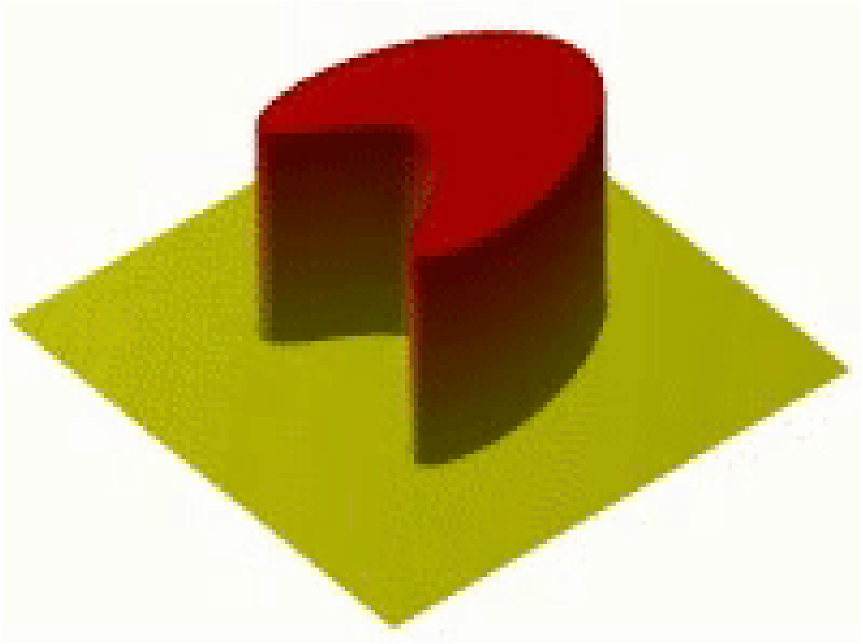
ფურიე და სითბოს გავრცელების პრობლემა

ფურიე 1768-1830

ეგვიპტე 1798

ნაპოლეონი 1769-1821



სითბოს გავრცელების
ანიმაცია ფურიეს განტოლების
მიხედვით კვადრატული ფორმის მეტალის
ფირფიტაში. სიმაღლე და სიწითლე გვიჩვენებს
ტემპერატურას ამ წერტილში.

სითბოს გავრცელების დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდი პირველად ჩამოაყალიბა ფურიემ 1807 წლის 22 დეკემბერს. რაც გულისხმობდა ლაპლასის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \equiv \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

- ფურიემ სითბოს გავრცელების დიფერენციალური განტოლება დაიყ ვანა ლაპლასის დიფერენციალურ განტოლებაზე. მან ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოიყენა ხრიკი, რომელსაც დღეს ფუნქციის ფურიე ს მწკრივად გაშლას ვუწოდებთ

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$$

საწყისი პირობები.

$$u(0,y,t) = 0 \ = u(1,y,t), \quad 0 \le y \le 1,\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0,t) = 0 \ = u(x,1,t), \quad 0 \le x \le 1,\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,y,t) = 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \widehat{f}(n_1,n_2) e^{\frac{-\pi^2(n_1^2+n_2^2)t}{2}} \sin(n_1 \pi x) \sin(n_2 \pi y)$$

$$\widehat{f}(n_1,n_2) = 2 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \sin(n_1 \pi x) \sin(n_2 \pi y)\, dx dy$$

ამონახსნი

სითბოს გავრცელების დიფ განტოლების ამოხსნა ერთგანზომილებიან შემთხვევაში.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0 \quad \text{for } t > 0$$

$$u(x,t) = \sum_i^{\infty} B_i \sin(\pi i x) e^{-t\pi^2 i^2}$$

ამონახსნის ზოგადი სახე

სადაც B კოეფიციენტები საწყის პირობებზეა დამოკიდებული და მათ გასაგებად ზუსტად რომ შესაბამისი ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლად დაგვჭირდება.

$$u(x,0) = \sum_i^{\infty} B_i \sin(\pi i x) e^{-0\pi^2 i^2} = \sum_i^{\infty} B_i \sin(\pi i x) = 1$$

მადლობა ყურადღებისთვის