ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

თამარ ზაქარეიშვილი

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი იქმნება მატერიის ცენტრალურად სიმეტრიული განაწილებით, სადაც არა მარტო მატერია, არამედ მისი მოძრაობაც ცენტრალურად სიმეტრიული უნდა იყოს, ე.ი. სიჩქარე ნებისმიერ წერტილში რადიუსის გასწვრივ უნდა იყოს მიმართული.
- ველის ცენტრალური სიმეტრია ნიშნავს რომ სივრცე-დროის მეტრიკა, ds-ის გამოსახულება უნდა იყოს იგივე ცენტრიდან ერთი და იმავე მანძილით დაშორებული წერტილებისათვის.
- ds^2-ის ზოგადი ცენტრალურად სიმეტრიული გამოსახულებაა:

$$ds^2 = h(r, t)\, dr^2 + k(r, t)(\sin^2 \theta\, d\phi^2 + d\theta^2) + l(r, t)\, dt^2 + a(r, t)\, dr\, dt,$$

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- მოვახდინოთ კოორდინატების r-ის და t-ს გარდაქმნა შემდეგი ფორმულიების მიხედვით:

$$r = f_1(r', t'), \qquad t = f_2(r', t'),$$

- სადაც f_1 და f_2 არიან ახალი კოორდინატების r´ -ს და t´ -ს ფუნქციები. ისე ავირჩიოთ კოორდინატებიი r და t რომ a(r,t) კოეფიციენტი გაგვიქრეს ds^2-ის გამოსახულებაში და k(r,t) კოეფიციენტი გამოვიდეს - r^2 -ის ტოლი.
- ბოლო პირობა ამბობს რომ r ისეა განსაზღვრული რომ წრეწირის გარშემოწირულობა ცენტრით კოორდინატთა სათავეში ტოლია 2πr-ის.
- მოსახერხებელი იქნება რომ h და l ექსონენციალური სახით ჩავწეროთ, შესაბამისად $-e^{\lambda}$ და c^2e^{ν} სადაც λ და ν r-ის და t-ს ფუნქციებია.
- ds^2-ისთვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$ds^2 = e^{\nu}c^2\, dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) - e^{\lambda}\, dr^2.$$

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- მეტრიკის ტენზორისათვის გვექნება შემდეგი კომპონენტები:

$$g_{00} = e^{\nu}, \qquad g_{11} = -e^{\lambda}, \qquad g_{22} = -r^2, \qquad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta.$$

- ამ მნიშვნელობების და შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

- გამოვთვლით კრისტობელის სიმბოლოებს:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}, \qquad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \qquad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \cot\theta, \qquad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2}.$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \qquad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}.$$

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- გრავიტაციის განტოლებების მისაღებად გამოვთვალოთ რიჩის ტენზორის კომპონენტები შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}.$$

- გამოთვლებს მივყავართ შემდეგ ფორმულებამდე:

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4} T^3_3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}.$$

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- ამ ფორმულების ინტეგრება შეიძლება მნიშვნელოვან შემთხვევაში, ცენტრალურად სიმეტრიული ველისთვის ვაკუუმში, იმ მატერიის გარეთ რაც ქმნის ველს. ენერგია-იმპულსის ტენზორის ნულთან გატოლებით მივიღებთ ფორმულებს:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0,$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{{}^2}=0,$$

$$\lambda=0$$

- ბოლო განტოლებიდან ვხედავთ რომ λ დროზე არაა დამოკიდებული. თუ პირველ ორ განტოლებას შევკრებთ მივიღებთ $\lambda' + \nu' = 0$ ე.ი.

$$\lambda+\nu=f(t),$$

- სადაც f მხოლოდ დროის ფუნქციაა.

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- როდესაც ds^2-ს ავირჩიეთ, ჩვენ გვაქვს დროის გარდაქმნის საშუალება: $t=f(t')$. ასეთი გარდაქმნა ექვივალენტურია იმისა, რომ ν-ს დავუმატოთ დროის ნებისმიერი ფუნქცია და ეს იყოს -f(t) და მივიღებთ: λ+ ν=0. ცენტრალურად სიმეტრიული ველი ვაკუუმში სტატიკურია. მეორე განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const}}{r}.$$

- უსასრულობაში $-e^{\lambda} = e^{\nu} = 1$. შორს გრავიტაციული სხეულებიდან მეტრიკა ხდება მინკოვსკის.
- ვიპოვნოთ კონსტანტა. იქ სადაც ველი სუსტია ნიუტონის კანონი უნდა კმაყოფილდებოდეს ანუ უნდა გვქონდეს $g_{00} = 1 + (2\phi/c^2)$, სადაც $\phi = -(km/r)$
- მივიღებთ რომ $\text{const} = -(2km/c^2)$. ამ სიდიდეს აქვს სიგრძის განზომილება, მას სხეულის გრავიტაციულ რადიუსს r_g -ს უწოდებენ:

$$r_g = \frac{2km}{c^2}.$$

ცენტრალურად სიმეტრიული გრავიტაციული ველი

- და ბოლოს სივრცე-დროის მეტრიკას ექნება სახე:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2\, dt^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

- აინშტაინის განტოლების ეს ამოხსნა ნაპოვნი იყო შვარცშილდის მიერ 1916 წელს. ხაზი გავუსვათ იმასაც რომ ეს ამოხსნა სამართლიანია არა მარტო უძრავი მასის სხეულებისთვის, არამედ როდესაც ისინი მოძრაობენ საჭირო სიმეტრიით (მაგალითად ცენტრალურად სიმეტრიული პულსაციისას).