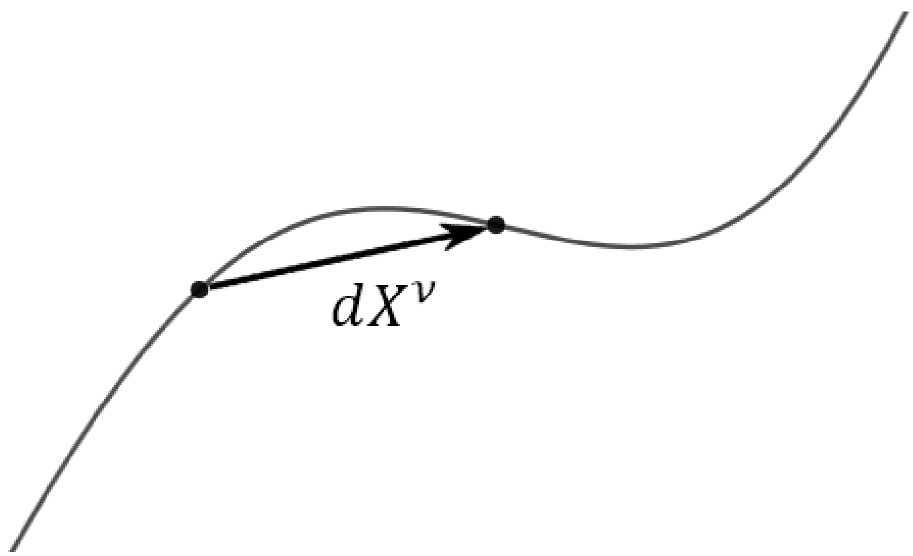
მოძრაობის განტოლება გამრუდებულ მინკოვსკის სივრცეში

ალექსანდრე ღურჭუმელია

- **გეოდეზიური წირი**

წირის მიმართ ტანგენციალური ვექტორის განსამარტად მასზე ავიღოთ რაიმე წერტილი და მისი მეზობელი მეორე წერტილი რომელსაც მივასწრაფებთ პირველთან. ამ წერტილების დამაკავშირებელი ვექტორი აღვნიშნოთ dX^{ν}-ით.



მაშინ ტანგენციალური ვექტორი იქნება dX^{ν}-ის ფარდობა წერტილებს შორის უსასრულოდ მცირე მანძილთან, რაც მინკოვსკის სივრცეში არის საკუთარი დრო $d\tau$.

$$T^{\nu} = \frac{dX^{\nu}}{d\tau} \tag{1}$$

შევნიშნოთ რომ რადგან dX^{ν} იგივე სიგრძისაა რაც $d\tau$, T^{ν} გამოდის ერთეულოვანი ვექტორი. გეოდეზიური წირის აღმწერი განტოლების მისაღებად უნდა მოვითხოვოთ, რომ მასზე აღებულ ორ მახლობელ წერტილებში ტანგენციალური ვექტორები ერთმანეთის პარალელურია, ანუ ტანგენციალური ვექტორის კოვარიანტული დიფერენციალი უნდა იყოს ნოლის ტოლი

$$Dt^{\nu} = dt^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} T^{\rho} dX^{\mu} = 0$$

რისი $d\tau$-სთან შეფარდებითაც მივიღებთ

$$\frac{dT^{\nu}}{d\tau} = -\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} T^{\mu} T^{\rho}$$

თუ ამ განტოლებაში შევიტანთ (1)-ს მივიღებთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას X^{ν}-ს მიმართ

$$\frac{d^2X^{\nu}}{d\tau^2} = -\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} \frac{dX^{\mu}}{d\tau}\frac{dX^{\rho}}{d\tau} \qquad (2)$$

რადგან გამრუდებულ სივრცეში თავისუფალი ნაწილაკი მოძრაობს გეოდეზიურ წირზე, (2) გამოსახულება აგრეთვე წარმოადგენს მისი მოძრაობის განტოლებას.

- **უმცირესი ქმედების პრინციპი**

იმის გამო, რომ ხშირად ხელსაყრელია ლაგრანჟის ფორმალიზმის გამოყენება მოძრაობის განტოლების გამოსაყვანად, საინტერესოა (2) განტოლება მივიღოთ უმცირესი ქმედების პრინციპით. ამისთვის უნდა განვმარტოთ ქმედება. დავწეროთ უსასრულოდ მცირე ინტერვალის ფორმულა

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu} = g_{\mu\nu}\frac{dX^{\mu}}{dt}\frac{dX^{\nu}}{dt}dt^2$$

გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$d\tau = dt\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dX^{\mu}}{dt}\frac{dX^{\nu}}{dt}}$$

იმისთვის რომ მივიღოთ გეოდეზიური წირი საჭიროა რომ $d\tau$-ს ინტეგრებით მივიღოთ უმოკლესი მანძილი ორ წერთილს შორის (უფრო ზოგადად რომ ვთქვათ, წირი უნდა წარმოადგენდეს ფუნქციონალის ექსტრემუმს). მაშინ შეიძლება დაიწეროს რომ

$$\delta\tau = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dX^{\mu}}{dt}\frac{dX^{\nu}}{dt}} = 0$$

საიდანაც ქმედება სინათლის სიჩქარის გათვალისწინებით არის

$$A = -mc^2\tau$$

თუ ავიღებთ $c = 1$ მაშინ ლაგრანჟიანი იქნება

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dX^{\mu}}{dt}\frac{dX^{\nu}}{dt}}$$

საიდანაც ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ (2) განტოლება მოცემული $g_{\mu\nu}$ მეტრიკისთვის.

- **მოძრაობის განტოლება არა-რელატივისტურ ზღვარში**

განვიხილოთ შემდეგი სახის მეტრიკა

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2U(\mathbf{X})}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

სადაც $U(\mathbf{X})$ არის რაიმე გრავიტაციული პოტენციალი. ლაგრანჟიანი წარმოვადგინოთ 3-ვექტორების საშუალებით

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{\left(1+\frac{2U(\mathbf{X})}{c^2}\right)\frac{dX^0}{dt}-\frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{X}}^2}$$

არარელატივისტურ ზღვარში c^2-თან შეფარდებული წევრები გაცილებით მცირეა 1-ზე. როდესაც $|\varepsilon| \ll 1$, ვიცით რომ

$$\sqrt{1+\varepsilon}\sim 1+\varepsilon/2$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\mathcal{L} = mc^2 + \frac{m\dot{\mathbf{X}}^2}{2} - mU(\mathbf{r})$$

მუდმივ mc^2 სიდიდეს არ ექნება გავლენა მოძრაობის განტოლებაზე რადგან მისი წარმოებული ნულია.