გრავიტაციული ტალღების გამოსხივება

აჩქარებულ სხეულთა სისტემა გრავიტაციულ ტალღებს ასხივებს. გამოვთვალოთ ენერგია რომელიც ამ ტალღებს მიაქვთ, ე. ი. ენერგია რომელსაც ეს სისტემა გამოსხივების გზით კარგავს.

სისტემის სხეულთა სიჩქარეები სინათლის სიჩქარესთან შედარებით მცირედად ჩავთვალოთ და დავწეროთ შესაბამისი განტოლება.

$$\frac{d\varphi_i^k}{dx^k} = \sigma\tau_i^k \qquad (1)$$

სადაც τ_i^k არის ენერგია იმპულსის ტენზორი, ხოლო φ_i^k მეტრიკული ტენზორის შესწორებასთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად:

$$\varphi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h.$$

ენერგია იმპულსის ტენზორი τ_i^k აკმაყოფილებს შენახვის პირობას

$$\frac{d\tau_i^k}{dx^k} = 0.$$

(1) განტოლების ამონახსნი შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\varphi_i^k = -\frac{\sigma}{2\pi}\int \frac{\tau_i^k{}_{t-\frac{R}{c}}}{R}\, dV. \qquad (2)$$

ვინაიდან მატერიალურ სისტემის ყველა სხეულის სიჩქარე მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით ამიტომ შესაძლებელია ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ და დავწეროთ შემდეგი ტოლობა

$$\varphi_i^k = -\frac{\sigma}{2\pi R}\int \tau_i^k\ dV. \qquad (3)$$

ამ ინტეგრალის დასათვლელად ვისარგებლოთ ენერგია-იმპულსის შენახვის პირობებით:

$$\frac{d\tau_{\alpha\beta}}{dx^\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{d\tau_{\alpha 0}}{dt} = 0 \quad \text{და} \quad \frac{d\tau_{0\beta}}{dx^\beta} - \frac{1}{c^2}\frac{d\tau_{00}}{dt} = 0\,.$$

პირველი განტოლება გავამრავლოთ x^k და ვაინტეგროთ მთელ სივრცეში მივიღებთ

$$\int \frac{d\tau_{\alpha\beta}}{dx^\beta} x^k dV = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \tau_{\alpha 0} x^k dV.$$

თუ გარდავქმნით მარცხენა მხარეს, გამოვიყენებთ გაუსის ინტეგრალის თვისებას და გავითვალისწინებთ, რომ $\tau_{\alpha\beta}$ უსასრულობაში 0-ს უტოლდება, მივიღებთ

$$\frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int(\tau_{\alpha 0}x^k+\tau_{k0}x^\alpha)dV=-\int d\tau_{\alpha k}dV. \qquad (5)$$

ავიღოთ მეორე განტოლება და გავამრავლოთ x^α, x^k და ვაინტეგროთ ასევე მთელ მოცულობაზე

$$\int\frac{d\tau_{0\beta}}{dx^\beta}x^kx^\alpha dV=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\tau_{00}x^kx^\alpha dV.$$

აქაც განტოლების მარცხენა მხარისთვის ვისარგებლოთ ნაწილობითი ინტეგრებით, შემდეგ გამოვიყენოთ გაუსის ინტეგრალის თვისება და გავითვალისწინოთ, რომ $\tau_{0\beta}$ უსასრულობაში 0-ის ტოლია. მაშინ მივიღებთ

$$\int(\tau_{\alpha 0}x^k+\tau_{k0}x^\alpha)dV=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau_{00}x^\alpha x^kdV. \qquad (6)$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას თუ მოვდებთ $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$ ოპერატორს, (5)-ე ტოლობის და (6)-ე ტოლობის მარცხენა მხარის გამოსახულებები ერთმანეთს დაემსგავსება და შევძლებთ დავწეროთ

$$\int d\tau_{\alpha k}dV=\frac{1}{2c^4}\frac{d^2}{dt^2}\int d\tau_{00}x^\alpha x^kdV. \qquad (7)$$

ე. ი. ყველა $\tau_{\alpha k}$ სიდიდეები გამოისახა τ_{00} კომპონენტის მეშვეობით, ხოლო მოცემულ შემთხვევაში კი

$$\tau_{00}=c^2\tau_0^0=\rho c^4.$$

შემოვიტანოთ ეს პირობა (6)-ში მივიღებთ

$$\int d\tau_{\alpha k}dV=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\rho x^\alpha x^kdV.$$

თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ (3)-ში და შემოვიტანთ გრავიტაციულ მუდმივის შემცველ პარამეტრს

$$\sigma=\frac{8\pi k}{c^4},$$

მივიღებთ

$$\varphi_i^k = -\frac{2k}{c^4 R}\frac{d^2}{dt^2}\int \rho x^\alpha x^k dV. \qquad (8)$$

მატერიალური სისტემიდან დიდ მანძილებზე, სივრცის მცირე უბანში ტალღა შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ ბრტყელ ტალღად და შესაძლებლობა გვექნება დავთვალოთ ენერგიის ნაკადი, მაგალითად x^1 ღერძის გასწვრივ:

$$t_0^1 = \frac{1}{2\sigma c}\left[\left(\frac{\dot{\varphi}_{22}-\dot{\varphi}_{33}}{2}\right)^2 + \dot{\varphi}_{23}^2\right]. \qquad (9)$$

რადგან გრავიტაციული ტალღები განივ ტალღებს წარმოადგენენ, φ_i^k-ის დიაგონალური წევრების ჯამი 0-ის ტოლია. ამიტომ (8) ინტეგრალი შესაძლებელია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$I_{\alpha\beta} = \int \rho(x^\alpha x^k - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}x_k^2)dV,$$

რაც არის მასის განაწილების მახასიათებელი.

მაშინ $\dot{\varphi}_{22} - \dot{\varphi}_{33}$ და $\dot{\varphi}_{23}$ კომპონენტებისათვის გვექნება:

$$\dot{\varphi}_{22} - \dot{\varphi}_{33} = -\frac{2k}{c^4 R}\left(\dddot{I}_{22} - \dddot{I}_{33}\right) \text{ და } \dot{\varphi}_{23} = -\frac{2k}{c^4 R}\dddot{I}_{23}.$$

ამ გამოსახულებების გათვალისწინებით ენერგიის ნაკადი x^1 ღერძის გასწვრივ იქნება

$$t_0^1 = \frac{k}{4\pi c^5 R}\left[\frac{\left(\dddot{I}_{22} - \dddot{I}_{33}\right)^2}{2} + \dddot{I}^2{}_{23}\right].$$

სრული ენერგიის ნაკადი კი ტოლი იქნება $4\pi R$-ზე გამრავლებული ამ სიდიდის საშუალოსი:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{k}{5c^5}\dddot{I}^2{}_{\alpha\beta}.$$