სერგი კაპანაძე

ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანები ფიზიკაში

1. შესავალი

ვარიაციული აღრიცხვა - მათემატიკური ანალიზის დარგი, რომელიც სწავლობს ფუნქციონალის ვარიაციებს.

ფუნქციონალი ეწოდება ასახვას:

$$J : X \to R$$

სადაც X არის ნებისმიერი ბუნების ელემენტთა სიმრავლე, ხოლო R - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

ვთქვათ $f(t, x, y)$ უწყვეტი სკალარული ფუნქციაა სიმრავლეზე $I \times R \times R$. ასახვას:

$$J : C(I) \to R$$

სადაც $C(I)$ არის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების სივრცე,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

სადაც t - დრო, $x = x(t)$ - ტრაექტორია, $\dot{x} = \dot{x}(t)$ - სიჩქარე, დამოუკიდებელი ცვლადია, ეწოდება ინტეგრალური ფუნქციონალი. ფიზიკაში დამკვიდრებული ტერმინოლოგიის შესაბამისად ასეთი ტიპის ფუნქციონალს ეწოდება ქმედება,

$$S\big(x(t)\big) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t))dt$$

სადაც $L(x(t), \dot{x}(t))$ არის ლაგრანჟის ფუნქცია, ან ლაგრანჟიანი.

ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანაა მოიძებნოს ისეთი ფუნქცია $x = x(t)$, რომელიც ფუნქციონალს ანიჭებს სტაციონარულ მნიშვნელობას. ამისთვის საჭიროა ამოიხსნა ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება:

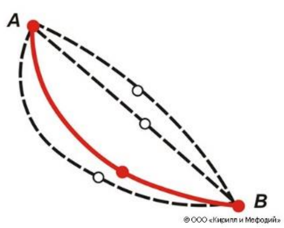
$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

2. ბრაქისტოქრონის პრობლემა

ამოცანის ისტორია

(ბერძნულად brachistos - უმცირესი, chronos - დრო) 1696 წელს შვეიცარიელმა მათემატიკოსმა იოჰან ბერნულიმ, ჟურნალ Acta Eruditorum გამოაქვეყნა ბრაქისტოქრონის პრობლემა, რომელსაც წარუმძღვარა: „მე, იოჰან ბერნული, მივმართავ მსოფლიოს ბრწყინვალე მათემატიკოსებს. ჭკვიანი ადამიანისთვის არაფერია იმაზე მიმზიდველი, ვიდრე საინტერესო და საკამათო პრობლემა, რომლის გადაჭრაც მას დიდებას მოუტანს. ეს ამოცანა აჩვენებს თქვენი ამოხსნების სტილს, შესაძლებლობებსა და ინტელექტის დონეს. თუ ვინმე შემეხმიანება ამ სტატიასთან დაკავშირებით და ამოხსნას მომაწვდის, საჯარო აღიარებას ვპირდები.“

ამოცანა



ვთქვათ ვერტიკალურ სიბრტყეზე აღებულია ორი A და B წერტილი, რომლებიც არ ეკუთვნიან ერთ ვერტიკალურ წრფეს. იპოვეთ ამ წერტილების შემაერთებელი ისეთი წირი, რომელზედაც A წერტილიდან სიმძიმის ძალით მოძრავი სხეული გადავა B წერტილში მინიმალურ დროში.

სიბრტყეში ავიღოთ xoy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისეთნაირად, რომ სათავე იყოს მოთავსებული A წერტილში, ხოლო ox ღერძი მიმართული იყოს ქვემოთ. ამრიგად, $A = (0,0)$ და, $B = (x_1, y_1)$ სადაც $x_1 > 0, y_1 > 0$ ფიქსირებული რიცხვებია. დრო რომელიც საჭიროა $y = y(x)$ წირზე მოძრავი სხეულისთვის A-დან B-ში გადასასვლელად გამოითვლება ფორმულით:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy \ \rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2}}{v} = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{(1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

მოვახდინოთ დროის ფუნქციონალის მინიმიზება, გავითვალისწინოთ, რომ მუდმივი თანამამრავლი გავლენას არ ახდენს ფუნქციონალის მინიმუმზე:

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{(1+\dot{y}^2)}}{\sqrt{y}} dx \rightarrow min \qquad (y(0) = 0, y(x_1) = y_1)$$

ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$F = \frac{\sqrt{(1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx = F(y, \dot{y})$$

არაა ცხადად დამოკიდებული x-ზე, ამიტომ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F - y'F_{\dot{y}} = const = \mathrm{C} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} - \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}} = C$$

$$1 = C\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}$$

$$\dot{y}^2 = \frac{1 - C^2 y}{C^2 y}$$

მოვახდინოთ ჩასმა:

$$y = \frac{K}{2}(1 - \cos(t))$$

სადაც $K = 1/C^2$, მაშინ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{2}\sin(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{K}{2}\sin(t)\frac{dt}{dx}$$

საბოლოოდ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\left(\frac{K}{2}\sin(t)\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1+\cos(t)}{1-\cos(t)}$$

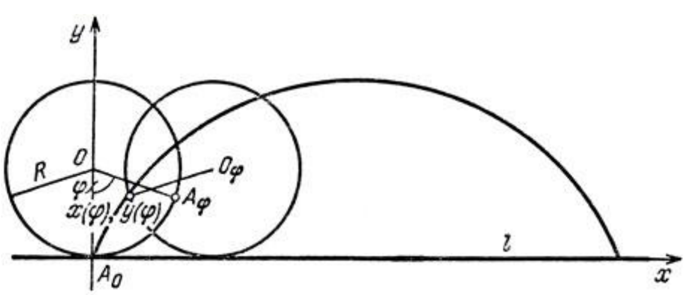
$$\frac{K^2}{4}(1-\cos(t))^2(dt)^2 = (dx)^2$$

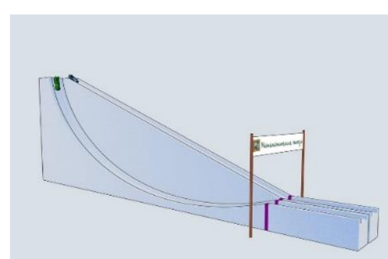
რომლის ამოხსნაა ციკლოიდთა ოჯახი, პარამეტრული სახით:

$$x = \pm\frac{K}{4}(t - \sin(t)) + N$$

$$y = \frac{K}{2}(1 - \cos(t))$$

K და M კონსტანტების შერჩევით ამ ოჯახიდან გამოიყოფა ისეთი ციკლოიდა, რომელიც გადის A და B წერტილში. ასეთი ციკლოიდა ერთადერთია, ამიტომ იგი იქნება ამოცანის ამონახსნი. ფუნქციონალის მნიშვნელობა მიღებულ წირზე იქნება A-დან B-ში გადასვლის უმცირესი დრო.





3. დიდონას ამოცანა

დიდონას ამოცანა დაკავშირებულია ქალაქ კართაგენის დაარსების ძველ ლეგენდასთან. დიდონა ფინიკიური ქალაქ ტიროსის მეფის ასული გახლდათ. მას ხმელთაშუა ზღვის სამხრეთ სანაპიროზე მოუწია გადასახლება. იმხანად იმ ადგილთა მფლობელი იყო ბერბერთა მეფე იარბა. იგი დათანხმდა დიდონასთვის მიეყიდა იმხელა მიწა, რომელსაც დაფარავდა ერთი ხარის ტყავი. მაშინ მეფის ასულმა ბრძანა, დაეჭრათ ტყავი ვიწრო ზოლებად და შემოესაზღვრათ იმ სიგრძის მიწა, რომელიც საჭირო იქნებოდა ქალაქისათვის.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: შემოვსაზღვროთ რაც შეიძლება დიდი მიწის ფართობი ფიქსირებული სიგრძის თოკის მეშვეობით.

მათემატიკურად ეს ნიშნავს, რომ:

$$S = x_0x_1ydx \ \rightarrow max;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+\dot{y}^2} \, dx = L, \ \ y(x_0) = y(x_1) = 0$$

ასეთი ტიპის ამოცანებს უწოდებენ იზო-პერიმეტრულ ამოცანებს.

ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით იზო-პერიმეტრული ტიპის ამოცანა შეიძლება დაყვანილი იქნეს ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანის ამოხსნაზე დამატებითი პირობების გარეშე:

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x, y, \dot{y})dx \ \rightarrow extr$$

სადაც, ლაგრანჟიანი (ჩვენს შემთხვევაში)

$$L = \lambda_0 y + \lambda_1 \sqrt{(1+\dot{y}^2}$$

ვინაიდან ლაგრანჟიანი არაა დამოკიდებული x ცვლადზე, ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\dot{y}L_{\dot{y}} - L = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{(1+\dot{y}^2}} - \lambda_0 y = const = C$$

დავუშვათ $\lambda_0 = 1$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{(C-y)^2} - 1}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{{\lambda_1}^2}{(C-y)^2} - 1}}$$

$$x = \int \frac{(C-y)dy}{\sqrt{{\lambda_1}^2 - (C-y)^2}} = \sqrt{{\lambda_1}^2 - (C-y)^2} + C_1$$

საიდანაც საბოლოოს მივიღებთ:

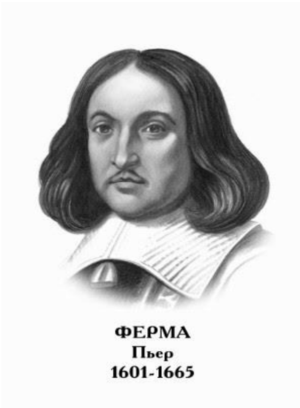
$$(x - C_1)^2 + (y - C)^2 = {\lambda_1}^2$$

λ_1, C და C_1 მუდმივების განსაზღვრა ცალსახადაა შესაძლებელი შემდეგი პირობებიდან:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx = L,$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0$$

4. ფერმას პრინციპი



ფერმას პრინციპი გეომეტრიული ოპტიკის პოსტულატია, რომლის მიხედვითაც სინათლე ორ წერტილს შორის ირჩევს იმ გზას, რომელზე მოძრაობასაც დასჭირდება უმცირესი დრო. ერთგვაროვან გარემოში სინათლე ვრცელდება წრფივად. არაერთგვაროვან გარემოში სინათლის გავრცელების დასადგენად, ფერმას პრინციპის თანახმად, უნდა მოვახდინოთ დროის ფუნქციონალის მინიმიზება:

$$t = \int_{\gamma} \frac{ds}{v} \quad \textbf{(1)}$$

აქ v სინათლის გავრცელების სიჩქარეა, ხოლო ds სიგრძის ელემენტი.

განვიხილოთ სინათლის სხივის მოძრაობა xy სიბრტყეზე A(x1,y1) წერტილიდან B(x2,y2) წერტილამდე. დავუშვათ, რომ სინათლის სიჩქარე მოცემულია ფუნქციით $v(y)$. ასეთ შემთხვევაში **(1)** გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2}}{v(y)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(1+\dot{y}^2}}{v(y)} dx$$

ამ შემთხვევაში ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

ლაგრანჟია ფუნქცია,

$$F = \frac{\sqrt{(1+\dot{y}^2}}{v(y)} = F(y, \dot{y})$$

არ არის ცხადად დამოკიდებული x ცვლადზე, ამიტომ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება,

$$F - y'F_{\dot{y}} = const = \mathrm{C}$$

მიიღებს სახეს:

$$\frac{\sqrt{(1+\dot{y}^2}}{v(y)} - \frac{\dot{y}^2}{v(y)\sqrt{(1+\dot{y}^2}} = C$$

გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ მივიღებთ:

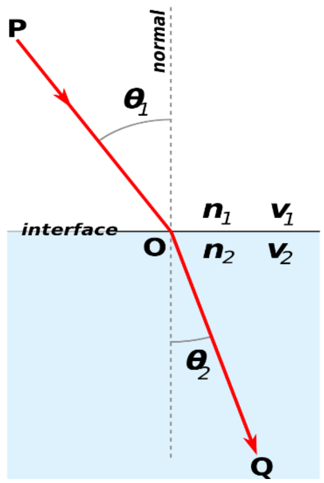
$$\frac{1}{v(y)\sqrt{(1+\dot{y}^2}} = C \quad \textbf{(2)}$$

მიღებული დიფერენციალური განტოლება ამოვხსნათ ცვლადთა განცალების მეთოდით:

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{1 - C^2 v^2(y)}}{C v(y)} = \frac{dy}{dx} \quad \mathbf{(3)}$$

$$dx = \frac{C v(y)}{\sqrt{1 - C^2 v^2(y)}} dy$$

$$x = \int \frac{C v(y)}{\sqrt{1 - C^2 v^2(y)}} dy$$



ახლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც სინათლის სხივი გადადის ერთი ერთგვაროვანი გარემოდან მეორეში. ამ შემთხვევაში $v(y)$ ფუნქცია უბან-უბან მუდმივი იქნება:

$$v(y) = \begin{cases} v_1, & y < 0 \\ v_2, & y \geq 0 \end{cases}$$

ვინაიდან $v(y)$ ფუნქცია უბან-უბან მუდმივია, მე-**(3)** განტოლებიდან გამომდინარე, უბან-უბან მუდმივი იქნება y' ფუნქციაც, ხოლო $y(x)$ იქნება წრფივი ფუნქცია, რომელსაც ექნება სხვადასხვა კუთხური კოეფიციენტები ზედა და ქვედა ნახევარ-სიბრტყეებში. ვთქვათ ეს კუთხური კოეფიციენტებია $\tan\varphi_2$ და $\tan\varphi_1$. შევიტანოთ მე-**(2)** ფორმულაში $y' = \tan\varphi$, მივიღებთ:

$$\frac{1}{v_1\sqrt{1 + tan^2\varphi_1}} = \frac{cos\varphi_1}{v_1} = \frac{sin\vartheta_1}{v_1} = C$$

და

$$\frac{1}{v_2\sqrt{1 + tan^2\varphi_2}} = \frac{cos\varphi_2}{v_2} = \frac{sin\vartheta_2}{v_2} = C$$

საიდანაც მივიღებთ ყველასათვის ცნობილ სინათლის გარდატეხის კონონს:

$$v_2 sin\vartheta_1 = v_1 sin\vartheta_2$$