

ამოცანები მექანიკაში: 1. კინემატიკა

ზურაბ სილაგაძე, ნოვოსიბირსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

2024

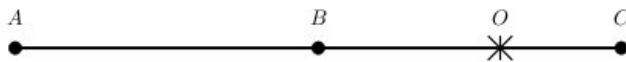
1 ამოცანები

1.1 რა დროს გათენდა?

A -პუნქტიდან B -კენ და B -პუნქტიდან A -კენ ერთსა და იმავე გზაზე გამთენიისას ერთდროულად გამოვიდა ორი მგზავრი. ისინი შუადღეს შეხვდნენ, მაგრამ არ შეუწყვეტიათ მოძრაობა და თითოეულმა განაგრძო წინსვლა იგივე სიჩქარით. იმავე დღეს პირველი მივიდა დანიშნულების ადგილზე (B -პუნქტში) დღის 4 საათზე, ხოლო მეორე – A -პუნქტში საღამოს 9 საათზე. რა დროს გათენდა იმ დღეს?

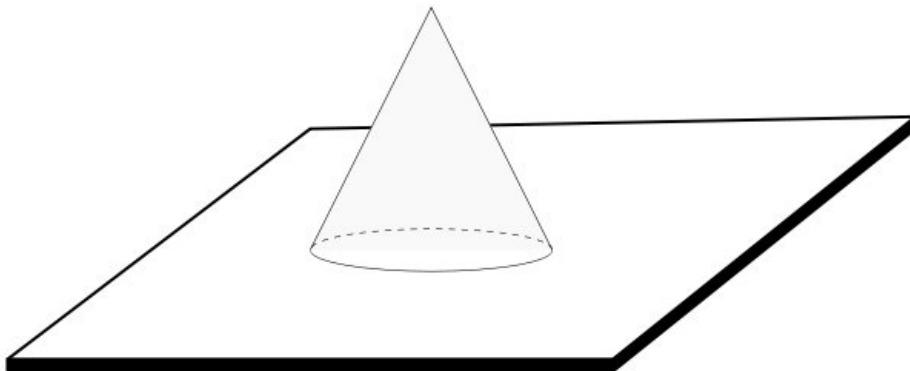
1.2 სამი მიკროფონი

სამმა მიკროფონმა, განლაგებულმა ერთსა და იმავე წრფივ ხაზზე A , B და C წერტილებში, დაარეგისტრირა $t_A > t_B > t_C$ დროის მომენტებში აფეთქების ხმა, რომელიც მოხდა AC მონაკვეთზე მდებარე O წერტილში. იპოვეთ AO მონაკვეთის სიდიდე, თუკი $AB = BC = L$. რა დროს მოხდა აფეთქება?



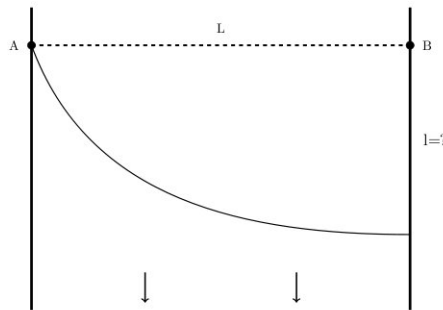
1.3 კონუსური ჭურვი

ფეთქებადი ნივთიერებისაგან დამზადებულია თხელკედლიანი კონუსური ჭურვი. დეტონაციის სიჩქარე (რომლითაც აფეთქება ვრცელდება ჭურვის ზედაპირის გასწვრივ) არის V , ხოლო აფეთქების პროდუქტების მოძრაობის სიჩქარეა $u < V$. რა კუთხეს უნდა შეადგენდეს კონუსის ღერძი მის მსახველთან, რომ აფეთქების პროდუქტები ერთდროულად მოხვდნენ იმ ფირფიტას, რაზეც კონუსი დევს? აფეთქების დეტონაცია იწყება კონუსის წვეროდან.



1.4 რამდენად შორს წაიღებს წყალი ნავს?

აგირეს¹ ნავი კვეთს L სიგანის მდინარეს ისე, რომ მისი სიჩქარე u მდინარის მიმართ მუდმივია და მიმართულია ყოველთვის საწყისი A წერტილის საპირისპირო B წერტილისაკენ საპირისპირო ნაპირზე. თუკი მდინარეს სიჩქარეც u არის, რამდენად შორს წაიღებს წყალი ნავს მდინარის გასწვრივ?

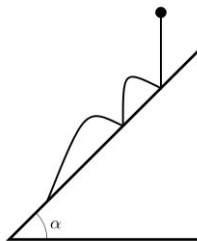


1.5 ოპტიმალური ცურვის კუთხე

მოცურავის სიჩქარე მდინარის მიმართ n -ჯერ ($n > 1$) ნაკლებია მდინარის დინების სიჩქარეზე. დინების მიმართ რა კუთხით უნდა იცუროს მოცურავემ, რომ ის მდინარის გადაკვეთის დროს მინიმალურად წაიღოს წყალმა დინების გასწვრივ?

1.6 მოხტუნავე ბურთულა დახრილ სიბრტყეზე

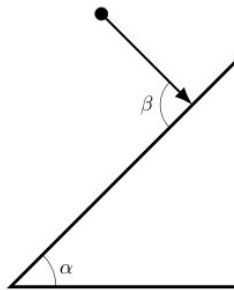
ბურთულა H სიმაღლიდან თავისუფლად ვარდება დახრილ სიბრტყეზე, რომელიც ჰორიზონტთან α კუთხეს ადგენს (იხილეთ ნახაზი). იპოვეთ იმ წერტილთა შორის მანძილთა თანაფარდობა, სადაც მოხტუნავე ბურთულა ეხება დახრილ სიბრტყეს. დახრილ სიბრტყესთან ბურთულას შეჯახებები აბსოლუტურად დრეკადია.



¹ფილმიდან აგირე, ლვითის რისხვა, რეჟისორი ვერნერ ჰერცოგი.

1.7 ფოლადის ბურთულა და დახრილი სიბრტყე

უძრავ დახრილ სიბრტყეს, დახრის α კუთხით, ეჯახება ფოლადის ბურთულა სიბრტყისადმი β კუთხით (იხილეთ ნახაზი). როგორი უნდა იყოს β კუთხე, რომ რამდენიმე ასტომის შემდეგ ბურთულა დაუბრუნდეს სიბრტყესთან პირველი შეჯახების წერტილს?



1.8 რა სიმაღლეზე მოხდა ბურთულათა შეჯახება?

H სიმაღლის მაგიდიდან ჩამოვარდნის დრეკადი ბურთულა მისდამი რაღაც ჰორიზონტალური სიჩქარის მინიჭებით. იმ მომენტში, როცა ბურთულა დაეჯახა იატაკს, მეორე ბურთულასაც აგდებენ მაგიდიდან და მას ანიჭებენ ისეთ ჰორიზონტალურ სიჩქარეს, რომ ის პირველ ბურთულას ეჯახება. რა სიმაღლეზე მოხდა ბურთულათა შეჯახება?

1.9 ბურთის საშუალო სიჩქარე

ბურთი ავარდნის ვერტიკალურად ზევით და მან მიაღწია h სიმაღლეს. შემდეგ ის ეცემა ძირს და გაჩერებამდე მრავალჯერ აირეკლება დედამიწის ზედაპირიდან. ყოველი არეკვლის შემდეგ ბურთი აღწევს იმ სიმაღლის f ნაწილს, რომელზედაც ის წინა არეკვლის დროს ადიოდა. იპოვეთ ბურთის საშუალო სიჩქარე.

1.10 სროლის მაქსიმალური მანძილი

ბურთი გადმოვარდნის V სიმაღლის კლდიდან V საწყისი სიჩქარით. ჰორიზონტისადმი რა კუთხით უნდა ისროლონ ბურთი, რომ ის კლდის ფუძისაგან მაქსიმალურად შორს დაეცეს? რას უდრის ეს მაქსიმალური მანძილი? იგულისხმეთ, რომ კლდე დგას ჰორიზონტალურ ველზე.

1.11 კუთხე საწყის და საბოლოო სიჩქარეებს შორის

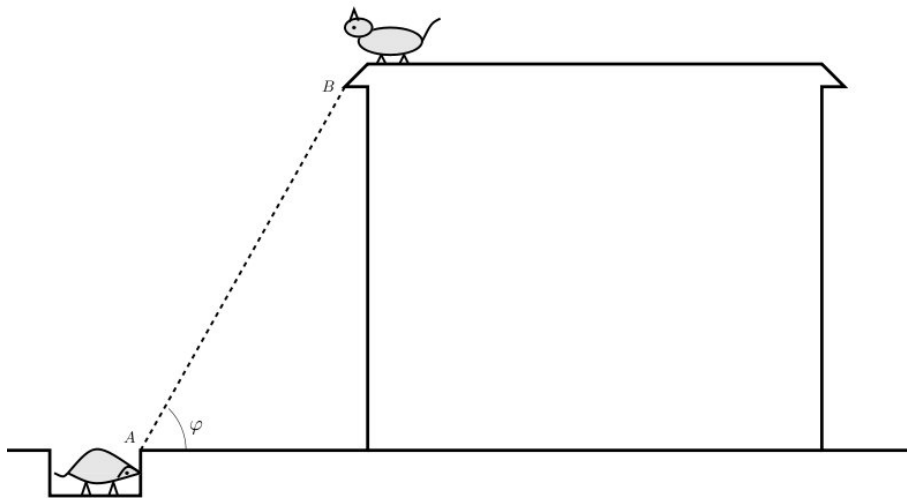
დაამტკიცეთ, რომ მაქსიმალურ მანძილს 1.10 ამოცანაში შეესაბამება სიტუაცია, როცა ბურთის საწყისი და საბოლოო სიჩქარეები ურთიერთ პერპენდიკულარული არიან.

1.12 რა სიმაღლეზე იჯდა კატა?

თაგუნამ ხეზე მჯდომ კატას შურდულით კენჭი ესროლა ისე რომ კენჭის საწყისი სიჩქარე პირდაპირ კატისკენ იყო მიმართული. ერთი წამის შემდეგ კენჭი მიწაზე დაეცა კატისადმი ვერტიკალურად ქვემო წერტილში. რა სიმაღლეზე იჯდა კატა? ჰაერის წინააღმდეგობას მხედველობაში ნუ მიიღებთ.

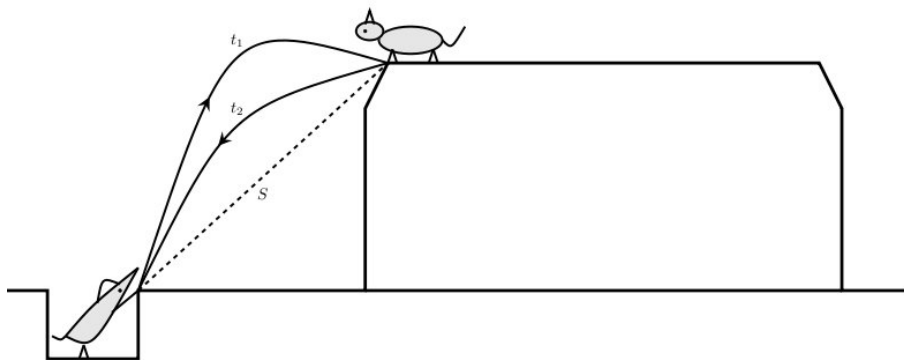
1.13 კატა და ცელქი თაგუნები

კატა ლეოპოლდი ბელელის სახურავის ნაპირზე იჯდა. ორმა ცელქმა თაგუნამ გადაწყვიტა მისთვის კენჭი ესროლა შურდულით, მაგრამ კატამ ისინი შეამჩნია და სროლაზე სროლით უპასუხა. კენჭები თაგვების და კატის შურდულებიდან ერთდროულად გამოფრინდნენ და ერთმანეთს შეეჯახნენ AB მონაკვეთის შუაგულში (იხილეთ ნახაზი). იპოვეთ ბელელის სიმაღლე H და კენჭების მიერ დაჯახებამდე გავლილი გზების თანაფარდობა, თუკი $\varphi = 30^\circ$, თაგვების შურდულიდან გამოვარდნილი კენჭის საწყისი სიჩქარეა $V_0 = 7$ მ/წმ, ხოლო კატამ ჰორიზონტალურად გაისროლა.



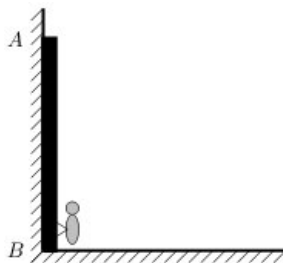
1.14 რა მანძილზე იყო კატა თავგებისაგან?

კატა ლეოპოლდი ბელელის სახურავის ნაპირზე იდგა. ორმა ცელქმა თავუნამ მას შურდულით კენჭი ესროლა. მაგრამ კენჭი $t_1 = 1.2$ წამის შემდეგ დრეკადად აირეკლა ბელელის დახრილ სახურავიდან პირდაპირ კატის თათების წინ და $t_2 = 1$ წამის შემდეგ მოხვდა თათზე თავად მსროლელ თავგს (იხილეთ ნახაზი). რა s მანძილზე იყო კატა თავგებისაგან?



1.15 რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე აღმოჩნდება ხოჭო?

ვერტიკალურ კედელთან დგას L სიგრძის ლერო (იხილეთ ნახაზი). ლეროს ქვედა B ბოლოში ზის ხოჭო. დროის იმ მომენტში, როცა დაიწყეს B ბოლოს გადაადგილება იატაკის გასწვრივ მუდმივი V სიჩქარით, ხოჭომ დაიწყო ლეროს გასწვრივ ცოცვა მის მიმართ მუდმივი u სიჩქარით. იატაკიდან რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე აღმოჩნდება ხოჭო მოძრაობისას, თუკი ლეროს ზედა A ბოლო მოძრაობისას არ სცილდება ვერტიკალურ კედელს?



1.16 ზებგერითი თვითმფრინავის სიჩქარე

ზებგერითი თვითმფრინავი ჰორიზონტალურად მიფრინავს. ორმა მიკროფონმა, რომლებიც ერთსა და იმავე ვერტიკალურ ბოძზე იყვნენ დამაგრებული ერთმანეთისაგან l მანძილზე, დააფიქსირა ბგერის მოსვლა თვითმფრინავიდან Δt დროის შუალედით. რა სიჩქარით მიფრინავდა თვითმფრინავი, თუკი ბგერის სიჩქარეა c ?

1.17 რა მიდამოდან შეძლებს მგზავრი ავტობუსის დაწევას?

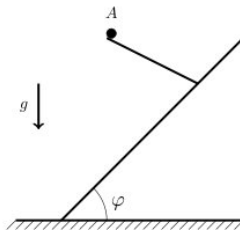
პირდაპირ გზატკეცილზე მიდის ავტობუსი მუდმივი V სიჩქარით. სიბილამ² შეამჩნია ავტობუსი, როცა ის იმყოფებოდა რაღაც A წერტილში და გაიქცა მის დასაწევად მუდმივი u სიჩქარით. გზატკეცილის მახლობელი რა მიდამოდან შეძლებს სიბილა ავტობუსის დაწევას, თუკი $u < V$?

1.18 რა დროით ჩამორჩება თქვენი საათი?

ელექტრომატარებელი გადის განრიგის მიხედვით 12^{00} საათზე და მოძრაობს თანაბრაჩქარებულად. როცა თქვენი საათი აჩვენებს 12^{00} დროს, უკანასკნელის წინა ვაგონი უკვე იწყებს თქვენს გვერდით ჩაულას და ამას ანდომებს t_1 დროს, მაშინ როცა უკანასკნელი ვაგონი თქვენს გვერდით ჩაიარს t_2 დროში. რა დროით ჩამორჩება თქვენი საათი?

1.19 გლუვი ღარის ოპტიმალური კუთხე

ვერტიკალისადმი რა კუთხით უნდა იყოს მიმართული გლუვი ღარი, რომ ბურთულამ ღარის საწყისი A წერტილიდან დახრილ სიბრტყეს მიაღწიოს მინიმალურ დროში?



²ფილმიდან ზაფხული, ანუ 27 დაკარგული კოცნა, რეჟისორი ნანა ჯორჯაძე.

1.20 რა მასის წყალი იმყოფება ჰაერში?

მიწაზე მდებარე ზღანგიდან სცემს წყლის ნაკადი $10 \text{ მ}^3/\text{წმ}$ საწყისი სიჩქარით და ჰორიზონტისადმი 45° კუთხით. ზღანგის ხვრელის განიკვეთის ფართობია 5 სმ^2 . რა მასის წყალი იმყოფება ჰაერში?

1.21 ქვის უმცირესი სიჩქარე

მიწაზე მდგარი ხვერული ფორმის რეზერვუარის რადიუსია R . როგორი უმცირესი სიჩქარით უნდა ისროლოს ნასრედინმა³ მიწიდან ქვა, რომ მან გადაუფრინოს რეზერვუარს ისე, რომ თითქმის შეეხოს მის წვეროს?

1.22 თბილისიდან ქუთაისში ფრენის ხანგრძლივობა

როგორი იქნება ფრენის ხანგრძლივობა თბილისიდან ქუთაისში და უკან თუკი ფრენის მთელი დროის განმავლობაში ქრის u სიჩქარის ქარი ფრენის ტრასისადმი α კუთხის მიმართულებით? ფრენის ტრასა ემთხვევა თბილისის და ქუთაისის შემაერთებული წრფის მონაკვეთს, რომლის სიგრძეცაა L . თვითმფრინავის სიჩქარე ჰაერის მიმართ არის V . ქარის როგორი მიმართულებისათვის იქნება ფრენის ხანგრძლივობა მაქსიმალური?

1.23 მაქსიმალური შესაძლო კუთხე

V სიჩქარით მოძრავი ბირთვი ორ ერთნაირ ნამსხვრევად იშლება. უძრავი ბირთვის დაშლისას ნამსხვრევების სიჩქარეა $u < V$. იპოვეთ მაქსიმალური შესაძლო კუთხე ერთ-ერთი ნამსხვრევის სიჩქარესა და $\vec{V}$ ვექტორს შორის.

1.24 იპოვეთ ნამსხვრევების სიჩქარე

V სიჩქარით მოძრავი ერთნაირი ბირთვების ნაკადში თითოეული ბირთვი შეიძლება სპონტანურად დაიშალოს ორ ერთნაირ ნამსხვრევად. იმ ნამსხვრევების სიჩქარე, რობლებიც ნაკადის გასწვრივ მოძრაობენ, არის $3V$. იპოვეთ იმ ნამსხვრევების სიჩქარე, რობლებიც ნაკადის პერპენდიკულარულად მოძრაობენ.

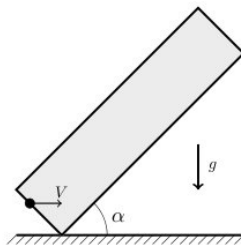
³ფილმიდან *მთვარის მამა*, რეჟისორი ბასტიერ ზუდონაზაროვი.

1.25 ოთხი ხოჭო

ოთხი ხოჭო იმყოფება კვადრატის წვეროებში. კვადრატის გვერდია a . ხოჭოები ერთდროულად იწყებენ მოძრაობას მუდმივი სიდიდის V სიჩქარით ისე, რომ ყოველი ხოჭოს სიჩქარე მიმართულია მეზობელი ხოჭოსაკენ და ისინი მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულებით. სად და რამდენი დროის შემდეგ შეხვდებიან ხოჭოები ერთმანეთს?

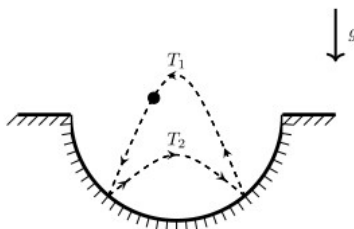
1.26 რამდენ დროს დაყოფს ბურთულა მილში?

ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ ორივე მხრიდან ღია L სიგრძის მილში შეაგდეს ბურთულა ჰორიზონტალური V სიჩქარით (იხილით ნახაზი). რამდენ დროს დაყოფს ბურთულა მილში? მილის დიამეტრი ბევრად ნაკლებია მის სიგრძეზე. ბურთულას დაჯახებები მილის კედლებთან აბსოლუტურად დრეკადია.



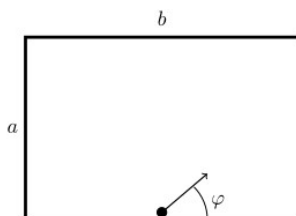
1.27 რას უდრის ჩარღმავების რადიუსი?

ნახევარსფეროს ფორმის ჩარღმავებაში დახტის პატარა ბურთულა, რომელიც ჩარღმავების ორი წერტილისაგან აბსოლუტურად დრეკადად აირეკლება (იხილით ნახაზი). ორივე წერტილი ერთ ჰორიზონტალურ ხაზზეა განლაგებული. მარჯვნიდან მარცხნივ ბურთულას ნახტომი გრძელდება T_1 დრო, ხოლო საპირისპირო მიმართულებით — $T_2 \neq T_1$ დრო. იპოვეთ ჩარღმავების რადიუსი.



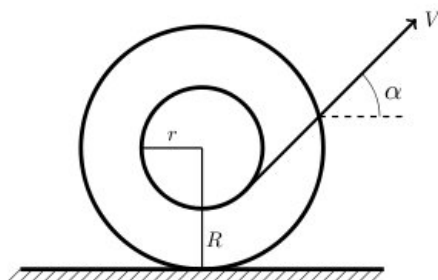
1.28 ბურთულა მართკუთხა ბილიარდში

მართკუთხედის ფორმის ბილიარდის მაგიდის გვერდებია a და b . b გვერდის შუა წერტილიდან უშვებენ ბურთულას (იხილეთ ნახაზი). მაგიდის კედლისადმი რა φ კუთხით უნდა გაუშვან ბურთულა, რომ ის დაბრუნდეს იმავე წერტილში, საიდანაც დაიწყო მოძრაობა?



1.29 ბორბალის ღერძის სიჩქარე

ბორბალის ღერძზე დახვეულ ძაფს ეწევიან მუდმივი V სიჩქარით ჰორიზონტისადმი α კუთხით (იხილეთ ნახაზი). ბორბალის რადიუსია R , ხოლო მისი ღერძის — r . იპოვეთ ბორბალის ღერძის სიჩქარე და ბორბალის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, თუკი ბორბალი მიგორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე დასრიალების გარეშე. როგორი α კუთხისათვის ბორბალის ღერძი იმოძრაებს მარჯვნივ და როგორი α კუთხისათვის მარცხნივ? ძაფი ისეთი გრძელია, რომ მოძრაობისას α კუთხე არ იცვლება.



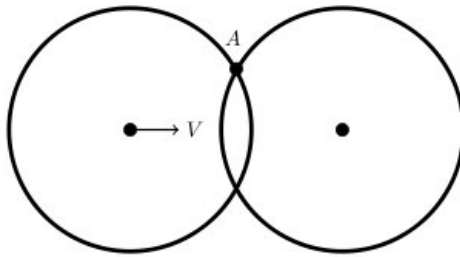
1.30 ქვის მინიმალური სიჩქარე

რა მინიმალური სიჩქარით უნდა ისროლოს პინოქიომ⁴ ქვა, რომ მან გადაუფერინოს H სიმაღლის და L სიგრძის სახლს? პინოქიო ქვას ისვრის h საწყისი სიმაღლიდან და სროლისათვის მას შეუძლია ნებისმიერი ადგილის შერჩევა.

⁴ფილმიდან პინოქიოს თავგადასავალი, რეჟისორი ლეონიდ ნეჩაევი.

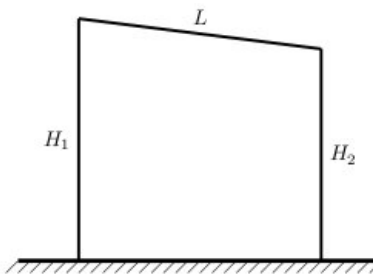
1.31 რგოლების გადაკვეთის წერტილის სიჩქარე

r რადიუსის მქონე ორი რგოლიდან ერთი უძრავია, ხოლო მეორე მოძრაობს V სიჩქარით პირველი რგოლისკენ (იხილეთ ნახაზი). იპოვეთ როგორ არის დამოკიდებული რგოლების გადაკვეთის A წერტილის სიჩქარე რგოლების ცენტრებს შორის a მანძილზე. მოძრავი რგოლის ცენტრის $\vec{V}$ სიჩქარე მიმართულია უძრავი რგოლის ცენტრისაკენ.



1.32 სახლი დახრილი სახურავით

ამოხსენით 1.30 ამოცანა იმ შემთხვევაში როცა სახლის სახურავი დახრილია (იხილეთ ნახაზი). L არის სახურავის სიგრძე.



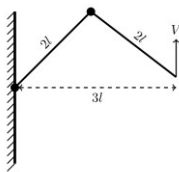
1.33 რა დროში მიაღწევს ჭიანჭველა ლენტის ბოლოს?

ჭიანჭველა მიცოცავს რეზინის ლენტაზე $V = 1$ სმ/წ სიჩქარით (ლენტის მიმართ). ლენტის ის ბოლო საიდანაც ჭიანჭველა იწყებს ცოცვას მიბმულია კედელზე, ხოლო მეორე ბოლოს ეჭაჩებიან $u = 1$ მ/წმ სიჩქარით. რა დროში მიაღწევს ჭიანჭველა ლენტის მეორე ბოლოს თუკი ლენტის საწყისი სიგრძეა $L = 1$ მ?

1.34 სახსრული ბმულით შეერთებული ორი ღერო

ორი $2l$ სიგრძის ღერო სახსრული ბმულითაა შეერთებული. ამ სტრუქტურის ერთი ბოლო კედელზეა დამაგრებული, ხოლო მეორე ბოლო მოძრაობს ვერტიკალურად V სიჩქარით კედლიდან $3l$ დაშორებით (იხილეთ ნახაზი). იპოვეთ ღეროების შემაერთებული სახსრული ბმულის აჩქარება იმ შენთხვევებში, როცა:

- კედელზე მიბმული ღერო ჰორიზონტალურია;
- სახსრული ბმულის სიჩქარე ნულს უდრის.



1.35 რა მანძილზე დაეცემა ჭურვი?

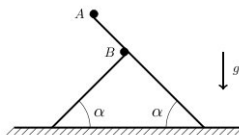
იპოვეთ რა მანძილზე დაეცემა ჰორიზონტალ სიბრტყეზე α კუთხით გასროლილი ჭურვი, თუკი h სიმაღლეზე მისი სიჩქარე θ კუთხეს ადგენდა ჰორიზონტთან.

1.36 რა დროის შემდეგ დაეცა მიწაზე მეორე ნამსხვრევი?

ჭურვი თავისი ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში h სიმაღლეზე ორ ერთნაირ ნამსხვრევად დაიშალა. ერთი ნამსხვრევი მიწაზე დაეცა t_1 დროის შემდეგ. რა დროის შემდეგ დაეცა მიწაზე მეორე ნამსხვრევი?

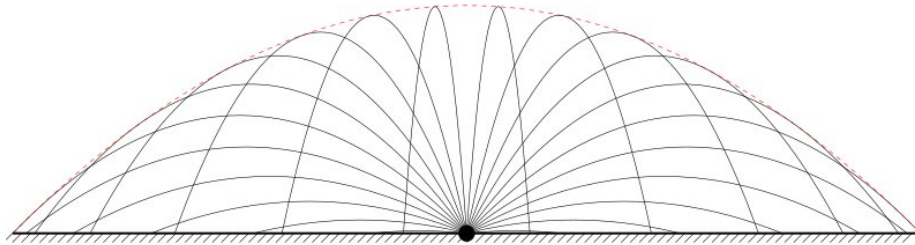
1.37 ბურთულებს შორის მანძილი

ერთსა და იმავე ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებული ორივე გლუვი ღარი ადგენს α კუთხეს ჰორიზონტთან (იხილეთ ნახაზი). A და B წერტილებიდან ერთდროულად ორი პატარა ბურთულა იწყებენ სრიალს ღარების გასწვრივ. A წერტილიდან გაშვებულმა ბურთულამ ზედაპირს მიაღწია t_1 დროში, ხოლო B წერტილიდან გაშვებულმა — t_2 დროში. დროის რა მომენტში იყო ბურთულებს შორის მანძილი ყველაზე მცირე?



1.38 ჭურვების ტრაექტორიების მხები წირი

ქვემოთ ხსენებული ჭურვების V_0 საწყისი სიჩქარით და სხვადასხვა დახრის კუთხით ვერტიკალურ სიბრტყეში. იპოვეთ იმ წირის განტოლება, რომელიც შემოსაზღვრავს ვერტიკალური სიბრტყის იმ ნაწილს, სადაც ჭურვები შეიძლება მოხვდნენ (იხილეთ ნახაზი).



1.39 ციკლოიდის სიმრუდის რადიუსი

ციკლოიდა არის წირი, რომელსაც აღწერს სრიალის გარეშე მიმგორავი ბორბალის წრეწირზე მდებარე წერტილი. იპოვეთ ამ წირის სიმრუდის რადიუსი მის უმაღლეს წერტილში.

1.40 იპოვეთ აჩქარება

ძალის მისაღებად მელას, რომელიც მუდმივი V_1 სიჩქარით გარბის. ძალის სიჩქარის სიდიდე V_2 -ს უდრის და არ იცვლება, მაგრამ $\vec{V}_2$ ვექტორი ყოველთვის მელიასკენ არის მიმართული. როცა $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ურთიერთპერპენდიკულარული იყო, ცხოველებს შორის მანძილი იყო L . რას უდრიდა ძალის აჩქარება დროის ამ მომენტში?

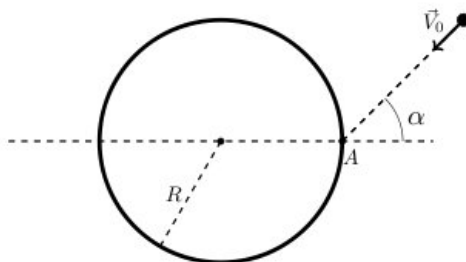
1.41 რა დროში დაიჭერს ძალის მელას?

ვთქვათ წინა ამოცანაში $V_2 > V_1$ და დევნა იწყება დროის იმ მომენტში როცა $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ურთიერთპერპენდიკულარულია და ცხოველებს შორის მანძილი არის L . რა დროში დაიჭერს ძალის მელას?

1.42 რა პირობებში ამოვა ბურთულა ჭიდან?

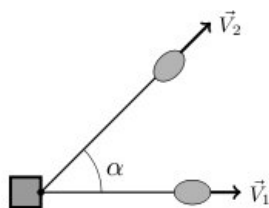
პატარა ბურთულა მოძრაობს V_0 სიჩქარით გლუვ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე და A წერტილში ვარდება ვერტიკალურ ცილინდრული ფორმის ჭაში (იხილეთ ნახაზი).

ჭის სიღრმეა H და რადიუსი R . $\vec{V}_0$ ვექტორი A წერტილში გამავალ ჭის დიამეტრთან α კუთხეს ადგენს. ჭაში ჩავარდნის შემდეგ, ბურთულა აბსოლუტურად დრეკადად აირეკლება ჭის კედლებიდან და მისი გლუვი ფსკერიდან. რა თანაფარდობა უნდა იყოს R , H , V_0 და α სიდიდეებს შორის, რომ ბურთულა კვლავ ამოვიდეს ჭიდან? ჩათვალეთ რომ ბურთულა არ ბრუნავს.



1.43 რა სიჩქარით მოძრაობს ყუთი?

მძიმე ყუთი ორ ტრაქტორზეა მიბმული (იხილეთ ნახაზი). ერთი ტრაქტორი მოძრაობს V_1 სიჩქარით, ხოლო მეორე — V_2 სიჩქარით. $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორებს შორის კუთხე არის α . რა სიჩქარით მოძრაობს ყუთი, თუკი ვიგულისხმებთ, რომ ტროსები ტრაქტორების სიჩქარეების პარალელურია?

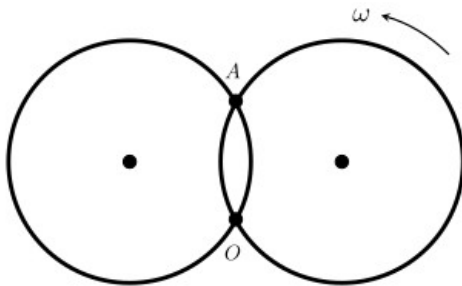


1.44 მოძრავი ველოსიპედის სურათი

თუკი მოძრავ ველოსიპედს გადავიღებთ უძრავი კამერით და საკმაოდ დიდი ექსპოზიციის დროით, ველოსიპედის სურათი ბუნდოვანი გამოვა. მაგრამ ზოგიერთი წერტილები გარკვეულ სპიცებზე შეინარჩუნებენ სიმკვეთრეს და არ გაიდღაბნებიან. იშვიათად იმ წირის ფორმა რომელზეც სპიცების ეს მკვეთრი წერტილებია განლაგებული.

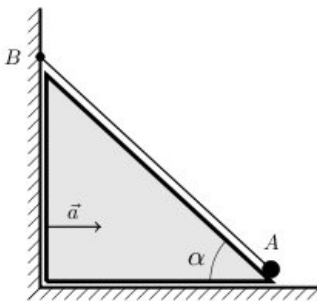
1.45 მაქსიმალური და მინიმალური სიჩქარე

ორი ერთნაირი r რადიუსის მქონე რგოლიდან ერთი უძრავია, ხოლო მეორე ბრუნავს რგოლების გადაკვეთის ერთ-ერთი O წერტილის ირგვლივ მუდმივი კუთხური ω სიჩქარით (იხილეთ ნახაზი). იპოვეთ რგოლების გადაკვეთის მეორე A წერტილის მაქსიმალური V_{max} და მინიმალური V_{min} სიჩქარეები.



1.46 რას უდრის ბურთულას აჩქარება?

A ბურთულა დევს სამკუთხე პრიზმაზე დახრის α კუთხით (იხილეთ ნახაზი). ბურთულაზე მიბმულია უჭიმვადი ძაფი, რომლის მეორე ბოლოც მიმაგრებულია ვერტიკალურ კედელზე B წერტილში. პრიზმა იწყებს მოძრაობას ჰორიზონტალურად მუდმივი a აჩქარებით. რა ტრაექტორიაზე იმოძრაებს ბურთულა და რას უდრის მისი აჩქარება?

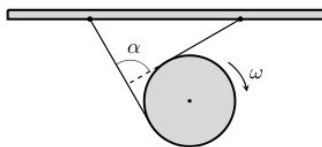


1.47 რას უდრის მინიმალური მანძილი?

ვთქვათ **1.41** ამოცანაში $V_1 = V_2 = V$. რას უდრის მინიმალური მანძილი ძალსა და მელისა შორის ასეთი დევნის დროს?

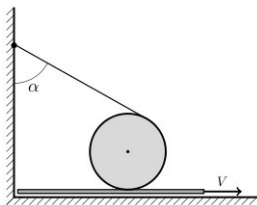
1.48 დისკის ცენტრის სიჩქარე

R რადიუსის მძიმე დისკი ეშვება ძირს და თანდათან ათავისუფლებს მასზე დახვეულ ორ ძაფს (იხილეთ ნახაზი). ძაფები მიმაგრებულია ჭერზე და დაჭიმული რჩებიან დისკის მოძრაობის დროს. რა არის დისკის ცენტრის სიჩქარე, თუკი მისი კუთხური სიჩქარეა ω და ძაფებს შორის კუთხე არის α ?



1.49 ცილინდრის ღერძის სიჩქარე

ცილინდრის გარშემო ძაფია შემოხვეული, ძაფის მეორე ბოლო კი კედელზეა მიმაგრებული (იხილეთ ნახაზი). ცილინდრი ეყრდნობა ჰორიზონტალურ ზედაპირს რომელსაც ექაჩებიან მუდმივი ჰორიზონტალური V სიჩქარით ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარულად. როგორ არის დამოკიდებული ცილინდრის ღერძის სიჩქარე იმ α კუთხეზე, რომელსაც ძაფი ადგენს ვერტიკალთან? ცილინდრი დასრიალების გარეშე მიგორავს ზედაპირზე.



1.50 მოტორიანი ნავი და კილვატერული ტალღები

ლილია⁵ მოტორიანი ნავით უახლოვდება სწორ სანაპირო ზოლს მის პერპენდიკულარულად და მისგან L მანძილზე იწყებს უკან დაბრუნებას R რადიუსის ნახევრად წრის შემოხაზვით, რის შემდეგაც ის მიემგზავრება უკან კვლავ სანაპირო ზოლის პერპენდიკულარულად. ნავის სიჩქარე მუდმივია და უდრის V -ს. წყლის ტალღების სიჩქარე $u < V$ ასევე მუდმივად შეიძლება ჩაითვალოს. რამდენი დრო დასჭირდება ნავის მიერ გამოწვეულ კილვატერულ ტალღებს სანაპირომდე მისასვლელად? დრო იზომება იმ მომენტიდან, როცა ნავი იწყებს შემობრუნებას.

⁵ფილმიდან ლილია სამუდამოდ, რეჟისორი ლუკას მედისონი.

1.51 თვითმფრინავის მბრუნავი პროპელერის ფოტო

თვითმფრინავის მბრუნავი პროპელერის ეს ფოტო გადაღებულია ტელეფონის კამერით. ასეთი კამერისათვის დამახასიათებელია გამოსახულების სტრიქონ-სტრიქონული სკანირება: თავდაპირველად იკითხება გამოსახულების პიქსელების ყველაზე მარცხენა პირველი სვეტი, შემდეგ პიქსელების მეორე სვეტი და ასე შემდეგ. ფოტოგრაფიის თვალსაზრისით, რომელი მიმართულებით ბრუნავს პროპელერი, საათის ისრის მიმართულებით, თუ მის საწინააღმდეგოთ? რამდენი ნიჩბის ფრთა (ლაპოტი) აქვს პროპელერს? რამდენ ბრუნვას აკეთებს პროპელერი ერთ წუთში, თუ ამ სურათის სკანირების სრული დრო იყო $1/8$ წამი?



1.52 კაცი წვიმაში

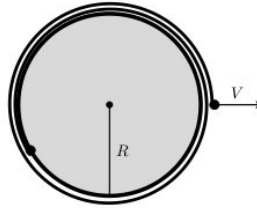
უქარო წვიმიან დღეს ფეხზე მდგომი მარჩელო⁶ სველდება 2 წუთში. თუ ის გარბის 18 კმ/სთ სიჩქარით, დრო მცირდება ნახევარ წუთამდე. რამდენი დრო დასჭირდება მის დასველებას 6 კმ/სთ სიჩქარით სიარულისას? იგულისხმეთ, რომ მამაკაცის სხეულის ფორმა შეიძლება იყოს მიახლოებული ა) ვერტიკალური მართკუთხა პრიზმით; ბ) სფეროთი. აქ დასველებაში იგულისხმება გარკვეული რაოდენობის წყლის მიღება.

1.53 რა დროის შემდეგ კვლავ შემოეხვევა სიმი ცილინდრს?

უმასო სიმის ერთი ბოლო დამაგრებულია უძრავი ვერტიკალური ცილინდრის ზედაპირზე. სიმი k -ჯერ არის შემოხვეული ცილინდრზე. სიმის თავისუფალ ბოლოზე

⁶ფილმიდან ტკბილი ცხოვრება, რეჟისორი ფედერიკო ფელინი.

მიმაგრებულია ბურთულა, რომელსაც ანიჭებენ ჰორიზონტალურ V სიჩქარეს ცილინდრის რადიუსის გასწვრივ (იხილეთ ნახაზი). რა დროის შემდეგ კვლავ შემოეხვევა სრულად სიმი ცილინდრს, ოდონდ საპირისპირო მიმართულებით? ცილინდრის რადიუსია R , სიმის რადიუსი ბევრად მცირეა ცილინდრის რადიუსთან შედარებით.

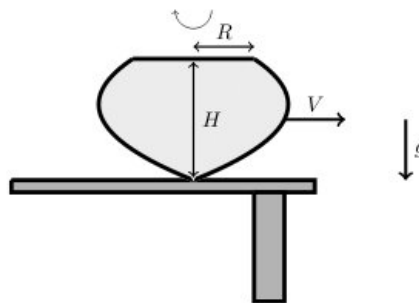


1.54 ბიკფორდის ზონარის ფორმა

დეტონაცია ბიკფორდის ზონარის გასწვრივ ვრცელდება V სიჩქარით. დარტყმითი ტალღა ჰაერში ვრცელდება $c < V$ სიჩქარით. რა მრუდის გასწვრივ უნდა განვაღვათ ბიკფორდის ზონარი, რომ დარტყმითმა ტალღამ ერთდროულად მიაღწიოს მოცემულ წერტილს ზონარის ნებისმიერი წერტილიდან?

1.55 ბზრიალას ვარდნა მაგიდიდან

H სიმაღლის ბზრიალა გამომძიებელ ბენჰამინ ესპოსიტოს⁷ მაგიდაზე მოძრაობს V სიჩქარით კიდისაკენ და ვარდება. როგორი უნდა იყოს V , რომ ვარდნისას ბზრიალა მაგიდის კიდე არ დაეჯახოს? ბზრიალას ზედაპირი ცილინდრულ კოორდინატებში აღიწერება განტოლებით $\rho = \frac{Rz}{H} (5 - 4 \frac{z}{H})$ (იხილეთ ნახაზი).



⁷ფილმიდან [საიდუმლო მათ თვალეში](#), რეჟისორი ხუან ხოსე კამპანელია.

1.56 ვენერას დაკვირვების მაქსიმალური დრო მზის ჩასვლის შემდეგ შეაფასეთ ვენერას დაკვირვების მაქსიმალური დრო მზის ჩასვლის შემდეგ. ვენერას ორბიტალური რადიუსი არის 0.72 ა.ე.

1.57 ჩრდილის ბოლოს ტრაექტორია

როგორი იქნება ვერტიკალური ჯოხის ჩრდილის ბოლოს ტრაექტორია მზიან დღეს თბილისში 22 ივნისს? თბილისი იმყოფება ჩრდილოეთის 41.7° განედზე. იპოვეთ ტრაექტორიაზე ჩრდილის ბოლოს მდებარეობის დამოკიდებულება დროზე. რას უდრის დღის ხანგრძლივობა 22 ივნისს? რა მოხდება სხვა განედებზე?

1.58 ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარე

თვითმფრინავმა შემოუფრინა სამკუთხედის A , B და C გვერდებს შესაბამისად t_1 , t_2 და t_3 დროების განმავლობაში. ქარის სიჩქარის ვექტორი სამკუთხედის სიბრტყის პარალელურია. იპოვეთ ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარეები.

1.59 იოს დაკვირვებადი ორბიტალური პერიოდი

როგორი იქნება დედამიწაზე მყოფი დამკვირვებელისათვის იუპიტერის თანამგზავრი იოს ორბიტალური პერიოდი? როგორ იცვლება ეს ხილული პერიოდი წლის განმავლობაში? იოს რეალური ორბიტალური პერიოდი 42 საათია.

1.60 მოჩვენებითი სუპერლუმინალური მოძრაობა

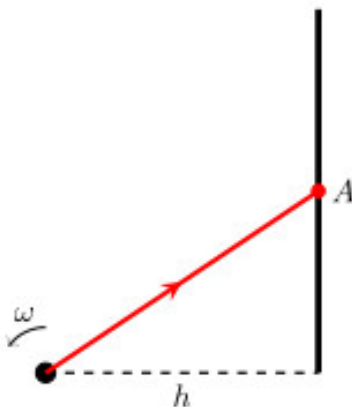
დედამიწიდან დაკვირვების ხუთი წლის განმავლობაში, მანათობელი ობიექტი, რომელიც მდებარეობს დედამიწიდან 10^5 სინათლის წლის მანძილზე, გადაადგილდა ცის გუმბათზე 10^{-4} რადიანით, რაც ნიშნავს, რომ მისი ხილული სიჩქარე სინათლის სიჩქარეზე ორჯერ მეტია. დაკვირვების საზისადმი რა კუთხით უნდა მოძრაობდეს ობიექტი, რომ მისი რეალური სიჩქარე სინათლის სიჩქარეზე ნაკლები იყოს? რას უდრის ობიექტის მინიმალური შესაძლო სიჩქარე?

1.61 ჩრდილის გაქრობა

სინათლის წყარო მოძრაობს ჰორიზონტალურად H სიმაღლეზე V სიჩქარით და უახლოვდება $h < H$ სიმაღლის კედელს. კედლიდან რა მანძილზე დაიწყებს ჩრდილი გაქრობას, თუკი $V/c > 1 - h/H$ (c არის სინათლის სიჩქარე)?

1.62 სინათლის ათინათის სიჩქარე

ლაზერული მაჩვენებელი ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით და ანათებს მისგან h მანძილზე მყოფ ვერტიკალურ კედელს. სინათლის ათინათი კედელზე მოძრაობს ჰორიზონტალური ხაზის გასწვრივ. იპოვეთ მისი სიჩქარე ნებისმიერ A წერტილში (იხილეთ ნახაზი. ხედი ზემოდან).



1.63 წყლის მოთხილამურეს სიჩქარე

შეუძლია თუ არა წყლის მოთხილამურეს იმოძრაოს იმ კატერზე უფრო სწრაფად, რომელზეც ის არის მიბმული?

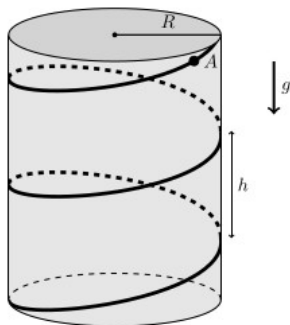
1.64 განსხვავება დასავლეთ და აღმოსავლეთ მიმართულებებს შორის

ლოლას⁸ ორი საყვარელი ყავს. ორივე მეტროს ხაზთან ცხოვრობს, ოღონდ ერთი ლოლას მეტროდან აღმოსავლეთით, ხოლო მეორე დასავლეთით. ლოლა, როცა თავისუფალი დრო აქვს, მიდის მეტროში და ჯდება პირველივე მატარებელში, რომელიც მოვა, განურჩევლად მიმართულებისა. დროის შუალედი მომდევნო მატარებლებს შორის ერთი და იგივეა როგორც აღმოსავლეთ, ასევე დასავლეთ მიმართულებით. მიუხედავად ამისა ლოლა დასავლეთ მიმართულებით სამჯერ უფრო ხშირად მიდის, ვიდრე აღმოსავლეთ მიმართულებით. რატომ ხდება ასე?

⁸ფილმიდან ლოლა, რეჟისორი რაინერ ვერნერ ფასბინდერი.

1.65 მოძრაობა სპირალური გლუვი ღარის გასწვრივ

იპოვეთ A სხეულის აჩქარება, რომელიც ეშვება საწყისი სიჩქარეს გარეშე სპირალური გლუვი ღარის გასწვრივ, n სრული შემობრუნების ბოლოს. სპირალის რადიუსია R , ხოლო ბიჯი — h (იხილეთ ნახაზი).

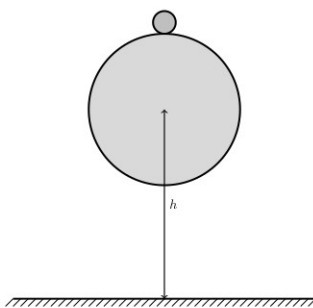


1.66 სპორცმენების კოლონის სიგრძე

სპორცმენები L სიგრძის კოლონაში V სიჩქარით მირბიან. მწვრთნელი მათთან შესახვედრად გარბის $u < V$ სიჩქარით. თითოეული სპორცმენი მწვრთნელთან შეხვედრისას შემობრუნდება და იწყებს სირბილს საპირისპირო მიმართულებით სიდიდით იგივე V სიჩქარით. როგორი იქნება კოლონის სიგრძე, როცა ყველა სპორცმენი შემობრუნდება?

1.67 რა სიმაღლეზე ახტება პინგ-პონგის ბურთი?

ტენისის ბურთი დევს კალათბურთის ბურთის თავზე. კალათბურთის ბურთი ეცემა საწყისი სიჩქარის გარეშე $h = 1.5$ მ სიმაღლიდან. რა სიმაღლეზე ახტება პინგ-პონგის ბურთი?



1.68 ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი

იპოვეთ წერტილის ტრაექტორიის სიმრუდის R რადიუსი, თუკი ცნობილია მისი სიჩქარე $\vec{V}$ და აჩქარება $\vec{a}$.

1.69 გემის ტრაექტორიის განტოლება

გემი მოძრაობს ისე, რომ მისი სიჩქარე მერიდიანთან მუდმივ α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მისი ტრაექტორიის განტოლება, თუკი საწყის მომენტში გემის სფერული კოორდინატებია θ_0 და φ_0 .

1.70 მიახლოების მინიმალური მანძილი

ნაწილაკი α კუთხის წვეროდან l მანძილზე ეჯახება კუთხის ერთ-ერთ გვერდს φ_0 კუთხით და დრეკადად აირეკლება კუთხის გვერდებიდან (იხილეთ ნახაზი).



რა მინიმალურ მანძილზე მიუახლოვდება ნაწილაკი კუთხის წვეროს?

2 ამოხსნები

1.1 რა დროს გათენდა?

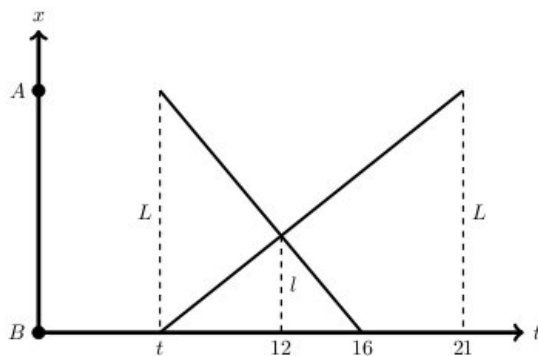
ვთქვათ მგზავრები გამოვიდნენ t -საათზე (როცა გათენდა). პირველი მგზავრის სიჩქარე იყოს V_1 , ხოლო მეორესი — V_2 . შუადღემდე მგზავრები მოძრაობენ $12 - t$ საათის განმავლობაში. ამიტომ პირველი მგზავრი გაივლიდა $(12 - t)V_1$ გზას, ხოლო მეორე — $(12 - t)V_2$ გზას. პირობის მიხედვით, პირველი მგზავრის მიერ გავლილი $(12 - t)V_1$ გზა მეორე მგზავრმა დაფარა $21 - 12 = 9$ საათში, ხოლო მეორე მგზავრის მიერ გავლილი $(12 - t)V_2$ გზა პირველმა მგზავრმა დაფარა $16 - 12 = 4$ საათში. ამიტომ ვწერთ

$$(12 - t)V_1 = 9V_2,$$

$$(12 - t)V_2 = 4V_1.$$

თუკი გადავამრავლებთ ამ განტოლებებს ერთმანეთზე და შევკვეცავთ V_1V_2 -ზე, მივიღებთ $(12 - t)^2 = 36$. ამიტომ $12 - t = \pm 6$ და $t = 6$, ან $t = 18$. მეორე ამონახსნი არ გამოდგება, რადგან ამოცანის პირობიდან ცხადია, რომ $t < 12$. ამრიგად იმ დღეს გათენდა $t = 6$ საათზე.

მეორე ამოხსნა. დავხაზოთ მგზავრების კოორდინატების გრაფიკები.



ვთქვათ L არის A და B პუნქტებს შორის მანძილი, ხოლო l — შეხვედრის წერტილის დაშორება B პუნქტიდან. ნახაზიდან (მსგავსი სამკუთხედებიდან) ცხადია, რომ

$$\frac{l}{L} = \frac{12 - t}{21 - t} \quad \text{და} \quad \frac{l}{L} = \frac{16 - 12}{16 - t} = \frac{4}{16 - t}.$$

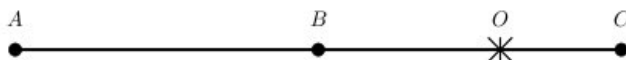
ამრიგად

$$\frac{12 - t}{21 - t} = \frac{4}{16 - t}$$

და $4(21-t) = (12-t)(16-t)$. ეს გვაძლევს კვადრატულ განტოლებას $t^2 - 24t + 108 = 0$, რომლის ფესვებიცაა $t_1 = 6$ და $t_2 = 18$. როგორც უკვე იყო აღნიშნული, მხოლოდ პირველი ფესვი გამოდგება, რადგან ამოცანის პირობის თანახმად $t < 12$.

1.2 სამი მიკროფონი

ვთქვათ აფეთქება მოხდა t_0 დროს, ხოლო $AO = x$ (იხილეთ ნახაზი).



მაშინ

$$t_A - t_0 = \frac{x}{c}, \quad t_B - t_0 = \frac{BO}{c} = \frac{x-L}{c}, \quad t_C - t_0 = \frac{OC}{c} = \frac{2L-x}{c}.$$

სადაც c — ბგერის სიჩქარეა. რადგან

$$t_A - t_B = (t_A - t_0) - (t_B - t_0) = \frac{x}{c} - \frac{x-L}{c} = \frac{L}{c},$$

ბგერის სიჩქარისათვის მივიღებთ $c = L/(t_A - t_B)$. მეორე მხრივ

$$t_B - t_C = (t_B - t_0) - (t_C - t_0) = 2\frac{x}{c} - 3\frac{L}{c} = 2\frac{x}{c} - 3(t_A - t_B).$$

აქედან $\frac{2x}{c} = 3t_A - 2t_B - t_C$ და

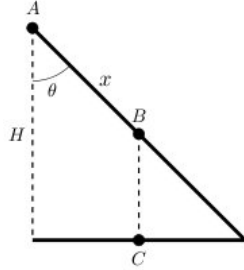
$$x = \frac{c}{2}(3t_A - 2t_B - t_C) = \frac{L}{2(t_A - t_B)}(3t_A - 2t_B - t_C).$$

აფეთქების დრო

$$t_0 = t_A + \frac{x}{c} = t_A - \frac{1}{2}(3t_A - 2t_B - t_C) = t_B - \frac{1}{2}(t_A - t_C).$$

1.3 კონუსური ჭურვი

ვთქვათ $x = AB$. B წერტილში აფეთქება მოხდება A წერტილში დეტონაციის დაწყებიდან $\frac{x}{v}$ დროის შემდეგ. ცხადია, რომ კონუსის ფუძეს პირველი მიაღწევს B წერტილში აფეთქების ის ფრაგმენტი, რომელიც ვერტიკალურად ძირს მიფრინავს C წერტილისაკენ (იხილეთ ნახაზი) და ის C წერტილს მიაღწევს $\frac{BC}{u}$ დროის შემდეგ.



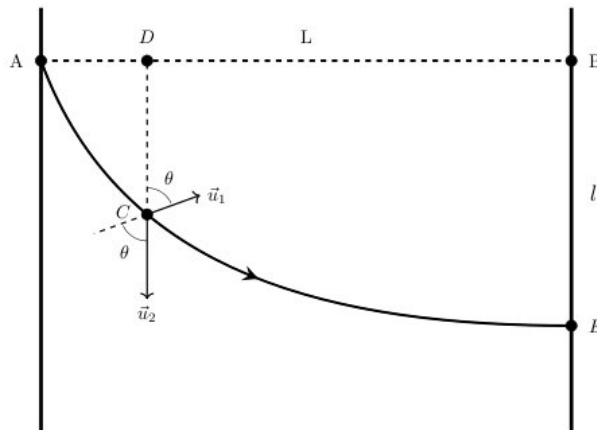
მაგრამ $BC = H - x \cos \theta$, სადაც H კონუსის სიმაღლეა. რომ აფეთქების ფრაგმენტები ერთდროულად მოხვდნენ ფუძეს, საჭიროა რომ

$$\frac{x}{V} + \frac{BC}{u} = \frac{H}{u} + \left(\frac{1}{v} - \frac{\cos \theta}{u} \right) x$$

არ იყოს დამიკიდებული B წერტილის ადგილმდებარეობაზე (ესე იგი x -ზე). ეს შესაძლებელია მხოლოდ თუკი $\cos \theta = \frac{u}{v}$. ამ შემთხვევაში ფუძეს ერთდროულად მოხვდება აფეთქების ფრაგმენტების მაქსიმალური რიცხვი აფეთქების დაწყებიდან $\frac{H}{u}$ დროის შემდეგ.

1.4 რამდენად შორს წაიღებს წყალი ნავს?

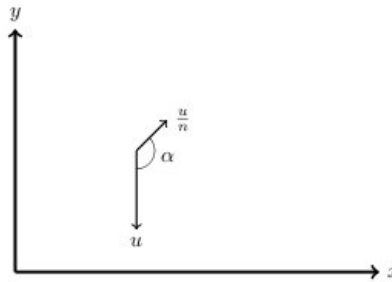
ნავის ტრაექტორიის ნებისმიერ C წერტილში ნავის სიჩქარე $\vec{V}$ ნაპირის მიმართ არის $\vec{V} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, სადაც $\vec{u}_1$ არის ნავის სიჩქარე მდინარის მიმართ, ხოლო $\vec{u}_2$ — მდინარის დინების სიჩქარე. ამოცანის პირობის მიხედვით $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = u$. შევნიშნოთ, რომ $\vec{V}$ -ს პროექცია CB მიმართულებაზე არის $u - u \cos \theta$ (იხილეთ ნახაზი).



ესე იგი C წერტილში ნავის დაშორება B წერტილისაგან (CB) მცირდება $u - u \cos \theta$ სიჩქარით. მეორე მხრივ $\vec{V}$ -ს პროექცია CD მიმართულებაზე არის $u \cos \theta - u$. ესე იგი C წერტილში ნავის დაშორება AB წრფისაგან (CD) იზრდება $u - u \cos \theta$ სიჩქარით. როგორც ვხედავთ $h + CB$ მანძილის ცვლილების სიჩქარე ნულის ტოლია, სადაც h არის ნავის დაშორება AB წრფისაგან (C წერტილში $h = CD$). ამრიგად $h + l_B$ არ იცვლება ნავის გადაადგილების დროს, სადაც l_B არის ნავის დაშორება B წერტილისაგან (C წერტილში $l_B = CB$). დასაწყისში $h = 0$ და $l_B = L$. საბოლოოდ, როცა ნავი საპირისპირო ნაპირის ახლოს აღმოჩნდება (E წერტილში), $h = l_B = EB = l$, სადაც l გვიჩვენებს რამდენად შორს წაიღო ნავი მდინარე დინების გასწვრივ. ამრიგად $L = 2l$ და $l = \frac{L}{2}$.

1.5 ოპტიმალური კუთხის კუთხე

ვთქვათ მოცურავე მიცურავს დინების მიმართ α კუთხით (იხილეთ ნახაზი).



მაშინ მისი სიჩქარის კომპონენტები ნაპირის მიმართ იქნებიან $V_x = \frac{u}{n} \sin(\pi - \alpha) = \frac{u}{n} \sin \alpha$ და $V_y = -u + \frac{u}{n} \cos(\pi - \alpha) = -u - \frac{u}{n} \cos \alpha$, სადაც u დინების სიჩქარეა. თუ მდინარის სიგანეა L , მოცურავე მას გადაკვეთავს $t = \frac{L}{V_x} = \frac{Ln}{u \sin \alpha}$ დროში და მდინარე მას წაიღებს

$$l(\alpha) = (-V_y)t = L \frac{n + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

მანძილზე ქვემოთ. მინიმალურ მანძილს შეესაბამება

$$\frac{dl(\alpha)}{d\alpha} = L \frac{-\sin^2 \alpha + \cos \alpha (n + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = -L \frac{1 + n \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

ესე იგი ოპტიმალური კუთხისათვის $\cos \alpha = -\frac{1}{n}$ და

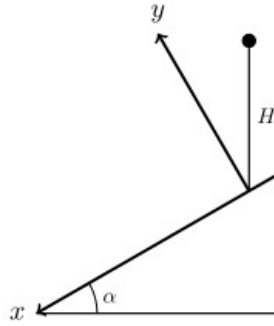
$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{n}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{n}.$$

ასეთი კუთხისათვის,

$$l_{min} = L \frac{n - 1/n}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \sqrt{n^2 - 1} L.$$

1.6 მოსტუნავე ბურთულა დახრილ სიბრტყეზე

მივმართოთ x და y ღერძები ისე როგორც ნახაზზეა (ესე იგი x ღერძი დახრილი სიბრტყის გასწვრივ, ხოლო y ღერძი სიბრტყის პერპენდიკულარულად).



სიბრტყესთან აბსოლუტურად დრეკადი შეჯახების დროს ბურთულას სიჩქარის x კომპონენტი არ იცვლება, ხოლო y კომპონენტი იცვლის ნიშანს. $\vec{g}$ აჩქარების კომპონენტებია $g_x = g \sin \alpha$ და $g_y = -g \cos \alpha$, ხოლო ბურთულას სიჩქარის საწყისი კომპონენტები სიბრტყესთან დრეკადი შეჯახების შემდეგ არიან $V_x = V \sin \alpha$, $V_y = V \cos \alpha$, სადაც $V = \sqrt{2gH}$ არის ის სიჩქარე, რაც ბურთულამ შეიძინა H სიმაღლიდან ვარდნის დროს. რადგან სიბრტყის გასწვრივ ბურთულას სიჩქარის კომპონენტი არ იცვლება შეჯახების დროს, x ღერძის გასწვრივ მოძრაობა იქნება თანაბარაჩქარებული $g_x = g \sin \alpha$ აჩქარებით და $V_x = V \sin \alpha$ საწყისი სიჩქარით. ამიტომ

$$x = V \sin \alpha t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

y ღერძის გასწვრივ მოძრაობა ბურთულას ახტომის შემდეგ თანაბარშენელებულია $g_y = -g \cos \alpha$ აჩქარებით და $V_y = V \cos \alpha$ საწყისი სიჩქარით. ამიტომ

$$y = V \cos \alpha t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2.$$

როცა ბურთულა კვლავ დაეცემა სიბრტყეზე, მაშინ $y = 0$, რაც გვაძლევს $t_1 = \frac{2V}{g}$. ამ დროს ბურთულას სიჩქარის y კომპონენტი იქნება $V_y(t_1) = V \cos \alpha - g \cos \alpha t_1 =$

$-V \cos \alpha$ და არეკვლის შემდეგ ის გახდება $V \cos \alpha$, ე.ი. ისეთივე, როგორც პირველი შეჯახების შემდეგ. ამრიგად y მიმართულებით ბურთულას მოძრაობა ყოველი შეჯახების შემდეგ ისეთივე იქნება, როგორც პირველი შეჯახების შემდეგ. ეს ნიშნავს, რომ n შეჯახება მოხდება $t_n = nt_1 = \frac{2nV}{g}$ დროის მომენტში და ამ დროს ბურთულას x კოორდინატა იქნება

$$x_n = V \sin \alpha t_n + \frac{1}{2} g \sin \alpha t_n^2 = \frac{2V^2 \sin \alpha}{g} n(n+1).$$

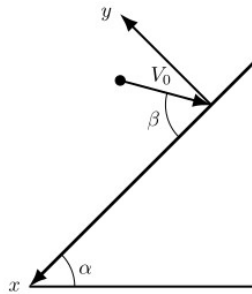
სიბრტყის გასწვრივ მომდევნო დაჯახებებს შორის მანძილია

$$s_n = x_n - x_{n-1} = \frac{2V^2 \sin \alpha}{g} [n(n+1) - (n-1)n] = \frac{4V^2 \sin \alpha}{g} n.$$

მაშასადამე $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : \dots = 1 : 2 : 3 : 4 : \dots$.

1.7 ფოლადის ბურთულა და დახრილი სიბრტყე

მივმართოთ x და y ღერძები ისე როგორც ნახაზზე (ესე იგი x ღერძი დახრილი სიბრტყის გასწვრივ, ხოლო y ღერძი სიბრტყის პერპენდიკულარულად).



რადგან დრეკადი შეჯახების დროს ბურთულას სიჩქარის კომპონენტა სიბრტყის გასწვრივ არ იცვლება, x -მიმართულებით ბურთულას კოორდინატი შეიცვლება ისე, როგორც თანაბარჩქარებული მოძრაობისას $g \sin \alpha$ აჩქარებით ($\vec{g}$ -ს პროექცია სიბრტყის გასწვრივ) და $-V_0 \cos \beta$ საწყისი სიჩქარით ($\vec{V}_0$ -ის პროექცია სიბრტყის გასწვრივ). ამრიგად

$$x = -V_0 \cos \beta t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

x -კოორდინატა ნულის ტოლი გახდება $T = \frac{2V_0 \cos \beta}{g \sin \alpha}$ დროის შემდეგ. ბურთულა დაბრუნდება საწყის წერტილში, თუკი ამ მომენტში y -კოორდინატაც ნულის ტოლი

გახდება. პირველი არეკვლის შემდეგ ბურთულას სიჩქარის y -კომპონენტაა $V_0 \sin \beta$ და ის ამ მიმართულებით მოძრაობს თანაბარმენელებულად $-g \cos \alpha$ აჩქარებით ($\vec{g}$ -ს პროექცია y ღერძზე). ამიტომ

$$y = V_0 \sin \beta t - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2$$

და y -კოორდინატა ნულის ტოლი გახდება $\tau = \frac{2V_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}$ დროის შემდეგ. ამ დროს მისი სიჩქარის y -კომპონენტა იქნება $V_0 \sin \beta - g \cos \alpha \tau = -V_0 \sin \beta$ და მორიგი არეკვლის შემდეგ ის კვლავ $V_0 \sin \beta$ გახდება. ამრიგად y -მიმართულებით ყოველთვის ერთი და იგივე ციკლი მეორდება და y -კოორდინატა ნულის ტოლი ხდება დროის $\tau, 2\tau, 3\tau \dots$ მომენტებში. ბურთულა დაბრუნდება საწყის წერტილში, თუკი $T = n\tau$, სადაც n რაღაც მთელი რიცხვია. ამრიგად

$$\frac{2V_0 \cos \beta}{g \sin \alpha} = n \frac{2V_0 \sin \beta}{g \cos \alpha},$$

რაც გვაძლევს $\tan \beta = \frac{1}{n} \cot \alpha$ პირობას.

1.8 რა სიმაღლეზე მოხდა ბურთულათა შეჯახება?

რადგან ორივე ბურთულა ერთი და იგივე აჩქარებით მოძრაობს (გარდა იმ მომენტებისა, როცა ბურთულები ეჯახებიან იატაკს), თუკი გადავალთ მეორე ბურთულას სისტემაში, უშუალოდ ამ ბურთულას ჩამოგდების შემდეგ, პირველი ბურთულა მას უახლოვდება ვერტიკალური მიმართულებით $V = \sqrt{2gH}$ მუდმივი სიჩქარით (რადგან ამ სისტემაში პირველი ბურთულას აჩქარება ნულის ტოლია, ხოლო პირველი ბურთულას სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტი, რომელსაც ის შეიძენს H სიმაღლიდან ჩამოვარდნისას, არის $\sqrt{2gH}$). ამრიგად ბურთულების შეჯახება მოხდება $t = \frac{H}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{H}{2g}}$ დროის შემდეგ. ამ დროს მეორე ბურთულა იქნება

$$h = H - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}g \frac{H}{2g} = \frac{3}{4}H$$

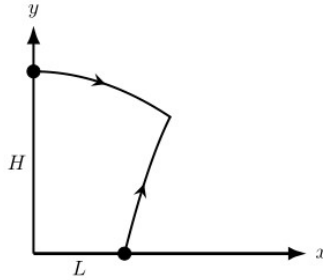
სიმაღლეზე.

მეორე ამოხსნა. H სიმაღლიდან პირველი ბურთულა ჩამოვარდება $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ დროის შემდეგ. თუკი მისი ჰორიზონტალური სიჩქარეა V_1 , მაშინ ამ დროის განმავლობაში ის ჰორიზონტალურად გადაადგილდება $L = V_1 T$ მანძილზე. ვთქვათ V_2 არის მეორე ბურთულას ჰორიზონტალური სიჩქარე, ხოლო t დრო აითვლება

პირველი ბურთულას იატაკიდან ახტომის შემდეგ. მაშინ ბურთულების მოძრაობის განტოლებები იქნება

$$x_1 = L + V_1 t, \quad x_2 = V_2 t, \quad y_1 = \sqrt{2gH} t - \frac{1}{2}gt^2, \quad y_2 = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

როცა ბურთულები ეჯახებიან ერთმანეთს, $x_1 = x_2$ და $y_1 = y_2$ (იხილეთ ნახაზი).



$y_1 = y_2$ განტოლება გვაძლევს $\sqrt{2gH} t = H$ და მაშასადამე დაჯახება მოხდება პირველი ბურთულას იატაკიდან ახტომიდან $\tau = \sqrt{\frac{H}{2g}}$ დროის შემდეგ. ეს საკმარისია რომ ვიპოვოთ მეორე ბურთულას y -კოორდინატი დაჯახების მომენტში:

$$h = y_2(\tau) = H - \frac{1}{2}g\tau^2 = H - \frac{1}{2}g \frac{H}{2g} = \frac{3}{4}H.$$

$x_1 = x_2$, ანუ $L + V_1\tau = V_2\tau$ პირობა განსაზღვრავს თუ რა ჰორიზონტალური სიჩქარით უნდა ჩამოვაგდოთ მეორე ბურთულა, რომ დაჯახება მოხდეს:

$$V_2 = V_1 + \frac{L}{\tau} = V_1 \left(1 + \frac{T}{\tau}\right) = 3V_1.$$

1.9 ბურთის საშუალო სიჩქარე

აგდებიდან დაცემამდე ბურთი გადის $2h$ გზას, შემდგომი ციკლისას $2hf$ გზას და ასე შემდეგ. ამიტომ ბურთის მიერ სრული გავლილი გზა არის

$$s = 2h(1 + f + f^2 + \dots) = \frac{2h}{1 - f},$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა. ბურთის აგდებიდან დაცემამდე განვლილი დრო τ აკმაყოფილებს განტოლებას $h =$

$\frac{1}{2}g\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 = \frac{g\tau^2}{8}$, რადგან $\frac{\tau}{2}$ დროში ბურთი h სიმაღლიდან ნულოვანი საწყისი სიჩქარით ვარდება მიწაზე (ე.ი. $\frac{\tau}{2}$ დროში გადის h მანძილს მუდმივი g აჩქარებით). ამრიგად, $\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$. ცხადია, რომ ბურთის ასვლა ჩამოსვლის შემდეგ ციკლს დასჭირდება $2\sqrt{\frac{2hf}{g}}$ დრო, მომდევნოს $-2\sqrt{\frac{2hf^2}{g}}$ დრო და ასე შემდეგ. ამრიგად ბურთის მოძრაობის სრული დრო იქნება

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \sqrt{f} + \sqrt{f^2} + \dots\right) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{1 - \sqrt{f}}.$$

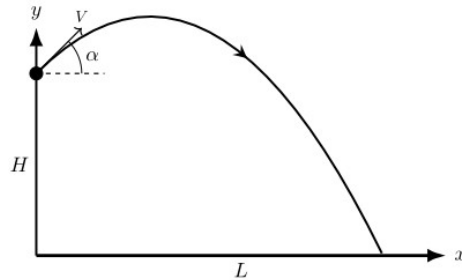
ამიტომ ბურთის საშუალო სიჩქარე არის

$$V = \frac{s}{t} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \frac{1 - \sqrt{f}}{1 - f} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \frac{1}{1 + \sqrt{f}},$$

რადგან $1 - f = (1 - \sqrt{f})(1 + \sqrt{f})$.

1.10 სროლის მაქსიმალური მანძილი

მივმართოთ x და y ღერძები ისე, როგორც ნახაზზეა.



x -მიმართულებით სიჩქარის პროექცია არ იცვლება, ხოლო y -მიმართულებით გვაქვს თანაბარშენელებული (თავდაპირველად) მოძრაობა $V \sin \alpha$ საწყისი სიჩქარით და $-g$ აჩქარებით. ამიტომ $x = V \cos \alpha t$ და $y = h + V \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$. თუკი პირველი განტოლებიდან გამოვსახავთ დროს $t = \frac{x}{V \cos \alpha}$ და ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას:

$$y = h + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V^2} (1 + \tan^2 \alpha),$$

სადაც გამოვიყენეთ $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ თანადობა. როცა ბურთი ეცემა მიწაზე, $y = 0$ და $x = L$, სადაც L არის საძიებელი მანძილი. როგორც ვხედავთ L აკმაყოფილებს განტოლებას

$$h + L \tan \alpha - \frac{gL^2}{2V^2} (1 + \tan^2 \alpha) = 0. \quad (1.10.1)$$

ამ განტოლების ამოხსნა $L(\alpha)$ განსაზღვრავს L -ს როგორც α -კუთხის ფუნქციას. მაქსიმალურ L_m მანძილს შეესაბამება ისეთი α_m კუთხე, რომ $\left. \frac{dL(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_m} = 0$. გავაწარმოთ (1.10.1) განტოლების ორივე მხარე ამ პირობის გათვალისწინებით. შედეგად მივიღებთ

$$\frac{L_m}{\cos^2 \alpha_m} \left[1 - \frac{gL_m}{V^2} \tan \alpha_m \right] = 0,$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ $\frac{d \tan \alpha}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. ამრიგად $\tan \alpha_m = \frac{V^2}{gL_m}$. ჩავსვათ ეს (1.10.1) განტოლებაში. შედეგად მივიღებთ

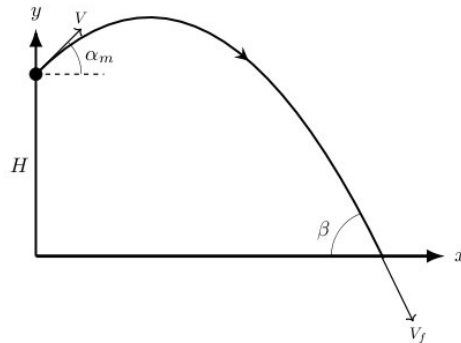
$$h + \frac{V^2}{2g} - \frac{gL_m^2}{2V^2} = 0.$$

აქედან

$$L_m = \frac{V}{g} \sqrt{2gh + V^2} \quad \text{და} \quad \tan \alpha_m = \frac{V^2}{gL_m} = \frac{V}{\sqrt{2gh + V^2}}.$$

1.11 კუთხე საწყის და საბოლოო სიჩქარეებს შორის

ვთქვათ მიწაზე დაცემისას ბურთის სიჩქარეა V_f და ეს სიჩქარე ადგენს β კუთხეს ჰორიზონტთან (იხილეთ ნახაზი).



სიჩქარის ჰორიზონტალური პროექცია არ იცვლება (რადგან ჰორიზონტალური მიმართულებით არავითარი ძალა არ მოქმედებს). ამიტომ $V \cos \alpha_m = V_f \cos \beta$. საბოლოო V_f სიჩქარეს ვიპოვით ენერგიის შენახვის კანონის გამოყენებით:

$$\frac{mV^2}{2} + mgH = \frac{mV_f^2}{2}.$$

აქედან $V_f = \sqrt{V^2 + 2gH}$. ამოცანა **1.10**-ში ვნახეთ, რომ

$$\tan \alpha_m = \frac{V}{\sqrt{V^2 + 2gH}} = \frac{V}{V_f}.$$

ამიტომ

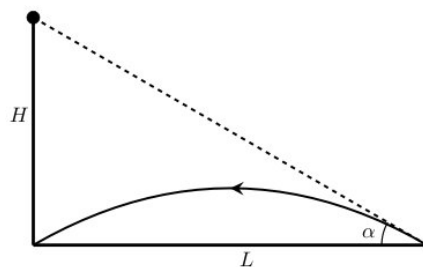
$$\cos \beta = \frac{V}{V_f} \cos \alpha_m = \frac{V}{V_f} \frac{\sin \alpha_m}{\tan \alpha_m} = \sin \alpha_m.$$

ამრიგად $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. ეს ნიშნავს, რომ $\vec{V}$ და $\vec{V}_f$ ურთიერთპერპენდიკულარული არიან:

$$\vec{V} \cdot \vec{V}_f = VV_f (\cos \alpha_m \cos \beta - \sin \alpha_m \sin \beta) = VV_f \cos (\alpha_m + \beta) = 0.$$

1.12 რა სიმაღლეზე იჯდა კატა?

ვთქვათ კენჭის საწყისი სიჩქარეა V და ის ადგენს α კუთხეს ჰორიზონტთან (იხილეთ ნახაზი).



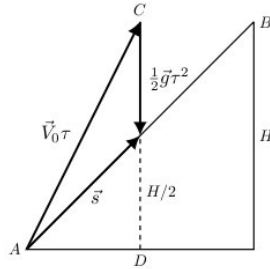
მაშინ $H = L \tan \alpha$. მეორე მხრივ $L = V \cos \alpha \tau$, სადაც $\tau = 1$ წმ ის დროა, რომლის განმავლობაშიც კენჭი ჰაერშია. ამიტომ $H = V \cos \alpha \tau \tan \alpha = V \sin \alpha \tau$. ვერტიკალური მიმართულებით კენჭის მოძრაობის განტოლებაა $y = V \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$. როცა $t = \tau$, $y = 0$. ეს გვძლევს $V \sin \alpha \tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0$ და $V \sin \alpha = \frac{1}{2}g\tau$. მასასადამე $H = \frac{1}{2}g\tau^2 \approx 5$ მ.

1.13 კატა და ცელქი თავუნები

კატის მიერ გასროლილი კენჭი ვერტიკალურად მოძრაობს სიდიდით g აჩქარებით. ამიტომ $\frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{H}{2}$, სადაც τ დაჯახებამდე გასული დროა. ამრიგად $\tau = \sqrt{\frac{H}{g}}$. ვთქვათ α არის კუთხე, რომელსაც თავგების მიერ გასროლილი კენჭის $\vec{V}_0$ საწყისი სიჩქარე ადგენს ჰორიზონტთან. შევნიშნოთ, რომ $AB = \frac{H}{\sin \varphi} = 2H$ და $\frac{1}{2}AB = H$. კენჭის $V_0 \cos \alpha$ ჰორიზონტალური სიჩქარე არ იცვლება და ის τ დროში $\frac{1}{2}AB \cos \varphi = H \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}H}{2}$ მანძილით გადაადგილდება ჰორიზონტალური მიმართულებით. ამიტომ $V_0 \cos \alpha \tau = V_0 \cos \alpha \sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{\sqrt{3}H}{2}$. ანუ $V_0^2 \cos^2 \alpha \frac{H}{g} = \frac{3H^2}{4}$. აქედან

$$H = \frac{4}{3} \frac{V_0^2}{g} \cos^2 \alpha.$$

თავგების მიერ გასროლილი კენჭის გადაადგილების ვექტორი დაჯახებამდე $\vec{s} = \vec{V}_0 \tau + \frac{1}{2}\vec{g}\tau^2$ გრაფიკულად შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:



მაგრამ $\frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{H}{2}$. ამიტომ $\tan \alpha = \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{H}{H/2} = 2$ და $\tan \varphi = \tan \angle BAD = \frac{H/2}{AD}$. ე.ი. $\tan \alpha = 2 \tan \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}$, რადგან $\tan \varphi = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. მაშასადამე

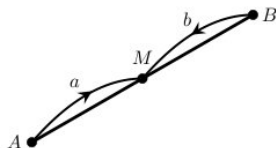
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{7}$$

და ბელის სიმაღლისათვის საბოლოოდ მივიღებთ

$$H = \frac{4}{3} \frac{V_0^2}{g} \cos^2 \alpha = \frac{4}{7} \frac{V_0^2}{g} \approx 2.8 \text{ მ.}$$

მაშინ $\tau = \sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{V_0}{g}$ და თავგების მიერ გასროლილი კენჭის სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტი დაჯახების მომენტში იქნება $V_y = V_0 \sin \alpha - g\tau = V_0 \sin \alpha - \frac{2}{\sqrt{7}} V_0$. მაგრამ

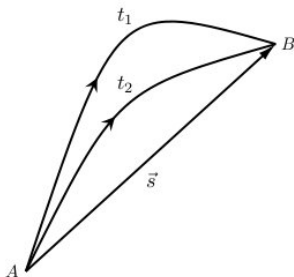
$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ და მაშასადამე $V_y = 0$. ესე იგი, თუკი ამ კენჭის მოძრაობას დროში უკანშებრუნებულად განვიხილავთ, მაშინ გამოდის რომ კენჭი ისროლეს ჰორიზონტალურად M წერტილში $V_0 \cos \alpha$ საწყისი სიჩქარით და ის აღწერს MaA ტრაექტორიას (იხილეთ ნახაზი).



მაგრამ კატის მიერ გასროლილი კენჭის და თავგების მიერ გასროლილი კენჭის სიჩქარეების ჰორიზონტალური კომპონენტები ერთმანეთის ტოლია, რადგან ჰორიზონტალური მიმართულებით ისინი ერთსა და იმავე τ დროში ერთნაირ მანძილებს გადიან. ამრიგად თუკი MaA ტრაექტორიას პარალელურად გადავაადგილებთ AB -ს გასწვრივ ისე, რომ M წერტილი დაემთხვას B წერტილს, მაშინ MaA ტრაექტორია დაემთხვევა BbM ტრაექტორიას, რადგან ორივე ტრაექტორია ერთი და იმავე საწყისი სიჩქარით დაიწყება. ამრიგად, ორივე კენჭი დაჯახებამდე ერთსა და იმავე მანძილს გადის.

1.14 რა მანძილზე იყო კატა თავგებისაგან?

შევადაროთ ერთმანეთს პირველი ტრაექტორია და დროში შებრუნებული მეორე ტრაექტორია (იხილეთ ნახაზი).



თუკი პირველ ტრაექტორიას შეესაბამება $\vec{V}_1$ საწყისი სიჩქარე, ხოლო მეორე ტრაექტორიას — $\vec{V}_2$ საწყისი სიჩქარე, მაშინ $\vec{s} = \vec{V}_1 t_1 - \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2$ და $\vec{s} = \vec{V}_2 t_2 - \frac{1}{2} \vec{g} t_2^2$, სადაც $\vec{s}$ არის ორივე ტრაექტორიისათვის ერთი და იგივე გადაადგილების ვექტორი. ამიტომ

$$\vec{V}_1 = \frac{\vec{s}}{t_1} - \frac{1}{2} \vec{g} t_1, \quad \vec{V}_2 = \frac{\vec{s}}{t_2} - \frac{1}{2} \vec{g} t_2. \quad (1.14.1)$$

რაკი კენჭის არეკვლა დრეკადი იყო, ენერგია ინახება და ენერგიის შენახვის კანონი მოგვცემს, რომ A წერტილში კენჭი სიდიდით იმავე სიჩქარით დაბრუნდება, რა სიჩქარითაც ის შურდულიდან გამოვარდა. ე.ი. $\vec{V}_1^2 = \vec{V}_2^2$ და (1.14.1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{s^2}{t_1^2} - \vec{s} \cdot \vec{g} + \frac{1}{4}g^2 t_1^2 = \frac{s^2}{t_2^2} - \vec{s} \cdot \vec{g} + \frac{1}{4}g^2 t_2^2.$$

აქედან

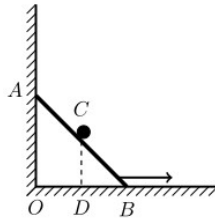
$$\frac{1}{4}g^2(t_1^2 - t_2^2) = \frac{s^2}{t_2^2} - \frac{s^2}{t_1^2} = \frac{s^2(t_1^2 - t_2^2)}{t_1^2 t_2^2},$$

საიდანაც ვიპოვიტ

$$s^2 = \frac{g^2 t_1^2 t_2^2}{4} \quad \text{და} \quad s = \frac{gt_1 t_2}{2} \approx 6 \text{ მ.}$$

1.15 რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე აღმოჩნდება ხოჭო?

დროის t მომენტში $OB = Vt$ და $CB = ut$ (ხოჭო დროის ამ მომენტში იმყოფება C წერტილში). $\triangle ABO$ და $\triangle CDB$ მსგავსი სამკუთხედებია (იხილეთ ნახაზი).



ამიტომ $\frac{CD}{AO} = \frac{CB}{AB}$. მაგრამ $AB = L$, $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{L^2 - V^2 t^2}$. ამიტომ დროის ამ მომენტში ხოჭო იმყოფება

$$h = CD = AO \frac{CB}{AB} = \sqrt{L^2 - V^2 t^2} \frac{ut}{L}$$

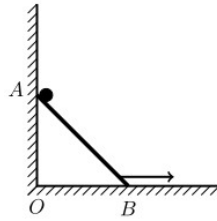
სიმაღლეზე. შევნიშნოთ, რომ

$$h^2 = \frac{u^2 t^2}{L^2} (L^2 - V^2 t^2) = \frac{u^2 V^2}{L^2} \left[\left(\frac{L^2}{2V^2} \right)^2 - \left(t^2 - \frac{L^2}{2V^2} \right)^2 \right].$$

აქედან ცხადია, რომ მაქსიმალურ სიმაღლეს შეესაბამება დროის ის $t = t_m$ მომენტი, როცა $t_m^2 = \frac{L^2}{2V^2}$, და მაშინ $h_{max}^2 = \frac{u^2 L^2}{4V^2}$. ამრიგად

$$h_{max} = \frac{uL}{2V}.$$

ეს პასუხი სამართლიანია, თუკი დროის $t_m = \frac{L}{\sqrt{2}V}$ მომენტამდე ხოჭო ვერ ასწრებს ღეროს A ზედა ბოლომდე აცოცებას, ე.ი. თუკი $ut_m < L$, რაც ნიშნავს $u < \sqrt{2}V$. თუკი $u \geq \sqrt{2}V$, ხოჭო მოასწრებს A ბოლომდე აცოცებას $t = \frac{L}{u} \leq t_m$ დროში. ხოჭო იატაკიდან მაქსიმალურ სიმაღლეზე იქნება დროის სწორედ ამ მომენტში, რადგან ამ მომენტის შემდეგ ხოჭოს სიმაღლე მხოლოდ შემცირდება (იხილეთ ნახაზი).

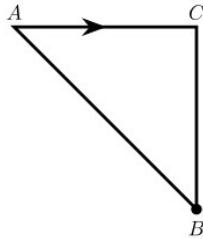


$OB = Vt = V\frac{L}{u}$. ამიტომ, როცა $u \geq \sqrt{2}V$, მაქსიმალური სიმაღლე იქნება

$$h_{max} = \sqrt{AB^2 - OB^2} = L\sqrt{1 - \frac{V^2}{u^2}}$$

1.16 ზებგერითი თვითმფრინავის სიჩქარე

ვთქვათ მიკროფონი იმყოფება B წერტილში და დროის ათვლის სათავე ავირჩიოთ ისე, რომ $t = 0$ მომენტში თვითმფრინავი იმყოფება ზუსტად მიკროფონის ზემოთ მდებარე C წერტილში $CB = H$ სიმაღლეზე (იხილეთ ნახაზი).



თუკი მიკროფონმა დააფიქსირა ბგერის მოსვლა დროის t მომენტში, ეს ნიშნავს რომ თვითმფრინავმა ეს ბგერა გამოსახივა რაღაც τ დროით ადრე, როცა ის

იმყოფებოდა A წერტილში. რადგან ბგერის სიჩქარეა c , შეიძლება დავწეროთ $AB = c\tau$. თვითმფრინავი დროის $t - \tau$ მომენტში იყო A წერტილში, ხოლო დროის $t = 0$ მომენტში — C წერტილში. თუკი თვითმფრინავის სიჩქარეა V , შეგვიძლია დავწეროთ $AC = V[0 - (t - \tau)] = V(\tau - t)$. $\triangle ABC$ მართკუთხა სამკუთხედიდან $(AC)^2 + H^2 = (AB)^2$, ანუ

$$V^2(\tau - t)^2 + H^2 = c^2\tau^2. \quad (1.16.1)$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს t -ს როგორც τ -ს ფუნქციას. ჩვენ უნდა შევარჩიოთ ისეთი $\tau = \tau_m$, რომ t იყოს მინიმალური: $t = t_m$. მაშინ $t = t_m$ იქნება დროის ის მომენტი, როცა მიკროფონმა B წერტილში პირველად დააფიქსირა თვითმფრინავის მოძრაობით გამოწვეული ბგერის ტალღა. გავაწარმოოთ (1.16.1) τ -თი:

$$2V^2(\tau - t) \left[1 - \frac{dt}{d\tau} \right] = 2c^2. \quad (1.16.2)$$

რადგან $\tau = \tau_m$ წერტილში გვაქვს $t(\tau)$ ფუნქციის მინიმუმი, ამიტომ

$$\left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_m} = 0,$$

და (1.16.2) განტოლება $\tau = \tau_m$ წერტილში მიიღებს $V^2(\tau_m - t_m) = c^2\tau_m$ სახეს. აქედან

$$\tau_m = \frac{V^2}{V^2 - c^2} t_m.$$

ჩავსვათ ეს (1.16.1) განტოლებაში $\tau = \tau_m$ წერტილში და შედეგად მივიღებთ

$$\frac{V^2 c^4}{(V^2 - c^2)^2} t_m^2 + H^2 = \frac{c^2 V^4}{(V^2 - c^2)^2} t_m^2.$$

აქედან

$$t_m = \frac{H}{cV} \sqrt{V^2 - c^2}.$$

მაშადავ

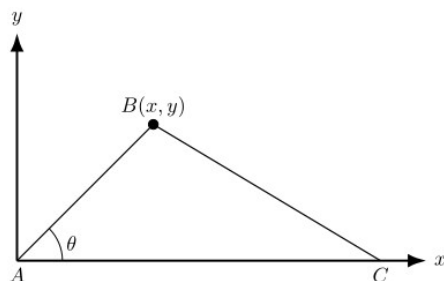
$$\Delta t = \frac{\Delta H}{cV} \sqrt{V^2 - c^2}.$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება თვითმფრინავის V სიჩქარის მიმართ. შედეგად მივიღებთ

$$V = \frac{c\Delta H}{\sqrt{(\Delta H)^2 - c^2(\Delta t)^2}} = \frac{cl}{\sqrt{l^2 - c^2(\Delta t)^2}}.$$

1.17 რა მიდამოდან შეიძლება მგზავრი ავტობუსის დაწევა?

კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვითავსოთ A წერტილში და x -ღერძი მივმართოთ გზატკეცილის გასწვრივ. ვთქვათ მგზავრის საწყისი კოორდინატებია (x, y) და ის ახერხებს ავტობუსში ასვლას გზატკეცილის იმ C წერტილში რომლის კოორდინატებიცაა $x = c, y = 0$ (იხილეთ ნახაზი).



მგზავრი C წერტილში უფრო ადრე უნდა მივიდეს, ვიდრე ავტობუსი. ამიტომ ვწერთ

$$\frac{\sqrt{(c-x)^2 + y^2}}{u} \leq \frac{c}{V}.$$

აქედან $(c-x)^2 + y^2 \leq \beta^2 c^2$, სადაც $\beta = u/V$. ამრიგად C წერტილის $x = c$ კოორდინატა უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ უტოლობას

$$c^2 - 2c\gamma^2 x + \gamma^2(x^2 + y^2) \leq 0, \quad (1.17.1)$$

სადაც $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. ამ უტოლობის ამოხსნაა $c_- \leq c \leq c_+$, სადაც

$$c_{\pm} = \gamma^2 x \pm \sqrt{\gamma^4 x^2 - \gamma^2(x^2 + y^2)} = \gamma^2 x \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{\gamma^2 \beta^2 x^2}} \right]. \quad (1.17.2)$$

(1.17.2) ტოლობის ბოლო ნაწილის მიღებისას ჩვენ გავითვალისწინეთ $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$ ტოლობა. როცა $c = c_-$ ან $c = c_+$, მგზავრი C წერტილში მივა იმავე დროს, რაც ავტობუსი. როცა $c_- < c < c_+$, მგზავრი C წერტილში მიდის უფრო ადრე, ვიდრე ავტობუსი და ელოდება მას.

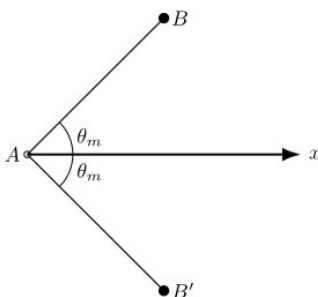
მაგრამ c_- და c_+ არსებობენ მხოლოდ მაშინ (მხოლოდ მაშინ შეუძლია მგზავრს ავტობუსის დაწევა), როცა

$$1 - \frac{y^2}{\gamma^2 \beta^2 x^2} \geq 0,$$

ანუ

$$|\tan \theta| = \frac{|y|}{x} \leq \gamma\beta.$$

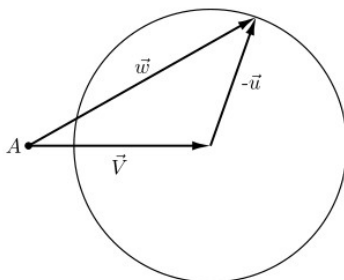
ამრიგად, მგზავრი დაეწევა ავტობუსს, თუკი მგზავრის საწყისი მდგომარეობა არის BAB' კუთხის შიგნით (იხილეთ ნახაზი).



აქ $\tan \theta_m = \gamma\beta$ და

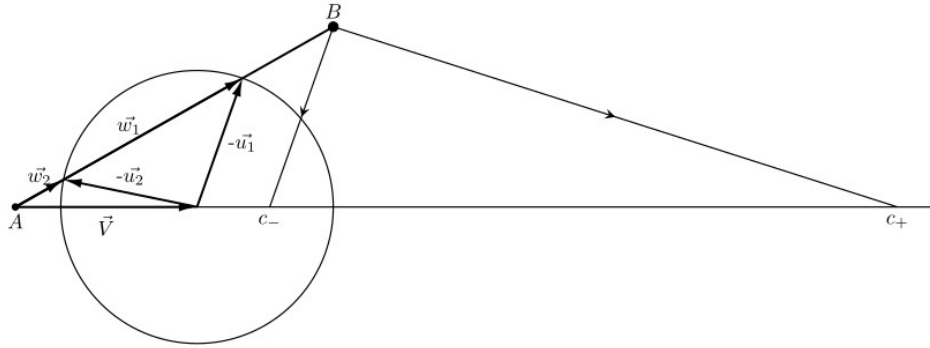
$$\sin \theta_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta_m}} = \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2\beta^2 + 1}} = \beta.$$

მეორე ამოხსნა. გადავიდეთ მგზავრთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში. ამ სისტემაში მგზავრი უძრავია, ხოლო ავტობუსის სიჩქარეა $\vec{w} = \vec{V} - \vec{u}$. რადგან $\vec{u}$ ვექტორის მხოლოდ მიმართულება შეიძლება შეიცვალოს, $\vec{w}$ ვექტორის ბოლო იქნება წრეზე რომლის რადიუსიცაა u (იხილეთ ნახაზი).



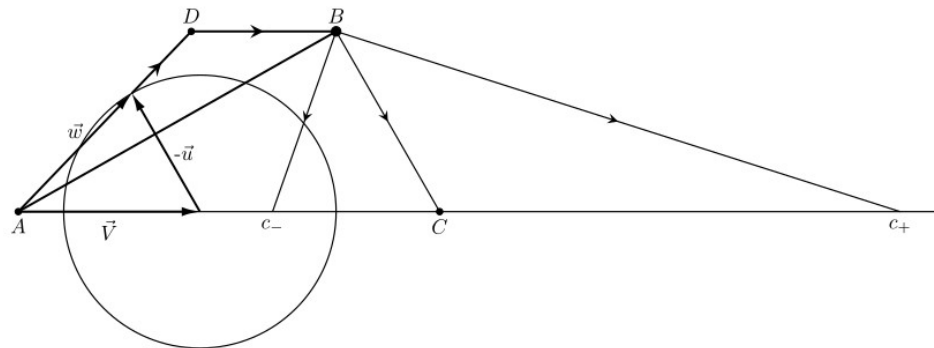
იმისდა დამოკიდებულებით, თუ როგორია მგზავრის საწყისი განლაგება ავტობუსის მიმართ, გვექნება რამდენიმე შემთხვევა.

1). შესაძლებელია $\vec{u}$ ვექტორის ორი ისეთი მიმართულების პოვნა, რომ შესაბამისი $\vec{w}$ ვექტორი მიმართულია მგზავრისკენ (იხილეთ ნახაზი).

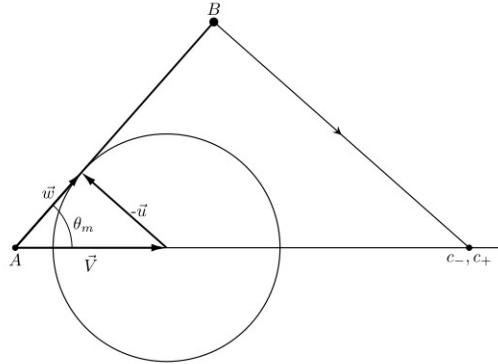


ამ შემთხვევაში ლაბორატორიულ (დედამიწის) სისტემაში თუკი მგზავრი გაიქცევა $\vec{u}_1$ მიმართულებით, ის შეხვდება ავტობუსს c_- წერტილში, და თუ ის გაიქცევა $\vec{u}_2$ მიმართულებით, ის შეხვდება ავტობუსს c_+ წერტილში (მგზავრის სისტემაში, მგზავრი უბრალოდ იცდის გარკვეული დროის განმავლობაში და ავტობუსი მოდის მგზავრთან).

მგზავრის ასეთი საწყისი განლაგების შემთხვევაში, ის შეიძლება გაიქცეს c_- და c_+ წერტილებს შორის მდებარე ნებისმიერი C წერტილისაკენ და ის ამ წერტილში მივა ავტობუსზე ადრე. მგზავრის სისტემაში ავტობუსი მოძრაობს საწყისი $\vec{w}$ ვექტორის გასწვრივ სანამ ის არ აღმოჩნდება იმავე ჰორიზონტალურ დონეზე, როგორც მგზავრი (D წერტილში). ლაბორატორიულ სისტემაში მგზავრი დროის ამ მომენტში აღწევს გზატკეცილს C წერტილში). როგორც კი ეს მოხდება, ავტობუსის სიჩქარე მყისიერად იცვლება $\vec{w} = \vec{V} - \vec{u}$ ვექტორიდან $\vec{w}' = \vec{V}$ ვექტორად და ავტობუსი იწყებს მგზავრისკენ სვლას (იხილეთ ნახაზი. ლაბორატორიულ სისტემაში მგზავრი უბრალოდ ჩერდება და ელოდება ავტობუსს).



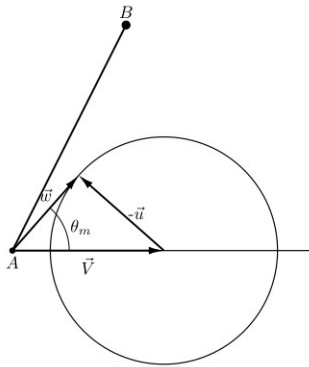
2) არსებობს $\vec{u}$ ვექტორის მხოლოდ ერთი ისეთი მიმართულება, რომ შესაბამისი $\vec{w}$ ვექტორი მიმართულია მგზავრისკენ. ამ შემთხვევაში $\vec{w}$ ვექტორი ეხება წრეს და ლაბორატორიულ სისტემაში c_- და c_+ წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა (იხილეთ ნახაზი).



ნახაზიდან ცხადია, რომ

$$\sin \theta_m = \frac{u}{V} = \beta.$$

3) თუკი AB ადგენს გზატკეცილთან θ_m -ზე მეტ კუთხეს, არ არსებობს $\vec{u}$ ვექტორის ისეთი მიმართულება, რომ შესაბამისი $\vec{w}$ ვექტორი მიმართული იყოს მგზავრისკენ (იხილეთ ნახაზი). ამ შემთხვევაში მგზავრი ავტომატურად ვერ დაეწევა.



სიტუაცია, როცა მგზავრი გზატკეცილის მეორე მხარესაა, აბსოლუტურად სიმეტრიულია განხილული სიტუაციის და დამატებით შესწავლას არ საჭიროებს.

1.18 რა დროით ჩამორჩება თქვენი საათი?

ვთქვათ საათი ჩამორჩება t დროით. ამ დროის განმავლობაში მატარებელი მოასწრებს $V_1 = at$ სიჩქარის აკრეფას, სადაც a მატარებლის აჩქარებაა. თუკი ვაგონის სიგრძეა l , მაშინ შეიძლება დავწეროთ

$$l = V_1 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = a t t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2. \quad (1.18.1)$$

ანალოგიურად, თუკი უკანასკნელი ვაგონი ანდომებს გვერდით ჩავლას t_2 დროს, შეიძლება დავწეროთ

$$l = V_2 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 = a(t + t_1)t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2, \quad (1.18.2)$$

სადაც $V_2 = a(t + t_1)$ არის მატარებლის საწყისი სიჩქარე, როცა უკანასკნელი ვაგონი იწყებს გვერდით ჩავლას. (1.18.1) და (1.18.2) განტოლებებიდან, a აჩქარებაზე შეკვეცის შემდეგ, მივიღებთ

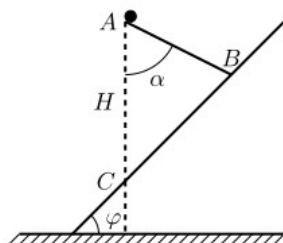
$$t t_1 + \frac{1}{2} t_1^2 = (t + t_1)t_2 + \frac{1}{2} t_2^2.$$

ეს არის განტოლება უცნობი t დროის მიმართ და ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$$t = \frac{1}{2(t_1 - t_2)} [2t_1 t_2 + t_2^2 - t_1^2].$$

1.19 გლუვი ღარის ოპტიმალური კუთხე

ვთქვათ A წერტილი იმყოფება დახრილი სიბრტყიდან $AC = H$ სიმაღლეზე და ღარი ვერტიკალთან ადგენს α კუთხეს (იხილეთ ნახაზი).



შევნიშნოთ რომ $\angle ACB = 90^\circ - \varphi$. გლუვი ღარის $AB = l$ სიგრძეს ვიპოვიოთ ABC სამკუთხედიდან სინუსების თეორემის გამოყენებით:

$$\frac{l}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{H}{\sin(180^\circ - 90^\circ + \varphi - \alpha)}.$$

ეს გვაძლევს

$$l = \frac{H \cos \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)}.$$

თავისუფალი ვარდნის აჩქარების კომპონენტა ღარის გასწვრივ არის $g \cos \alpha$. ამიტომ, თუკი t არის დრო რომლის განმავლობაშიც ბურთულა A წერტილიდან მიდის B წერტილში, გვექნება $l = \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2$. ანუ

$$\frac{H \cos \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)} = \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2,$$

რაც t დროისათვის გვაძლევს

$$t^2 = \frac{2H}{g} \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha \cos (\alpha - \varphi)}.$$

მინიმალურ დროს შეესაბამება $f(\alpha) = \cos \alpha \cos (\alpha - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos (2\alpha - \varphi) + \cos \varphi]$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც მიიღწევა როცა $2\alpha = \varphi$. ამრიგად მინიმალურ დროს შეესაბამება

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} \quad \text{და} \quad t_m = \sqrt{\frac{4H}{g} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}.$$

1.20 რა მასის წყალი იმყოფება ჰაერში?

წყლის ნაწილაკის სიჩქარის ვერტიკალური პროექცია, როცა ის ტოვებს შლანგს, არის $V \sin 45^\circ = V\sqrt{2}/2$. როცა t დროის შემდეგ ეს ნაწილაკი მიწაზე ეცემა, მისი სიჩქარის ვერტიკალური პროექცია იცვლის ნიშანს და ხდება $-V \sin 45^\circ = -V\sqrt{2}/2$. ამრიგად

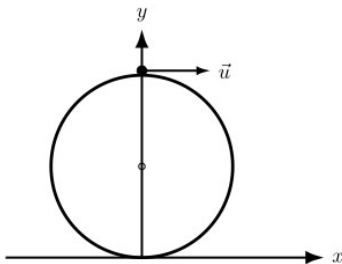
$$-\frac{V\sqrt{2}}{2} = \frac{V\sqrt{2}}{2} - gt.$$

აქედან $t = V\sqrt{2}/g$. ამრიგად ჰაერში იმყოფება წყლის ის რაოდენობა, რომელიც შლანგიდან გამოდის t დროის განმავლობაში და მისი მასა იქნება

$$m = \rho S V t = \frac{\rho S V^2 \sqrt{2}}{g} \approx 7 \text{ კგ}.$$

1.21 ქვის უმცირესი სიჩქარე

ქვის ტრაექტორია სიმეტრიულია. ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ მისი ტრაექტორიის მხოლოდ მეორე ნახევარი. ვთქვათ ქვა თითქმის ეხება რეზერვუარის წვეროს და ამ დროს აქვს ჰორიზონტალური სიჩქარე u (იხილეთ ნახაზი).



ნაჩვენებ კოორდინატთა სისტემაში, ქვის მოძრაობის განტოლებებია

$$x = ut, \quad y = 2R - \frac{1}{2}gt^2.$$

თუკი პირველი განტოლებიდან გამოვსახავთ t დროს და შედეგს ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ ქვის ტრაექტორიის განტოლებას

$$y = 2R - \frac{gx^2}{2u^2}, \quad (1.21.1)$$

მაშინ როცა სფერული რეზერვუარის განტოლებაა ($x - y$ სიბრტყეში)

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2. \quad (1.21.2)$$

ჩვენ გვინდა რომ (1.21.2)-დან გამომდინარე რეზერვუარის წერტილის სიმაღლე $y = R + \sqrt{R^2 - x^2}$ არ აღემატებოდეს ყოველთვის (1.21.1) ქვის ტრაექტორიის სიმაღლეს:

$$R + \sqrt{R^2 - x^2} \leq 2R - \frac{gx^2}{2u^2},$$

ანუ

$$\sqrt{R^2 - x^2} \leq R - \frac{gx^2}{2u^2}. \quad (1.21.3)$$

აქედან

$$R^2 - x^2 \leq R^2 - \frac{gR}{u^2}x^2 + \frac{g^2x^4}{4u^4},$$

რაც საბოლოოდ გვაძლევს უტოლობას

$$\frac{gR}{u^2} - 1 \leq \frac{g^2 x^2}{4u^4}. \quad (1.21.4)$$

ეს უტოლობა უნდა შესრულდეს ყველა $0 \leq x \leq R$ კოორდინატისათვის, მაგრამ ცხადია, რომ თუ ის შესრულდება როცა $x = 0$, დანარჩენი $0 < x \leq R$ მნიშვნელობებისათვის ის ავტომატურად შესრულდება. არიგად

$$\frac{gR}{u^2} - 1 \leq 0,$$

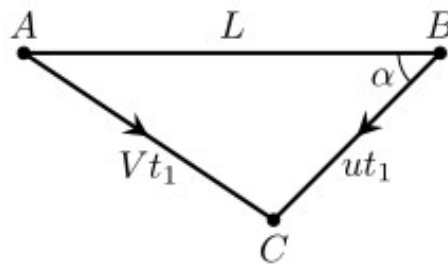
რაც გვაძლევს $u^2 \geq gR$. ესე იგი რეზერვუარის წვერზე ქვის მინიმალური სიჩქარე უნდა იყოს $u = \sqrt{gR}$. თუკი მიწიდან ქვას ვისვრით V სიჩქარით, ენერგიის შენახვის კანონი მოგვცემს

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + 2mgR = \frac{mgR}{2} + 2mgR = \frac{5mgR}{2}.$$

აქედან ჩანს, რომ ქვა უნდა ვისროლოთ $V = \sqrt{5gR}$ მინიმალური სიჩქარით.

1.22 თბილისიდან ქუთაისში ფრენის ხანგრძლივობა

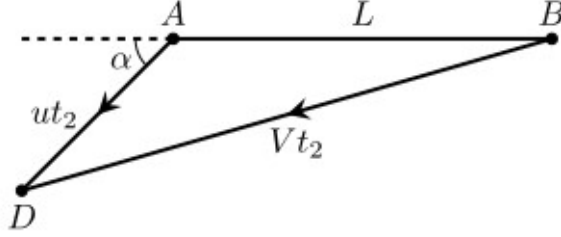
ვთქვათ თვითმფრინავი თბილისიდან (A) ქუთაისში (B) ჩასვლას ანდომებს t_1 დროს, ხოლო პირიქით — t_2 დროს. თუკი ათვლის სისტემას დავუკავშირებთ ჰაერს (ასე რომ ამ სისტემაში ქარის სიჩქარე უდრის ნულს), მაშინ თბილისიდან ქუთაისში ფრენისას თვითმფრინავის AC და ქუთაისის BC ტრაექტორიები გამოიყურება ასე:



კოსინუსების თეორემის გამოყენება $\triangle ABC$ სამკუთხედში მოგვცემს

$$L^2 + u^2 t_1^2 - 2Lut_1 \cos \alpha = V^2 t_1^2. \quad (1.22.1)$$

ანალოგიურად, როცა თვითმფრინავი ქუთაისიდან თბილისში მიფრინავს, ჰაერის სისტემაში თვითმფრინავის BD და თბილისის AD ტრაექტორიები გამოიყურება ასე:



რადგან $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, კოსინუსების თეორემა $\triangle ABD$ სამკუთხედში ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$L^2 + u^2 t_2^2 + 2Lut_2 \cos \alpha = V^2 t_2^2. \quad (1.22.2)$$

ჩვენ გვინტერესებს ფრენის სრული ხანგრძლივობა $T = t_1 + t_2$. ამიტომ შევეცადოთ (1.22.1) და (1.22.2) განტოლებებიდან მივიღოთ განტოლება T -თვის. ვთქვათ $\tau = t_1 - t_2$. თუკი (1.22.1) განტოლებიდან გამოვაკლებთ (1.22.2)-ს, მივიღებთ $u^2 \tau T - 2LuT \cos \alpha = V^2 \tau T$ (რადგან $t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = \tau T$). ანუ

$$\tau = \frac{2Lu \cos \alpha}{u^2 - V^2}. \quad (1.22.3)$$

თუკი პირიქით (1.22.1) და (1.22.2) განტოლებებს შევკრიბავთ და გავითვალისწინებთ

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{1}{2} [(t_1 - t_2)^2 + (t_1 + t_2)^2] = \frac{1}{2} [\tau^2 + T^2] = \frac{T^2}{2} + \frac{2L^2 u^2 \cos^2 \alpha}{(u^2 - V^2)^2},$$

შედეგად მივიღებთ

$$2L^2 + (u^2 - V^2) \left[\frac{T^2}{2} + \frac{2L^2 u^2 \cos^2 \alpha}{(u^2 - V^2)^2} \right] - \frac{4L^2 u^2 \cos^2 \alpha}{u^2 - V^2},$$

ანუ

$$2L^2 + \frac{T^2}{2} [u^2 - V^2] - \frac{2L^2 u^2 \cos^2 \alpha}{u^2 - V^2} = 0.$$

აქედან

$$T^2 = \frac{4L^2}{u^2 - V^2} \left(\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{u^2 - V^2} - 1 \right) = \frac{4L^2 (V^2 - u^2 \sin^2 \alpha)}{(u^2 - V^2)^2},$$

და (შევნიშნოთ, რომ $V > u$)

$$T = \frac{2L \sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{V^2 - u^2}.$$

ფრენის ხანგრძლივობა T იქნება მაქსიმალური, როცა $\alpha = 0$:

$$T_{max} = \frac{2LV}{V^2 - u^2},$$

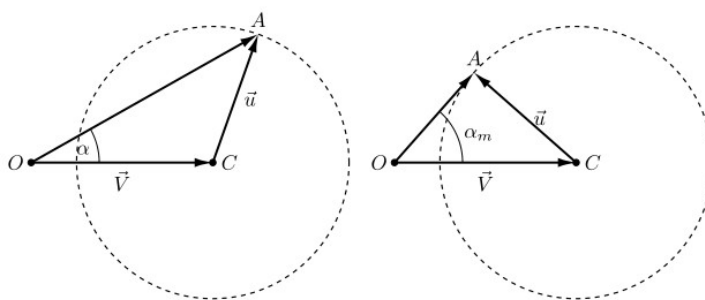
ესე იგი როცა ქარი ტრასის გასწვრივ ქრის.

მეორე ამოხსნა. თვითმფრინავის სიჩქარე ისე უნდა იყოს მიმართული, რომ მისმა ტრასისადმი პერპენდიკულარულმა კომპონენტამ გააბათილოს ქარის ტრასისადმი პერპენდიკულარული კომპონენტი $u \sin \alpha$. ამრიგად ტრასის გასწვრივ თვითმფრინავის სიჩქარის კომპონენტი იქნება $\sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \alpha}$. ერთი მიმართულებით ფრენისას თვითმფრინავის სიჩქარის ამ კომპონენტას ემატება ქარის სიჩქარის შესაბამისი კომპონენტი $u \cos \alpha$, ხოლო საპირისპირო ფრენისას ეს კომპონენტი აკლდება. ამიტომ

$$T = \frac{L}{\sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \alpha} + u \cos \alpha} + \frac{L}{\sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \alpha} - u \cos \alpha} = \frac{2L\sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{V^2 - u^2}.$$

1.23 მაქსიმალური შესადლო კუთხე

ნამსხვრევის სიჩქარე დედამიწის მიმართ არის ვექტორული ჯამი ბირთვის $\vec{V}$ სიჩქარის დედამიწის მიმართ და ნამსხვრევის $\vec{u}$ სიჩქარის ბირთვის მიმართ. $\vec{u}$ ვექტორის მიმართულება შეიძლება სხვადასხვა იყოს და შესაბამისად ნამსხვრევის $\vec{OA}$ სიჩქარის ვექტორის A წვერო იმოძრაებს u რადიუსის წრეზე (იხილეთ ნახაზი).

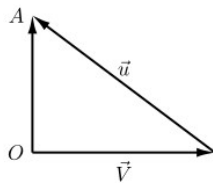


ცხადია, რომ α კუთხე მაქსიმალური იქნება, თუკი OA ეხება ამ წრეს. $\triangle OAC$ მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$\sin \alpha_m = \frac{u}{V}.$$

1.24 იზოვით ნამსხვრევების სიჩქარე

იხევე როგორც წინა ამოცანაში, ნამსხვრევის სიჩქარე დედამიწის მიმართ არის ვექტორული ჯამი ბირთვის $\vec{V}$ სიჩქარის დედამიწის მიმართ და ნამსხვრევის $\vec{u}$ სიჩქარის ბირთვის მიმართ. ნამსხვრევი იმოძრაებს ნაკადის გასწვრივ, თუკი $\vec{u}$ ვექტორი არის $\vec{V}$ ვექტორის პარალელური (ამ შემთხვევაში მათი ვექტორული ჯამიც $\vec{V}$ ვექტორის პარალელური იქნება). აქედან და ამოცანის პირობიდან ცხადია, რომ $u = 2V$. ნამსხვრევი იმოძრაებს ნაკადის პერპენდიკულარულად, თუკი ასეთი სიტუაცია გვაქვს (იხილეთ ნახაზი).

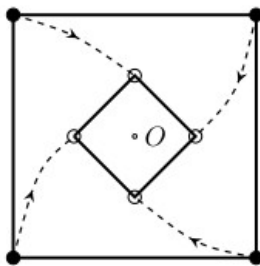


პითაგორას თეორემის გამოყენებით ვიპოვით ნამსხვრევის $|OA|$ სიჩქარეს დედამიწის მიმართ:

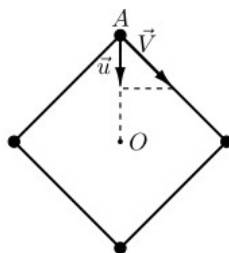
$$|OA| = \sqrt{u^2 - V^2} = \sqrt{(2V)^2 - V^2} = \sqrt{3} V.$$

1.25 ოთხი ხოჭო

ამოცანის სიმეტრიიდან ცხადია, რომ ხოჭოები ყოველთვის იქნებიან კვადრატის წვეროებში, ოღონდ ამ კვადრატის გვერდი შემცირდება და ასევე შეიცვლება მისი ორიენტაცია (იხილეთ ნახაზი).



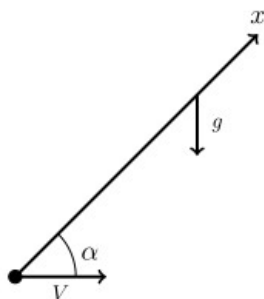
ამიტომ ცხადია, რომ ხოჭოები შეხვდებიან ერთმანეთს თავდაპირველი კვადრატის O ცენტრში (რომელიც ემთხვევა ყველა მომდევნო კვადრატის ცენტრს). ნებისმიერი ხოჭოს სიჩქარის კომპონენტა კვადრატის ცენტრის მიმართულებით არ იცვლება და უდრის $u = V \cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$ (იხილეთ ნახაზი).



მაგრამ OA კვადრატის დიაგონალის ნახევარია და მისი თავდაპირველი სიგრძეა $l = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}$. ამიტომ ხოჭოები ერთმანეთს შეხვდებიან $T = \frac{l}{u} = \frac{a}{v}$ დროის შემდეგ.

1.26 რამდენ დროს დაყოფს ბურთულა მილში?

მივმართოთ x -ლერძი მილის გასწვრივ (იხილეთ ნახაზი).



მილის კედლებზე ბურთულას აბსოლუტურად დრეკადი არეკვლის დროს მისი სიჩქარის კომპონენტა მილის გასწვრივ არ იცვლება. ამიტომ ეს არეკვლები შეიძლება საერთოდ არ მივიღოთ მხედველობაში x ლერძის გასწვრივ მოძრაობის განხილვისას. ესე იგი x ლერძის გასწვრივ ბურთულას კოორდინატა იცვლება ისე, როგორც შეესაბამება $V_0 = V \cos \alpha$ საწყისი სიჩქარით და $a = -g \sin \alpha$ აჩქარებით მოძრაობას. $\tau = \frac{V_0}{|a|} = \frac{V}{g \tan \alpha}$ დროის შემდეგ ბურთულას სიჩქარის x -კომპონენტა განუღდება და ბურთულა შეწყვეტს მილის გასწვრივ ზემოთ გადაადგილებას. დროის ამ მომენტში და ასეთი სახის მოძრაობისას, ბურთულას x -კოორდინატა უნდა იყოს

$$x = V_0 \tau + \frac{1}{2} a \tau^2 = \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{g \sin \alpha} - \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2g \sin \alpha} = \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{2g \sin \alpha}.$$

თუკი $x < l$, ე.ი. თუკი

$$V^2 < \frac{2g \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

მაშინ ამ დროს ბურთულა ჯერ კიდევ მილის შიგნით იქნება და დაიწყებს უკან ვარდნას. კიდევ τ დროის შემდეგ ბურთულას x -კოორდინატა გახდება ნული და ბურთულა გამოვა მილიდან. ან შემთხვევაში ბურთულა მილის შიგნით იქნება

$$T = 2\tau = \frac{2V}{g \tan \alpha}$$

დროის განმავლობაში.
თუკი

$$V^2 > \frac{2g \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

მაშინ ბურთულა გამოვა მილის ზედა ბოლოდან უფრო ადრე, ვიდრე მისი სიჩქარის x -კომპონენტი გახდება ნული. ამ შემთხვევაში T დრო აქმაცოფილებს განტოლებას $l = V_0 T + \frac{1}{2} a T^2$. მისი ამონახსნებია

$$T = -\frac{V_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 + \frac{2l}{g}} = \tau \pm \sqrt{\tau^2 - \frac{2l}{g \sin \alpha}}.$$

რადგან ამ შემთხვევაში $T < \tau$, ცხადია რომ მხოლოდ მინუს ნიშანი გამოდგება. ამრიგად, როცა

$$V^2 > \frac{2g \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

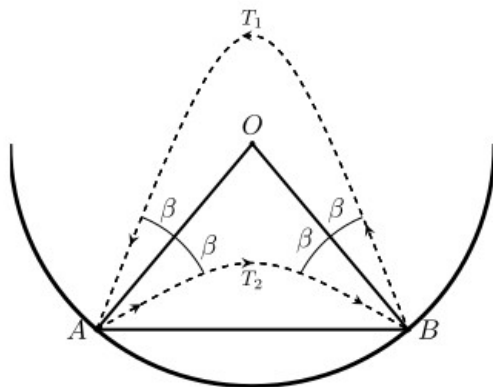
ბურთულა მილის შიგნით იქნება

$$T = \tau - \sqrt{\tau^2 - \frac{2l}{g \sin \alpha}} = \frac{V}{g \tan \alpha} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2gl \sin \alpha}{V^2 \cos^2 \alpha}} \right]$$

დროის განმავლობაში. რადგან მილის დიამეტრი გაცილებით ნაკლებია მის სიგრძეზე, მას შემდეგ, როცა ბურთულა მილის ზედა ბოლოდან გამოვა, ის უკან მილში (დიდი ალბათობით) უკვე აღარ ჩავარდება.

1.27 რას უდრის ჩარღმავების რადიუსი?

ვთქვათ $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ და ბურთულას საწყისი სიჩქარე მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას ადგენს β კუთხეს ჩარღმავების რადიუსთან (იხილეთ ნახაზი).



აბსოლუტურად დრეკადი არეკვლის შემთხვევაში, B წერტილში ბურთულას არეკვლის კუთხე უდრის მისი დაცემის კუთხეს, რომელიც სურათის სიმეტრიის გამო β კუთხის ტოლია. ამრიგად ბურთულას საწყისი სიჩქარე მათეხნიდან მარჯვნივ მოძრაობისას ჰორიზონტთან ადგენს $\alpha - \beta$ კუთხეს, ხოლო მარჯვნიდან მარცხნივ მოძრაობისას ადგენს $\alpha + \beta$ კუთხეს. ვთქვათ $AB = s$. მაშინ

$$s = V \cos(\alpha - \beta) T_1 = V \cos(\alpha + \beta) T_2, \quad (1.27.1)$$

სადაც V ბურთულას სიჩქარეა A და B წერტილებში (რადგან ეს წერტილები ერთ ჰორიზონტალურ დონეზეა განლაგებული, ბურთულას სიჩქარე ამ წერტილებში ერთი და იგივე იქნება ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე). ვერტიკალური მიმართულებით მოძრაობა თანაბარშენელებულია $-g$ აჩქარებით. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$-V \sin(\alpha - \beta) = V \sin(\alpha - \beta) - g T_1$$

და

$$-V \sin(\alpha + \beta) = V \sin(\alpha + \beta) - g T_2.$$

აქედან

$$T_1 = \frac{2V \sin(\alpha - \beta)}{g} \quad T_2 = \frac{2V \sin(\alpha + \beta)}{g}.$$

ჩავსვათ ეს (1.27.1) განტოლებაში და მივიღებთ

$$s = \frac{2V^2}{g} \sin 2(\alpha - \beta) = \frac{2V^2}{g} \sin 2(\alpha + \beta).$$

ამრიგად

$$\sin 2(\alpha - \beta) = \sin 2(\alpha + \beta).$$

β კუთხე არანულოვანია, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა $T_1 = T_2$. ამიტომ სინუსების ტოლობიდან დავასკვნით, რომ შესაბამისი კუთხეები აქმაცოფილებენ განტოლებას

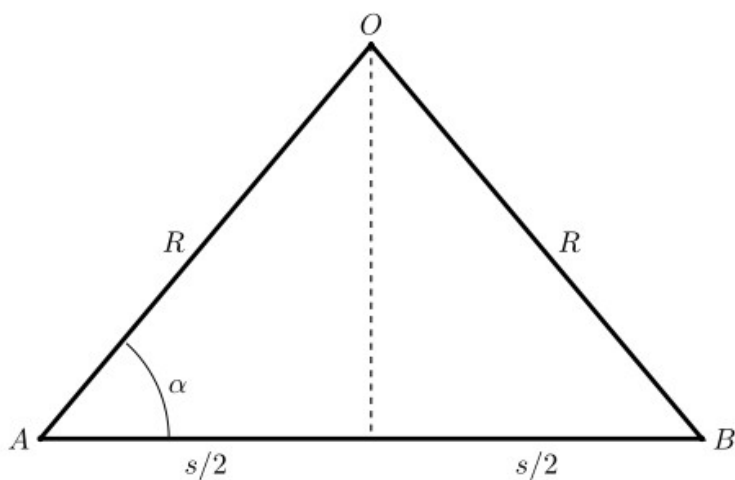
$$2(\alpha + \beta) = \pi - 2(\alpha - \beta),$$

რაც გვაძლევს $\alpha = \pi/4$. მეორე მხრივ, თუკი $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)$, მაშინ $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$ და გვექნება

$$s = V \cos(\alpha + \beta) T_2 = V \sin(\alpha + \beta) T_2 = \frac{1}{2} g T_1 T_2,$$

სადაც გამოვიყენეთ $g T_1 = 2V \sin(\alpha - \beta)$ ტოლობა.

$\triangle OAB$ სამკუთხედი ტოლფერდაა. ამიტომ (იხილეთ ნახაზი)

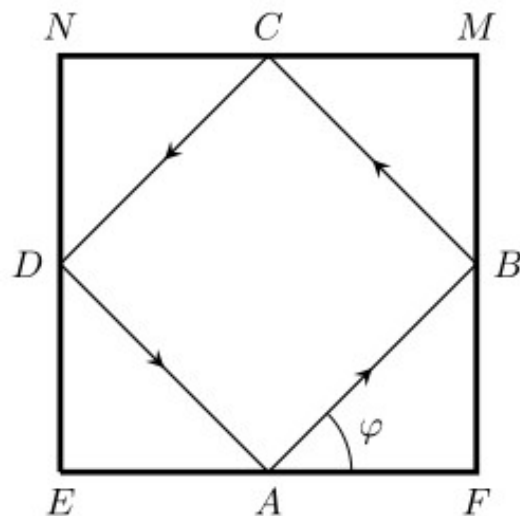


$$R \cos \alpha = s/2 \text{ და}$$

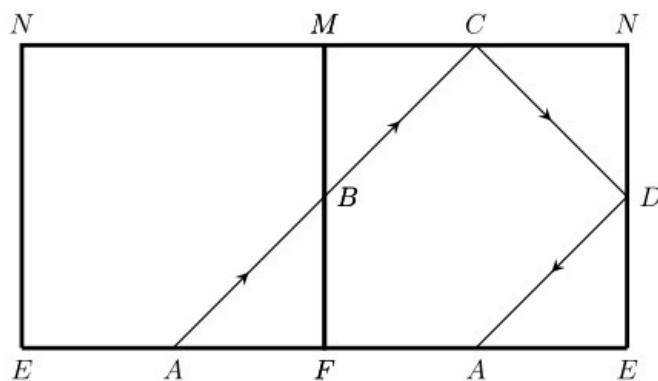
$$R = \frac{s}{2 \cos \alpha} = \frac{s}{2 \cos(\pi/4)} = \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} g T_1 T_2.$$

1.28 ბურთულა მართკუთხა ბილიარდში

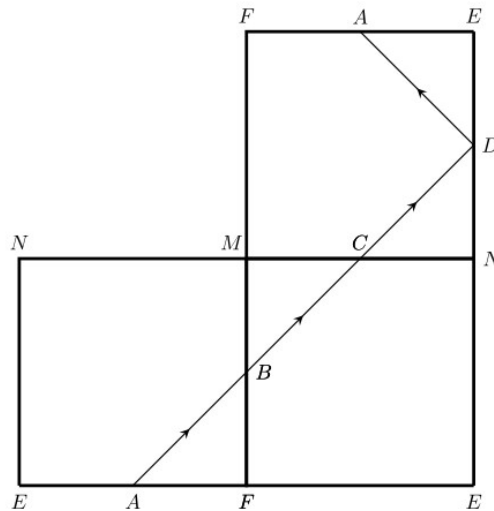
განვიხილოთ, მაგალითად, არეკლათა ასეთი თანმიმდევრობა (იხილეთ ნახაზი).



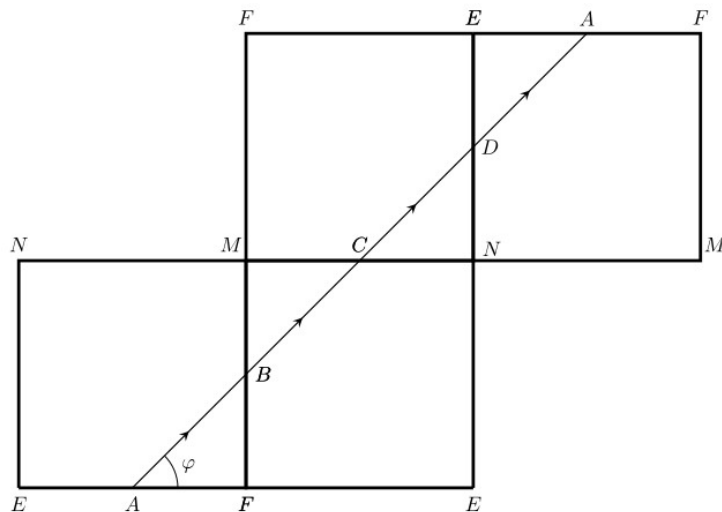
ზოგად შემთხვევაში φ კუთხის განსაზღვრისათვის, ეს სურათი მოსახერხებელია ასეთნაირად გარდაკმნათ. როცა ბურთულა B წერტილში მისა და აირეკლება, წარმოვიდგინოთ, რომ დანარჩენი სურათი ავრეკლეთ როგორც სარკეში FM გვერდის მიმართ. მაშინ ასეთ შედეგს მივიღებთ (იხილეთ ნახაზი. სიმარტივისათვის არეკლილ წერტილებს იგივე ასოებით აღვნიშნავთ).



როგორც ვხედავთ, ასეთ გაფართოებულ ნახაზზე ბურთულას საწყისი ტრაექტორია წრფივი ხაზი ხდება. როცა ბურთულა C წერტილში მისა, დანარჩენი სურათი ავრეკლოთ უკვე MN გვერდის მიმართ და მივიღებთ შემდეგ სურათს:



და ბოლოს, როცა ბურთულა D წერტილში მივა, მისი ტრაექტორიის დარჩენილი ნაწილი კვლავ აგრეკლოდ EN გვერდის მიმართ. საბოლოო სურათი ასეთი იქნება:



ვთქვათ ზოგად შემთხვევაში ასეთი პროცედურა შეიცავს n არეკვლას ვერტიკალური გვერდების მიმართ და m არეკვლას ჰორიზონტალური გვერდების მიმართ. ცხადია, რომ m კენტი უნდა იყოს, რადგან ტრაექტორიის საბოლოო წერტილი ემთხვევა საწყის A წერტილს. მართლაც, ბურთულას სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტი იცვლის ნიშანს მხოლოდ ჰორიზონტალური გვერდებიდან არეკვლის დროს. თავდაპირველად

(მოძრაობის დასაწყისში) ის დადებითია, ხოლო ბოლოს (საწყის წერტილში დაბრუნების წინ) — უარყოფითი. ამრიგად ჰორიზონტალური გვერდებიდან შუალედური არეკვლების რიცხვი კენტი უნდა იყოს, რომ შედეგად ბურთულას სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტის ნიშნის ცვლილება მივიღოთ. ვთქვათ $m = 2k - 1$. არეკვლების პროცედურის შედეგად, საწყისი A წერტილი ვერტიკალური მიმართულებით წანაცვლება $a + ma = 2ka$ მანძილით. დავითვალოთ მისი ჰორიზონტალური მიმართულებით წანაცვლება. თავდაპირველად $ENMF$ მართკუთხედში წანაცვლება უდრის $(b/2)$ -ს. არეკვლების შედეგად მიღებულ $NEFM$ საბოლოო მართკუთხედშიც წანაცვლება $(b/2)$ -ის ტოლია. დანარჩენი $(n - 1)$ არეკვლა ვერტიკალური გვერდების მიმართ მოგვცემს $(n - 1)b$ ჯამურ წანაცვლებას. ამრიგად A წერტილის სრული ჰორიზონტალური წანაცვლება იქნება

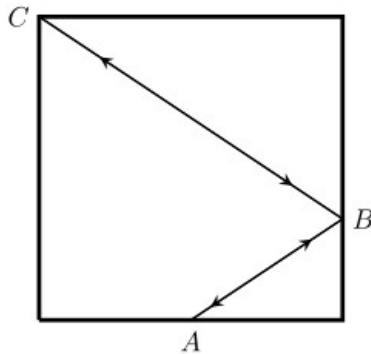
$$\frac{b}{2} + (n - 1)b + \frac{b}{2} = nb.$$

ახლა უკვე მარტივია φ კუთხის ტანგენტის გამოთვლა:

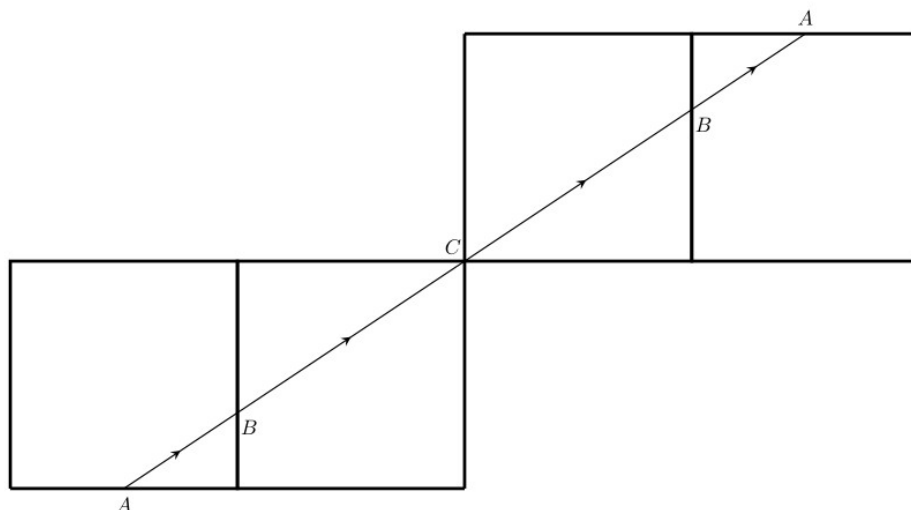
$$\tan \varphi = \frac{2ka}{nb}.$$

თუკი ბურთულას ასეთი კუთხით გავუშვებთ, ნებისმიერი მთელი $k > 0$ და $n \geq 0$ რიცხვებისათვის, ის საწყის წერტილში დაბრუნდება.

ასეთი ამოხსნა გულისხმობს, რომ მაგიდის კუთხეებში ხვრელები არ გვაქვს. როცა ბურთულა აღწევს მაგიდის კუთხეს, დარჩენილი სურათი უნდა ავრეკლოთ როგორც შესაბამისი ვერტიკალური გვერდის მიმართ, ასევე შესაბამისი ჰორიზონტალური გვერდის მიმართაც, მაგალითად, ასეთი სიტუაცია



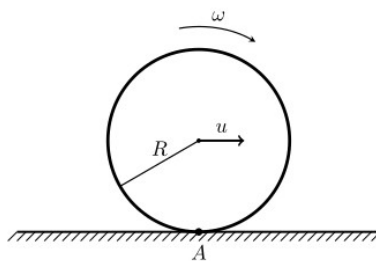
არეკვლების შედეგად მოგვცემს შემდეგ გაფართოებულ სურათს:



რაც შეესაბამება $k = 1$, $n = 3$ პარამეტრებს. ესე იგი, ჰორიზონტალური გვერდებიდან არეკვლების რიცხვია $2k - 1 = 1$, ხოლო ვერტიკალური გვერდებიდან არეკვლების რიცხვია $n = 3$.

1.29 ბორბალის ლერძის სიჩქარე

ვთქვათ ბორბალი მიგორავს მარჯვნივ, მისი ლერძის სიჩქარეა u და ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა ω (იხილეთ ნახაზი).

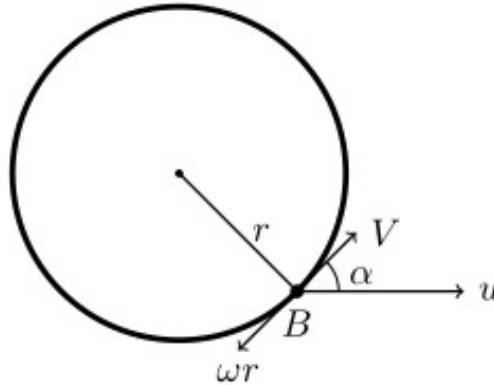


მიწასთან შეხების A წერტილი უძრავია (რადგან დასრიალებას ადგილი არა აქვს). მეორე მხრივ A წერტილი მონაწილეობს ორი სახის მოძრაობაში: გადატანითი მოძრაობა $\vec{u}$ სიჩქარით და ბრუნვითი მოძრაობა ω კუთხური სიჩქარით ბორბალის ცენტრის მიმართ. ბრუნვითი მოძრაობის გამო, A წერტილს ექნება ωR წრფივი სიჩქარე მიმართული $\vec{u}$ ვექტორის საწინააღმდეგოდ. რადგან A წერტილი დედამიწის

მიმართ უძრავია, გვექნება

$$u - \omega R = 0. \quad (1.29.1)$$

ახლა განვიხილოთ B წერტილი ბორბალის ღერძზე, სადაც ძაფი ღერძს ეხება (იხილეთ ნახაზი).



B წერტილს $\vec{u}$ გადატანითი მოძრაობის სიჩქარის გარდა, ბრუნვითი მოძრაობის ωr სიჩქარეც გააჩნია. მეორე მხრივ, რადგან ძაფი გაუჭიმავია, B წერტილის სრული სიჩქარის პროექცია ძაფის გასწვრივ უდრის V -ს. ამიტომ ვწერთ

$$u \cos \alpha - \omega r = V. \quad (1.29.2)$$

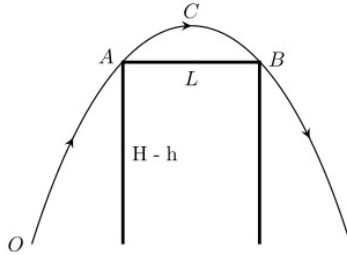
ორი განტოლება (1.29.1) და (1.29.2) საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ორი უცნობი სიდიდე u და ω . შედეგად მივიღებთ

$$\omega = \frac{V}{R \cos \alpha - r}, \quad u = \frac{VR}{R \cos \alpha - r}.$$

თუკი $\cos \alpha > r/R$, მაშინ u და ω დადებითია და ბორბალი ისე მოძრაობს, როგორც ვივარაუდეთ. მაგრამ თუკი $\cos \alpha < r/R$, მაშინ u და ω უარყოფითი ხდება. ეს ნიშნავს, რომ ბორბალი მიგორავს არა მარჯვნივ, როგორც ვივარაუდეთ, არამედ მის საპირისპიროთ, ე.ი. მარცხნივ. თუკი $\cos \alpha = r/R$, მაშინ u და ω უსასრულო ხდება. ეს ნიშნავს რომ ასეთი მოძრაობა შეუძლებელია. ესე იგი თუ ძაფს ამ კუთხით გავწევთ, ბორბალი აუცილებლად დასრიალდება.

1.30 ქვის მინიმალური სიჩქარე

ცხადია, რომ ოპტიმალურ შემთხვევაში ასეთი სურათი გვექნება:



ვთქვათ ქვის სიჩქარის ჰორიზონტალური კომპონენტია u . მაშინ ქვა ტრაექტორიის ACB მონაკვეთს გაივლის $t = L/u$ დროში და, მაშასადამე, ტრაექტორიის უმაღლესი C წერტილიდან B წერტილამდე ვარდნას დასჭირდება $t/2$ დრო. ამ დროის განმავლობაში, ვერტიკალური მიმართულებით ქვა შეიძენს $gt/2 = gL/(2u)$ სიჩქარეს. თუკი საწყისი O წერტილიდან ქვა V სიჩქარით ისროლეს, ენერგიის შენახვის კანონი, როცა შევადარებთ ქვის ენერგიას O და B წერტილებში, მოგვცემს

$$\frac{mV^2}{2} = mg(H - h) + \frac{m}{2} \left[u^2 + \left(\frac{gL}{2u} \right)^2 \right].$$

აქედან

$$V^2 = 2g(H - h) + u^2 + \left(\frac{gL}{2u} \right)^2.$$

როგორც ვხედავთ, V^2 (და მაშასადამე V) მინიმალური იქნება, თუკი მინიმალური იქნება ფუნქცია

$$f(x) = 2g * (H - h)_x + \frac{g^2 L^2}{4x},$$

სადაც $x = u^2$. რომ ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მინიმუმი, ვიპოვოთ მისი წარმოებული და გავუტოლოთ ნულს:

$$1 - \frac{g^2 L^2}{4x_m^2} = 0,$$

რაც გვაძლევს, რომ მინიმუმი მიიღწევა, როცა $x_m = gL/2$ და უდრის

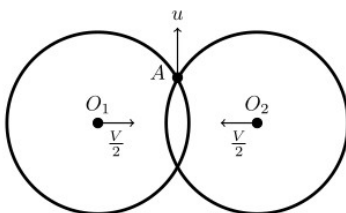
$$V_m^2 = 2g(H - h) + \frac{gL}{2} + \frac{gL}{2} = 2g(H - h) + gL.$$

ამრიგად, ქვის მინიმალური სიჩქარე უდრის

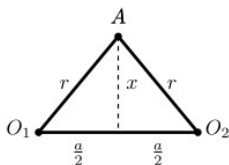
$$V_m = \sqrt{g[L + 2(H - h)]}.$$

1.31 რგოლების გადაკვეთის წერტილის სიჩქარე

გადავიდეთ იმ ათვლის S სისტემაში, რომელიც $V/2$ სიჩქარით მოძრაობს მარჯვნივ. ამ სისტემაში გვექნება სიმეტრიული სურათი (იხილეთ ნახაზი).



ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში, სიმეტრიის გამო, A წერტილი იმოძრაებს ვერტიკალურად ზევით (მას რომ ქონდეს სიჩქარის ჰორიზონტალური კომპონენტი მარცხნივ ან მარჯვნივ, ეს დაარღვევდა სურათის სიმეტრიას). ვიპოვოთ მისი u სიჩქარე ამ სისტემაში. A წერტილის დაშორება რგოლების ცენტრების შემაერთებელი წრფიდან აღვნიშნოთ x -ით. მაშინ $u = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$. მეორე მხრივ, x და ცენტრებს შორის მანძილი a დაკავშირებულია ერთმანეთთან პითაგორას თეორემით (იხილეთ ნახაზი):



$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2.$$

გავაწარმოოვოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი დროით:

$$2x\dot{x} + 2\frac{1}{4}a\dot{a} = 0.$$

ეს გვიჩვენებს, რომ

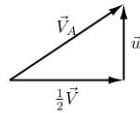
$$u = -\frac{1}{4} \frac{a}{x} \dot{a}.$$

მაგრამ $\dot{a} = V$ (O_1 წერტილი მოძრაობს მარჯვნივ $V/2$ სიჩქარით, ხოლო O_2 წერტილი — მარცხნივ $V/2$ სიჩქარით. ამრიგად O_1O_2 მონაკვეთის სიგრძე მცირდება $(V/2) +$

$(V/2) = V$ სიჩქარით). საბოლოოდ

$$u = -\frac{1}{4} \frac{aV}{x} = -\frac{1}{4} \frac{aV}{\sqrt{r^2 - (a/2)^2}}.$$

დავბრუნდეთ ახლა ისევ ლაბორატორიულ სისტემაში. ამ სისტემაში A წერტილის სიჩქარე $\vec{V}_A$ არის ვექტორული ჯამი A წერტილის $\vec{u}$ სიჩქარის S ათვლის სისტემის მიმართ და S სისტემის $\frac{1}{2}\vec{V}$ სიჩქარის ლაბორატორიული სისტემის მიმართ (იხილეთ ნახაზი).



პითაგორას თეორემა გვაძლევს

$$V_A^2 = u^2 + \frac{1}{4}V^2 = \frac{a^2V^2}{4} \frac{1}{4r^2 - a^2} + \frac{1}{4}V^2 = \frac{V^2}{4} \frac{4r^2}{4r^2 - a^2}.$$

საბოლოოდ

$$V_A = \frac{V}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r}\right)^2}}.$$

საინტერესოა, რომ დასაწყისში, როცა $a = 2r$, A წერტილის სიჩქარე უსასრულოა. მაგრამ ეს ინტეგრებადი უსასრულობაა. მართლაც, რგოლების შეხებიდან მცირე t დროის შემდეგ, $a = 2r - Vt$ და

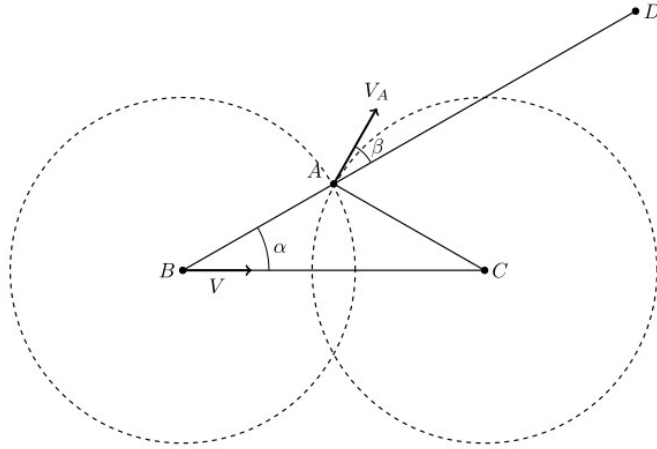
$$1 - \left(\frac{a}{2r}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{Vt}{2r}\right)^2 \approx \frac{Vt}{r}.$$

ამიტომ $V_A \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Vr}{t}}$ და

$$\int_0^t V_A dt \approx \frac{\sqrt{Vr}}{2} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{Vrt}$$

სასრულია.

მეორე ამოხსნა. A და C წერტილებს შორის მანძილი r -ის ტოლია და არ იცვლება (იხილეთ ნახაზი).



მაშასადამე A და C წერტილების სიჩქარეების პროექციები AC მონაკვეთის გასწვრივ ერთმანეთის ტოლია. მაგრამ C წერტილი უძრავია. ეს ნიშნავს, რომ A წერტილის სიჩქარე AC -ს პერპენდიკულარულია, ე.ი. უძრავი რგოლის მხების გასწვრივ არის მიმართული. ანალოგიურად, A და B წერტილებს შორის მანძილიც r -ის ტოლია და არ იცვლება. ამიტომ $V \cos \alpha = V_A \cos \beta$, სადაც β არის კუთხე $\vec{V}_A$ ვექტორსა და BD მონაკვეთს შორის. $\angle DAC$ არის $\triangle ABC$ სამკუთხედის გარე კუთხე. ამიტომ $\angle DAC = 2\alpha$ და $\beta = 90^\circ - \angle DAC = 90^\circ - 2\alpha$. მაშინ $\cos \beta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ და

$$V_A = \frac{V \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{V}{2 \sin \alpha}.$$

$\triangle ABC$ ტოლფერდა სამკუთხედში $BC = a$, $AB = AC = r$ და მაშასადამე $a = 2r \cos \alpha$. ამრიგად

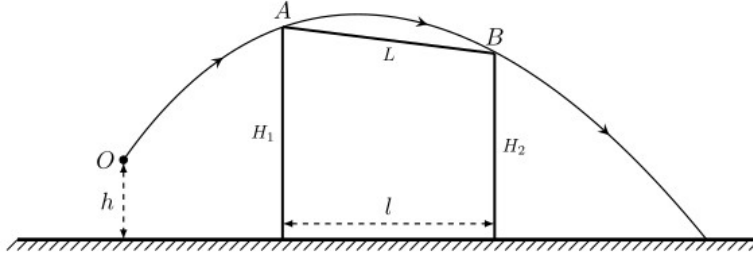
$$\cos \alpha = \frac{a}{2r}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2r}\right)^2},$$

და

$$V_A = \frac{V}{2\sqrt{1 - (a/2r)^2}}.$$

1.32 სახლი დახრილი სახურავით

ვთქვათ A წერტილში ქვის სიჩქარის კომპონენტებია $V_x = u$ (ჰორიზონტალური) და $V_y = V_1$ (ვერტიკალური), ხოლო B წერტილში $-V_x = u$, $V_y = -V_2$ (იხილეთ ნახაზი).



ქვას დასჭირდება $t = l/u$ დრო A წერტილიდან B წერტილამდე მისვლისათვის. ამ დროის განმავლობაში ქვის სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტი იცვლება V_1 -დან $-V_2$ -მდე. ამიტომ $-V_2 = V_1 - gt$ და

$$V_1 + V_2 = gt = \frac{gl}{u}, \quad (1.32.1)$$

სადაც $l = \sqrt{L^2 - (H_1 - H_2)^2}$. ქვის ენერგია A წერტილში იგივეა რაც B წერტილში (ენერგიის შენახვის კანონი):

$$\frac{m}{2} (V_1^2 + u^2) + mgH_1 = \frac{m}{2} (V_2^2 + u^2) + mgH_2.$$

აქედან მივიღებთ

$$V_2^2 - V_1^2 = (V_2 - V_1)(V_2 + V_1) = \frac{gl}{u}(V_2 - V_1) = 2g(H_1 - H_2),$$

ანუ

$$V_2 - V_1 = \frac{2u}{l}(H_1 - H_2). \quad (1.32.2)$$

(1.32.1) და (1.32.2) განტოლებების შეკრება და შედეგის 2-ზე გაყოფა მოგვცემს სიჩქარის V_2 კომპონენტას:

$$V_2 = \frac{gl}{2u} + \frac{u}{l}(H_1 - H_2). \quad (1.32.3)$$

დავწეროთ ენერგიის შენახვის კანონი სროლის საწყისი O წერტილის და B წერტილისათვის:

$$\frac{mV^2}{2} + mgh = \frac{m}{2} (V_2^2 + u^2) + mgH_2.$$

აქედან, (1.32.3)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$V^2 = u^2 + \left(\frac{gl}{2u} + \frac{u}{l}(H_1 - H_2) \right)^2 + 2g(H_2 - h). \quad (1.32.4)$$

მაგრამ

$$\left(\frac{gl}{2u} + \frac{u}{l} (H_1 - H_2) \right)^2 = \frac{g^2 l^2}{4u^2} + \frac{u^2 (H_1 - H_2)^2}{l^2} + g(H_1 - H_2)$$

და (1.32.4) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$V^2 = u^2 \left[1 + \frac{(H_1 - H_2)^2}{l^2} \right] + \frac{g^2 l^2}{4u^2} + g(H_1 + H_2 - 2h). \quad (1.32.5)$$

როგორც ვხედავთ $V^2 = f(\sigma)$, სადაც $\sigma = u^2$. მინიმალურ სროლის სიჩქარეს V_m -ს შესაბამემა

$$\frac{df}{d\sigma} = 1 + \frac{(H_1 - H_2)^2}{l^2} - \frac{g^2 l^2}{4\sigma^2} = 0,$$

რომლის ამოხსნაცაა

$$\sigma_m = u_m^2 = \frac{gl}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(H_1 - H_2)^2}{l^2}}} = \frac{gl^2}{2L},$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ $l = \sqrt{L^2 - (H_1 - H_2)^2}$. თუკი u_m^2 -ის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (1.32.5) განტოლებაში და გავითვალისწინებთ, რომ

$$u_m^2 \left[1 + \frac{(H_1 - H_2)^2}{l^2} \right] + \frac{g^2 l^2}{4u_m^2} = \frac{u_m^2 L^2}{l^2} + \frac{g^2 l^2}{4u_m^2} = \frac{gL}{2} + \frac{gL}{2} = gL,$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$V_m^2 = gL + g(H_1 + H_2 - 2h) = g(L + H_1 + H_2 - 2h).$$

1.33 რა დროში მიაღწევს ჭიანჭველა ლენტის ბოლოს?

დროის t მომენტში რეზინის ლენტის სიგრძე იქნება $L(t) = L + ut$, ხოლო ლენტის იმ ნაწილის სიჩქარე, რომელიც კედლიდან x მანძილზეა იქნება

$$u_x = \frac{x}{L(t)} u = \frac{ux}{L + ut}.$$

თუკი ჭიანჭველა ამ წერტილში იმყოფება, მისი სიჩქარე კედლის მიმართ $\dot{x}$ იქნება ლენტის მიმართ ჭიანჭველას V სიჩქარის და ლენტის შესაბამისი წერტილის u_x სიჩქარის ჯამი:

$$\dot{x} = V + \frac{ux}{L + ut}. \quad (1.33.1)$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა დროით (ესე იგი ვიზოვით ჭიანჭველას აჩქარება):

$$\ddot{x} = \frac{u\dot{x}}{L+ut} - \frac{u^2x}{(L+ut)^2}.$$

თუკი პირველ წევრში გავითვალისწინებთ (1.33.1)-ს, მივიღებთ

$$\ddot{x} = \frac{uV}{L+ut}. \quad (1.33.2)$$

დროის საწყის მომენტში $x = 0$ და (1.33.1)-ის თანახმად $\dot{x}(0) = V$. ამიტომ (1.33.2)-ის ინტეგრება მოგვცემს

$$\dot{x}(t) - V = \int_0^t \frac{uV}{L+ut} dt = V [\ln(L+ut) - \ln L],$$

ანუ

$$\dot{x}(t) = V \left[1 + \ln \left(1 + \frac{ut}{L} \right) \right]. \quad (1.33.3)$$

ვთქვათ $t = T$ მომენტში ჭიანჭველა აღწევს რეზინის ლენტის ბოლოს. მაშინ $x(T) = L + uT$ და (1.33.1) მოგვცემს $\dot{x}(T) = u + V$. ჩავსვათ ეს (1.33.3)-ში. შედეგად მივიღებთ

$$u = V \ln \left(1 + \frac{uT}{L} \right).$$

აქედან

$$1 + \frac{uT}{L} = e^{u/V}$$

და საბოლოოდ

$$T = \frac{L}{u} (e^{u/V} - 1) = (e^{100} - 1) \text{ წმ.}$$

მეორე ამოხსნა. არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება (1.33.1) შეიძლება ამოვხსნათ ლაგრანჟის მეთოდით (მუდმივთა ვარიაციის მეთოდით). ერთგვაროვანი განტოლება

$$\dot{x} = \frac{ux}{L+ut}$$

შეიძლება ასე გადავწეროთ (განვაცალოთ ცვლადები):

$$\frac{d}{dt} \ln x = \frac{u}{L+ut} = \frac{d}{dt} \ln(L+ut).$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ

$$\ln x - \ln x_0 = \ln \frac{x}{x_0} = \ln (L + ut) - \ln L = \ln \frac{L + ut}{L}.$$

ანუ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნაა $x(t) = A(L + ut)$, სადაც $A = x_0/L$ რალაც მუდმივაა. შესაბამისად არაერთგვაროვანი (1.33.1) განტოლების ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით: $x = A(t)(L + ut)$. მაგრამ მაშინ $\dot{x} = \dot{A}(L + ut) + Au$ და

$$\dot{x} - \frac{ux}{L + ut} = \dot{A}(L + ut).$$

ამიტომ (1.33.1) შესრულდება, თუკი

$$\dot{A}(L + ut) = V.$$

ეს არის მარტივი დიფერენციალური განტოლება $A(t)$ ფუნქციისათვის, რომელსაც ამოვხსნით ცვლადთა განცალების მეთოდით:

$$A - A_0 = \int_0^t \frac{V dt}{L + ut} = \frac{V}{u} \ln \frac{L + ut}{L}.$$

ამრიგად არაერთგვაროვანი (1.33.1) განტოლების ამონახსნია

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{V}{u} \ln \frac{L + ut}{L} \right) (L + ut).$$

$x(0) = 0$ საწყისი პირობა გვიჩვენებს, რომ A_0 მუდმივა ნულის ტოლია და საბოლოოდ ჭიანჭველას დაშორება კედლიდან დროის მიხედვით იცვლება ასე:

$$x(t) = \frac{V}{u} (L + ut) \ln \frac{L + ut}{L}.$$

როცა $t = T$, $x(T) = L + uT$ და მაშასადამე

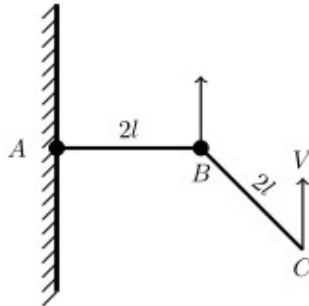
$$\frac{V}{u} \ln \frac{L + uT}{L} = 1,$$

რაც გვაძლევს

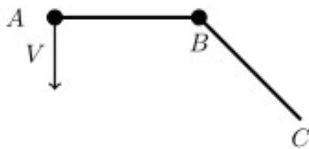
$$T = \frac{L}{u} \left(e^{u/V} - 1 \right).$$

1.34 სახსრული ბმულით შეერთებული ორი ღერო

განვიხილოთ მომენტი როცა პირველი (კედელზე მიბმული) ღერო ჰორიზონტალურია (იხილეთ ნახაზი).

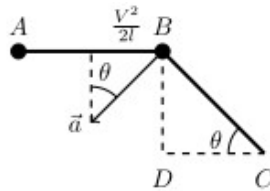


A და B წერტილების სიჩქარეების პროექციები პირველი ღეროს გასწვრივ ერთნაირი უნდა იყოს, რომ ღერომ თავისი სიგრძე არ შეიცვალოს. რადგან A წერტილი უძრავია, ეს ნიშნავს, რომ B წერტილის სიჩქარე პირველი ღეროს პერპენდიკულარულია და, მასაშადამე, იგივე კუთხეს ადგენს მეორე ღეროსთან, რასაც C წერტილის სიჩქარე $\vec{V}$. რადგან B და C წერტილების სიჩქარეების პროექციები მეორე ღეროს გასწვრივ ერთნაირი უნდა იყოს, აქედან ვასკვნით, რომ B წერტილის სიჩქარეც სიდიდით V -ს ტოლია. ამრიგად ბმულს (B წერტილს) გააჩნია ცენტრისკენული (A წერტილისაკენ მიმართული) აჩქარება $V^2/(2l)$. მისი სრული აჩქარების მიმართულება რომ ვიპოვოთ, გადავიდეთ იმ ათვლის სისტემაში, რომელიც V სიჩქარით მოძრაობს ვერტიკალურად ზევით. B წერტილის აჩქარება ამ სისტემაში იგივე იქნება, რაც თავდაპირველ (ლაბორატორიულ) სისტემაში, რადგან ორივე სისტემა ინერციულია. ამ სისტემაში C წერტილი მუდმივად უძრავია, ხოლო B წერტილის სიჩქარე მოცემულ მომენტში უდრის ნულს (იხილეთ ნახაზი)



ამრიგად B წერტილის ცენტრისკენული (C წერტილისაკენ მიმართული) აჩქარება დროის ამ მომენტში ნულის ტოლია და ამ სისტემაში B -ს სრული აჩქარება ემთხვევა მის ტანგენციალურ აჩქარებას, ე.ი. მიმართულია BC -ს პერპენდიკულარულად. დავბრუნ-

დეთ ახლა ლაბორატორიულ სისტემაში. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ B წერტილის აჩქარებისათვის ასეთი სურათი გვაქვს (იხილეთ ნახაზი):



ამიტომ $a \sin \theta = V^2/(2l)$ და

$$a = \frac{V^2}{2l \sin \theta}. \quad (1.34.1)$$

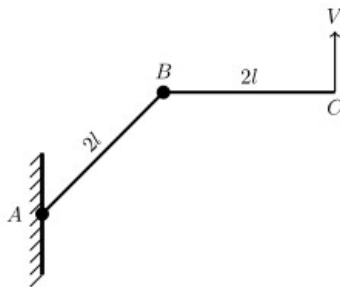
მეორე მხრივ, $\triangle BDC$ მართკუთხა სამკუთხედში $\angle BCD = \theta$, $BC = 2l$ და $DC = 3l - 2l = l$ (გავიხსენოთ, რომ C წერტილი კედლიდან ყოველთვის $3l$ მანძილზეა). ამიტომ

$$\sin \theta = \frac{BD}{BC} = \frac{\sqrt{(2l)^2 - l^2}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

და (1.34.1) მოგვცემს

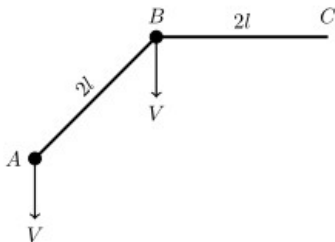
$$a = \frac{V^2}{\sqrt{3}l}.$$

ბ) ცხადია, რომ B წერტილის სიჩქარე მხოლოდ მაშინ შეიძლება იყოს ნული, როცა C წერტილის სიჩქარის პროექცია მეორე ღეროს გასწვრივ ნულის ტოლია, ე.ი. როცა მეორე ღერო ჰორიზონტალურია, მაგალითად, როგორც ნახაზზე:

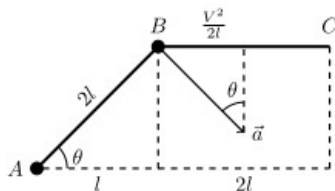


ამ შემთხვევაში B წერტილს მხოლოდ ტანგენციალური აჩქარება გააჩნია, რომელიც მიმართულია AB ღეროს პერპენდიკულარულად. მეორე მხრივ, თუკი გადავალთ

ათვლის სისტემაში, რომელიც ვერტიკალურად ზემოთ მოძრაობს V სიჩქარით, ამ სისტემაში C წერტილი უძრავია და გვექნება ასეთი სურათი (იხილეთ ნახაზი):



ამრიგად B წერტილის აჩქარებას აქვს C წერტილისაკენ მიმართული კომპონენტი სიდიდით $V^2/(2l)$. შესაბამისად B წერტილის აჩქარებისათვის გვექნება ასეთი სურათი (იხილეთ ნახაზი):



ამრიგად $a \sin \theta = V^2/(2l)$. მაგრამ

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(2l)^2 - l^2}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

და საბოლოოდ

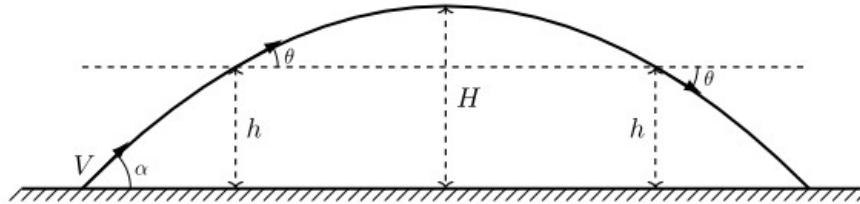
$$a = \frac{V^2}{\sqrt{3}l}.$$

მივიღეთ იგივე შედეგი, რაც ა) შემთხვევაში. ეს გასაკვირი არ არის, რადგან იმ სისტემაში, რომელიც ვერტიკალურად ზემოთ მოძრაობს V სიჩქარით, კონფიგურაცია ანალოგიურია ა) კონფიგურაციის ლაბორატორიულ სისტემაში.

1.35 რა მანძილზე დაეცემა ჭურვი?

ვთქვათ ჭურვის ტრაექტორიის მაქსიმალური სიმაღლე არის H , ხოლო საწყისი სიჩქარე V . ტრაექტორიის წვერო მას ორ სიმეტრიულ ნაწილად ყოფს. ესე იგი

ჭურვის დაშვების დროსაც h სიმაღლეზე მისი სიჩქარე სიდიდით იგივე θ კუთხეს ადგენს ჰორიზონტთან (იხილეთ ნახაზი).



ჭურვი H სიმაღლიდან h სიმაღლემდე დაშვების დროს შეიძენს სიჩქარის ვერტიკალურ კომპონენტს $|V_y| = \sqrt{2g(H-h)}$. მეორე მხრივ, როცა ჭურვი მიწაზე დაეცემა, მისი სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტა იქნება საწყისი ვერტიკალური კომპონენტის საპირისპირო. ამიტომ $V \sin \alpha = \sqrt{2gH}$ და შესაბამისად $|V_y| = \sqrt{V^2 \sin^2 \alpha - 2gh}$. ჭურვის სიჩქარის ჰორიზონტალური კომპონენტა $V_x = V \cos \alpha$ არ იცვლება. ამიტომ h სიმაღლეზე გვექნება

$$\tan \theta = \frac{|V_y|}{V_x} = \frac{\sqrt{V^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{V \cos \alpha},$$

ანუ $2gh = V^2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \theta)$ და

$$V^2 = \frac{2gh}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \theta}.$$

ჭურვი დაეცემა $t = 2V \sin \alpha / g$ დროის შემდეგ (ამ დროის განმავლობაში ჭურვის სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტა $V \sin \alpha$ იცვლის ნიშანს) გასროლის წერტილიდან

$$L = V \cos \alpha t = \frac{2V^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4h \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \tan^2 \theta} = \frac{4h \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \theta}$$

მანძილზე. საინტერესოა, რომ L არ არის დამოკიდებული g თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაზე.

1.36 რა დროის შემდეგ დაეცა მიწაზე მეორე ნამსხვრევი?

ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, ნამსხვრევეები ერთმანეთზე სიდიდით ტოლი და ურთიერთსაპირისპირო ძალებით მოქმედებენ. ამიტომ ჭურვის სისტემაში ნამსხვრევეები ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებებით გაფრინდებიან სიდიდით ერთი და იგივე სიჩქარით. კერძოდ, მათი სიჩქარეების ვერტიკალური კომპონენტები ტოლი

და საპირისპირო იქნება. რადგან ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში ჭურვის სიჩქარე ჰორიზონტალურია, ის ნამსხვრევების სიჩქარეების ვერტიკალურ კომპონენტებზე გავლენას ვერ მოახდენს. ესე იგი ლაბორატორიულ (დედამიწის) სისტემაშიც ნამსხვრევების სიჩქარეების ვერტიკალური კომპონენტები სიდიდით ტოლი და საპირისპირო იქნება (უფრო მარტივად ამ დასკვნის გაკეთება შეიძლება იმპულსის შენახვის კანონის გამოყენებით). ვთქვათ ერთი ნამსხვრევის სიჩქარის ვერტიკალური კომპონენტაა u , ხოლო მეორის $-u$. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$h = ut_1 + \frac{1}{2}gt_1^2, \quad (1.36.1)$$

და

$$h = -ut_2 + \frac{1}{2}gt_2^2. \quad (1.36.2)$$

თუკი პირველი განტოლებიდან გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ

$$u(t_1 + t_2) + \frac{g}{2}(t_1^2 - t_2^2) = (t_1 + t_2) \left[u + \frac{g}{2}(t_1 - t_2) \right] = 0.$$

აქედან $u = \frac{g}{2}(t_2 - t_1)$. ჩავსვათ ეს (1.36.1) განტოლებაში

$$h = \frac{g}{2}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{g}{2}t_1t_2.$$

ამიტომ

$$t_2 = \frac{2h}{gt_1}.$$

1.37 ბურთულებს შორის მანძილი

ვთქვათ ღარების გასწვრივ მოძრაობისას A ბურთულას აჩქარებაა $\vec{g}_1$, ხოლო B ბურთულასი $-\vec{g}_2$. მოვათავსოთ ათვლის სისტემის სათავე A წერტილში. მაშინ t დროის შემდეგ A ბურთულას რადიუს-ვექტორი იქნება $\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\vec{g}_1t^2$, ხოლო B ბურთულასი $-\vec{r}_2 = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{g}_2t^2$. ბურთულებს შორის მანძილის კვადრატი არის

$$d^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = \left[\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{\Delta g}t^2 \right]^2, \quad (1.37.1)$$

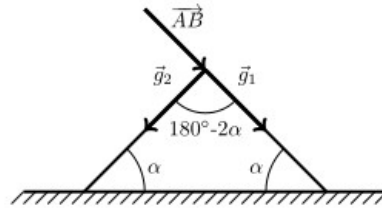
სადაც $\vec{\Delta g} = \vec{g}_2 - \vec{g}_1$. ბურთულებს შორის უმცირეს მანძილს შეესაბამება

$$\frac{d}{dt}d^2 = 2 \left[\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{\Delta g}t^2 \right] \cdot \vec{\Delta g}t = 2t \left(\vec{AB} \cdot \vec{\Delta g} + \frac{1}{2}(\vec{\Delta g})^2t^2 \right) = 0.$$

აქედან

$$t^2 = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{\Delta g}}{(\vec{\Delta g})^2}. \quad (1.37.2)$$

$\vec{g}_1$ და $\vec{g}_2$ ვექტორებს შორის კუთხე უდრის $(180^\circ - 2\alpha)$ -ს (იხილეთ ნახაზი).



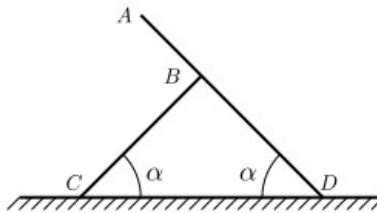
თანაც $|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2| = g \sin \alpha$ ($\vec{g}$ თავისუფალი ვარდნის აჩქარების პროექცია დახრილი ღარების გასწვრივ). ამიტომ $(\vec{\Delta g})^2 = \vec{g}_1^2 + \vec{g}_2^2 - 2\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 2g^2 \sin^2 \alpha [1 - \cos(180^\circ - 2\alpha)] = 2g^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha) = 4g^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$. გარდა ამისა $\vec{AB} \cdot \vec{g}_1 = Lg \sin \alpha$, სადაც $L = |\vec{AB}|$, და $\vec{AB} \cdot \vec{g}_2 = Lg \sin \alpha \cos(180^\circ - 2\alpha) = -Lg \sin \alpha \cos 2\alpha$. ამიტომ

$$\vec{AB} \cdot \vec{\Delta g} = -Lg \sin \alpha \cos 2\alpha - Lg \sin \alpha = -2Lg \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინება (1.37.2)ში მოგვცემს

$$t^2 = 2 \frac{2Lg \sin \alpha \cos^2 \alpha}{4g^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{L}{g \sin \alpha}. \quad (1.37.3)$$

ვიპოვოთ L . $L = AD - BD = AD - BC$ (იხილეთ ნახაზი).



$BC = BD$ იმიტომ, რომ სამკუთხედი $\triangle BCD$ ტოლფერდაა. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$AD = \frac{1}{2} g_1 t_1^2 = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_1^2$$

და

$$BC = \frac{1}{2}g_2 t_2^2 = \frac{1}{2}g \sin \alpha t_2^2.$$

ამრიგად

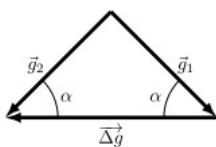
$$L = \frac{1}{2}g \sin \alpha (t_1^2 - t_2^2)$$

და თუ ამას ჩავსვამთ (1.37.3)-ში, საბოლოოდ მივიღებთ

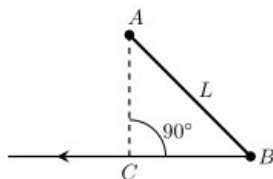
$$t^2 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) \quad \text{და} \quad t = \sqrt{\frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)}.$$

მეორე ამოხსნა. გადავიდეთ A ბურთულასთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში.

ამ სისტემაში B ბურთულას აჩქარება $\vec{\Delta g} = \vec{g}_2 - \vec{g}_1$ ჰორიზონტალურია (იხილეთ ნახაზი).



რადგან B ბურთულას საწყისი სიჩქარე ამ სისტემაშიც ნულის ტოლია, ის რომ მისი აჩქარება $\vec{\Delta g}$ ჰორიზონტალურია ნიშნავს, რომ ამ სისტემაში B ბურთულა მოძრაობს ჰორიზონტალურად $\vec{\Delta g}$ ვექტორის გასწვრივ (იხილეთ ნახაზი).



ცხადია, რომ ბურთულებს შორის მანძილი მინიმალური იქნება, როცა B ბურთულა C წერტილში მივა. ამოცანის პირობის თანახმად, AB მონაკვეთი ჰორიზონტთან α კუთხეს ადგენს. ამიტომ $CB = L \cos \alpha$. მეორე მხრივ, თუკი B ბურთულას t დრო დასჭირდა C წერტილში მისასვლელად, $CB = \frac{1}{2}|\vec{\Delta g}|t^2 = g \sin \alpha \cos \alpha t^2$, რადგან $|\vec{\Delta g}| = 2g \sin \alpha \cos \alpha$. ამრიგად $L \cos \alpha = g \sin \alpha \cos \alpha t^2$, რაც (1.37.3) განტოლების ეკვივალენტურია.

1.38 ჭურვების ტრაექტორიების მხები წირი

ვთქვათ ქვემეხმა გაისროლა ჰორიზონტისადმი α კუთხით. თუკი ათვლის სისტემის სათავეს ქვემეხს დავამთხვევთ, ჭურვის მოძრაობის განტოლებები იქნება $x = V_0 \cos \alpha t$ და $y = V_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$. პირველი განტოლებიდან გამოვსახოთ დრო $t = x/(V_0 \cos \alpha)$ და ჩავსვათ მეორეში. მივიღებთ ჭურვის ტრაექტორიის განტოლებას:

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha). \quad (1.38.1)$$

x -კოორდინატის ყოველი მნიშვნელობისათვის, მაქსიმალურ სიმაღლეს მოგვცემს ის ჭურვი, რომლის გასროლის კუთხე α შეესაბამება (1.38.1) განტოლებით მოცემული $y(\alpha)$ ფუნქციის მაქსიმუმს. სინამდვილეში y მხოლოდ $\tan \alpha$ -ზე არის დამოკიდებული. ამიტომ მაქსიმალური სიმაღლის შესაბამისი α_m კუთხე განისაზღვრება პირობით

$$\left. \frac{dy}{d \tan \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_m} = x - \frac{gx^2}{V_0^2} \tan \alpha_m.$$

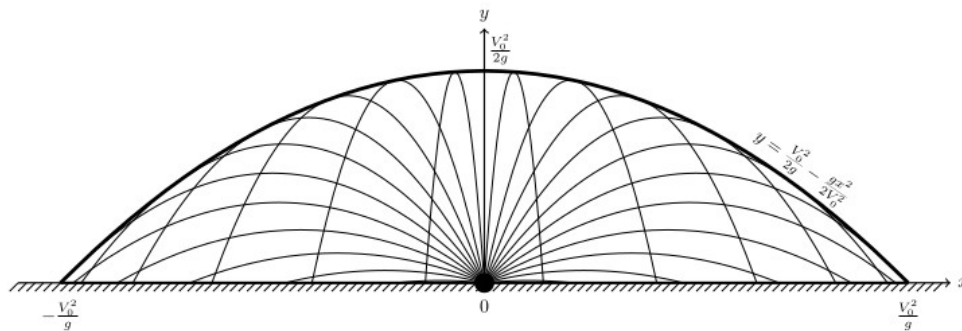
რაც გვაძლევს

$$\tan \alpha_m = \frac{V_0^2}{gx}.$$

თუკი ამას ჩავსვამთ (1.38.1)-ში $\tan \alpha$ -ს ნაცვლად, მივიღებთ იმ წირის განტოლებას, რომლის ზემოთაც ჭურვები ვერ აღიან:

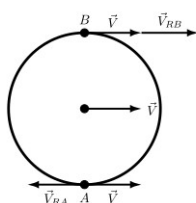
$$y = x \frac{V_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2V_0^2} \left(1 + \frac{V_0^4}{g^2 x^2} \right) = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}.$$

ეს არის პარაბოლა (იხილეთ ნახაზი).



1.39 ციკლოიდის სიმრუდის რადიუსი

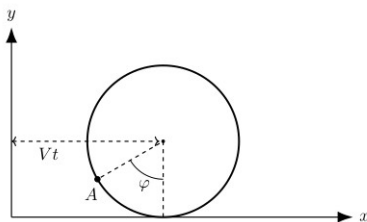
ვთქვათ ბორბალი V სიჩქარით მიგორავს. ბორბლის ყოველი წერტილი მონაწილეობს როგორც გადატანით მოძრაობაში V სიჩქარით ბორბლის ცენტრთან ერთად, ასევე ბრუნვით მოძრაობაში ბორბლის ცენტრის მიმართ. ქვემო A წერტილში გადატანითი მოძრაობის $\vec{V}$ სიჩქარე და ბრუნვითი მოძრაობის $\vec{V}_{RB}$ სიჩქარე ურთიერთსაპირისპიროა და მიმართული, ხოლო ზედა B წერტილში მათ ერთი მიმართულება აქვთ (იხილეთ ნახაზი).



თუკი ბორბალი სრიალის გარეშე მიგორავს, A წერტილი უძრავია: $\vec{V} + \vec{V}_{RA} = 0$. აქედან $V_R = |\vec{V}_{RB}| = |\vec{V}_{RA}| = V$ და B წერტილის სიჩქარე დედამიწის მიმართ იქნება $V_B = V + V_R = 2V$. ბორბლის ცენტრთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში, B წერტილს აქვს $a_c = V^2/R$ ცენტრისკენული აჩქარება. დედამიწის მიმართ B წერტილის აჩქარებაა $\vec{a}_B = \vec{a}_c + \vec{a}$, სადაც $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ არის ბორბლის გადატანითი მოძრაობის აჩქარება და ის ჰორიზონტალურადაა მიმართული. ამრიგად B წერტილის აჩქარების ტრაექტორიისადმი პერპენდიკულარული კომპონენტი იქნება $a_{Bn} = a_c = V^2/R$. ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი B წერტილში არის

$$\rho = \frac{V_B^2}{a_{Bn}} = \frac{4V^2}{V^2/R} = 4R.$$

მეორე ამოხსნა. A წერტილის კოორდინატები დროის t მომენტში იქნება (იხილეთ ნახაზი)



$$x = Vt - R \sin \omega t, \quad y = R - R \cos \omega t. \quad (1.39.1)$$

რადგან ბორბალი სრიალის გარეშე მიგორავს, $V = \omega R$ და (1.39.1) შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi). \quad (1.39.2)$$

თუკი ციკლოიდის სიმრუდის რადიუსი (x, y) წერტილში არის ρ , მაშინ მოიძებნება ისეთი წრე

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho^2, \quad (1.39.3)$$

რომელიც ამ წერტილის მახლობლობაში ემთხვევა ციკლოიდას ისე, რომ x და y (1.39.3)-ში შეიძლება შევცვალოთ მათი მნიშვნელობებით (1.39.2)-დან მეორე რიგის სიმცირის წევრების სიზუსტით. ასე რომ (1.39.3) განტოლების ორივე მხარე შეიძლება გავაწარმოოთ φ -თი და x -ის და y -ის პირველი და მეორე წარმოებულები შეიძლება ვიპოვოთ (1.39.2) ტოლობების გამოყენებით. ეს მოგვცემს

$$(1 - \cos \varphi)(x - x_c) + \sin \varphi(y - y_c) = 0, \quad (1.39.4)$$

სადაც

$$R(1 - \cos \varphi) = \frac{dx}{d\varphi}, \quad R \sin \varphi = \frac{dy}{d\varphi}.$$

კიდევ ერთხელ გაწარმოება მოგვცემს

$$\sin \varphi(x - x_c) + \cos \varphi(y - y_c) + R[(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi] = 0, \quad (1.39.5)$$

(1.39.4) და (1.39.5) შეადგენენ განტოლებათა სისტემას ორი უცნობით: $x - x_c$ და $y - y_c$. მისი ამოხსნა მოგვცემს

$$x - x_c = -2R \sin \varphi, \quad y - y_c = 2R(1 - \cos \varphi).$$

ჩავსვათ ეს (1.39.3) ტოლობაში:

$$\rho^2 = 4R^2 [\sin^2 \varphi + (1 - \cos \varphi)^2] = 8R^2(1 - \cos \varphi) = 16R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

ამრიგად

$$\rho = 4R \sin \frac{\varphi}{2}$$

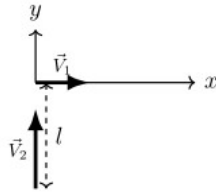
და რადგან ციკლოიდის უმაღლეს წერტილს შეესაბამება $\varphi = \pi$, ამ წერტილში $\rho = 4R$.

1.40 იზოვით აჩქარება

ვთქვათ $\vec{r}_1$ მელის რადიუს-ვექტორია, $\vec{r}_2$ — ძალის. პირობის თანახმად, $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ვექტორი ძალის $\vec{V}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \dot{\vec{r}}_2$ სიჩქარის ვექტორის პარალელურია. ესე იგი

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = k(t)\vec{V}_2, \quad (1.40.1)$$

სადაც პროპორციულობის კოეფიციენტი $k(t)$ დამოკიდებულია დროზე. დევნის დასაწყისში, $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{r}_1 = (0, -l)$, $\vec{V}_2 = (0, V_2)$ და (1.40.1) მოგვცემს $k(0) = l/V_2$. დევნის ბოლოს, როცა ძალი მელის დაიჭერს (თუკი $V_2 > V_1$), $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 0$ და შესაბამისად $k(T) = 0$. იგულისხმება, რომ დევნა გრძელდება T დროის განმავლობაში და იწყება იმ მომენტში, როცა $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული არიან (იხილეთ ნახაზი).



გავაწარმოთ (1.40.1) განტოლება:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \dot{k}\vec{V}_2 + k\dot{\vec{V}}_2. \quad (1.40.2)$$

რადგან ძალის სიჩქარე სიდიდით არ იცვლება, ამიტომ

$$\frac{dV_2^2}{dt} = \frac{d\vec{V}_2^2}{dt} = 2\vec{V}_2 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{dt} = 2\vec{V}_2 \cdot \dot{\vec{V}}_2 = 0.$$

ესე იგი ძალის აჩქარება $\dot{\vec{V}}_2$ ყოველთვის პერპენდიკულარულია მისი $\vec{V}_2$ სიჩქარის. გავამრავლოთ (1.40.2) განტოლება სკალარულად $\vec{V}_2$ -ზე და გავითვალისწინოთ $\vec{V}_2 \cdot \dot{\vec{V}}_2 = 0$, მივიღებთ

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 - V_2^2 = \dot{k}(t)V_2^2. \quad (1.40.3)$$

დროის საწყის $t = 0$ მომენტში, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ და (1.40.3) გვიჩვენებს, რომ $\dot{k}(0) = -1$. ამიტომ (1.40.2) განტოლება $t = 0$ მომენტში მიიღებს სახეს

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 + k(0)\dot{\vec{V}}_2 = -\vec{V}_2 + \frac{l}{V_2}\dot{\vec{V}}_2.$$

აქედან ვიპოვიტ ძალის აჩქარებას დროის საწყის მომენტში:

$$\dot{\vec{V}}_2(0) = \frac{V_2 \vec{V}_1}{l}.$$

1.41 რა დროში დაიჭერს ძალის მელას?

(1.40.3) განტოლებიდან

$$\int_0^T \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 dt - \int_0^T V_2^2 dt = \int_0^T \dot{k}(t) V_2^2 dt. \quad (1.41.1)$$

მაგრამ V_2^2 არ არის დამოკიდებული დროზე. ამიტომ $\int_0^T V_2^2 dt = V_2^2 T$ და

$$\int_0^T \dot{k}(t) V_2^2 dt = V_2^2 \int_0^T \dot{k}(t) dt = V_2^2 [k(T) - k(0)] = -lV_2,$$

რადგან $k(T) = 0$ და $k(0) = l/V_2$. მეორე მხრივ, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_{2x}$, რადგან $\vec{V}_1$ სიჩქარე ყოველთვის x -ღერძის გასწვრივია მიმართული. ამიტომ

$$\int_0^T \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 dt = V_1 \int_0^T V_{2x} dt = V_1^2 T,$$

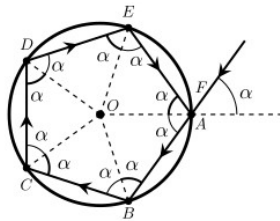
რადგან $\int_0^T V_{2x} dt = \int_0^T V_{1x} dt = V_1 T$ (x -ღერძის გასწვრივ ძალის და მელისა გადაადგილებები დაჭერის მომენტამდე ურთიერთტოლია). ამრიგად (1.41.1) მიიღებს სახეს: $(V_1^2 - V_2^2)T = -lV_2$. აქედან

$$T = \frac{lV_2}{V_2^2 - V_1^2}.$$

1.42 რა პირობებში ამოვა ბურთულა ჭიდან?

აბსოლიტურად დრეკადი არეკვლის დროს (ჭის კედლებიდან) სიჩქარის ვერტიკალური კომ/ფონენტა არ იცვლება. ამიტომ ჭის კედლების არსებობა ვერტიკალური მიმართულებით მოძრაობაზე გავლენას ვერ მოახდენს. მაშასადამე $H = \frac{1}{2}gt^2$, სადაც t

არის ის დრო რომლის განმავლობაშიც ბურთულა დაეცემა ფსკერზე, სადაც ის აბსოლიტურად დრეკადად აირეკლება და ისევ t დროის შემდეგ ის აღმოჩნდება საწყის სიმაღლეზე. ეს ნიშნავს, რომ ყოველი $t_n = n \cdot 2t = 2n\sqrt{\frac{2H}{g}}$ დროის შემდეგ ბურთულა საწყის სიმაღლეზე იქნება. ბურთულა ამოვა ჭიდან, თუკი ამ დროს ის აღმოჩნდება ჭის პერიმეტრთან. განვიხილოთ ჰორიზონტალური მოძრაობა (იხილეთ ნახაზი. ის შეესაბამება $\alpha = 54^\circ$ კუთხეს).



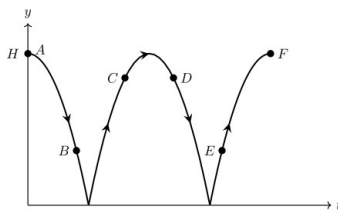
რადგან $OA = OB = R$, ამიტომ $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$. $\angle OBC = \angle OBA$ რადგან არეკვლა აბსოლუტურად დრეკადია. მაშასადამე $\triangle OCB = \triangle OBA$ და $CB = BA = 2R \cos \alpha$. ანალოგიურად $DC = CB$, $GE = DC$ და ა. შ. მაშასადამე ბურთულა ჭის კედლებთან აღმოჩნდება ყოველი

$$T_m = m \frac{AB}{V_0} = m \frac{2R \cos \alpha}{V_0}$$

დროის შემდეგ, სადაც m მთელი რიცხვია. ბურთულა ამოვა ჭიდან თუკი მოიძებნება ისეთი მთელი n და m რიცხვები, რომ $t_n = T_m$, ანუ

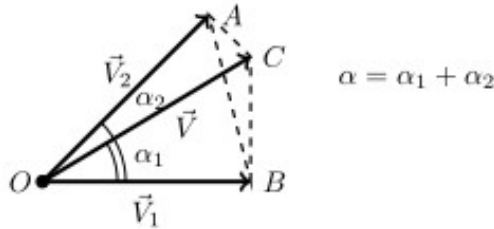
$$n\sqrt{\frac{2H}{g}} = m \frac{R \cos \alpha}{V_0}.$$

ვთქვათ ბურთულა ჭიდან ამოდის F წერტილში (რომელიც საწყის A წერტილს დაემთხვევა თუკი $\alpha = 54^\circ$). მაშინ ბურთულას ვერტიკალური y კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება სქემატურად ნაჩვენებია ნახაზზე და ასე გამოიყურება (თუკი $n = 2$ და $m = 5$):



1.43 რა სიჩქარით მოძრაობს ყუთი?

ტროსის სიგრძე არ იცვლება, თუკი მისი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის პროექცია ტროსის გასწვრივ ერთი და იგივეა ტროსის ყველა წერტილისათვის. მაშასადამე ყუთი ისეთი $\vec{V}$ სიჩქარით მოძრაობს, რომ მისი პროექცია პირველ ტროსზე უდრის V_1 -ს და მეორე ტროსზე V_2 -ს. ეს გვიჩვენებს, რომ $\vec{V}$ ასე შეიძლება ვიპოვოთ: მოვდოთ $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ერთ საწყის წერტილში. იგივე წერტილი იქნება $\vec{V}$ ვექტორის სათავე. $\vec{V}_1$ და $\vec{V}_2$ ვექტორების ბოლოებიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარები ამ ვექტორების მიმართ. ამ პერპენდიკულარების გადაკვეთა მოგვცემს $\vec{V}$ ვექტორის ბოლოს (იხილეთ ნახაზი).



$\triangle OAC$ და $\triangle OCB$ მართკუთხა სამკუთხედებიდან $AC = V \sin \alpha_2$ და $CB = V \sin \alpha_1$. მაგრამ $\angle ACB = 360^\circ - \alpha - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ - \alpha$ და რადგან $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\triangle ACB$ სამკუთხედში კოსინუსების თეორემა მოგვცემს

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \cdot CB \cos \alpha = V^2 [\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha].$$

მაგრამ რადგან $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\cos \alpha = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$, $\sin \alpha = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2$ და ადვილად შევამოწმებთ, რომ

$$\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha = [\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2]^2 = \sin^2 \alpha.$$

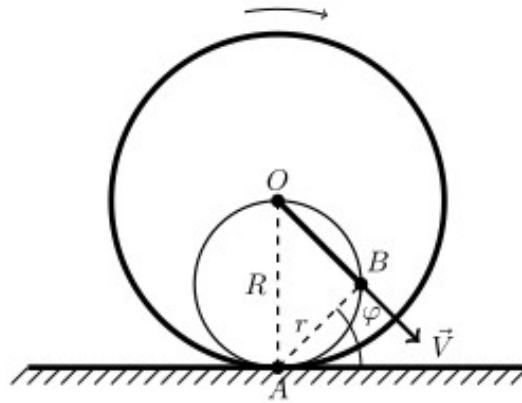
მაშასადამე $V = AB / \sin \alpha$. მეორე მხრივ, კოსინუსების თეორემა $\triangle OAB$ სამკუთხედში გვაძლევს $AB^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \alpha$. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ ყუთის სიჩქარეა

$$V = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \alpha}.$$

1.44 მოძრავი ველოსიპედის სურათი

სპიცი B წერტილის გამოსახულება არ გაიდლაბნება, თუკი მისი სიჩქარე $\vec{V}$ ამ სპიცის პარალელურია. ბორბლის ბრუნვის მყისიერი ცენტრია A (რადგან ბორბლის ამ

წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია). ესე იგი $\vec{V}$ პერპენდიკულარულია AB რადიუს-ვექტორის (იხილეთ ნახაზი).



თუკი B წერტილის პოლარული კოორდინატებია (r, φ) , მაშინ $\angle OAB = 90^\circ - \varphi$ და $\triangle OAB$ მართკუთხა სამკუთხედიდან $r = R \cos \angle OAB = R \sin \varphi$. ვიპოვოთ B წერტილის დეკარტეს კოორდინატები:

$$x = r \cos \varphi = R \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} R \sin 2\varphi,$$

$$y = r \sin \varphi = R \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} R (1 - \cos 2\varphi).$$

მაშასადამე

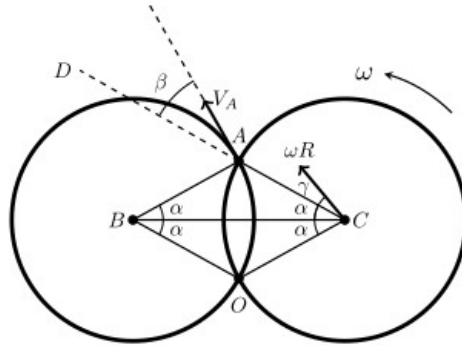
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}R\right)^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2.$$

ეს არის წრის განტოლება, რომლის ცენტრიც $(0, R/2)$ წერტილშია და რადიუსია $R/2$. ამრიგად არ გაიდლანებებიან ის წერტილები, რომლებიც განლაგებულია $R/2$ რადიუსის წრეზე, რომლის დიამეტრიცაა OA .

1.45 მაქსიმალური და მინიმალური სიჩქარე

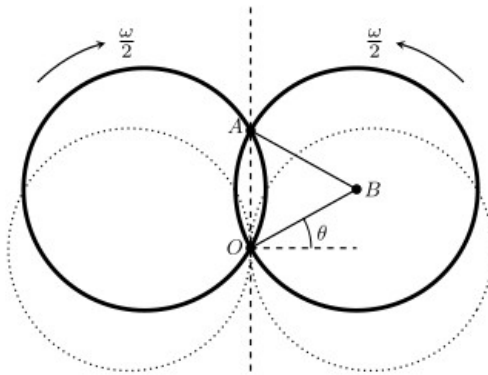
A და B წერტილებს შორის მანძილი არ იცვლება (უდრის r -ს). მაშასადამე A და B წერტილების სიჩქარეების პროექციები AB მიმართულებაზე ერთი და იგივეა. რადგან B წერტილი უძრავია, ეს ნიშნავს, რომ A წერტილის სიჩქარე $\vec{V}_A$ AB

მონაკვეთის პერპენდიკულარულია (ე.ი. უძრავი რგოლის მხედის გასწვრივია მიმართული). ანალოგიურად, ის რომ A და C წერტილებს შორის მანძილი უცვლელია (ისიც უდრის r -ს) ნიშნავს, რომ $V_A \cos \beta = V_C \cos \gamma$ (იხილეთ ნახაზი).



$\angle DAB = 2\alpha$, როგორც $\triangle BAC$ სამკუთხედის გარე კუთხე. მაშასადამე $\beta = 90^\circ - \angle DAB = 90^\circ - 2\alpha$. მეორე მხრივ, $\triangle BAC = \triangle BOC$ და მაშასადამე $\angle BCO = \alpha$. მაშინ $\gamma = 90^\circ - \angle ACB - \angle BCO = 90^\circ - 2\alpha$. როგორც ვხედავთ, $\beta = \gamma$ და მაშასადამე $V_A = V_C = \omega R$, რაც ნიშნავს რომ A წერტილის მოძრაობის დროს მისი სიჩქარის სიდიდე არ იცვლება და უდრის (ωR) -ს.

მეორე ამოხსნა. გადავიდეთ სისტემაში, რომელიც $\frac{1}{2}\omega$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს იმავე მიმართულებით, როგორც მბრუნავი რგოლი. ამ სისტემაში, სიმეტრიიდან გამომდინარე, A წერტილი ვერტიკალურად მოძრაობს AO წრფის გასწვრივ (იხილეთ ნახაზი).



თუკი $t = 0$ დროის მომენტში A და O წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ

$\theta = \frac{1}{2}\omega t$ და $\angle AOB = 90^\circ - \theta$. $\triangle AOB$ ტოლფერდა სამკუთხედიდან

$$AO = 2R \cos \angle AOB = 2R \sin \theta = 2R \sin \left(\frac{1}{2}\omega t \right).$$

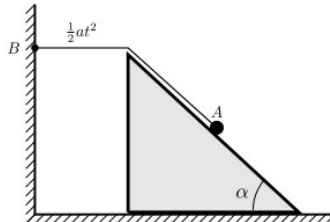
მაშასადამე A წერტილის სიჩქარე მბრუნავ სისტემაში არის

$$V'_A = \frac{d}{dt}AO = R\omega \cos \left(\frac{1}{2}\omega t \right).$$

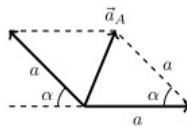
მბრუნავი სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ, რომელიც A წერტილს ემთხვევა დროის მოცემულ მომენტში, არის $u_A = \frac{1}{2}\omega AO = R\omega \sin \left(\frac{1}{2}\omega t \right)$. A წერტილის სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ არის $\vec{V}_A = \vec{V}'_A + \vec{u}_A$. მაგრამ $\vec{V}'_A$ და $\vec{u}_A$ ურთიერთპერპენდიკულარულია, რადგან $\vec{u}_A$ პერპენდიკულარულია AO რადიუს-ვექტორის. მაშასადამე $V_A^2 = V_A'^2 + u_A^2 = R^2\omega^2$ და $V_A = R\omega$ არ არის დამოკიდებული დროზე.

1.46 რას უდრის ბურთულას აჩქარება?

ძაფის იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც პრიზმაზეა მცირდება $\frac{at^2}{2}$ -ით t დროში (იხილეთ ნახაზი).



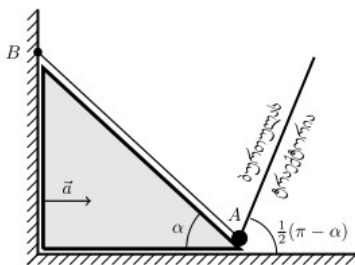
მაშასადამე A ბურთულას აჩქარება პრიზმის მიმართ უდრის a -ს და მიმართულია პრიზმის ზედაპირის გასწვრივ ზემოთ. მეორე მხრივ თავად პრიზმა უძრავი სისტემის მიმართ მოძრაობს იგივე a აჩქარებით, ოღონდ ჰორიზონტალურად. უძრავი სისტემის მიმართ ბურთულას აჩქარება $\vec{a}_A$ უდრის ამ ორი აჩქარების ვექტორულ ჯამს (იხილეთ ნახაზი).



კოსინუსების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

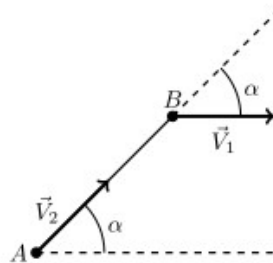
$$a_A^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha) = 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

მაშასადამე $a_A = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$. რადგან $\vec{a}_A$ მუდმივი ვექტორია და A ბურთულას საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, მისი ტრაექტორია იქნება წრფის მონაკვეთი $\vec{a}_A$ ვექტორის გასწვრივ, სანამ ბურთულა პრიზმაზე იქნება (იხილეთ ნახაზი).



1.47 რას უდრის მინიმალური მანძილი?

ვთქვათ დროის რაღაც მომენტში ძალის სიჩქარე $\vec{V}_2$ α კუთხეს ადგენს ჰორიზონტთან (იხილეთ ნახაზი).



ცხადია, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე $V_2 - V_1 \cos \alpha$ სიჩქარით მცირდება. ამიტომ თუკი $\vec{r}$ არის რადიუს-ვექტორი ძალლიდან მელიამდე,

$$\frac{dr}{dt} = V_1 \cos \alpha - V_2.$$

მეორე მხრივ, $\vec{r}$ ვექტორის x -პროექცია Δt დროში გაიზრდება $V_1 \Delta t$ -თი B წერტილის მოძრაობის ხარჯზე და შემცირდება $V_2 \cos \alpha \Delta t$ -თი A წერტილის მოძრაობის ხარჯზე.

ამიტომ

$$\frac{d}{dt}r_x = V_1 - V_2 \cos \alpha.$$

მაშინ

$$V_2 \frac{dr}{dt} + V_1 \frac{d}{dt}r_x = V_1^2 - V_2^2.$$

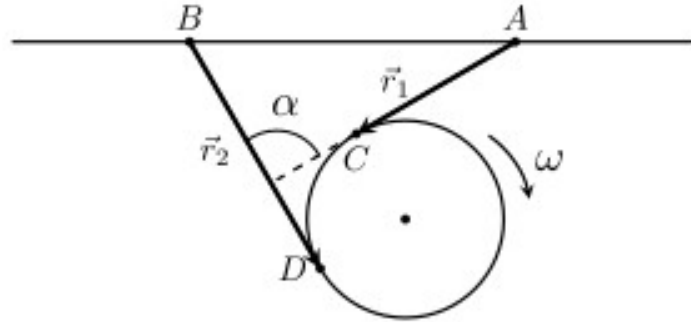
თუკი $V_1 = V_2 = V$, მივიღებთ

$$V \frac{d}{dt}(r + r_x) = 0$$

და $r + r_x = \text{const.}$ დევნის დასაწყისში $r_x = 0$, $r = l$. დიდი დროის შემდეგ ძალლი და მელა პრაქტიკულად ერთ ხაზზე იმოძრავენ და, მასასადამე, $r_x = r = l_{\min}$. მაშინ $r + r_x$ სიდიდის შენახვის კანონი მოგვცემს $l = 2l_{\min}$ და $l_{\min} = \frac{1}{2}l$.

1.48 დისკის ცენტრის სიჩქარე

დისკის ყოველი წერტილი მონაწილეობს ორ მოძრაობაში: გადატანითი მოძრაობა დისკის ცენტრთან ერთად და ბრუნვითი მოძრაობა დისკის ცენტრის გარშემო. ალვნიშნით $\vec{r}_1 = \vec{AC}$ და $\vec{r}_2 = \vec{BD}$ (იხილეთ ნახაზი).



გავშალოთ დისკის ცენტრის სიჩქარე $\vec{V}$ $\vec{r}_1/r_1$ და $\vec{r}_2/r_2$ ერთეული ვექტორების მიმართ:

$$\vec{V} = \alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \beta \frac{\vec{r}_2}{r_2}.$$

მაშინ

$$V^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \alpha, \quad (1.48.1)$$

რადგან $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = r_1 r_2 \cos \alpha$. დისკის C წერტილის სიჩქარე არის

$$\vec{V}_C = \vec{V} - \omega R \frac{\vec{r}_1}{r_1} = (\alpha - \omega R) \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \beta \frac{\vec{r}_2}{r_2},$$

ხოლო D წერტილის სიჩქარე

$$\vec{V}_D = \vec{V} - \omega R \frac{\vec{r}_2}{r_2} = (\beta - \omega R) \frac{\vec{r}_2}{r_2} + \alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1}.$$

რადგან ძაფი უჭიმვადია, A და C წერტილების სიჩქარეების პროექციები AC მიმართულებაზე ერთი და იგივეა. მაგრამ A წერტილი უძრავია. ამიტომ C წერტილის სიჩქარე AC -ს პერპენდიკულარული უნდა იყოს. ამრიგად

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{V}_C = (\alpha + \beta \cos \alpha - \omega R) r_1 = 0,$$

რაც გვაძლევს

$$\alpha + \beta \cos \alpha = \omega R. \quad (1.48.2)$$

ანალოგიური მსჯელობა B და D წერტილების მიმართ მოგვცემს

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{V}_D = (\alpha \cos \alpha + \beta - \omega R) r_2 = 0.$$

მაშასადამე

$$\alpha \cos \alpha + \beta = \omega R. \quad (1.48.3)$$

თუკი (1.48.2) განტოლებიდან გამოვაკლებთ (1.48.3) განტოლებას, მივიღებთ $(\alpha - \beta)(1 - \cos \alpha) = 0$ და რადგან $\cos \alpha \neq 1$, დავასკვნით, რომ $\alpha = \beta$. მაშინ (1.48.2) მოგვცემს

$$\alpha = \frac{\omega R}{1 + \cos \alpha}.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინება (1.48.1)-ში მოგვცემს

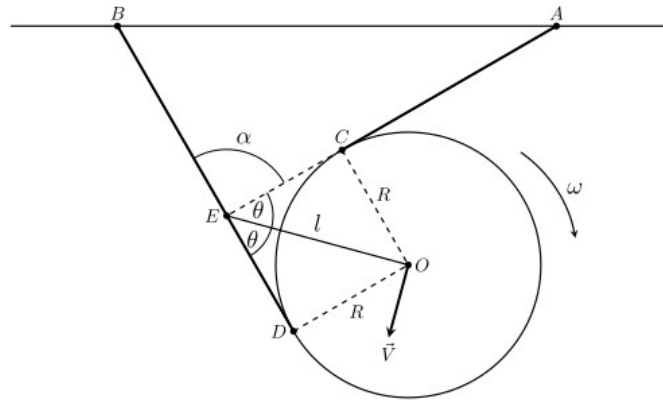
$$V^2 = \frac{2\omega^2 R^2}{1 + \cos \alpha} = \frac{\omega^2 R^2}{\cos^2 (\alpha/2)}.$$

მაშასადამე

$$V = \frac{\omega R}{\cos (\alpha/2)}.$$

მეორე ამოხსნა. როგორც უკვე ვნახეთ, ძაფების გაუჭიმვადობა ნიშნავს, რომ C წერტილის სიჩქარე AC ძაფის პერპენდიკულარულია, ხოლო D წერტილის სიჩქარე

BD ძაფის პერპენდიკულარულია. ამიტომ დისკის ბრუნვის მყისიერი ცენტრი AC და BD წრფეების გადაკვეთის E წერტილში მდებარეობს. მაშინ დისკის O ცენტრის სიჩქარე იქნება EO მონაკვეთის პერპენდიკულარული და ტოლი ωl -ის, სადაც $l = R/\sin\theta$ არის EO მონაკვეთის სიგრძე (O წერტილის დაშორება ბრუნვის მყისიერი ცენტრიდან, იხილეთ ნახაზი).



ნახაზიდან ცხადია, რომ $\alpha + 2\theta = \pi$. მაშასადამე

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad l = \frac{R}{\cos(\alpha/2)},$$

და დისკის ცენტრის სიჩქარე იქნება

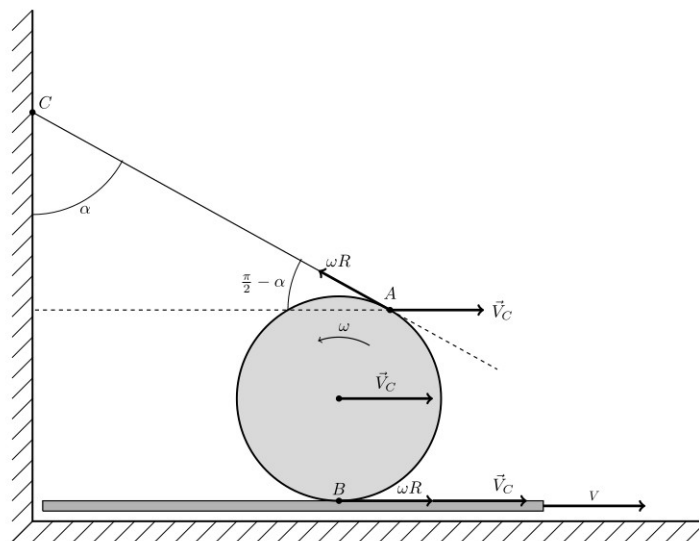
$$V = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}.$$

1.49 ცილინდრის ლერძის სიჩქარე

ცილინდრის ყოველი წერტილი მოწაწილედს ორ მოძრაობაში: გადატანითი მოძრაობა ცილინდრის ცენტრთან ერთად $\vec{V}_C$ სიჩქარით და ბრუნვითი მოძრაობა ცილინდრის ცენტრის გარშემო რაღაც ω კუთხური სიჩქარით. რადგან ცილინდრი დასრიალების გარეშე მოძრაობს, ცილინდრის B წერტილის სიჩქარე იგივეა რაც ჰორიზონტალური ზედაპირის სიჩქარე და მაშასადამე უდრის V -ს. მეორე მხრივ, B წერტილში ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარეს და $\vec{V}_C$ ვექტორს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ (იხილეთ ნახაზი). ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$V = V_c + \omega R \quad (1.49.1)$$

განვიხილოთ ახლა ცილინდრის A წერტილი. რადგან გაუჭიმვადი ძაფის C წერტილი უძრავია, A წერტილის სიჩქარის პროექცია ძაფის გასწვრივ ნულის ტოლი უნდა იყოს. A წერტილში ბრუნვითი მოძრაობის ωR სიჩქარე ძაფის გასწვრივ არის მიმართული, ხოლო გადატანითი მოძრაობის $\vec{V}_C$ სიჩქარის პროექცია ძაფის გასწვრივ საპირისპირო ნიშნისაა და სიდიდით უდრის $V_C \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = V_C \sin \alpha$ -ს (იხილეთ ნახაზი).

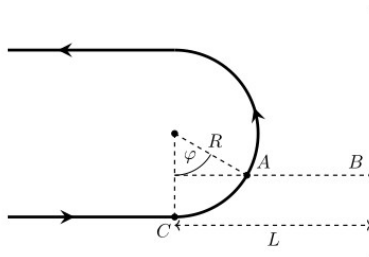


ამიტომ $\omega R = V_C \sin \alpha$. ამის გათვალისწინება (1.49.1)-ში მოგვცემს

$$V_C = \frac{V}{1 + \sin \alpha}.$$

1.50 მოტორიანი ნავი და კილვატერული ტალღები

A წერტილში გამოსხივებული ტალღა ნაპირის B წერტილში მივა $t_1 = \frac{AB}{u}$ დროის შემდეგ (იხილეთ ნახაზი).



მაგრამ ნავს დასჭირდება $t_2 = \frac{R\varphi}{V}$ დრო რომ C წერტილიდან A წერტილში მივიდეს. ამრიგად B წერტილში ტალღა მივა ნავის შემობრუნების დაწყებიდან $t = t_1 + t_2$ დროის შემდეგ. ნახაზიდან ცხადია, რომ $AB = L - R \sin \varphi$. ამიტომ

$$t = \frac{L - R \sin \varphi}{u} + \frac{R\varphi}{V}. \quad (1.50.1)$$

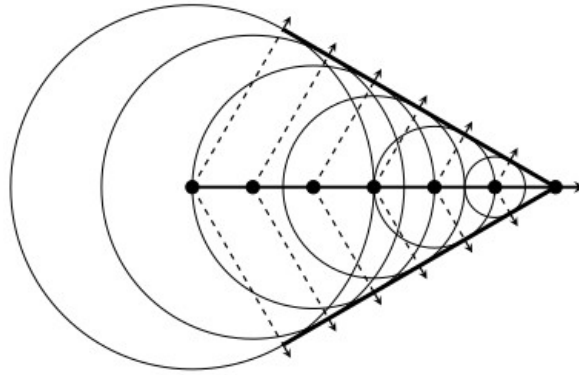
რომ ვიპოვოთ, თუ რა φ_m კუთხე შეესაბამება იმ ტალღას, რომელიც ყველაზე ადრე მივა ნაპირთან, გავაწარმოოთ $t(\varphi)$ ფუნქცია და შედეგი გავუტოლოთ ნულს:

$$\frac{R}{V} - \frac{R}{u} \cos \varphi_m = 0.$$

აქედან $\cos \varphi_m = u/V$ და ამის გათვალისწინება (1.50.1)-ში მოგვცემს

$$t_m = \frac{L}{u} + \frac{R}{V} \arccos \frac{u}{V} - \frac{R}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{V^2}}.$$

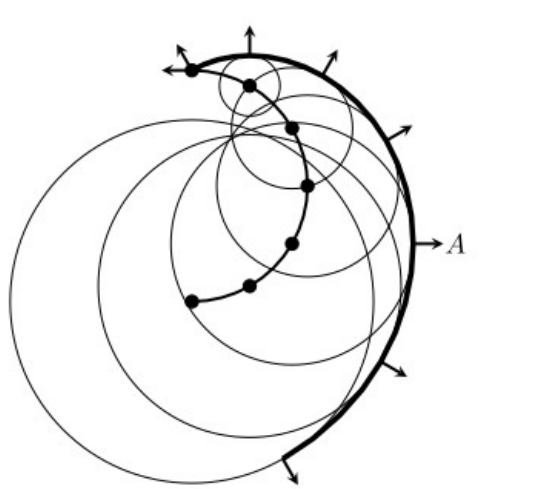
მეორე ამოხსნა. ჰიუგენსის პრინციპის თანახმად, როცა ნავი $V > u$ სიჩქარით მოძრაობს წყლის ზედაპირზე ის აღაგზნებს კილვატერულ ტალღას სოლისებრი ფრონტით (იხილეთ ნახაზი).



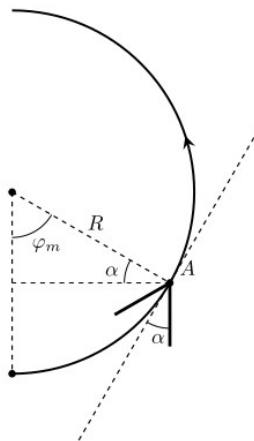
თუკი ნავი t დროში გადაადგილდება Vt მანძილზე, საწყის წერტილში წარმოშვებული ტალღა გადაადგილდება ut მანძილზე. ამიტომ ნახაზიდან ცხადია, რომ სოლისებური ფრონტის ნახევრადგაშლის კუთხე (მახის კუთხე) α განისაზღვრება პირობიდან

$$\sin \alpha = \frac{u}{V}.$$

რადგან ტალღის ფრონტი ვრცელდება მისადმი პერპენდიკულარული მიმართულებით, ნახაზიდან ცხადია, რომ ნაპირთან პირველად მივა ფრონტის ის ნაწილი, რომელიც ჰორიზონტალურად მოძრაობს (ნახაზზე ეს არის ნაწილი A).



მაშასადამე, გამოსხივების მომენტში, ფრონტის A ნაწილის შესაბამისი მახის კუთხის გვერდი ჰორიზონტალური იყო (იხილეთ ნახაზი).



ნახაზიდან ცხადია, რომ $\varphi_m = 90^\circ - \alpha$. მაშასადამე

$$\cos \varphi_m = \sin \alpha = \frac{u}{V}.$$

საინტერესოა ვიპოვოთ კილვატერული ტალღის ფრონტის ფორმა იმ შემთხვევაში, როცა ნავი ნახევარწრეზე მოძრაობს. მათემატიკიდან ცნობილია, რომ თუკი მოცემულია φ პარამეტრზე დამოკიდებული წირების ოჯახი $F(x, y, \varphi) = 0$, მაშინ ამ ოჯახის მხები წირი (ოჯახის შემადგენელი წირების მომვლები) განისაზღვრება განტოლებებით

$$F(x, y, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} F(x, y, \varphi) = 0.$$

მოძრავი ნავი ტრაექტორიის იმ წერტილში, რომელსაც φ კუთხე შეესაბამება, დროის $t_\varphi = \frac{R\varphi}{V}$ მომენტში აღაგზნებს წრიულ ტალღას წყლის ზედაპირზე. თუკი ჩვენ საბოლოო სურათს ვუყურებთ დროის იმ $t = t_\pi$ მომენტში, როცა ნავი შემობრუნებას ამთავრებს, მაშინ ამ წრიული ტალღის რადიუსი იქნება $u(t - t_\varphi) = \epsilon R(\pi - \varphi)$, სადაც $\epsilon = u/V$. ამიტომ დროის $t = t_\pi$ მომენტში აღზნებული წრიული ტალღების ოჯახი მოიცემა განტოლებით

$$F(x, y, \varphi) = (x - R \sin \varphi)^2 + (y + R \cos \varphi)^2 - \epsilon^2 R^2 (\pi - \varphi)^2 = 0. \quad (1.50.2)$$

რომ ვიპოვოთ ამ წრეების მომვლები წირი, (1.50.2) განტოლებას უნდა დავუმატოთ განტოლება

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} F(x, y, \varphi) = \cos \varphi (x - R \sin \varphi) + \sin \varphi (y + R \cos \varphi) - \epsilon^2 R (\pi - \varphi) = 0. \quad (1.50.3)$$

აღვნიშნოთ

$$A = x - R \sin \varphi, \quad B = y + R \cos \varphi.$$

მაშინ (1.50.3)-ის თანახმად

$$A = \frac{1}{\cos \varphi} [\epsilon^2 R (\pi - \varphi) - \sin \alpha B] \quad (1.50.4)$$

და თუ ამას ჩავსვამთ (1.50.2) განტოლებაში, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას B სიდიდის მიმართ:

$$B^2 - 2\epsilon^2 R (\pi - \varphi) \sin \varphi B + \epsilon^2 R^2 (\epsilon^2 - \cos^2 \varphi) = 0.$$

მისი ამოხსნა მოგვცემს

$$B = \epsilon^2 R (\pi - \varphi) \sin \varphi \pm \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} R (\pi - \varphi) \cos \varphi.$$

შესაბამის A -ს ვიპოვიოთ (1.50.4)-ის გამოყენებით:

$$A = \epsilon^2 R (\pi - \varphi) \cos \varphi \mp \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} R (\pi - \varphi) \sin \varphi.$$

რადგან $\epsilon = \sin \alpha$,

$$\epsilon \cos \alpha \mp \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \varphi = \sin(\alpha \mp \varphi), \quad \epsilon \sin \alpha \pm \sqrt{1 - \epsilon^2} \cos \varphi = \pm \cos(\alpha \mp \varphi).$$

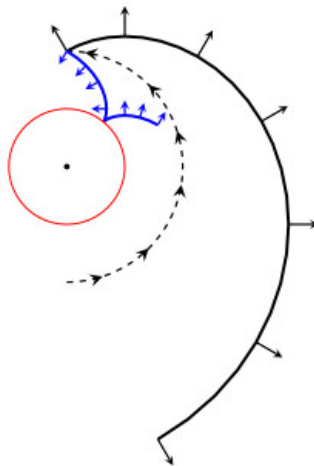
ამიტომ საბოლოოდ გარე და შიგა კილვატერული ტალღების ფრონტები აღიწერება განტოლებებით

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= R \sin \varphi + \epsilon R(\pi - \varphi) \sin(\alpha \pm \varphi), \\ y_{\pm} &= -R \cos \varphi \mp \epsilon R(\pi - \varphi) \cos(\alpha \pm \varphi). \end{aligned} \quad (1.50.5)$$

შევნიშნოთ, რომ

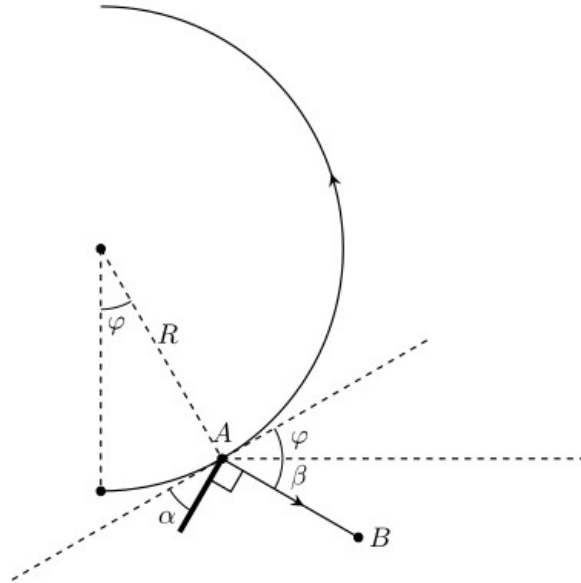
$$r_{\pm}^2 = x_{\pm}^2 + y_{\pm}^2 = R^2 + u^2(t - t_{\varphi})^2 \pm 2Ru(t - t_{\varphi}) \cos \alpha$$

და მას აქვს მინიმალური მნიშვნელობა $r_{min} = R \sin \alpha = \epsilon R$, რომელიც შიდა კილვატერული ტალღისათვის (r_-) მიიღწევა ფიზიკურად დასაშვები $t - t_{\varphi} = \frac{R}{u} \cos \alpha > 0$ დროის მომენტში (გარე კილვატერული ტალღისათვის, r_+ მინიმუმს აღწევს როცა $t - t_{\varphi} = -\frac{R}{u} \cos \alpha < 0$, რაც გვაძლევს არაფიზიკურ სიტუაციას, რადგან ამ შემთხვევაში დაკვირვების დრო t ნაკლებია ფრონტის იმ ფრაგმენტის გამოსხივების t_{φ} დროზე, რომლის რადიუს-ვექტორის სიდიდეც გვანტერესებს დროის ამ მომენტში). ეს ნიშნავს რომ შიდა კილვატერული ტალღის ფრონტს აქვს კაუსტიკა (წაწვეთებული შვერილი, იხილეთ ნახაზი) და მისი ფრონტის არცერთი ნაწილი არ შედის $r_{min} = \epsilon R$ რადიუსის წრის შიგნით (წითელი წრე ნახაზზე).



(1.50.5) განტოლებები შეიძლება მივიღოთ უფრო ფიზიკური მოსაზრებებიდანაც. გავაკეთოთ ეს გარე კილვატერული ტალღისათვის. ტალღის ფრონტის ის ნაწილი,

რომელიც გამოსხივდა φ კუთხის შესაბამის A წერტილში, $t - t_\varphi$ დროის განმავლობაში გადაადგილდება მახის კუთხის გარე გვერდის პერპენდიკულარულად $AB = u(t - t_\varphi)$ მანძილზე და აღმოჩნდება B წერტილში (იხილეთ ნახაზი).



ნახაზიდან ცხადია, რომ $\alpha + 90^\circ + \beta + \varphi = 180^\circ$. მაშასადამე $\beta = 90^\circ - (\alpha + \varphi)$ და B წერტილის კოორდინატები იქნება

$$x = R \sin \varphi + AB \cos \beta = R \sin \varphi + u(t - t_\varphi) \sin (\alpha + \beta)$$

და

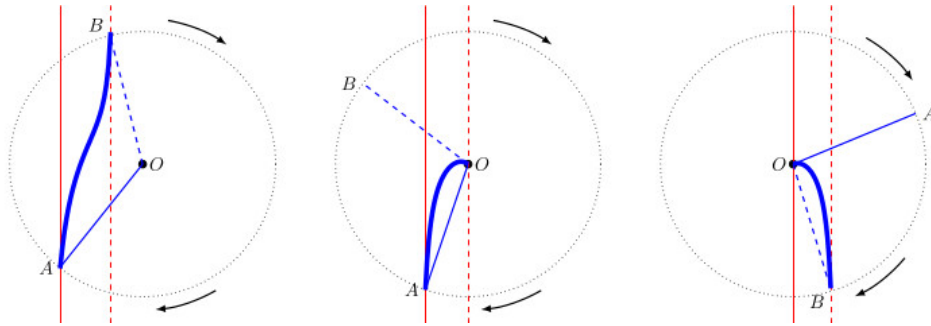
$$y = -R \cos \varphi - AB \sin \beta = -R \cos \varphi - u(t - t_\varphi) \cos (\alpha + \beta).$$

მაგრამ რადგან $u(t - t_\varphi) = \epsilon R(\pi - \varphi)$, ეს იგივეა, რაც x_+ და y_+ (1.50.5) განტოლებებიდან.

1.51 თვითმფრინავის მბრუნავი პროპელერის ფოტო

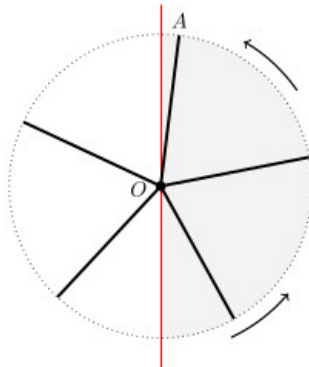
ვთქვათ პროპელერი ბრუნავს საათის ისრის მიმართულებით და ვთქვათ OA ლაპოტი შეხვდა სკანირების ვერტიკალურ ხაზს, რომელიც მარცხნიდან მარჯვნივ მოძრაობს, A წერტილში და დაიწყოს ამ ლაპოტის გამოსახულება ფოტოზე. ეს გამოსახულება დროებით დამთავრდება ან B წერტილში, როცა ლაპოტი გადაასწრებს სკანირების ხაზს (იხილეთ მარცხენა ნახაზი), ან პროპელერის ცენტრალურ O წერტილში, თუკი

სკანირების ხაზი მივა O წერტილში მანამდე, ვიდრე ლაპოტი მას გადაასწრებს (იხილეთ შუათანა ნახაზი). კიდევ ერთი ვარიანტი, როცა ლაპოტის გამოსახულება მთლიანად ფოტოს ქვედა ნაწილში იქნება, შეესაბამება სიტუაციას, როცა იმ მომენტში, როცა სკანირების ვერტიკალური ხაზი O წერტილში მივა, ლაპოტი მის მარჯვნივ იმყოფება, ასე რომ ლაპოტის გამოსახულება ფოტოზე იწყება O წერტილში და მთავრდება B წერტილში, როცა სკანირების ხაზი ლაპოტის გადკვეთას შეწყვიტავს (იხილეთ მარჯვენა ნახაზი).



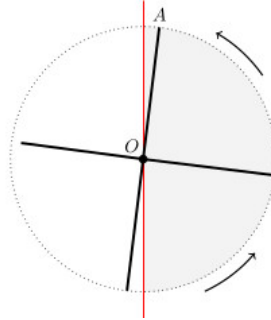
ამრიგად ამ შემთხვევაში მოსალოდნელია, რომ ფოტოს ქვედა ნაწილში ლაპოტების უფრო მეტი გამოსახულება გვექნება, ვიდრე ზედა ნაწილში. რადგან პროპელერის ფოტოზე სრულიად საწინააღმდეგო სიტუაცია გვაქვს, ვასკვნით, რომ პროპელერი საათის საწინააღმდეგოდ ბრუნავს.

ფოტოზე ლაპოტის ერთი გამოსახულება თითქმის ვერტიკალური სწორი ხაზის მონაკვეთია. ეს ნიშნავს, რომ როცა სკანირების ვერტიკალურ ხაზმა მიაღწია O ცენტრს, ერთ-ერთი ლაპოტი (OA) მის წინ იყო და მცირე კუთხეს ადგენდა ვერტიკალთან (იხილეთ ნახაზი).

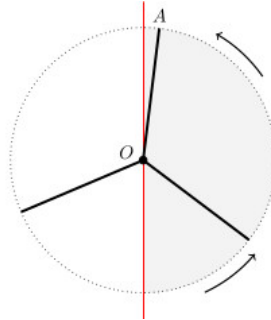


ამ ლაპოტის გამოსახულებას ფოტოზე ქვედა ნაწილი არა აქვს. ეს ნიშნავს, რომ

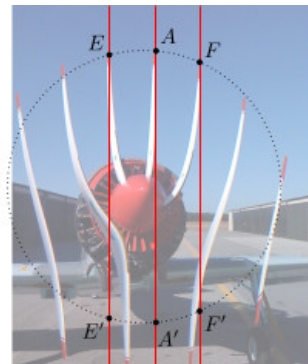
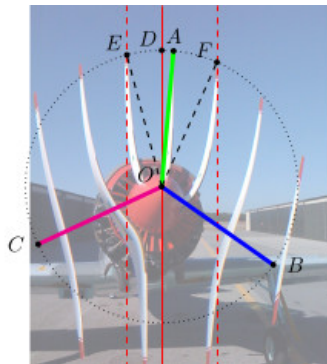
პროპელერის ლაპოტების რიცხვი კენტია (ვგულისხმობთ, რო ლაპოტები პროპელერში სიმეტრიულად არიან განლაგებული. იხილეთ ნახაზი).



გარდა ამისა ნახაზიდან ცხადია, რომ ყველა იმ ლაპოტის გამოსახულება, რომლებიც დროის ამ მომენტში სკანირების ხაზის მარჯვნივ არიან, დაიწყება O წერტილში. ფოტოზე OA ლაპოტის გამოსახულების გარდა მხოლოდ ერთი ასეთი გამოსახულებაა. ამიტომ ვასკვნით, რომ პროპელერის ლაპოტების რიცხვი უდრის სამს (იხილეთ ნახაზი).



აღნიშნოთ $\angle DOA = \beta$, $\angle DOF = \alpha_1$ და $\angle DOE = \alpha_2$ (იხილეთ მარცხენა ნახაზი).



უშუალო გაზომვით (მაგალითად, ამ ინსტრუმენტის გამოყენებით) ვიპოვით $\alpha_1 \approx 24^\circ$ და $\alpha_2 \approx 16^\circ$. მეორე მხრივ, ასევე უშუალო გაზომვით (მაგალითად, ამ ინსტრუმენტის გამოყენებით) ვიპოვით რომ მარჯვენა სურათზე EE' და FF' ვერტიკალური ხაზები ერთი და იგივე მაძილით არიან დაშორებული AA' ვერტიკალური ხაზიდან და ეს მანძილი შეადგენს ფოტოს სიგანის 0.15 ნაწილს. რადგან სურათის სკანირების სრული დრო $1/8$ წამია, შესაბამისი დროის შუალედი იქნება $\tau = 0.15/8 = 0.01875$ წამი.

τ დროის განმავლობაში OB ლაპოტი უნდა შემობრუნდეს $120^\circ + \beta - \alpha_1$ კუთხით რომ მისი ბოლო მივიდეს F წერტილში და დაასრულოს მისი გამოსახულების ფორმირება. მეორე მხრივ, იგივე τ დროის წინ OC ლაპოტის ბოლო იყო E წერტილში, სადაც მისი გამოსახულების ფორმირება დაიწყო. ამრიგად τ დროის განმავლობაში OC ლაპოტი უნდა შემობრუნდეს $120 - \beta - \alpha_2$ კუთხით რომ მისმა ბოლომ E წერტილიდან C წერტილში გადაინაცვლოს. ყოველივე ამის გამო შეგვიძლია დავწეროთ

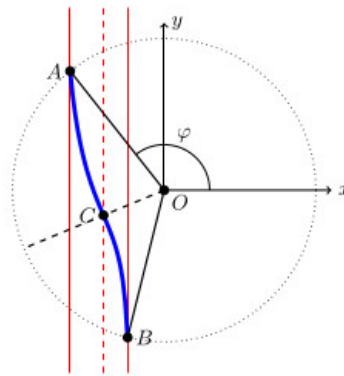
$$120^\circ + \beta - \alpha_1 = 360^\circ \nu \tau \text{ და } 120 - \beta - \alpha_2 = 360^\circ \nu \tau. \quad (1.51.1)$$

ამ ორი განტოლებიდან ვიპოვით თვითმფრინავის პროპელერის ბრუნვის სიხშირეს:

$$\nu = \frac{240^\circ - \alpha_1 - \alpha_2}{720^\circ \tau} \approx 15 \text{ Hz.}$$

შემდეგი ანიმაცია გვიჩვენებს სურათის ფორმირების პროცესის მოდელირებას (ანიმაციამ რომ იმუშავოს, pdf ფაილი Adobe Acrobat Reader ინსტრუმენტის გამოყენებით უნდა გახსნათ)

რამდენიმე სიტყვა თუ როგორ შეიძლება სურათის ფორმირების პროცესის მოდელირება. სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ ერთ-ერთი ლაპოტი (ლურჯი) სკანირების დასაწყისში ჰორიზონტალური და მარჯვნივ მიმართული იყო. სკანირების ხაზი ლაპოტის ბოლოს შეხვდება A წერტილში და დაიწყება მისი პირველი გამოსახულების ფორმირება. გამოსახულება დასრულდება B წერტილში როცა ლაპოტის ბოლო კვლავ სკანირების ხაზზე იქნება. ამ წერტილებისთვის $x = R \cos \varphi$, სადაც R პროპელერის რადიუსია, ხოლო φ – ლაპოტის მობრუნების კუთხე. იგულისხმება, რომ კოორდინატული სისტემის სათავე პროპელერის ცენტრშია (იხილეთ ნახაზი)



A და B წერტილებისათვის შეიძლება დავწეროთ $-R + Vt = R \cos \varphi$, სადაც V სკანირების ხაზის სიჩქარეა, ხოლო t – დრო რომელიც დასჭირდა სკანირების ხაზს ამ წერტილებში მისასვლელად. მაგრამ $\varphi = \omega t$, სადაც ω პროპელერის ბრუნვის ციკლური სიხშირეა. ამიტომ პროპელერის ბოლოს სკანირების ხაზთან შეხვედრის პირობა ასეც შეიძლება გადავწეროთ

$$-1 + \frac{\varphi}{s} = \cos \varphi, \quad s = \frac{R\omega}{V}.$$

რადგან ამ წერტილებისათვის $x = R \cos \varphi$, ეს იგივეა რაც $x/R = \cos [s(1 + x/R)]$. მოსახერხებელია R ავიღოთ სიგრძის ერთეულად, და ეს ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x = \cos [s(1 + x)].$$

ეს განტოლება შეიძლება რიცხობრივად ამოვხსნათ. მაგალითად, თუკი $s = 5.89$, გვექნება სამი ამონახსნი: $x_1 \approx -0.620$, $x_2 \approx -0.241$ და $x_3 = 0.284$. ეს ნიშნავს, რომ ამ ლაპოტის პირველი გამოსახულება დაიწყება როცა $x = x_1$ და დამთავრდება როცა $x = x_2$. მეორე გამოსახულება დაიწყება როცა $x = 0$ და დამთავრდება როცა $x = x_3$.

გამოსახულების უკიდურეს x -კოორდინატებს შორის (მაგალითად C წერტილში) $x \neq \cos \varphi$ რადგან $x = OC \cos \varphi$ და $OC < 1$. მაგრამ შემდეგი განტოლება

$$-1 + \frac{\varphi}{s} = x$$

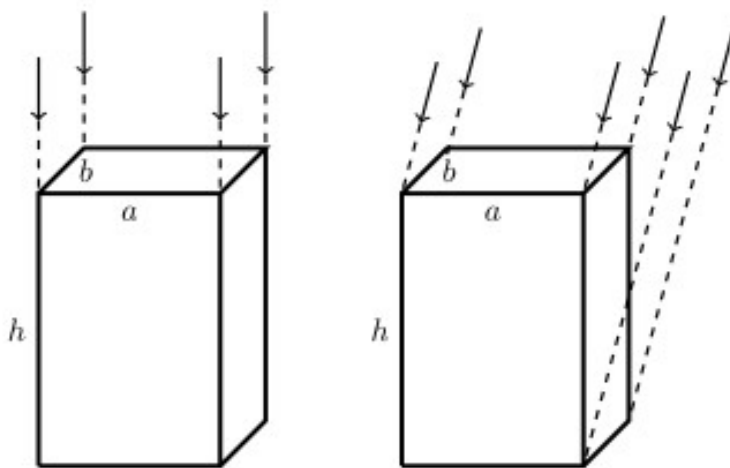
ასეთი წერტილებისთვისაც სწორია, და რადგან $\tan \varphi = y/x$, ლაპოტის გამოსახულების ფორმა უკიდურეს x -კოორდინატებს შორის (მაგალითად ACB წირი) მოიცემა განტოლებით

$$y = x \tan [s(1+x)].$$

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ დანარჩენი ლაპოტები, ოღონდ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ მათთვის საწყისი φ კუთხე უდრის 120° -ს და 240° -ს შესაბამისად.

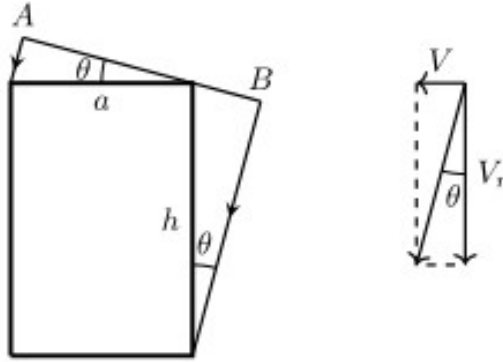
1.52 კაცი წვიმაში

როცა მართკუთხა პრიზმა უძრავია, წვიმა ასველებს მხოლოდ მის ზედა ნაწილს (იხილეთ მარცხენა ნახაზი). როცა ის მოძრაობს მარჯვნივ, მის საკუთარ სისტემაში წვიმა დახრილად ეცემა (იხილეთ მარჯვენა ნახაზი) და პრიზმის გვერდითი ნაწილიც სველდება.



ვთქვათ პრიზმა მოძრაობს V სიჩქარით, ხოლო წვიმის წვეთების სიჩქარეა V_r . მაშინ პრიზმის საკუთარ სისტემაში წვიმის წვეთები მოძრაობენ ვერტიკალისადმი

$\theta = \arctan (V/V_r)$ კუთხით $\sqrt{V^2 + V_r^2}$ სრული სიჩქარით და დასველების ეფექტური განიკვეთის სიგანეა AB (იხილეთ ნახაზი)



თუკი დასველება ნიშნავს M რაოდენობის წვიმის წვეთების მიღებას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$M = \rho ab V_r t_1 = \rho AB b \sqrt{V_1^2 + V_r^2} t_2 = \rho AB b \sqrt{V_2^2 + V_r^2} t_3, \quad (1.52.1)$$

სადაც ρ ჰაერში მყოფი წვიმის წვეთების ეფექტური სიმკვრივეა. მაგრამ $\tan \theta = V/V_r$ ტოლობიდან $1 + \tan^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$ თანადარდობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\cos \theta = \frac{V_r}{\sqrt{V_2^2 + V_r^2}}, \quad \sin \theta = \frac{V}{\sqrt{V_2^2 + V_r^2}},$$

და

$$AB = a \cos \theta + h \sin \theta = \frac{a V_r + h V}{\sqrt{V_2^2 + V_r^2}}.$$

ამიტომ (1.52.1) შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$M = \rho ab V_r t_1 = \rho (a V_r + h V) b t_2 = \rho (a V_r + h V) b t_3.$$

M -ის პირველი ორი გამოსახულებიდან

$$\rho ab = \frac{M}{V_r t_1}, \quad \rho b h = \frac{M}{V_1 t_2} \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)$$

ჩავსვათ $M = \rho (aV_r + hV) b t_3$ ტოლობაში. შედეგად t_3 დროისათვის მივიღებთ

$$t_3 = \frac{t_1 t_2 V_1}{V_2 t_1 + (V_1 - V_2) t_2} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 18}{6 \cdot 2 + (18 - 6) \cdot 0.5} = 1 \text{ წთ.}$$

სფეროს შემთხვევაში, დასველების ეფექტური განიკვეთი ყოველთვის R რადიუსის წრეა. ამიტომ

$$\rho \pi R^2 V_r t_1 = \rho \pi R^2 \sqrt{V_r^2 + V_1^2} t_2 = \rho \pi R^2 \sqrt{V_r^2 + V_2^2} t_3.$$

აქედან

$$V_r^2 t_1^2 = (V_r^2 + V_1^2) t_2^2, \quad V_r^2 t_1^2 = (V_r^2 + V_2^2) t_3^2.$$

პირველი განტოლებიდან

$$V_r^2 = \frac{V_1^2 t_2^2}{t_1^2 - t_2^2},$$

ჩავსვათ მეორეში

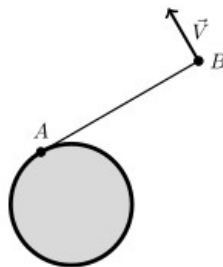
$$\frac{V_1^2 t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} t_1^2 = \left(\frac{V_1^2 t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} + V_2^2 \right) t_3^2.$$

საბოლოოდ

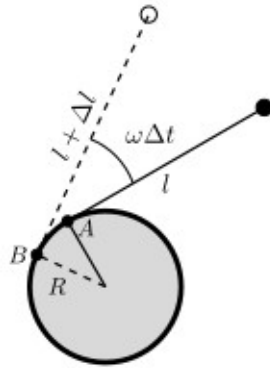
$$t_3 = \frac{V_1 t_1 t_2}{\sqrt{(V_1^2 - V_2^2) t_2^2 + V_2^2 t_1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ წთ} \approx 73.5 \text{ წმ.}$$

1.53 რა დროის შემდეგ კვლავ შემოესვენა სიმი ცილინდრს?

რადგან სიმი უჭიმავდა, A წერტილის ტანგენციალური სიჩქარე ნულის ტოლია. მაშინ B წერტილის სიჩქარე სიმის პერპენდიკულარულად უნდა იყოს მიმართული, რომ მას სიმის გასწვრივ კომპონენტა არ ქონდეს (იხილეთ ნახაზი).



ამრიგად სიმის დაჭიმულობის ძალა ყოველთვის სიჩქარის პერპენდიკულარულია და მის სიდიდეს ვერ შეცვლის. სიმის სრული სიგრძეა $L = 2\pi Rk$. ვთქვათ დროის რაღაც მომენტში სიმის იმ ნაწილის სიგრძე, რომელიც არ ეხება ცილინდრს, არის l . ამ დროს ბურთულას კუთხური სიჩქარე იქნება $\omega = V/l$. მცირე Δt დროის შემდეგ, სიმის სიგრძე გაიზრდება Δl -ით (იხილეთ ნახაზი).



ნახაზიდან ცხადია, რომ Δl უდრის AB რკალის სიგრძეს. ამიტომ

$$\Delta l = \omega \Delta t R = \frac{VR}{l} \Delta t.$$

ეს გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dl}{dt} = \frac{VR}{l}.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ავიღოთ ინტეგრალი

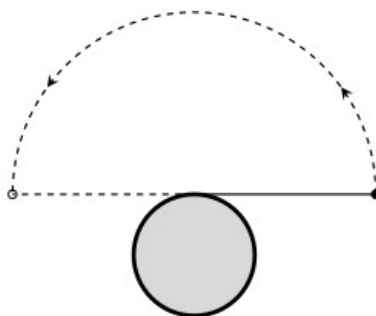
$$VRt = \int_0^{2\pi Rk} l dl = 2\pi^2 k^2 R^2.$$

ამრიგად, სიმი რომ მთლიანად გაიშალოს, საჭიროა დრო

$$t = 2\pi^2 k^2 \frac{R}{V}.$$

ამდენივე დრო დასჭირდება მის უკან შემოხვევას. მაგრამ სიმი უკან შემოხვევას მაშინვე არ იწყებს: სიმის მთლიანად გაშლის შემდეგ, ბურთულა შემოწერს დამატებით

ნახევარწრეს ისე, რომ სიმის სიგრძე არ იცვლება, და მხოლოდ ამის შემდეგ სიმი იწყებს კვლავ ცილინდრზე შემოხვევას (იხილეთ ნახაზი).

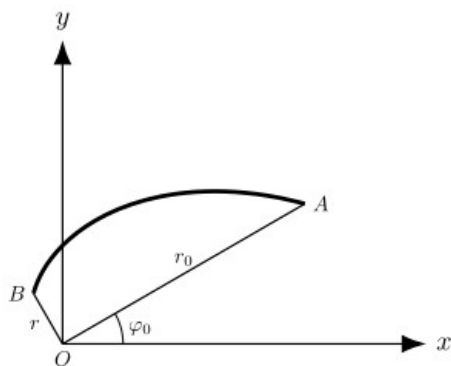


ამიტომ სიმის შემოხვევის სრული დრო

$$T = 2t + \frac{\pi L}{V} = \frac{2\pi^2 kR}{V} (2k + 1).$$

1.54 ბიკფორდის ზონარის ფორმა

რადგან დეტონაციას სჭირდება გარკვეული დრო რომ A წერტილიდან B წერტილში მივიდეს, B წერტილი უფრო ახლოს უნდა იყოს O სათავესთან, ვიდრე A წერტილი, რათა ამ წერტილებიდან დარტყმითი ტალღა O წერტილში ერთდროულად მივიდეს (იხილეთ ნახაზი).



თუკი B წერტილის პოლარული კოორდინატებია (r, φ) , მაშინ უნდა გვქონდეს

$$\frac{r_0}{c} = \frac{AB}{V} + \frac{r}{c}. \quad (1.54.1)$$

პოლარული კოორდინატების განმარტებიდან

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

გამომდინარეობს, რომ

$$dx = dr \cos \varphi - r d\varphi \sin \varphi, \quad dy = dr \sin \varphi + r d\varphi \cos \varphi.$$

ამიტომ

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

და

$$AB = \int dl = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

მაშასადამე (1.54.1) შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\frac{r_0}{c} = \frac{1}{V} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi + \frac{r}{c}. \quad (1.54.2)$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau = f(x),$$

სადაც a რაღაც კონსტანტაა. მართლაც

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\tau) d\tau = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(\tau) d\tau - \int_a^x f(\tau) d\tau \right]$$

და

$$\int_a^{x+\Delta x} f(\tau) d\tau - \int_a^x f(\tau) d\tau = \int_a^{x+\Delta x} f(\tau) d\tau + \int_x^a f(\tau) d\tau = \int_x^{x+\Delta x} f(\tau) d\tau \approx f(x) \Delta x.$$

გავაწარმოოთ (1.54.2) φ -თი:

$$0 = \frac{1}{V} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} + \frac{1}{c} \frac{dr}{d\varphi}.$$

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, თუკი ზონარი საათის საწინააღმდეგო მიმართულებით ეხვევა, როგორც ნახაზზეა, მივიღებთ

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\sqrt{\beta^2 - 1}},$$

სადაც $\beta = V/c$. განვაცალოთ ცვლადები და ავიღოთ ინტეგრალი:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = -\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = -\frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ თუკი ზონარი საათის საწინააღმდეგო მიმართულებით ეხვევა, მისი ფორმა განისაზღვრება ლოგარიტმული სპირალის განტოლებით

$$r = r_0 \exp\left(-\frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\right).$$

1.55 ბზრიალას ვარდნა მაგიდიდან

როცა ბზრიალა ვარდნას დაიწყებს, გადავიდეთ მის საკუთარ ათვლის სისტემაში. ამ სისტემაში მაგიდის კიდის მოძრაობის მანტოლებებია

$$x = -Vt, \quad z = \frac{1}{2}gt^2.$$

ესე იგი z სიმაღლეზე მაგიდის კიდე ბზრიალას სიმეტრიის ღერძიდან დაშორებულია $V\sqrt{2z/g}$ მანძილით. კიდე არ დაეჯახება ბზრიალას, თუკი ყველა $z < H$ სიმაღლისთვის გვაქვს უტოლობა

$$V\sqrt{\frac{2z}{g}} > \frac{Rz}{H} \left(5 - 4\frac{z}{H}\right),$$

ანუ

$$V^2 > \frac{gR^2}{2H} \frac{z}{H} \left(5 - 4\frac{z}{H}\right)^2.$$

ვიპოვოთ $f(x) = x(5 - 4x)^2$ ფუნქციის მაქსიმუმი.

$$\frac{df}{dx} = (5 - 4x)(5 - 12x) = 0$$

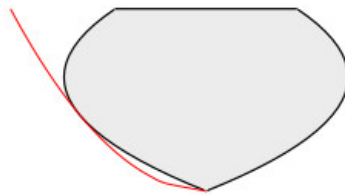
პირობა გვაძლევს $x_1 = 5/4$ და $x_2 = 5/12$ ამოხსნებს. პირველი შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმს და $z < H$ ინტერვალის გარეთაა. $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმს შეესაბამება $x_2 = 5/12$ და ის $z < H$ ინტერვალის შიგნითაა. რადგან $f(x_2) = 125/27$, არ დაჯახების პირობად მივიღებთ

$$V^2 > \frac{125}{27} \frac{gR^2}{2H},$$

ანუ

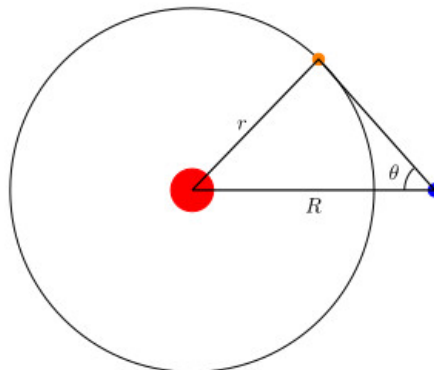
$$V > V_c = \sqrt{\frac{125gR^2}{54H}}.$$

როცა $V = V_c$, მაგიდის კიდის ტრაექტორია ბზრიალას სისტემაში ნაჩვენებია ნახაზზე.



1.56 ვენერას დაკვირვების მაქსიმალური დრო მზის ჩასვლის შემდეგ

გადავიდეთ იმ სისტემაში რომლის სათავეც მზეა და რომელიც ისეთივე კუთხური სიჩქარით ბრუნავს როგორც დედამიწა. ამ სისტემაში დედამიწა უძრავია, ხოლო ვენერა მოძრაობს $r = 0.72$ ა.ე. რადიუსის წრეზე (იხილეთ ნახაზი).

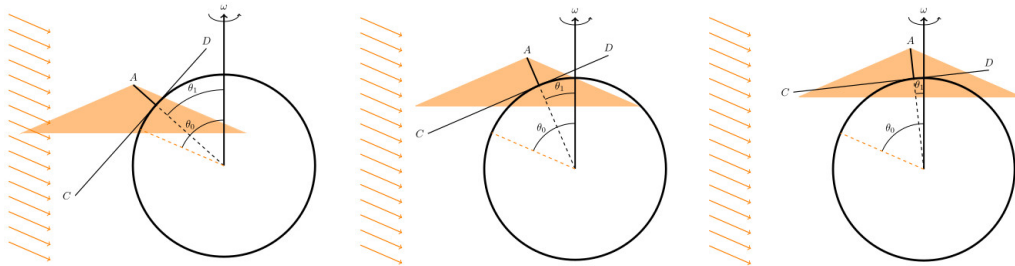


ნახაზიდან ცხადია, რომ ვენერას მაქსიმალური კუთხური დამორება მზიდან შეესაბამება სიტუაციას, როცა დედამიწა-ვენერას შემაერთებელი ხაზი ეხება ვენერას ორბიტას. ამიტომ $\sin \theta = r/R = 0.72$ და $\theta = \arcsin 0.72 \approx 46^\circ$. დედამიწაზე დამკვირვებლისათვის, ვენერა ცის გუმბათზე მოძრაობს $\omega = 360^\circ/(24 \text{ სთ})$ კუთხური სიჩქარით. ამიტომ, მზის ჩასვლის შემდეგ ვენერაზე დაკვირვების მაქსიმალური დრო იქნება

$$t = \frac{46^\circ}{\omega} \approx 3.1 \text{ სთ.}$$

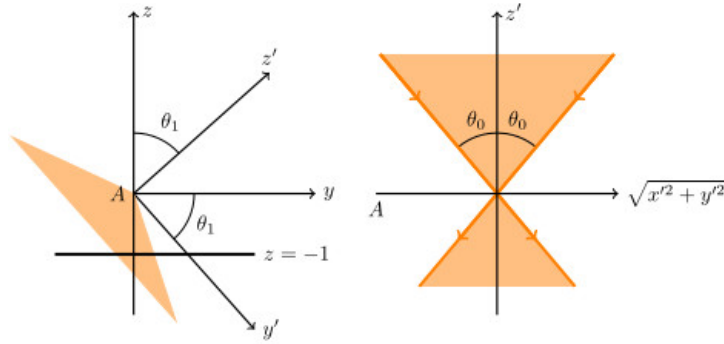
1.57 ჩრდილის ბოლოს ტრაექტორია

დედამიწის ეკვატორის დახრის კუთხე ეკლიპტიკის (დედამიწის ორბიტის სიბრტყის) მიმართ არის 23.4° . ამიტომ 22 ივნისს მზის შუკი ეცემა ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე დედამიწის ბრუნვის ღერძის მიმართ $\theta_0 = 90^\circ - 23.4^\circ = 66.6^\circ$ კუთხით. თბილისში ვერტიკალური ჯოხი დედამიწის ღერძთან ადგენს $\theta_1 = 90^\circ - 41.7^\circ = 48.3^\circ$ კუთხეს, რადგან თბილისი მდებარეობს ჩრდილოეთის 41.7° განედზე. ჯოხის ზედა A ბოლოში გამავალი მზის სხივები დევს კონუსის ზედაპირზე, რომლის ღერძიც დედამიწის ღერძის პარალელურია, ხოლო გაშლის კუთხე არის θ_0 . ჯოხის ჩრდილის ბოლო მიიღება ამ სხივების დედამიწის ზედაპირთან გადაკვეთაზე, რომელიც მცირე მანძილით შეიძლება ბრტყლად ჩაითვალოს. შესაბამისად, ჩრდილის ბოლოს ტრაექტორია იქნება კონუსური კვეთის მონაკვეთი. თუკი $\theta_1 + \theta_0 = 90^\circ$, CD სიბრტყე კონუსის ერთ-ერთი მსახველის პარალელურია და კონუსური კვეთა არის პარაბოლა (იხილეთ შუათანა ნახაზი). თუკი $\theta_1 + \theta_0 < 90^\circ$ გვექნება ელიფსი (იხილეთ მარჯვენა ნახაზი), რომელიც ჩრდილოეთ პოლუსზე ($\theta_1 = 0^\circ$) წრედ გადაიქცევა. თუკი $\theta_1 + \theta_0 > 90^\circ$, როგორც თბილისის შემთხვევაში, გვექნება ჰიპერბოლა (იხილეთ მარცხენა ნახაზი).



ავირჩიოთ ათვლის სისტემა ისე, რომ z ღერძი ჯოხის გასწვრივ იყოს მიმართული, ხოლო დედამიწის ბრუნვის ღერძი yOz სიბრტყეში იყოს. ათვლის სისტემის სათავე მოვათავსოთ ჯოხის ბოლო A წერტილში, ასე რომ დედამიწის ზედაპირის განტოლება იქნება $z = -1$. თუკი ათვლის სისტემას მოვაბრუნებთ x ღერძის ირგვლივ $-\theta_1$

კუთხით, z' ღერძის მიმართულება დაემთხვევა დედამიწის ღერძის მიმართულებას (იხილეთ მარცხენა ნახაზი).



ნახაზიდან ცხადია, რომ ახალ და ძველ კოორდინატებს შორის ასეთი კავშირი გვაქვს:

$$x' = x, \quad y' = \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z, \quad z' = \cos \theta_1 z + \sin \theta_1 y. \quad (1.57.1)$$

შტრიხოვან სისტემაში, ჯოხის ბოლოზე გამავალი მზის სხივების კონუსი მოიცემა განტოლებით (იხილეთ მარჯვენა ნახაზი)

$$z'^2 \tan^2 \theta_0 = x'^2 + y'^2. \quad (1.57.2)$$

რომ ვიპოვოთ ამ კონუსის გადაკვეთა დედამიწის იდეალიზირებულ ბრტყელ ზედაპირთან, (1.57.1) და (1.57.2) ფორმულებში უნდა ჩავსვათ $z = -1$. შედეგად მივიღებთ

$$\tan^2 \theta_0 (-\cos \theta_1 + y \sin \theta_1)^2 = x^2 + (y \cos \theta_1 + \sin \theta_1)^2.$$

ეს ტოლობა, საკმაოდ მარტივი ალგებრული და ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების შემდეგ, ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\cos^2 \theta_0 x^2 + \cos (\theta_0 + \theta_1) \cos (\theta_0 - \theta_1) y^2 + \sin (2\theta_1) y = \sin (\theta_0 + \theta_1) \sin (\theta_0 - \theta_1), \quad (1.57.3)$$

რაც მართლაც კონუსური კვეთის განტოლებაა: თუკი $\cos (\theta_0 + \theta_1) > 0$, გვექნება ელიფსი, თუკი $\cos (\theta_0 + \theta_1) = 0$ — პარაბოლა, და თუკი $\cos (\theta_0 + \theta_1) < 0$ — ჰიპერბოლა.

ვიპოვოთ ჩრდილის ბოლოს კოორდინატების დამოკიდებულება დროზე. თუკი A ზედა წვეროდან მზისკენ მიმართულებას შეესაბამება θ და φ სფერული კუთხეები, მაშინ A წერტილზე გამავალი მზის სხივის განტოლება პარამეტრული ფორმით იქნება

$$x = -\tau \sin \theta \cos \varphi, \quad y = -\tau \sin \theta \sin \varphi, \quad z = -\tau \cos \theta,$$

სადაც $\tau > 0$ პარამეტრია. დედამიწის ზედაპირს შეესაბამება $z = -1$, ანუ $\tau_0 = 1/\cos \theta$, და ჩრდილის ბოლოს კოორდინატები იქნება

$$x = -\tan \theta \cos \varphi, \quad y = -\tan \theta \sin \varphi. \quad (1.57.4)$$

რადგან (1.57.1) გარდაქმნა რადიუს-ვექტორის სიგრძეს არ ცვლის, ამ ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\sin \theta' \cos \varphi' = \sin \theta \cos \varphi, \quad (1.57.5)$$

და

$$\begin{aligned} \sin \theta' \sin \varphi' &= \cos \theta_1 \sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_1 \cos \theta, \\ \cos \theta' &= \cos \theta_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

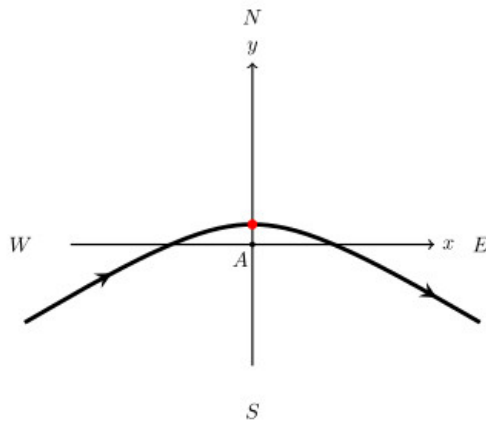
ბოლო ორი განტოლება ნიშნავს, რომ

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_1 \cos \theta' - \sin \theta_1 \sin \theta' \sin \varphi', \\ \sin \theta \sin \varphi &= \cos \theta_1 \sin \theta' \sin \varphi' + \sin \theta_1 \cos \theta'. \end{aligned} \quad (1.57.6)$$

ცხადია, რომ მზის სხივების კონუსზე $\theta' = \theta_0$. ავირჩიოთ დროის ათვლის სათავე ისე, რომ გვქონდეს $\varphi' = \frac{3}{2}\pi - \omega t$, სადაც $\omega = 2\pi/24 = \pi/12$ არის დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე მისი ღერძის გარშემო. მაშინ (1.57.4), (1.57.5) და (1.57.6) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta_0 \sin \omega t}{\cos \theta_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \sin \theta_0 \cos \omega t}, \\ y &= -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_0 \cos \omega t - \sin \theta_1 \cos \theta_0}{\cos \theta_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \sin \theta_0 \cos \omega t}. \end{aligned} \quad (1.57.7)$$

ეს ფორმულები განსაზღვრავს ჩრდილის ბოლოს მოძრაობას ტრაექტორიის გასწვრივ დროთა განმავლობაში (იხილეთ ნახაზი).



ნახაზიდან და (1.57.7) განტოლებებიდან ჩანს, რომ დროის ათვლის სათავეს ჩვენი არჩევანი ნიშნავს, რომ $t = 0$ შეესაბამება ჩრდილის მინიმალურ $\tan(\theta_0 - \theta_1)$ სიგრძეს (წითელი წერტილი ნახაზზე).

$\tau_0 > 0$ პირობა ნიშნავს, რომ მზის სხივი A წერტილის გავლის შემდეგ კვეთს დედამიწის ზედაპირს, და ამ წერტილში გვექნება ჩრდილის ბოლო. ჩრდილი დაიკვირვება მხოლოდ დღის განმავლობაში, და რადგან $\tau_0 = 1/\cos \theta$, დღის ხანგრძლივობა განისაზღვრება

$$\cos \theta_1 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \sin \theta_0 \cos \omega t > 0$$

უტოლობით, საიდანაც მივიღებთ

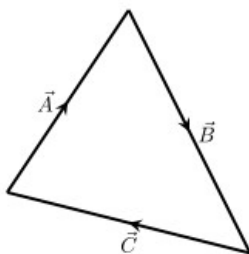
$$-\frac{1}{\omega} \arccos(-\cot \theta_0 \cot \theta_1) < t < \frac{1}{\omega} \arccos(-\cot \theta_0 \cot \theta_1).$$

ამრიგად, დღის ხანგრძლივობა თბილისში 22 ივნისს იქნება

$$\Delta t = \frac{2}{\omega} \arccos(-\cot \theta_0 \cot \theta_1) = \frac{24}{\pi} \arccos(-\cot \theta_0 \cot \theta_1) \approx 15 \text{ სთ.}$$

1.58 ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარე

ვთქვათ $\vec{A}$, $\vec{B}$ და $\vec{C}$ ვექტორები შეესაბამება სამკუთხედის გვერდებს თვითმფრინავის ფრენის დროს (იხილეთ ნახაზი).



მაშინ

$$\frac{\vec{A}}{t_1} = \vec{u} + \vec{V}_A, \quad \frac{\vec{B}}{t_2} = \vec{u} + \vec{V}_B, \quad \frac{\vec{C}}{t_3} = \vec{u} + \vec{V}_C,$$

სადაც $\vec{V}_A$ არის თვითმფრინავის სიჩქარე ჰაერის მიმართ, როცა ის $\vec{A}$ გვერდის გასწვრივ მიფრინავს. $\vec{B}$ და $\vec{C}$ ვექტორების არსი ანალოგიურად განიმარტება. რადგან

თვითმფრინავის სიჩქარე ჰაერის მიმართ V ერთი და იგივეა მისი ფრენის დროს, $\vec{V}_A^2 = \vec{V}_B^2 = \vec{V}_C^2 = V^2$ და, მაშასადამე,

$$V^2 = \left(\frac{A}{t_1} - \vec{u} \right)^2 = \frac{A^2}{t_1^2} - 2 \frac{\vec{A} \cdot \vec{u}}{t_1} + u^2.$$

ანალოგიურად

$$V^2 = \frac{B^2}{t_2^2} - 2 \frac{\vec{B} \cdot \vec{u}}{t_2} + u^2, \quad V^2 = \frac{C^2}{t_3^2} - 2 \frac{\vec{C} \cdot \vec{u}}{t_3} + u^2.$$

ეს ტოლობები შეიძლება ასეც გადავწეროთ

$$t_1 (V^2 - u^2) = \frac{A^2}{t_1} - 2\vec{A} \cdot \vec{u}, \quad t_2 (V^2 - u^2) = \frac{B^2}{t_2} - 2\vec{B} \cdot \vec{u}, \quad t_3 (V^2 - u^2) = \frac{C^2}{t_3} - 2\vec{C} \cdot \vec{u}. \quad (1.58.1)$$

რადგან $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$, თუკი ამ ტოლობებს შევკრებთ და შედეგს გავყოფთ $(t_1 + t_2 + t_3)$ -ზე, მივიღებთ

$$V^2 - u^2 = \frac{1}{t_1 + t_2 + t_3} \left[\frac{A^2}{t_1} + \frac{B^2}{t_2} + \frac{C^2}{t_3} \right]. \quad (1.58.2)$$

ეს ტოლობა აკავშირებს ერთმანეთთან ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარეებს. მეორე მხრივ, (1.58.2)-ის გათვალისწინებით, (1.58.1)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{A} &= \frac{A^2}{2t_1} - \frac{t_1}{2(t_1 + t_2 + t_3)} \left[\frac{A^2}{t_1} + \frac{B^2}{t_2} + \frac{C^2}{t_3} \right] = \\ &= \frac{1}{2(t_1 + t_2 + t_3)} \left[\frac{t_2 + t_3}{t_1} A^2 - \frac{t_1}{t_2} B^2 - \frac{t_1}{t_3} C^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.58.3)$$

ანალოგიურად

$$\vec{u} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2(t_1 + t_2 + t_3)} \left[\frac{t_1 + t_3}{t_2} B^2 - \frac{t_2}{t_1} A^2 - \frac{t_2}{t_3} C^2 \right]. \quad (1.58.4)$$

თუკი $\vec{u} \cdot \vec{A}$ და $\vec{u} \cdot \vec{B}$ სკალარული ნამრავლები ვიცით, ქარის სიჩქარის კვადრატი u^2 შეიძლება ვიპოვოთ. მართლაც $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ ვექტორული ტოლობის გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\vec{u}$ და $\vec{A} \times \vec{B}$ ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორებია ($\vec{u}$, $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ერთსა და იმავე სიბრტყეშია), მივიღებთ

$$\left[\vec{u} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \right]^2 = u^2 |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = \left[\vec{A}(\vec{u} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{u} \cdot \vec{A}) \right]^2.$$

თუკი α არის $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს შორის კუთხე,

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2 B^2 \sin^2 \alpha = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \alpha) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

ამიტომ, საბოლოოდ,

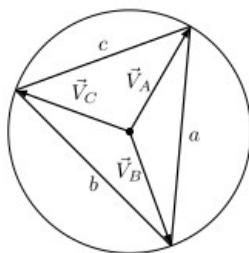
$$u^2 = \frac{1}{A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2} \left[A^2 (\vec{B} \cdot \vec{u})^2 + B^2 (\vec{A} \cdot \vec{u})^2 - 2 \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{A} \cdot \vec{u} \vec{B} \cdot \vec{u} \right]. \quad (1.58.5)$$

$\vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$ ტოლობიდან, $A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} = C^2$. ამიტომ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} [C^2 - A^2 - B^2]. \quad (1.58.6)$$

მიღებული ტოლობები (1.58.2) ÷ (1.58.6) საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარეები.

მეორე ამოხსნა. $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$, $\vec{V}_{CA} = \vec{V}_C - \vec{V}_A$ და $\vec{V}_{BC} = \vec{V}_B - \vec{V}_C$ ვექტორები შეადგენენ სამკუთხედს (რადგან $\vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} + \vec{V}_{BC} = 0$) და თვითმფრინავის სიჩქარე V არის ამ სამკუთხედზე შემოსაზული წრის რადიუსი (იხილეთ ნახაზი).



გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ თუკი $a = |\vec{V}_{AB}|$, $b = |\vec{V}_{BC}|$ და $c = |\vec{V}_{CA}|$ არიან სამკუთხედის გვერდები, შემოსაზული წრის რადიუსი მოიცემა ფორმულით

$$V = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}, \quad (1.58.7)$$

სადაც S სამკუთხედის ფართობია, რომელიც მოიცემა ჰერონის ფორმულით

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{1}{2} (a+b+c).$$

მაგრამ

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A + \vec{u} - (\vec{V}_B + \vec{u}) = \frac{\vec{A}}{t_1} - \frac{\vec{B}}{t_2}.$$

ამიტომ

$$a^2 = \frac{A^2}{t_1^2} + \frac{B^2}{t_2^2} - 2 \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{t_1 t_2} = \frac{A^2}{t_1^2} + \frac{B^2}{t_2^2} - \frac{C^2 - A^2 - B^2}{t_1 t_2}. \quad (1.58.8)$$

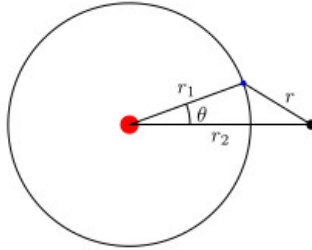
ანალოგიურად

$$b^2 = \frac{B^2}{t_2^2} + \frac{C^2}{t_3^2} - \frac{A^2 - B^2 - C^2}{t_2 t_3}, \quad c^2 = \frac{C^2}{t_3^2} + \frac{A^2}{t_1^2} - \frac{B^2 - C^2 - A^2}{t_3 t_1}. \quad (1.58.9)$$

(1.58.7) ÷ (1.58.9) ფორმულების გამოყენებით ვიპოვით თვითმფრინავის V სიჩქარეს, ხოლო შემდეგ (1.58.2) ტოლობის საშუალებით — ქარის u სიჩქარეს.

1.59 იოს დაკვირვებადი ორბიტალური პერიოდი

ვთქვათ ω_1 და ω_2 დედამიწის და იუპიტერის კუთხური სიჩქარეებია მზის გარშემო, ხოლო r_1 და r_2 — მათი ორბიტების რადიუსებია. მზესთან დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც ω_2 კუთხური სიჩქარით ბრუნავს, იუპიტერი უძრავად დგას ერთსა და იმავე წერტილში, ხოლო დედამიწა მოძრაობს $\omega = \omega_1 - \omega_2$ კუთხური სიჩქარით r_1 რადიუსის წრეზე (იხილეთ ნახაზი).



იუპიტერსა და დედამიწას შორის მანძილს ვიპოვით კოსინუსების თეორემის გამოყენებით:

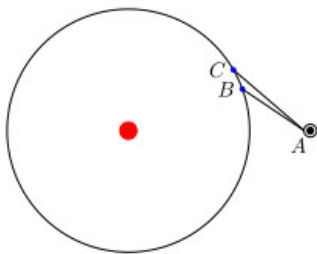
$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \omega t}.$$

მაგრამ $r_2 \approx 5r_1$. ამიტომ r_1/r_2 მცირე პარამეტრის მიმართ პირველ რიგში r მანძილი იცვლება ჰარმონიული კანონის მიხედვით:

$$r \approx r_2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \cos \theta \right) = r_2 - r_1 \cos \omega t. \quad (1.59.1)$$

ვთქვათ $t = t_B$ დროის მომენტში ვხედავთ იოს იუპიტერის მახლობლად A წერტილში. ფოტონები, რომლებიც იოს გამოსახულებას ქმნიან, გამოსხივდა უფრო ადრე $t'_B =$

$t_B - AB/c$ მომენტში, სადაც c სინათლის სიჩქარეა. იოს ჭეშმარიტი T_0 ორბიტალური პერიოდის შემდეგ, დროის $t'_C = t'_B + T_0$ მომენტში, იო კვლავ აღმოჩნდება იგივე A წერტილში, მაგრამ მისგან გამოსხივებული სინათლე დედამიწამდე მოაღწევს დროის $t_c = t'_C + AC/c$ მომენტში (იხილეთ ნახაზი).



ამიტომ იოს ხილული ორბიტალური პერიოდი იქნება

$$T = t_C - t_B = \frac{AC}{c} - \frac{AB}{c} + T_0 = T_0 + \frac{r(t_C) - r(t_B)}{c} \approx T_0 + \frac{T}{c} \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=t_B}, \quad (1.59.2)$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ

$$r(t_C) - r(t_B) \approx \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=t_B} (t_C - t_B).$$

(1.59.1)-ის თანახმად

$$\frac{dr}{dt} = r_1 \omega \sin \omega t \approx V_1 \sin \omega t,$$

სადაც $V_1 = r_1 \omega_1$ დედამიწის ორბიტალური სიჩქარეა და გავითვალისწინეთ, რომ $\omega_1 \approx 12\omega_2 \gg \omega_2$. ამრიგად, (1.59.2) ტოლობა მოგვცემს

$$T \left(1 - \frac{V_1}{c} \sin \omega t \right) = T_0.$$

აქედან

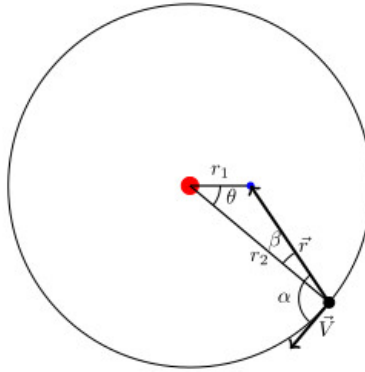
$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{V_1}{c} \sin \omega t} \approx T_0 \left(1 + \frac{V_1}{c} \sin \omega t \right).$$

ეფექტის სიდიდეზე წარმოდგენა რომ შეგვექმნეს, შევნიშნოთ, რომ $T_0 V_1 / c \approx 15$ წმ.

მეორე ამოხსნა. იოს დაკვირვებადი პერიოდი განსხვავდება მისი ჭეშმარიტი პერიოდისაგან დოპლერის ეფექტის გამო და მოიცემა ფორმულით

$$T = T_0 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right), \quad (1.59.3)$$

სადაც $V = (\omega_1 - \omega_2)r_2$ არის იუპიტერის სიჩქარე დადამიწაზე მყოფი დამკვირვებლის მიმართ და α არის კუთხე იუპიტერის სიჩქარესა და დაკვირვების ხაზს შორის (იხილეთ ნახაზი. ეს ფორმულა შეესაბამება უძრავ დამკვირვებულს და მოძრავ გამოსხივების წყაროს. ამიტომ გადავდით მზესთან დაკავშირებულ სიტუციაში, რომელიც მზის გარშემო ω_1 კუთხური სიჩქარით ბრუნავს, ისევე როგორც დედამიწა).



ნახაზიდან ცხადია, რომ $\alpha = \pi/2 + \beta$. მეორე მხრივ, სინუსების თეორემა გვაძლევს

$$\frac{r_1}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \theta},$$

სადაც $\theta = (\omega_1 - \omega_2)t$. (1.59.1) ტოლობის თანახმად, პირველი რიგის მიახლოებაში, $r_1/r \approx r_1/r_2$. ამიტომ

$$\cos \alpha = -\sin \beta = -\frac{r_1}{r_2} \sin \theta,$$

და

$$T = T_0 \left(1 + \frac{V}{c} \frac{r_1}{r_2} \sin \theta \right) \approx T_0 \left(1 + \frac{V_1}{c} \sin [(\omega_1 - \omega_2)t] \right),$$

რადგან

$$\frac{V}{c} \frac{r_1}{r_2} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)r_1}{c} \approx \frac{\omega_1 r_1}{c} = \frac{V_1}{c}.$$

1.60 მოჩვენებითი სუპერლუმინალური მოძრაობა

ვთქვათ ობიექტი მოძრაობს V სიჩქარით დაკვირვების ხაზისადმი $\angle BAC = \alpha$ კუთხით. დედამიწიდან ხილული გადაადგილება $T = 5$ წელიწადში იქნება $L = BD = 10$ სინათლის წელიწადი (იხილეთ ნახაზი).



ვიგულისხმობთ, რომ სინათლე A წერტილიდან დედამიწაზე (C წერტილი) მოდის დროის $t_A = 0$ მომენტში. ეს სინათლე A წერტილში გამოსხივებული იქნა უფრო ადრე, დროის $t'_A = -AC/c$ მომენტში, სადაც c სინათლის სიჩქარეა. ობიექტი B წერტილში აღმოჩნდება დროის

$$t'_B = t'_A + \frac{AB}{V} = t'_A + \frac{L}{V \sin \alpha}$$

მომენტში, რადგან $AB = BD/\sin \alpha = L/\sin \alpha$. B წერტილში ობიექტის მიერ გამოსხივებული სინათლე დედამიწას მიაღწევს $t_B = t'_B + BC/c \approx t'_B + DC/c$ დროის მომენტში, რადგან $BC \approx DC$ (განსხვავება მეორე რიგისაა მცირე $\angle BCA$ კუთხის მიმართებაში). ამრიგად

$$t_B \approx -\frac{AC}{c} + \frac{L}{V \sin \alpha} + \frac{DC}{c} = \frac{L}{V \sin \alpha} - \frac{AD}{c}.$$

მაგრამ $AD = BD \cot \alpha = L \cot \alpha$, ანუ

$$t_B \approx \frac{L}{V \sin \alpha} - \frac{L \cot \alpha}{c}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად $t_B - t_A = T$. ამიტომ მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{L}{V \sin \alpha} - \frac{L \cot \alpha}{c} = T,$$

საიდანაც ვიპოვიით ობიექტის V სიჩქარეს:

$$V = \frac{c}{\cos \alpha + \frac{cT}{L} \sin \alpha}. \quad (1.60.1)$$

$V < c$ პირობა შესრულდება, თუკი

$$\cos \alpha + \frac{cT}{L} \sin \alpha > 1.$$

ეს უტოლობა, $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ და $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ თანაფარდობების გამოყენებით, მოგვცემს

$$\tan \frac{\alpha}{2} < \frac{cT}{L} = \frac{1}{2},$$

და, მაშასადამე, $\alpha < 2 \arctan 0.5 \approx 53.1^\circ$.

რომ ვიპოვოთ $V(\alpha)$ ფუნქციის მინიმუმი, უნდა ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{dV}{d\alpha} = -\frac{c}{\left(\cos \alpha + \frac{cT}{L} \sin \alpha\right)^2} \left(-\sin \alpha + \frac{cT}{L} \cos \alpha\right) = 0,$$

რაც გვაძლევს შესაბამისი α_m კუთხისათვის

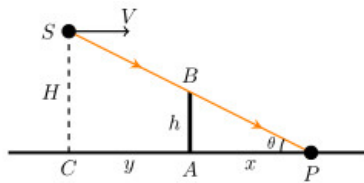
$$\tan \alpha_m = \frac{cT}{L} = \frac{1}{2}.$$

ჩავსვათ ეს (1.60.1) ტოლობაში. შედეგად მივიღებთ ობიექტის მინიმალურ შესაძლო სიჩქარეს

$$V_m = \frac{c}{\cos \alpha_m} \frac{1}{1 + \frac{cT}{L} \tan \alpha_m} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_m}}{1 + \frac{cT}{L} \tan \alpha_m} c = \frac{2c}{\sqrt{5}} \approx 0.89c.$$

1.61 ჩრდილის გაქრობა

ვთქვათ $t = 0$ შეესაბამება დროის იმ მომენტს, როცა სინათლის წყარო ზუსტად კედლის ზემოთ არის, ხოლო დროის t მომენტში P წერტილში კედლიდან x მანძილზე დაიკვირვება სინათლე და შესაბამისად ჩრდილის გაქრობა. ეს სინათლე გამოსხივდა დროის უფრო ადრე $t_s = -y/V$ მომენტში, როცა სინათლის წყარო იმყოფებოდა კედლიდან y მანძილზე (იხილეთ ნახაზი).



ცხადია, რომ

$$t = t_s + \frac{SP}{c}, \quad (1.61.1)$$

სადაც c სინათლის სიჩქარეა. $\triangle PBA$ და $\triangle PSC$ მსგავსი სამკუთხედებია. ამიტომ

$$\frac{x}{x+y} = \frac{h}{H}.$$

მაშასადამე

$$x = \frac{h}{H-h} y, \quad x+y = \frac{H}{H-h} y, \quad (1.61.2)$$

და

$$SP = \sqrt{H^2 + (x+y)^2} = H \sqrt{1 + \frac{y^2}{(H-h)^2}}.$$

ამის გათვალისწინებით (1.61.1) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$t = -\frac{y}{V} + \frac{H}{c} \sqrt{1 + \frac{y^2}{(H-h)^2}}.$$

უფრო მოსახერხებელია როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი გამოვიყენოთ არა y , არამედ $z = \cot \theta$, სადაც θ არის კუთხე SP მონაკვეთს და ჰორიზონტალს შორის. მაშინ $x = hZ$, $x+y = Hz$ და მაშასადამე $y = (H-h)z$, რაც მოგვცემს

$$t = -\frac{(H-h)z}{V} + \frac{H}{c} \sqrt{1+z^2}. \quad (1.61.3)$$

ვიპოვოთ $t(z)$ ფუნქციის მინიმუმი.

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{H-h}{V} + \frac{H}{c} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = 0$$

პირობა გვაძლევს

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{c}{V} \left(1 - \frac{h}{H}\right),$$

რომლის ამოხსნაცაა

$$z_m = \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{\sqrt{(V/c)^2 - (1-h/H)^2}}.$$

ამიტომ მანძილი კედლიდან, სადაც ჩრდილი ყველაზე სწრაფად გაქრება არის

$$x_m = h z_m = h \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{\sqrt{(V/c)^2 - (1-h/H)^2}}. \quad (1.61.4)$$

(1.61.4) ტოლობიდან ცხადია, რომ ასეთი სცენარი გულისხმობს

$$\frac{V}{c} > 1 - \frac{h}{H}.$$

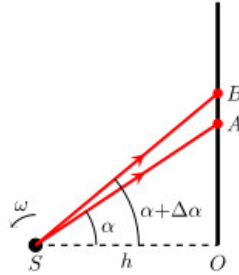
საწინააღმდეგო შემთხვევაში, როცა $V/c < 1 - h/H$, $t(y)$ კლებადი ფუნქციაა და $y \rightarrow \infty$ ზღვარში, როცა $z \rightarrow \infty$, (1.61.3) მოგვცემს

$$t \rightarrow -\frac{Hz}{V} \left(1 - \frac{h}{H} - \frac{V}{c} \right) \rightarrow -\infty.$$

ამ შემთხვევაში, ჩრდილი ნორმალურად იქცევა: სინათლის ზოლი უახლოვდება კედელს უსასრულობიდან მარჯვენა მხრიდან და ჩრდილი მთლიანად გაქრება დროის $t = H/c$ მომენტში, რომელიც შეესაბამება გამოსხივებას იმ მომენტში, როცა $y = 0$.

1.62 სინათლის ათინათის სიჩქარე

ვთქვათ A წერტილი შეესაბამება α კუთხეს, ხოლო B წერტილი $-\alpha + \Delta\alpha$ კუთხეს (იხილეთ ნახაზი).



რადგან $AO = h \tan \alpha$,

$$\Delta x = AB \approx \frac{d AO}{d \alpha} \Delta \alpha = \frac{h \Delta \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (1.62.1)$$

მეორე მხრივ, თუკი A წერტილში სინათლე დაიკვირვება $t = t_A$ დროის მომენტში, ეს ნიშნავს, რომ მისი გამოსხივება მოხდა უფრო ადრეულ $t'_A = t_A - SA/c$ მომენტში, სადაც c სინათლის სიჩქარეა. ლაზერს $\Delta\alpha$ კუთხით მობრუნებისათვის დასჭირდება $\Delta\alpha/\omega$ დრო. ამიტომ B წერტილში ათინათი აღმოჩნდება დროის შემდეგ მომენტში:

$$t_B = t_A - \frac{SA}{c} + \frac{\Delta\alpha}{\omega} + \frac{SB}{c}.$$

რადგან $SA = h/\cos \alpha$,

$$SB - SA \approx \frac{d SA}{d \alpha} \Delta \alpha = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha,$$

და მივიღებთ

$$t_B \approx t_A + \left(\frac{1}{\omega} + \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \Delta \alpha.$$

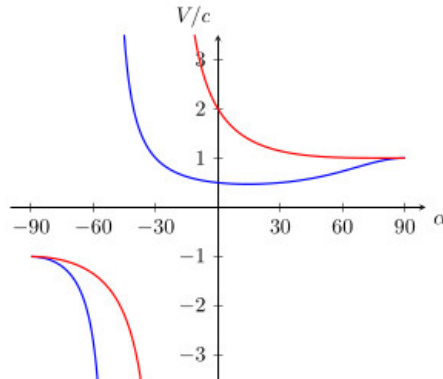
ამიტომ

$$\Delta t = t_B - t_A \approx \left(\frac{1}{\omega} + \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \Delta \alpha. \quad (1.62.2)$$

(1.62.1) და (1.62.2) ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ ათინათის სიჩქარე A წერტილში არის

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{h\omega}{\cos^2 \alpha + \frac{h\omega}{c} \sin \alpha}. \quad (1.62.3)$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი ნაჩვენებია ნახაზზე: ლურჯი გრაფიკი შეესაბამება $h\omega/c = 0.5$ შემთხვევას, ხოლო წითელი გრაფიკი — $h\omega/c = 2$ შემთხვევას.



როგორც ვხედავთ, გარკვეული $\alpha = \alpha_c$ კრიტიკული კუთხის შემთხვევაში ათინათის სიჩქარე უსასრულო ხდება. (1.62.3) ტოლობის თანახმად, ეს ხდება მაშინ, როცა

$$\cos^2 \alpha_c + \frac{h\omega}{c} \sin \alpha_c = 1 - \sin^2 \alpha_c + \frac{h\omega}{c} \sin \alpha_c = 0, \quad (1.62.4)$$

რომლის ამოხსნაცაა (შევნიშნოთ, რომ $|\sin \alpha_c| \leq 1$, ამიტომ კვადრატული განტოლების მეორე ფესვი, დადებითი ნიშნით, არ გამოდგება)

$$\sin \alpha_c = \frac{h\omega}{c} - \sqrt{1 + \left(\frac{h\omega}{c} \right)^2}.$$

კრიტიკული კუთხის არსი შეიძლება ასეთნაირად ავხსნათ. თუკი $t = 0$ დროის მომენტში ლაზერი ასხივებდა ჰორიზონტალურად მარჯვნივ, მაშინ A წერტილში სინათლის ათინათი გამოჩნდება

$$t_A = \frac{\alpha}{\omega} + \frac{h}{c \cos \alpha}$$

დროის მომენტში, სადაც პირველი წვერი ჯამში შეესაბამება იმ დროს, რომელიც ლაზერს დასჭირდა α კუთხით მობრუნებისათვის, და მეორე წვერი — იმ დროს, რომელიც სინათლეს დასჭირდა A წერტილში მისასვლელად. $t_A(\alpha)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი, რომელსაც შეესაბამება ისეთი α_m კუთხე, რომ

$$\left| \frac{dt_A}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_m} = \frac{1}{\omega} + \frac{h \sin \alpha_m}{c \cos^2 \alpha_m} = \frac{1}{\omega \cos^2 \alpha_m} \left(\cos^2 \alpha_m + \frac{h\omega}{c} \sin \alpha_m \right) = 0,$$

და (1.62.4) განტოლებასთან შედარება გვიჩვენებს, რომ $\alpha_m = \alpha_c$.

ამრიგად გვაქვს შემდეგი სურათი: პერიოდულად ათინათი პირველად გამოჩნდება იმ წერტილში რომელსაც შეესაბამება α_c კუთხე. შემდეგ ათინათი ორად იყოფა, ერთი მათგანი იწყებს მოძრაობას მარჯვნივ, ხოლო მეორე — მარცხნივ. მათი სიჩქარეები მოიცემა (1.62.3) ფორმულით. ერთ-ერთი ათინათი ყოველთვის სინათლეზე მეტი სიჩქარით მოძრაობს. თუკი $h\omega/c > 2$, მეორე ათინათიც ყოველთვის სინათლეზე მეტი სიჩქარით მოძრაობს. მაგრამ თუკი $h\omega/c < 2$, მაშინ მეორე ათინათი იწყებს მოძრაობას სინათლეზე მეტი სიჩქარით, რომელიც მცირდება და იმ წერტილში, რომელსაც შეესაბამება ისეთი α_s კუთხე, რომ

$$\sin \alpha_s = \frac{h\omega}{c} - 1,$$

ათინათის სიჩქარე უტოლდება სინათლის c სიჩქარეს. შემდგომში სიჩქარე ქვლავ მცირდება, აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას

$$V_{min} = \frac{4h\omega}{4 + (h\omega/c)^2},$$

როცა $\sin \alpha = \frac{h\omega}{2c}$, და კვლავ იწყებს ზრდას ისე, რომ ასიმპტოტურად, რიცა $\alpha \rightarrow 90^\circ$, ათინათის სიჩქარე მიისწრაფვის კვლავ სინათლის სიჩქარისაკენ.

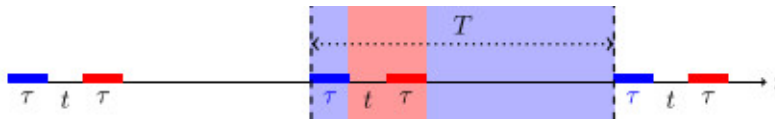
1.63 წყლის მოთხილამურეს სიჩქარე

მოთხილამურე მიბმულია კატერზე გაუჭიმავი თოკით. ამიტომ მისი სიჩქარის პროექცია თოკის გასწვრივ იგივე უნდა იყოს, როგორც კატერის სიჩქარის პროექცია თოკის

გასწვრივ, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში თოკის სიგრძე შეიცვლება და გაუჭიმვადი თოკი ან გაწყდება, ანდა ჩაიხსნება, ალარ იქნება დაჭიმული და მოთხილამურე სიჩქარეს დაკარგავს. რადგან მხოლოდ თოკის გასწვრივ პროექციების ტოლობაა აუცილებელი პირობა, მოთხილამურეს სიჩქარე შეიძლება კატერის სიჩქარეზე მეტი იყოს, მაგალითად როცა კატერის სიჩქარე თოკის გასწვრივია, ხოლო მოთხილამურეს სიჩქარე რაღაც კუთხეს ადგენს თოკთან.

1.64 განსხვავება დასავლეთ და აღმოსავლეთ მიმართულებებს შორის

ვთქვათ მატარებლებს შორის დროის შუალედი ორივე მიმართულებით არის T , მატარებლის დგომის ხანგრძლივობა სადგურზე — τ , ხოლო დროის შუალედი დასავლეთით მიმავალი მატარებლის წასვლასა და აღმოსავლეთით მიმავალი მატარებლის მოსვლას შორის — t (იხილეთ ნახაზი. წითელი ფერი შეესაბამება აღმოსავლეთ მიმართულებას, ხოლო ლურჯი ფერი — დასავლეთ მიმართულებას).



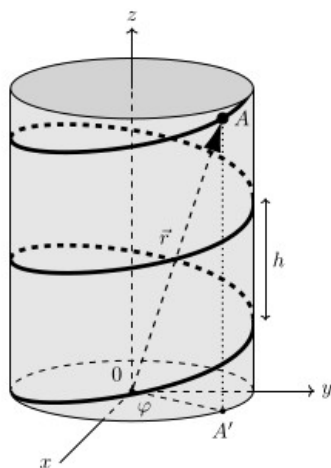
სურათის პერიოდულობის გამო, საკმარისია განვიხილოთ დროის ერთი T პერიოდი. თუკი მგზავრი სადგურზე მიდის დროის იმ შუალედში, რომელიც სურათზე ლურჯი ფერითაა გამოყოფილი, ის ან მაშინვე ჯდება დასავლეთით მიმავალ მატარებელში, ან უცდის ასეთ მატარებელს, რომელიც აღმოსავლეთით მიმავალ მატარებელზე ადრე მოვა, და ჯდება მასში. ნახაზიდან ცხადია, რომ დროის ამ პერიოდის ხანგრძლივობაა $\tau + (T - 2\tau - t) = T - \tau - t$.

თუკი მგზავრი სადგურზე მიდის დროის იმ შუალედში, რომელიც სურათზე წითელი ფერითაა გამოყოფილი, ის პირიქით, ან უცდის აღმოსავლეთით მიმავალ მატარებელს, რომელიც დასავლეთით მიმავალ მატარებელზე ადრე მოვა, და ჯდება მასში, ან მაშინვე ჯდება ასეთ მატარებელში. დროის ამ პერიოდის ხანგრძლივობაა $t + \tau$.

თუკი მგზავრის სადგურზე მოსვლის ყველა დრო თანაბარალებათურია, ცხადია, რომ იმის ალბათობა, რომ მგზავრი ჩაჯდება დასავლეთით მიმავალ მატარებელში $\frac{T-\tau-t}{t+\tau}$ მეტჯერ მეტია, ვიდრე იმის ალბათობა, რომ მგზავრი ჩაჯდება აღმოსავლეთით მიმავალ მატარებელში. ამოცანის პირობის თანახმად ეს თანაფარდობა სამს უდრის. ეს შესაძლებელია, როცა $T = 4(t + \tau)$.

1.65 მოძრაობა სპირალური გლუვი ღარის გასწვრივ

ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე, მოსახერხებელია ვიმუშაოთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში (იხილეთ ნახაზი).



სპირალური ღარის განტოლება ცილინდრულ კოორდინატებში არის

$$\rho = R, \quad z = \frac{\varphi}{2\pi} h. \quad (1.65.1)$$

A წერტილის რადიუს-ვექტორისათვის გვექნება

$$\vec{r} = R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z,$$

სადაც $\vec{e}_z = \vec{k}$ არის ორტი (ერთეული ვექტორი) z -ღერძის გასწვრივ, ხოლო

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \quad (1.65.2)$$

პოლარული ორტებია. A სხეულის სიჩქარეს ვიპოვიოთ თუკი გავაწარმოებთ რადიუს-ვექტორს:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z,$$

სადაც წერტილი აღნიშნავს წარმოებულს დროით, და გავითვალისწინეთ, რომ, (1.65.2) ტოლობების თანახმად,

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho.$$

ანალოგიურად ვიპოვიტ სხეულის აჩქარებას:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = R\ddot{\phi}\vec{e}_\phi - R\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

თუკი გავითვალისწინებთ (1.65.1) ტოლობას z კოორდინატისათვის, სხეულის სიჩქარე და აჩქარება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\vec{V} = R\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \frac{h}{2\pi}\dot{\phi}\vec{e}_z, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = R\ddot{\phi}\vec{e}_\phi - R\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho + \frac{h}{2\pi}\ddot{\phi}\vec{e}_z. \quad (1.65.3)$$

თუკი სხეული ეშვება საწყისი nh სიმაღლიდან z სიმაღლემდე, ენერგიის შენახვის კანონი მოგვცემს

$$mg(nh - z) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)\dot{\phi}^2.$$

ეს განსაზღვრავს სხეულის კუთხურ სიჩქარეს, როგორც z კოორდინატის ფუნქციას

$$\dot{\phi}^2 = \frac{8\pi^2g(nh - z)}{h^2 + 4\pi^2R^2}. \quad (1.65.4)$$

თუკი გავაწარმოებთ ამ ტოლობას,

$$2\dot{\phi}\ddot{\phi} = -\frac{8\pi^2g\dot{z}}{h^2 + 4\pi^2R^2} = -\frac{8\pi^2g}{h^2 + 4\pi^2R^2} \frac{h}{2\pi} \dot{\phi},$$

მივიღებთ, რომ სხეულის კუთხური აჩქარება მუდმივია

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\pi gh}{h^2 + 4\pi^2R^2}. \quad (1.65.5)$$

(1.65.3) ტოლობიდან ცხადია, რომ

$$a^2 = R^2\ddot{\phi}^2 + R^2\dot{\phi}^4 + \frac{h^2}{4\pi^2}\ddot{\phi}^2.$$

ჩავსვათ აქ სხეულის კუთხური აჩქარება (1.65.5) და კუთხური სიჩქარე (1.65.4) დაშვების ბოლო მომენტში, როცა $z = 0$. შედეგად, მცირე ალგებრული გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$a^2 = \frac{g^2h^2}{(h^2 + 4\pi^2R^2)^2} [h^2 + 4\pi^2R^2 (1 + 16\pi^2n^2)].$$

ამრიგად, A სხეულის აჩქარება n სრული შემობრუნების ბოლოს იქნება

$$a = \frac{gh}{h^2 + 4\pi^2R^2} \sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2 (1 + 16\pi^2n^2)}.$$

1.66 სპორცმენების კოლონის სიგრძე

გადავიდეთ მწვრთნელის ათვლის სისტემაში. ამ სისტემაში კოლონა მ.ვრთნელს უახლოვდება $V + u$ სიჩქარით და მის სრულ შებრუნებას დასჭირდება $t = L/(V + u)$ დრო. ამ დროის განმავლობაში, პირველი სპორცმენი, მომელიც შემობრუნების შემდეგ მწვრთნელს შორდება $V - u$ სიჩქარით, მოასწრებს

$$l = (V - u)t = \frac{V - u}{V + u} L$$

მანძილის გარბენას. ცხადია, რომ ეს იქნება კოლონის ახალი სიგრძე შემობრუნების შემდეგ.

1.67 რა სიმაღლეზე ახტება პინგ-პონგის ბურთი?

მიწაზე დაცემის წინ, ორივე ბურთის სიჩქარე იქნება $V = \sqrt{2gh}$. თავდაპირველად კალათბურთის ბურთი აირეკლება მიწისგან სიდიდით იმავე სიჩქარით. თუკი ამ დროს გადავალთ ამ ბურთის ათვლის სისტემაში, დავინახავთ, რომ პინგ-პონგის ბურთი მას ეჯახება $2V$ სიჩქარით. რადგან კალათბურთის ბურთი გაცილებით მძიმეა პინგ-პონგის ბურთზე, ეს უკანასკნელი მისგან აირეკლება როგორც უძრავი კედლისგან, ე.ი. $2V$ სიჩქარით. არეკვლის შემდეგ, პინგ-პონგის სიჩქარე დედამიწის მიმართ იქნება $2V + V = 3V$. რადგან ახტომის სიმაღლე საწყისი სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია, პინგ-პონგის ბურთი ახტება $9h = 13.5$ მ სიმაღლეზე.

1.68 ტრექტორიის სიმრუდის რადიუსი

გავაწარმოთ $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$ ტოლობა

$$2V \frac{dV}{dt} = 2\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{V} \cdot \vec{a}.$$

აქედან ვიპოვიტ ტანგენციალურ აჩქარებას:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{V}.$$

მაშინ ნორმალური აჩქარება იქნება

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\sqrt{a^2 V^2 - (\vec{V} \cdot \vec{a})^2}}{V} = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{V},$$

და ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსათვის მივიღებთ

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^3}{|\vec{V} \times \vec{a}|}.$$

1.69 გემის ტრაექტორიის განტოლება

ვიპოვოთ კოორდინატთა სფერული სისტემის ორტები. რადგან რადიუს-ვექტორი არის

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k},$$

სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ დეკარტეს სისტემის ორტებია x , y და z კოორდინატების გასწვრივ, რადიუს-ვექტორის ინტენიტიზიმალური წანაცვლება r , θ და φ კოორდინატების გასწვრივ იქნება

$$d_{(r)}\vec{r} = dr [\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}],$$

$$d_{(\theta)}\vec{r} = r d\theta [\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}],$$

და

$$d_{(\varphi)}\vec{r} = r \sin \theta d\varphi [-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}].$$

ნორმირების შემდეგ მივიღებთ სფერული სისტემის ორტებს:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}, \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.\end{aligned}\tag{1.69.1}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\dot{\vec{r}}_r = \dot{\theta} [\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}] + \dot{\varphi} \sin \theta [-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}],$$

რაც ნიშნავს

$$\dot{\vec{r}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi.\tag{1.69.2}$$

მერიდიანი მიმართულია $\vec{e}_\theta$ ვექტორის გასწვრივ. ამიტომ, ამოცანის პირობის თანახმად,

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_\theta = V \cos \alpha, \quad \vec{V} \cdot \vec{e}_\varphi = V \sin \alpha,\tag{1.69.3}$$

სადაც მეორე ტოლობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ $\vec{e}_\theta$ და $\vec{e}_\varphi$ ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორებია, რომლებიც $\vec{V}$ -სთან ერთად ერთსა და იმავე სფეროსადმი

მზე სიბრტყეში არიან განლაგებული. მეორე მხრივ, რადგან სფეროს ზედაპირზე $r = R$ არ იცვლება, და (1.69.2) ტოლობის გათვალისწინებით, გემის $\vec{V}$ სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r) = R (\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi).$$

თუკი ამას ჩავსვამთ (1.69.3) ტოლობებში, მივიღებთ

$$R\dot{\theta} = V \cos \alpha, \quad R\dot{\phi} \sin \theta = V \sin \alpha.$$

პირველი ტოლობა გავყოთ მეორეზე და გავითვალისწინოთ $\frac{d\theta}{dt} / \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{d\phi}$, რაც მოგვცემს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\phi} = \cot \alpha.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ავიღოთ ინტეგრალი შემდეგი ტოლობის გათვალისწინებით

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} \right] d \cos \theta = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \ln \tan \frac{\theta}{2}.$$

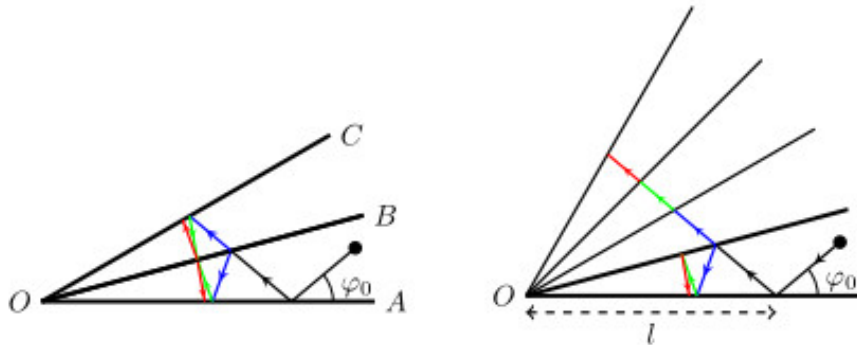
შედეგად მივიღებთ გემის ტრაექტორიის განტოლებას

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{\theta_0}{2} e^{(\phi - \phi_0) \cot \alpha}.$$

ეს წირი ცნობილია ლექსოდრომის სახელით.

1.70 მიახლოების მინიმალური მანძილი

ავრეკლოთ ნაწილაკის ტრაექტორია (ზედა გვერდიდან პირველი არეკვლის შემდეგ) OB ზედა გვერდის მიმართ (იხილეთ მარცხენა ნახაზი).



ასეთი ოპერაციის შემდეგ, ტრაექტორიის ლურჯი და შავი ფერებით გამოყოფილი ნაწილები ერთ წრფეზე აღმოჩნდებიან. თანაც ტრაექტორიის ნებისმიერი წერტილის დაშორება კუთხის O წვეროსაგან იგივე იქნება, რაც OB სარკეში მისი გამოსახულების დაშორება O წერტილისაგან. ცხადია, რომ შემდგომი არეკვლა OC ხაზის მიმართ ტრაექტორიის მწვანე ნაწილსაც ამ წრფეზე მოათავსებს. ასე შეგვიძლია გავაგრძელოთ მანამ, სანამ α კუთხის შიგნით ნაწილაკის ტრაექტორიის ყველა ნაწილი ერთ წრფეზე არ აღმოჩნდება (იხილეთ მარჯვენა ნახაზი). ცხადია, რომ მინიმალური მანძილი კუთხის O წვეროსა და ნაწილაკს შორის უდრის O წერტილიდან ამ წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს და მისი სიდიდეა $l \sin \varphi_0$.

References

- [1] В.И. Арнольд, Задачи для детей от 5 до 15 лет. Москва: МЦНМО, 2004.
- [2] И.И. Воробьев, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова и др., Задачи по физике. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999.
- [3] O. Bolina, Difficult problems having easy solutions. *Physics Education* 34 (1999), 148-149.
- [4] Д. Александров, Векторные уравнения в кинематике. *Квант*, 1991 №2, 59-64.
- [5] D. Morin, Introduction to classical mechanics with problems and solution. Cambridge: 2007.
- [6] А. Леонович, А так хорошо знакома вам парабола? *Квант*, 2013 №1, 32-33.
- [7] XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике. *Квант*, 2002 №5, 52-54.
- [8] Под редакцией А.И. Черноуцана, Задачник “Кванта”, физика, часть 3. Москва: МЦНМО, 2012.
- [9] J. Kalda, [Problems on kinematics](#).
- [10] S.N. Maitra, Solution to the problem on page 80. *American Journal of Physics* 53 (1985), 88.
- [11] Ю.И. Бельченко, Е.А. Гилев З.К. Силагадзе, В.Г. Соколов, Сборник задач по механике частиц и тел. Новосибирск: НГУ, 2000.
- [12] H. Lai, Extraordinary shadow disappearance due to a fast moving light source. *American Journal of Physics* 43(1975), 818–820.
- [13] Ю.И. Бельченко, Е.А. Гилев, З.К. Силагадзе, Механика частиц и тел в задачах. Ижевск: РХД. 2008.
- [14] Л.Б. Окунь. Три эпизода. *Природа*, 1990 № 8, 119.
- [15] И.В. Мещерский, Задачи по теоретической механике. Санкт петербург: Лань, 1998.

- [16] Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо, Сборник задач по классической механике. Ижевск: РХД, 2001.
- [17] С.Е. Mungan, A classic chase problem solved from a physics perspective. *European Journal of Physics* 26 (2005), 985-990.
- [18] И. И. Ольховский, Ю. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков, Задачи по теоретической механике для физиков. Изд-во Москва: МГУ, 1977.
- [19] P. Pták, J. Tkadlec, The dog-and-rabbit chase revisited. *Acta Polytechnica* 36 (1996), 5-10.
- [20] З.К. Силагадзе, Механика и теория относительности. Тестовые задачи. Санкт петербург: Лань, 2024.
- [21] И.Ш. Слободецкий, Л.Г. Асламазов, Задачи по физике. Москва: Наука, 1980.
- [22] З.К. Силагадзе, Механика и теория относительности. Задачи семинарских занятий с решениями. Санкт петербург: Лань, 2024.
- [23] А.С. Жукарев, А.Н. Матвеев, В.К. Петерсон, Задачи повышенной сложности в курсе общей физики. Москва: Эдиториал УРСС, 2001.
- [24] Под редакцией С.С. Кротова, Задачи московских физических олимпиад. Москва: Наука, 1988.
- [25] Б.Б. Буховцев, В.Д. Кривченков, Г.Я. Мякишев, И.М. Сараева, Сборник задач по элементарной физике. Москва: Наука, 1974.
- [26] J. Cole, [The Math Behind the Rolling Shutter Phenomenon](#).
- [27] H. Ardavan, The Speed-of-Light Catastrophe. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* 424 (1989), 113-141.
- [28] R.J. Nemiroff, Superluminal Spot Pair Events in Astronomical Settings: Sweeping Beams. *Publications of the Astronomical Society of Australia* 32 (2015), e001.

Contents

1	ამოცანები	2
1.1	რა დროს გათენდა?	3
1.2	სამი მიკროფონი	3
1.3	კონსულური ჭურვი	3
1.4	რამდენად შორს წაიღებს წყალი ნავს?	4
1.5	ოპტიმალური ცურვის კუთხე	4
1.6	მოხტუნავე ბურთულა დახრილ სიბრტყეზე	4
1.7	ფოლადის ბურთულა და დახრილი სიბრტყე	5
1.8	რა სიმაღლეზე მოხდა ბურთულათა შეჯახება?	5
1.9	ბურთის საშუალო სიჩქარე	5
1.10	სროლის მაქსიმალური მანძილი	5
1.11	კუთხე საწყის და საბოლოო სიჩქარეებს შორის	6
1.12	რა სიმაღლეზე იჯდა კატა?	6
1.13	კატა და ცელქი თავუვნები	6
1.14	რა მანძილზე იყო კატა თავგებისაგან?	7
1.15	რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე აღმოჩნდება ხოჭო?	7
1.16	ზებგერიითი თვითმფრინავის სიჩქარე	8
1.17	რა მიდამოდან შეძლებს მგზავრი ავტობუსის დაწევას?	8
1.18	რა დროით ჩამორჩება თქვენი საათი?	8
1.19	გლუვი ღარის ოპტიმალური კუთხე	8
1.20	რა მასის წყალი იმყოფება ჰაერში?	9
1.21	ქვის უმცირესი სიჩქარე	9
1.22	თბილისიდან ქუთაისში ფრენის ხანგრძლივობა	9
1.23	მაქსიმალური შესაძლო კუთხე	9
1.24	იპოვეთ ნამსხვრევების სიჩქარე	9
1.25	ოთხი ხოჭო	10
1.26	რამდენ დროს დაყოფს ბურთულა მილში?	10
1.27	რას უდრის ჩარღმავების რადიუსი?	10
1.28	ბურთულა მართკუთხა ბილიარდში	11
1.29	ბორბალის ღერძის სიჩქარე	11
1.30	ქვის მინიმალური სიჩქარე	11
1.31	რგოლების გადაკვეთის წერტილის სიჩქარე	12
1.32	სახლი დახრილი სახურავით	12
1.33	რა დროში მიაღწევს ჭიანჭველა ლენტის ბოლოს?	12
1.34	სახსრული ბმულით შეერთებული ორი ღერო	13
1.35	რა მანძილზე დაეცემა ჭურვი?	13

1.36	რა დროის შემდეგ დაეცა მიწაზე მეორე ნამსხვრევი?	13
1.37	ბურთულებს შორის მანძილი	13
1.38	ჭურვების ტრაექტორიების მხები წირი	14
1.39	ციკლოიდის სიმრუდის რადიუსი	14
1.40	იპოვეთ აჩქარება	14
1.41	რა დროში დაიჭერს ძალი მელას?	14
1.42	რა პირობებში ამოვა ბურთულა ჭიდან?	14
1.43	რა სიჩქარით მოძრაობს ყუთი?	15
1.44	მოძრავი ველისიძედის სურათი	15
1.45	მაქსიმალური და მინიმალური სიჩქარე	16
1.46	რას უდრის ბურთულას აჩქარება?	16
1.47	რას უდრის მინიმალური მანძილი?	16
1.48	დისკის ცენტრის სიჩქარე	17
1.49	ცილინდრის ღერძის სიჩქარე	17
1.50	მოტორიანი ნავი და კილვატერული ტალღები	17
1.51	თვითმფრინავის მბრუნავი პროპელერის ფოტო	18
1.52	კაცი წვიმაში	18
1.53	რა დროის შემდეგ კვლავ შემოეხვევა სიმი ცილინდრს?	18
1.54	ბიკფორდის ზონარის ფორმა	19
1.55	ბზრილას ვარდნა მაგიდიდან	19
1.56	ვენერას დაკვირვების მაქსიმალური დრო მზის ჩასვლის შემდეგ	20
1.57	ჩრდილის ბოლოს ტრაექტორია	20
1.58	ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარე	20
1.59	იოს დაკვირვებადი ორბიტალური პერიოდი	20
1.60	მოჩვენებითი სუპერლუმინალური მოძრაობა	20
1.61	ჩრდილის გაქრობა	20
1.62	სინათლის ათინათის სიჩქარე	21
1.63	წყლის მოთხილამურეს სიჩქარე	21
1.64	განსხვავება დასავლეთ და აღმოსავლეთ მიმართულებებს შორის	21
1.65	მოძრაობა სპირალური გლუვი ღარის გასწვრივ	22
1.66	სპორცმენების კოლონის სიგრძე	22
1.67	რა სიმაღლეზე ახტება პინგ-პონგის ბურთი?	22
1.68	ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი	23
1.69	გემის ტრაექტორიის განტოლება	23
1.70	მიახლოების მინიმალური მანძილი	23

2	ამოხსნები	24
1.1	რა დროს გათენდა?	25
1.2	სამი მიკროფონი	26
1.3	კონუსური ჭურვი	26
1.4	რამდენად შორს წაიღებს წყალი ნავს?	27
1.5	ოპტიმალური ცურვის კუთხე	28
1.6	მოხტუნავე ბურთულა დახრილ სიბტყეზე	29
1.7	ფოლადის ბურთულა და დახრილი სიბრტყე	30
1.8	რა სიმაღლეზე მოხდა ბურთულათა შეჯახება?	31
1.9	ბურთის საშუალო სიჩქარე	32
1.10	სროლის მაქსიმალური მანძილი	33
1.11	კუთხე საწყის და საბოლოო სიჩქარეებს შორის	34
1.12	რა სიმაღლეზე იჯდა კატა?	35
1.13	კატა და ცელქი თავუნიები	36
1.14	რა მანძილზე იყო კატა თავგებისაგან?	37
1.15	რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე აღმოჩნდება ხოჭო?	38
1.16	ზებგერიითი თვითმფრინავის სიჩქარე	39
1.17	რა მიდამოდან შეძლებს მგზავრი ავტობუსის დაწევას?	41
1.18	რა დროით ჩამორჩება თქვენი საათი?	45
1.19	გლუვი ღარის ოპტიმალური კუთხე	45
1.20	რა მასის წყალი იმყოფება ჰაერში?	46
1.21	ქვის უმცირესი სიჩქარე	47
1.22	თბილისიდან ქუთაისში ფრენის ხანგრძლივობა	48
1.23	მაქსიმალური შესაძლო კუთხე	50
1.24	იპოვეთ ნამსხვრევების სიჩქარე	51
1.25	ოთხი ხოჭო	51
1.26	რამდენ დროს დაყოფს ბურთულა მილში?	52
1.27	რას უდრის ჩარღმავების რადიუსი?	53
1.28	ბურთულა მართკუთხა ბილიარდში	55
1.29	ბორბალის ღერძის სიჩქარე	59
1.30	ქვის მინიმალური სიჩქარე	60
1.31	რგოლების გადაკვეთის წერტილის სიჩქარე	62
1.32	სახლი დახრილი სახურავით	64
1.33	რა დროში მიაღწევს ჭიანჭველა ლენტის ბოლოს?	66
1.34	სახსრული ბმულით შეერთებული ორი ღერო	69
1.35	რა მანძილზე დაეცემა ჭურვი?	71
1.36	რა დროის შემდეგ დაეცა მიწაზე მეორე ნამსხვრევი?	72
1.37	ბურთულებს შორის მანძილი	73

1.38	ჭურვების ტრაექტორიების მხები წირი	76
1.39	ციკლოიდის სიმრუდის რადიუსი	77
1.40	იპოვეთ აჩქარება	79
1.41	რა დროში დაიჭერს ძალდი მელას?	80
1.42	რა პირობებში ამოვა ბურთულა ჭიდან?	80
1.43	რა სიჩქარით მოძრაობს ყუთი?	82
1.44	მოძრავი ველოსიპედის სურათი	82
1.45	მაქსიმალური და მინიმალური სიჩქარე	83
1.46	რას უდრის ბურთულას აჩქარება?	85
1.47	რას უდრის მინიმალური მანძილი?	86
1.48	დისკის ცენტრის სიჩქარე	87
1.49	ცილინდრის ღერძის სიჩქარე	89
1.50	მოტორიანი ნავი და კილვატერული ტალღები	90
1.51	თვითმფრინავის მბრუნავი პროპელერის ფოტო	95
1.52	კაცი წვიმაში	100
1.53	რა დროის შემდეგ კვლავ შემოეხვევა სიმი ცილინდრს?	102
1.54	ბიკეორდის ზონარის ფორმა	104
1.55	ბზრიალას ვარდნა მაგიდიდან	106
1.56	ვენერას დაკვირვების მაქსიმალური დრო მზის ჩასვლის შემდეგ	107
1.57	ჩრდილის ბოლოს ტრაექტორია	108
1.58	ქარის და თვითმფრინავის სიჩქარე	111
1.59	იოს დაკვირვებადი ორბიტალური პერიოდი	114
1.60	მოჩვენებითი სუპერლუმინალური მოძრაობა	117
1.61	ჩრდილის გაქრობა	118
1.62	სინათლის ათინათის სიჩქარე	120
1.63	წყლის მოთხილამურეს სიჩქარე	122
1.64	განსხვავება დასავლეთ და აღმოსავლეთ მიმართულებებს შორის	123
1.65	მოძრაობა სპირალური გლუვი ღარის გასწვრივ	124
1.66	სპორცმენების კოლონის სიგრძე	126
1.67	რა სიმაღლეზე ახტება პინგ-პონგის ბურთი?	126
1.68	ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი	126
1.69	გემის ტრაექტორიის განტოლება	127
1.70	მიახლოების მინიმალური მანძილი	128