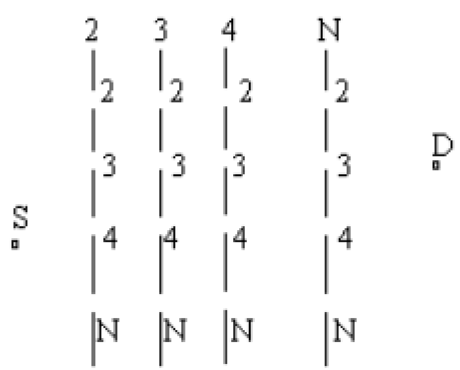
კომივოიაჟერის ამოცანის კვანტური ალგორითმი

ანი გრიგალაშვილი

განვიხილოთ კომივოიაჟერის ცნობილი ამოცანა (TSP-traveling salesman problem): მოცემულია N ქალაქი და ქალაქთა ყოველ წყვილს შორის მანძილი d_{ij}. საჭიროა ვიპოვოთ ყოველი ქალაქის შემაერთებელი უმცირესი გზა. განვიხილოთ კერძო სახის ამოცანა სადაც იგულისხმება, რომ d_{ij} ზემოდან შემოსაზღვრულია L-ით. ამოცანის ამოხსნის ყველაზე მარტივი ალგორითმია გადავნომროთ ყველა შესაძლო მარშრუტები და შემდეგ გავზომოთ მანძილები. ამოხსნის დრო ექსპონენციალურად იზრდება N-ის ზრდასთან ერთად, რადგან მარშრუტების რაოდენობა N! რიგისაა. მაგრამ არ არსებობს ამაზე უკეთესი ალგორითმი. ყველა N! მარშრუტის პარალელურ გარჩევას სასრული დრო დასჭირდება, მაგრამ საჭიროა N! პროცესორი, რის გამოც კომპიუტერის ზომა და ინფორმაციის წაკითხვის დრო გაიზრდება ექსპონენციალურად. ამრიგად, პირდაპირი პარალელიზმი დიდ ეფექტს ვერ მოგვცემს.

თუმცა კვანტურმა სისტემამ შესაძლებელია მართოს ექსპონენციალურად ბევრი მდგომარეობა, რაც შესაძლებელია გამოყენებული იქნას გამოთვლებისათვის. ამოცანა დავსვათ ასე: შესაძლებელია თუ არა ისეთი გამოთვლითი პრინციპების მოგონება, რომელიც TSP-ს მსგავს ამოცანებს ამოხსნის პოლინომიალურ დროში და არსებობს თუ არა ისეთი ფიზიკური სისტემა, რომელშიც ამ გამოთვლების განხორციელება არ ეწინააღმდეგება ფიზიკურ კანონებს.

კომივოიაჟერის ამოცანისათვის ავაგოთ ალგორითმი, რომელიც მას პოლინომიალურ დროში ამოხსნის, ხოლო შემდეგ ავაგოთ წარმოსახვითი მანქანა, რომელზედაც ამ ალგორითმის განხორციელებაა შესაძლებელი. N რაოდენობის ქალაქისათვის TSP-ს ამოსახსნელად განვიხილოთ მანქანა, რომელსაც აქვს N-1 ღერო და თითოეულ ღეროზე N-1 ნახვრეტი (ნახ.1).

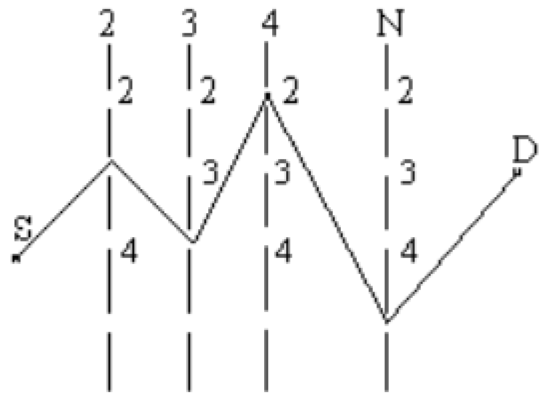


ნახ. 1

ყოველი ნახვრეტი ცალსახად მოიცემა (i,j) წყვილით. დავუშვათ S წერტილში

მოთავსებულია ნაწილაკების წარმომქმნელი წყარო (მაგ. ლაზერი), ხოლო D წერტილში კი ნაწილაკების დეტექტორი. ვთქვათ ნახვრეტებს შორის მოთავსებულია შტერნ-გერლახის მოწყობილობა. ამრიგად, მანქანა წარმოადგენს გარკვეული სახის მრავალბიჯიან ინტერფერენციულ მანქანას.

არსებობს $(N-1)^{(N-1)}$ შესაძლო ტრაექტორია, რომლითაც ნაწილაკი S წერტილიდან მოხვდება D წერტილში. ტრაექტორია ცალსახად მოიცემა ნახვრეტების კოორდინატების მიმდევრობის ჩამოთვლით. მაგალითად ნახ. 2-ზე ნაჩვენები ტრაექტორია მოიცემა შემდეგნაირად:



ნახ.2

S, (2,3), (3,4), (4,2), (5,5), D. ნათელია, რომ ღეროების ნომერი შესაძლებელია გამოვტოვოთ და ტრაექტორია აღვწეროთ შემდეგი მიმდევრობით: S, 3, 4, 2, 5, D. თავის მხრივ, ეს მიმდევრობა შეიძლება მივიღოთ როგორც 5 ქალაქის შემაერთებელი ტრაექტორიის კოდი. ამასთან არსებობს ისეთი კოდები, რომლებიც არ შეიძლება იყოს კომივოიაჟერის მარშრუტები. მაგალითად S, 2, 2, 3, 5, D, რადგან იგი შეესაბამება კომივოიაჟერის ისეთ მარშრუტს, რომლის თანახმადაც, კომივოიაჟერი ქალაქ 2-ში ორჯერ მოხვდება, ხოლო ქალაქ 4-კი საერთოდ არ გაივლის. ასეთ კოდებს ვუწოდოთ აკრძალული კოდები, ყველა დანარჩენს კი დასაშვები. საჭიროა აღვწეროთ ნაწილაკის დინამიკა ისე, რომ ნაწილაკმა რომელიც გაივლის მანქანას, იცოდეს შესაბამისი მარშრუტის სიგრძე.

იმისათვის, რომ ეს პირობები შესრულდეს, საჭიროა გარკვეული თავისუფლების ხარისხის მქონე ისეთი ნაწილაკები, რომლებიც ურთიერთქმედებენ მანქანასთან. შესაძლებელია გამოვიყენოთ იზოტოპური სპინის მსგავსი შიგა თავისუფლების ხარისხი. აღვნიშნოთ, რომ საუბარია ჰიპოთეზურ სამყაროზე და ამის გამო შეგვიძლია გამოვიგონოთ ნებისმიერი შიგა თავისუფლების ხარისხი, ისეთიც კი, რომელიც არ გვხვდება რეალურ სამყაროში არსებულ ელემენტარულ ნაწილაკებში.

დავუშვათ ჩვენი ჰიპოთეზური ნაწილაკების შიგა თავისუფლების მდგომარეობები აღიწერება შემდეგი კეტ-ვექტორით: |K; c2, c3,…, cN; p>, სადაც :

$$k \in \{0,1,\ldots,NL\},\ c_i \in \{0,1\},\ p \in \{0,1\}.$$

K კვანტური რიცხვი ზომავს მარშრუტის „კილომეტრაჟს“, c_i კი მიუთითებს , იყო თუ არა კომივოიაჟერი i-ურ ქალაქში. P კვანტურ რიცხვს TSP-სთან კავშირი არ აქვს. იგი აღწერილი დინამიკის მქონე სისტემის რეალიზაციისათვის არის საჭირო.

განვიხილოთ ტრაექტორიის ნაწილი ორ მეზობელ i და i+1 ღეროზე m და n ნახვრეტებს შორის: (i, m) -> (i+1, n). დავუშვათ, რომ თუ ნაწილაკი გაივლის (i, m) ნახვრეტს c_n კვანტური რიცხვი შეიცვლება შემდეგნაირად: $c_n = 0 \rightarrow c_n = 1$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ ჩვენი ნაწილაკები ნახვრეტებს შორის გადაადგილების დროს მოძრაობენ არა თავისუფალ სივრცეში, არამდე გარკვეულ ველში ისე, რომ K კვანტური რიცხვი ტრაექტორიის განსახილველი (i, m) და (i+1, n) ნახვრეტების შემაერთებელ მონაკვეთზე იზრდება შემდეგი კანონით: $K \rightarrow K + d_{mn}$, სადაც d_{mn} არის m და n ქალაქებს შორის მანძილი.

დავუშვათ S წერტილში წარმოქმნილი ნაწილაკები იმყოფებიან მდგომარეობაში |0; 0,...,0; 0>. მას შემდეგ რაც ნაწილაკები გაივლიან მანქანას ისინი გადავლენ მდგომარეობაში:

$$\sum_{\text{ტრაექტორიები}} \left| k; c_2, c_3, \ldots, c_N; p \right\rangle_{\text{ტრაექტორია}}$$

ამ ჯამში ზოგიერთი ტრაექტორია შეესაბამება კომივოიაჟერის დასაშვებ ტრაექტორიას. ნათელია, რომ ეს ის ტრაექტორიებია, რომელთათვისაც ყველა c_i კვანტური რიცხვი 1-ია. ასეთი ტრაექტორიებისათვის K კვანტური რიცხვის მნიშვნელობა მარშრუტის სიგრძის ტოლია.

დავუშვათ ახლა D წერტილში მოთავსებულია ფილტრი, რომელიც ახშობს ველა მდგომარეობას, გარდა იმ მდგომარეობებისა, რომელთათვისაც ყველა c_i რიცხვი 1-ის ტოლია. მაშინ მანქანის გამოსავალზე იქნება მდგომარეობა:

$$\sum_{\text{ტრაექტორიები}} \left| (\text{მარშრუტის სიგრძე}) \times k, 1, \ldots, 1, p \right\rangle_{\text{ტრაექტორია}}.$$

ფილტრი შესაძლებელია იყოს შტერნ-გერლახის ტიპის მოწყობილობების ერთობლიობა, რომლებიც გრძნობენ c კვანტურ რიცხვებს და აქრობენ ისეთ მდგომარეობებს, რომელთათვისაც c = 0. ამის შემდეგ საკმარისია D წერტილში მოვათავსოთ კიდევ ერთი შტერნ-გერლახის ტიპის მოწყობილობა, მხოლოდ ამჯერად ისეთი, რომელიც მგრძნობიარე იქნება K კვანტური რიცხვის მიმართ. მან უნდა გაყოს გამომავალ ნაწილაკთა ნაკადი NL რაოდენობის ნაკადებად, რომელთაგან თითოეული შეესაბამება K-ს კონკრეტულ მნიშვნელობას. დავაყენოთ გამომავალი ნაწილაკების უკვე გაყოფილი ნაკადებისათვის დეტექტორი. K = ML მახასიათებლების მქონე ნაკადი გადაიხრება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს M სიგრძის მარშრუტი. იმ დეტექტორთა შორის, რომლებიც გადაიხრებიან, შესაძლებელია ავირჩიოთ ისეთი რომელიც შეესაბამება მინიმალურ K-ს. ეს იქნება უმოკლესი გზა.