაიმე AB მონაკვეთი გადაისახება $A'B'$ მონაკვეთში. სივრცეში გარდაქმნას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z), \\ y' &= \varphi(x, y, z), \\ z' &= \psi(x, y, z), \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც x, y, z და x', y', z' სივრცის M და M' წერტილების კოორდინატებია, ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემის მიმართ (ნახ. 145). შესაძლებელია, რომ M წერტილმა აღწეროს მთელი

სივრცე (ეს დამოკიდებულია f, φ, ψ ფუნქციებზე). ამ შემთხვევაში სივრცე გადაისახება იმავე სივრცის რაიმე ნაწილში, რომელსაც M' წერტილი აღწერს. შესაძლებელია, რომ M' წერტილმაც M წერტილთან ერთად აღწეროს მთელი სივრცე. ამ შემთხვევაში სივრცე გადაისახება თავის თავში. სივრცის ყოველი გეომეტრიული Γ ნაკვეთი გადაისახება იმავე სივრცის სხვა Γ' ნაკვეთში. Γ' ნაკვეთის ბუნება დამოკიდებული იქნება გადასახვაზე და თვით Γ ნაკვეთზე.



ნახ. 145.

ზოგჯერ შესაძლებელია, ნაცვლად ერთი გარდაქმნისა, განისაზღვროს გარდაქმნათა ისეთი უწყვეტი სისტემა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს Γ ნაკვეთიდან უწყვეტი პროცესით მივიღოთ Γ' ნაკვეთი; მაგალითად, (1) გარდაქმნები შექმნიან გარდაქმნათა ასეთ სისტემას, თუ α, a, b სიდიდეებს განვიხილავთ ცვლადებად. მათი უწყვეტი ცვლით მივიღებთ გარდაქმნათა იმ უწყვეტ სისტემას, რომელიც Γ ნაკვეთიდან მოგვცემს Γ' ნაკვეთს. ამ შემთხვევაში უწყვეტი გარდაქმნების მთელი პროცესი Γ ნაკვეთის მოძრაობის პროცესია. არსებობს მოძრაობაზე უფრო ზოგადი, მაგრამ მისი ანალოგიური გარდაქმნათა უწყვეტი სისტემები, რომელთაც ქვემოთ გავეცნობით დაწვრილებით.

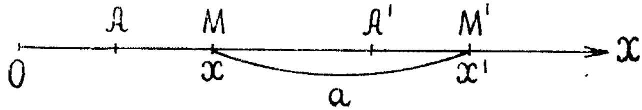
§ 1. ორთოგონალური, აფინური და პროექციული გარდაქმნები წრფეზე

1. ორთოგონალური გარდაქმნა. განვიხილოთ Ox ღერძზე AM მონაკვეთი და გავასრიალოთ იგი ღერძის გასწვრივ a მანძილზე. გასრიალების შემდეგ M წერტილი დაიკავებს M' მდებარეობას. ცხადია, რომ თვით M წერტილიც გადაადგილდება a მანძილზე, ამიტომ $MM'=a$ (ნახ. 146), ე. ი. $x'-x=a$. აქედან

$$x'=x+a. \tag{5}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ, როცა M წერტილი აღწერს რაიმე AB მონაკვეთს, მაშინ M' წერტილი აღწერს შესაბამ $A'B'$ მონაკვეთს. შესაძლებელია AB მონაკვეთის ნაცვლად განვიხილოთ მთელი Ox

ღერძიც, მაშინ $A'B'$ მონაკვეთიც იმავე ღერძს დაფარავს. ამ შემთხვევაში Ox ღერძი გადაისახება თავის თავში (5) ფორმულის მიხედვით. a პარამეტრის უწყვეტი ცვლით მივიღებთ გარდაქმნათა უწყვეტ სისტემას, რომელიც AB მონაკვეთს შეათავსებს $A'B'$ მონაკვეთთან. ასეთი გარდაქმნები, მიმდევრობით შესრულებული, განსაზღვრავს იმ უწყვეტი მოძრაობის პროცესს, რომლითაც AB მონაკვეთი მიიღებს $A'B'$ მონაკვეთის მდებარეობას. ამრიგად, თუ a

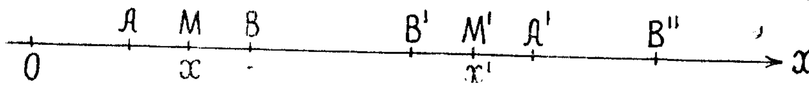


ნახ. 146.

ცვლადი პარამეტრია, მაშინ (5) გარდაქმნების სისტემა განსაზღვრავს მოძრაობას წრფეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში $|AB|=|A'B'|$. ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის გარდაქმნა წრფეზე

$$x'=-x+a. \tag{6}$$

ამ შემთხვევაში AB მონაკვეთი რომ გავასრიალოთ a მანძილზე, ის დაიკავებს $A'B''$ მონაკვეთის მდებარეობას (ნახ. 147), რომელიც სიმეტრიულია $A'B'$ მონაკვეთისა. ამრიგად (6) გარდაქმნა არ გამო-



ნახ. 147.

სახავს უბრალოდ მოძრაობას. იგი წარმოადგენს მოძრაობას სიმეტრიით. ადვილი შესამჩნევია, რომ აქაც $|AB|=|A'B'|$. როგორც ვნახეთ, (5) და (6) გარდაქმნებს ერთად აქვთ შემდეგი თვისება: მონაკვეთის სიგრძე ამ გარდაქმნების დროს არ იცვლება. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს თვისება აქვთ მხოლოდ ამ სახის გარდაქმნებს. მართლაც, დავუშვათ, რომ ნებისმიერი M, M' შესაბამი წყვილისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$|AM|=|A'M'|.$$

შევიტანოთ აქ $|AM|$ და $|A'M'|$-ის შემდეგი მნიშვნელობანი (ნახ. 148):

$$|AM| = |x - x_1|, \quad |A'M'| = |x' - x_1'|.$$

გვექნება

$$|x - x_1| = |x' - x_1'|.$$

აქედან

$$x' = \pm x + a, \tag{7}$$

სადაც

$$a = x_1' \pm x_1.$$

ეს გარდაქმნა კი აერთიანებს (5) და (6) სახის გარდაქმნებს. *ისეთ გარდაქმნებს, რომელნიც უცვლელად ტოვებენ ყოველი მონაკვეთის სიგრძეს, ეწოდება ორთოგონალური გარდაქმნები.* ამრიგად (7) გარდაქმნები წარმოადგენენ ორთოგონალურ გარდაქმნებს წრფეზე.

ნახ. 148.

განვიხილოთ ორი თანმიმდევრობითი ორთოგონალური გარდაქმნა. დავუშვათ, რომ I გარდაქმნით M წერტილს შეესაბამება M' წერტილი, II გარდაქმნით კი M' წერტილს შეესაბამება M'' წერტილი. ეს გარდაქმნები (7) გარდაქმნის სახისა უნდა იყოს (ცხადია, a პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის). გვექნება:

$$x' = \pm x + a,$$

$$x'' = \pm x' + a_1.$$

აქედან

$$x'' = \pm x + a_1 + a,$$

ანუ

$$x'' = \pm x + a_2,$$

სადაც

$$a_2 = a_1 \pm a.$$

ამრიგად, ორი თანმიმდევრობითი ორთოგონალური გარდაქმნა შეიძლება შეიცვალოს ერთი ორთოგონალური გარდაქმნით.

როცა გარდაქმნათა სისტემის ყოველი ორი თანმიმდევრობითი გარდაქმნა შეიძლება შეცვლილი იქნეს იმავე სისტემის ერთი გარ-

დაქმნით, მაშინ გარდაქმნათა სისტემას ეწოდება **გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა თ ა ჯ გ უ ფ ი.**

თუ განვიხილავთ (5) გარდაქმნებს ცალკე, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ეს გარდაქმნები ქმნიან ჯგუფს. ეს იქნება წრფეზე მოძრაობათა ჯგუფი. ეს გარდაქმნები ორთოგონალურ გარდაქმნათა ნაწილს წარმოადგენს და ამიტომ ამ ჯგუფს ეწოდება ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფის **ქ ვ ე ჯ გ უ ფ ი.** თუ განვიხილავთ (6) გარდაქმნებს ცალკე, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ეს გარდაქმნები არ ქმნიან ჯგუფს. მაგრამ, (5) და (6) გარდაქმნები კი, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ქმნიან ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფს. ადვილი შესამჩნევია, რომ (5) გარდაქმნებით შესაძლებელია AB და $A'B'$ მონაკვეთების შეთავსება უწყვეტი პროცესით (ეს არის AB მონაკვეთის გასრიალება). ამრიგად (5) გარდაქმნები ქმნიან უწყვეტ ჯგუფს. ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ (6) სახის გარდაქმნები არ იძლევა AB და $A'B'$ მონაკვეთების უწყვეტი პროცესით შეთავსების საშუალებას. ამის გამო, თვით ორთოგონალური გარდაქმნები, რომელიც (5) და (6) გარდაქმნათა ერთობლიობას წარმოადგენს, არ იძლევა AB და $A'B'$ მონაკვეთების უწყვეტი პროცესით შეთავსების საშუალებას. ამრიგად, ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფი არ არის უწყვეტი.

2. აფინური გარდაქმნა. აფინური გარდაქმნა წრფეზე ეწოდება წრფივ გარდაქმნას, ე. ი.

$$x'=ax+b, \tag{8}$$

სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია. როცა a და b იცვლება ერთიმეორეზე დამოუკიდებლად $(-\infty, \infty)$ შუალედში, მაშინ (8) ფორმულიდან მივიღებთ ყოველგვარ აფინურ გარდაქმნას. წერტილთა შორის აფინური გარდაქმნით დამყარებულ შესაბამობას ეწოდება აფინური თანადობა. განვიხილოთ ორი თანმიმდევრობითი აფინური გარდაქმნა. დავუშვათ, რომ M წერტილს (8) სახის გარდაქმნით შეესაბამება M' წერტილი, ხოლო M' წერტილს იმავე სახის გარდაქმნით (საზოგადოდ, a, b მნიშვნელობათა წყვილი სხვადასხვა იქნება ამ ორი გარდაქმნის დროს) შეესაბამება M'' წერტილი. გვექნება:

$$x'=ax+b,$$
$$x''=a_1x'+b_1.$$

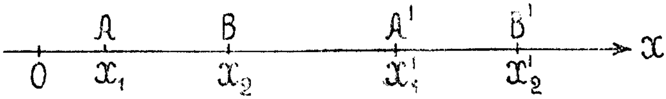
აქედან

$$x''=a_1(ax+b)+b_1=aa_1x+a_1b+b_1,$$

ანუ (სათანადო აღნიშვნების შემდეგ)

$$x''=a_2x+b_2.$$

აქედან ჩანს, რომ ორი ნებისმიერი აფინური გარდაქმნა შეიძლება შეცვლილ იქნას ერთი აფინური გარდაქმნით; მაშასადამე, აფინური გარდაქმნები წრფეზე ქმნიან ჯგუფს. ამ ჯგუფს ეწოდება *აფინურ გარდაქმნათა ჯგუფი*. ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს



ნახ. 149.

ჯგუფი უწყვეტია. პირდაპირ ჩანს, რომ (7) გარდაქმნები აფინურ გარდაქმნებში შედის (აფინური გარდაქმნებია). მათ მისაღებად საჭიროა აფინურ გარდაქმნებში დავუშვათ, რომ $a=\pm 1$ და b ნებისმიერია. ამრიგად, ორთოგონალურ გარდაქმნათა ჯგუფი აფინურ გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფია.

ახლა განვიხილოთ ორი წერტილი: A, B. მათი აფინურად თანადი წერტილები იყოს: A', B'. (8) ტოლობაში x-ის ნაცვლად მიმდევრობით შევიტანოთ A და B წერტილების კოორდინატები. მარცხნივ მივიღებთ A', B' წერტილების კოორდინატებს x'-ის ნაცვლად. გვექნება (ნახ. 149):

$$x_1'=ax_1+b,$$

$$x_2'=ax_2+b.$$

აქედან

$$x_2'-x_1'=a(x_2-x_1).$$

მეორე მხრივ

$$x_2-x_1=AB,\quad x_2'-x_1'=A'B'.$$

ამრიგად

$$A'B'=a\cdot AB. \tag{9}$$

ახლა განვიხილოთ სამი თანადი წყვილი A, B, C და A', B', C' თანადი მონაკვეთებისათვის, (9) ფორმულის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$A'C'=a\cdot AC,$$
$$B'C'=a\cdot BC.$$

აქედან

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{CA}{BC}. \tag{10}$$

ამრიგად ნებისმიერი ორი მონაკვეთის შეფარდება უცვლელი რჩება

აფინური გარდაქმნის დროს, ე. ი. ო რ ი მ ო ნ ა კ ვ ე თ ი ს უ რ თ ი-ე რ თ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ა ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ი ა ა ფ ი ნ უ რ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა-თ ა ჯ გ უ ფ ი ს მ ი მ ა რ თ.

AC, BC მონაკვეთების ურთიერთშეფარდებას ეწოდება A, B, C წერტილების მ ა რ ტ ი ვ ი ფ ა რ დ ო ბ ა და აღინიშნება (ABC) სიმბოლოთი; მაშასადამე,

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}. \tag{11}$$

ამ აღნიშვნის თანახმად (10) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$(A'B'C')=(ABC). \tag{12}$$

ამრიგად ს ა მ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს მ ა რ ტ ი ვ ი ფ ა რ დ ო ბ ა ი ნ ვ ა-რ ი ა ნ ტ ი ა ა ფ ი ნ უ რ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა თ ა ჯ გ უ ფ ი ს მ ი მ ა რ თ. ახლა დავამტკიცებთ, რომ ყოველი გარდაქმნა, რომელიც არ შეცვლის წერტილთა ნებისმიერი სამეულის მარტივ ფარდობას, აფინურ გარდაქმნას წარმოადგენს. ამისათვის განვიხილოთ AMB სამეული და მისი შესაბამი $A'M'B'$ სამეული. დავუშვათ, რომ

$$(A'M'B')=(AMB).$$

(11) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\frac{A'B'}{M'B'}=\frac{AM}{MB}.$$

აქედან

$$M'B'=\frac{A'B'}{AB}\cdot MB.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$\frac{A'B'}{AB}=a,$$

მივიღებთ

$$M'B'=a\cdot MB$$

ან, რაც იგივეა,

$$B'M'=a\cdot BM.$$

ჩავსვათ აქ BM-ისა და $B'M'$-ის მნიშვნელობანი

$$BM=x-x_2,\ B'M'=x'-x_2'.$$

გვექნება

$$x'-x_2'=a(x-x_2).$$

აქედან

$$x'=ax+b,$$

სადაც

$$b = x_2' - a x_2.$$

ამრიგად, განსახილავი გარდაქმნა აფინურია. ყველა ზემოაღნიშნულის საფუძველზე შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი **დასკვნა**. იმისათვის, რომ წრფის წერტილთა შორის ურთიერთცალსახა თანადობა აფინური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია წერტილთა ნებისმიერი სამეულის მარტივი ფარდობა ინვარიანტი იყოს ამ თანადობისა.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერად აღებული წერტილთა ორი წყვილი: AB და $A'B'$—ცალსახად განსაზღვრავს ისეთ აფინურ თანადობას წრფეზე, რომელიც შეუთანადებს აღებულ წყვილებს ერთიმეორეს. განვიხილოთ ნებისმიერი M წერტილი და მას შევუსაბამოთ ისეთი M' წერტილი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას

$$(ABM) = (A'B'M').$$

ასეთი თვისების მქონე თანადობა, ზემოთ ჩამოყალიბებული დასკვნის თანახმად, აფინურია და ამავე დროს სავსებით განსაზღვრული (რ. დ. გ.)

3. პროექციული გარდაქმნა. წილად-წრფივ გარდაქმნას წრფეზე ეწოდება პროექციული გარდაქმნა. ამრიგად, პროექციულ გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{12}$$

სადაც a, b, c, d ნებისმიერი მუდმივები აკმაყოფილებენ მხოლოდ შემდეგ პირობას

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

ეს პირობა იმის მაჩვენებელია, რომ (12) გარდაქმნით წერტილთა შორის დამყარებული თანადობა არის ურთიერთცალსახა. მართლაც, თუ

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = 0,$$

მაშინ

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

ამ შემთხვევაში (12) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომი გამოსახულების მრიცხველი პროპორციულია მნიშვნელისა. შეკვეცის შემდეგ დარჩება მუდმივი. გვექნება

$$x' = \cos t.$$

მაშასადამე, წრფის ყველა წერტილს შეესაბამება ერთადერთი წერტილი, ე. ი. თანადობა არ იქნება ურთიერთცალსახა.

განვიხილოთ ორი პროექციული გარდაქმნა. ისინი მიიღება (12) სახის გარდაქმნიდან კოეფიციენტების სხვადასხვა მნიშვნელობათა შესაბამად. გვექნება:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

$$x'' = \frac{a_1x'+b_1}{c_1x'+d_1}.$$

მეორე ტოლობაში შევიტანოთ x'-ის მნიშვნელობა პირველი ტოლობიდან, მივიღებთ:

$$x'' = \frac{a_1\dfrac{ax+b}{cx+d}+b_1}{c_1\dfrac{ax+b}{cx+d}+b_1} = \frac{(a_1a+b_1c)x+a_1b+b_1d}{(c_1a+b_1c)x+c_1b+b_1d}.$$

ედან (სათანადო აღნიშვნების შემდეგ)

$$x'' = \frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}.$$

ამრიგად, ორი ნებისმიერი პროექციული გარდაქმნა შეიძლება შეიცვალოს ერთი პროექციული გარდაქმნით. (ადვილი შესამოწმებელია, რომ (13) პირობა ამ შემთხვევაშიაც შესრულებულია). ამრიგად, პროექციული გარდაქმნები წრფეზე ქმნიან ჯგუფს. მას ეწოდება პ რ ო ე ქ ც ი უ ლ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა თ ა ჯ გ უ ფ ი. ამ გარდაქმნებით დამყარებულ წერტილთა შორის შესაბამობას ეწოდება პროექციული თანადობა წრფეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ პროექციულ თანადობაში მყოფი მონაკვეთები უწყვეტი პროცესით მიიღებიან ერთიმეორისაგან, ე. ი. პროექციულ გარდაქმნათა ჯგუფი უწყვეტია.

ახლა განვიხილოთ წერტილთა ორი თანადი ოთხეული: A, B, C, D და A', B', C', D'. თუ ჩავსვამთ (12) ტოლობის მარცხენა

მხარეში A, B, C, D წერტილთა კოორდინატებს x-ის ნაცვლად, მაშინ მარჯვენა მხარეში x'-ის ნაცვლად უნდა ჩავსვათ A', B', C', D'-ის კოორდინატები. გვექნება (ნახ. 150):

$$x_1' = \frac{ax_1+b}{cx_1+d}, \qquad x_2' = \frac{ax_2+b}{cx_2+d},$$

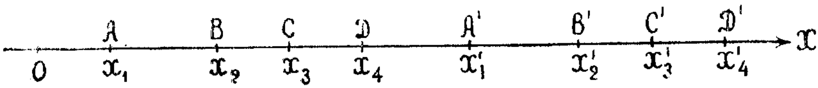
$$x_3' = \frac{ax_3+b}{cx_3+d}, \qquad x_4' = \frac{ax_4+b}{cx_4+d}.$$

აქედან

$$x_3' - x_1' = \frac{ax_3+b}{cx_3+d} - \frac{ax_1+b}{cx_1+d} = \frac{(ad-cb)(x_3-x_1)}{(cx_3+d)(cx_1+d)},$$

$$x_3' - x_2' = \frac{ax_3+b}{cx_3+d} - \frac{ax_2+b}{cx_2+d} = \frac{(ad-cb)(x_3-x_2)}{(cx_3+d)(cx_2+d)}.$$

ამ ორი ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ



ნახ. 150.

$$\frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} = \frac{cx_2+d}{cx_1+d} \cdot \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}.$$

ანალოგიური გამოთვლებით მიიღება კიდევ შემდეგი ტოლობა

$$\frac{x_4' - x_1'}{x_4' - x_2'} = \frac{cx_2+d}{cx_1+d} \cdot \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}.$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან კი მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან ტოლობას

$$\frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} : \frac{x_4' - x_1'}{x_4' - x_2'} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}.$$

მეორე მხრივ

$$x_3 - x_1 = AC, \ x_3 - x_2 = BC, \ x_4 - x_1 = AD, \ x_4 - x_2 = BD.$$

$$x_3' - x_1' = A'C', \ x_3' - x_2' = B'C', \ x_4' - x_1' = A'D', \ x_4' - x_2' = B'D'.$$

ამრიგად გვექნება

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD};$$

მაშასადამე, A, B, C, D წერტილებით განსაზღვრული მონაკვეთების შემდეგი გამოსახულება

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

უცვლელი რჩება ნებისმიერი პროექციული გარდაქმნის დროს. ამ გამოსახულებას ეწოდება ოთხი წერტილის ო რ მ ა გ ი ფ ა რ დ ო ბ ა. მასვე უწოდებენ ოთხი წერტილის რ თ უ ლ ფ ა რ დ ო ბ ა ს. საერთაშორისო ტერმინოლოგიით იგი იხსენიება ოთხი წერტილის ა ნ ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი ფ ა რ დ ო ბ ი ს სახელწოდებით. ამ გამოსახულებისათვის გავრცელებულია შემდეგი სიმბოლური აღნიშვნა

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}. \tag{14}$$

ამ აღნიშვნის თანახმად (14) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

უკანასკნელი ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი.

დასკვნა. ო თ ხ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა ნ ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი ფ ა რ დ ო ბ ა ი ნ ვ ა რ ი ა ნ ტ ი ა პ რ ო ე ქ ც ი უ ლ გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა თ ა ჯ გ უ ფ ი ს მ ი მ ა რ თ.

თუ (14) ფორმულის მარჯვენა მხარეს მდგომ გამოსახულებაში ჩავსვამთ მონაკვეთების ზემოაღნიშნულ ალგებრულ მნიშვნელობებს კოორდინატებში, მივიღებთ

$$(ABCD) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}. \tag{15}$$

ასეთია ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობის გამოსახვა კოორდინატებში. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომ გამოსახულებას უწოდებენ x_1, x_2, x_3, x_4 რიცხვების ანჰარმონიულ ფარდობას და ასე აღნიშნავენ: (x_1, x_2, x_3, x_4). ამრიგად,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}. \tag{16}$$

ამ უკანასკნელი აღნიშვნის თანახმად (15) ფორმულა ასე დაიწერება

$$(ABCD)=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4). \tag{15'}$$

აქედან ჩანს, რომ ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ტოლია მათი კოორდინატების ანჰარმონიული ფარდობისა.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ წრფის წერტილთა ყოველი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც წერტილთა ნებისმიერი ოთხეულის ანჰარმონიული ფარდობა უცვლელია, არის პროექციული. ამისათვის დავუშვათ, რომ A, B, C, M წერტილთა ოთხეულის თანადი ოთხეულია A', B', C', M'. თანახმად პირობისა, ამ ოთხეულების ანჰარმონიული ფარდობანი ტოლია, ე. ი.

$$(A'B'C'M')=(ABCM).$$

თუ წერტილთა ამ ორი ოთხეულის დეკარტის კოორდინატები მოცემულია შემდეგი სახით:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x \text{ და } x_1',\ x_2',\ x_3',\ x',$$

მაშინ (15′) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$(ABCM)=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x),$$
$$(A'B'C'M')=(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x').$$

ამრიგად

$$(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x')=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x),$$

ანუ (მე-16 ფორმულის თანახმად)

$$\frac{x_3'-x_1'}{x_3'-x_2'}:\frac{x'-x_1'}{x'-x_2'}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_1}:\frac{x-x_1}{x-x_2}.$$

x'-ის ამოხსნა მოგვცემს (სათანადო აღნიშვნების შემდეგ)

$$x'=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

ამრიგად განსახილავი თანადობა პროექციულია.

ყოველივე ზემოაღნიშნულის საფუძველზე, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი **დასკვნა.** ი მ ი ს ა თ ვ ი ს, რ ო მ წ რ ფ ი ს წ ე რ ტ ი ლ თ ა შ ო რ ი ს უ რ თ ი ე რ თ ც ა ლ ს ა ხ ა თ ა ნ ა დ ო ბ ა ი ყ ო ს პ რ ო ე ქ ც ი უ ლ ი, ა უ ც ი ლ ე ბ ე ლ ი დ ა ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა,

რომ ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა იყოს ინვარიანტი ამ თანადობის მიმართ. ზემოაღნიშნული დასკვნის საფუძველზე ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერად აღებული წერტილთა ორი სამეული წრფეზე A, B, C და A' B' C'—ცალსახად განსაზღვრავს ისეთ პროექციულ თანადობას, რომელიც შეუთანადებს მოცემულ სამეულებს. ამისათვის განვიხილოთ წრფეზე ნებისმიერი M წერტილი და მას შევუსაბამოთ M' წერტილი შემდეგი პირობით

$$(ABCM)=(A'B'C'M').$$

ასე დამყარებული თანადობა, ზემოაღნიშნული დასკვნის თანახმად, არის პროექციული. ამავე დროს ასეთი თანადობა სავსებით განსაზღვრულია (რ. დ. გ.).

ახლა განვიხილოთ წრფეზე ისეთი წერტილი, რომლის კოორდინატი აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$cx+d=0.$$

აქედან

$$x=-\frac{d}{c}.$$

x-ის ასეთ მნიშვნელობას, (12) გარდაქმნის მიხედვით, შეესაბამება x'-ის შემდეგი მნიშვნელობა

$$x'=\frac{-a\frac{d}{c}+b}{0}=\frac{ad-cb}{0}.$$

რადგან $ad-cb\neq 0$, ამიტომ $x'=\infty$. ამრიგად P წერტილს შეესაბამება წრფის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. აქედან ჩანს, რომ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის განსაკუთრებული ხასიათი (სპეციალური მდებარეობა) არ არის ინვარიანტი პროექციული თანადობისა, ე. ი. პროექციულ თანადობაში ყველა წერტილს ერთნაირი როლი აქვს. იმისათვის, რომ P წერტილიც უსასრულოდ დაშორებული იყოს, ე. ი. იმისათვის, რომ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს შეესაბამებოდეს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, საჭიროა $\frac{d}{c}$ იყოს უსასრულოდ დიდი; ამისათვის კი აუცილებელია c იყოს ნული. ამრიგად, თუ პროექციული თანადობის დროს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს, მაშინ $c=0$. ამ შემთხვევაში (12) გარდაქმნა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x' = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}.$$

ეს კი წრფივი გარდაქმნაა, ე. ი. აფინური გარდაქმნა. ამრიგად, უსასრულოდ დაშორებული წერტილი შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს, სასრულეთისა კი—სასრულეთისას, მხოლოდ მაშინ, როცა პროექციული თანადობა—აფინურია.

(12) გარდაქმნებიდან უშუალოდ მიიღება აფინური გარდაქმნები, როგორც პროექციული გარდაქმნების კერძო შემთხვევა (ამისათვის საჭიროა აქ ჩავსვათ $c=0$); მაშასადამე, აფინურ გარდაქმნათა ჯგუფი პროექციულ გარდაქმნათა ჯგუფში შედის როგორც ქვეჯგუფი.

ახლა გამოვსახოთ პროექციული გარდაქმნები ერთგვაროვან კოორდინატებში; ამისათვის (12) გარდაქმნებში x და x' შევცვალოთ ერთგვაროვანი კოორდინატებით

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad x' = \frac{\xi'_1}{\xi'_2}.$$

მივიღებთ

$$\frac{\xi_1'}{\xi_2'} = \frac{a\dfrac{\xi_1}{\xi_2}+b}{c\dfrac{\xi_1}{\xi_2}+d} = \frac{a\xi_1+b\xi_2}{c\xi_1+d\xi_2}.$$

ეს ტოლობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\frac{a\xi_1+b\xi_2}{\xi_1'} = \frac{c\xi_1+d\xi_2}{\xi_2'} = \rho.$$

აქედან

$$\begin{aligned} \rho\xi_1' &= a\xi_1+b\xi_2, \\ \rho\xi_2' &= c\xi_2+d\xi_2, \end{aligned} \tag{16}$$

სადაც ρ რაიმე მამრავლია. აქედან ჩანს, რომ პროექციული გარდაქმნა წრფეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში არის წრფივი და ერთგვაროვანი.

მაგალითი. გამოვარკვიოთ, თუ როგორ ცვლილებას განიცდის ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ამ წერტილთა მიმდევრობის შეცვლის დროს; ამისათვის პროექციული გარდაქმნა ისე შევარჩიოთ, რომ D წერტილს შეესაბამებოდეს უსასრულოდ და-

შორებული წერტილი, ე. ი. D' იყოს უსასრულეთში. გვექნება

$$w=(ABCD)=(A'B'C'D')=\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'}.$$

რადგან D' უსასრულოდ დაშორებული წერტილია, ამიტომ $\frac{A'D'}{B'D'}=1$; მაშასადამე,

$$w=(ABCD)=\frac{A'C'}{B'C'}.$$

აქედან (A და B წერტილების გადანაცვლებით) მივიღებთ

$$(BACD)=\frac{B'C'}{A'C'}=\frac{1}{\frac{A'C'}{B'C'}}=\frac{1}{w},$$

ე. ი.

$$(BACD)=\frac{1}{w}.$$

ახლა შევანაცვლოთ B და C წერტილები საწყის ოთხეულში. გვექნება

$$(ACBD)=\frac{A'B'}{C'B'}=\frac{A'C'+C'B'}{C'B'}=1-w,$$

ე. ი.

$$(ACBD)=1-w.$$

ანალოგიური გამოთვლებით მივიღებთ სულ 6 სხვადასხვა მნიშვნელობას. ესენია:

$$(ABCD)=w,$$

$$(BACD)=\frac{1}{w},$$

$$(ACBD)=1-w,$$

$$(CABD)=\frac{1}{1-w}, \tag{17}$$

$$(CBAD)=\frac{w}{w-1},$$

$$(BACD)=\frac{w-1}{w}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ w რიცხვმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობა. მართლაც, საკმარისია A, B, C წერტილები ვაფიქსიროთ და ვცვალოთ D წერტილი მთელი წრფის გასწვრივ, რომ აშკარა გახდეს ზემოაღნიშნული ფაქტი. იმ შემთხვევაში, როცა $w=-1$, D წერტილს ეწოდება A, B, C წერტილებისადმი მეოთხე ჰარმონიული წერტილი. თვით $A\ B\ C\ D$ ოთხეულს კი ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი ო თ ხ ე უ ლ ი; მაშასადამე, ჰარმონიული ოთხეული განისაზღვრება შემდეგი პირობით

$$(ABCD)=-1. \tag{17'}$$

4. თანადობის ორმაგი წერტილის შესახებ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ზოგიერთი თანადობის დროს შესაძლებელია რაიმე წერტილს შეესაბამებოდეს თვით იგივე წერტილი, ე. ი. წერტილი შეესაბამებოდეს თავის თავს. ასეთ წერტილს ეწოდება თ ა ნ ა დ ო ბ ი ს ო რ მ ა გ ი წ ე რ ტ ი ლ ი. მაგალითად, თუ (1) გარდაქმნებში დავუშვებთ, რომ $a=b=0$ (ე. ი. განვიხილავთ კოორდინატთა სისტემის სათავის გარშემო ბრუნვის ფორმულებს), მაშინ კოორდინატთა სათავეს ეთანადება თავისი თავი. ასევე, თუ (8) გარდაქმნაში დავუშვებთ, რომ $b=0$, მაშინ ასეთი აფიური გარდაქმნით დამყარებულ თანადობაში კოორდინატთა სათავეს ეთანადება თავისი თავი, ე. ი. კოორდინატთა სათავე ორმაგი წერტილი იქნება.

განმარტების თანახმად, თუ M არის თანადობის ორმაგი წერტილი, მაშინ $M'=M$. აქედან მივიღებთ $x'=x$. ამრიგად, მოცემული გარდაქმნით დამყარებული თანადობის ორმაგი წერტილის მოსაძებნად, საჭიროა იქ ჩავსვათ $x'=x$. ამით მივიღებთ განტოლებას ერთი უცნობით. ეს იქნება x. ამ განტოლებიდან ამოხსნილი x-ის მნიშვნელობანი (განტოლების ფესვები) მოგვცემს ორმაგ წერტილებს. ადვილი შესამჩნევია, რომ მოძრაობის გამომსახველ გარდაქმნას წრფეზე, ე. ი. (5) გარდაქმნას, ორმაგი წერტილი არა აქვს სასრულეთში. რადგან უსასრულოდ დაშორებული წერტილი ორთოგონალური გარდაქმნით გადაისახება ისევ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში იმავე წრფეზე და წრფეს კი მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი აქვს, ამიტომ წრფის (Ox ღერძის) უსასრულოდ დაშორებული წერტილი იქნება ორთოგონალური გარდაქმნის ორმაგი წერტილი. ეს იქნება (5) გარდაქმნის ერთადერთი ორმაგი წერტილი. გამონაკლისს წარმოადგენს ის შემთხვევა, როცა $a=0$, ე. ი. როცა $x'=x$. ამ შემთხვევაში წრფის ყოველი წერტილი ორმაგია. ასეთ გარდაქმნას ეწოდება ი გ ი ვ უ-

რ ი გ ა რ დ ა ქ მ ნ ა. ამ გარდაქმნით დამყარებულ თანადობას კი ი გ ი ვ უ რ ი თ ა ნ ა დ ო ბ ა.

წრფეზე აფინური თანადობის ორმაგი წერტილების განსასაზღვრავად (8) ტოლობაში უნდა ჩავსვათ $x'=x$. მივიღებთ

$$x=ax+b.$$

აქედან

$$x=\frac{b}{1-a}.$$

ამრიგად, თუ $a\neq 1$ (რაც იმას ნიშნავს, რომ გარდაქმნა მოძრაობას არ წარმოადგენს), მაშინ აფინურ თანადობას აქვს ერთი ორმაგი წერტილი სასრულეთში. რაც შეეხება Ox ღერძის უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს, იგი ამ შემთხვევაშიაც, ე. ი. აფინური თანადობისთვისაც, იქნება ორმაგი წერტილი.

ახლა განვსაზღვროთ პროექციული თანადობის ორმაგი წერტილები, ამისათვის (12) გარდაქმნაში ჩავსვათ $x'=x$. გვექნება

$$x=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

აქედან

$$cx^2+(d-a)x-b=0.$$

ამ კვადრატულ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი ფესვი, თუ ეს განტოლება იგივური არ არის; თუ ეს განტოლება იგივურია, ე. ი. თუ მას დააკმაყოფილებს x-ის ყოველი მნიშვნელობა, მაშინ Ox ღერძის ყოველი წერტილი იქნება ორმაგი წერტილი; მაშასადამე, თანადობა იქნება იგივური. ამრიგად, მივიღებთ წრფეზე პროექციული თანადობის ორმაგი წერტილების დამახასიათებელ დებულებას, რომელიც შტაუდტის[1] თეორემის სახელწოდებით არის ცნობილი.

შტაუდტის თეორემა. პ რ ო ე ქ ც ი უ ლ თ ა ნ ა დ ო ბ ა ს წ რ ფ ე ზ ე ა რ შ ე ი ძ ლ ე ბ ა ჰ ქ ო ნ დ ე ს ო რ ზ ე მ ე ტ ი ო რ მ ა გ ი წ ე რ ტ ი ლ ი, თ უ ე ს თ ა ნ ა დ ო ბ ა ი გ ი ვ უ რ ი ა რ ა რ ი ს.

§ 2. ორთოგონალური, აფინური და პროექციული გარდაქმნები სიბრტყეზე

1. ორთოგონალური გარდაქმნა. ორთოგონალური გარდაქმნები სიბრტყეზე ეწოდება ისეთ წრფივ გარდაქმნებს:

---

[1] შტაუდტი—გერმანელი მათემატიკოსი (1798—1867).

$$x'=ax+by+p,$$
$$y'=cx+dy+q, \tag{18}$$

სადაც გარდაქმნის მთავარი მატრიცა

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

ორთოგონალური მატრიცაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} a^2+c^2&=1, \\ b^2+d^2&=1, \\ ab+cd&=0. \end{aligned} \tag{19}$$

თუ ავღნიშნავთ

$$a=\cos\alpha.$$

მაშინ (19) ტოლობანი მოგვცემს:

$$c=\pm\sin\alpha,\ b=\pm\sin\alpha,\ d=\pm\cos\alpha.$$

აქ ნიშნები ნებისმიერი არ არის. ისინი ისე უნდა შეირჩეს, რომ (19) ტოლობათა მესამე ტოლობა დაკმაყოფილდეს. სულ გვექნება შემდეგი ორი ტიპის გარდაქმნები (α კუთხის ნიშნის შეცვლით შეგვიძლია b-სათვის ავიღოთ $+$ ნიშანი):

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha+p, \\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha+q \end{aligned} \tag{20}$$

და

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha+p, \\ y'&=x\sin\alpha-y\cos\alpha+q. \end{aligned} \tag{21}$$

(20) გარდაქმნები, როგორც ცნობილია ამ თავის შესავალიდან, განსაზღვრავს მოძრაობას სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში შესაბამი γ და γ' ნაკვთების შესათავსებლად, საკმარისია გადავიტანოთ γ ნაკვთი თავისი თავის პარალელურად ისე, რომ γ და γ' ნაკვთების წერტილთა ერთი შესაბამი წყვილი შეთავსდეს; შემდეგ ამ წერტილის გარშემო მოვაბრუნოთ γ ნაკვთი α კუთხეზე. მივიღებთ შეთავსებას. მართლაც, ამ შემთხვევაში (20) გარდაქმნებში უნდა ჩავწეროთ $\alpha=0$ და $p=q=0$. მივიღებთ: $x'=x$, $y'=y$. ეს კი ნაკვთის უძრაობას ახასიათებს; ყოველი წერტილი რჩება უძრავი.

ახლა განვიხილოთ (21) გარდაქმნები. ამ შემთხვევაში γ ნაკვ-

თის მობრუნება α კუთხეზე და მისი პარალელური გადატანა ისე, რომ γ და γ' ნაკვთების წერტილთა ერთი თანადი წყვილი შეთავსდეს, მოგვცემს შემდეგ გარდაქმნას (21-ე ფორმულებში უნდა ჩავწეროთ $\alpha=0$ და $p=q=0$):

$$x=x',\ y=-y'.$$

აქედან ჩანს, რომ γ ნაკვთი ზემოაღწერილი მოძრაობის შემდეგ არ დაემთხვევა γ' ნაკვთს, მაგრამ დაიკავებს მის სიმეტრიულ მდებარეობას; მაშასადამე, (21) გარდაქმნები გამოსახავს ნაკვთის მოძრაობას სიმეტრიითურთ. ამრიგად, ორთოგონალური გარდაქმნით დაკავშირებული ნაკვთები შეგვიძლია სიბრტყეზე მოძრაობით შევუთავსოთ ერთიმეორეს ან დავალაგოთ ერთიმეორის სიმეტრიულად. აქედან აშკარაა ორთოგონალური გარდაქმნის შემდეგი თვისებანი:

1) წერტილს ეთანადება წერტილი—ურთიერთცალსახად;

2) წრფეს ეთანადება წრფე—ურთიერთცალსახად;

3) მონაკვეთის სიგრძე, ანუ მანძილი ორ წერტილს შორის, ინვარიანტია ორთოგონალური გარდაქმნისა.

4) კუთხე ორ წრფეს შორის ინვარიანტია ორთოგონალური გარდაქმნისა.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ამ თვისებებიდან პირველი და მესამე თვისება სავსებით განსაზღვრავს ორთოგონალურ გარდაქმნას. დავუშვათ, რომ სიბრტყეზე მოცემულია რაიმე გარდაქმნა, რომელსაც აქვს პირველი და მესამე თვისება, ე. ი. ეს გარდაქმნა ამყარებს წერტილთა შორის ურთიერთცალსახა თანადობას და მანძილი ორ წერტილს შორის ინვარიანტია განსახილავი გარდაქმნისა.

განვიხილოთ რაიმე წრფე და მასზე მიმდევრობით ავიღოთ A, B, M წერტილები. მათი შესაბამი წერტილები აღვნიშნოთ A', B', M'-ით. მანძილის ინვარიანტობის გამო გვექნება:

$$|AB|=|A'B'|,\quad |BM|=|B'M'|,\quad |AM|=|A'M'|.$$

მეორე მხრივ (რადგან A, B, M წრფის წერტილებია)

$$|AB|+|BM|=|AM|.$$

აქედან წინა ტოლობათა საფუძველზე მივიღებთ

$$|A'B'|+|B'M'|=|A'M'|.$$

ასეთი ტოლობა კი ახასიათებს წრფეზე მდებარე წერტილებს; მაშასადამე, როცა M წერტილი აღწერს წრფეს, მაშინ მისი შესაბა-

ში M' წერტილიც აღწერს წრფეს, ე. ი. წრფეს ეთანადება წრფე. ცხადია, რომ ეს თანადობა წრფეთა შორის იქნება ურთიერთცალსახა (ეს გამომდინარეობს წერტილთა შორის თანადობის ურთიერთცალსახობიდან). ცხადია, აგრეთვე, რომ ორი წრფის თანაკვეთის წერტილს შეესაბამება თანად წრფეთა თანაკვეთის წერტილი. აქედან გამომდინარე, სამკუთხედი გადაისახება სამკუთხედში. მანძილის ინვარიანტობის გამო თანად სამკუთხედებს შესაბამი გვერდები ტოლი ექნებათ; ამიტომ მათ შესაბამი კუთხეებიც ტოლი უნდა ჰქონდეთ. რადგან ყოველი კუთხე შეგვიძლია ჩავრთოთ სამკუთხედში (ამისათვის საკმარისია კუთხის გვერდები გადავკვეთოთ რაიმე წრფით, რომელიც კუთხის წვეროზე არ გადის), ამიტომ კუთხე ორ წრფეს შორის ინვარიანტი იქნება განსახილავი გარდაქმნისა. კერძოდ, თანამართობული წრფეები გადაისახება თანამართობულ წრფეებში. განვიხილოთ Ox და Oy ღერძების შესაბამი წრფეები განსახილავ თანადობაში. ამ წრფეების განტოლებანი დავწეროთ ნორმალური სახით. რადგან ეს წრფეები თანამართობი უნდა იყოს (ღერძების შესაბამი წრფეები), ამიტომ გვექნება:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - h = 0,$$
$$x\sin\varphi - y\cos\varphi - h_1 = 0.$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის ორთოგონალური გარდაქმნა:

$$x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi - h,$$
$$y_1 = x\sin\varphi - y\cos\varphi - h_1.$$

ასეთი გარდაქმნით ზემოაღნიშნული წრფეები გადაისახებიან შემდეგ წრფეებში: $x_1=0$, $y_1=0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ განსახილავი გარდაქმნა გარკვეულ თანადობას დაამყარებს $M'(x', y')$ და $M_1(x_1, y_1)$ წერტილებს შორის. ამ თანადობაში Ox ღერძს თავისი თავი უნდა ეთანადებოდეს. მართლაც, დაშვების თანახმად, მოცემულ წრფეებს ერთდროულად შეესაბამება:

$$\text{და}\quad \begin{aligned} &x'=0,\ y'=0\ (\text{წრფეები}) \\ &x_1=0,\ y_1=0\ (\text{წრფეები}). \end{aligned}$$

აქედან აშკარაა, რომ O წერტილს შეესაბამება თავისი თავი. მანძილის ინვარიანტობის გამო:

$$|AM|=|A'M'|,$$
$$|A_1M_1|=|AM|.$$

აქედან

$$|A'M'|=|A_1M_1|.$$

თუ A წერტილს მოვათავსებთ სათავეში, ე. ი. განვიხილავთ O წერტილად, ხოლო M წერტილს ავიღებთ Ox ღერძზე, მაშინ M' წერტილიც მოთავსდება Ox ღერძზე და გვექნება:

$$|OM|=|x'|, \quad |OM_1|=|x_1|.$$

აქედან

$$x'=\pm x_1.$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$y'=\pm y_1.$$

თუ შევიტანთ აქ x_1 და y_1-ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$x'=\pm(x\cos\varphi+y\sin\varphi-h),$$
$$y'=\pm(x\sin\varphi-y\cos\varphi-h_1),$$

რაც ორთოგონალურ გარდაქმნებს წარმოადგენს (რ. დ. გ.).

2. აფინური გარდაქმნა. ნებისმიერ წრფივ გარდაქმნას სიბრტყეზე ეწოდება აფინური გარდაქმნა სიბრტყეზე. ამრიგად, აფინური გარდაქმნა სიბრტყეზე შემდეგი სახისაა:

$$\begin{aligned} x'&=ax+by+p,\\ y'&=cx+dy+q, \end{aligned} \tag{22}$$

სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერია, ოღონდ აკმაყოფილებენ შემდეგ ერთადერთ პირობას

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23}$$

ეს პირობა მხოლოდ იმისათვის მოითხოვება, რომ (22) გარდაქმნით დამყარებული თანადობა იყოს ურთიერთცალსახა. ადვილი შესამჩნევია, რომ ორთოგონალური გარდაქმნა აფინური გარდაქმნების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს.

(22) გარდაქმნიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ამ გარდაქმნებით წერტილს შეესაბამება წერტილი ურთიერთცალსახად. თუ x, y სასრულია, მაშინ x', y' აგრეთვე სასრულია და, პირუკუ,

ე. ი. სასრულეთის წერტილს შეესაბამება სასრულეთის წერტილი, ხოლო უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს კი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებს შეესაბამება ერთ წრფეზე მდებარე წერტილები, ე. ი. წრფეს შეესაბამება წრფე. მართლაც, დავუშვათ, რომ $M'(x', y')$ წერტილი მოძრაობს წრფეზე, ე. ი. x', y' აკმაყოფილებს წრფივ განტოლებას

$$Ax'+By'+C=0.$$

შევიტანოთ აქ x', y'-ის მნიშვნელობანი. მივიღებთ

$$A(ax+by+p)+B(cx+dy+q)+C=0.$$

აქედან

$$(Aa+Bc)x+(Ab+Bd)y+Ap+Bq+C=0.$$

ეს განტოლება კი წრფივი განტოლებაა, თუ x, y-ის კოეფიციენტები ერთდროულად ნულები არ არის. ეს კოეფიციენტები არ შეიძლება ერთდროულად ნულები იყოს, რადგან, თუ დავუშვებთ, რომ

$$Aa+Bc=0,$$
$$Ab+Bd=0,$$

მაშინ (A და B ერთდროულად ნული არ არის)

$$\begin{vmatrix} a, & c \\ b, & d \end{vmatrix}=0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}=0.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (23) პირობას. ამრიგად, წრფეს ეთანადება წრფე. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორი წრფის თანაკვეთის წერტილს ეთანადება შესაბამი წრფეების თანაკვეთის წერტილი. რადგან პარალელურ წრფეებს საერთო აქვთ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი და უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს კი ეთანადება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, ამიტომ პარალელური წრფეების საერთო უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს უნდა ეთანადებოდეს შესაბამი წრფეების საერთო უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ პარალელური წრფეების შესაბამი წრფეები უნდა იყოს პარალელური, ე. ი. **პარალელურ წრფეებს ეთანადება პარალელური წრფეები.**

ახლა დავამტკიცებთ, რომ წრფეზე მდებარე სამი წერტილის

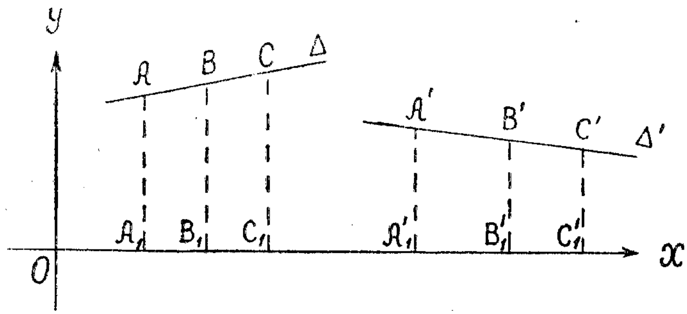
მარტივი ფარდობა ინვარიანტია აფინური თანადობისა სიბრტყეზე. ამისათვის განვიხილოთ სამი წერტილი წრფეზე. ამ წრფის განტოლება კანონიკური სახით წარმოვადგინოთ

$$y = kx + h.$$

y-ის ამ მნიშვნელობის ჩასმა (22) გარდაქმნების პირველ ტოლობაში მოგვცემს

$$x' = ax + b(kx + h) + p = (a + bk)x + bh + p.$$

ამრიგად, აღებულ წრფეზე მდებარე M წერტილის აბსცისა განიცდის წრფივ გარდაქმნას; ამიტომ მოცემულ წრფეზე აღებული



ნახ. 151.

A, B, C წერტილების A_1, B_1, C_1 გეგმილები და შესაბამი A', B', C' წერტილების A_1', B_1', C_1' გეგმილები Ox ღერძზე დაკავშირებულია წრფივი გარდაქმნით. წრფივი გარდაქმნა კი უცვლელად ტოვებს სამი წერტილის მარტივ ფარდობას. გვექნება

$$(A_1'B_1'C_1') = (A_1B_1C_1).$$

მეორე მხრივ (ნახ. 151)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1},$$

ანუ

$$(ABC) = (A_1B_1C_1).$$

ანალოგიურად

$$(A'B'C') = (A_1'B_1'C_1').$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეები ტოლია, ამიტომ

$$(A'B'C') = (ABC). \tag{24}$$

ამ უკანასკნელი თვისების მიხედვით ადვილად მტკიცდება, რომ

მონაკვეთის შუაწერტილი აფინური გარდაქმნით გადაისახება შესაბამი მონაკვეთის შუაწერტილში. მართლაც, თუ B არის AC მონაკვეთის შუაწერტილი, მაშინ

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}=2.$$

თანახმად (24) ტოლობისა, გვექნება

$$(A'B'C')=\frac{A'C'}{B'C'}=2.$$

აქედან ჩანს, რომ B' არის $A'C'$ მონაკვეთის შუაწერტილი (რ. დ. გ.).

ჩვენ ჩამოვთვალეთ აფინური თანადობის მრავალი თვისება, მაგრამ მათ შორის ძირითადია მხოლოდ შემდეგი თვისებანი:

1) წერტილს ეთანადება წერტილი—ურთიერთცალსახად.

2) წრფეს ეთანადება წრფე—ურთიერთცალსახად.

3) სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ინვარიანტია მოცემული გარდაქმნისა.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ეს თვისებანი განსაზღვრავენ აფინურ თანადობას. მართლაც, დავუშვათ, რომ განსახილავ თანადობას სიბრტყეზე აქვს ზემოაღნიშნული თვისებანი.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ასეთი თანადობის დროს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. მართლაც, ავიღოთ Δ წრფეზე A, B, M წერტილები. მათი შესაბამი წერტილები მოთავსდება Δ' წრფეზე; აღვნიშნოთ ისინი A', B', M'-ით. მესამე თვისების თანახმად გვექნება

$$(A'M'B')=(AMB),$$

ანუ

$$\frac{A'M'}{A'B'}=\frac{AM}{AB}.$$

აქედან ჩანს, რომ, როცა M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ Δ წრფეზე, მაშინ M' წერტილი უნდა მიისწრაფვოდეს უსასრულობისაკენ Δ' წრფეზე. ამ თვისების მიხედვით აშკარაა, რომ უსასრულოდ დაშორებული წრფე გადაისახება თავის თავში და პარალელური წრფეები გადაისახებიან პარალელურ წრფეებში.

ახლა განვიხილოთ $x'=0$, $y'=0$ განტოლებებით განსაზღვრული წრფეების (ე. ი. Ox და Oy ღერძების) შესაბამი წრფეები. მათი განტოლებანი ავიღოთ ზოგადი სახით:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

შევადგინოთ შემდეგი აფინური გარდაქმნა:

$$x_1=A_1x+B_1y+C_1,$$
$$y_1=A_2x+B_2y+C_2.$$

ასეთი გარდაქმნით მოცემული წრფეები გადაისახება შემდეგი განტოლებით განსაზღვრულ წრფეებში:

$$x_1=0, \quad y_1=0$$

(რაც, რა თქმა უნდა, იგივე Ox და Oy ღერძებია). ასეთი გარაქმნის შემდეგ M'-სა და M_1-ს შორის დამყარდება გარკვეული თანადობა (M-სა და M'-ს შორის არსებული თანადობის გამო). ამ თანადობით Ox და Oy ღერძები გადაისახება თავის თავში. განვიხილოთ Oy ღერძის პარალელური წრფე: $x_1=a$. მას შეესაბამება აგრეთვე Oy ღერძის პარალელური წრფე: $x'=a'$. ავიღოთ ნებისმიერი M_1 წერტილი და დავუშვათ მართობი ზემოაღნიშნულ პირველ პარალელურ წრფეზე. მართობის თანაკვეთის წერტილები Oy ღერძთან და პირველ პარალელურთან შესაბამად აღვნიშნოთ A_1-ითა და B_1-ით. ანალოგიურად M' წერტილიდან დავუშვათ მართობი მეორე პარალელურზე. აღვნიშნოთ ამ მართობის თანაკვეთის წერტილები Oy ღერძთან და მეორე პარალელურთან შესაბამად A'-ითა B'-ით.

ცხადია, რომ A_1M_1 წრფის თანადი იქნება $A'M'$ წრფე, რადგან ორივე Ox ღერძის პარალელურია; Ox ღერძს კი თავისი თავი შეესაბამება. ამიტომ გვექნება

$$(A'M'B')=(A_1M_1B_1),$$

ანუ

$$\frac{A'M'}{A'B'}=\frac{A_1M_1}{A_1B_1}.$$

ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს, რომ (ნახ. 152):

$$A_1B_1=a_1, \ A'B'=a',$$
$$A_1M_1=x_1, \ A'M'=x'.$$

ამრიგად

$$\frac{x'}{a'}=\frac{x_1}{a_1}.$$

აქედან

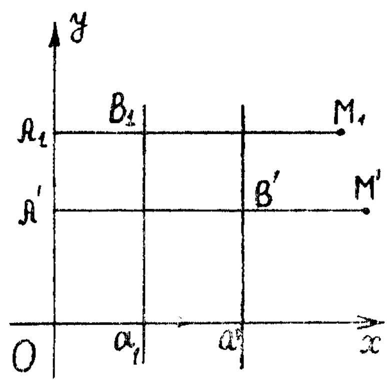
$$x' = \frac{a'}{a_1} x_1.$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ y'-ისათვის შემდეგ ფორმულას

$$y = \frac{b'}{b_1} y_1.$$

თუ ჩავსვამთ აქ x_1 და y_1-ის მნიშვნელობებს და კოეფიციენტებისათვის შემოვიღებთ სათანადო აღნიშვნებს, მოგვეცემა წრფივი გარდაქმნები (22) გარდაქმნების სახისა, ე. ი. განსახილავი გარდაქმნა ყოფილა აფინური (რ. დ. გ).

სიბრტყეში სამ წერტილს ეწოდება დამოუკიდებელი წერტილები, თუ ისინი ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებული ორი დამოუკიდებელი სამეულისათვის: A, B, C და A', B', C' არსებობს ერთადერთი ისეთი აფინური თანადობა, რომელიც შეუთანადებს ამ სამეულებს ერთიმეორეს. ამ საკითხის უშუალო განხილვა ასეთია: (22) აფინურ გარდაქმნებში კოეფიციენტები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ აღნიშნული სამეულები იყოს თანადი, ე. ი. თუ მარჯვნივ x, y-ის ნაცვლად შევიტანთ მორიგეობით A, B, C წერტილების კოორდინატებს, ხოლო მარცხნივ x', y'-ის ნაცვლად A', B', C'-ის კოორდინატებს, ეს ტოლობანი უნდა დაკმაყოფილდეს. ამით მივიღებთ 6 განტოლებისაგან (შესაბამ წერტილთა თვითეული წყვილი მოგვცემს ორ განტოლებას) შედგენილ სისტემას a, b, c, d, p, q კოეფიციენტების მიმართ. წერტილთა დამოუკიდებლობა უზრუნველყოფს სისტემის თავსებადობას. აქედან ამოიხსნება გარდაქმნის კოეფიციენტები. მაგრამ არსებობს უფრო მოკლე გზა ამ საკითხის გადასაჭრელად. დავწეროთ AB, AC და $A'B'$, $A'C'$ წრფეების განტოლებანი ზოგადი სახით:



ნახ. 152.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (AB \text{ წრფე}).$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (AC \text{ წრფე}).$$

$$A_1'x+B_1'y+C_1'=0 \quad (A'B' \text{ წრფე}),$$
$$A_2'x+B_2'y+C_2'=0 \quad (A'C' \text{ წრფე}).$$

ადვილი მისახვედრია, რომ შემდეგი სისტემიდან განსაზღვრული გარდაქმნა (ე. ი. აქედან ამოხსნილი x', y'):

$$A_1'x'+B_1'y'+C_1'=\lambda(A_1x+B_1y+C_1),$$
$$A_2'x'+B_2'y'+C_2'=\mu(A_2x+B_2y+C_2)$$

AB და AC წრფეებს შესაბამად გადასახავს $A'B'$ და $B'C'$ წრფეებში λ და μ პარამეტრების ნებისმიერ მნიშვნელობათათვის.

ახლა λ და μ პარამეტრები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ B, C წერტილები გადაისახოს B', C' წერტილებში (A წერტილი თავისთავად გადაისახება A' წერტილში როგორც AB და BC წრფეების თანაკვეთის წერტილი). ეს ასე მოხდება. უკანასკნელ გარდაქმნებში უნდა ჩავსვათ B და B' წერტილების კოორდინატები (B წერტილის კოორდინატები x, y-ის ნაცვლად, ხოლო B' წერტილის კოორდინატები x', y'-ის ნაცვლად), ამით განისაზღვრება μ პარამეტრი. ანალოგიურად, თუ ჩავსვამთ C და C' წერტილების კოორდინატებს, ამით განისაზღვრება λ პარამეტრი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ x', y'-ის განსაზღვრა მოხდება ცალსახად, რადგან სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} A_1', & B_1' \\ A_2', & B_2' \end{vmatrix}$$

განსხვავდება ნულისაგან ($A'B'$ და $A'C'$ წრფეები არ არის პარალელური). ასევე λ და μ პარამეტრებიც განისაზღვრება ცალსახად. მართლაც, B წერტილის კოორდინატების ჩასმის შედეგად სისტემის პირველი განტოლება იგივობად იქცევა. მეორე განტოლებაში μ პარამეტრის კოეფიციენტი არ შეიძლება ნული გახდეს (რადგან B წერტილი არ მდებარეობს AC წრფეზე); მაშასადამე, μ განისაზღვრება ცალსახად. ასევე ითქმის λ-ს შესახებ. ახლა განვიხილოთ აფინური გარდაქმნის ერთი კერძო შემთხვევა:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x, \\ y' &= \lambda y, \end{aligned} \tag{25}$$

სადაც λ მუდმივია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ გარდაქმნით წრფე გადაისახება თავისივე პარალელურ წრფეში. მოცემულ სამკუთხედსა და მის შესაბამ სამკუთხედს შესაბამი გვერდები ექნებათ პარალელური. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ეს სამკუთხედები მსგავსია. მაშასა-

ლამე, (25) აფინური გარდაქმნით, სამკუთხედის თანადი სამკუთხედი მსგავსია აღებული სამკუთხედისა. ამიტომ (25) გარდაქმნების საფუძველზე შემოდის მსგავსების ცნების გაფართოება. ნებისმიერი ნაკვთის შესაბამ ნაკვთს, (25) გარდაქმნების მიხედვით, ეწოდება აღებული ნაკვთის მსგავსი ნაკვთი. ცხადია, რომ ორი სამკუთხედი შეიძლება იყოს მსგავსი, მაგრამ მათ შესაბამი გვერდები არ ჰქონდეთ პარალელური; ოღონდ ყოველთვის შესაძლებელია ერთი სამკუთხედის მოძრაობით მსგავს სამკუთხედებს გავუხადოთ პარალელური გვერდები. ამრიგად (25) გარდაქმნა აკავშირებს სპეციალურად განლაგებულ სამკუთხედებს. ასევე ითქმის სხვა ნაკვთებზედაც. თუ ერთი ნაკვთი მოძრაობით შეგვიძლია ისეთ მდგომარეობაში მოვიყვანოთ მეორის მიმართ, რომ ისინი ერთიმეორეში გადაისახონ (25) გარდაქმნებით, მაშინ ამ ნაკვთებს ვუწოდებთ მსგავს ნაკვთებს. თუ ორი მსგავსი ნაკვთი ისეა განლაგებული, რომ უკავშირდებიან ერთიმეორეს (25) გარდაქმნით, მაშინ მათ ერთიმეორისადმი ჰომოთეტიური ნაკვთები ეწოდება. O წერტილს ეწოდება ჰომოთეტიის ცენტრი.

3. **პროექციული გარდაქმნა**. პროექციული გარდაქმნა სიბრტყეზე ეწოდება საერთომნიშვნელიან წილადწრფივ გარდაქმნას სიბრტყეზე:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}, \\
y' &= \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

სადაც a_1, b_1, c_1 და ა. შ. კოეფიციენტები ნებისმიერი მუდმივებია, ოღონდ აკმაყოფილებენ ერთადერთ პირობას

$$
\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{27}
$$

ეს პირობა იმის მაჩვენებელია, რომ (26) გარდაქმნებში ორივე მრიცხველი და საერთო მნიშვნელი ერთდროულად ნულები არ შეიძლება იყოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველ x, y წყვილს შეესაბამება x', y' წყვილი ცალსახად და, პირუკუ, ე. ი. (27) პირობა აღებული გარდაქმნების ურთიერთცალსახობის მაჩვენებელია. დავუშვათ, რომ M' წერტილი მოძრაობს რაიმე წრფეზე. ამ წრფის განტოლება წარმოვადგინოთ ზოგადი სახით

$$Ax'+By'+C=0.$$

შევიტანოთ აქ x', y'-ის მნიშვნელობანი (26) გარდაქმნიდან და გადავამრავლოთ საერთო მნიშვნელზე. გვექნება

$$A(a_1x+b_1y+c_1)+B(a_2x+b_2y+c_2)+C(a_3x+b_3y+c_3)=0.$$

ეს განტოლება კი წრფივია x, y-ის მიმართ; მაშასადამე, გამოსახავს წრფეს. შეუძლებელია, რომ ეს განტოლება იყოს განუსაზღვრელი; ასეთ დაშვებას ეწინააღმდეგება (27) პირობა. ამრიგად, (26) გარდაქმნებით დამყარებულ თანადობაში, **წ რ ფ ე ს ე თ ა ნ ა დ ე ბ ა წ რ ფ ე**.

ახლა განვიხილოთ ისეთი წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას

$$a_3x+b_3y+c_3=0. \tag{28}$$

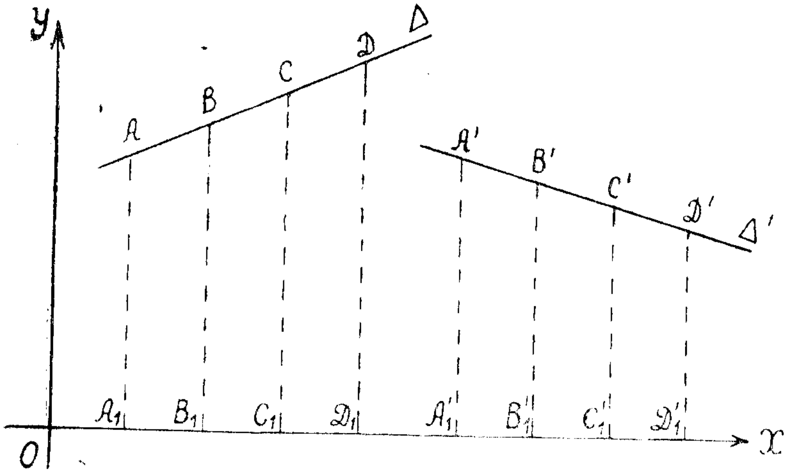
ასეთი წერტილებისათვის (26) გარდაქმნებში საერთო მნიშვნელი იქნება ნული, რადგან ამ შემთხვევაში მრიცხველები ერთდროულად ნულები არ შეიძლება იყოს (მრიცხველები და მნიშვნელი, სამივე ერთდროულად ნული არ შეიძლება იყოს 27-ე პირობის თანახმად), ამიტომ x', y'-დან ერთი მაინც უსასრულოდ დიდი იქნება, ე. ი. (28) განტოლებით განსაზღვრული წრფის წერტილებს ეთანადება სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები ან, რაც იგივეა, (28) განტოლებით განსაზღვრულ წრფეს ეთანადება სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წრფე. ამრიგად, უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა და უსასრულოდ დაშორებული წრფის ცნება (მათი სპეციალური მდებარეობა) არ არის ინვარიანტი პროექციული თანადობისა. ეს ელემენტები სასრულეთის ელემენტებთან ერთად ერთნაირ როლს ასრულებენ პროექციული თანადობის მიმართ. აქვე შევნიშნავთ, რომ (28) განტოლებაში a_3, b_3, c_3 კოეფიციენტების შერჩევით შეგვიძლია მივიღოთ სიბრტყის ყოველი წრფე; მაშასადამე, (26) პროექციული თანადობა ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ ამ თანადობით სიბრტყის ნებისმიერი წრფე გადავსახოთ უსასრულოდ დაშორებულ წრფეზე. კერძოდ, თუ მოვითხოვთ, რომ უსასრულოდ დაშორებული წრფე გადაისახოს თავის თავში, ე. ი. უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს შეესაბამებოდეს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, მაშინ უნდა მოვითხოვოთ, რომ (28) განტოლება თვითონ გამოსახავდეს უსასრულოდ დაშორებულ წრფეს; ამისათვის კი საჭიროა a_3, b_3 კოეფიციენტები ერთდროულად ნულები იყოს. ამ პირობებში (26) გარდაქმნები ასეთ სახეს მიიღებს (უნდა ჩავსვათ $a_3=b_3=0$):

$$x'=\frac{a_1}{c_3}x+\frac{b_1}{c_3}y+\frac{c_1}{c_3},$$

$$y' = \frac{a_2}{c_3}x + \frac{b_2}{c_3}y + \frac{c_2}{c_3}.$$

ეს კი აფინური გარდაქმნებია. ამრიგად, აფინური გარდაქმნები ისეთი პროექციული გარდაქმნებია, რომლის დროსაც უსასრულოდ დაშორებულ წრფეს შეესაბამება თავისი თავი (უსასრულოდ დაშორებული წრფე).

ახლა განვიხილოთ A, B, C, D წერტილები რაიმე Δ წრფეზე. A', B', C', D' იყოს A, B, C, D წერტილების შესაბამი წერტილები Δ' წრფეზე. ამ ორი ოთხეულის გეგმილები Ox ღერძზე შესაბამად აღვნიშნოთ A_1, B_1, C_1, D_1-ით და A_1', B_1', C_1', D_1'-ით (ნახ. 153). Δ წრფის განტოლება ავიღოთ კანონიკური სახით



ნახ. 153.

$$y = kx + b.$$

y-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (26) გარდაქმნის ტოლობაში. გვექნება

$$x' = \frac{(a_1 + kb_1)x + b_1 b + c_1}{(a_3 + kb_3)x + b_3 b + c_3}.$$

ეს კი წილადწრფივი გარდაქმნაა. ამრიგად, A_1, B_1, C_1, D_1 წერტილები წილადწრფივი გარდაქმნით გადაისახებიან A_1', B_1', C_1', D_1' წერტილებში. წილადწრფივი გარდაქმნა წრფეზე, როგორც ვიცით,

არ ცვლის ოთხი წერტილის ანჰარმონიულ ფარდობას; მაშასადამე,

$$(A_1'B_1'C_1'D_1')=(A_1B_1C_1D_1).$$

მეორე მხრივ ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}, \qquad \frac{AD}{BD}=\frac{A_1D_1}{B_1D_1}.$$

აქედან

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}:\frac{A_1D_1}{B_1D_1},$$

ანუ

$$(ABCD)=(A_1B_1C_1D_1).$$

ანალოგიურად

$$(A'B'C'D')=(A_1'B_1'C_1'D_1').$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობის (მარჯვენა ნაწილები ტოლია) შედარება მოგვცემს

$$(A'B'C'D')=(ABCD).$$

ამრიგად, **ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია პროექციული გარდაქმნისა.**

რადგან წრფე გადაისახება წრფეზე, ამიტომ ორი a და b წრფეების თანაკვეთის M წერტილი გადაისახება შესაბამი a' და b' წრფეების თანაკვეთის M' წერტილში, ოღონდ შესაძლებელია M' წერტილი იყოს უსასრულეთშიც, ე. ი. შესაძლებელია a', b' წრფეები იყოს პარალელური. ეს მაშინ მოხდება, როცა a და b წრფეების თანაკვეთის წერტილი მდებარეობს (28) განტოლებით განსაზღვრულ წრფეზე. ამ შემთხვევაში a, b წრფეებს ეთანადება პარალელური წრფეები. ამრიგად, წრფეთა პარალელურობა არ არის ინვარიანტი პროექციული თანადობისა. უმთავრესად ამით განსხვავდება აფინური თანადობა პროექციული თანადობისაგან. სავსებით ისევე, როგორც აფინური თანადობის შემთხვევაში, მტკიცდება, რომ პროექციული გარდაქმნები სიბრტყეზე ქმნიან ჯგუფს (ეს ჯგუფი განისაზღვრება (26) ფორმულებით, რომელშიც კოეფიციენტები განიხილება როგორც ცვლადი პარამეტრები). ცხადია, რომ აფინურ გარდაქმნათა ჯგუფი წარმოგვიდგება როგორც პროექციული ჯგუფის ქვეჯგუფი.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ პროექციული თანადობის ზემოაღნიშნულ თვისებათაგან დამახასიათებელია (განმსაზღვრელია) შემდეგი თვისებანი:

1) წერტილს ეთანადება წერტილი—ურთიერთცალსახად;

2) წრფეს ეთანადება წრფე—ურთიერთცალსახად;

3) ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია მოცემული გარდაქმნისა.

დავუშვათ, რომ სიბრტყის წერტილთა შორის თანადობას ახლავს ეს თვისებანი. ავიღოთ უსასრულოდ დაშორებული წრფის შესაბამი წრფე. ამ წრფის განტოლება დავწეროთ შემდეგი სახით

$$a_3x+b_3y+c_3=0.$$

ეს განტოლება სავსებით გარკვეული უნდა იყოს, თუ დავუშვებთ, რომ უსასრულოდ დაშორებულ წრფეს შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებული წრფე, მაშინ ოთხი წერტილის ინვარიანტობიდან, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები (წრფეზე პროექციული თანადობის განხილვის დროს), მოგვეცემა სამი წერტილის მარტივი ფარდობის ინვარიანტობა. ეს პირობა კი პირველ ორ პირობასთან ერთად განსაზღვრავს აფინურ თანადობას, რაც, ცხადია, პროექციულიც არის. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როცა უსასრულოდ დაშორებული წრფე გადაისახება სასრულეთის წრფეზე, რომელსაც ზემოთ მოყვანილი განტოლება განსაზღვრავს. შევადგინოთ შემდეგი პროექციული გარდაქმნა:

$$x_1=\frac{x}{a_3x+b_3y+c_3},$$

$$y_1=\frac{y}{a_3x+b_3y+c_3}.$$

აშკარაა, რომ ასეთი გარდაქმნის დროს მოცემულ წრფეს შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებული წრფე. ეს გარდაქმნა და განსახილავი გარდაქმნა (ცხადია) თანადობას დაამყარებს $M'(x', y')$ და $M_1(x_1, y_1)$ წერტილებს შორის. ადვილი შესამჩნევია, რომ, როცა $M_1(x_1, y_1)$ უსასრულოდ დაშორებული წერტილია, მაშინ $M'(x', y')$-იც იქნება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, ე. ი. უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. გარდა ამისა, თანადობას ახლავს სამივე ზემოაღნიშნული თვისება. პირველი ორი აშკარაა, შევამოწმოთ მესამე. გვექნება:

$$(A'B'C'M')=(ABCM),$$

$$A_1B_1C_1M_1)=(ABCM).$$

აქედან
$$(A'B'C'M')=(A_1B_1C_1M_1).$$

ამრიგად M' და M_1-ის თანადობის დროს ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია. მეორე მხრივ უსასრულოდ დაშორებული წერტილები თანადია, ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ სამი წერტილის მარტივი ფარდობა იყოს ინვარიანტი. ამრიგად M' და M_1-ის შორის თანადობას აქვს აფინური თანადობის განმსაზღვრელი სამივე თვისება. მაშასადამე, M' და M_1 შეკავშირებულია აფინური თანადობით. გვექნება:

$$x'=ax_1+by_1+p,$$
$$y'=cx_1+dy_1+q.$$

თუ ჩავსვამთ აქ x_1 და y_1-ის მნიშვნელობებს ზემოთ მოყვანილი პროექციული გარდაქმნებიდან, მივიღებთ საერთომნიშვნელიან წილადწრფივ გარდაქმნებს, ე. ი. პროექციულ გარდაქმნებს (რ. დ. გ.).

ახლა ჩვენ გამოვსახავთ პროექციულ გარდაქმნებს ერთგვაროვან კოორდინატებში; ამისათვის (26) ფორმულებში x, y და x', y' უნდა შევცვალოთ ერთგვაროვანი კოორდინატებით. გვექნება:

$$\frac{\xi_1'}{\xi_3'}=\frac{a_1\dfrac{\xi_1}{\xi_3}+b_1\dfrac{\xi_2}{\xi_3}+c_1}{a_3\dfrac{\xi_1}{\xi_3}+b_3\dfrac{\xi_2}{\xi_3}+c_3},$$

$$\frac{\xi_2'}{\xi_3'}=\frac{a_2\dfrac{\xi_1}{\xi_3}+b_2\dfrac{\xi_2}{\xi_3}+c_2}{a_3\dfrac{\xi_1}{\xi_3}+b_3\dfrac{\xi_2}{\xi_3}+c_3}.$$

ეს ტოლობანი შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ

$$\frac{a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3}{\xi_1'}=\frac{a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3}{\xi_2'}=\frac{a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3}{\xi_3'}=\rho,$$

სადაც $\rho\neq 0$. აქედან მივიღებთ პროექციულ გარდაქმნას ჩაწერილს ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\begin{aligned}\rho\xi_1'&=a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3,\\ \rho\xi_2'&=a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3,\\ \rho\xi_3'&=a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3.\end{aligned}\tag{29}$$

ამრიგად, პროექციული გარდაქმნები სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში არის წრფივი და ერთგვაროვანი.

სიბრტყის ოთხ წერტილს ეწოდება დამოუკიდებელი წერტილები, თუ მათგან შედგენილი ყოველი სამეული არის დამოუკიდებელი (არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე). ადვილი შესამჩნევია, რომ დამოუკიდებელი ოთხი წერტილი ადგენს ჩვეულებრივ ოთხკუთხედს, ე. ი. ჩვეულებრივი ოთხკუთხედის წვეროებს ეწოდება დამოუკიდებელი წერტილები. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ წერტილთა ნებისმიერი ორი დამოუკიდებელი ოთხეულისათვის: A, B, C, D და A', B', C', D',—არსებობს ერთადერთი პროექციული თანადობა, რომელიც შეუთანადებს მოცემულ ოთხეულებს ერთიმეორეს. ამ საკითხის გადაწყვეტის ჩვეულებრივი გზა ასეთია: (26) პროექციულ გარდაქმნებში კოეფიციენტები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ მოცემული ოთხეულები იყოს თანადი, ე. ი. თუ მარჯვნივ x, y-ის ნაცვლად მორიგეობით ჩავსვამთ A, B, C, D წერტილების კოორდინატებს, ხოლო მარცხნივ x', y'-ის ნაცვლად A', B', C', D' წერტილების კოორდინატებს, ეს ტოლობანი უნდა დაკმაყოფილდეს. ამით მივიღებთ 8 განტოლებისაგან შედგენილ ერთგვაროვან სისტემას (შესაბამ წერტილთა თვითეული წყვილი მოგვცემს ორ განტოლებას), გარდაქმნის 9 კოეფიციენტის მიმართ, საიდანაც განისაზღვრება 8 კოეფიციენტი ერთი რომელიმე კოეფიციენტის საშუალებით. ასეთ სისტემას ყოველთვის ექნება ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი. მოცემული ოთხეულების დამოუკიდებლობიდან გამოვა შესაბამი პროექციული გარდაქმნის ერთადერთობა. მაგრამ, არსებობს უფრო მოკლე გზა ამ საკითხის გადასაჭრელად. დავწეროთ AB, AC, BC და $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ გვერდების განტოლებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=0 \quad (AB \text{ წრფე}),$$
$$b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3=0 \quad (AC \text{ წრფე}),$$
$$c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3=0 \quad (BC \text{ წრფე})$$

და

$$a_1'\xi_1+a_2'\xi_2+a_3'\xi_3=0 \quad (A'B' \text{ წრფე}),$$
$$b_1'\xi_1+b_2'\xi_2+b_3'\xi_3=0 \quad (A'C' \text{ წრფე}),$$
$$c_1'\xi_1+c_2'\xi_2+c_3'\xi_3=0 \quad (B'C' \text{ წრფე}).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ პროექციული გარდაქმნა, რომელიც მიიღება შემდეგი სისტემის:

$$a_1'\xi_1'+a_2'\xi_2'+a_3'\xi_3'=\lambda(a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3),$$
$$b_1'\xi_1'+b_2'\xi_2'+b_3'\xi_3'=\mu(b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3),$$
$$c_1'\xi_1'+c_2'\xi_2'+c_3'\xi_3'=\nu(c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3)$$

ამოხსნის შედეგად, ერთიმეორეს შეუთანადებს აღებულ წრფეთა სამეულებს λ, μ, ν პარამეტრების ნებისმიერ მნიშვნელობათათვის. ცხადია, რომ ამ გარდაქმნით A, B, C წერტილები გადაისახება A', B', C' წერტილებში (რადგან ABC სამკუთხედის გვერდები გადასახულია $A'B'C'$ სამკუთხედის გვერდებში). ახლა λ, μ, ν პარამეტრები ისე შევარჩიოთ, რომ მიღებული გარდაქმნით D და D' წერტილები აღმოჩნდეს ერთიმეორის თანადი; ამისათვის უკანასკნელ ტოლობათა მარჯვენა მხარეს ξ_1, ξ_2, ξ_3-ის ნაცვლად ჩავსვათ D წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები, ხოლო მარცხენა მხარეს ξ_1', ξ_2', ξ_3'-ის ნაცვლად ჩავსვათ D' წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები. ამ შემთხვევაში ბრჩხილებში მოთავსებული არც ერთი გამოსახულება ნულს არ გაუტოლდება (რადგან D წერტილი არ მდებარეობს ABC სამკუთხედის არც ერთ გვერდზე); მაშასადამე, ცალსახად განისაზღვრება λ, μ, ν პარამეტრები. ადვილი შესამჩნევია, რომ განსახილავი სისტემიდან ცალსახად განისაზღვრება ξ_1', ξ_2' ξ_3' სიდიდეები. ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ b_1', & b_2', & b_3' \\ c_1', & c_2', & c_3' \end{vmatrix}$$

განსხვავდება ნულისაგან ($A'B'$, $A'C'$ და $B'C'$ წრფეები არ გადიან ერთ წერტილზე). ამრიგად ცალსახად განისაზღვრება საძიებელი პროექციული თანადობა (რ. დ. გ.).

§ 3. ორთოგონალური, აფინური და პროექციული გარდაქმნები სივრცეში

1. ორთოგონალური გარდაქმნა. ორთოგონალური გარდაქმნა სივრცეში ეწოდება ისეთ წრფივ გარდაქმნას

$$\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1z+d_1, \\ y' &= a_2x+b_2y+c_2z+d_2, \\ z' &= a_3x+b_3y+c_3z+d_3, \end{aligned} \tag{30}$$

რომლის მთავარი მატრიცა, ე. ი.

$$\begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{pmatrix}$$

ორთოგონალურია.

სიბრტყეზე ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად მივიღებთ ორთოგონალური გარდაქმნის შემდეგ თვისებებს:

1) წერტილს ეთანადება წერტილი—ურთიერთცალსახად;

2) წრეს ეთანადება წრფე—ურთიერთცალსახად;

3) სიბრტყეს ეთანადება სიბრტყე—ურთიერთცალსახად;

4) ორ წერტილს შორის მანძილი ინვარიანტია ორთოგონალური გარდაქმნისა;

5) ორთოგონალური გარდაქმნები სივრცეში ქმნიან ჯგუფს. ამ თვისებათა შორის ძირითადია პირველი და მეოთხე თვისება. ამ ორი თვისებით სავსებით განისაზღვრება ორთოგონალური გარდაქმნა სივრცეში. ამის დამტკიცება ხდება სიბრტყეზე ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად.

2. აფინური გარდაქმნა. სივრცეში აფინური გარდაქმნა ეწოდება წრფივ გარდაქმნას სივრცეში, სადაც გარდაქმნის მთავარი მატრიცის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. ამრიგად, აფინური გარდაქმნა სივრცეში განისაზღვრება (30) გარდაქმნით, სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერია, ოღონდ აკმაყოფილებენ ერთადერთ პირობას

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{31}$$

ისეთივე გამოთვლებით, როგორიც ჩატარებული იყო სიბრტყეზე, დამტკიცდება სივრცეში აფინური გარდაქმნის შემდეგი თვისებანი:

1) წერტილს ეთანადება წერტილი—ურთიერთცალსახად;

2) წრფეს ეთანადება წრფე—ურთიერთცალსახად;

3) სიბრტყეს ეთანადება სიბრტყე—ურთიერთცალსახად;

4) სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ინვარიანტია აფინური გარდაქმნისა;

5) აფინური გარდაქმნები სივრცეში ქმნიან ჯგუფს. გარდა ამისა, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს ეთანადება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი და აქედან გამომდინარე პარალელურ წრფეებს ეთანადება პარალელური წრფეები,

პარალელურ სიბრტყეებს კი პარალელური სიბრტყეები. მტკიცდება, რომ ზემოაღნიშნული თვისებებით განისაზღვრება აფინური გარდაქმნა სივრცეში. ამის დამტკიცება ხდება სიბრტყეზე აფინური თანადობისათვის ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად. სივრცეში ოთხ წერტილს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ეს წერტილები არ მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე, ე. ი. არ არიან კომპლანარული. ეს წერტილები განსაზღვრავენ ჩვეულებრივ ტეტრაედრს. მტკიცდება, რომ არსებობს ერთადერთი აფინური თანადობა სივრცეში, რომელიც შეუთანადებს ერთიმეორეს ნებისმიერად აღებულ წერტილთა ორ დამოუკიდებელ ოთხეულს. დამტკიცება მიმდინარეობს სიბრტყეზე წარმოებული მსჯელობის ანალოგიურად.

3. პროექციული გარდაქმნა. სივრცეში პროექციული გარდაქმნა ეწოდება საერთომნიშვნელიან წილადწრფივ გარდაქმნას:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4}, \\
y' &= \frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4}, \qquad (32) \\
z' &= \frac{a_3x+b_3y+c_3z+d_3}{a_4x+b_4y+c_4z+d_4},
\end{aligned}
$$

სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერია, ოღონდ აკმაყოფილებენ ერთადერთ პირობას

$$
\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (33)
$$

ეს პირობა უზრუნველყოფს გარდაქმნის ურთიერთცალსახობას (იგულისხმება, რომ უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა და სასრულეთის წერტილის შესაბამობა კანონიერია). ისეთივე გამოთვლებით, როგორიც ჩატარებული იყოს სიბრტყეზე, დამტკიცდება სივრცეში პროექციული გარდაქმნის შემდეგი თვისებანი:

1) წერტილს ეთანადება წერტილი—ურთიერთცალსახად;

2) წრფეს ეთანადება წრფე—ურთიერთცალსახად;

3) სიბრტყეს ეთანადება სიბრტყე—ურთიერთცალსახად;

4) ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია პროექციული გარდაქმნისა;

5) პროექციული გარდაქმნები სივრცეში ქმნიან ჯგუფს. მტკიცდება, რომ ეს თვისებები სავსებით განსაზღვრავს პროექციულ გარდაქმნას.

აფინური თანადობიდან განსხვავებით, აქ სასრულეთის წერტილს შეიძლება ეთანადებოდეს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. იმ წერტილებს, რომელნიც აკმაყოფილებენ შემდეგი სიბრტყის განტოლებას

$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0, \tag{34}$$

ეთანადება სივრცის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები, ე. ი. (34) განტოლებით განსაზღვრულ სიბრტყეს ეთანადება სივრცის უსასრულოდ დაშორებული სიბრტყე.

რადგან (34) განტოლებაში a_4, b_4, c_4, d_4 ნებისმიერად შეგვიძლია შევარჩიოთ, ამიტომ სივრცის ნებისმიერი სიბრტყე შეიძლება გადასახულ იქნას უსასრულოდ დაშორებულ სიბრტყეზე. ახლა გამოვსახოთ (34) გარდაქმნები ერთგვაროვან კოორდინატებში; ამისათვის ჩავსვათ იქ x, y, z,-ის და x', y', z'-ის მნიშვნელობანი ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$x=\frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad y=\frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad z=\frac{\xi_3}{\xi_4},$$

$$x'=\frac{\xi_1'}{\xi_4'}, \quad y'=\frac{\xi_2'}{\xi_4'}, \quad z'=\frac{\xi_3'}{\xi_4'}.$$

სიბრტყეზე წარმოებული გამოთვლების ანალოგიური გამოთვლებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\rho\xi_1' &= a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3+d_1\xi_4,\\
\rho\xi_2' &= a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3+d_2\xi_4,\\
\rho\xi_3' &= a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3+d_3\xi_4,\\
\rho\xi_4' &= a_4\xi_1+b_4\xi_2+c_4\xi_3+d_4\xi_4.
\end{aligned} \tag{35}$$

ამრიგად, *სივრცეში პროექციული გარდაქმნები, ერთგვაროვან კოორდინატებში, არის წრფივი და ერთგვაროვანი.*

ადვილი მისახვედრია, რომ აქაც (ე. ი. სივრცეში) ორთოგონალური გარდაქმნები წარმოადგენს აფინური გარდაქმნების კერძო შემთხვევას, ხოლო თვით აფინური გარდაქმნები კი პროექციული გარდაქმნების კერძო შემთხვევას.

სივრცის ხუთ წერტილს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათგან შედგენილი ყოველი ოთხეული არის დამოუკიდებელი (არ არის

კომპლანარული). მტკიცდება, რომ ნებისმიერად აღებულ წერტილთა ორი დამოუკიდებელი ხუთეულისათვის არსებობს ერთადერთი ისეთი პროექციული თანადობა, რომელიც შეუთანადებს მოცემულ ორ ხუთეულს ერთიმეორეს (დამტკიცება ჩატარდება სიბრტყეზე წარმოებული მსჯელობის მსგავსად).

§ 4. პროექციული კოორდინატები

1. პროექციული კოორდინატები წრფეზე. განვიხილოთ Ox ღერძზე ნებისმიერად აღებული ორი წერტილი ერთგვაროვან კოორდინატებში;

$$A=(\eta_1,\ \eta_2),\ B=(\zeta_1,\ \zeta_2).$$

წრფის ნებისმიერი $M(\xi_1,\ \xi_2)$ წერტილისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი λ_1, λ_2 რიცხვები, რომ ადგილი ჰქნეს შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned}\xi_1&=\lambda_1\eta_1+\lambda_2\zeta_1,\\ \xi_2&=\lambda_1\eta_2+\lambda_2\zeta_2.\end{aligned}\tag{36}$$

მართლაც, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (36) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, ე. ი.

$$\begin{vmatrix}\eta_1, & \zeta_1\\ \eta_2, & \zeta_2\end{vmatrix}\neq 0$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში A და B წერტილები დაემთხვეოდა ერთიმეორეს). ეს იმას ნიშნავს, რომ შეიძლება ამ სისტემის ამოხსნა λ_1, λ_2-ის მიმართ. ამ უკანასკნელი რიცხვებისათვის მივიღებთ წრფივსა და ერთგვაროვან გამოსახულებებს ერთგვაროვანი კოორდინატების საშუალებით:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=a_1\xi_1+b_1\xi_2,\\ \lambda_2&=a_2\xi_1+b_2\xi_2.\end{aligned}\tag{37}$$

(36) და (37) ტოლობანი იმის მაჩვენებელია, რომ M წერტილის ξ_1, ξ_2 ერთგვაროვანი კოორდინატები ცალსახად განსაზღვრავს λ_1, λ_2 სიდიდეებს და, პირუკუ, λ_1, λ_2 პარამეტრები ცალსახად განსაზღვრავს ξ_1, ξ_2 ერთგვაროვან კოორდინატებს, ე. ი. λ_1, λ_2 რიცხვები ცალსახად განსაზღვრავენ წერტილის მდებარეობას წრფეზე. თუ (37) ფორმულებში ξ_1, ξ_2-ის ნაცვლად დავწერთ $\rho\xi_1$, $\rho\xi_2$-ს, მაშინ λ_1, λ_2 შეიცვლება $\rho\lambda_1$, $\rho\lambda_2$-ით. ეს იმას ნიშნავს, რომ λ_1, λ_2 პარამეტრები არ განისაზღვრება ცალ-

სახად წერტილის საშუალებით. გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ λ_1, λ_2 არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ნულები. ამრიგად λ_1, λ_2 პარამეტრებს აქვთ ξ_1, ξ_2 ერთგვაროვანი კოორდინატების ანალოგიური თვისებანი. მათ ეწოდებათ M წერტილის პ რ ო ე ქ-ც ი უ ლ ი კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი. სიმბოლურად ამ ფაქტის ჩაწერა ისევე ხდება, როგორც ერთგვაროვანი კოორდინატების შემთხვევაში: $M=(\lambda_1, \lambda_2)$.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი გარდაქმნა წრფეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\begin{aligned} \rho\xi_1' &= a_1\xi_1 + b_1\xi_2, \\ \delta\xi_2' &= a_2\xi_1 + b_2\xi_2. \end{aligned} \tag{38}$$

(16) ფორმულების მსგავსად ეს გარდაქმნა იქნება პროექციული (ამ შემთხვევაში $a=a_1$, $b=b_1$, $c=a_2$, $d=b_2$). ამ ორი უკანასკნელი ტოლობის შედარება (37) ფორმულებთან მოგვცემს:

$$\lambda_1=\rho\xi_1', \ \lambda_2=\rho\xi_2'.$$

მაგრამ ვიცით, რომ

$$(\rho\xi_1', \rho\xi_2')=(\xi_1', \xi_2')=M',$$

ანუ

$$(\lambda_1, \lambda_2)=M',$$

ამრიგად λ_1, λ_2 წარმოგვიდგება როგორც M' წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები. გვექნება (თანახმად ერთგვაროვანი კოორდინატების განმარტებისა)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=x'. \tag{39}$$

ამრიგად, თუ M წერტილის λ_1, λ_2 პროექციულ კოორდინატებს მოვუძებნით შესაბამ M' წერტილს (38) ტოლობის მიხედვით მივიღებთ M წერტილის პროექციულად თანად M' წერტილს და, პირუკუ, M წერტილის პროექციულად თანადი M' წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები პროექციული კოორდინატები იქნება M წერტილისათვის.

(36) გარდაქმნებიდან პირდაპირ ჩანს, რომ λ_1, λ_2 პარამეტრების მნიშვნელობანი დამოკიდებულია A და B წერტილების ერთგვაროვან კოორდინატებზე, ე. ი. A და B წერტილების მდებარეობაზე. A და B ყოველ წყვილს შეესაბამება გარკვეული პროექციული კოორდინაცია, ამიტომ A და B წერტილებს ეწოდება პროექციული კოორდინაციის ბ ა ზ ი ს ი ს წ ე რ ტ ი ლ ე ბ ი. თუ ბაზისს

შევცვლით, შეიცვლება M წერტილის პროექციული კოორდინატები, ე. ი. პროექციული კოორდინაციის ხასიათი წრფეზე. კერძოდ, თუ A და B წერტილები მოცემულია ერთგვაროვან კოორდინატებში შემდეგნაირად:

$$A=(1,\ 0),\ B=(0,\ 1),$$

მაშინ (36) ფორმულები მოგვცემს

$$\xi_1=\lambda_1,\ \xi_2=\lambda_2.$$

ამრიგად, ზემოაღნიშნული ბაზისის შემთხვევაში, წერტილის პროექციული კოორდინატები ამავე წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატებია. ასეთ ბაზისს კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი ბ ა ზ ი ს ი ეწოდება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ A და B წერტილების პროექციული კოორდინატები (ე. ი. λ_1, λ_2 მნიშვნელობანი იმ შემთხვევაში, როცა 36-ე ტოლობებში ξ_1, ξ_2 შეიცვლება მორიგეობით η_1, η_2-ით და ζ_1, ζ_2-ით) შესაბამად იქნება: 1, 0 და 0, 1. იმ შემთხვევაში, როცა ბაზისის წერტილებად აღებულია Ox ღერძის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი და სათავე, მაშინ A და B წერტილების ერთგვაროვანი კოორდინატები იქნება: 1, 0 და 0, 1. ამ შემთხვევაში A და B წერტილების პროექციული კოორდინატებიც, როგორც ეს ზემოთ იყო ნაჩვენები, იგივეა. ამრიგად კანონიკურ ბაზისს შეესაბამება Ox ღერძის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი და ამ ღერძის სათავე. ჩვენ შეგვიძლია პროექციული გარდაქმნები ისე შევარჩიოთ, რომ M' წერტილის პროექციული კოორდინაცია მოხდეს კანონიკური ბაზისის მიმართ. ეს განხორციელდება (38) გარდაქმნებით. ასეთი გარდაქმნის შედეგად B წერტილი გადაისახება O წერტილში, A წერტილი კი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. შემდგომ პროექციულ კოორდინატებს აღვნიშნავთ ისეთივე ასოებით, როგორც ერთგვაროვან კოორდინატებს, ე. ი. ξ_1, ξ_2 ასოებით.

თუ ახლა პროექციული გარდაქმნის (16) ფორმულებში ერთგვაროვან კოორდინატებს შევცვლით პროექციული კოორდინატებით, ცხადია, მათ შორისაც დამყარდება წრფივი და ერთგვაროვანი დამოკიდებულება, ე. ი. პროექციული გარდაქმნა პროექციულ კოორდინატებში იქნება წრფივი და ერთგვაროვანი. ამრიგად, ყოველგვარი გამოთვლები პროექციულ კოორდინატებში ისეთივეა, როგორც ერთგვაროვან კოორდინატებში, ოღონდ დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლის დროს M წერტილი გამოიცვლება მისი პროექციულად თანადი M' წერტილით.

2. პროექციული კოორდინატები სიბრტყეზე. განვიხილოთ სიბრტყეზე სამი ნებისმიერად აღებული, მაგრამ არაკოლინეარული, წერტილი ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\begin{aligned} A&=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3),\\ B&=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3),\\ C&=(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3). \end{aligned}$$

სიბრტყის ნებისმიერი $M(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ წერტილისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ რიცხვები, რომ ადგილი ჰქნეს შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned} \xi_1&=\lambda_1\eta_1+\lambda_2\zeta_1+\lambda_3\tau_1,\\ \xi_2&=\lambda_1\eta_2+\lambda_2\zeta_2+\lambda_3\tau_2,\\ \xi_3&=\lambda_1\eta_3+\lambda_2\zeta_3+\lambda_3\tau_3. \end{aligned} \tag{40}$$

მართლაც, საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (40) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, ე. ი.

$$\begin{vmatrix} \eta_1, & \zeta_1, & \tau_1\\ \eta_2, & \zeta_2, & \tau_2\\ \eta_3, & \zeta_3, & \tau_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში A, B, C წერტილები კოლინეარული იქნებოდა). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამ სისტემის ამოხსნა შეიძლება λ_1, λ_2, λ_3-ის მიმართ. მივიღებთ წრფივსა და ერთგვაროვან გამოსახულებებს ξ_1, ξ_2, ξ_3-ის საშუალებით:

$$\begin{aligned} \lambda_1&=a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3,\\ \lambda_2&=a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3,\\ \lambda_3&=a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3. \end{aligned} \tag{41}$$

ისეთივე მსჯელობით, როგორიც ვაწარმოეთ წრფეზე, აქაც მტკიცდება, რომ λ_1, λ_2, λ_3 პარამეტრებს აქვს ξ_1, ξ_2, ξ_3 ერთგვაროვანი კოორდინატების ანალოგიური თვისებანი. ამ პარამეტრებს ეწოდება M წერტილის პროექციული კოორდინატები სიბრტყეზე. A, B, C წერტილებს, რომლებზედაც დამოკიდებულია პროექციული კოორდინატების ბუნება, ეწოდება ბაზისის წერტილები, ABC სამკუთხედს კი ეწოდება ბაზისი სამკუთხედი. ზოგჯერ მას კოორდინატთა სამკუთხედსაც უწოდებენ. კერძოდ, თუ ბაზისის წერტილები შემდეგნაირად არის შერჩეული:

$$\begin{aligned} A&=(0,\ 0,\ 1),\\ B&=(1,\ 0,\ 0),\\ C&=(0,\ 1,\ 0), \end{aligned}$$

მაშინ (40) ფორმულიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$\lambda_1=\xi_1,\ \lambda_2=\xi_2,\ \lambda_3=\xi_3.$$

როგორც ჩანს, ამ შემთხვევაში, პროექციული კოორდინატები უტოლდება ერთგვაროვან კოორდინატებს. ასეთ ბაზისს ეწოდება კანონიკური ბაზისი სიბრტყეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში A წერტილი კოორდინატთა სათავეა, B და C წერტილები კი Ox და Oy ღერძების უსასრულოდ დაშორებული წერტილებია შესაბამად; ამიტომ კანონიკური ბაზისი სამკუთხედის გვერდები იქნება Ox, Oy ღერძები და სიბრტყის უსასრულოდ დაშორებული წრფე. ადვილი მისახვედრია, რომ პროექციული გარდაქმნით შეგვიძლია ნებისმიერი სამკუთხედი გადავსახოთ კანონიკურ სამკუთხედში. მართლაც, § 2-ში ჩვენ უკვე მოვახდინეთ ისეთი პროექციული თანადობის განსაზღვრა, რომელიც ნებისმიერად აღებულ ABC სამკუთხედს გადასახავს აგრეთვე ნებისმიერად აღებულ $A'B'C'$ სამკუთხედში. მაშასადამე, თუ $A'B'C'$ სამკუთხედის ადგილას ავიღებთ კანონიკურ სამკუთხედს, მოგვეცემა სასურველი შედეგი. მაგრამ აქ მაინც მივუთითებთ მოცემული სამკუთხედის კანონიკურ სამკუთხედში გადასახვის ფორმულებზე. პირდაპირ შეგვიძლია შევამჩნიოთ, რომ (29) პროექციული გარდაქმნები კანონიკურ სამკუთხედში გადასახავს იმ სამკუთხედს, რომლის გვერდები შემდეგი განტოლებებით წარმოდგება:

$$a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3=0\ (AC\ \text{გვერდი}),$$
$$a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3=0,\ (AB\ \text{გვერდი}),$$
$$a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3=0\ (BC\ \text{გვერდი}).$$

მაგრამ აქ a_1, b_1, c_1 და ა. შ. ნებისმიერი რიცხვებია; მაშასადამე, განიხილება ყოველგვარი სამკუთხედი. ისევე, როგორც წრფეზე, აქაც მტკიცდება, რომ M წერტილის პროექციული კოორდინატები ერთგვაროვანი კოორდინატებია M წერტილის პროექციულად თანადი M' წერტილისათვის, ე. ი.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3}=x',\quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3}=y'. \tag{42}$$

ამრიგად, თუ M წერტილის λ_1, λ_2, λ_3 პროექციულ კოორდინატებს მოვუძებნით შესაბამ M' წერტილს (42) ტოლობათა მიხედვით, მივიღებთ M წერტილის პროექციულად თანად M' წერტილს და, პირუკუ, M წერტილის პროექციულად თანადი M' წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები პროექციული კოორდინატები იქნე-

ბა M წერტილისათვის. შემდგომ პროექციულ კოორდინატებს აღვნიშნავთ ξ_1, ξ_2, ξ_3-თი. რადგან წრფის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში წრფივი და ერთგვაროვანია, ამიტომ მათი შეცვლა პროექციული კოორდინატებით (ე. ი. წრფივი და ერთგვაროვანი გამოსახულებებით) არ გამოიწვევს განტოლების არც რიგის შეცვლას, არც ერთგვაროვნების შეცვლას; მაშასადამე, წრფის განტოლება პროექციულ კოორდინატებში იქნება წრფივი და ერთგვაროვანი. ძალაში დარჩება აგრეთვე სამი წერტილის კოლინეარულობის პირობა პროექციული კოორდინატებისათვის. ასევე ითქმის ყველა დანარჩენ განტოლებაზე და გამოსახულებაზე. ისინი სახის შეუცვლელად განიხილებიან, ოღონდ იქ ერთგვაროვანი კოორდინატების ნაცვლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ პროექციული კოორდინატები. ასეთებია, მაგალითად, წრფის განტოლება პარამეტრული სახით, მეორე რიგის წირის განტოლება და (29) პროექციული გარდაქმნები.

3. პროექციული კოორდინატები სივრცეში. განვიხილოთ სივრცეში ნებისმიერად აღებული ოთხი არაკომპლანარული წერტილი ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\begin{aligned}
A&=(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4),\\
B&=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4),\\
C&=(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4),\\
D&=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4).
\end{aligned}$$

სივრცის ნებისმიერი $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ წერტილისათვის შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 რიცხვები, რომ ადგილი ექნეს შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned}
\xi_1&=\lambda_1\eta_1+\lambda_2\zeta_1+\lambda_3\tau_1+\lambda_4\omega_1,\\
\xi_2&=\lambda_1\eta_2+\lambda_2\zeta_2+\lambda_3\tau_2+\lambda_4\omega_2,\\
\xi_3&=\lambda_1\eta_3+\lambda_2\zeta_3+\lambda_3\tau_3+\lambda_4\omega_3,\\
\xi_4&=\lambda_1\eta_4+\lambda_2\zeta_4+\lambda_3\tau_4+\lambda_4\omega_4.
\end{aligned}\tag{43}$$

მართლაც, საკმარისია შევნიშნოთ, რონ (43) სისტემის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან, ე. ი.

$$\begin{vmatrix}
\eta_1, & \zeta_1, & \tau_1, & \omega_1\\
\eta_2, & \zeta_2, & \tau_2, & \omega_2\\
\eta_3, & \zeta_3, & \tau_3, & \omega_3\\
\eta_4, & \zeta_4, & \tau_4, & \omega_4
\end{vmatrix}\neq 0$$

(წინააღმდეგ შემთხვევაში A, B, C, D წერტილები კომპლანარული იქნებოდა). ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამ სისტემის ამოხსნა შეიძლება λ_1, λ_2, λ_3, λ_4-ის მიმართ; ამისათვის მივიღებთ წრფივსა და ერთგვაროვან გამოსახულებებს, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-ის საშუალებით:

$$\begin{aligned}
\lambda_1&=a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3+d_1\xi_4,\\
\lambda_2&=a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3+d_2\xi_4,\\
\lambda_3&=a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3+d_3\xi_4,\\
\lambda_4&=a_4\xi_1+b_4\xi_2+c_4\xi_3+d_4\xi_4.
\end{aligned} \tag{44}$$

ისეთივე მსჯელობით, როგორიც ვაწარმოეთ სიბრტყეზე, მტკიცდება, რომ λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 პარამეტრებს აქვს ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ერთგვაროვანი კოორდინატების ანალოგიური თვისებანი. ამ პარამეტრებს ეწოდება პროექციული კოორდინატები სივრცეში. A, B, C, D წერტილებს, რომელზედაც დამოკიდებულია პროექციული კოორდინატების ბუნება, ეწოდება ბაზისის წერტილები. ამ წერტილებით განსაზღვრულ ტეტრაედრს კი ეწოდება ბაზისი ტეტრაედრი. ზოგჯერ მას კოორდინატთა ტეტრაედრსაც უწოდებენ. კერძოდ, თუ ბაზისის წერტილები შემდეგნაირად არის შერჩეული:

$$\begin{aligned}
A&=(0,\ 0,\ 0,\ 1),\\
B&=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\\
C&=(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\
D&=(0,\ 0,\ 1,\ 0),
\end{aligned}$$

მაშინ (43) ფორმულებიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$\lambda_1=\xi_1,\ \lambda_2=\xi_2,\ \lambda_3=\xi_3\ \lambda_4=\xi_4.$$

როგორც ჩანს, ამ შემთხვევაში, პროექციული კოორდინატები უტოლდება ერთგვაროვან კოორდინატებს. ასეთ ბაზისს ეწოდება კანონიკური ბაზისი. ადვილი შესამჩნევია. რომ ამ შემთხვევაში A წერტილი $Oxyz$ სისტემის კოორდინატთა სათავეა, ხოლო B, C, D წერტილები კი Ox, Oy, Oz ღერძების უსასრულოდ დაშორებული წერტილებია შესაბამად. ამიტომ კანონიკური ტეტრაედრის წახნაგები იქნება Oxy, Oxz, Oyz სიბრტყეები და სივრცის უსასრულოდ დაშორებული სიბრტყე. ისეთივე წესით, როგორიც ვაწარმოეთ სიბრტყეზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ის პროექციული გარდაქმნები, რომელიც ნებისმიერ ტეტრაედრს გადასახავს კანონიკურ ტეტრაედრში.

ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, აქაც M წერტილის პროექციული კოორდინატები ერთგვაროვანი კოორდინატები იქნება M

წერტილის პროექციულად თანადი M' წერტილისათვის, ე. ი.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4}=x', \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_4}=y', \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_4}=z'. \tag{45}$$

ამრიგად, თუ M წერტილის λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 პროექციულ კოორდინატებს მოვუძებნით შესაბამ M' წერტილს (45) ტოლობათა მიხედვით, მივიღებთ M წერტილის პროექციულად თანად M' წერტილს და, პირუკუ, M წერტილის პროექციულად თანადი M' წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები პროექციული კოორდინატებია M წერტილისათვის.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ძირითადი გამოსახულებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში შეინარჩუნებენ გარეგნულ სახეს ერთგვაროვანი კოორდინატებიდან პროექციულ კოორდინატებზე გადასვლის დროს. ასეთებია, მაგალითად, ოთხი წერტილის კომპლანარულობის პირობა, პროექციული გარდაქმნები ერთგვაროვან კოორდინატებში, სიბრტყის და წრფის განტოლებანი და მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში. შემდეგში პროექციულ კოორდინატებს აღვნიშნავთ ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4-ით. ასეთი შეთანხმების შედეგად, წინა თავში მიღებული გამოსახულებანი ერთგვაროვან კოორდინატებში, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც გამოსახულებანი პროექციულ კოორდინატებში. განსხვავება გამოჩნდება მხოლოდ დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლის დროს. თუ ამ გადასვლას ვაწარმოებთ ერთგვაროვანი კოორდინატებიდან დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლის წესით, მაშინ M წერტილი შეიცვლება M' წერტილით. განსახილავი γ ნაკვთიც შეიცვლება მისი პროექციულად თანადი γ' ნაკვთით.

დასკვნა. აქაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ ისეთივე შემოკლებული აღნიშვნები, როგორიც მიღებული იყო წინა თავში ერთგვაროვანი გამოსახულებებისათვის. სახელდობრ, (36) ფორმულები ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$\xi_i=\lambda_1\eta_i+\lambda_2\zeta_i \quad (i=1,2)$$

ან კიდევ ასე (სიმბოლურად)

$$M=\lambda_1 A+\lambda_2 B.$$

აქედან ჩანს, რომ M წერტილი წარმოდგენილია A და B წერტილების წრფივი შენაერთის სახით. λ_1, λ_2 ასეთი შენაერთის კოეფიციენტებია. ამის ანალოგიურად სიბრტყეზე გვექნება

$$\xi_i=\lambda_1\eta_i+\lambda_2\zeta_i+\lambda_3\tau_i \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

ანუ (სიმბოლურად)

$$M=\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C.$$

აქაც M წერტილი წარმოგვიდგება როგორც A, B, C წერტილების წრფივი შენაერთი. λ_1, λ_2, λ_3 ასეთი შენაერთის კოეფიციენტებია. ეს მოგვაგონებს სიბრტყეზე ვექტორის დაშლის ფორმულას კოორდინატთა სისტემის მგეზავების საშუალებით. როგორც ვიცით, დეკარტის კოორდინატები ასეთი დაშლის კოეფიციენტებია. სივრცისათვის გვექნება შემდეგი შემოკლებული ჩანაწერი

$$\xi_i=\lambda_1\eta_i+\lambda_2\eta_i+\lambda_3\tau_i+\lambda_4\omega_i \quad (i=1,2,3,4),$$

ანუ (სიმბოლურად)

$$M=\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C+\lambda_4 D.$$

ამრიგად M წერტილი წარმოდგენილია A, B, C, D წერტილების წრფივი შენაერთის სახით, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 კი წარმოადგენს ამ შენაერთის კოეფიციენტებს, ე. ი. M წერტილის პროექციული კოორდინატები წარმოგვიდგება, როგორც ამავე წერტილის, ბაზისის წერტილებში, წრფივი შენაერთის სახით წარმოდგენის კოეფიციენტები. ეს თვისება დეკარტის კოორდინატებს მოგვაგონებს სივრცეში. მართლაც, ეს უკანასკნელნიც, როგორც ვიცით, ვექტორის კოორდინატთა ღერძების მგეზავებში დაშლის კოეფიციენტებია. პროექციული გარდაქმნების ფორმულები ერთგვაროვან კოორდინატებში აგრეთვე შეიძლება შემოკლებით იქნეს ჩაწერილი. გვექნება (38-ე, 29-ე და 35-ე ფორმულებისათვის):

$$\begin{aligned}
\rho\xi_i' &= a_i\xi_1+b_i\xi_2 \quad (i=1,\ 2),\\
\rho\xi_i' &= a_i\xi_1+b_i\xi_2+c_i\xi_3 \quad (i=1,\ 2,\ 3),\\
\rho\xi_i' &= a_i\xi_1+b_i\xi_2+c_i\xi_3+c_i\xi_4 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).
\end{aligned}$$

შესაძლებელია ამ ფორმულების კიდევ უფრო შემოკლებით ჩაწერა. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ეს გამოსახულებანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი და ერთგვაროვანი გამოსახულებანია, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ ისინი წარმოგვიდგება შემდეგნაირად:

$$\rho\xi_i'=\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}\xi_j \quad \text{(წრფეზე)},$$

$$\rho\xi_i'=\sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}\xi_j \quad \text{(სიბრტყეზე)},$$

$$\rho\xi_i' = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij}\xi_j \quad \text{(სივრცეში).}$$

ამ შემთხვევაში (λ_{ij}) მატრიცა გარდაქმნის მატრიცაა. რაც შეეხება პროექციულ კოორდინატებს, ისინი უკანასკნელი ფორმულებით განისაზღვრება. მართლაც, M' წერტილის ერთგვაროვანი ξ_i' კოორდინატები ხომ პროექციული კოორდინატებია M წერტილისათვის. ამრიგად M წერტილის პროექციული კოორდინატები წარმოგვიდგება როგორც ამავე წერტილის ერთგვაროვანი ξ_i კოორდინატების წრფივი და ერთგვაროვანი ნაერთები (გამოსახულებანი). (λ_{ij}) მატრიცა განისაზღვრება ბაზისის წერტილებით და, პირუკუ, პროექციული გარდაქმნის მატრიცით განისაზღვრება შესაბამი ბაზისის წერტილები.

§ 5. მეტრული, აფინური და პროექციული გეომეტრიების შესახებ

1. მეტრული გეომეტრია. გეომეტრიულ ნაკვთთან დაკავშირებულ ყოველ ცნებას, რომელიც თავის მნიშვნელობას ინარჩუნებს ნაკვთის ორთოგონალური გარდაქმნების დროს, ეწოდება მეტრული ცნება. ასეთი ცნებებია, მაგალითად, მანძილი ორ წერტილს შორის, კუთხე ორ წრფეს შორის, სამკუთხედის ფართობი და სხვ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ელემენტარული გეომეტრიის ყოველი ცნება, რომელიც ნაკვთის შინაგან ბუნებას ახასიათებს, შეინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას ნაკვთის ორთოგონალური გარდაქმნის დროს. ასევე ითქმის ნაკვთებს შორის ურთიერთკავშირის გამომხატველ ძირითად ცნებათა შესახებ.

განმარტება. გეომეტრიულ ნაკვთებთან დაკავშირებულ მეტრულ ცნებათა შემსწავლელ მეცნიერებას ეწოდება მეტრული გეომეტრია. რადგან ელემენტარული გეომეტრიის ყველა ცნება (გეომეტრიული ნაკვთების ბუნებისა და ურთიერთობის გამომხატველი) მეტრული ცნებაა, ამიტომ მეტრული გეომეტრია დაემთხვევა ელემენტარულ გეომეტრიას და მოიცავს მას მთლიანად.

2. აფინური გეომეტრია. გეომეტრიულ ნაკვთთან დაკავშირებულ ყოველ ცნებას, რომელიც თავის მნიშვნელობას ინარჩუნებს ნაკვთის აფინური გარდაქმნების დროს, ეწოდება აფინური ცნება. ასეთი ცნებებია, მაგალითად, წრფე, სამი წერტილის მარტივი

ფარდობა და სხვ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ელემენტარული გეომეტრიის არა ყველა ცნება, რომელიც ნაკვთების ბუნებასა და მათ ურთიერთკავშირს გამოსახავს, იქნება აფინური ცნება; მაგალითად, მანძილი ორ წერტილს შორის და კუთხე ორ წრფეს შორის არ იქნება აფინური ცნებანი.

განმარტება. გეომეტრიულ ნაკვთებთან დაკავშირებულ აფინურ ცნებათა შემსწავლელ მეცნიერებას ეწოდება აფინური გეომეტრია. რადგან ორთოგონალური გარდაქმნები აფინური გარდაქმნების კერძო შემთხვევებია, ამიტომ ყოველი აფინური ცნება მეტრულიც იქნება, ე. ი. ელემენტარული. მაგრამ ყოველი ელემენტარული ცნება, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, არ შეიძლება იყოს აფინური. ამრიგად აფინური გეომეტრია აღრიცხავს გეომეტრიულ ნაკვთებთან დაკავშირებულ ცნებათა ნაწილს, შედარებით უფრო ზოგად ცნებებს. აქედან ჩანს, რომ მეტრული გეომეტრია ერთი მხრივ აფინური გეომეტრიის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს, ხოლო მეორე მხრივ უფრო ფართო და მდიდარია, რადგან იგი გარდა აფინური ცნებებისა, შეისწავლის კიდევ სხვა ცნებებსაც.

3. პროექციული გეომეტრია. გეომეტრიულ ნაკვთთან დაკავშირებულ ყოველ ცნებას, რომელიც თავის მნიშვნელობას ინარჩუნებს ამ ნაკვთის პროექციული გარდაქმნების დროს, ეწოდება პროექციული ცნება. ასეთი ცნებებია, მაგალითად, წრფე, ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა და სხვ. ადვილი შესამჩნევია, რომ აფინური გეომეტრიის (მით უმეტეს ელემენტარული გეომეტრიის) არა ყველა ცნება იქნება პროექციული ცნება; მაგალითად, წრფეთა პარალელურობა და სამი წერტილის მარტივი ფარდობა არ არის პროექციული ცნებები.

განმარტება. გეომეტრიულ ნაკვთებთან დაკავშირებულ პროექციულ ცნებათა შემსწავლელ მეცნიერებას ეწოდება პროექციული გეომეტრია. რადგან აფინური გარდაქმნები პროექციული გარდაქმნების კერძო შემთხვევებია, ამიტომ ყოველი პროექციული ცნება აფინურიც იქნება. მაგრამ ყოველი აფინური ცნება, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, შეიძლება არ იყოს პროექციული, ამრიგად პროექციული გეომეტრია აღრიცხავს გეომეტრიულ ნაკვთებთან დაკავშირებულ ცნებათა ნაწილს, შედარებით უფრო ზოგად ცნებებს, ვიდრე აფინური გეომეტრია. აქედან ჩანს, რომ აფინური გეომეტრია ერთი მხრივ პროექციული გეომეტრიის კერძო შემთხვევას

წარმოადგენს, ხოლო მეორე მხრივ უფრო ფართე და მდიდარია, რადგან იგი პროექციული ცნებების გარდა შეისწავლის კიდევ სხვა ცნებებსაც.

ამრიგად, გარდაქმნათა სამი მთავარი ჯგუფის (ორთოგონალური, აფინური და პროექციული) საფუძველზე განიმარტა სამი გეომეტრიული სისტემა: მეტრული, აფინური და პროექციული. ეს სისტემები განიმარტება, როგორც მეცნიერებანი გეომეტრიულ ნაკვთებთან დაკავშირებულ ისეთ ცნებათა შესახებ, რომელნიც ინვარიანტულია ზემოაღნიშნულ გარდაქმნათა ჯგუფების მიმართ შესაბამად. არსებობს კიდევ სხვა საინტერესო გარდაქმნათა ჯგუფები, რომელთაც უკავშირდება გეომეტრიული სისტემები.

გეომეტრიული სისტემების ასეთნაირი კლასიფიკაცია ეკუთვნის ფ. კლაინს[1]. მან ეს იდეები წამოაყენა ქალაქ ერლანგენის უნივერსიტეტში მოღვაწეობის დროს და მათემატიკის ისტორიაში ეს კლასიფიკაცია ცნობილია „ერლანგენის პროგრამის“ სახელწოდებით.

§ 6. მეორე რიგის წირთა აფინური კლასიფიკაცია

რადგან მონაკვეთის შუაწერტილის და წრფეთა პარალელურობის ცნებები აფინური ცნებებია; ამიტომ მეორე რიგის წირის ცენტრი, დიამეტრი და მოცემული ქორდის შეუღლებული დიამეტრი აფინური ბუნების ელემენტები იქნება. აქედან გამომდინარე მეორე რიგის წირთა კლასიფიკაცია ცენტრის მიხედვით აფინური ბუნებისაა. რადგან უსასრულოდ დაშორებული წერტილი აფინური ცნებაა, ამიტომ მეორე რიგის წირთა ტიპობრივი კლასიფიკაცია აფინური ბუნებისა იქნება. რადგან წირის მხები ისეთი წრფეა, რომელსაც წირთან აქვს ორი შეთავსებული თანაკვეთის წერტილი, ამიტომ მხები წრფეც აფინური ბუნებისა უნდა იყოს (თანაკვეთის წერტილები გადაისახებიან თანაკვეთის წერტილებში).

განვიხილოთ ახლა მეორე რიგის წირი. მოძრაობით წირს შეიძლება ისეთი მდებარეობა მივცეთ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომ მისი განტოლება იყოს კანონიკური სახისა. ცენტრიანი წირისათვის ეს მოხდება წირის სიმეტრიის ღერძების შეთავსებით მოცემული სისტემის კოორდინატთა ღერძებთან. უცენტრო წირის შემთხვევაში წირის წვერო უნდა მოვათავსოთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში, სიმეტრიის ღერძი კი შევუთავსოთ Ox ღერძს. ორივე ზემოაღნიშნული მოძრაობა განხორციელდება შესაბამი

[1] ფ. კლაინი—გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი (1849—1925).

ორთოგონალური გარდაქმნით (რომელიც, ცხადია, აფინური გარდაქმნაც არის). ასეთი მოძრაობის შემდეგ წირთა განტოლებანი წარმოგვიდგება კანონიკური სახით:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \text{(წარმოსახვითი ელიფსი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(ელიფსი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(ჰიპერბოლა)},$$

$$y^2=2px \quad \text{(პარაბოლა)},$$

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0 \quad \text{(თანამკვეთ წრფეთა წყვილი)},$$

$$\lambda_2 y^2+F(x_0,\ y_0)=0 \quad \text{(პარალელურ წრფეთა წყვილი)}.$$

ახლა მოვახდინოთ პირველი სამი წირის (ე. ი. ელიფსების და ჰიპერბოლის) შემდეგი აფინური გარდაქმნა:

$$x'=\frac{x}{a}, \qquad y'=\frac{y}{b}.$$

ასეთი გარდაქმნით აღნიშნული წირები გადაისახება შემდეგ წირებში:

$$x'^2+y'^2=-1 \quad \text{(წარმოსახვითი წრეწირი)},$$

$$x'^2+y'^2=1 \quad \text{(წრეწირი)},$$

$$x'^2-y'^2=1 \quad \text{(ტოლფერდა ჰიპერბოლა)}.$$

ამრიგად, აფინური გარდაქმნით წარმოსახვითი ელიფსები გადაისახებიან ერთსა და იმავე წარმოსახვით წრეწირში. ელიფსები გადაისახებიან ერთსა და იმავე წრეწირში, ჰიპერბოლები კი ერთსა და იმავე ტოლფერდა ჰიპერბოლაში.

პარაბოლისათვის მოვახდინოთ შემდეგი აფინური გარდაქმნა:

$$x'=px, \quad y'=y.$$

ასეთი გარდაქმნით პარაბოლა გადაისახება შემდეგ წირში

$$y'^2=2x'.$$

ეს წირი კი ისეთი პარაბოლაა, რომლის პარამეტრი უდრის ერთს. ამრიგად, აფინური გარდაქმნით პარაბოლები გადაისახება ერთსა და იმავე პარაბოლაში, რომლის პარამეტრი ერთის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ თანამკვეთ წრფეთა წყვილის შემდეგი აფინური გარდაქმნა:

$$x'=\sqrt{\lambda_1}\,x, \quad y'=\sqrt{-\lambda_2}\,x \quad (\text{თუ } \lambda_2<0)$$

ან

$$x'=\sqrt{\lambda_1}, \quad y'=i\sqrt{\lambda_2}\,x \quad (\text{თუ } \lambda_2>0).$$

ასეთი გარდაქმნით ნამდვილ წრფეთა წყვილები გადაისახება ერთსა და იმავე წყვილში

$$x'^2-y'^2=0,$$

ხოლო წარმოსახვით წრფეთა წყვილები კი—შემდეგ წყვილში

$$x'^2+y'^2=0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მეორე შემთხვევაში წრფის M' წერტილიდან სათავემდე მანძილი ნულია. მართლაც,

$$|OM'|=\sqrt{x'^2+y'^2}=0.$$

ასეთ წრფეთა წყვილს სიბრტყის **იზოტროპიული წრფეები** ეწოდება. გარდა ამისა, ეს განტოლება მოგვაგონებს ისეთი წრეწირის განტოლებას, რომლის რადიუსი ნულია. ამიტომ ამ განტოლებით განსაზღვრულ წირს ნულოვანი წრეწირიც ეწოდება. ამრიგად, წარმოსახვით წრფეთა წყვილები გადაისახება ერთსა და იმავე იზოტროპიულ წრფეთა წყვილში.

საბოლოოდ განვიხილოთ პარალელურ წრფეთა წყვილი. აქ განიხილება შემდეგი აფინური გარდაქმნა.

$$x'=x, \quad y'=\sqrt{\frac{\lambda_2}{F(x_0,\ y_0)}}\cdot y$$

ან

$$x'=x, \quad y'=\sqrt{-\frac{\lambda_2}{F(x_0,\ y_0)}}\cdot y.$$

ასეთი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$y'^2+1=0$$

ან

$$y'^2-1=0.$$

ამრიგად, წარმოსახვითი პარალელური წრფეთა წყვილები, აფინური გარდაქმნით, გადაისახება ერთსა და იმავე წარმოსახვით პარალელურ წრფეთა წყვილში, ხოლო ნამდვილი პარალელური წრფე-

თა წყვილები კი ერთსა და იმავე ნამდვილ პარალელურ წრფეთა წყვილში.

რადგან აფინური გეომეტრია შეისწავლის გეომეტრიული ნაკვთის მხოლოდ ისეთ თვისებებს, რომელნიც ინვარიანტულია აფინური გარდაქმნებისა, ე. ი. რომელნიც თან მისდევენ ნაკვთს აფინური გარდაქმნის დროს, ამიტომ კვლევის დროს შეიძლება აღებული ნაკვთი შევცვალოთ მისი აფინურად შესაბამი ნაკვთით. ამით მსჯელობა არ შეიცვლება; მაშასადამე, აფინურად თანადი ნაკვთები ერთიმეორის ეკვივალენტურია აფინური თვალსაზრისით. ზოგჯერ უბრალოდ იტყვიან, რომ ასეთი ნაკვთები ერთი და იგივეა. მაგალითად, ყველა ელიფსი შეიძლება შეცვლილ იქნას ერთი და იმავე წრეწირით, ე. ი. წრეწირი ყველა ელიფსის ეკვივალენტურია აფინური თვალსაზრისით.

§ 7. მეორე რიგის წირთა პროექციული კლასიფიკაცია

რადგან პროექციული თანადობის დროს წირის რიგი არ იცვლება, ამიტომ წრფის წირთან თანაკვეთის წერტილთა რიცხვიც არ შეიცვლება. აქედან გამომდინარე მხები წრფეც პროექციული გარდაქმნის დროს უნდა გადაისახოს მხებ წრფეში. ამრიგად, წირის რიგი, წრფესთან თანაკვეთის წერტილთა რიცხვი და მხები პროექციული ბუნებისაა. რადგან წერტილის პოლარისა და წრფის პოლუსის ცნებანი წირის მხები წრფის საშუალებით განისაზღვრება, ამიტომ პოლარი და პოლუსი პროექციული ბუნებისანი იქნებიან. რადგან უსასრულოდ დაშორებული წერტილი პროექციული გარდაქმნით შეიძლება სასრულეთის წერტილში გადავსახოთ, ამიტომ წირის ტიპობრივი კლასიფიკაცია პროექციული ბუნებისა არ იქნება. ცხადია აგრეთვე, რომ წირის ცენტრი და დიამეტრებიც არ იქნებიან პროექციული ბუნებისა.

ჩვენ შეგვიძლია პროექციული გარდაქმნები ისე შევარჩიოთ, რომ ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირის უსასრულოდ დაშორებული წერტილები გადაისახოს სასრულეთის წერტილებში და ამავე დროს წირის სასრულეთის არც ერთი წერტილი არ გადაისახოს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში; ამისათვის საკმარისია (26) პროექციულ გარდაქმნაში მნიშვნელი ისე შევარჩიოთ, რომ (28) განტოლებით განსაზღვრულმა წრფემ არ გადაკვეთოს მოცემული მეორე რიგის წირი. მაშინ წირის არც ერთი წერტილი უსასრულეთში არ გადაისახება (რადგან უსასრულეთში გადაისახება მხოლოდ (28) განტოლებით განსაზღვრული წრფის წერტილები). ამრიგად, ჩვეულებრივი მეორე

რიგის წირი აღნიშნული პროექციული გარდაქმნით გადაისახება ისეთ მეორე რიგის წირში, რომელსაც უსასრულოდ დაშორებული წერტილი არა აქვს. ასეთი მეორე რიგის წირები კი მხოლოდ ნამდვილი და წარმოსახვითი ელიფსებია. ამრიგად, ნებისმიერი ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირი პროექციული გარდაქმნით გადაისახება შემდეგი განტოლებით განსაზღვრულ წირში

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm 1.$$

ახლა მოვახდინოთ კიდევ შემდეგი აფინური გარდაქმნა (რომელიც, ცხადია, პროექციული გარდაქმნაც იქნება):

$$x'=\frac{x}{a}, \quad y'=\frac{y}{b}.$$

ასეთი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$x'^2+y'^2=-1 \quad \text{(წარმოსახვითი წრეწირი)},$$
$$x'^2+y'^2=1 \quad \text{(წრეწირი)}.$$

ამრიგად, ყოველი წარმოსახვითი ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირი პროექციული გარდაქმნით გადაისახება ერთსა და იმავე წარმოსახვით წრეწირში, ყოველი ნამდვილი ჩვეულებრივი მეორე რიგის წირი კი—ერთსა და იმავე წრეწირში.

ახლა განვიხილოთ წრფეთა წყვილები. რადგან პროექციული გარდაქმნით უსასრულოდ დაშორებული წერტილი გადაისახება სასრულეთის წერტილში, ამიტომ პარალელურ წრფეთა წყვილი გადაისახება თანამკვეთ წრფეთა წყვილში. ამრიგად განიხილება მხოლოდ თანამკვეთ წრფეთა წყვილი. ასეთი წყვილი კი აფინური გარდაქმნით (რომელიც პროექციულიც არის) გადაისახება ერთსა და იმავე წრფეთა წყვილში

$$x'^2\pm y'^2=0.$$

თუ გადავალთ ერთგვაროვან კოორდინატებზე, ე. ი. თუ ჩავსვამთ

$$x'=\frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad y'=\frac{\xi_2}{\xi_3},$$

მივიღებთ მეორე რიგის წირთა პროექციულ კლასიფიკაციას ერთგვაროვან კოორდინატებში.

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0 \quad \text{(წარმოსახვითი მეორე რიგის წირი)},$$
$$\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2=0 \quad \text{(ნამდვილი მეორე რიგის წირი)},$$
$$\xi_1^2+\xi_2^2=0 \quad \text{(წარმოსახვით წრფეთა წყვილი)},$$
$$\xi_1^2-\xi_2^2=0 \quad \text{(ნამდვილ წრფეთა წყვილი)}.$$

შენიშვნა. განვიხილოთ მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j=0.$$

კვადრატული ფორმების თეორიიდან ცნობილია, რომ კვადრატული ფორმა

$$\Phi=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j.$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი ჩასმებით

$$\xi_i'=\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}\,\xi_j$$

დაიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$\Phi=\varepsilon_1\xi_1'^2+\varepsilon_2\xi_2'^2+\varepsilon_3\xi_3'^2,$$

სადაც

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3=0,\ 1,\ -1.$$

მეორე მხრივ, ზემოაღნიშნული წრფივი ჩასმით განსაზღვრული ξ_i' შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პროექციული კოორდინატები; მაშასადამე, შესაძლებელია პროექციული კოორდინატები ისე შეირჩეს, რომ მეორე რიგის წირის განტოლებამ მიიღოს შემდეგი სახე

$$\varepsilon_1\xi_1'^2+\varepsilon_2\xi_2'^2+\varepsilon_3\xi_3'^2=0,$$

რომელსაც ეწოდება წ ი რ ი ს კ ა ნ ო ნ ი კ უ რ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა პ რ ო ე ქ ც ი უ ლ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ შ ი. თუ ამ განტოლების კოეფიციენტებს მივცემთ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას, მივიღებთ მეორე რიგის წირთა ზემოაღნიშნული პროექციული ეკვივალენტების მსგავს განტოლებებს პროექციულ კოორდინატებში (გარეგნულად იგივეს). ადვილი შესამჩნევია, რომ არ იარსებებს ისეთი ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი ჩასმები, ანუ პროექციული გარდაქმნები, რომელნიც კანონიკურ განტოლებებს დაიყვანს ერთიმეორეზე. მართლაც, ნამდვილი პროექციული გარდაქმნებით არ შეიძლება წარმოსახვითი წრეწირი გადაისახოს ნამდვილ წრეწირში და ასევე წრფეთა წყვილი არ შეიძლება გადაისახოს წრეწირში. ამრიგად, პროექციული თვალსაზრისით, არსებობს მეორე რიგის წირის იმდენი სახე, რამდენი განტოლებაც გვაქვს კანონიკური სახით; მაგალითად, ნამდვილ, ჩვეულებრივ (არაგადაგვარებულ) მეორე რიგის წირთა შორის არსებობს ერთადერთი სახის წირი, განსაზღვრული შემდეგი განტოლებით

$$\xi_1'^2+\xi_2'^2-\xi_3'^2=0.$$

რადგან პროექციული კოორდინატებისათვის განიხილება ნამდვილ რიცხვთა მხოლოდ სასრული მნიშვნელობანი, ამიტომ წირის მხები განსაზღვრული იქნება ყოველ წერტილში. ამავე დროს წირი მხების ცალ მხარეს მდებარეობს (როგორც ჩვეულებრივი წირი). მაშასადამე, წირი მოთავსებული იქნება თავისი ყოველი მხების ცალ მხარეს, ე. ი. წირი ამოზნექილი იქნება ყოველი წერტილის მახლობლობაში. ამრიგად, განსახილავი წირი იქნება ოვალური; მაშასადამე, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

დახკვნა. მეორე რიგის წირი პროექციული თვალსაზრისით ერთადერთი სახის ოვალური წირია. თუ გადავალთ დეკარტის კოორდინატებზე, ე. ი. თუ განტოლებაში ჩავსვამთ:

$$\frac{\xi_1'}{\xi_3'} = x', \qquad \frac{\xi_2'}{\xi_3'} = y',$$

მივიღებთ

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

ეს კი წრეწირის განტოლებაა. მაგრამ ასეთი გადასვლის შედეგად M წერტილი იცვლება მისი პროექციულად თანადი M' წერტილით. თვით ოვალური წირი კი შეიცვლება მისი პროექციულად თანადი წრეწირით.

ახლა განვიხილოთ კანონიკური ბაზისი

$$A=(1, 0, 0), \quad B=(0, 1, 0), \quad C=(0, 0, 1).$$

ამ სამკუთხედის გვერდების განტოლებანი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

$$\xi_1=0 \quad (BC \text{ გვერდი}),$$
$$\xi_2=0 \quad (AC \text{ გვერდი}),$$
$$\xi_3=0 \quad (AB \text{ გვერდი}).$$

განვსაზღვროთ A წერტილის პოლარის განტოლება; ამისათვის პოლარის განტოლებაში

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, \eta_i\, \xi_j=0.$$

η_i-ს ნაცვლად უნდა ჩავსვათ A წერტილის კოორდინატები, a_{ij}-ს ნაცვლად კი წირის კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები. მივიღებთ

$$\xi_1=0.$$

ამრიგად A წერტილის პოლარი არის BC გვერდი. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ B წერტილის პოლარი არის AC გვერდი, ხოლო C წერტილის პოლარი კი AB გვერდი, ე. ი. კანონიკური სამკუთხედის გვერდები პოლარებია მოპირდაპირე წვეროებისა და, პირუკუ, წვეროები პოლუსებია მოპირდაპირე გვერდებისა. ამრიგად, კანონიკური სამკუთხედი ავტოპოლარული სამკუთხედია კანონიკური განტოლებით მოცემული წირის მიმართ. ადვილი შესამოწმებელია, რომ, თუ რაიმე სამკუთხედი ავტოპოლარული სამკუთხე-

დია კანონიკური განტოლებით მოცემული წირის მიმართ, მაშინ იგი იქნება კანონიკური სამკუთხედი. ადვილი მისახვედრია, რომ, თუ წირის რაიმე ავტოპოლარულ სამკუთხედს პროექციული გარდაქმნით გადავსახავთ კანონიკურ სამკუთხედში, მაშინ თვით წირის განტოლება მიიღებს კანონიკურ სახეს.

§ 8. მეორე რიგის ზედაპირთა აფინური კლასიფიკაცია

მეორე რიგის წირთა აფინური თეორიის მსგავსად, აქაც მეორე რიგის ზედაპირის მხები სიბრტყე, ცენტრი, დიამეტრები და დიამეტრული სიბრტყეები აფინური ცნებები იქნება. ზედაპირთა ტიპობრივი კლასიფიკაცია აგრეთვე აფინური ცნება უნდა იყოს. რადგან ორთოგონალური გარდაქმნები აფინური გარდაქმნების კერძო შემთხვევებია, ამიტომ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ ზედაპირების განტოლებანი დაყვანილია კანონიკურ სახეზე. გვექნება:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(წარმოსახვითი ელიფსოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(ელიფსოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(ორკალთა ჰიპერბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad \text{(ელიფსური პარაბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad \text{(ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{(წარმოსახვითი მეორე რიგის კონუსი)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{(მეორე რიგის კონუსი)}.$$

ელიფსოიდებისათვის, ჰიპერბოლოიდებისათვის და კონუსებისათვის ვაწარმოოთ შემდეგი აფინური გარდაქმნა:

$$x'=\frac{x}{a}, \qquad y'=\frac{y}{b}, \qquad z'=\frac{z}{c}.$$

ამ გარდაქმნით ეს ზედაპირები გადაისახება შემდეგ ზედაპირებში:

$$x'^2+y'^2+z'^2=-1$$ (წარმოსახვითი სფერო),

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$ (სფერო),

$$x'^2+y'^2-z'^2=1$$ (ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი),

$$x'^2+y'^2-z'^2=-1$$ (ბრუნვის ორკალთა ჰიპერბოლოიდი),

$$x'^2+y'^2+z'^2=0$$ (წარმოსახვითი წრიული კონუსი),

$$x'^2+y'^2-z'^2=0$$ (წრიული კონუსი).

პარაბოლოიდებისათვის ვაწარმოოთ შემდეგი აფინური გარდაქმნა:

$$x'=\frac{x}{\sqrt{p}}, \quad y'=\frac{y}{\sqrt{q}}, \quad z'=z.$$

ასეთი გარდაქმნის შემდეგ ეს ზედაპირები გადაისახება შემდეგ ზედაპირებში:

$$x'^2+y'^2=2z'$$ (ბრუნვის პარაბოლოიდი),

$$x'^2-y'^2=2z'$$ (ტოლფერდა ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი).

ამრიგად ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი სახელწოდების ზედაპირი აფინური გარდაქმნით გადაისახება ერთსა და იმავე სახის ზედაპირში: მაგალითად, ყველა ელიფსოიდი გადაისახება ერთსა და იმავე სახის სფეროში და ა. შ. ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ ყველა ელიფსური ცილინდრი გადაისახება ერთსა და იმავე წრიულ ცილინდრში, ყველა ჰიპერბოლური ცილინდრი — ერთსა და იმავე ჰიპერბოლურ ცილინდრში (რომლის ფუძე ტოლფერდა ჰიპერბოლაა) და ყველა პარაბოლური ცილინდრი ერთსა და იმავე პარაბოლურ ცილინდრში. რაც შეეხება სიბრტყეთა წყვილებს, თანამკვეთი სიბრტყეები გადაისახება ერთადერთ თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილში, ხოლო პარალელურ სიბრტყეთა წყვილები ერთსა და იმავე პარალელურ სიბრტყეთა წყვილში. მათი კანონიკური განტოლებანი ასე წარმოგვიდგება:

$$x'^2+y'^2=0$$ (წარმოსახვით სიბრტყეთა თანამკვეთი წყვილი),

$$x'^2-y'^2=0$$ (თანამკვეთ სიბრტყეთა წყვილი),

$$x'^2+1=0$$ (წარმოსახვით სიბრტყეთა პარალელური წყვილი),

$$x'^2-1=0$$ (პარალელურ სიბრტყეთა წყვილი).

§ 9. მეორე რიგის ზედაპირთა პროექციული კლასიფიკაცია

მეორე რიგის წირთა ანალოგიურად, აქაც ზედაპირის მხები სიბრტყე, წერტილის პოლარი სიბრტყე, პოლარულად შეუღლებული წრფეები და სხვა, იქნებიან პროექციული ცნებანი. ცენტრი, დიამეტრები და ზედაპირთა ტიპობრივი კლასიფიკაცია არ იქნება პროექციული ხასიათის ცნებანი. თუ ზედაპირი ჩვეულებრივია და არსებობს ისეთი სიბრტყე, რომელიც ზედაპირთან არ თანაიკვეთება (ასეთებია ელიფსოიდი, ორკალთა ჰიპერბოლოიდი, ელიფსური პარაბოლოიდი), მაშინ შეგვიძლია ისეთი პროექციული გარდაქმნა შევადგინოთ, რომ ზედაპირის ყველა წერტილი (სასრულეთისა და უსასრულეთის) გადაისახოს სივრცის სასრულეთის წერტილში, ე. ი. თვით ზედაპირი გადაისახოს ისეთ ზედაპირში, რომელსაც მხოლოდ სასრულეთის წერტილები აქვს. ასეთი მეორე რიგის ზედაპირები კი ელიფსოიდებია (ნამდვილი ან წარმოსახვითი). მაგრამ ელიფსოიდები აფინური გარდაქმნით (რაც პროექციულიც არის) გადაისახებიან სფეროებში (ნამდვილ ან წარმოსახვითში). ამრიგად ელიფსოიდები, ორკალთა ჰიპერბოლოიდები და ელიფსური პარაბოლოიდები გადაისახებიან ერთსა და იმავე სფეროში ან წარმოსახვით სფეროში. ახლა განვიხილოთ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის რაიმე წერტილზე გამავალი ორი მსახველით განვსაზღვროთ სიბრტყე (მხები სიბრტყე აღნიშნულ წერტილში) და შევადგინოთ ისეთი პროექციული გარდაქმნა, რომელიც ამ სიბრტყეს გადასახავს უსასრულეთში. ამ შემთხვევაში ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი გადაისახება ისეთ მეორე რიგის ზედაპირში, რომელსაც ორ წრფედ გადაგვარებული წირი აქვს უსასრულეთში. ასეთი ჩვეულებრივი მეორე რიგის ზედაპირი კი ჰიპერბოლური პარაბოლოიდია. ამრიგად, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი გადაისახება ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდში და, პირუკუ. მეორე მხრივ, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდები აფინური გარდაქმნით (რაც პროექციულიც არის) გადაისახებიან ერთსა და იმავე ცალკალთა ჰიპერბოლოიდში (ბრუნვის ჰიპერბოლოიდი); მაშასადამე, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდები და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდები გადაისახებიან ერთსა და იმავე ცალკალთა (ბრუნვის) ჰიპერბოლოიდში. ზემონათქვამის შეჯამებით მივიღებთ ჩვეულებრივ მეორე რიგის ზედაპირთა შემდეგ პროექციულ ეკვივალენტებს (პროექციულად თანად ზედაპირებს):

$$x'^2+y'^2+z'^2=-1 \quad \text{(წარმოსახვითი სფერო)},$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=1 \qquad \text{(სფერო)},$$

$$x'^2+y'^2-z'^2=1 \qquad \text{(ბრუნვითი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი)}.$$

რადგან ყველა სახის ცილინდრს მხოლოდ ერთი უსასრულოდ დაშორებული წერტილი აქვს, რომელზედაც გადიან ცილინდრის მსახველები, ამიტომ, თუ პროექციული გარდაქმნით ზემოაღნიშნულ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს გადავსახავთ სასრულეთის წერტილში, მაშინ ცილინდრი გადაისახება ისეთ წრფოვან ზედაპირში, რომლის მსახველები გადიან ერთ წერტილზე. ასეთი ზედაპირი კი კონუსია. ამრიგად ყველა ცილინდრი გადაისახება კონუსში (ნამდვილში ან წარმოსახვითში). რადგან თავის მხრივ კონუსები აფინური გარდაქმნით გადაისახებიან ერთსა და იმავე წრიულ კონუსში, ამიტომ ყველა განსაკუთრებული მეორე რიგის ზედაპირი (კონუსები და ცილინდრები) პროექციული გარდაქმნით გადაისახება ერთსა და იმავე წრიულ კონუსში, ე. ი. ამ ზედაპირთა პროექციული ეკვივალენტები იქნება შემდეგი სახისა:

$$x'^2+y'^2+z'^2=0 \qquad \text{(წარმოსახვითი კონუსი)},$$

$$x'^2+y'^2-z'^2=0 \qquad \text{(კონუსი)}.$$

რაც შეეხება სიბრტყეთა წყვილებს (როგორც თანამკვეთს, ისე პარალელურს), ისინი გადაისახებიან ერთსა და იმავე სიბრტყეთა წყვილში. ანალოგიურად, წარმოსახვითი სიბრტყეთა წყვილებიც გადაისახებიან ერთსა და იმავე წარმოსახვით წყვილში. ამრიგად ყველა სიბრტყეთა წყვილის (წარმოსახვითი და ნამდვილი) პროექციულად ეკვივალენტური წყვილები იქნება შემდეგი სახისა:

$$x'^2+y'^2=0 \qquad \text{(წარმოსახვით სიბრტყეთა წყვილი)},$$

$$x'^2-y'^2=0 \qquad \text{(ნამდვილ სიბრტყეთა წყვილი)},$$

თუ გადავალთ ერთგვაროვან კოორდინატებზე, ე. ი. თუ მოვახდენთ შემდეგ ჩასმას:

$$x'=\frac{\xi_1}{\xi_4}, \qquad y'=\frac{\xi_2}{\xi_4} \qquad z'=\frac{\xi_3}{\xi_4},$$

მივიღებთ მეორე რიგის ზედაპირთა პროექციული ეკვივალენტების განტოლებებს ერთგვაროვან კოორდინატებში:

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=0 \quad \text{(წარმოსახვითი სფერო)},$$

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-\xi_4^2=0 \quad \text{(სფერო)},$$

$\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2-\xi_4^2=0$ (ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი),

$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0$ (წარმოსახვითი კონუსი),

$\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2=0$ (კონუსი),

$\xi_1^2+\xi_2^2=0$ (წარმოსახვით სიბრტყეთა წყვილი),

$\xi_1^2-\xi_2^2=0$ (სიბრტყეთა წყვილი).

შენიშვნა. განვიხილოთ მეორე რიგის ზედაპირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j=0$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი წრფივი ჩასმებით ეს განტოლება დაიყვანება კანონიკურ სახეზე

$$\varepsilon_1\xi_1'^2+\varepsilon_2\xi_2'^2+\varepsilon_3\xi_3'^2+\varepsilon_4\xi_4'^2=0,$$

სადაც $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$-ს შეუძლიათ მიიღონ შემდეგი მნიშვნელობანი: 0, 1, -1.

წრფივი ჩასმები განიხილება როგორც პროექციული გარდაქმნები; მაშასადამე, შეიძლება ისეთი პროექციული კოორდინატების არჩევა, რომ წირის განტოლებას მიეცეს კანონიკური სახე. თუ კანონიკური განტოლების კოეფიციენტებს მივცემთ ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს, მივიღებთ მეორე რიგის ზედაპირთა პროექციული ეკვივალენტების მსგავს განტოლებებს პროექციულ კოორდინატებში (გარეგნულად იგივეს). ეს განტოლებანი პროექციულად დამოუკიდებელი განტოლებანია, ე. ი. არ დაიყვანება ერთიმეორეზე პროექციული გარდაქმნით. ამრიგად პროექციული თვალსაზრისით იმდენი სახის მეორე რიგის ზედაპირი არსებობს, რამდენიც კანონიკური განტოლებაა პროექციულ კოორდინატებში (ანდა რამდენიც პროექციული ეკვივალენტი არსებობს); მაგალითად, ნამდვილი, ჩვეულებრივი მეორე რიგის ზედაპირები სულ ორი სახისა იქნება: ერთი იმით ხასიათდება, რომ წრფოვანი მსახველები არა აქვს. იგი მხები სიბრტყის ცალ მხარეს მდებარეობს ყოველთვის, ე. ი. ყველგან ამობურცული ზედაპირია (როგორც, მაგალითად, სფერო), მას მეორე რიგის ოვალოიდი ეწოდება; მეორე იმით ხასიათდება, რომ წრფოვანი ზედაპირია და ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის ორი მსახველი (როგორც, მაგალითად, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი); მას ეწოდება ჩვეულებრივი მეორე რიგის წრფოვანი ზედაპირი. ამ ზედაპირების კანონიკური განტოლებანი პროექციულ კო-

ორდინატებში ისეთივეა, როგორიც სფეროსი და ცალკალთა ჰიპერბოლოიდისა ერთგვაროვან კოორდინატებში. ესენია:

$$\xi_1'^2+\xi_2'^2+\xi_3'^2-\xi_4'^2=0 \quad \text{(ოვალოიდი)},$$

$$\xi_1'^2+\xi_2'^2-\xi_3'^2-\xi_4'^2=0 \quad \text{(წრფოვანი მეორე რიგის ზედაპირი)}.$$

თუ გადავალთ დეკარტის კოორდინატებზე შემდეგი ჩასმით:

$$\frac{\xi_1'}{\xi_4'}=x', \qquad \frac{\xi_2'}{\xi_4'}=y', \qquad \frac{\xi_3'}{\xi_4'}=z',$$

მივიღებთ:

$$x'^2+y'^2+z'^2=1 \quad \text{(სფერო)},$$

$$x'^2+y'^2-z'^2=1 \quad \text{(ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი)}.$$

მაგრამ ასეთი გადასვლის დროს M წერტილი იცვლება M' წერტილით, ზედაპირი კი მისი პროექციულად თანადი ზედაპირით; მაშასადამე, ოვალოიდი პროექციულად გადაისახება სფეროზე, **ხოლო** წრფოვანი ზედაპირი კი ბრუნვის ცალკალთა ჰიპერბოლოიდზე.

§ 10. აფინურ და პროექციულ თანადობათა გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ჩვენ ზემოთ განვმარტეთ ნაკვთის აფინური და პროექციული გადასახვები დეკარტის კოორდინატების გარდაქმნების საშუალებით. მაგრამ შესაძლებელია ნაკვთის აღნიშნული სახის გარდაქმნები განვახორციელოთ უშუალო გეომეტრიული ოპერაციებითაც. ამ პარაგრაფში შევეხებით ასეთ საკითხებს:

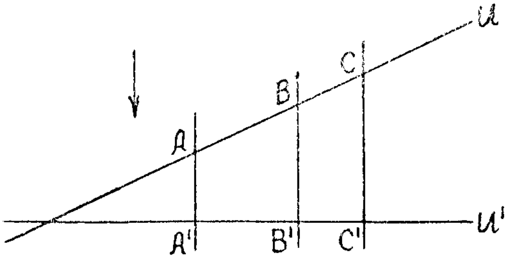
1. პერსპექტიულ-აფინური თანადობა. განვიხილოთ სიბრტყეზე ორი თანამკვეთი წრფე: u და u'. ავიღოთ რაიმე მიმართულება, რომელიც ამ წრფეების პარალელური არ არის და გავატაროთ u წრფის ნებისმიერ M წერტილზე მოცემული მიმართულების პარალელური წრფე. ეს წრფე თანაიკვეთება u' წრფესთან. ეს თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M'-ით. ამ წერტილს ეწოდება M წერტილის პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი გ ე გ მ ი ლ ი u წრფეზე აღებული მიმართულებით. ასეთნაირად u წრფე გადაისახება u' წრფეზე. ცხადია, რომ ასე დამყარებული თანადობა u და u' წრფეების წერტილთა შორის იქნება ურთიერთცალსახა. განვიხილოთ ABC და $A'B'C'$ თანადი სამეულები (ნახ. 154). ნახაზიდან აშკარაა, რომ

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'},$$

ანუ

$$(ABC)=(A'B'C').$$

ამრიგად თანადი სამეულების მარტივი ფარდობა ინვარიანტია აღნიშნული თანადობის მიმართ. ამრიგად, პარალელური დაგეგმილებით განსაზღვრულ თანადობას ახლავს წრფეზე აფინური თანადობის ორივე თვისება; მაშასადამე, ეს თანადობა იქნება აფინური. მას ეწოდება პერსპექტიულ-აფინური თანადობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ u და u' წრფეების წერტილთა შორის პერსპექტიულ-



ნახ. 154.

აფინური თანადობა სავსებით განისაზღვრება წერტილთა ერთი წყვილით. მართლაც, თუ A და A' ნებისმიერი წერტილებია u და u' წრფეებისა (განსხვავებული u და u' წრფეების თანაკვეთის წერტილისაგან), მაშინ AA' წრფე განსაზღვრავს პარალელური დაგეგმილების მიმართულებას და მაშასადამე თვით პერსპექტიულ-აფინურ თანადობასაც. ამ ორი წრფის წერტილთა შორის ყოველ ურთიერთცალსახა თანადობას, რომლის დროსაც სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ინვარიანტია, ეწოდება აფინური თანადობა. ვიცით, რომ, საზოგადოდ, აფინური თანადობა (წრფეზე) განისაზღვრება ნებისმიერად აღებულ წერტილთა ორი წყვილით. ცხადია, რომ ეს თვისება აქაც ძალაში დარჩება (მტკიცება გარეგნულად ისეთივეა, როგორც წრფეზე იყო წარმოებული, როდესაც სამი წერტილის მარტივი ფარდობის ინვარიანტობა ვაჩვენეთ). ამრიგად შეგვიძლია ნებისმიერად დავასახელოთ u და u' წრფეებზე წერტილთა ორი წყვილი:

$$A,\ B \quad \text{და} \quad A',\ B'$$

და ისე შევადგინოთ აფინური თანადობა, რომ ეს წყვილები იყოს თანადი. ადვილი მისახვედრია, რომ საძიებელი თანადობა განისაზღვრება შემდეგი პირობით

$$(A'B'M') = (ABM). \tag{45}$$

საზოგადოდ, BB' არ იქნება პარალელური AA' წრფისა; მაშასადამე, (45) ტოლობით განსაზღვრული აფინური თანადობა, საზოგადოდ, არ იქნება პერსპექტიულ-აფინური.

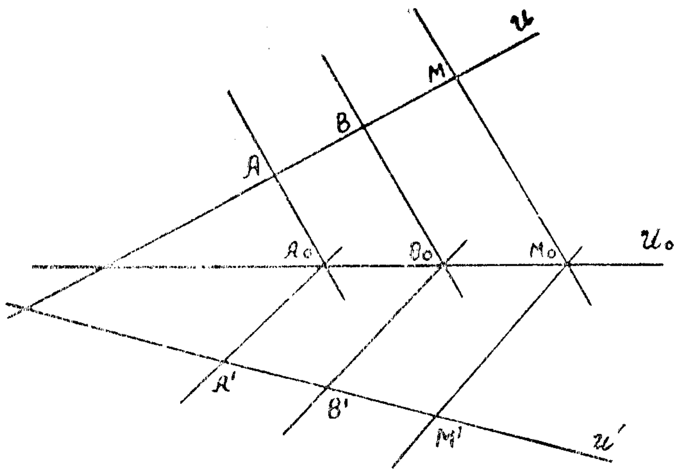
ახლა განვიხილოთ ორი თანმიმდევრობითი პერსპექტიულ-აფინური თანადობა. სახელდობრ, u წრფე დავაგეგმილოთ u' წრფეზე პარალელური დაგეგმილებით, u' წრფე დავაგეგმილოთ u'' წრფეზე პარალელური დაგეგმილებით (ოღონდ სხვა მიმართულებით). ამით დამყარდება გარკვეული თანადობა u და u'' წრფეების წერტილთა შორის. ცხადია, რომ

$$(ABC)=(A'B'C'),$$
$$(A'B'C')=(A''B''C'').$$

აქედან

$$(ABC)=(A''B''C''),$$

ე. ი. ახალ თანადობაში სამი წერტილის მარტივი ფარდობა ინვარიანტია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს თანადობა იქნება აფინური.



ნახ. 155.

ახლა დავუშვათ, რომ u და u' წრფეებზე მოცემულია წერტილთა ნებისმიერი ორი წყვილი: A, B და A', B'. გავატაროთ A და B წერტილებზე პარალელური წრფეები რაიმე მიმართულებით. ასევე A' და B' წერტილებზე გავატაროთ პარალელური წრფეები რაიმე სხვა მიმართულებით. პარალელურ წრფეთა წყვილის თანაკვეთის წერტილები მეორე წყვილთან შესაბამად აღვნიშნოთ A_0-ით და B_0-ით (ნახ. 155) და განვსაზღვროთ წრფე: $A_0B_0=u_0$. ახლა დავა-

გეგმილოთ u წრფე u_0 წრფეზე AA_0 წრფის მიმართულებით, შემდეგ u_0 წრფე დავაგეგმილოთ u' წრფეზე A_0A' წრფის მიმართულებით. მივიღებთ u და u' წრფეებს შორის აფინურ თანადობას, რომელიც, ცხადია, შეუთანადებს მოცემულ წყვილებს: მაშასადამე, u და u' წრფეზე ნებისმიერად აღებული ორი წერტილთა წყვილი ცალსახად განსაზღვრავს შესაბამ აფინურ თანადობას ორი თანმიმდევრობითი პარალელური დაგეგმილების სახით. აქედან ჩანს, რომ ყოველი აფინური თანადობა შეგვიძლია განვახორციელოთ ორი თანმიმდევრობითი პარალელური დაგეგმილების საშუალებით. ამაში მდგომარეობს აფინური თანადობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

სივრცეში ორი სიბრტყის წერტილთა შორის აფინური თანადობა განიმარტება როგორც ისეთი თანადობა, რომელსაც ახლავს სიბრტყეზე წერტილთა შორის აფინური თანადობის ძირითადი თვისებანი. ადვილი შესამჩნევია, რომ ორი სიბრტყის ერთიმეორეზე პარალელური დაგეგმილებით დამყარებული თანადობა იქნება აფინური (მას ექნება აფინური თანადობის სამივე ძირითადი თვისება). მას ეწოდება პერსპექტიულ-აფინური თანადობა ორი სიბრტყის წერტილთა შორის. აქაც ორი თანმიმდევრობითი პარალელური დაგეგმილების შედეგად მიღებული თანადობა იქნება აფინური. მაგრამ ამ შემთხვევაში ზოგად აფინურ თანადობას არა აქვს ისეთი მარტივი კავშირი პარალელურ დაგეგმილებასთან, როგორიც მას ჰქონდა ორი წრფის წერტილთა შორის აფინური თანადობის შემთხვევაში.

2. პერსპექტიული თანადობა. განვიხილოთ ორი თანამკვეთი წრფე: u და u'. ავიღოთ ამ წრფეების გარეშე რაიმე S წერტილი. ამ წერტილზე გავატაროთ წრფეთა კონა. კონის წრფეები აღვნიშნოთ a, b, c, $\cdots$ ასოებით. ამ წრფეთა თანაკვეთის წერტილები u და u' წრფეებთან აღვნიშნოთ ასე:

$$A,\ B,\ C, \cdots \qquad (u \text{ წრფეზე}),$$

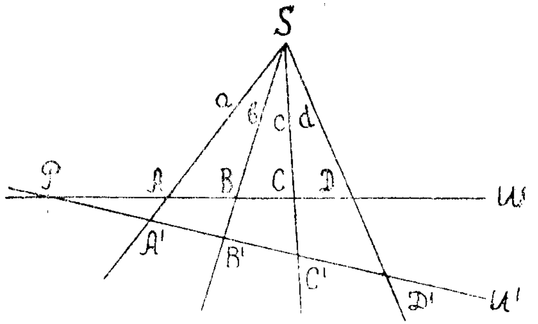
$$A',\ B',\ C', \cdots \qquad (u' \text{ წრფეზე}).$$

u და u' თანაკვეთის წერტილებს კონის რაიმე წრფესთან ვუწოდოთ თანადი წერტილები. ასე დამყარდება გარკვეული თანადობა u და u' წრფეების წერტილთა შორის. მას ეწოდება *პერსპექტიული თანადობა*. u წრფის ასეთნაირად გადასახვას u' წრფეზე ეწოდება *ცენტრალური დაგეგმილება*. a, b, c, $\cdots$ წრფეებს ეწოდება *მაგეგმილებელი წრფეები*. S

წერტილს ეწოდება პერსპექტივის ცენტრი. პერსპექტიული თანადობა u და u' წრფეებს შორის აღინიშნება ასე

$$u(ABC\cdots)\overset{S}{\underset{\wedge}{=}}u'(A'B'C'\cdots). \tag{46}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ცენტრალური დაგეგმილების დროს u წრფის ყოველ წერტილს მოეძებნება თანადი წერტილი (გეგმილი) u' წრფეზე გარდა იმ ერთადერთი წერტილისა, რომლის მაგეგმილებელი წრფე პარალელურია u' წრფისა. ამ წერტილის შესაბამი წერტილი (გეგმილი) იქნება u' წრფის უსასრულოდ დაშორებული წერტილი (ნახ. 156). თუ ჩავთვლით ამ წყვილის თანადობას კანო-



ნახ. 156.

ნიერად, ე. ი. ასე დამყარებულ თანადობას განვიხილავთ პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით, მაშინ ცენტრალური დაგეგმილებით დამყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა u და u' წერტილებს შორის, ე. ი. განსახილავი პერსპექტიული თანადობა იქნება ურთიერთცალსახა.

ახლა დავამტკიცებთ, რომ ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია პერსპექტიული გადასახვის მიმართ; ამისათვის განვიხილოთ ოთხი წერტილი: A, B, C, D. მათ მაგეგმილებელ წრფეთა შორის კუთხეები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$\angle ASB=(ab),\quad \angle ASC=(ac) \text{ და ა. შ.}$$

ნახაზიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin(ac)}{\sin A},\qquad \frac{AD}{SD}=\frac{\sin(ad)}{\sin A},$$

$$\frac{BC}{SC}=\frac{\sin(bc)}{\sin B}, \qquad \frac{BD}{SD}=\frac{\sin(bd)}{\sin B}.$$

აქედან განვსაზღვროთ AC, BC, AD, BD მონაკვეთები და ჩავსვათ ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობის ფორმულაში. მივიღებთ

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

ანუ

$$(ABCD)=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მოთავსებულ გამოსახულებას ეწოდება a, b, c, d წრფეების ანჰარმონიული ფარდობა და აღინიშნება ასე: $(abcd)$. ამრიგად ოთხი წრფის ანჰარმონიული ფარდობა წარმოგვიდგება შემდეგი ფორმულით

$$(abcd)=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}. \tag{47}$$

ორი უკანასკნელი ტოლობის შედარება მოგვცემს

$$(ABCD)=(abcd), \tag{48}$$

ე. ი. ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ტოლია მათი მაგეგმილებელი წრფეების ანჰარმონიული ფარდობისა. რადგან A', B', C', D' წერტილები გეგმილდება იმავე a, b, c, d წრფეებით, ამიტომ (48) ტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$(A'B'C'D')=(abcd).$$

უკანასკნელი ორი ტოლობის შედარება მოგვცემს

$$(ABCD)=(A'B'C'D').$$

ამრიგად პერსპექტიულად თანადი ოთხეულების ანჰარმონიული ფარდობანი ერთიმეორის ტოლია, ანუ ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია პერსპექტიული თანადობის მიმართ (რ. დ. გ.). როგორც ვნახეთ, პერსპექტიულ თანადობას აღმოაჩნდა ორი წრფის წერტილთა შორის პროექციული თანადობის განმსაზღვრელი თვისებანი (წერტილთა შორის ურთიერთცალსახა თანადობა და ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობის ინვარიანტობა); მაშასადამე, პერსპექტიული თანადობა იქნება პროექციული.

პირდაპირ ჩანს, რომ პერსპექტიული თანადობა ორი მოცემული წრფის წერტილთა შორის სავსებით განისაზღვრება პერსპექტივის ცენტრის დასახელებით. ცხადია, რომ პერსპექტივის ცენტრი განისაზღვრება, თუ დავასახელებთ ორ მაგეგმილებელ წრფეს, მაგალითად, a-სა და b-ს.

ეს წრფეები კი განისაზღვრება A, A' და B, B' წყვილებით; მაშასადამე, თუ u და u' წრფეებზე ნებისმიერად ავიღებთ წერტილთა ორ წყვილს A, B და A', B', მაშინ AA' და BB' წრფეები თანაკვეთაში განსაზღვრავენ ისეთ პერსპექტივის ცენტრს, რომლიდანაც ცენტრალური დაგეგმილება A, B წერტილებს გადასახავს (დააგეგმილებს) A', B' წერტილებში. ამრიგად, ნებისმიერად აღებული A, B და A', B' წერტილთა წყვილებისათვის არსებობს ერთადერთი პერსპექტიული თანადობა, რომელიც გადასახავს ამ წყვილებს ერთიმეორეში (იგულისხმება, რომ მოცემული წერტილები ერთიმეორისაგან განსხვავდებიან, ე. ი. არც ერთი არ არის u და u' წრფეების თანაკვეთის წერტილი). პროექციული თანადობა u და u' წრფეებს შორის განიმარტება როგორც ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა ამ წრფეთა (u და u') წერტილებს შორის, რომელსაც აქვს ისეთივე ძირითადი (დამახასიათებელი) თვისებანი, როგორიც ჰქონდა პროექციულ თანადობას წრფეზე (ურთიერთცალსახობა და ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობის ინვარიანტობა). აქაც პროექციული თანადობა განისაზღვრება ნებისმიერად აღებულ წერტილთა ორი სამეულის საშუალებით. მართლაც, თუ მოცემულია u და u' წრფეებზე A, B, C და A', B', C' სამეულები, მაშინ შესაბამი პროექციული თანადობა განისაზღვრება შემდეგი განტოლებით

$$(A'B'C'M')=(ABCM). \tag{49}$$

ხქედან აშკარაა, რომ, საზოგადოდ, პროექციული თანადობა არ იქნება პერსპექტიული. მართლაც, თუ C და C' წერტილებს ისე ავიღებთ, რომ CC' წრფემ არ გაიაროს AA' და BB' წრფეების თანაკვეთის წერტილზე, მაშინ (49) ტოლობით განსაზღვრული პროექციული თანადობა არ იქნება პერსპექტიული.

ახლა განვიხილოთ ორი თანმიმდევრობითი პერსპექტივით დამყარებული თანადობა. სახელდობრ, u წრფე დავაგეგმილოთ u_0 წრფეზე S წერტილიდან, ხოლო u_0 წრფე დავაგეგმილოთ u' წრფეზე S' წერტილიდან. ამით დამყარდება თანადობა u და u' წრფეების წერტილთა შორის, როგორც შედეგი ზემოაღნიშნული ორი

პერსპექტივისა (ნახ. 157). რადგან ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია პერსპექტიული თანადობისა, ამიტომ

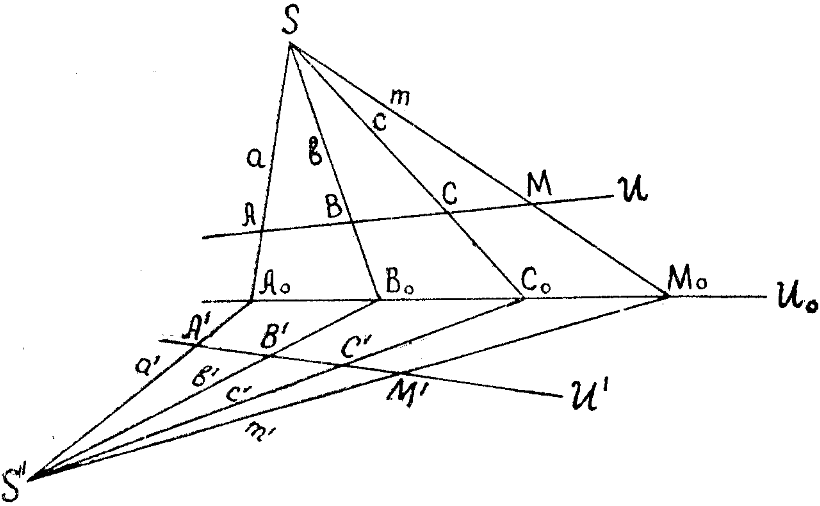
$$(ABCM)=(A_0B_0C_0M_0),$$

$$(A'B'C'M')=(A_0B_0C_0M_0).$$

აქედან

$$(A'B'C'M')=(ABCM).$$

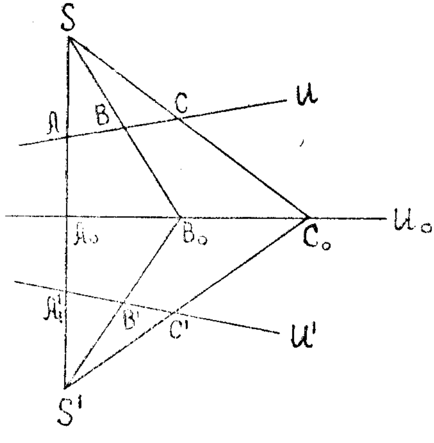
ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ u და u' წრფეებს შორის დამყარებული თანადობა პროექციულია, ე. ი. ორი პერსპექტივის შედეგად მიღებული თანადობა არის პროექციული. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ნებისმიერი პროექციული თანადობა შეგვიძლია წარმოვიდგი-



ნახ. 157.

ნოთ პერსპექტივის წყვილის სახით: ამისათვის დავუშვათ, რომ u და u' წრფეებს შორის არსებობს პროექციული თანადობა. გავატაროთ AA' წრფე და მასზე ავიღოთ ნებისმიერად (ოღონდ A და A' წერტილებისაგან განსხვავებული) S და S' წერტილები. S წერტილიდან გავატაროთ SB და SC წრფეები, S' წერტილიდან კი $S'B'$ და $S'C'$ წრფეები. SB და $S'B'$ წრფეების თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ B_0-ით, ხოლო SC და $S'C'$ წრფეების თანაკვეთის წერტილი C_0-ით. გავატაროთ B_0C_0 წრფე, რომელიც აღვნიშნოთ u_0-ით (ნახ. 158). ჯერ დავაგეგმილოთ u წრფე S' წერტილიდან u_0 წრფეზე, შემდეგ u_0 წრფე S' წერტილიდან u' წრფეზე. ამით მივი-

ღებთ პროექციულ თანადობას პერსპექტივის წყვილის სახით, რომელიც შეუთანადებს A, B, C და A', B', C' სამეულებს. მაგრამ ამ სამეულებით ცალსახად განსაზღვრულია მოცემული პროექციული თანადობა; მაშასადამე, პერსპექტივის წყვილით მიღებული პროექციული თანადობა დაემთხვევა აღებულ პროექციულ თანადობას, ე. ი. აღებული პროექციული თანადობა წარმოგვიდგება პერსპექტივის წყვილის სახით (რ. დ. გ.).

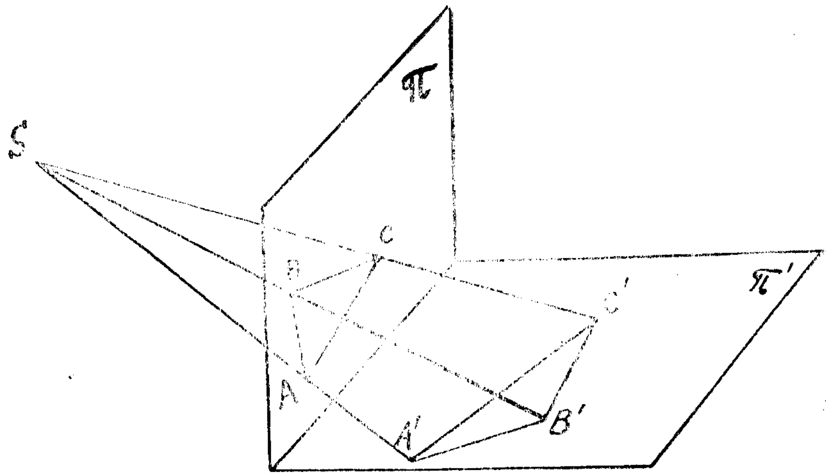


ნახ. 158.

ადვილი შესამჩნევია, რომ პერსპექტიული თანადობის დროს u და u' წრფეების თანაკვეთის წერტილს (ნახ. 156) ეთანადება თავისი თავი ($P=P'$); მაშასადამე, u და u' წრფეებს შორის პროექციული თანადობა პერსპექტიული რომ იყოს, ამისათვის აუცილებელია u და u' წრფეების თანაკვეთის წერტილს შეესაბამებოდეს თავისი თავი. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს პირობა საკმარისიც არის. დავუშვათ, რომ u და u' წრფეებს შორის არსებობს პროექციული თანადობა და ამ წრფეების თანაკვეთის P წერტილს (ნახ. 156) შეესაბამება თავისი თავი. ავიღოთ ორი სხვა თანადი წყვილი: A, A' და B, B'. გავატაროთ წრფეები: AA' და BB'. ამ წრფეების თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ S-ით. ამ წერტილებიდან u წრფე დავაგეგმილოთ u' წრფეზე. მივიღებთ პერსპექტიულ თანადობას, რომელიც შეუთანადებს PAB და $P'A'B'$ სამეულებს ერთიმეორეს. ეს პერსპექტიული თანადობა, როგორც ვიცით, არის პროექციულიც. მაგრამ სამი წყვილი თანადი სამეულებისა ცალსახად განსაზღვრავს პროექციულ თანადობას; ამიტომ მიღებული პერსპექტიული თანადობა დაემთხვევა მოცემულ პროექციულ თანადობას, ე. ი. თვით მოცემული თანადობა ყოფილა პერსპექტიული (რ. დ. გ.).

სიბრტყეზე ორი წრფის წერტილთა შორის პერსპექტიული თანადობის მსგავსად განიმარტება პერსპექტიული თანადობა ორი სიბრტყის წერტილთა შორის სივრცეში. აქ ვიხილავთ ორ თანა-

მკვეთ π და π' სიბრტყეებს და მათ გარეშე S წერტილს. ამ წერტილზე გავატარებთ წრფეთა ძნულს. ძნულის წრფეებს აღვნიშნავთ $a, b, c, \cdots$ ასოებით ამ წრფეთა თანაკვეთის წერტილებს π და π' სიბრტყეებთან შესაბამად აღვნიშნავთ $A, B, C, \cdots$ და $A', B', C', \cdots$ ასოებით (ნახ. 159).



ნახ. 159.

ასეთნაირად π სიბრტყე გადაისახება π' სიბრტყეზე. ამ პროცესს ეწოდება S წერტილიდან ცენტრალური დაგეგმილება π სიბრტყისა π' სიბრტყეზე. ასე მიღებულ ორი სიბრტყის წერტილთა ურთიერთშესაბამობას ეწოდება პერსპექტიული თანადობა π და π' სიბრტყეების წერტილთა შორის. ეს დამოკიდებულება აღინიშნება შემდეგნაირად

$$\pi(ABC\cdots) \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} \pi'(A'B'C'\cdots).$$

$a, b, c, \cdots$ წრფეებს ეწოდება მაგეგმილებელი წრფეები, S წერტილს კი პერსპექტივის ცენტრი.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ თანადობის დროს π სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთი გარკვეული წერტილი π' სიბრტყეზე და, პირუკუ (თუ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის თანადობას მივიჩნევთ კანონიერად), ე. ი. თანადობა იქნება ურთიერთცალსახა. ადვილი მისახვედრია, აგრეთვე, რომ π სიბრტყის ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებს შეესაბამება π' სიბრტყის ერთ წრფეზე მდებარე წერტილები. თვით ასეთ ორ წრფეს ვუწოდებთ

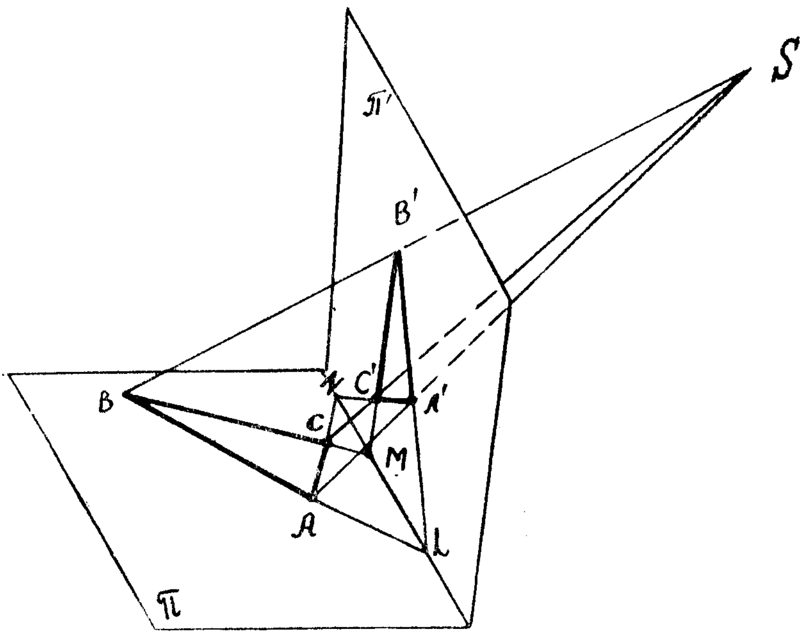
ერთიმეორის თანად წრფეებს. მაგეგმილებელი წრფეები ამ შემთხვევაში მოთავსებული იქნება ერთ სიბრტყეზე. ეს სიბრტყე თანაიკვეთება π და π' სიბრტყეებთან თანად წრფეებზე.

ერთი წრფის მეორეზე ასეთნაირ გადასახვას ეწოდება წრფის დაგეგმილება π სიბრტყიდან π' სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში დაგეგმილება ხორციელდება სიბრტყით. მას მაგეგმილებელი სიბრტყე ეწოდება. როგორც აღნიშნული იყო, შესაბამი წრფეების წერტილები ერთიმეორეში გეგმილდებიან სიბრტყეზე მოთავსებული წრფეებით, რომელნიც გადიან S წერტილზე, ე. ი. წრფეთა კონით; მაშასადამე, შესაბამი წრფეების წერტილთა შორის დამყარდება პერსპექტიული თანადობა. პერსპექტიული თანადობის დროს კი წრფეზე მდებარე ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია. ამრიგად π და π' სიბრტყეების წერტილთა შორის პერსპექტიულ თანადობას ახლავს სიბრტყეზე პროექციული თანადობის განმსაზღვრელი სამი თვისება; მაშასადამე, ეს თანადობა იქნება პროექციული. საზოგადოდ, ორი სიბრტყის წერტილთა შორის პროექციულ თანადობას განვსაზღვრავთ იმ სამი პირობით, რითაც განისაზღვრება პროექციული თანადობა სიბრტყეზე წერტილთა შორის (პროექციული გარდაქმნებით დამყარებული თანადობა). ადვილი შესამჩნევია, რომ ორი თანმიმდევრობითი პერსპექტივით დამყარებული თანადობა (ორი სიბრტყის წერტილთა შორის) იქნება პროექციული. მაგრამ პროექციული თანადობა ორი სიბრტყის წერტილთა შორის არა ყოველთვის წარმოიდგინება პერსპექტივის წყვილით.

ადვილი მისახვედრია, რომ π და π' სიბრტყეების წერტილთა შორის პერსპექტიული თანადობის დროს ABC სამკუთხედს შეესაბამება $A'B'C'$ სამკუთხედი. AA', BB', CC' წრფეები, ე. ი. შესაბამი წვეროების შემაერთებელი წრფეები იქნება მაგეგმილებელი წრფეები და გაივლიან S წერტილზე. თუ დავუკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ ამ სამკუთხედების AB და $A'B'$ შესაბამი გვერდები ერთ სიბრტყეზეა მოთავსებული, სახელდობრ, SAB სიბრტყეზე; ამიტომ ეს გვერდები თანაიკვეთება. რადგან AB გვერდი მდებარეობს π სიბრტყეზე და $A'B'$ გვერდი მდებარეობს π' სიბრტყეზე, ამიტომ AB და $A'B'$ წრფეების თანაკვეთის წერტილი იქნება π და π' სიბრტყეების საერთო წერტილი. ამ სიბრტყეების საერთო წერტილები კი მდებარეობენ მათი თანაკვეთის წრფეზე. ამრიგად, AB და $A'B'$ გვერდების თანაკვეთის წერტილი მოთავსდება π და π' სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე. ასეთივე მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ BC, $B'C'$ და AC, $A'C'$ წყვილების თანაკვეთის წერტი-

ლები აგრეთვე მოთავსდება π და π′ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე; მაშასადამე, პერსპექტიულად თანადი სამკუთხედების შესაბამი გვერდები თანაიკვეთება და თანაკვეთის ეს სამი წერტილი მოთავსდება ერთ წრფეზე (ნახ. 160). მტკიცდება, რომ ეს თვისება საკმარისიც არის სამკუთხედების პერსპექტიულად განლაგებისათვის (ე. ი. იმისათვის, რომ შესაბამი წვეროების შემაერთებელი წრფეები გადიოდნენ ერთ წერტილზე) დამტკიცება მოხდება ზემოაღნიშნული მსჯელობის შებრუნებით. შესაბამი სამკუთხედების ეს თვისება ასახულია დეზარგის[1] ცნობილ თეორემაში.

დეზარგის თეორემა. თუ ორი სამკუთხედის შესაბამი გვერდები თანაიკვეთება ერთ წრფეზე, მაშინ შესაბამი წვეროების შემაერთებელი წრფეები გაივლის ერთ წერტილზე და, პირუკუ.



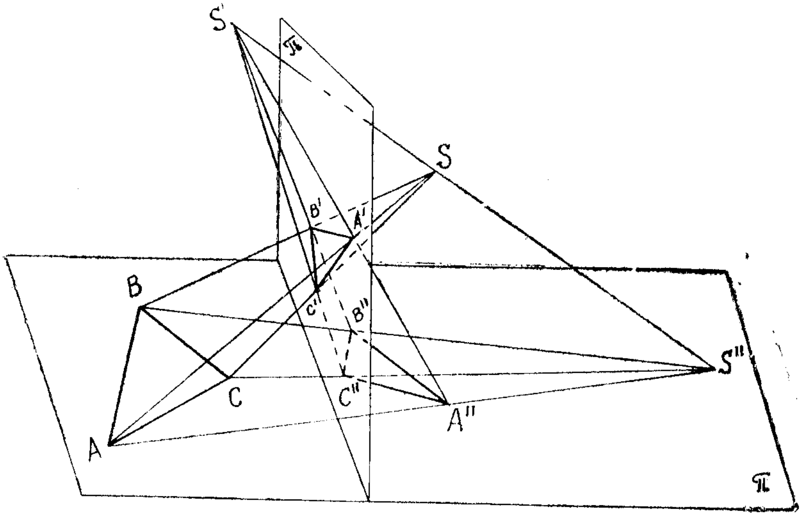
ნახ. 160.

ამ თეორემის დამტკიცება განიხილება ორ ნაწილად: 1) სამკუთხედები მდებარეობენ სხვადასხვა სიბრტყეზე; 2) სამკუთხედები მდებარეობენ ერთ სიბრტყეზე.

---

[1] დეზარგი—ცნობილი ფრანგი გეომეტრი (1593—1662).

პირველ შემთხვევას შეესაბამება ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა პერსპექტიულად თანადი სამკუთხედების შესახებ. რაც შეეხება მეორე შემთხვევას, აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ 160-ე ნახაზზე მოცემული კონფიგურაციის დაგეგმილება π სიბრტყეზე რაიმე S' წერტილიდან მოგვცემს სიბრტყეზე ABC და $A''B''C''$ სამკუთხედებს (სადაც $A''B''C''$ გეგმილია $A'B'C'$ სამკუთხედისა), რომელთათვისაც დეზარგის თეორემა განხორციელებული იქნება. სახელდობრ,

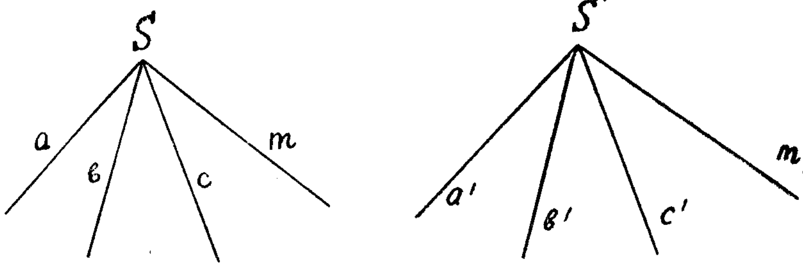


ნახ. 161.

შესაბამი გვერდების თანაკვეთის წერტილები იქნება იგივე, რაც პირველ შემთხვევაში. შესაბამი წვეროების შემაერთებელი წრფეები, ე. ი. AA'', BB'', CC'', გაივლის S წერტილის S'' გეგმილზე (ნახ. 161). ახლა დავუშვათ, რომ π სიბრტყეზე მოთავსებული ორი γ და γ'' სამკუთხედი აკმაყოფილებს დეზარგის თეორემის პირობას, ე. ი. შესაბამი გვერდების თანაკვეთის წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე. ამ წრფეზე გავატაროთ π' სიბრტყე და S' წერტილიდან დავაგეგმილოთ γ'' სამკუთხედი π' სიბრტყეზე. მივიღებთ π' სიბრტყეზე ისეთ γ' სამკუთხედს, რომელიც γ სამკუთხედის მიმართ აკმაყოფილებს დეზარგის თეორემის პირობას. ამიტომ γ და γ' სამკუთხედების შესაბამი წყვილების შემაერთებელი წრფეები გაივლის ერთ S წერტილზე. ახლა, თუ უკუდავაგეგმილებთ π სიბრტყეზე γ' სამკუთხედს იმავე S' წერტილიდან, მაშინ γ და γ' სამკუთხედების შესაბამი

წვეროების შემაერთებელი წრფეები დაგეგმილდება γ და γ'' სამკუთხედების შესაბამი წვეროების შემაერთებელ წრფეებში. მეორე მხრივ, ამ გეგმილებმა უნდა გაიარონ S წერტილის S'' გეგმილზე, ე. ი. ერთ წერტილზე. ამრიგად, დეზარგის თეორემა დამტკიცებულია მეორე შემთხვევაშიაც. იმ წრფეს, რომელზედაც მოთავსებულია სამკუთხედების შესაბამი გვერდების თანაკვეთის წერტილები, ეწოდება დეზარგის წრფე. იმ წერტილს, რომელზედაც გადის სამკუთხედების შესაბამი წვეროების შემაერთებელი წრფეები, ეწოდება დეზარგის წერტილი. თეორემაში მოხსენებული შინაარსის გამომსახველ ნახაზს ეწოდება დეზარგის კონფიგურაცია. საზოგადოდ, გეომეტრიის ძირითადი ელემენტების (მაგალითად, წერტილი, წრფე და სიბრტყე), გარკვეული წესით, ყოველ შენაერთს ეწოდება კონფიგურაცია.

3. პროექციული და პერსპექტიული თანადობა წრფეთა კონებს შორის. წრფეთა ორი კონის წრფეებს შორის პროექციული თანადობა ეწოდება ისეთ ურთიერთცალსახა თანადობას, რომლის დროსაც თანად წრფეთა ოთხეულების ანჰარმონიული ფარდობანი ერთიმეორის ტოლია. ასეთი განმარტება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ორ კონას შორის ისეთი პროექციული თანადობა, რომელიც შეუთანადებს წინასწარ აღებულ წრფეთა ორ ნებისმიერ სამეულს. აშკარაა ასეთი თანადობა განისაზღვრება შემდეგი პირობით (ნახ. 162)



ნახ. 162.

$$(a'b'c'm') = (abcm). \tag{50}$$

თუ ორი კონის თანადი წრფეების თანაკვეთის წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე (ე. ი. ორივე კონა აგეგმილებს ერთსა და

იმავე წერტილთა მიმდევრობას წრფეზე), მაშინ თანადობას ეწოდება პერსპექტიული (ნახ. 163). რადგან ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ტოლია მათ მაგეგმილებელ წრფეთა ანჰარმონიული ფარდობისა, ამიტომ

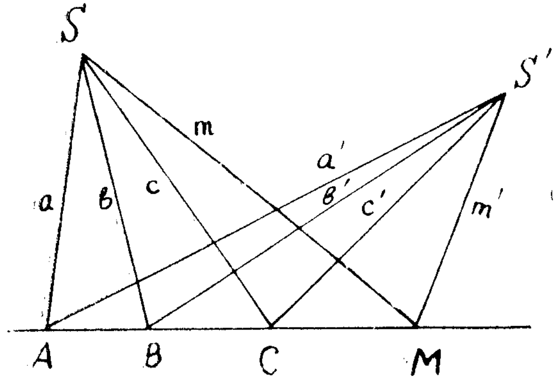
$$(abcm)=(ABCM),$$

$$(a'b'c'm')=ABCM.$$

აქედან

$$(a'b'c'm')=(abcm);$$

მაშასადამე, პერსპექტიული თანადობა წრფეთა კონებს შორის არის პროექციული.



ნახ. 163.

4. პროექციული თანადობა წრფეთა კონებს შორის კუთხურ კოეფიციენტებში. ჯერ გამოვსახოთ ოთხი წრფის ანჰარმონიული ფარდობა კუთხურ კოეფიციენტებში. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ წრფეთა კონის ცენტრი კოორდინატთა სისტემის სათავეშია. დავუშვათ, რომ წრფეები მოცემულია შემდეგი განტოლებებით:

$$y=k_1x, \quad y=k_2x, \quad y=k_3x, \quad y=k_4x.$$

მოვახდინოთ ამ წრფეთა თანაკვეთა y ღერძის პარალელური წრფით:

$x=1$. თანაკვეთის წერტილები შესაბამად აღვნიშნოთ A, B, C, D-თი. ამ წერტილების ორდინატები განისაზღვრება მოცემულ

წრფეთა განტოლებებიდან, თუ იქ ჩავსვამთ x-ის ნაცვლად 1-ს, მივიღებთ:

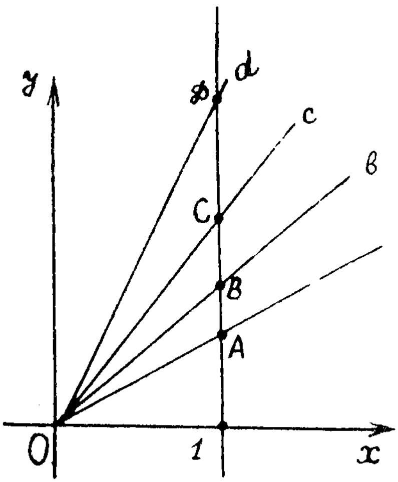
$$y_1=k_1,\quad y_2=k_2,\quad y_3=k_3,\quad y_4=k_4.$$

AC, BC, AD, BD მონაკვეთებისათვის (ნახ. 164) გვექნება:

$$AC=y_3-y_1,\quad BC=y_3-y_2,\quad AD=y_4-y_1,\quad BD=y_4-y_2.$$

ეს ტოლობანი საშუალებას გვაძლევს დავწეროთ

$$(ABCD)=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}:\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4);$$



ნახ. 164.

მაშასადამე,

$$(ABCD)=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4).$$

თუ შევადარებთ ამ ტოლობას (48) ფორმულასთან, მივიღებთ

$$(abcd)=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4). \tag{51}$$

ამრიგად, ოთხი წრფის ანჰარმონიული ფარდობა უდრის მათი კუთხური კოეფიციენტების ანჰარმონიულ ფარდობას.

თუ მოცემულია $abcd$ და $a'b'c'd'$ ოთხეულების კუთხური კოეფიციენტები: k_1, k_2, k_3, k და k_1', k_2', k_3', k', მაშინ (51) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$(abcm)=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k),$$
$$(a'b'c'm')=(k_1',\ k_2',\ k_3',\ k').$$

ამ ტოლობათა მიხედვით (50) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

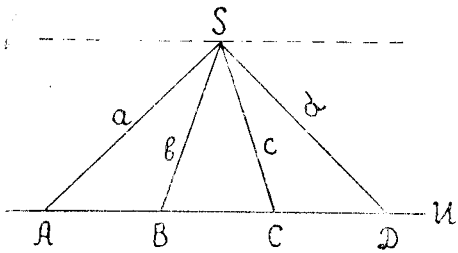
$$(k_1',\ k_2',\ k_3',\ k')=(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k).$$

აქედან ამოიხსნება k' და გამოისახება k-ს საშუალებით. კოეფიციენტების სათანადო აღნიშვნების შემდეგ მივიღებთ წილადწრფივ გამოსახულებას

$$k'=\frac{\alpha k+\beta}{\gamma k+\delta} \tag{51'}$$

(სადაც α, β, γ, δ მუდმივებია). ამრიგად, პროექციული თანადობა წრფეთა კონებს შორის განიზღვრება კონის წრფის კუთხური კოეფიციენტის წილადწრფივი გარდაქმნით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორი კონის წრფეთა შორის დამყარებული ყოველი თანადობა (51′) სახისა, იქნება პროექციული. შემოწმება მოხდება ისეთივე გამოთვლებით, როგორიც ჩატარებული იყო წრფეზე პროექციული გარდაქმნისათვის დეკარტის კოორდინატებში.

ა. თანადობა წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის. წარმოვიდგინოთ წრფის წერტილთა სიმრავლე და მათი მაგეგმილებელი წრფეთა კონა (ნახ. 165). წრფის წერტილს შევუსაბამოთ ის წრფე კონიდან, რომელიც გადის ამ წერტილზე, ე. ი. რომელიც აგეგმილებს მოცემულ წერტილს. ამით დამყარდება თანადობა წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის. ადვილი შესამჩნევია, რომ კონის იმ წრფეს, რომელიც პარალელურია u წრფისა შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი. თუ ამ თანადობასაც კანონიერად მივიჩნევთ, მაშინ წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის დამყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა. ამ თანადობას ეწოდება პერსპექტიული თანადობა.



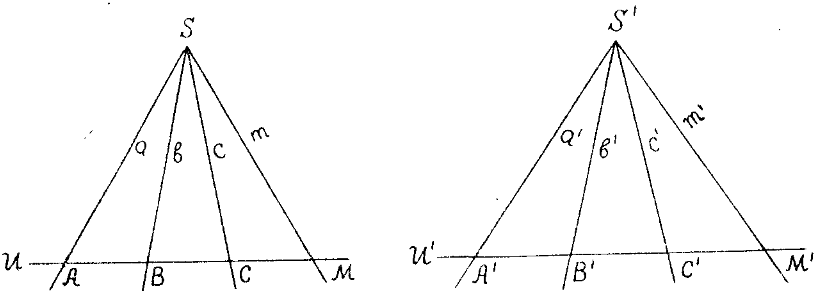
ნახ. 165.

პროექციული თანადობა წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის განიმარტება ისევე, როგორც პროექციული თანადობა ორი წრფის წერტილთა შორის. სახელდობრ, წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის ისეთ ურთიერთცალსახა თანადობას, რომლის დროსაც შესაბამი ოთხეულების ანჰარმონიული ფარდობანი ტოლია, ეწოდება პროექციული თანადობა. ადვილი მისახვედრია, რომ პერსპექტიული თანადობის დროს (165-ე ნახაზიდან პირდაპირ გამომდინარეობს) ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას

$$(ABCD)=(abcd);$$

მაშასადამე, პერსპექტიული თანადობა წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის არის პროექციული.

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ $S(abc\cdots)$ და $S'(a'b'c'\cdots)$ პროექციულ თანადობაში მყოფი კონები აგეგმილებენ u და u' წრფეების წერტილებს შესაბამად (ნახ. 166)



ნახ. 166.

თუ ამ კონების შესაბამი წყვილებით დაგეგმილებულ წერტილებს u და u' წრფეზე ჩავთვლით შესაბამ წყვილებად (მაგალითად, M და M' წერტილთა წყვილს), მაშინ u და u' წრფეების წერტილთა შორის დამყარდება გარკვეული თანადობა. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს თანადობა იქნება პროექციული. (48) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$(ABCM)=(abcm),$$

$$(A'B'C'M')=(a'b'c'm').$$

მეორე მხრივ (რადგან კონებს შორის არსებობს პროექციული თანადობა),

$$(abcm)=(a'b'c'm').$$

ამრიგად

$$(ABCM)=(A'B'C'M').$$

ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ u და u' წრფეებს შორის დამყარებული თანადობა იქნება პროექციული; მაშასადამე, პროექციულ თანადობაში მყოფი ორი წრფეთა კონა u და u' წრფეების წერტილთა დაგეგმილების დროს ამყარებს პროექციულ თანადობას ამ წრფეების წერტილთა შორის.

შევნიშნავთ, რომ ანალოგიურად განიმარტება პროექციული და პერსპექტიული თანადობანი სიბრტყის წერტილთა და წრფეთა ძნულის წრფეებს შორის. სახელდობრ, სიბრტყის წერტილების და მათი მაგეგმილებელი ძნულის წრფეების თანადობას ეწოდება პერსპექტიული თანადობა ამ ორი სახის ელემენტებს შორის.

§ 11. პროექციული წრფე და პროექციული სიბრტყე. ორადობის პრინციპი

1. პროექციული წრფე და პროექციული სიბრტყე. ჩვენ არა ერთხელ გამოვიყენეთ აღრიცხვის დროს წრფის უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ცნება. მაგრამ ისიც ვიცით, რომ ამ წერტილზე არ ვრცელდება სასრულეთის წერტილებისათვის არსებული ყველა კანონი. მასზე ვრცელდება მხოლოდ ისეთი კანონები, რომელნიც ძალაში რჩებიან პროექციული გარდაქმნის შემდეგაც. ისეთ წერტილებს, რომლებზედაც ვრცელდება განსახილავი გეომეტრიის ყველა კანონი (ე. ი. აქსიომა), ეწოდებათ ამ გეომეტრიის *საკუთრივი წერტილები*. ისეთ წერტილებს კი, რომლებზედაც ვრცელდება განსახილავი გეომეტრიის კანონების მხოლოდ ნაწილი, ეწოდება *არასაკუთრივი წერტილები*; მაგალითად, ელემენტარულ გეომეტრიაში: წრფეზე სასრულეთის წერტილები არის საკუთრივი, ხოლო უსასრულოდ დაშორებული წერტილი არასაკუთრივი. სიბრტყეზე სასრულეთის წერტილები აგრეთვე საკუთრივია, უსასრულოდ დაშორებული წერტილები კი არასაკუთრივი.

ანალოგიურად განიმარტება საკუთრივი და არასაკუთრივი წრფეები და სიბრტყეები. ადვილი შესამჩნევია, რომ სიბრტყეზე გვექნება ერთი არასაკუთრივი წრფე, სივრცეში კი ერთი არასაკუთრივი სიბრტყე.

რადგან პროექციულ გეომეტრიაში განიხილება მხოლოდ ისეთი კანონები, რომელნიც ერთნაირად ვრცელდება სასრულეთისა და უსასრულოდ დაშორებულ ელემენტებზე, ამიტომ პროექციული გეომეტრიის თვალსაზრისით წრფის ყველა წერტილი იქნება საკუთრივი. ასევე სიბრტყის ყველა წერტილი და ყველა წრფე იქნება საკუთრივი და ა. შ. არასაკუთრივი ელემენტები არ იარსებებს. წრფე და სიბრტყე პროექციულ გეომეტრიაში ერთგვაროვანი ელემენტებისაგან იქნება შედგენილი. ასეთი თვალსაზრისით განხილულ წრფეს და სიბრტყეს ეწოდება *პროექციული წრფე და პროექციული სიბრტყე*.

ვინაიდან ელემენტარულ წრფეზე[1] ერთადერთი არასაკუთრივი წერტილი არსებობს მარჯვნივ და მარცხნივ, ამიტომ ეს წერტილი ჩაკეტავს წრფეს. ამრიგად, წრფე განიხილება როგორც ჩაკეტილი

[1] ამ გამოთქმის ქვეშ ვიგულისხმებთ ელემენტარული გეომეტრიის თვალსაზრისით განხილულ წრფეს. ანალოგიური აზრით ვიხმართ გამოთქმას — „ელემენტარული სიბრტყე“.

წირი, ოღონდ არასაკუთრივი წერტილით. მაგრამ პროექციული თვალსაზრისით ყველა წერტილი საკუთრივია; მაშასადამე, პროექციულ გეომეტრიაში წრფე წარმოგვიდგება როგორც ჩაკეტილი წირი. რადგან ელემენტარულ გეომეტრიაში სიბრტყეზე მდებარე ყოველ წრფეთა წყვილს საერთო აქვს ერთი საკუთრივი (სასრულეთის) ან არასაკუთრივი (უსასრულოდ დაშორებული) წერტილი და პროექციული თვალსაზრისით კი ყველა წერტილი საკუთრივია. ამიტომ პროექციულ სიბრტყეზე ყოველი წრფეთა წყვილი თანაიკვეთება ერთ წერტილში. პროექციული წრფის ეს ორი თვისება: ჩაკეტილობა და წრფეთა წყვილის ერთ წერტილში თანაკვეთა განსაკუთრებულ ხასიათს ანიჭებს პროექციულ სიბრტყეს ელემენტარულ სიბრტყესთან შედარებით. ეს განსაკუთრებულობა შემდეგში მდგომარეობს: ელემენტარულ სიბრტყეზე ყოველი მარტივად ჩაკეტილი წირი (ე. ი. ჩაკეტილი წირი, რომელიც მოძრავი წერტილით ისე აღიწერება, რომ ეს წერტილი ორჯერ არ გაივლის ერთსა და იმავე წერტილზე) ორ ნაწილად ყოფს სიბრტყეს. სიბრტყეზე მოძრავი წერტილი ერთი ნაწილიდან ვერ შევა მეორე ნაწილში ისე, რომ არ გადაიჭრას განსახილავი ჩაკეტილი წირი. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ პროექციულ სიბრტყეს ასეთი თვისება არა აქვს.

განვიხილოთ წრფე პროექციულ კოორდინატებში შემდეგი განტოლებით

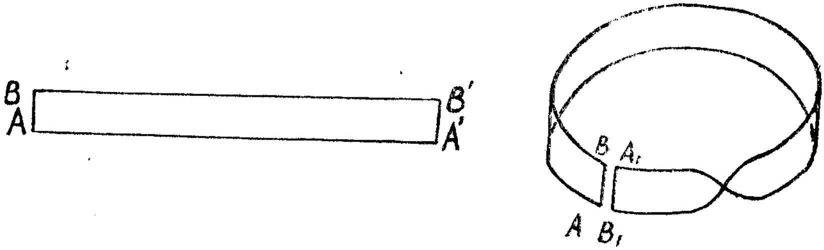
$$\xi_3 = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $(\xi_1, \xi_2, 1)$ წერტილი არ აკმაყოფილებს აღებულ განტოლებას, როგორიც არ უნდა იყოს ξ_1, ξ_2. ამ წესით მივიღებთ სიბრტყის ყოველ წერტილს, გარდა იმ წერტილებისა, რომელნიც მდებარეობენ აღებულ წრფეზე; მაშასადამე, სიბრტყეზე უწყვეტად მოძრავი წერტილი ისე აღწერს სიბრტყეს (მოცემული წრფის გამოკლებით), რომ არ გაჭრის აღებულ წრფეს. ამ თვისების გამო პროექციულ სიბრტყეს უწოდებენ ცალპირას. საზოგადოდ, ზედაპირს ეწოდება ცალპირა, თუ მას პროექციული სიბრტყის ზემოაღნიშნული თვისება ახლავს, ე. ი. მასზე არსებობს ისეთი მარტივად ჩაკეტილი წირი, რომელიც მას არ ყოფს ორ ნაწილად. ცალპირა ზედაპირის მაგალითს იძლევა მებიუსის[1] ფურცელი. იგი წარმოდგება შემდეგნაირად: უნდა ავიღოთ ქაღალდის მართკუთხედი, გადავგრიხოთ და ისე შევაერთოთ მოპირდაპირე გვერდები (ნახ. 167). ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთნაირად მიღებული

---

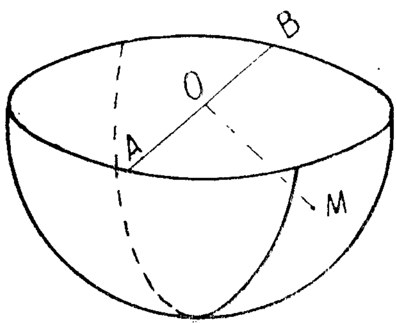
[1] მებიუსი — გერმანელი მათემატიკოსი (1790—1868).

ზედაპირი იქნება ცალპირა. ხშირად პროექციული სიბრტყის საილუსტრაციოდ მოყავთ ნახევარსფერო. ადვილი შესამჩნევია, რომ სფეროს ცენტრზე გამავალი ყოველი წრფე მხოლოდ ერთ წერტილ-



ნახ. 167.

ში გადაკვეთს ნახევარსფეროს გარდა იმ წრფეებისა, რომელნიც მდებარეობენ კვეთის წრეზე (ნახ. 168). ეს უკანასკნელნი თანაიკვეთებიან სფეროსთან (კვეთის წრეწირთან) ორ-ორ წერტილში. (ნახაზზე ნაჩვენებია ერთი წყვილი ასეთი წერტილებისა. ესენია A და B წერტილები). თუ ამ წერტილთა წყვილებს პირობითად მივიჩნევთ ერთ წერტილად, მაშინ O წერტილზე გამავალი წრფეთა ძნულის წრფეები და ნახევარსფეროს წერტილები იქნებიან ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებაში. ნახევარწრეწირები ჩაკეტილ წირებად მოგვევლინება. ამავე დროს ნახევარწრეწირების ყოველი წყვილი მხოლოდ ერთ წერტილში თანაიკვეთება. ამრიგად ნახევარწრეწირებს ნახევარსფეროზე (ზემოაღნიშნული შეთანხმების შემდეგ) აქვს ისეთივე თვისებანი, როგორიც წრფეებს პროექციულ სიბრტყეზე. ადვილი შესამჩნევია, რომ ასეთი ნახევარსფერო ცალპირა ზედაპირი იქნება.



ნახ. 168.

პროექციული წრფისა და პროექციული სიბრტყის ანალოგიურად განიმარტება პროექციული სივრცე.

2. ორადობის პრინციპი. თუ შევაერთებთ პროექციული წრფის ყოველ წერტილს სიბრტყის რაიმე წერტილთან, მივიღებთ წრფე-

თა კონას. რადგან პროექციულ სიბრტყეზე ყოველი წრფეთა წყვილი თანაიკვეთება, ამიტომ კონის წრფეებსა და წრფის წერტილთა შორის დამყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა. ანალოგიურად სივრცეში წრფეთა ძნულსა და პროექციული სიბრტყის წერტილთა შორის მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა. ამრიგად პროექციულ სიბრტყეზე წრფის წერტილთა სიმრავლე და წრფეთა კონა ეკვივალენტური სახეობანია. ასევე სივრცეში ეკვივალენტური სახეობანია სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე და წრფეთა ძნული. საზოგადოდაც, სიბრტყეზე წერტილებსა და წრფეთა შორის ეკვივალენტური დამოკიდებულება მყარდება. ყოველი პროექციული თვისება, წრფის წერტილთა შორის არსებული, შეგვაქვს წრფეთა კონაში პერსპექტივის საშუალებით. ფორმალურად საქმე ისე წარმოგვიდგება, რომ თვით ამავე დებულებაში წერტილები უნდა შევცვალოთ მათი მაგეგმილებელი წრფეებით. დებულება მიიღებს ახალ სახეს წრფეთა მიმართ. ასევე ითქმის სიბრტყეზე წერტილთა სიმრავლისა და წრფეთა სიმრავლის მიმართ. იმისათვის, რომ მივიღოთ ახალი დებულება მოცემული დებულებიდან, საჭიროა მოცემულ დებულებაში ადგილები შევუნაცვლოთ წერტილებს და წრფეებს, ოღონდ წერტილთა და წრფეთა ადგილშენაცვლების დროს უნდა შევინარჩუნოთ შინაგანი დამახასიათებელი კავშირები. სახელდობრ, თუ წერტილი წრფეზე დევს, მაშინ ამ წერტილის შესაბამი წრფე უნდა გადიოდეს წრფის შესაბამ წერტილზე. მაგალითად, თუ სიბრტყეზე დებულება გამოსახავს n წრფისაგან და m წერტილისაგან შედგენილი ნაკვთის რაიმე თვისებას, მაშინ წერტილებისა და წრფეების ადგილშენაცვლება მოგვცემს ახალ დებულებას, რომელიც ასახავს ახალი ნაკვთის რაიმე თვისებას. ეს ახალი ნაკვთი წარმოდგენილი იქნება n წერტილისაგან და m წრფისაგან. მოცემული ნაკვთიდან ასეთი წესით მიღებულ ახალ ნაკვთს ეწოდება მოცემული ნაკვთის ო რ ა დ უ ლ ი ნ ა კ ვ თ ი, მოცემული დებულებიდან მიღებულ ახალ დებულებას კი ო რ ა დ უ ლ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა. თვით მსჯელობის ასეთ წესს ეწოდება ო რ ა დ ო ბ ი ს მ ც ი რ ე პ რ ი ნ ც ი პ ი. სივრცეში წერტილების წრფეებისა და სიბრტყეებისაგან შედგენილ ნაკვთში ადგილშენაცვლებას ვახდენთ წერტილებისას სიბრტყეებთან, ხოლო წრფეები იცვლება ისევ წრფეებით. მსჯელობის ასეთ წესს უწოდებენ ო რ ა დ ო ბ ი ს დ ი დ პ რ ი ნ ც ი პ ს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორადობის მცირე პრინციპის საფუძველზე ერთიმეორის ორადული იქნება შემდეგი სახეობანი:

1) წერტილთა სიმრავლე წრფეზე და წრფეთა კონა;

2) წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე და წრფეთა სიმრავლე სიბრტყეზე.

ხოლო ორადობის დიდი პრინციპის საფუძველზე ორადული იქნება შემდეგი სახეობანი:

1) წერტილთა სიმრავლე წრფეზე და სიბრტყეთა კონა;

2) წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე და სიბრტყეთა ძნული;

3) წრფეთა სიმრავლე სიბრტყეზე და წრფეთა ძნული.

საზოგადოდ ორადობის მცირე და დიდი პრინციპების გამოყენებით ჯგუფის შიგნით, ერთიმეორეში გადაისახება შემდეგი ჯგუფების სახეობანი:

I
1. წერტილთა სიმრავლე წრფეზე,
2. წრფეთა კონა,
3. სიბრტყეთა კონა;

II
1. წერტილთა სიმრავლე სიბრტყეზე,
2. წრფეთა სიმრავლე სიბრტყეზე,
3. წრფეთა ძნული,
4. სიბრტყეთა ძნული;

III
1. წერტილთა სიმრავლე სივრცეში,
2. სიბრტყეთა სიმრავლე სივრცეში.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ორადობის პრინციპი ერთიმეორეში არ გადასახავს სხვადასხვა ჯგუფის სახეობებს.

ორადობის მცირე პრინციპი შეგვიძლია გამოვიყენოთ მეორე რიგის წირზედაც. წერტილის შეცვლა წრფით ნიშნავს, რომ წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები შევცვალოთ წრფის ტანგენციალური კოორდინატებით; მაშინ წირის შემდეგი განტოლებიდან

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j=0$$

მივიღებთ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,u_i\,u_j=0.$$

რაღაც მეორე რიგის წირის ტანგენციალურ განტოლებას, სადაც u_i ამ უკანასკნელი წირის მხების ტანგენციალური კოორდინატებია (შესაძლებელია ეს წირი დაემთხვეს კიდეც აღებულ წირს. ეს მოხდება მხოლოდ კერძო შემთხვევაში). ბუნებრივია, რომ მიღე-

ბული წირი ჩავთვალოთ აღებული წირის ორადულ ნაკვთად; მაშინ აღებული წირის წერტილები გადაისახება ორადული წირის მხებ წრფეებში და, პირუკუ. კერძოდ, თუ წირის განტოლება კანონიკური სახით არის დაწერილი

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0,$$

მაშინ წირის ტანგენციალური განტოლება ასე დაიწერება (ეს უშუალოდ გამომდინარეობს მხების ტანგენციალური კოორდინატების ფორმულებიდან)

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=0;$$

მაშასადამე (ამ შემთხვევაში), აღებული წირის ორადული იქნება თვით აღებული წირი. შეხების წერტილები შეიცვლება მხები წრფეებით და, პირუკუ.

§ 12. კოლინეაცია და კორელაცია

ჩვენ უკვე გვქონდა შემთხვევები წერტილთა, წრფეთა და სიბრტყეთა შორის პროექციული დამოკიდებულებისა. ეს დამოკიდებულებანი პროექციული და ტანგენციალური კოორდინატების გარდაქმნების სახით წარმოგვიდგება. ერთი და იმავე სახის ელემენტების პროექციულ თანადობას ეწოდება კოლინეაციური. მაგალითად, წრფის წერტილთა შორის პროექციული თანადობა, კონის წრფეთა შორის პროექციული თანადობა და სხვ. სხვადასხვა სახის ელემენტთა შორის პროექციულ თანადობას ეწოდება კორელაციური თანადობა. მაგალითად, პერსპექტიული თანადობა წრფის წერტილთა და კონის წრფეთა შორის.

როგორც ცნობილია, პროექციული თანადობა სიბრტყეზე ერთგვაროვან კოორდინატებში წარმოგვიდგება შემდეგი სახით

$$\rho\xi_i'=\sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}\,\xi_j, \tag{51}$$

სადაც λ_{ij} მუდმივი რიცხვებია. ანალოგიურად წარმოგვიდგება პროექციული თანადობა სიბრტყეზე მდებარე წრფეთა შორის ტანგენციალურ კოორდინატებში

$$\rho u_i'=\sum_{j=1}^{3}\mu_{ij}\,u_j, \tag{52}$$

სადაც μ_{ij} მუდმივი რიცხვებია. ასეთია კოლინეაციები სიბრტყეზე. კორელაციური თანადობანი წარმოგვიდგება ξ_i და u_i კოორდინა-

ტების კავშირით. სახელდობრ, სიბრტყეზე კორელაციურ თანადობას ექნება შემდეგი სახე

$$\rho u_i = \sum_{j=1}^{3} \nu_{ij} \xi_j, \qquad (53)$$

სადაც ν_{ij} მუდმივი რიცხვებია. განვიხილოთ კორელაციის კერძო შემთხვევა. დავუშვათ, რომ ν_{ij} სიმეტრიულია. ამ შემთხვევაში უმჯობესია მოვახდინოთ შემდეგი აღნიშვნა $\nu_{ij}=a_{ij}$. გვექნება

$$\rho u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \xi_j.$$

თუ დავაკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ უკანასკნელი ფორმულა განსაზღვრავს (ξ_1, ξ_2, ξ_3) წერტილის პოლარის ტანგენციალურ კოორდინატებს შემდეგი წირის მიმართ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \xi_i \xi_j = 0.$$

ამრიგად წერტილთა და წრფეთა პოლარული დამოკიდებულება განიხილება როგორც სიმეტრიული კორელაცია.

§ 13. მეორე რიგის წირთან დაკავშირებული ძირითადი პროექციული თეორემები

1. პოლარისა და პოლუსის შესახებ. განვიხილოთ სიბრტყეზე მეორე რიგის წირის განტოლება ერთგვაროვან კოორდინატებში

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \xi_i \xi_j = 0.$$

სიბრტყის მოცემულ $M(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ წერტილზე გავატაროთ რაიმე m წრფე. ეს წრფე თანაიკვეთება წირთან ორ წერტილში. აღვნიშნოთ ეს წერტილები A-თი და B-თი. M წერტილის ჰარმონიულ N წერტილს A და B წერტილების მიმართ ეწოდება M წერტილის ჰარმონიული წერტილი მოცემული წირის მიმართ. ჩვენ m წრფე ავიღეთ ნებისმიერად. მან შეიძლება მიიღოს M წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის ყოველი წრფის მდებარეობა. კონის თვითეულ წრფეზე ზემოაღნიშნული წესით განისაზღვრება M წერტი-

ლის ჰარმონიული წერტილი წირის მიმართ. ამ წერტილების ძირითადი თვისება ასახულია შემდეგ დებულებაში: M წერტილის ჰარმონიული წერტილები მოცემული მეორე რიგის წირის მიმართ მდებარეობენ ერთ წრფეზე.

N წერტილის ერთგვაროვანი კოორდინატები აღვნიშნოთ ζ_1, ζ_2, ζ_3-ით და შევადგინოთ MN წრფის პარამეტრული განტოლება. გვექნება

$$\xi_i = \eta_i + t\,\zeta_i.$$

განვსაზღვროთ ამ წრფის თანაკვეთის A და B წერტილები მოცემულ წირთან. ჩვენ უკვე ვიცით (წინა თავიდან), რომ თანაკვეთის A და B წერტილების შესაბამი პარამეტრის მნიშვნელობანი t_1 და t_2 წარმოადგენენ შემდეგი კვადრატული განტოლების ფესვებს

$$t^2 \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\zeta_i\,\zeta_j + 2t \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\zeta_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\eta_j = 0.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თვით M და N წერტილებს შეესაბამება t პარამეტრის 0 და ∞ მნიშვნელობანი. მართლაც, როცა $t=0$, მაშინ $\xi_i = \eta_i$. როცა t საკმაოდ დიდია, მაშინ ξ_i შევცვალოთ $t\xi_i'$-ით. გვექნება:

$$t\,\xi_i' = \eta_i + t\,\zeta_i,$$

$$\xi_i' = \frac{\eta_i}{t} + \zeta_i.$$

აქედან აშკარაა, რომ, თუ $t \to \infty$, მაშინ $\xi' \to \zeta_i$. ამრიგად M, N, A, B წერტილები შეესაბამებიან t პარამეტრის შემდეგ მნიშვნელობებს: 0, ∞, t_1, t_2.

ახლა შევნიშნოთ, რომ მოცემული წრფის განტოლება დეკარტის კოორდინატებზე გადასვლით მიიღებს შემდეგ სახეს (იხ. თავი X):

$$x = x_0 + tL,$$

$$y = y_0 + tM.$$

აქედან ჩანს, რომ x წრფივად გამოისახება t-ს საშუალებით; ამიტომ t პარამეტრის მნიშვნელობათა ოთხეულისა და მის შესაბამ x-ის მნიშვნელობათა ოთხეულის ანჰარმონიული ფარდობანი ტოლი უნდა იყოს (ანჰარმონიული ფარდობა ინვარიანტია წილადწრფივი გარდაქმნისა). ამრიგად გვექნება

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4).$$

მეორე მხრივ,

$$(ABCD)=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4);$$

მაშასადამე,

$$(ABCD)=(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4). \tag{54}$$

ამრიგად, თუ A, B, C, D წერტილები შეესაბამებიან t პარამეტრის t_1, t_2, t_3, t_4 მნიშვნელობებს, მაშინ ამ ოთხი წერტილის ანჰარმონიული ფარდობა ტოლია პარამეტრის შესაბამ მნიშვნელობათა ანჰარმონიული ფარდობისა.

განსახილავ შემთხვევაში, ე. ი. როცა t პარამეტრი ღებულობს 0, ∞, t_1, t_2 მნიშვნელობებს, (54) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$(MNAB)=(0,\ \infty,\ t_1,\ t_2)=\frac{t_1}{t_2}.$$

რადგან $MNAB$ ჰარმონიულ ოთხეულს წარმოადგენს, ე. ი.

$$(MNAB)=-1,$$

ამიტომ

$$\frac{t_1}{t_2}=-1.$$

აქედან

$$t_1+t_2=0;$$

მაშასადამე, კვადრატული განტოლების ფესვების ჯამი ნულია; ამისათვის კი აუცილებელია, რომ განტოლების მეორე კოეფიციენტი იყოს ნული. გვექნება

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\eta_i\,\zeta_j=0.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ ეს განტოლება წრფივი და ერთგვაროვანია ζ_1, ζ_2, ζ_3-ის მიმართ (η_1, η_2, η_3 მუდმივებია, რომლებიც M წერტილის ერთგვაროვან კოორდინატებს წარმოადგენს). ამრიგად M წერტილის ჰარმონიული წერტილების ერთგვაროვანი კოორდინატები აკმაყოფილებენ ერთადერთ წრფივ და ერთგვაროვან განტოლებას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ჰარმონიული წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე (რ. დ. გ.).

თუ დავუკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ უკანასკნელი განტოლება M წერტილის პოლარის განტოლებაა; მაშასადამე, მოცემული წერტილის ჰარმონიული წერტილები მეორე რიგის წირის მიმართ მდებარეობენ ამ წერტილის პოლარზე, იმავე წირის მიმართ.

2. მეორე რიგის წირის განსაზღვრა ხუთი წერტილით. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებული ხუთი წერტილისათვის არსებობს მეორე რიგის წირი, რომელიც მათზე გაივლის. ეს ფაქტი უფრო სრულყოფილი ხდება დამოუკიდებელი ხუთეულისათვის. სახელდობრ, მტკიცდება შემდეგი დებულება: არსებობს ერთადერთი ისეთი მეორე რიგის წირი, რომელიც გაივლის წინასწარ ნებისმიერად აღებულ ხუთ დამოუკიდებელ წერტილზე.

დავუშვათ, რომ A, B, C, D, E წერტილები აღებულია სიბრტყეზე ნებისმიერად, ოღონდ დამოუკიდებელ ხუთეულს ქმნიან. მოვახდინოთ სიბრტყის პროექციული გარდაქმნა ისე, რომ A, B, C, D წერტილები გადაისახოს $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ და $(-1, -1)$ წერტილებში. ეს გარდაქმნები, ცხადია, გადასახავს მოცემულ ხუთ წერტილზე გამავალ მეორე რიგის წირსაც. გარდაქმნის შემდეგ წირი გაივლის ზემოაღნიშნულ $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ და $(-1, -1)$ წერტილებზე. ადვილი შესამოწმებელია, რომ გარდაქმნის შედეგად მიღებულ წირის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0.$$

ჩავსვათ აქ $(1, 1)$ წერტილის კოორდინატები. გვექნება

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0.$$

თუ მოვახდენთ აღნიშვნას: $-\dfrac{a_{11}}{a_{33}}=\lambda$, მაშინ წირის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\lambda x^2+(1-\lambda)\,y^2=1.$$

აღნიშნული გარდაქმნის დროს E წერტილი დაიკავებს გარკვეულ მდებარეობას წირზე. დავუშვათ, რომ იგი გადაისახება $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში. თუ შევიტანთ x_0, y_0-ს წირის განტოლებაში, მივიღებთ

$$\lambda x_0^2+(1-\lambda)\,y_0^2=1.$$

აქედან განისაზღვრება λ. გვექნება

$$\lambda=\frac{1-y_0^2}{x_0^2-y_0^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ გამოსახულების მნიშვნელი განსხვავდება ნულისაგან. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ

$$x_0^2-y_0^2=0,$$

მაშინ

$$x_0\pm y_0=0.$$

ეს იმის მაჩვენებელია, რომ (x_0, y_0) წერტილი მდებარეობს კოორდინატთა ღერძებს შორის კუთხეების ერთ-ერთ ბისექტრისაზე, რაც შეუძლებელია, რადგან (x_0, y_0) წერტილი არ შეიძლება იყოს კოლინეარული (1, 1) და (—1, —1) ან (—1, 1) და (1, —1) წყვილებისადმი. ამრიგად მოცემულ ხუთ წერტილზე გამავალი წირი ცალსახად განისაზღვრება ამ წერტილებით (რ. დ. გ).

3. შტეინერის[1] თეორემა. განვიხილოთ პროექციულ თანადობაში მყოფი წრფეთა ორი კონა S და S' წერტილებით. თუ S და S' წერტილების კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_0, y_0 და x_0', y_0'-ით, მაშინ კონების განტოლებანი ასე დაიწერება:

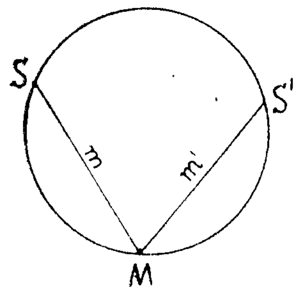
$$y-y_0=k(x-x_0),$$
$$y-y_0'=k'(x-x_0').$$

განვიხილოთ მოცემული კონების რაიმე თანადი წყვილი m და m'. მათი თანაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ M-ით (ნახ. 169). ამ წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს უკანასკნელ განტოლებათა სისტემას. მეორე მხრივ, რადგან კონათა შორის არსებობს პროექციული თანადობა, გვექნება

$$k'=\frac{\alpha k+\beta}{\gamma k+\delta},$$

ანუ

$$\gamma kk'+\delta k'-\alpha k-\beta=0.$$



ნახ. 169.

თუ შევიტანთ აქ k და k'-ის მნიშვნელობებს მოცემული კონების განტოლებებიდან, მივიღებთ (მცირე გამარტივების შემდეგ)

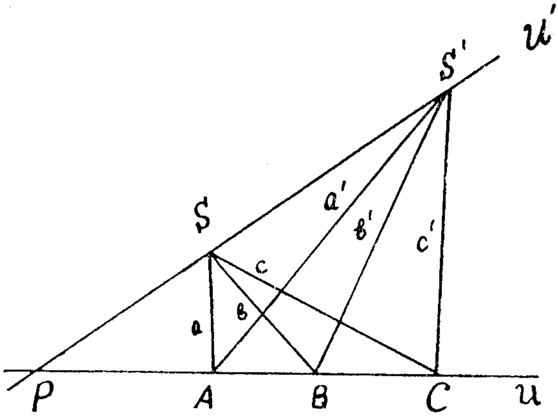
$$\beta(x-x_0)(x-x_0')+\alpha(x-x_0')(y-y_0)+$$
$$+\delta(x-x_0)(y-y_0')+\gamma(y-y_0)(y-y_0')=0.$$

პირდაპირ ჩანს, რომ M წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ მეორე რიგის განტოლებას. ამრიგად მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან დასკვნას, რომელიც შტეინერის თეორემის სახელწოდებით არის ცნობილი: პროექციულ თანადობაში მყოფი წრფეთა ორი კონის თანადი წრფეების თანაკვეთის წერტილების გეომეტრიული ადგილი არის მეორე რიგის წირი.

[1] შტეინერი—შვეიცარიელი მათემატიკოსი (1796—1863).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ განსაზღვრული მეორე რიგის წირი გაივლის S და S' წერტილებზე. მართლაც, თუ S და S' წერტილების კოორდინატებს ჩავსვამთ წირის განტოლებაში, განტოლება დაკმაყოფილდება.

კერძოდ, თუ კონებს შორის პროექციული თანადობა პერსპექტიულია, ე. ი. თუ თანადი წყვილები თანაიკვეთება ერთ წრფე-



ნახ. 170.

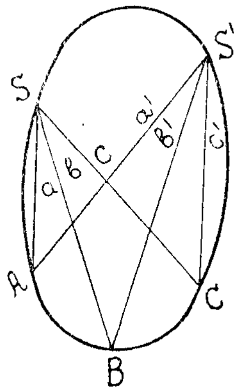
ზე, მაშინ SS' წრფე აღმოჩნდება თავისი თავის თანადი და მისი ყოველი წერტილი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თანადი წყვილების თანაკვეთის წერტილი (SS' წრფის თანაკვეთა თავის თავთან). ამრიგად, თანადი წყვილების თანაკვეთის წერტილები დალაგდება ორ წრფეზე (ნახ. 170), რომელიც განიხილება როგორც გადაგვარებული მეორე რიგის წირი. ახლა დავამტკიცებთ, რომ შტეინერის თეორემა შექცევადია. სახელდობრ, დავამტკიცებთ, რომ, თუ მეორე რიგის წირის წერტილებს შევაერთებთ ამავე წირის რაიმე ორ წერტილთან, მაშინ ასე მიღებულ წრფეთა კონებს შორის დამყარდება პროექციული თანადობა.

ავიღოთ რაიმე მეორე რიგის წირი და მასზე დავაფიქსიროთ ნებისმიერი ორი წერტილი: S და S'. შევაერთოთ ეს წერტილები წირის რაიმე A, B, C წერტილებთან. მივიღებთ წრფეთა ორ სამეულს: a, b, c და a', b', c'. ამ სამეულების საშუალებით განვსაზღვროთ პროექციული თანადობა წრფეთა კონებს შორის. გვექნება

$$(a'b'c'm') = (abcm).$$

შტეინერის თეორემის ძალით თანად წრფეთა თანაკვეთის წერტილების გეომეტრიული ადგილი იქნება მეორე რიგის წირი, რომელიც შეიცავს A, B, C წერტილებს. როგორც თანად წრფეთა თანაკვეთის წერტილებს. ეს წირი გაივლის აგრეთვე S და S' წერტილებზე, როგორც კონების ცენტრებზე; მაშასადამე, ამ პროექციული თანადობით განსაზღვრული წირი ერთდროულად გაივლის S, S', A, B, C წერტილებზე (ნახ. 171). მაგრამ ამ წერტილებზე გაივლის მხოლოდ ერთი მეორე რიგის წირი. ვინაიდან ეს წერტილები აღებულია მოცემულ წირზე, ამიტომ პროექციული თანადობით განსაზღვრული წირი დაემთხვევა მოცემულ წირს, ე. ი. მოცემული წირის წერტილების შეერთება ამავე წირის რაიმე ორ წერტილთან მოგვცემს პროექციულ თანადობაში მყოფ კონებს (რ. დ. გ.).

შევნიშნავთ, რომ მოცემული წირი განიხილებოდა, როგორც ჩვეულებრივი წირი. თუ წირი წრფეთა წყვილს წარმოადგენს, მაშინ თეორემა ძალაში რჩება, ოღონდ S და S' წერტილები მოთავსებული უნდა იყოს წრფეთა წყვილის ერთ რომელიმე წრფეზე. ამ შემთხვევაში მიღებული პროექციული თანადობა იქნება პერსპექტიული (ნახ. 170).

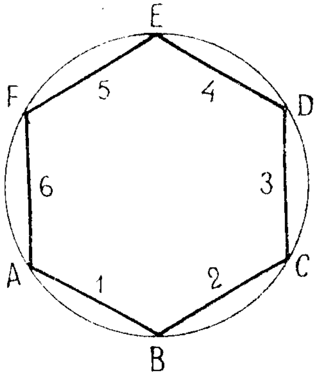


ნახ. 171.

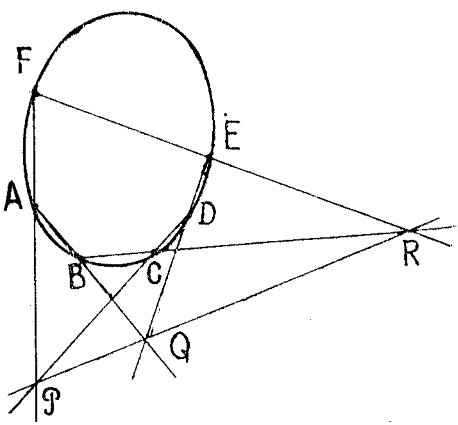
4. პასკალის[1] თეორემა. განვიხილოთ წრეწირი და მასში ჩავხაზოთ წესიერი ექვსკუთხედი, მისი გვერდები, ცხადია, შექმნიან წრფეთა სამ პარალელურ წყვილს. თუ დავნომრავთ ექვსკუთხედის გვერდებს მიმდევრობით, მაშინ 1, 4; 2, 5; 3, 6 წყვილები იქნებიან ურთიერთპარალელურნი (ნახ. 172). თვითეული წყვილის თანაკვეთის წერტილი იქნება უსასრულეთში; მაშასადამე, ამ სამი წყვილის თანაკვეთის წერტილები მოთავსდება ერთ წრფეზე (უსასრულოდ დაშორებულ წრფეზე). ახლა, თუ წრეწირს პროექციული გარდაქმნებით გადავსახავთ რაიმე მეორე რიგის γ წირში, მაშინ წრეწირში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედი გადაისახება γ წირში ჩახაზულ რაიმე ექვსკუთხედში, რომელიც, საზოგადოდ, წესიერი არ იქნება; მაგალითად, პროექციული გარდაქმნებით ექვსკუთხედის

[1] პასკალი—გამოჩენილი ფრანგი მეცნიერი (1623—1662)

ოთხი წვერო შეგვიძლია გადავსახოთ წინასწარ აღებულ ნებისმიერ ოთხ დამოუკიდებელ წერტილში; მაშასადამე, ასეთი გადასახვით წესიერი ექვსკუთხედიდან მივიღებთ საკმაოდ ზოგად ექვსკუთხედს. მაგრამ, ცხადია, ზემოაღნიშნული ფაქტი დარჩება ძალაში. სახელდობრ, 1, 4; 2, 5; 3, 6 წყვილების თანაკვეთის წერტილები მოთავსდება ერთ წრფეზე. ამ შემთხვევაში ეს წრფე, საზოგადოდ, უსასრულოდ დაშორებული წრფე აღარ იქნება. პროექციული გარდაქმნები უსასრულეთის წრფეს გადასახავს სასრულეთის წრფეზე (ნახ. 173). ექვსკუთხედის გვერდების ზემოაღნიშნულ წყვილებს, ე. ი. 1, 4; 2, 5; 3, 6-ს, ეწოდება მოპირდაპირე გვერდები. ამრიგად შემჩნეული ფაქტი, რომელიც შეეხება წესიერ ექვსკუთხედსა და მის პროექციულ ანასახს, ასე წარმოგვიდგება: ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების თანაკვეთის წერტილები მოთავსებულია ერთ წრფეზე. ბუნებრივად ისმება კითხვა: აქვს თუ არა ასეთივე თვისება მეორე რიგის წირში ჩახაზულ ნებისმიერ ექვსკუთხედს? ამ კითხვის პასუხს წარმოადგენს პასკალის ცნობილი თეორემა: *მეორე რიგის წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების თანაკვეთის წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე.*



ნახ. 172.



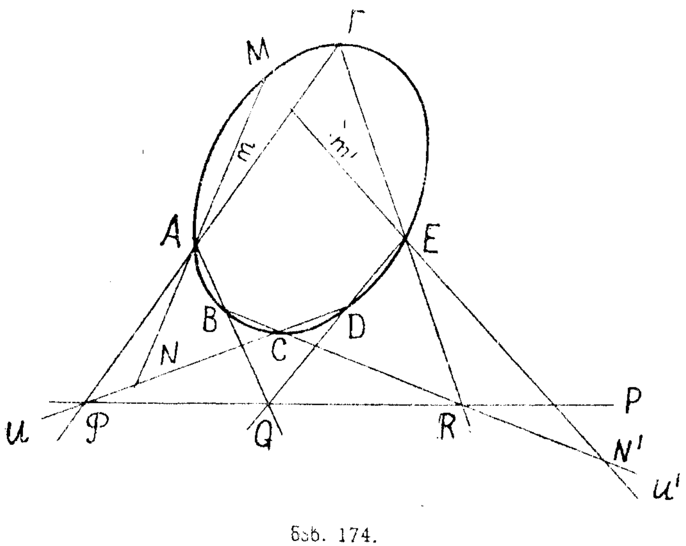
ნახ. 173.

განვიხილოთ მეორე რიგის წირი და მასში ჩახაზული ექვსკუთ-

ხედი. P, Q, R-ით აღვნიშნოთ მოპირდაპირე გვერდების თანაკვე-
თის წერტილები; სახელდობრ,

P თანაკვეთა AF, CD წყვილისა,
Q „ AB, DE „
R „ BC, EF „

წირზე ავიღოთ ნებისმიერი M წერტილი და შევაერთოთ ეს წერტილი A და E წერტილებთან. მივიღებთ m და m' წრფეებს (ნახ. 174). როცა M წერტილი აღწერს წირს, მაშინ m და m' წრფეები შექმნიან წრფეთა კონებს. შტეინერის თეორემის თანახ-



ნახ. 174.

მად, ამ კონებს შორის დამყარდება პროექციული თანადობა. ზემოაღნიშნული კონების თანაკვეთის წერტილები u და u წრფე-ებთან, წარმოშობენ პროექციულ თანადობაში მყოფ წერტილთა სიმრავლეებს.

თუ m და u წრფეების თანაკვეთის წერტილს აღვნიშნავთ N-ით, ხოლო m' და u' წრფეების თანაკვეთის წერტილს N'-ით, მაშინ N და N' იქნება თანადი წერტილები. M წერტილს შეუძლია მიიღოს წირის ყველა წერტილის მდებარეობა. თუ $M=C$, მაშინ $m=AC$, $m'=EC$. ამ შემთხვევაში $N=N'=C$; მაშასადამე, u და u' წრფეების თანაკვეთის C წერტილს ეთანადება თავისი თავი. ასეთი პროექციული თანადობა კი, როგორც ვიცით, პერსპექტიუ-

ლი უნდა იყოს. ამრიგად, თანადი წყვილები გეგმილდებიან ერთი წერტილიდან, პერსპექტივის ცენტრიდან ან, რაც იგივეა, თანადი წყვილების შემაერთებელი წრფეები გადიან ერთ წერტილზე, პერსპექტივის ცენტრზე; აღვნიშნოთ ეს წერტილი S-ით; მაშასადამე, NN' წრფე ყოველთვის გადის S წერტილზე. თუ $M=B$, მაშინ $m=AB$, $m'=EB$. ამ შემთხვევაში $N=P_0$, $N'=B$. აქედან ჩანს, რომ $NN'=EB$. ამრიგად AB წრფე გაივლის S წერტილზე. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ, როცა $M=D$, მაშინ $NN'=ED$, ე. ი. ED წრფეც გაივლის S წერტილზე. ამრიგად S წერტილი წარმოგვიდგება როგორც AB და ED წრფეების თანაკვეთის წერტილი.

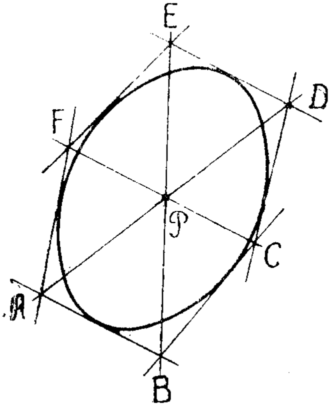
ამ წრფეთა თანაკვეთის წერტილი კი Q-თი გვაქვს აღნიშნული; მაშასადამე, $S=Q$. ახლა დავუშვათ, რომ $M=F$. ამ შემთხვევაში $m=AF$, $m'=EF$, ამიტომ $N=L$, $N'=N$; მაშასადამე, $NN'=PR$. ამრიგად PR წრფე გადის Q წერტილზე ($S=M$), ე. ი. P, Q, R წერტილები მდებარეობენ ერთ წრფეზე (რ. დ. გ.).

პასკალის თეორემის გამომსახველ ნახაზს ეწოდება პ ა ს კ ა ლ ი ს კ ო ნ ფ ი გ უ რ ა ც ი ა. იმ წრფეს, რომელზედაც მდებარეობენ მეორე რიგის წირში ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების თანაკვეთის წერტილები, ეწოდება პ ა ს კ ა ლ ი ს წ რ ფ ე. ნახაზიდან პირდაპირ ჩანს, რომ Q წერტილი და u, u' წრფეები დამოკიდებულნი არ არიან F წერტილის მდებარეობაზე. როცა F წერტილი გადაადგილდება წირზე, მაშინ P, R წერტილები გადაადგილდებიან u, u' წრფეებზე და შესაბამად პასკალის წრფე მობრუნდება Q წერტილის გარშემო. პირუკუ, თუ პასკალის წრფეს მოვაბრუნებთ Q წერტილის გარშემო, მაშინ P, R წერტილები გადაადგილდება u, u' წრფეებზე და ამის შესაბამად F წერტილიც გადაადგილდება წირზე. ეს ფაქტი საშუალებას გვაძლევს სახაზავის საშუალებით ავაგოთ მოცემულ ხუთ წერტილზე გამავალი წირის წერტილები (ნებისმიერი რაოდენობით).

5. **ბრიანშონის[1] თეორემა**. პასკალის თეორემიდან ორადობის მცირე პრინციპით მიღებულ თეორემას ეწოდება ბრიანშონის თეორემა. როგორც აღნიშნული იყო, ორადობის მცირე პრინციპის საფუძველზე, მეორე რიგის წირი იცვლება ისევ მეორე რიგის წირით, წირის წერტილები იცვლება მხები წრფეებით. აქედან აშკარაა, რომ ჩახაზული ექვსკუთხედი შეიცვლება შემოხაზული ექვსკუთხედით. ჩახაზული ექვსკუთხედის გვერდები შეიცვლება შემოხა-

[1] ბრიანშონი—ფრანგი მათემატიკოსი (1785—1864).

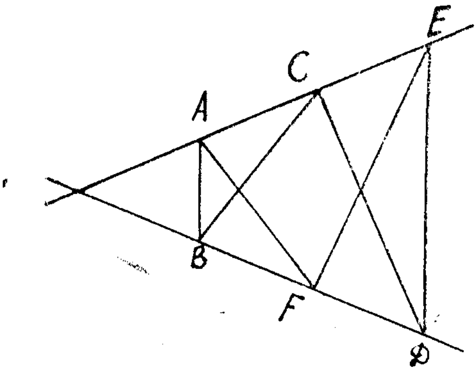
ზული ექვსკუთხედის წვეროებით. ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები შეიცვლება შემოხაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე წვეროებით. ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების თანაკვეთის წერტილები კი შეიცვლება შემოხაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელი წრფეებით. ვინაიდან წრფეზე მდებარე წერტილებს უნდა შეესაბამებოდეს წრფეთა კონა და ჩახაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების თანაკვეთის წერტილები კი მდებარეობენ ერთ წრფეზე, ამიტომ შემოხაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელმა წრფეებმა უნდა გაიარონ ერთ წერტილზე. ამრიგად მივიღებთ შემდეგ დებულებას: მეორე რიგის წირზე შემოხაზული ექვსკუთხედის მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელი წრფეები გადიან ერთ წერტილზე. ასეთია პასკალის თეორემის ორადული თეორემა, რომელსაც ბრიანშონის თეორემა ეწოდება (რადგან იგი აღმოჩენილ იქნა ბრიანშონის მიერ პასკალის თეორემის გამოუყენებლად), თვით ამ თეორემასთან დაკავშირებულ კონფიგურაციას კი ეწოდება ბრიანშონის კონფიგურაცია (ნახ. 175).



ნახ. 175.

6. პასკალ-პაპის კონფიგურაცია. პასკალის თეორემა დავამტკიცეთ შტეინერის თეორემის გამოყენებით, რომელიც მართებულია ორ წრფედ გადაგვარებული წირისათვისაც, თუ წრფეთა კონების ცენტრებს ავიღებთ წრფეთა წყვილის მხოლოდ ერთ წრფეზე. ახლა დავუშვათ, რომ წრფეთა წყვილის თვითეულ წრფეზე აღებულია სამ-სამი წერტილი. ასეთი ექვსი წერტილისაგან შევადგინოთ ექვსკუთხედი ისე, რომ გვერდები აერთებდნენ სხვადასხვა წრფეებზე მდებარე წყვილებს. ერთ-ერთი ასეთი ექვსკუთხედი წარმოდგენილია 176-ე ნახაზზე. თუ წირის შესაბამ კონების ცენტრებს ავიღებთ A და E წერტილებში, მაშინ შტეინერის თეორემა დარჩება ძალაში და, მაშასადამე, პასკალის თეორემაც დარჩება ძალაში, რაც იმას ნიშნავს, რომ AB, DE; BC, EF; CD, AF წყვილების თანაკვეთის წერტილები (მოპირდაპირე გვერდებისაგან შედგენილი წყვილებია)

უნდა მოთავსდეს ერთ წრფეზე. ეს თეორემა პირველად დამტკიცებული იყო პაპის[1] მიერ, ამიტომ მას პასკალ-პაპის თეორემა ეწოდება; შესაბამ კონფიგურაციას კი ეწოდება პასკალ-პაპის კონფიგურაცია. კერძოდ, თუ $BC \parallel EF$ და $AF \parallel CD$, მაშინ მათი თანაკვეთის წერტილები მოთავსებული იქნება უსასრულოდ დაშორებულ წრფეზე. პასკალის თეორემის თანახმად AB და DE წრფეების თანაკვეთის წერტილიც უნდა მოთავსდეს უსასრულოდ დაშორებულ წრფეზე, ე. ი. AB პარალელური უნდა იყოს DE-სი. ამრიგად, თუ ზემოაღნიშნული სამი წყვილიდან ორი წყვილი პარალელურ წრფეთაგან შედგება, მაშინ მესამე წყვილიც პარალელურ წრფეთაგან იქნება შედგენილი.



ნახ. 176.

[1] პაპი — ძველი ბერძენი მათემატიკოსი (III საუკ.).

შინაარსი

თ ა ვ ი VIII. **მეორე რიგის წირთა ზოგადი თეორია**

თ ა ვ ი IX. **მეორე რიგის ზედაპირთა თეორია**

თ ა ვ ი X. **მეორე რიგის წირები და ზედაპირები ერთგვაროვან კოორდინატებში**

თავი XI. მეორე რიგის წირთა და ზედაპირთა პროექციული თეორიის ელემენტები

რედაქტორი გ. თევზაძე

გამომც. რედაქტორი თ. ხითარიძე — კორექტორი ვ. გოგხაძე

ტექრედაქტორი ი. კიკნაძე — გამომშვები ნ. ბიბილური

გადაეცა ასაწყობად 25/III-60 წ., ხელმოწერილია დასაბეჭდად 9/IX-60 წ., ანაწყობის ზომა 6×10, ქაღალდის ზომა 60×92, სასტამბო ფურცელთა რაოდენობა 31, საავტორო ფორმათა რაოდენობა 23,88, სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 24,52.

ფასი 8 მან. 35 კაპ.

1961 წლის 1 იანვრიდან 84 კაპ.

უე 03854 — ტირაჟი 2.000. — შეკვეთა № 851.

საქართველოს სსრ კულტურის სამინისტროს გამომცემლობებისა და პოლიგრაფიული მრეწველობის მთავარი სამმართველოს სტამბა № 2. თბილისი, ფურცელაძის ქ. № 5.

Типография № 2 Главного управления издательств и полиграфической промышленности Министерства культуры Грузинской ССР. Тбилиси, ул. Пурцеладзе № 5.

АДАМ ИЛЬИЧ ЧАХТАУРИ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

(на грузинском языке)

Государственное издательство
учебно-педагогической литературы
„ЦОДНА"

Тбилиси—1960