მაგნიტური მონოპოლები

ნიკა ბაშარული [1]

[1] ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მოხსენება, 27 მაისი 2021

ასიმეტრია მაქსველის განტოლებებში:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(4\pi\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

მაგნიტური მუხტი?

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\left(4\pi\mathbf{J}_m + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(4\pi\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

რა არის იმპლიკაცია?

დავუშვათ, ელექტრული ველის, რომელსაც ელექტრული მუხტი ქმნის, ანალოგიურად გვაქვს მაგნიტური ველი:

$$\mathbf{B} = \frac{e_m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

ვექტორული პოტენციალი:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{-e_m y}{r(r+z)}, \frac{e_m x}{r(r+z)}, 0\right) = \frac{e_m(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ გარდა z ღერძის დადებითი მიმართულებით, რადგან სინგულარობაა. მაგრამ შეუძლებელია სინგულარობისგან თავისუფალი ვექტორული პოტენციალის დაწერა რადგან:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi e_m$$

და თუ სინგულარობის გარეშე ვიპოვეთ მასეთი $\mathbf{A}$ მაშინ

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \, \mathrm{d}V = 0$$

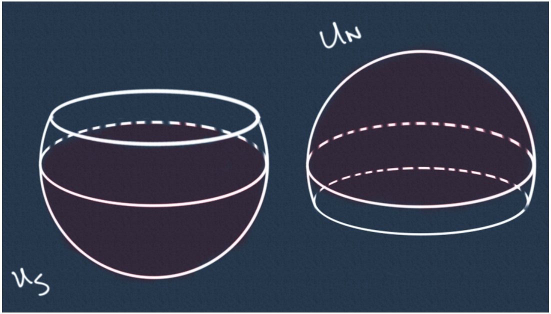
თუ შემოვიტანთ მრავალნიშნა ვექტორული პოტენციალს

$$\mathbf{A}^N = \left(\frac{-e_m y}{r(r+z)}, \frac{e_m x}{r(r+z)}, 0\right) = \frac{e_m(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \theta < \pi - \epsilon$$

$$\mathbf{A}^S = \left(\frac{e_m y}{r(r-z)}, \frac{-e_m x}{r(r-z)}, 0\right) = -\frac{e_m(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \theta > \epsilon$$

რადგან $\pi - \epsilon > \theta > \epsilon$ -ზე ორივეა განსაზღვრული და გვაძლევს ერთსა და იმავე მაგნიტურ ველს, შეგვიძლია დავაკავშიროთ ყალიბრობით:

$$\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = \frac{2e_m}{r\sin\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\nabla}(2e_m\phi)$$



$$\oint_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} = \int_{U_S} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}^S \cdot \mathbf{ds} + \int_{U_N} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}^N \cdot \mathbf{ds}$$
$$= \oint_{\partial U} (\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S) \cdot \mathbf{dl} = 4\pi e_m$$

$$\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

თუ

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda$$

მაშინ

$$\psi \longrightarrow \exp\left\{\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right\}\psi$$

განვიხილოთ ეკვატორთან რა ხდება, რადგან $\mathbf{A}^N - \mathbf{A}^S = \boldsymbol{\nabla}(2e_m\phi)$ მაშინ

$$\psi^N = \exp\left\{-\frac{2iee_m\phi}{\hbar c}\right\}\psi^S$$

რადგან ტალღური ფუნქცია უნდა იყოს ცალსახა მაშინ

$$\frac{2ee_m}{\hbar c} = n \implies e_m = \frac{n\hbar c}{2e} \quad n \in \mathbb{Z}$$

ესეიგი მაგნიტური მუხტი იკვანტება.

გმადლობთ ყურადღებისთვის.