ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კოსმოლოგია და ელემენტარული ნაწილაკები

სპინის მდგომარეობები ბლოხის სფეროს გამოყენებით

574472162
tugushinika96@gmail.com
https://www.researchgate.net/profile/Nika-Tugushi

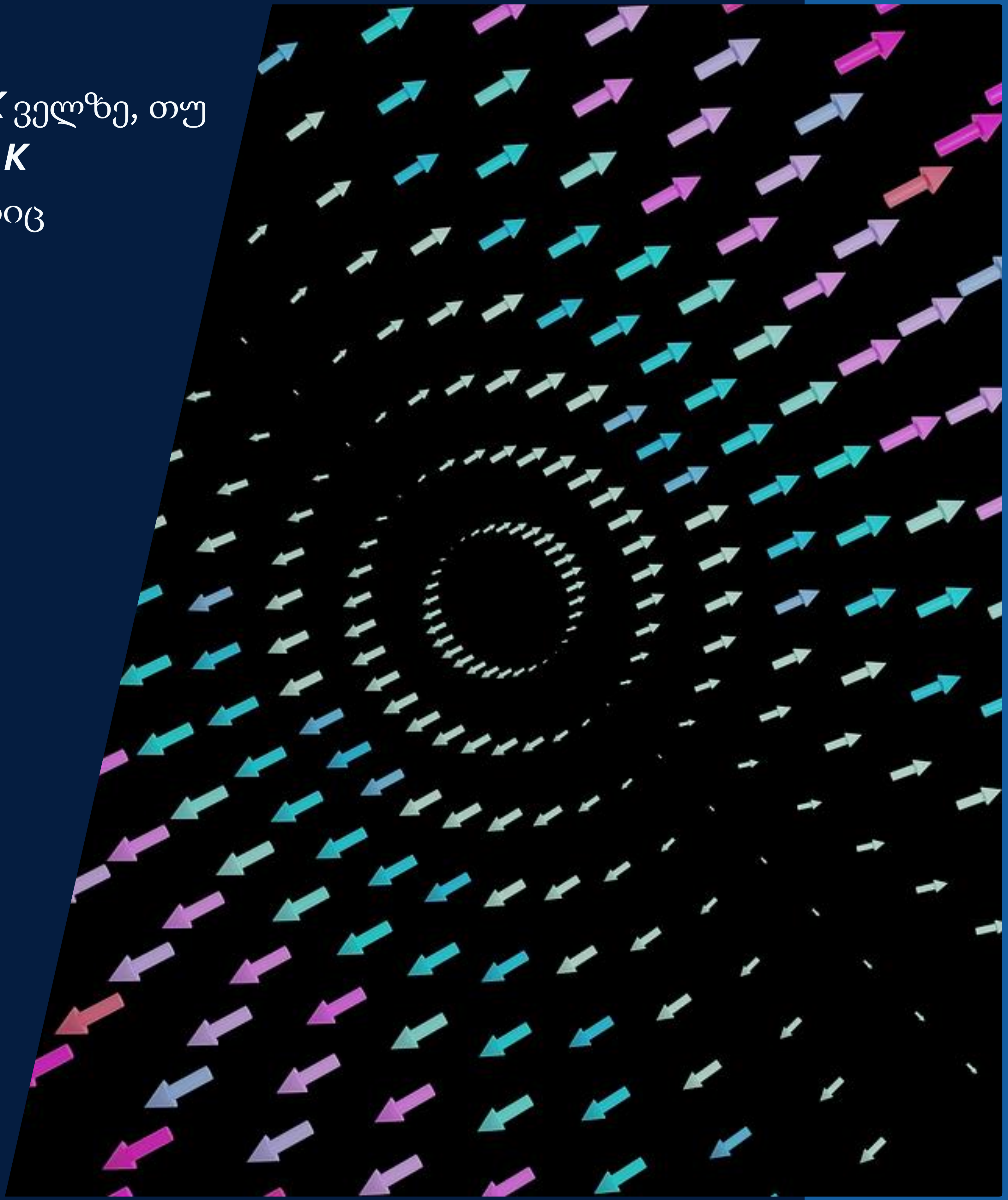
ვექტორული (წრფივი) სივრცე

მოცემული ობიექტების ***L*** სიმრავლეს ეწოდება ვექტორული (წრფივი) სივრცე ***K*** ველზე, თუ ***L*** სიმრავლის ელემენტებისთვის განმარტებული გვაქვს შეკრების ოპერაცია და ***K*** სიმრავლიდან აღებულ ელემენტზე (სკალარი) გამრავლების ოპერაცია, რომლებიც ემორჩილებიან შემდეგ აქსიომებს:

- $|l_1\rangle + |l_2\rangle \in L$
- $k\left(|l_1\rangle + |l_2\rangle\right) = k\,|l_1\rangle + k\,|l_2\rangle$
- $(k_1 + k_2)\,|l\rangle = k_1\,|l\rangle + k_2\,|l\rangle$
- $k_1\left(k_2\,|l\rangle\right) = (k_1 k_2)\,|l\rangle$
- $|l_1\rangle + |l_1\rangle = |l_2\rangle + |l_1\rangle$
- $|l_1\rangle + \left(|l_2\rangle + |l_3\rangle\right) = \left(|l_1\rangle + |l_2\rangle\right) + |l_3\rangle$
- $|l\rangle + |0\rangle = |l\rangle$
- $|l\rangle + |-l\rangle = |0\rangle$

სადაც ***L*** სიმრავლის ელემენტები აღნიშნულია $|l_i\rangle$ - ით

ხოლო ***K*** სიმრავლის ელემენტები აღნიშნულია k_i - ით

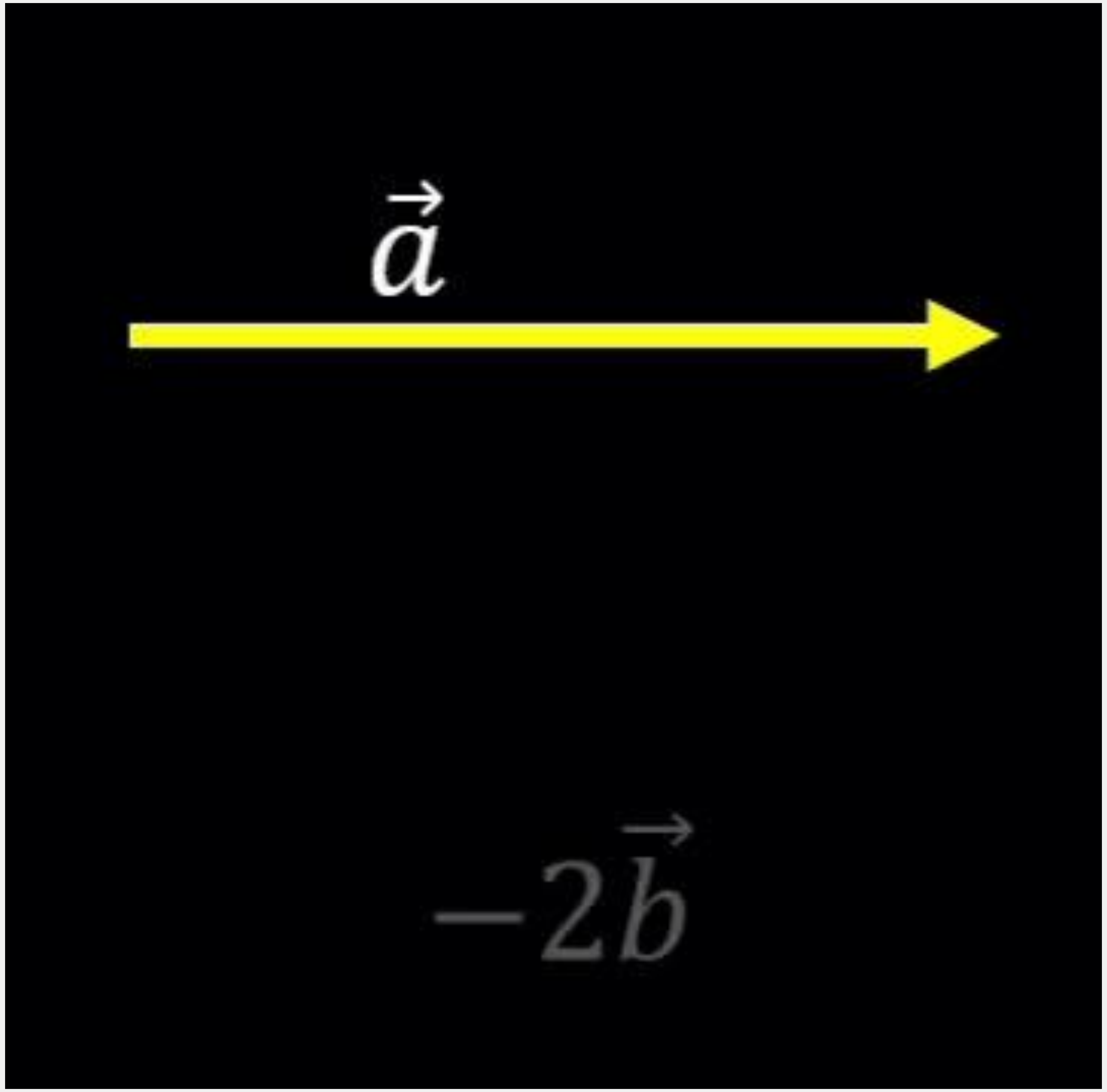


ვექტორების წრფივი დამოკიდებულება

თუ ვექტორების წრფივი კომბინაციით ნულ ვექტორი მხოლოდ იმ შემთხვევაში მიიღება, როცა თითოეული მათგანის კოიფიციენტი ნულია, მაშინ ეს ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია.
თუ მოცემულ იდეას განვაზოგადებთ ვექტორული სივრცის ელემენტებისთვის მივიღებთ წრფივად დამოუკიდებლობის პირობას:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left|i\right\rangle = \left|0\right\rangle$$

თუ ვექტორული სივრციდან აღებული ელემენტები აკმაყოფილებენ ზემოთ მოცემულ პირობას მხოლოდ მაშინ, როცა მათი შესაბამისი კოიფიციენტები ნულია, მაშინ ისინი წრფივად დამოუკიდებლები არიან.



მაგალითისთვის ამოვწეროთ 6 ელემენტი რეალური მატრიცების მიერ R ზე შექმნილი ვექტორული სივრციდან

$L = 2 \times 2$ მატრიცები

$K = R$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad |5\rangle = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|3\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |4\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad |6\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

მარტივი შესამჩნევია, რომ მოცემული ვექტორული ველის ნებისმიერი ელემენტი შეგვიძლია გამოვსახოთ პირველი 4 ელემენტის (ვექტორის) წრფივი კომბინაციით

$$-7\,|1\rangle + |5\rangle = -7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

განხილული მაგალითის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პირველი და მეხუთე ვექტორები წრფივდ დამოკიდებულია, პირველი და მეორე წრფივად დამოუკიდებელი და ა.შ

წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების მაქსიმალური რაოდენობით, იქმნება წრფივი (ვექტორული) სივრცის ბაზისი

განხილულ მაგალითში პირველი ოთხი მატრიცის ერთობლიობა ქმნის მოცემული ვექტორული სივრცის ბაზისს. რაც იგივეა ვთქვათ მოცემული წრფივი სივრცის განზომილება არის *4*

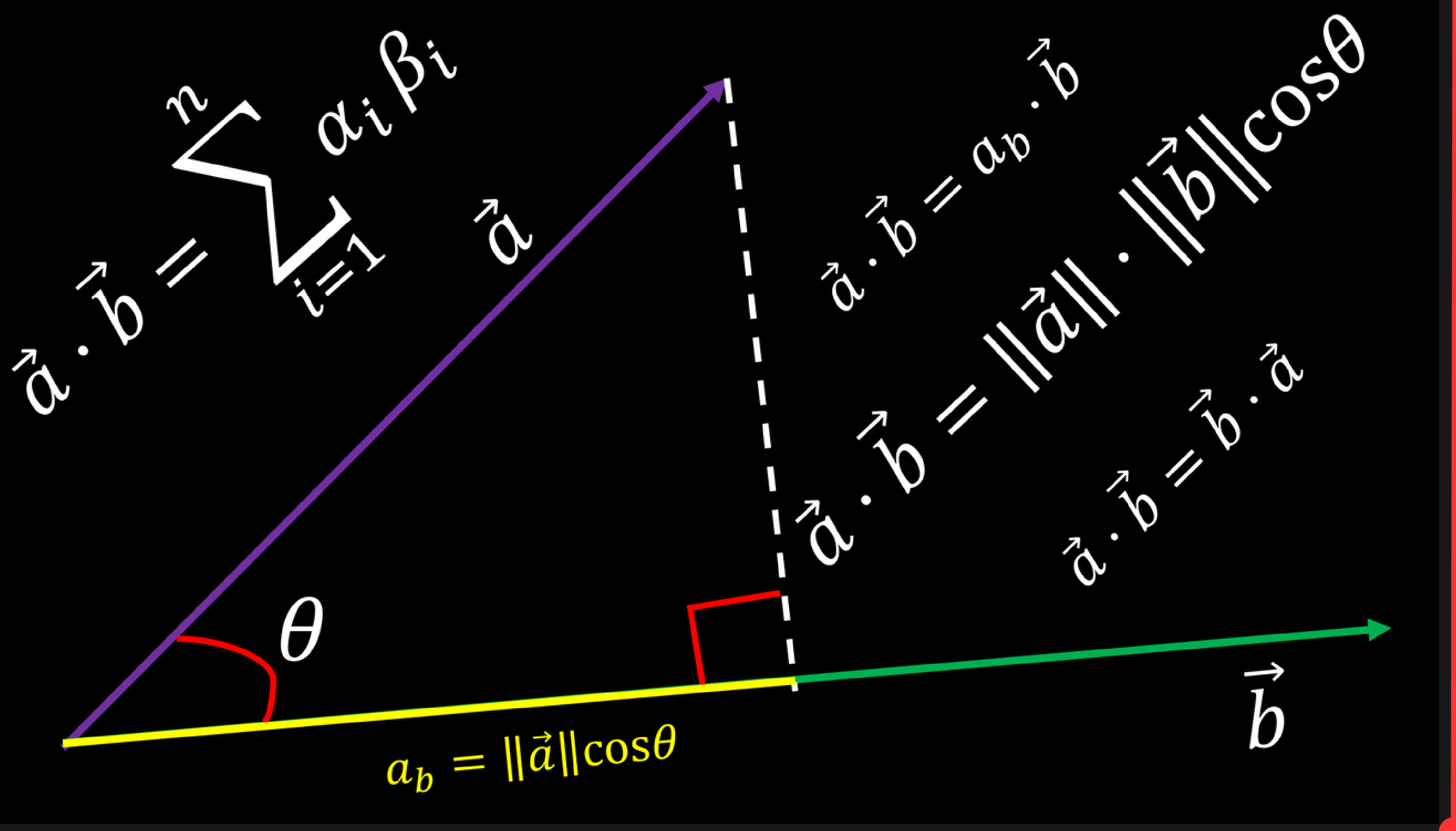
ელემენტის წარმოდგენა საბაზისო ვექტორებით

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle + d\,|4\rangle$$

განზოგადება **n** განზომილებიანი ბაზისისთვის:

$$|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,|i\rangle \qquad \langle A| = \sum_{i=1}^{n} \langle i|\alpha_i^*$$

სკალარული ნამრავლი



შიდა ნამრავლი

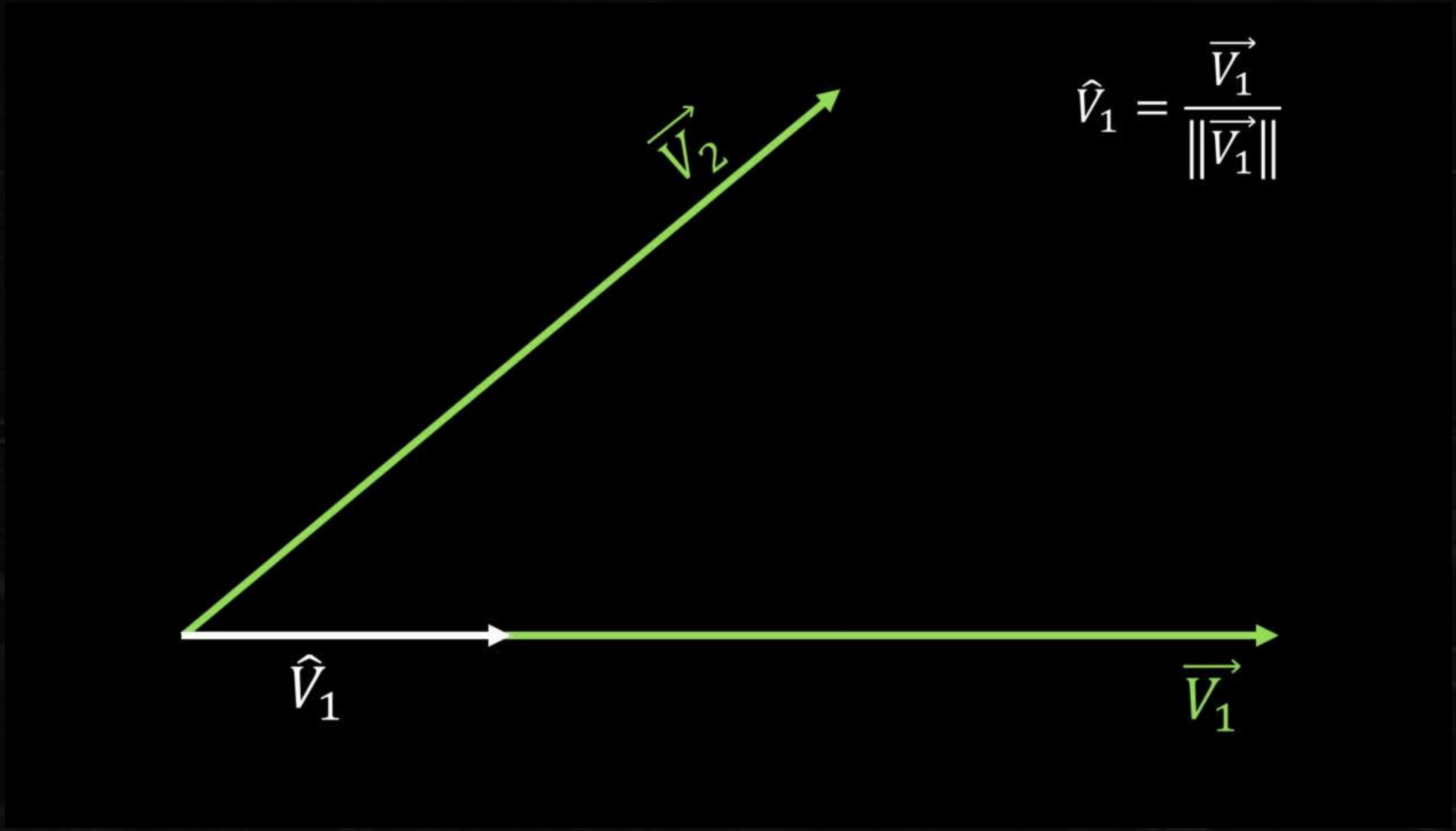
$$\langle B|A\rangle = \beta_1^*\alpha_1 + \beta_2^*\alpha_2 + \cdots + \beta_n^*\alpha_n$$

$$\langle B|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^*\alpha_i$$

$$\langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^*$$

გრამ-შმიდტის პროცედურა:

როგორც ვნახეთ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები ქმნიან სივრცის ბაზისს. ახლა რეალური ორგანზომილებიანი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორით ავაწყოთ ორთო-ნორმირებული ბაზისი და შემდეგ განვაზოგადოთ.
ორთო-ნორმირებული ბაზისი ჰქვია ბაზისს, რომელიც შექმნილია ერთეულოვანი “სიგრძისა” და ურთიერთმართობული ვექტორებისგან.

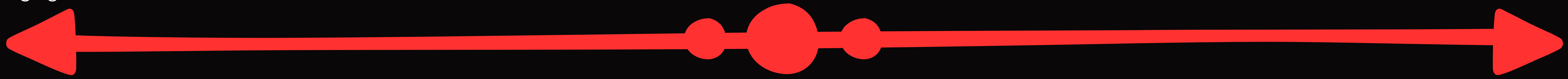


განხილულ მაგალითში სკალარულ ნამრავლს თუ ჩავანაცვლებთ შიდა ნამრავლით და დავამატებთ განზომილებებს, მარტივად გადავალთ განზოგადებულ შემთხვევაზე

რა ხდება თუ ვექტორულ სივრცეში წრფივად დამოუკიდებელი, ორთო-ნორმირებული ელემენტების რიცხვი მიისწრაფვის უსასრულობისკენ?

მაგალითისთვის განვიხილოთ პოლინომების მიერ შექმნილი ვექტორული სივრცე, ნამდვილი რიცხვების ველზე. მისი ბაზისი იქნება:

$$\{x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n\} \quad n \to \infty$$



განვიხილოთ შემდეგი უსასრულო პოლინომი:

$$P(x) = 1x^0 + 1x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

ვიცით რომ მოცემული უსასრულო პოლინომი კრებადია და

$$P(x) = e^x$$

e^x არ არის მოცემული წრფივი სივრცის ელემენტი

თუ მოცემული წრფივი სივრცის ელემენტების სიმრავლეს დავუმატებთ იმ ელემენტსაც, რომლისკენაც მისი უსასრულო ელემენტების წრფივი კომბინაცია იკრიბება, მივიღებთ უსასრულო ბაზისის მქონე ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც ჰილბერტის სივრცე ეწოდება

კვანტური მდგომარეობები:

ნებისმიერი კვანტური მდგომარეობა, წარმოდგინდება როგორც ჰილბერტის სივრცის ერთგანზომილებიანი ქვე სივრცე

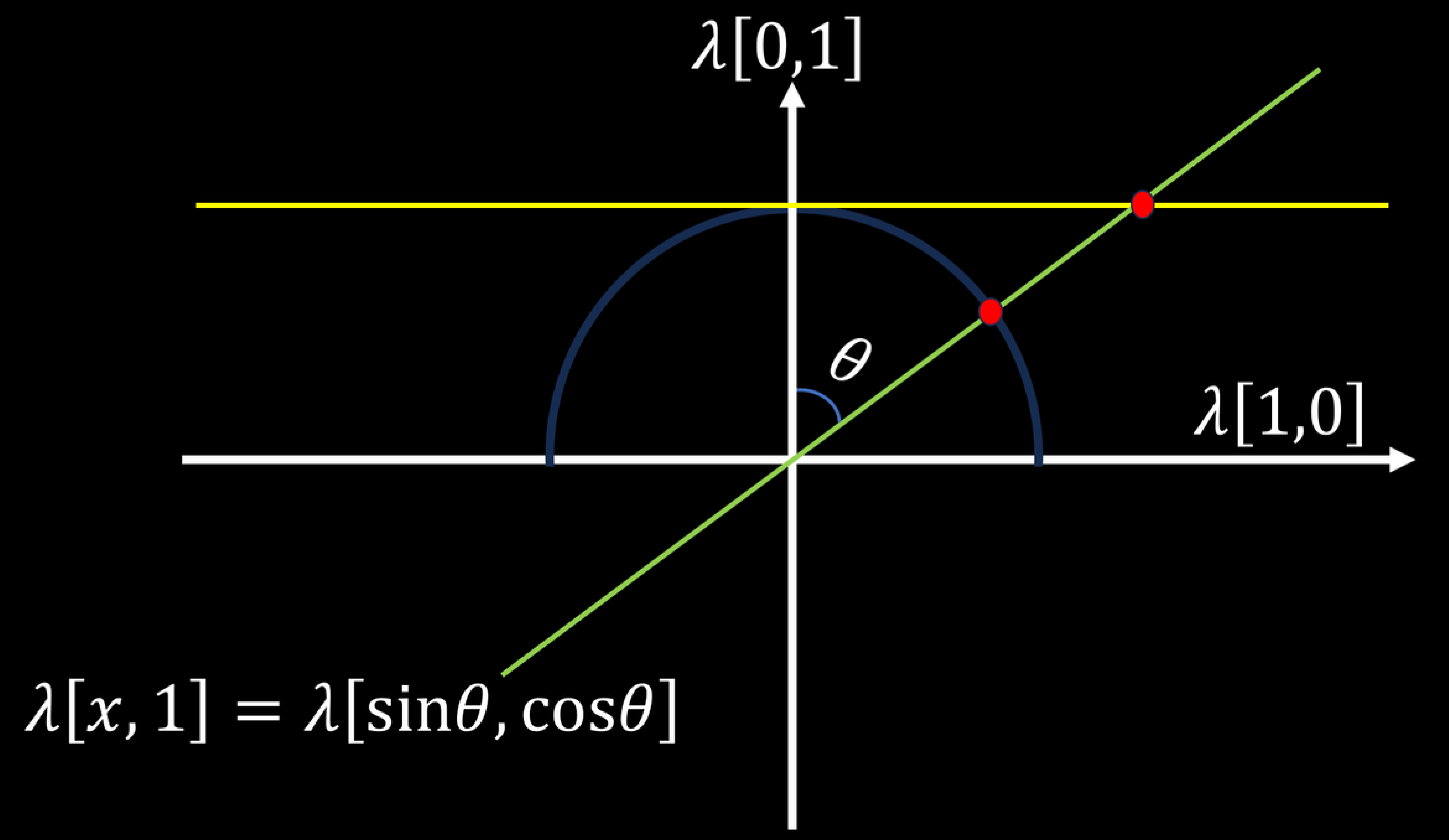
$$|\psi\rangle \in \boldsymbol{H}$$

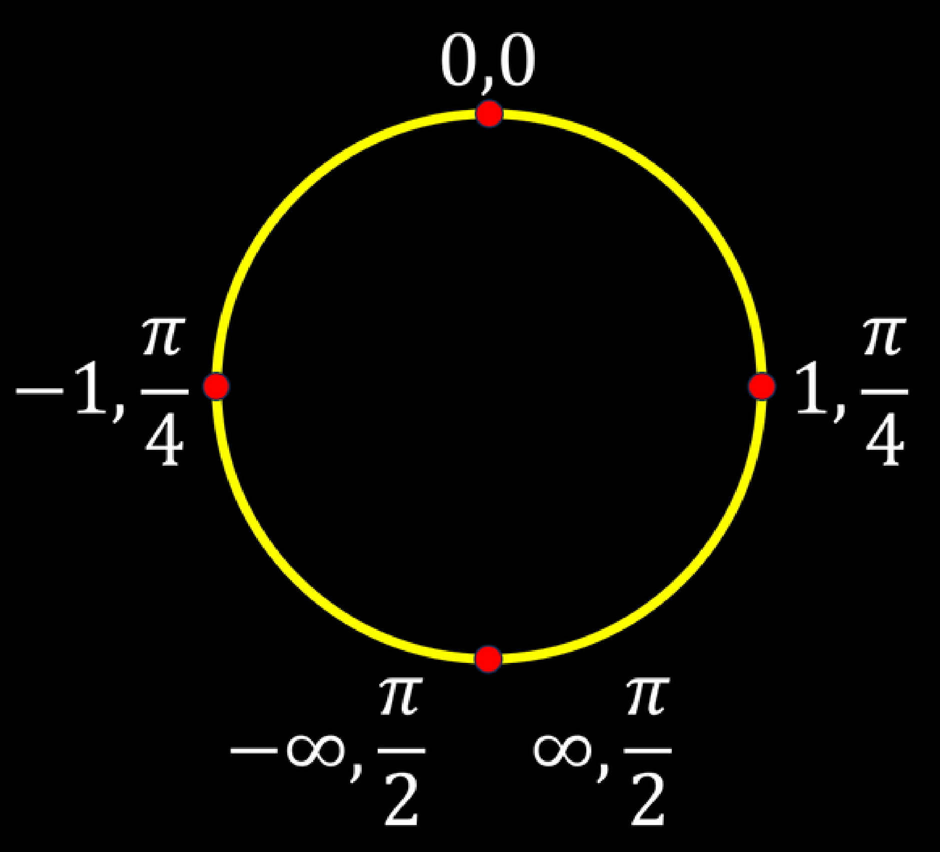
ჰილბერტის სივრცის ვექტორი

$$|\psi\rangle \equiv \boldsymbol{\lambda}\,|\psi\rangle$$

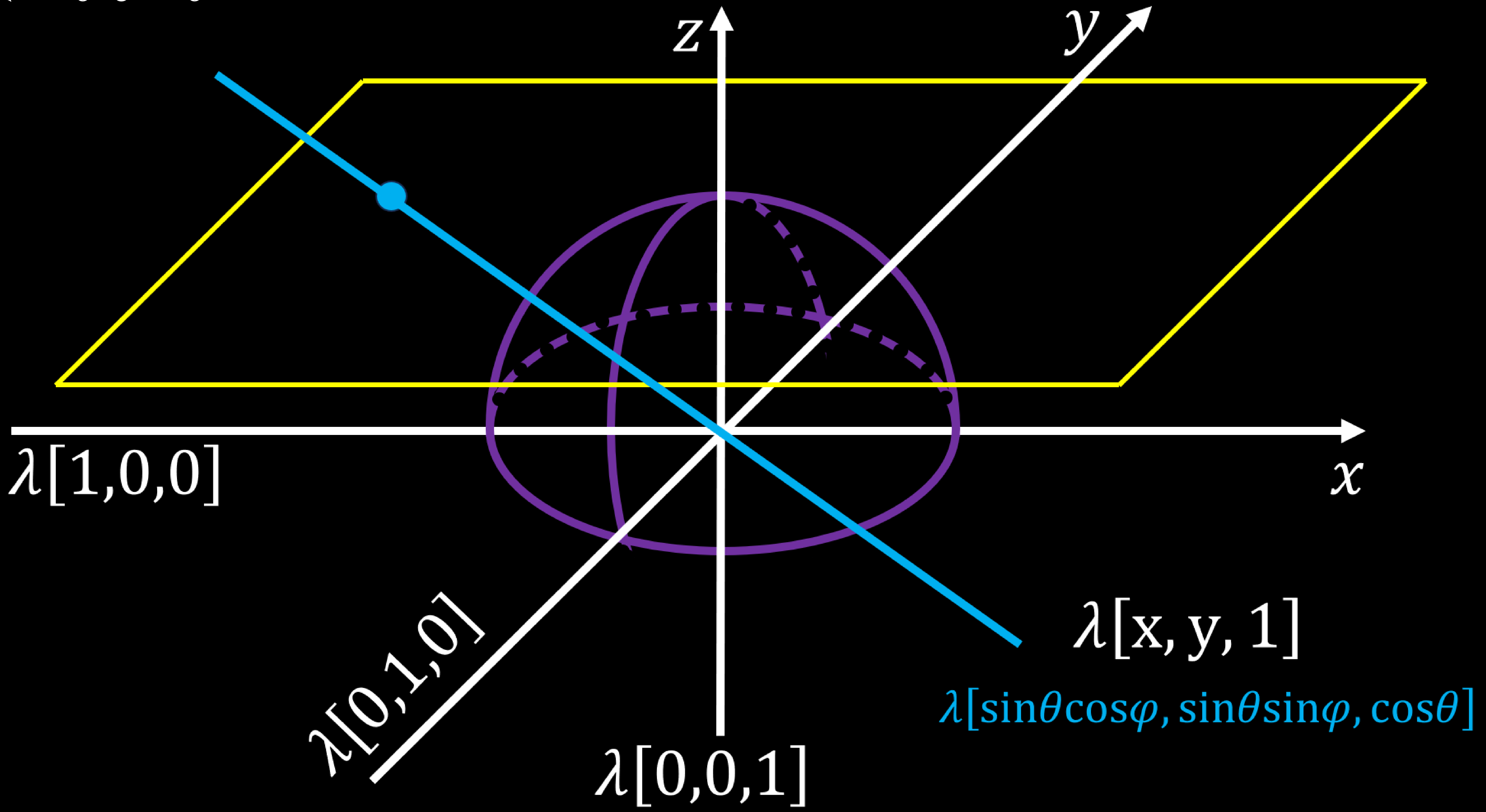
იგივე კვანტური მდგომარეობა, ჰილბერტის სივრცის ქვესივრცე

რეალური პროექციის წირი:

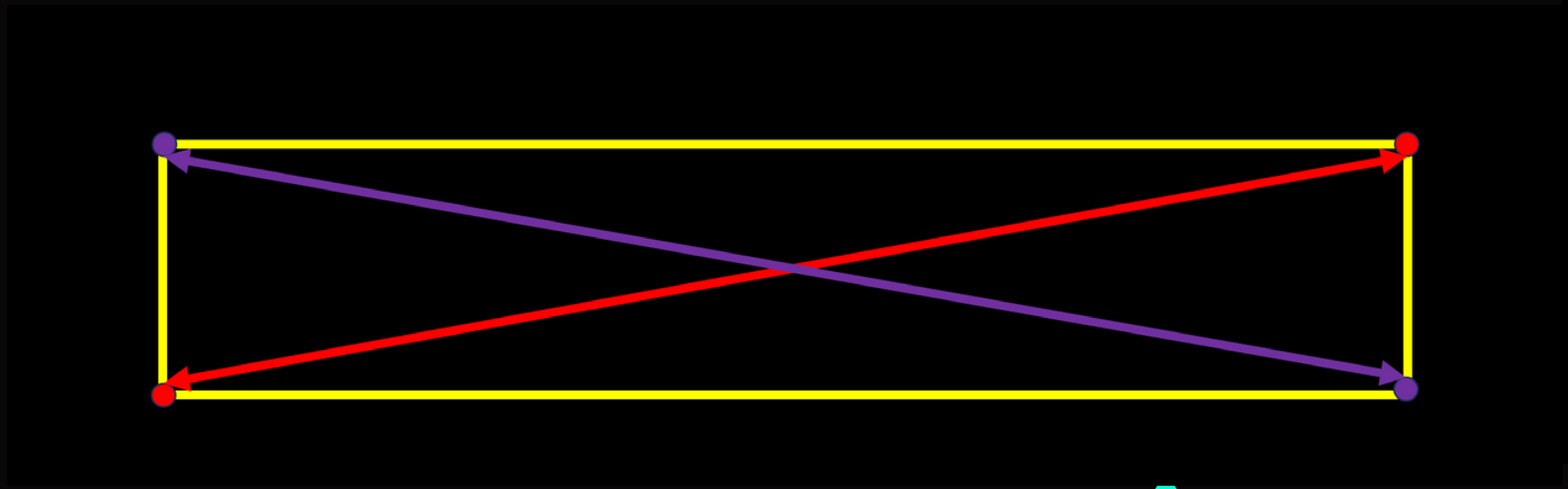


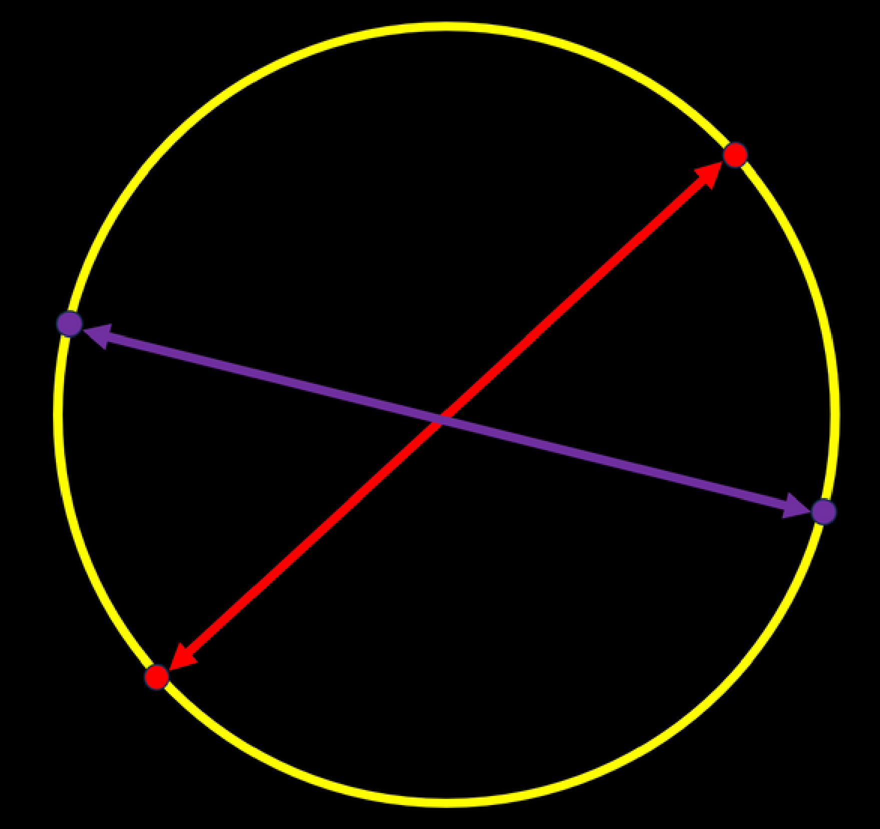


იგივე პროცედურა კომპლექსური ვექტორული სივრცისთვის:



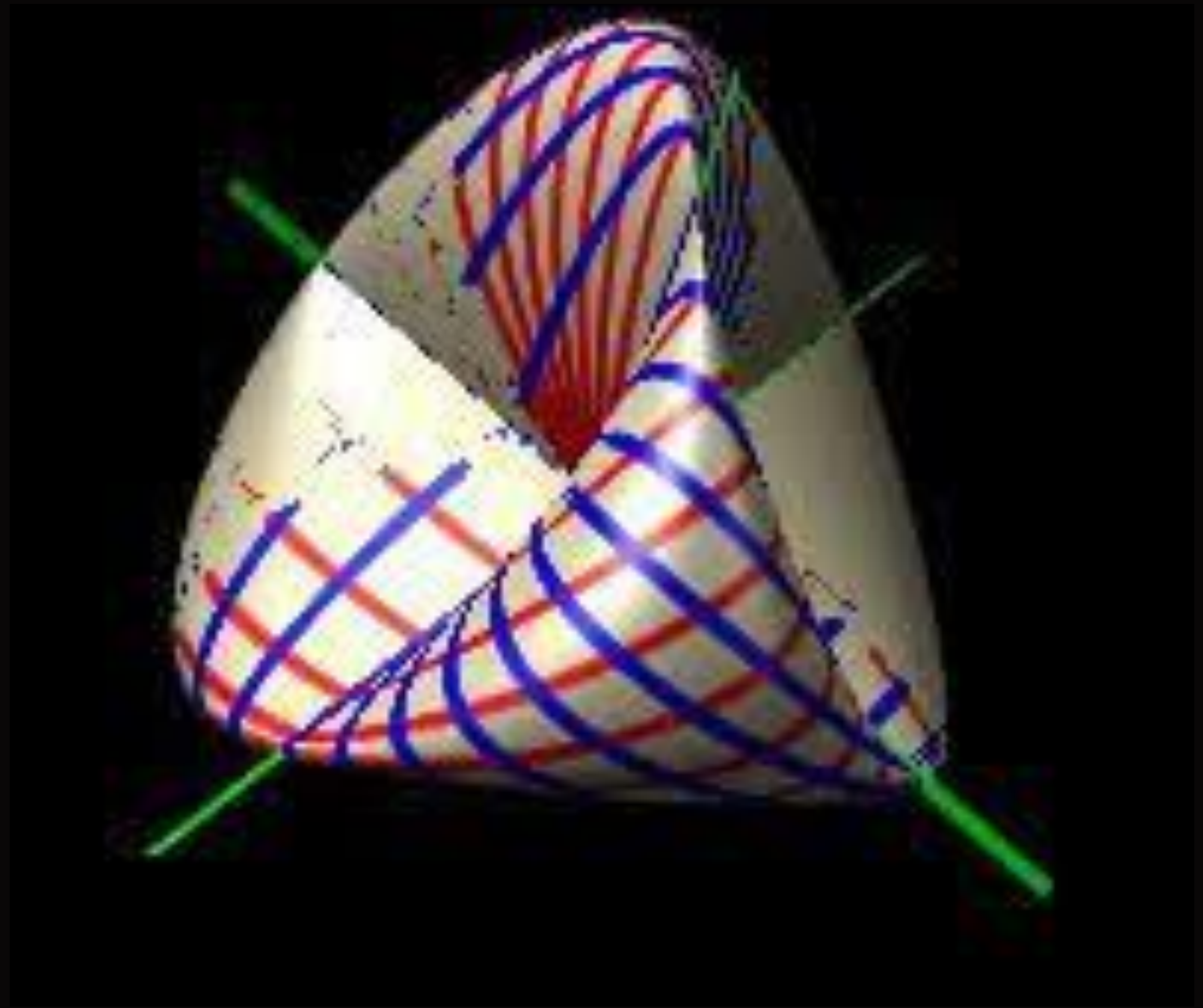
წინა მაგალითის მსგავსად ვცადოთ “გადავაბათ” იგივურად ტოლი წერტილები. ამასთან ამოვხაზოთ ეკვატორის ვიწრო ზოლი, რომელსაც წინხედში ექნება ცილინდრის ფორმა





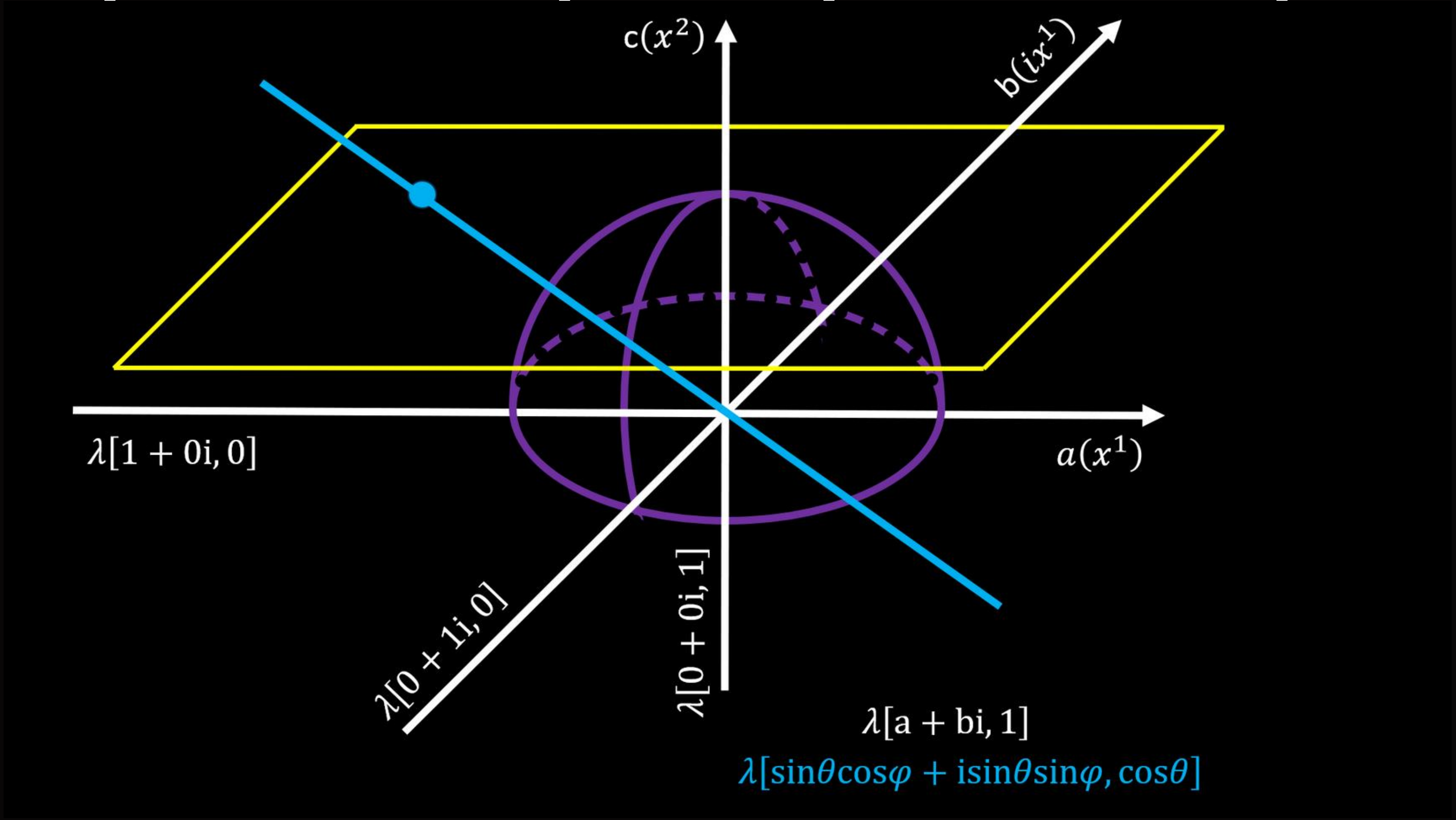
თუ გადვწყვეტთ შევინარჩუნოთ მოცემულ სივრცეში ორიენტაციის ცნება მაშინ რეალური სურათი მიიღებს გართულებულ ფორმას.

მოცემულ შემთხვევაში შეგვიძლია ამ ფაქტის უგულებელყოფა.



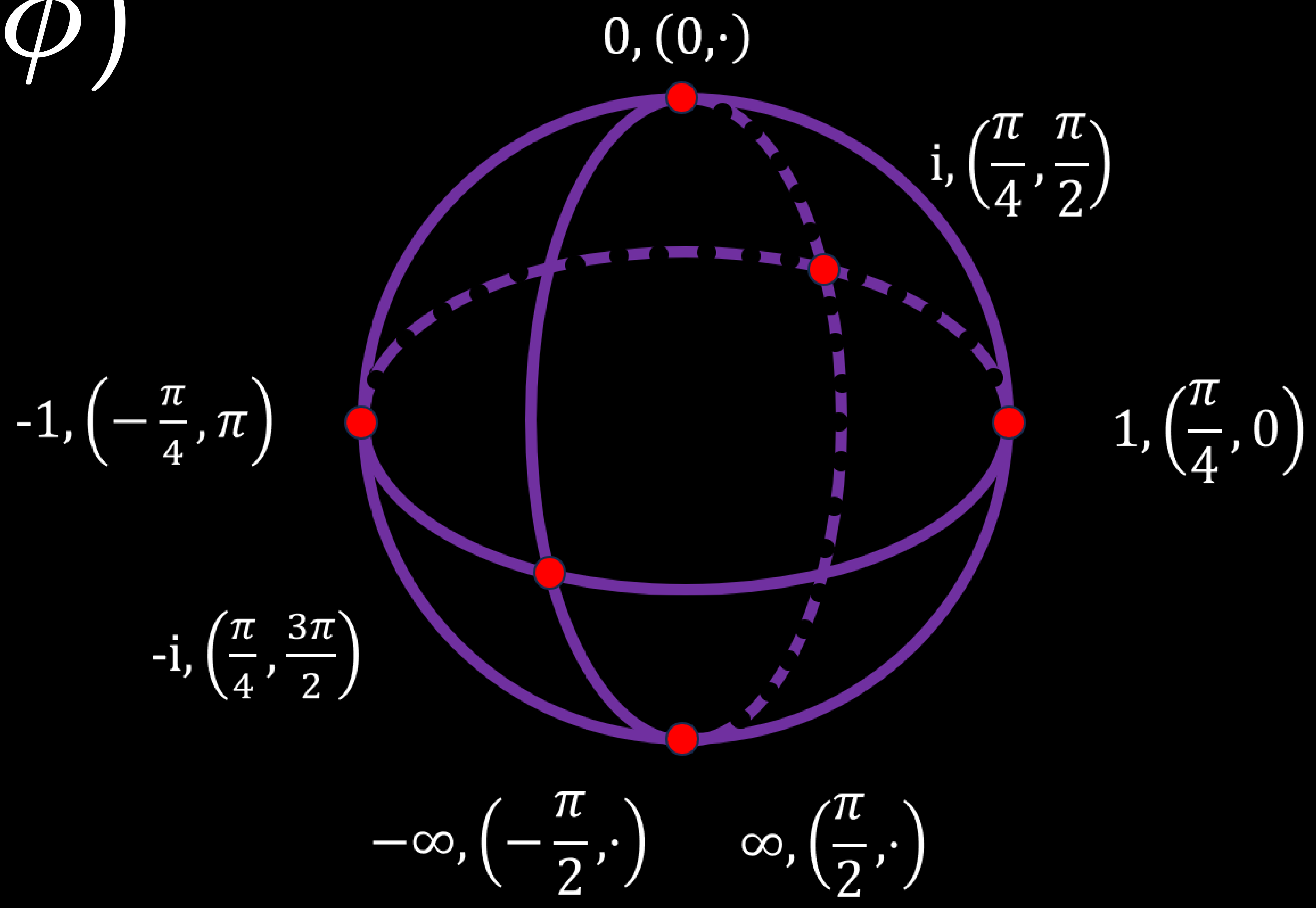
მე-9 სლაიდზე მოცემული სქემის მიხედვით ავაწყოთ ორგანზომილებიანი კომპლექსური წრფივი სივრცის პროექციის ზედაპირი, მაგრამ გავითვალისწინოთ, რომ ვინაიდან კოეფიციენტად ნებისმიერი რიცხვის არჩევა შეგვიძლია, შევარჩიოთ ისეთი კოეფიციენტი, რომ მეორე ელემენტის წარმოსახვითი ნაწილი ნულს გაუტოლდეს.

$$\lambda_c\left[a+ib, c+id\right] \rightarrow \lambda_R\left[a+ib, c+i0\right]$$

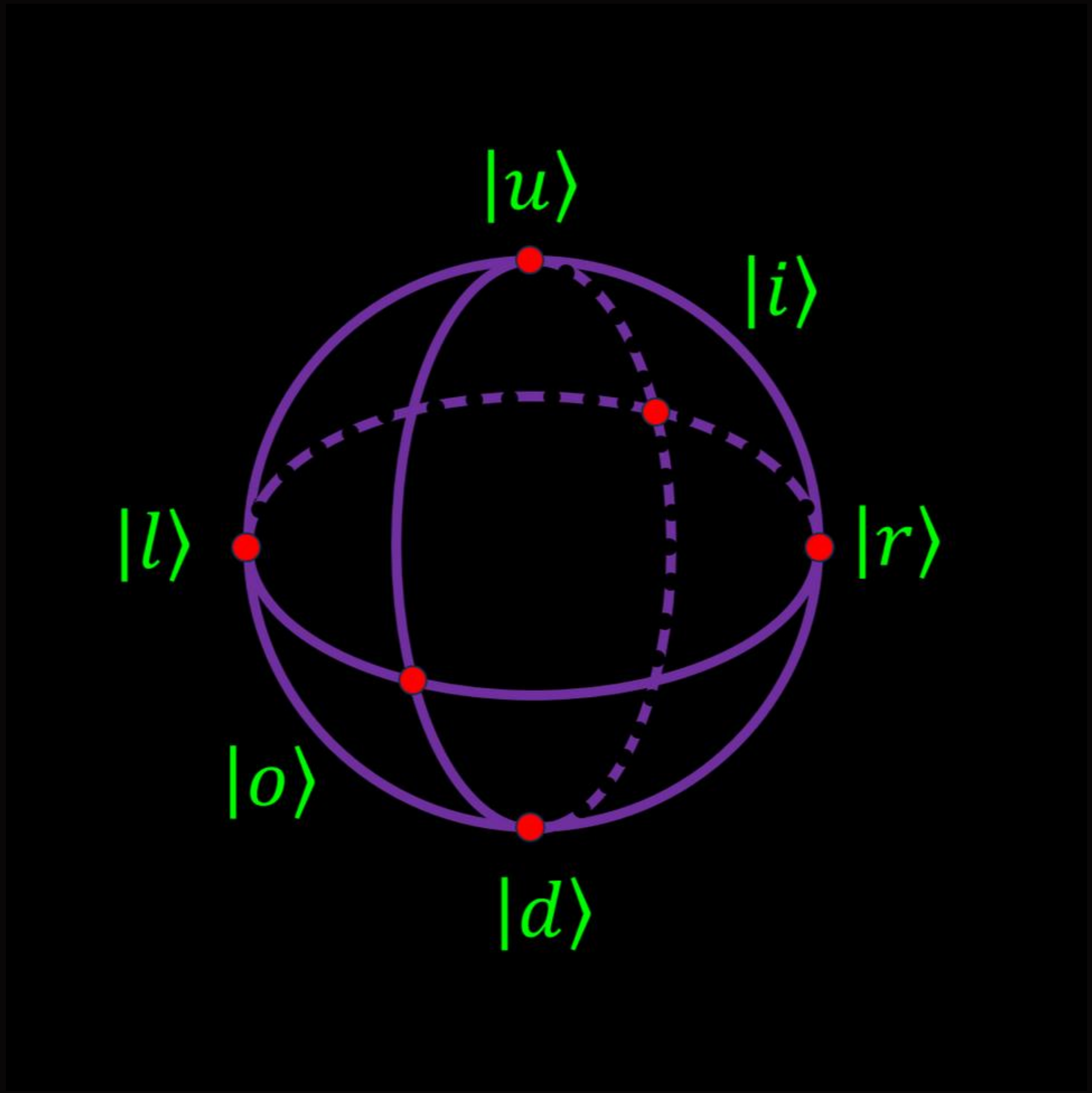


თუ ყურადღებით დავაკვირდებით მივიღებთ შემდეგ სურათს:

$$x^1, (\theta, \phi)$$



სპინის მდგომარეობების გამოსახვა ბლოხის სფეროზე:



ბლოხის სფეროზე გამოსახული სპინის მდგომარეობის სისწორე შეგვიძლია შევამოწმოთ ბორნის წესის გამოყენებით:

$$P\langle\psi|\phi\rangle = \frac{1+cos\theta_p}{2}$$

თუ სპინი იმყოფება ზედა მდგომარეობაში მაშინ კუთხე ნულია და მისი ზედა მდგომარეობაში დაფიქსირების ალბათობაა 100%, თუ იმყოფება მარჯვენა ან მარცხენა მდგომარეობაში, კუთხე არის 90 გრადუსი და ზედა მდგომარეობის დაფიქსირების ალბათობა 50% და ა.შ

გმადლობთ ყურადღებისთვის