მულტიპოლური გაშლა და კავშირი იმპულსის მომენტის ოპერატორის საკუთრივ ფუნქციებთან

$\phi(\mathrm{x_i}) = \sum_1^n \frac{\mathrm{q_i}}{|\vec{\mathrm{a_i}} - \vec{\mathrm{x_i}}|} \phi(x_i) \qquad \phi(x_i) = \frac{\Sigma q_i}{R} + \frac{D_i x_i}{R^3} + \frac{k_{ij} x_i x_j}{R^5} + \frac{O_{ijk} x_i x_j x_k}{R^7} + \ldots..$

დიპოლური მომენტი: $D_i = \sum_m q^m a_i^m$

კვადრუპოლური მომენტი: $k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m q^m \left(3 a_i^m a_j^m - (a^m) \delta_{ij}\right)$

ოქტოპოლური მომენტი: $O_{ijk} = \frac{1}{2} \sum q^m \left(5 a_i^m a_j^m a_k^m - (a^m)^2 \left(a_i^m \delta_{jk} + a_j^m \delta_{ik} + a_k^m \delta_{ij}\right)\right)$

პირველი სამი ტენზორი არის სრულად სიმეტრიული და ნულოვანი კვალით. ანალოგიურად დანარჩენი უმაღლესი რანგის ტენზორებიც იქნებიან სიმეტრიული და ნულოვანი კვალით.

გვაქვს შემდეგი ზოგადი ფორმულა ნულოვანი კვალის მქონე სიმეტრიული ტენზორებისთვის:

$$P_{i_1 i_2 i_3 i_4 \cdots i_n} - \frac{\delta_{i_1 i_2} P_{\alpha \alpha i_3 i_4 \cdots i_n} + \delta_{i_1 i_3} P_{\alpha \alpha i_2 i_4 \cdots i_n} + \ldots.}{\frac{n(n+1)}{2} + 2}$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$O_{i_1 i_2 i_3 i_4 \cdots i_n} = \sum q^m \left(a_{i_1}^m a_{i_2}^m \cdots a_{i_n}^m - \frac{(a^m)^2 \left(\delta_{i_1 i_2} a_{i_3}^m a_{i_4}^m \ldots + \delta_{i_1 i_3} a_{i_2}^m a_{i_4}^m + \ldots\right)}{\frac{n(n-1)}{2} + 2} \right)$$

ამ ტიპის ტენზორები დაუყვანადი ინვარიანტული ქვესივრცეებია მობრუნებების მიმართ და მათი განზომილება არის 2n+1.

აღვნიშნოთ საბაზისო ტენზორები შემდეგნაირად

$$P_{i_1 i_2 i_3 i_4 \cdots i_n}{}^{1}, \quad P_{i_1 i_2 i_3 i_4 \cdots i_n}{}^{2}, \; P_{i_1 i_2 i_3 i_4 \cdots i_n}{}^{3}, \quad \ldots.. \; P_{i_1 i_2 i_3 i_4 \cdots i_n}{}^{2n+1}$$

$P_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ ფორმა არის სფერული ფუნქცია, რომელიც j-ურ საბაზისო ტენზორს შეესაბამება.

ადვილი დასანახია, რომ სფერული ფუნქციები ქმნიან წრფივ სივრცეს, რომელიც ასევე სიმეტრიული იქნება მობრუნებების მიმართ.

კავშირი იმპულსის ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების მდგომარეობს იმაში, რომ მიღებული ფუნქციები ქმნიან $\Lambda Y_n + \lambda Y_n = 0$ განტოლების ამონახსნთა სივრცეს, სადაც Λ არის ლაპლასიანის სფერული ნაწილი.