სივრცის მობრუნების აღწერა კვატერნიონებით

მობრუნების ყველაზე მარტივი შემთხვევა - სიბრტყის მობრუნებაა. სიბრტყის მობრუნება დაიყვანება წრეწირის მობრუნებაზე. გასაგებია, რომ მისი აღწერისთვის საჭიროა 2 რიცხვი: წრეწირის რადიუსი და მობრუნების კუთხე. ასევე გასაგებია, რომ ეს მობრუნება კომუტატურია. ამ მოსაზრებებიდან სიბრტყის მობრუნება, შეგვიძლია აღვწეროთ კომპლექსური რიცხვებით: $z = x + iy = re^{i\varphi}$.

3-განზომილებიან შემთხვევაში კი სივრცის მობრუნება დაიყვანება სფეროს მობრუნებაზე, რომლის აღწერისთვის უკვე გვჭირდება 4 რიცხვი (ეს შეგვიძლია მივხვდეთ იქიდან, რომ ერთი წერტილი რომ გადავაადგილოთ სფეროზე, საჭიროა 2 რიცხვი, კიდე შეგვიძლია მოვატრიალოს სფერო ამ წერტილზე გამავალ ღერძზე - მესამე რიცხვი, მეოთე რიცხვია კი სფეროს რადიუსი). ასევე ეს მობრუნება უკვე არ არის კომუტატური, რაც ნათელი ხდება უბრალო ბურთულის მობრუნების დაკვირვებით. ამიტომ ევკლიდური სივრცის მობრუნება შეგვიძლია დავახასიათოთ კვატერნიონებით: $q = z + wj$, სადაც z და w i-ანი კომპლექსური რიცხვებია და $j^2 = -1$, $j \neq i$. განვსაზღვროთ კვატერნიონის ნორმა (მოდულის კვადრატი): $N(q) = q\bar{q} = |z|^2 + |w|^2$. ასევე ნამრავლი $ij = k$. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია შევადგინოთ გამრავლებათა ტაბულა:

	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

ამ ცხრილის მეშვეობით, შეგვიძლია მოვახდინოთ სივრცის მობრუნება (მობრუნებაა ისეთი გარდაქმნა, რომლის დროს არ იცვლება წერტილების ნორმა): $x' = qxq^{-1}$, სადაც $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$.
მაგალითად $q = \cos\varphi + k\sin\varphi$. მაშინ მივიღებთ:

$$x' = x_0 + i(x_1\cos 2\varphi - x_2\sin 2\varphi) + j(x_1\sin 2\varphi + x_2\cos 2\varphi) + kx_3$$

რაც არის 3-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში რომელიმე ღერძის მიმართ მობრუნება.

სამგანზომილებიანი მობრუნების აღწერისთვის დაგვჭირდა 4 რიცხვი, ანუ 4-განზომილებიან სივრცეში გადასვლა.

განვიხილოთ ახლა მინკოვსკის სივრცე და ვცადოთ მოვაბრუნოთ ერთ-ერთი კოორდინატ-დროის სიბრტყე. განვმარტოთ კვატერნიონი: $q = z + wt$. სადაც $t^2 = 1$ (ჰიპერბოლური შემთხვევა). იმ მოსაზრებებიდან, რომ ჩვენ გვაინტერესებს მინკოვსკის სივრცის ისეთი გარდაქმნა, რომლის დროს ინახება ინტერვალი (ზუსტად ამას მე დავარქვი მობრუნება), უნდა განვსაზღვროთ კვატერნიონის ნორმა შემდეგნაირად:
$N(q) = q\bar{q} = |z|^2 - |w|^2$. გამრავლებათა ტაბულა მიიღებს სახეს:

	i	t	it
i	-1	it	-t
t	-it	1	-i
it	t	i	1

განვიხილოთ მაგალითი: $q = \cosh\varphi + it\sinh\varphi$. თუ ჩავატარებთ ამ კვატერნიონით გარდაქმნას, მივიღებთ:

$$x' = x_0 + i(x_1\cosh 2\varphi + x_2\sinh 2\varphi) + t(x_2\cosh 2\varphi + x_1\sinh 2\varphi) + itx_3$$

აქ თუ x_1-ს მივანიჭებთ კოორდინატის აზრს, x_2-ს კი დრო გამრავლებული სინათლის სიჩქარეზე, მივიღებთ ლორენცის გარდაქმნებს.

იგივე შეგვიძლია ჩავატაროთ სამი სივრცითი ღერძისთვის და მივიღოთ ლორენცის გარდაქმნები სამგანზომილებიან შემთხვევაში, ოღონდ აქ უკვე მოგვიწევს გადასვლა 8-განზომილებიან სივრცეში: 1-თავისუფალი წევრი, 3-სივრცითი, 1-დროითი და კიდე 3 ცალი სივრცითი ღერძი გამრავლებული დროით ღერძზე. დაგვჭირდება უკვე ოქტონიონების განხილვა: $Q = q + pt$. სადაც q და p კვატერნიონებია i, j, k რიცხვებით. ოქტონიონების გამრავლება უკვე ასოციაციურიც არ არის, რის გამოც საჭიროა გარკვეული გამრავლების წესების შემოტანა.

ყველაფერი ზემოაღნიშნული ბადებს კითხვას შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერ სივრცეში მობრუნების აღწერა ასეთი ობიექტებით, როგორც კომპლექსური რიცხვები, კვატერნიონები, ოქტონიონები და ა.შ.? საჭიროა თუ არა კიდე რაიმე რიცხვების დამატება, გარდა ზემოაღნიშნულებისა, რომელთა კვადრატებია -1 და 1?..